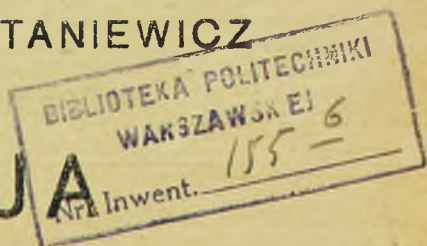


KOMISJA WYDAWNICZA  
TOW. BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

---

Prof. dr. inż. LEON STANIEWICZ



# TEORJA PRĄDÓW ZMIENNYCH

CZĘŚĆ II

(WYKŁADANA W SEM. VI-YM WYDZ. ELEKTRYCZNEGO  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ)

*Piote Binders*



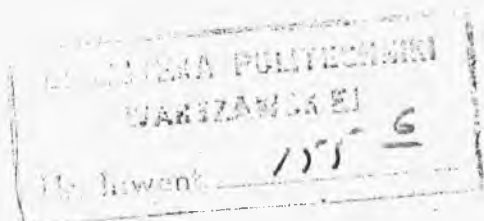
Nr. wyd. 206.

WARSZAWA

Zakłady Graficzne Towarzystwa B. A. BUKATY. Warszawa, Wspólna 46 Telefon 13-05.  
1928.



W S T Ę P .



Przy rozpatrywaniu obwodów elektrycznych zarówno przy prądzie stałym jak i przy prądzie zmiennym zwykle mamy do czynienia z napięciami i natężeniami prądów, których wartości są ustalone, to znaczy, że albo wartości te pozostają stałymi, jak to ma miejsce przy prądzie stałym, albo stają się okresowo zmiennymi funkcjami czasu - przy prądzie zmiennym. Każda zmiana warunków, w których się obwód znajduje, zmiana napięcia u źródła, zmiana oporności lub innej wielkości, wchodzącej w skład obwodu, powoduje zmianę wartości napięć i prądów. Przejście od jednej wartości do drugiej wymaga pewnego czasu, często bardzo małego, ale w ciągu tego czasu mogą zachodzić poważne zakłócenia w obwodzie, wywołujące gwałtowne skoki napięć czyli tak zwane przepięcia, lub znaczny wzrost natężenia prądu - tak zwane przeteżenia. Zjawiska tego rodzaju mogą powodować uszkodzenia w urządzeniach elektrycznych i wobec tego badanie takich zjawisk stanowi zagadnienie nie tylko ciekawe pod względem teoretycznym, lecz również bardzo ważne dla każdego elektrotechnika, mającego do czynienia z większymi urządze-

niami elektrycznymi.

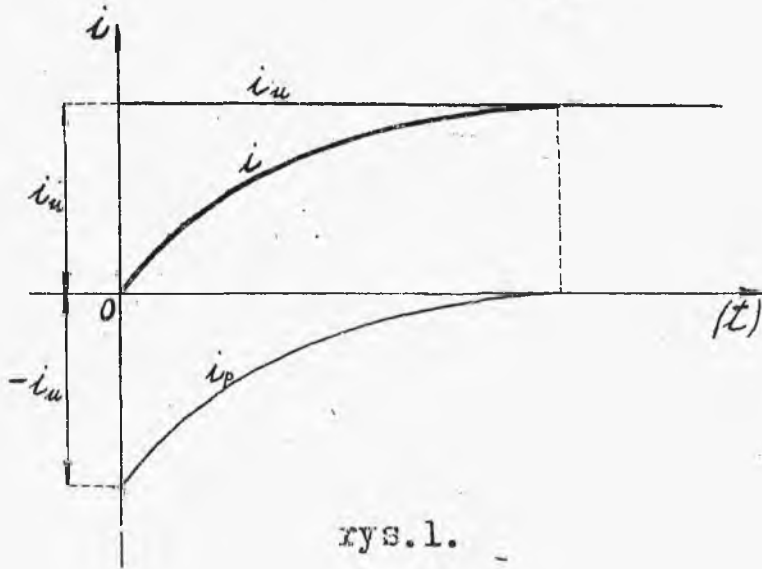
Musimy więc w obwodach elektrycznych odróżniać wartości napięć i prądów w stanie ustalonym oraz w stanie nieustalonym. Przy prądzie stałym będziemy mieli stan ustalony wówczas, gdy napięcia i natężenia prądu w każdej chwili i w każdym miejscu obwodu mają wartości stałe; przy prądzie zmiennym natomiast obie rozpatrywane wielkości w każdym miejscu obwodu są funkcjami czasu i podlegają okresowym zmianom, ale, jeżeli wartości skuteczne, względnie wartości maksymalne napięć i natężeń prądów w dowolnym miejscu obwodu pozostają stałymi, wtedy również mówimy, że obwód jest w stanie ustalonym. Przy wszelkich zmianach, zachodzących w obwodzie, będziemy mieli stan nieustalony, zanim napięcia i natężenia prądów nie osiągną swych granicznych wartości, odpowiadających stanowi ustalonemu. Możemy sobie wyobrazić, że w okresie przejściowym do wartości chwilowych napięć i prądów, odpowiadających stanowi ustalonemu, dodają się pewne przejściowe napięcia i prądy; w ten sposób wartości chwilowe tych wielkości w stanie nieustalonym możemy rozpatrywać jako sumę dwóch wartości chwilowych, które będziemy nazywali odpowiednio wartością ustaloną i wartością przejściową, odróż-

niając je wskaźnikami „u” i „p”, wobec czego będziemy pisali

$$V = V_u + V_p,$$
$$i = i_u + i_p,$$

gdzie  $V$  i  $i$  oznaczają wartości chwilowe napięcia oraz natężenia prądu w stanie nieustalonym.

Po upływie pewnego czasu wartości przejściowe stają się praktycznie równe zerom, wtedy wartości  $V$  i  $i$  otrzymują wartości  $V_u$  i  $i_u$ . Na rys.1 podany jest



przykład takiego ujęcia zjawiska w stanie nieustalonym dla natężenia prądu, wartość którego  $i$  zmienia się

od zera do  $i_u$ . W tym okresie, w dowolnej chwili, wartość  $i$  stanowi sumę wartości  $i_u$  oraz  $i_p$ , przy czym wartości  $i_p$  w tym przykładzie są ujemne, zmieniając się od  $-i_u$  do zera. Znajdywanie wartości ustalonych napięć i prądów dla rozmaitych obwo-

dów było przedmiotem zarówno Podstaw Elektrotechniki, jako też I części Teorii Prądów zmiennych, obecnie będziemy badali obwody w stanie nieustalonym, przyozem najpierw rozpatrzemy obwody, zawierające skupione stałe  $R, L$  i  $C$ , następnie zaś przejdziemy do obwodów z równomiernie rozłożonymi stałkami.

-----

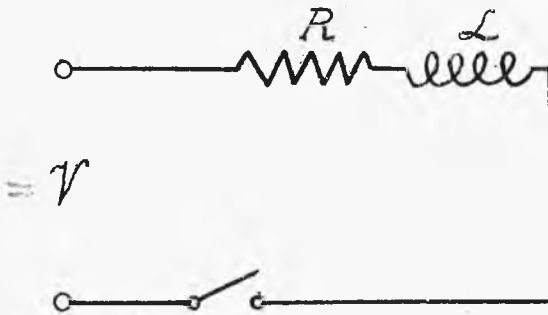
A. OBWODY ZE SKUPIENIAMI  
STAŁEMI.

R O Z D Z I A Ł I.

OBWÓD Z OPORNOŚCIĄ RZECZYWISTĄ I INDUKCYJNOŚCIĄ  
WŁASNĄ.

§ 1. Powstawanie prądu stałego.

Mamy obwód /rys.2/, zawierający zaciski prądu stałego, między którymi istnieje napięcie o stałej wartości  $V$ , na-



rys. 2.

stępnie oporność rzeczywistą  $R$  i indukcyjność własną  $L$ .

W chwili zamknięcia takiego obwodu prądu jeszcze

nie ma ; licząc czas od tej chwili i oznaczając przez  $i$  wartość prądu w dowolnej chwili, będziemy mieli:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V. \quad //$$

Całkujemy najpierw równanie uproszczone

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{di}{i} = - \frac{R}{L} dt$$

$$\lg_n i = - \frac{R}{L} t + \lg_n K,$$

gdzie  $K$  stała dowolna, skąd

$$i = K e^{-\frac{R}{L} t},$$

gdzie  $e$  jest podstawą logarytmów naturalnych.

Całka szczególna równania /1/ oczywiście równa się  $\frac{V}{R}$ , wobec tego całka ogólna tego równania będzie:

$$i = \frac{V}{R} + K e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Dla określenia stałej  $K$  wiemy, że przy  $t=0$ ,  $i=0$ , więc

$$K + \frac{V}{R} = 0,$$

$$K = - \frac{V}{R};$$

wobec tego:

$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$$



Łatwo zauważyć, że w rozpatrywanym obwodzie dla stanu ustalonego natężenie prądu

$$i_u = \frac{V}{R},$$

a ponieważ

$$i = i_u + i_p,$$

więc we wzorze /2/

$$i_p = -\frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = -i_u \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad /3/$$

Ostatni wzór nazywa się wzorem Helmholtz'a;  $\frac{R}{L}$  nazywamy stałą lub współczynnikiem tłumienia, zaś odwrotność, czyli  $\frac{L}{R} = T$  nazywamy stałą czasu; im większe jest  $L$  i im mniejsze  $R$ , tem większa jest stała czasu  $T$ , to znaczy, że więcej czasu potrzeba, aby prąd osiągnął praktycznie swą wartość graniczną.

Przebieg  $i$  oraz  $i_p$  podany jest na rys.1. Teoretycznie, jak widać ze wzoru /3/, prąd przejściowy staje się równym zero przy  $t = \infty$ . W rzeczywistości przy

$$t = \frac{L}{R} = T, \quad i_p = -\frac{i_u}{e} \cong -0,37 i_u;$$

przy  $t = 2T$ ,  $i_p \cong -0,13 i_u$ , przy  $t = 3T$ ,

$$i_p \cong -0,05 i_u.$$

Gdy  $e^{-\frac{R}{L}t} = 0,01$ ,

czyli  $e^{-\frac{t}{T}} = 0,01$ ,  $t = T \lg_n 100 \cong 4,6 T$ ,

wtedy  $i_p = 0,01 i_u$ .

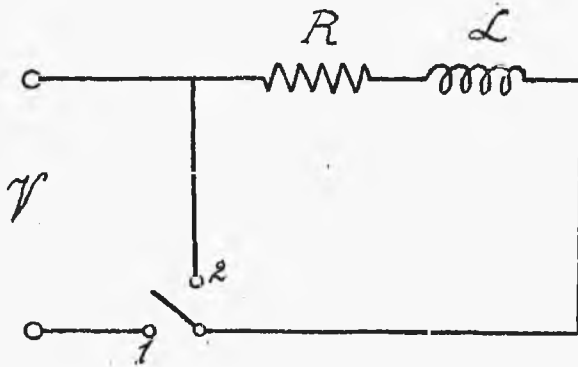
Np., gdy  $\frac{L}{R} = 0,1$ ,

wtedy po upływie czasu 0,46 sec. natężenie prądu przejściowego wyniesie zaledwie 0,01 natężenia prądu ustalonego. W cewkach elektromagnesów  $T$  może dochodzić do 1 sec. np. przy  $L = 11 H$ ,

$R = 11 \Omega$ ,  $T = 1$ , wtedy po upływie 1 sec. prąd przejściowy wyniesie 0,37, po upływie 2 sec. 0,13; po upływie 3 sec. 0,05, a po upływie 4,6 sec. - 0,01 natężenia prądu ustalonego.

## § 2. Zanikanie prądu stałego.

Rozpatrujemy ten sam obwód co poprzednio. Wyobraźmy sobie, że raptownie następuje zwarcie w ten sposób, że tworzy się zamknięty obwód z  $R$  i  $L$  bez napięcia  $V$ , np. przełącznik /rys. 3/ przestawiamy z położenia 1 na 2. Niech takie zwarcie nastąpi w chwili, gdy natężenie prądu w obwodzie wynosiło  $J$  i od tej chwili rozpoczniemy ra-



rys. 3.

$t=0$ ,  $i=J$ , przeto

$$K = J;$$

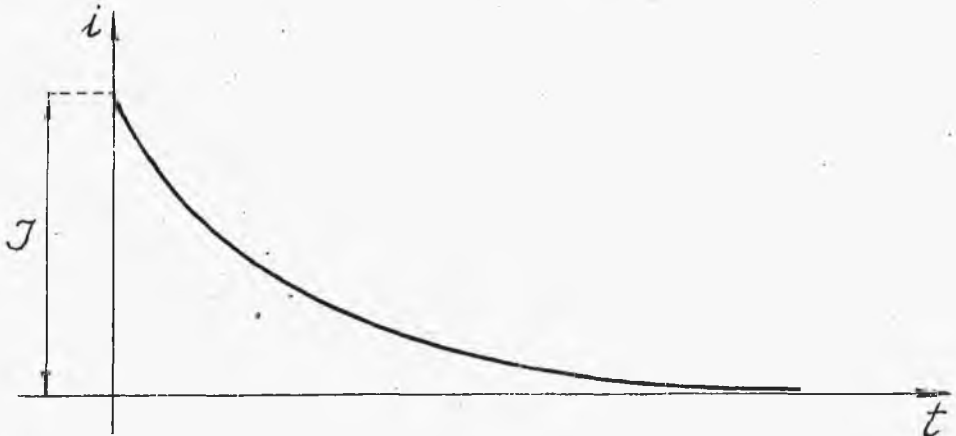
więc

$$i = i_p = J \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

/4/

Widzimy więc, że w takim obwodzie powstanie tylko prąd przejściowy, zanikający, przyczem czas zanikania zależy od współczynnika tłumienia  $\frac{R}{L}$ , względnie od stałej czasu  $T = \frac{L}{R}$ .

Na rys. 4 podany jest przebieg takiego prądu.



rys. 4.

Przy zanikaniu prądu SEM samoindukcji będzie

$$e_s = -L \frac{di}{dt} = Ri = R J e^{-\frac{R}{L}t} = \mathcal{V} e^{-\frac{R}{L}t},$$

czyli nie przekracza wartości  $\mathcal{V}$  napięcia źródła prądu stałego.

### § 3. Zmiana oporności w obwodzie prądu stałego.

Jeżeli w poprzednio rozpatrywanym obwodzie /rys.2/, przy stałym napięciu prądu stałego  $\mathcal{V}$ , oporność zmieni swą wartość od  $R$  do  $R'$ , wtedy prąd ustalony zmieni swą wartość od  $i_u = J = \frac{\mathcal{V}}{R}$  do  $i_u' = J' = \frac{\mathcal{V}}{R'}$ ; dla nowego stanu obwodu będziemy mieli:

$$R' i + L \frac{di}{dt} = \mathcal{V},$$

$$i = J' + \mathcal{K} e^{-\frac{R'}{L}t}.$$

Licząc czas od chwili zmiany oporności  $R$  na oporność  $R'$ , będziemy mieli przy  $t=0$ ,  $i=J$ , więc

$$\mathcal{K} = J - J',$$

$$i = J' + (J - J') e^{-\frac{R'}{L}t},$$

skąd

$$i_p = (J - J') e^{-\frac{R'}{L}t}.$$

Podczas zmiany prądu od wartości  $J$  do wartości  $J'$ , powstaje SEM samoindukcji

$$\begin{aligned} e_s &= -L \frac{di}{dt} = \cancel{L} \frac{(J-J')R'}{\cancel{L}} \cdot e^{-\frac{R'}{L}t} = \\ &= V \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) R' \cdot e^{-\frac{R'}{L}t} = \\ &= V \left( \frac{R'-R}{R} \right) \cdot e^{-\frac{R'}{L}t}. \end{aligned}$$

Oznaczając zmianę oporności  $R'-R=\Delta R$ , będziemy mieli:

$$e_s = \frac{\Delta R}{R} \cdot V \cdot e^{-\frac{R'}{L}t}$$

Jak widać z tego wzoru na wartość SEM samoindukcji przy zmianie oporności wpływa stosunek  $\frac{\Delta R}{R}$ ;  $L$  wpływa tylko na czas tłumienia.

Zrozumiałem jest wobec tego, że w opornikach musimy przechodzić od jednej oporności do drugiej nie odrazu, lecz stopniowo, aby uniknąć raptownego skoku napięcia, spowodowanego SEM samoindukcji.

#### § 4. Powstawanie prądu zmiennego.

Przypuśćmy, że obwód z  $R$  i  $L$  zamknęliśmy w chwili, gdy faza napięcia prądu zmiennego równa jest  $\psi$ , to znaczy przy wartości chwilowej napięcia  $v = V_m \cdot \sin(\omega t + \psi)$ , inaczej dla  $t=0$ ,

$v = V_m \sin \psi$ . Wtedy dla takiego obwodu:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_m \sin(\omega t + \psi);$$

dla prądu przejściowego otrzymamy, jak i poprzednio:

$$i_p = K \cdot e^{-\frac{R}{L}t},$$

zaś prąd ustalony będzie, jak wiadomo,

$$i_u = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

gdzie

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

Wobec tego w stanie nieustalonym

$$i = i_u + i_p = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + K \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Ponieważ przy  $t = 0$ ,  $i = 0$ ,

więc

$$I_m \sin(\psi - \varphi) + K = 0,$$

$$K = -I_m \sin(\psi - \varphi)$$

i wobec tego

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}, \quad /5/$$

$$i_p = -I_m \sin(\psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Z ostatniego wzoru widzimy, że prąd przejściowy jest naogół funkcją malejącą z biegiem czasu; niema

go wcale, czyli ma on wartość zero, gdy  $\psi = \varphi$ , to znaczy wtedy, gdy w chwili zamykania obwodu prąd ustalony przechodzi przez wartość zero, ponieważ przy  $t=0$ ,  $i_u = I_m \sin(\psi - \varphi) = 0$ , natomiast największą wartość będzie miał prąd przejściowy, gdy

$\psi - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ; wtedy przy  $t=0$  bezwzględna wartość największego prądu przejściowego będzie

$\max i_p = I_m$ ; będzie to miało miejsce wówczas, gdy również  $i_u = I_m$ . to znaczy, gdy w chwili zamykania obwodu prąd ustalony przechodzi przez swą największą wartość.

W stanie niustalonym wartość prądu  $i$ , jak to widać ze wzoru /5/, zależy nie tylko od czasu, lecz również od fazy  $\psi$ , którą ma napięcie w chwili zamknięcia obwodu. Największą wartość tego prądu otrzymamy dla takich wartości  $\psi = \psi_0$  oraz  $t = t_0$ , przy których pierwsze pochodne cząstkowe  $i$  względem tych zmiennych stają się równe zero. Dla określenia tych wartości mamy:

$$\left\{ \frac{\partial i}{\partial t} = I_m \omega \cos(\omega t + \psi - \varphi) + I_m \frac{R}{L} \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}, \quad /16/ \right.$$

$$\left. \frac{\partial i}{\partial \psi} = I_m \cos(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}. \quad /17/ \right.$$

Przyrównywując te pochodne do zera i dzieląc obie strony równań przez  $I_m$ , otrzymamy:

$$\omega \cos(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) + \frac{R}{L} \sin(\psi_0 - \varphi) e^{-\frac{R}{L} t_0} = 0, \quad /8/$$

$$\cos(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) - \cos(\psi_0 - \varphi) e^{-\frac{R}{L} t_0} = 0, \quad /9/$$

skąd przez porównanie

$$\frac{R}{\omega L} \sin(\psi_0 - \varphi) e^{-\frac{R}{L} t_0} = -\cos(\psi_0 - \varphi) e^{-\frac{R}{L} t_0},$$

$$\operatorname{tg}(\psi_0 - \varphi) = -\frac{\omega L}{R} = -\operatorname{tg} \varphi;$$

to ostatnie równanie w granicach jednego okresu daje dwie wartości dla  $\psi_0$ :

1/  $\psi_0 - \varphi = -\varphi$ , czyli  $\psi_0 = 0$

2/  $\psi_0 - \varphi = \pi - \varphi$ , "  $\psi_0 = \pi$ .

Dla znalezienia  $t_0$ , podstawiamy do jednego z równań /8/ lub /9/ znalezione wartości  $\psi_0$ . Zarówno dla  $\psi_0 = 0$ , jak i dla  $\psi_0 = \pi$  otrzymamy

$$\cos(\omega t_0 - \varphi) = \frac{R}{\omega L} \sin \varphi \cdot e^{-\frac{R}{L} t_0},$$

lub zamieniając  $\frac{\omega L}{R}$  przez  $\operatorname{tg} \varphi$ ,

$$\cos(\omega t_0 - \varphi) = \cos \varphi \cdot e^{-\frac{R}{L} t_0}. \quad /10/$$



Ponieważ kąt  $\varphi$ , stanowiący wartość bezwzględną przesunięcia fazy prądu względem napięcia w stanie ustalonym, jest mniejszy względnie równy  $\frac{\pi}{2}$ , przeto prawa strona ostatniego wzoru jest większą od zera, względnie równa zeru; wobec tego powinno być

$$\cos(\omega t_0 - \varphi) \geq 0, \quad /11/$$

co w granicach jednego okresu daje:

$$0 \leq \omega t_0 - \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad /12/$$

albo

$$\frac{3}{2}\pi \leq \omega t_0 - \varphi \leq 2\pi. \quad /13/$$

Dla przekonania się, czy określone w ten sposób wartości  $\psi_0$  i  $t_0$  dają maximum lub minimum funkcji  $i$ , musimy obliczyć dla tych wartości drugie pochodne cząstkowe tej funkcji; oznaczając

$$\left| \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right|_{\substack{\psi = \psi_0 \\ t = t_0}} = A; \quad \left| \frac{\partial^2 i}{\partial \psi^2} \right|_{\substack{\psi = \psi_0 \\ t = t_0}} = C;$$

$$\left| \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial \psi} \right|_{\substack{\psi = \psi_0 \\ t = t_0}} = B,$$

będziemy mieli następujące warunki:

-----

przy  $AC - B^2 > 0$ ,  $A$  i  $C < 0$ , -maximum,  
gdy  $AC - B^2 > 0$ ,  $A$  i  $C > 0$ , -minimum.

Na podstawie wzorów /6/ i /7/ znajdujemy:

$$A = -J_m \left[ \omega^2 \sin(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) + \frac{R^2}{L^2} \sin(\psi_0 - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L} t_0} \right].$$

$$C = -J_m \left[ \sin(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) - \sin(\psi_0 - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L} t_0} \right].$$

$$B = -J_m \left[ \omega \sin(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) - \frac{R}{L} \cos(\psi_0 - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L} t_0} \right].$$

Przy uwzględnieniu wzoru /10/ oraz zamieniając  $\frac{\omega L}{R}$  przez  $\operatorname{tg} \varphi$ , otrzymamy dla wartości:  $\psi_0 = 0$   
oraz  $\psi_0 = \pi$

$$A = \pm \frac{J_m \omega^2}{\sin \varphi} \cos \omega t_0,$$

$$C = \mp \frac{J_m}{\cos \varphi} \sin \omega t_0,$$

$$B = \pm \frac{J_m \omega}{\sin \varphi} \cos \omega t_0,$$

gdzie pierwszy znak odpowiada  $\psi_0 = 0$ , drugi -  $\psi_0 = \pi$ .

Dla obu wartości  $\psi_0$

$$AC - B^2 = - \frac{J_m^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t_0 \cdot \cos(\omega t_0 - \varphi)}{\sin^2 \varphi \cos \varphi}.$$

Ponieważ /wzór 9/  $\cos(\omega t_0 - \varphi) > 0$ , więc, aby było możliwe  $AC - B^2 > 0$ , powinno być  $\cos \omega t_0 < 0$ , to znaczy w granicach jednego okresu

$$\frac{\pi}{2} < \omega t_0 < \pi, \quad \text{lub} \quad \pi < \omega t_0 < \frac{3}{2}\pi.$$

Ale w pierwszym wypadku:

dla  $\psi_0 = 0$ ,  $A < 0$  i  $C < 0$  istnieje maximum  
"  $\psi_0 = \pi$ ,  $A > 0$  i  $C > 0$  " minimum,

w drugim wypadku:

dla  $\psi_0 = 0$ ,  $A < 0$ ,  $C > 0$  } nie istnieje ani  
dla  $\psi_0 = \pi$ ,  $A > 0$ ,  $C < 0$  } maximum ani mi-  
nimum.

Wartość prądu  $i$  otrzymamy na podstawie wzoru /5/:

$$\text{dla } \psi = 0, \quad i = I_m \sin(\omega t - \varphi) + I_m \sin \varphi \cdot e^{-\frac{R}{L}t},$$

$$\text{dla } \psi = \pi, \quad i = -I_m \sin(\omega t - \varphi) - I_m \sin \varphi \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

czyli dla obu wartości  $\psi$

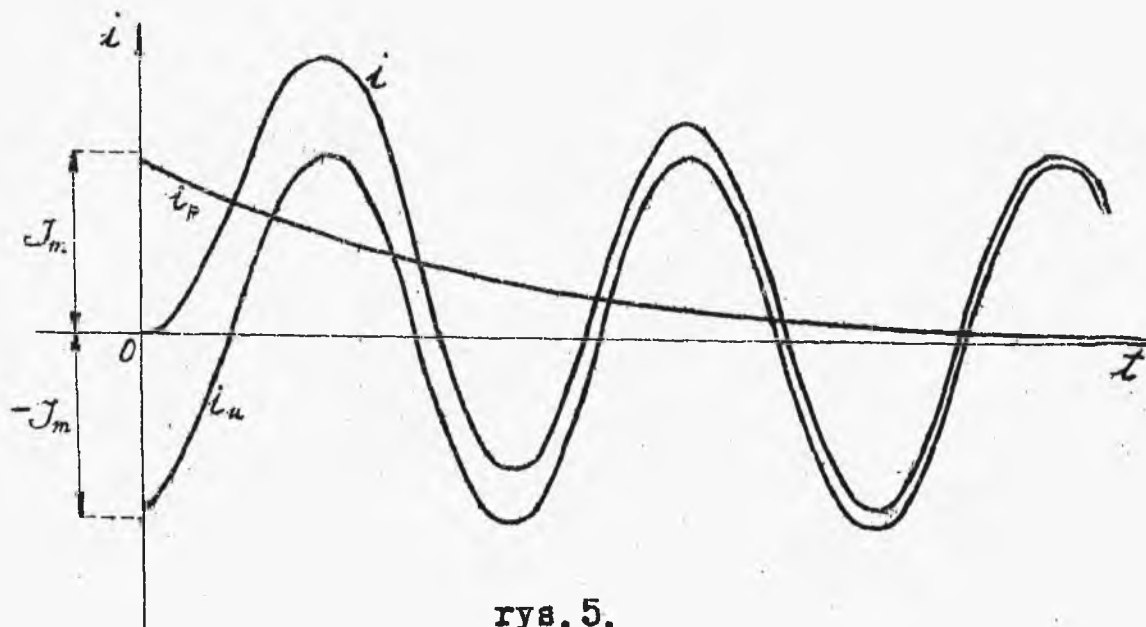
$$i = \pm I_m \left[ \sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \right];$$

największa wartość bezwzględna, która, jak poprzednio stwierdziliśmy, zachodzi dla wartości  $\omega t$ , zawartej pomiędzy  $\frac{\pi}{2}$  i  $\pi$ , w każdym razie jest mniejszą od  $2 I_m$ , gdyż wyraz stojący w nawiasach

jest w tym wypadku mniejszy od 2.

Ostatecznie więc możemy stwierdzić, że w rozpatrywanym obwodzie, przy zamykaniu, może nastąpić wzrost prądu, czyli zjawisko przeteżenia, gdy zamykanie następuje w chwili przejścia napięcia przez wartość 0 /faza 0 lub  $\pi$  /; jednakże największa wartość tego prądu nie może przekroczyć podwójnej wartości prądu ustalonego w danym obwodzie.

Na rys.5 podany jest przebieg prądu przejściowego  $i_p$ , prądu ustalonego  $i_u$ , oraz prądu  $i$  w stanie nieustalonym dla  $\cos\varphi=0,19$ ,  $\frac{R}{L} = 60$ , w wy-



rys. 5.

padku zamknięcia takiego obwodu w chwili gdy napięcie przechodzi przez wartość 0 ( $\psi = 0$ ).

### § 5. Zanikanie prądu zmiennego.

Różnica pomiędzy zjawiskiem zanikania prądu stałego, rozpatrzonym w § 2, a zanikaniem prądu zmiennego, polega tylko na tem, że w chwili zwarcia wartość prądu będzie zależna od fazy napięcia w tej samej chwili. Jeśli bowiem napięcie w chwili zwarcia przechodzi przez fazę  $\psi$ , to znaczy przy  $t=0$ ,  $v = V_m \sin \psi$ , wtedy prąd będzie miał wartość  $i = I_m \cdot \sin(\psi - \varphi)$ . Wobec tego wzór /4/ przyjmie postać

$$i_p = I_m \cdot \sin(\psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L}t};$$

z tego widać, że prąd zanika stopniowo, przyczem w wypadku  $\psi = \varphi$ , to znaczy, gdy prąd w chwili zwarcia przechodzi przez wartość zero, nie powstanie wcale prąd przejściowy.

### § 6. Otwieranie obwodu z uwzględnieniem zmiany oporności na wyłączniku.

Przy otwieraniu obwodu oporność jego w krótkim

zwykle okresie wyłączania wzrasta od pierwotnej wartości  $R$  do wartości bardzo wysokiej, którą praktycznie przyjmujemy jako nieskończenie wielką. Zmiana oporności w zależności od czasu może być w przybliżeniu określona na zasadzie wzoru Aronsa. Według tego wzoru, jeżeli oznaczymy przez  $t_0$  czas użyty na wyłączenie, wartość chwilowa oporności  $R_t$  w chwili  $t$ , to znaczy po upływie  $t$  sekund od chwili rozpoczęcia wyłączania, wynosi

$$R_t = \frac{R}{1 - \frac{t}{t_0}}. \quad /14/$$

Wzór ten daje dla  $t=0$ ,  $R_t=R$ , zaś dla  $t=t_0$ ,  $R_t=\infty$ . Przy takiej zmianie oporności w okresie wyłączania otrzymamy następujące równanie dla obwodu, zawierającego  $R$  i  $L$  przy napięciu prądu stałego, równem  $V$ :

$$i \frac{R}{1 - \frac{t}{t_0}} + L \frac{di}{dt} = V, \quad /15/$$

albo

$$\frac{di}{dt} + \frac{R t_0}{L(t_0 - t)} i = \frac{V}{L}.$$

Dla scałkowania tego równania zakładamy

$$i = x \cdot y, \quad /16/$$

gdzie  $x$  i  $y$  są funkcjami  $t$  ; wtedy:

$$x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt} + \frac{R t_0}{L(t_0 - t)} xy = \frac{V}{L},$$

$$x \left[ \frac{dy}{dt} + \frac{R t_0}{L(t_0 - t)} y \right] + y \frac{dx}{dt} = \frac{V}{L}; \quad /17/$$

funkcję  $y$  wybieramy w ten sposób, aby

$$\frac{dy}{dt} + \frac{R t_0}{L(t_0 - t)} y = 0,$$

czyli

$$\frac{dy}{y} = - \frac{R t_0}{L t_0 - t} dt;$$

jedno z rozwiązań daje

$$\lg y = \frac{R}{L} t_0 \lg(t_0 - t) = \lg(t_0 - t)^{\frac{R}{L} t_0},$$

skąd

$$y = (t_0 - t)^{\frac{R}{L} t_0}. \quad /18/$$

Zakładając taką wartość  $y$  do wzoru /17/, otrzymamy:

$$(t_0 - t)^{\frac{R}{L} t_0} \frac{dx}{dt} = \frac{V}{L},$$

skąd

$$dx = \frac{V}{L} \frac{dt}{(t_0 - t)^{\frac{R}{L} t_0}}.$$

Dla określenia  $x$  przez całkowanie musimy rozpatrzeć 2 wypadki:

$$1/ \frac{R}{L} t_0 \gg 1; \quad 2/ \frac{R}{L} t_0 = 1.$$

W wypadku 1/ będziemy mieli

$$x = - \frac{\mathcal{V}}{L} \frac{(t_0 - t)^{-\frac{R}{L} t_0 + 1}}{-\frac{R}{L} t_0 + 1} + \mathcal{K},$$

gdzie  $\mathcal{K}$  stała dowolna, albo po uproszczeniu

$$x = \frac{\mathcal{V}}{R t_0 - L} (t_0 - t)^{1 - \frac{R}{L} t_0} + \mathcal{K}. \quad /19/$$

Przyjmując wartości dla  $x$  i  $y$  ze wzorów /19/ i /18/, otrzymamy ze wzoru /16/

$$i = \mathcal{K} (t_0 - t)^{\frac{R}{L} t_0} + \frac{\mathcal{V}}{R t_0 - L} (t_0 - t). \quad /20/$$

Stałą  $\mathcal{K}$  określimy z warunku, że w chwili rozpoczęcia wyłączania prąd miał pewną wartość  $J$ , to znaczy przy  $t=0$ ,  $i=J$ , wtedy ze wzoru /20/ otrzymamy:

$$\mathcal{K} \cdot t_0^{\frac{R}{L} t_0} + \frac{\mathcal{V}}{R t_0 - L} t_0 = J,$$

skąd

$$\mathcal{K} = \left( J - \frac{\mathcal{V} t_0}{R t_0 - L} \right) t_0^{-\frac{R}{L} t_0}.$$



Wobec tego ze wzoru /20/ będziemy mieli

$$i = \left( J - \frac{V t_0}{R t_0 - L} \right) (t_0 - t)^{\frac{R}{L} t_0} \cdot t_0^{-\frac{R}{L} t_0} + \frac{V}{R t_0 - L} (t_0 - t) =$$
$$= \left( J - \frac{V t_0}{R t_0 - L} \right) \left( \frac{t_0 - t}{t_0} \right)^{\frac{R}{L} t_0} + \frac{V}{R t_0 - L} (t_0 - t) \quad /21/$$

W wypadku 2-im otrzymujemy przez całkowanie

$$x = -\frac{V}{L} \lg_n (t_0 - t) + K;$$

wobec tego

$$i = K/(t_0 - t) - \frac{V}{L} (t_0 - t) \lg_n (t_0 - t) = (t_0 - t) \left[ K - \frac{V}{L} \lg_n (t_0 - t) \right]$$

Określamy stałą  $K$ , zakładając  $t=0$ ,  $i=J$ ,  
wtedy

$$t_0 \left( K - \frac{V}{L} \lg_n t_0 \right) = J,$$

$$K = \frac{J}{t_0} + \frac{V}{L} \lg_n t_0.$$

$$i = (t_0 - t) \left[ \frac{J}{t_0} + \frac{V}{L} \lg_n t_0 - \frac{V}{L} \lg_n (t_0 - t) \right] =$$

$$= (t_0 - t) \left( \frac{J}{t_0} + \frac{V}{L} \lg_n \frac{t_0}{t_0 - t} \right). \quad /22/$$

Prąd  $J$ , który mamy we wzorach /21/ i /22/, stanowi prąd w chwili rozpoczęcia wyłączania, to znaczy przy  $t=0$ . Prąd ten może być prądem ustalonym lub też niestalonym. Dla prądu ustalonego

$J = \frac{V}{R}$ , wówczas ze wzorów /21/ i /22/ otrzymamy dla  $\frac{R}{L}t_0 \gg 1$ :

$$i = J \left(1 - \frac{t_0}{t_0 - \frac{L}{R}}\right) \left(\frac{t_0 - t}{t_0}\right)^{\frac{R}{L}t_0} + J \frac{t_0 - t}{t_0 - \frac{L}{R}} =$$
$$= J \left[ \frac{t_0 - t}{t_0 - \frac{L}{R}} - \frac{L}{(Rt_0 - L)} \left(\frac{t_0 - t}{t_0}\right)^{\frac{R}{L}t_0} \right], \quad /23/$$

zaś dla  $\frac{R}{L}t_0 = 1$ :

$$i = J(t_0 - t) \left( \frac{1}{t_0} + \frac{R}{L} \lg \frac{t_0}{t_0 - t} \right). \quad /24/$$

Oporność na wyłączniku w czasie wyłączania będzie:

$$R_t - R = \frac{R}{1 - \frac{t}{t_0}} - R = \frac{Rt}{t_0 - t},$$

zaś napięcie na wyłączniku w chwili  $t$  wyniesie

$$v_w = i \frac{Rt}{t_0 - t};$$

dla  $\frac{R}{L}t_0 \gg 1$ , biorąc wartość  $i$  ze wzoru /23/ i zamieniając  $J$  przez  $\frac{V}{R}$ , otrzymamy:

$$v_w = \mathcal{V} \frac{t - \frac{\mathcal{L}}{R} \frac{t}{t_0} \left( \frac{t_0 - t}{t_0} \right)^{\frac{R}{\mathcal{L}} t_0 - 1}}{t_0 - \frac{\mathcal{L}}{R}} \quad /25/$$

Dla  $\frac{R}{\mathcal{L}} t_0 = 1$ , na podstawie wzoru /22/

$$v_w = \mathcal{V} t \left( \frac{1}{t_0} + \frac{R}{\mathcal{L}} \lg_n \frac{t_0}{t_0 - t} \right). \quad /26/$$

Zbadajmy teraz wzory /25/ i /26/, określając z nich wartość napięcia na wyłączniku w końcu wyłączenia, to znaczy dla  $t = t_0$ . Oznaczając to napięcie przez  $\mathcal{V}_w$ , otrzymamy:

w wypadku, gdy  $\frac{R}{\mathcal{L}} t_0 - 1 > 0$  ze wzoru /25/

$$1) \mathcal{V}_w = \mathcal{V} \frac{t_0}{t_0 - \frac{\mathcal{L}}{R}} = \frac{\mathcal{V} \cdot \frac{R}{\mathcal{L}} t_0}{\frac{R t_0}{\mathcal{L}} - 1}, \quad /27/$$

czyli  $\mathcal{V}_w > \mathcal{V}$ , lecz ma pewną wartość skończoną.

W wypadku, gdy  $\frac{R}{\mathcal{L}} t_0 - 1 < 0$  z tegoż wzoru /25/ będziemy mieli:

$$1) \mathcal{V}_w = \mathcal{V} \frac{t_0 - \infty}{t_0 - \frac{\mathcal{L}}{R}} = -\infty;$$

w wypadku, gdy  $\frac{R}{\mathcal{L}} t_0 - 1 = 0$ , ze wzoru /26/ otrzymamy:

$$V_w = V t_0 \left( \frac{1}{t_0} + \frac{R}{L} \lg_n \frac{t_0}{0} \right) = V + \infty = \infty.$$

Napięcie zatem na wyłączniku staje się zawsze większem, niż napięcie z zewnątrz przyłożone. Teoretycznie w dwóch ostatnich wypadkach wartość napięcia otrzymuje się nieskończenie wielka; w rzeczywistości, w tych wypadkach tworzy się iskra, trwająca tak długo, aż  $\frac{R}{L} t_0 - 1$  staje się większem od 0. Praktycznie zatem zawsze  $\frac{R}{L} t_0 > 1$  i najmniejszy okres czasu, po upływie którego następuje zupełne otwarcie obwodu, zależy od stosunku  $\frac{L}{R}$ ; powinno być:

$$t_0 > \frac{L}{R};$$

np. gdy  $L = 1 \text{ mH} = 0,001 \text{ H}$ ,  $R = 0,1 \Omega$

$$t_0 > 0,01 \text{ sec.}$$

Jeżeli wyłączymy obwód np. w ciągu  $t_0 = \frac{1}{80} \text{ sec}$ , wtedy na podstawie wzoru /27/ otrzymamy na wyłączniku napięcie:

$$V_w = V \cdot \frac{\frac{1}{80}}{\frac{1}{80} - \frac{1}{100}} = 5V,$$

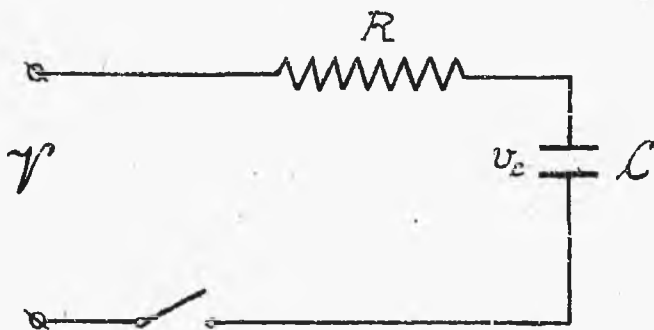
czyli 5 razy większe od napięcia źródła.

R O Z D Z I A Ł    I I .

OBWÓD Z OPORNOŚCIĄ RZECZYWISTĄ I POJEMNOŚCIĄ.

§ 1. Ładowanie kondensatora prądem stałym.

Rozpatrzmy obwód /rys.6/, zawierający zaciski prądu stałego, między którymi napięcie wynosi  $\mathcal{V}$ , następnie oporność rzeczywistą  $R$  oraz kondensator o pojemności  $C$ . Licząc czas od chwili zam-



rys. 6.

knięcia takiego obwodu i oznaczając wartość chwilową napięcia na kondensatorze przez  $v_c$  oraz przez  $i$  natężenie

prądu w stanie nieustalonym, będziemy mieli na zasadzie wzorów, znanych z Podstaw Elektrotechniki:

$$Ri + v_c = \mathcal{V}, \quad /1/$$

$$i = C \frac{dv_c}{dt}, \quad /2/$$

przyczem dla  $t=0$ ,  $v_c=0$ .

Z równań /1/ i /2/ otrzymujemy:

$$RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = \mathcal{V}^P,$$

$$\frac{dv_c}{v_c - \mathcal{V}^P} = -\frac{dt}{RC},$$

$$\lg_n(v_c - \mathcal{V}^P) = -\frac{t}{RC} + \lg_n K,$$

gdzie  $K$  stała dowolna; wreszcie:

$$v_c - \mathcal{V}^P = K e^{-\frac{t}{RC}},$$

$$v_c = \mathcal{V}^P + K e^{-\frac{t}{RC}}$$

Zakładając w tym wzorze  $t=0$ ,  $v_c=0$ , znajdujemy:

$$K = -\mathcal{V}^P,$$

wobec czego:

$$v_c = \mathcal{V}^P - \mathcal{V}^P e^{-\frac{t}{RC}},$$

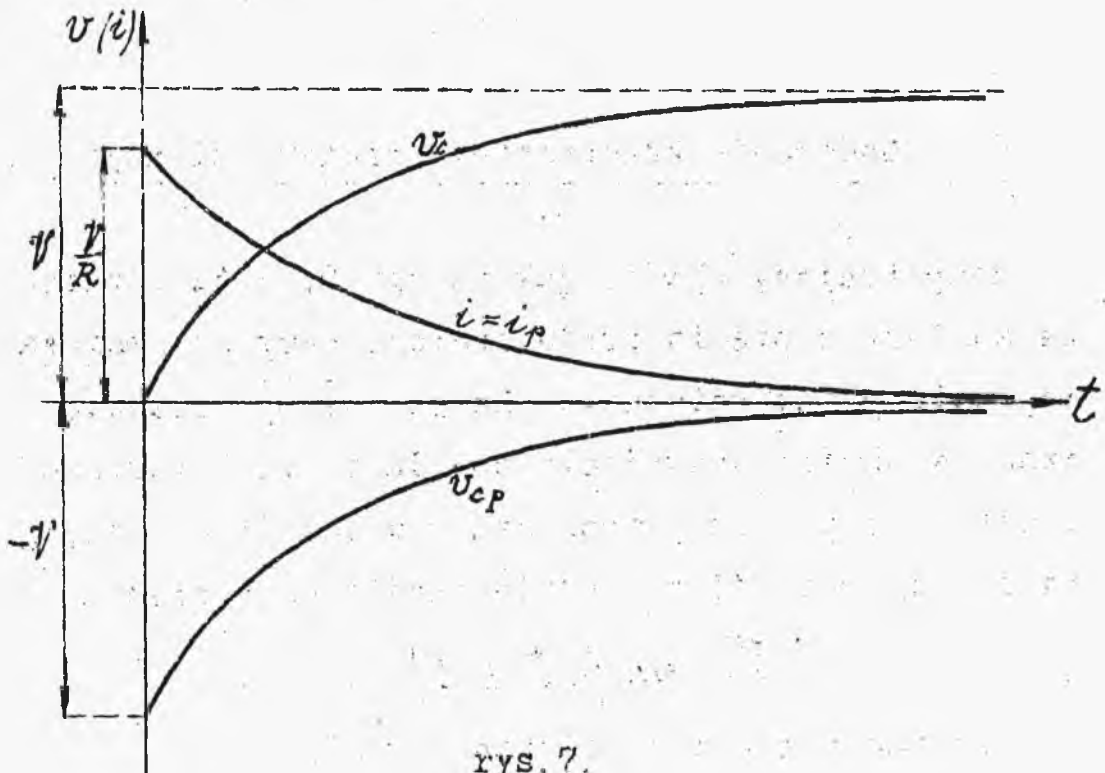
$$i = C \frac{dv_c}{dt} = \frac{\mathcal{V}^P}{R} e^{-\frac{t}{RC}};$$

ponieważ w stanie ustalonym napięcie na kondensatorze będzie równe  $\mathcal{V}^P$ , zaś prądu wcale nie będzie, przeto dla wartości przejściowych otrzymujemy:

$$\begin{cases} v_{cp} = -V e^{-\frac{t}{RC}}, \\ i_p = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \end{cases}$$

Widzimy, że obie te wielkości maleją stopniowo z biegiem czasu;  $RC$  stanowi w tym wypadku stałą czasu  $T$ , od wartości której zależy okres czasu potrzebny, aby napięcie i prąd osiągnęły praktycznie swe wartości graniczne, to znaczy, aby nastąpił stan ustalony obwodu.

Na rys. 7 pokazany jest przebieg napięcia i prądu po zamknięciu obwodu, czyli w czasie ładowania



rys. 7.

kondensatora prądem stałym.

Ponieważ wzory, wyprowadzone dla wartości przejściowych napięcia na kondensatorze oraz prądu, ładującego kondensator, są analogiczne do wzoru, wyprowadzonego dla prądu przejściowego w obwodzie, zawierającym oporność rzeczywistą i indukcyjność /Rozdział I, § 1, wzór /3/ /, przeto możemy wyprowadzić tutaj takie same wnioski co do zanikania napięć i prądów, a mianowicie po upływie czasu  $T=RC$  wartości przejściowe spadną do 0,37; po upływie  $2T$  do 0,13, a po upływie  $3T$  do 0,05 swej pierwotnej wartości i t.d.

## § 2. Ładowanie kondensatora prądem zmiennym.

Rozpatrujemy obwód, jak na rys. 6, z tą różnicą, że zamiast napięcia prądu stałego mamy na zaciskach napięcie prądu zmiennego. Rozpocznijmy liczenie czasu w chwili zamknięcia obwodu i niech wartość chwilowa napięcia przechodzi wówczas przez fazę  $\psi$ , to znaczy wartość ta będzie określona wzorem:

$$v = V_m \cdot \sin(\omega t + \psi).$$

Dla takiego obwodu będziemy mieli:



$$Ri + v_c = V_m \sin(\omega t + \psi), \quad /3/$$

a ponieważ

$$i = C \frac{dv_c}{dt};$$

przeto

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{RC} v_c = \frac{V_m}{RC} \sin(\omega t + \psi). \quad /4/$$

Rozwiązujemy najpierw równanie uproszczone

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{RC} v_c = 0,$$

$$\frac{dv_c}{v_c} = - \frac{dt}{RC},$$

skąd

$$\lg_n v_c = - \frac{t}{RC} + \lg_n K,$$

gdzie  $K$  stała dowolna, i ostatecznie

$$v_c = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Łatwo zauważyć, iż otrzymana wartość  $v_c$  stanowi wartość przejściową, więc możemy napisać

$$v_{cp} = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad /5/$$

Całkę szczególną równania /4/, która daje nam napięcie ustalone, moglibyśmy znaleźć na podstawie znanych metod matematycznych; prędzej ją znajdziemy, rozumując w sposób następujący.

Z Podstaw Elektrotechniki wiemy, że w rozpatrywanym obwodzie powstaje prąd ustalony o wartości

$$i_u = I_m \sin(\omega t + \psi + \varphi), \quad 16/$$

przyśpieszony w fazie względem napięcia na zaciskach źródła o kąt  $\varphi$ , przy czym

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{1}{R\omega C},$$

zaś

$$I_m = \frac{V_m}{Z}, \quad \text{gdzie } Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

następnie wiemy również, że napięcie na pojemności /kondensatorze/ równe jest iloczynowi prądu przez oporność pojemnościową i że to napięcie względem prądu jest opóźnione o kąt prosty. W ten sposób dla stanu ustalonego mamy:

$$\begin{aligned} v_{cu} &= I_m \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \sin\left(\omega t + \psi + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -\frac{V_m}{Z\omega C} \cdot \cos(\omega t + \psi + \varphi). \quad 17/ \end{aligned}$$

Dodając do siebie wartości przejściową i ustaloną napięcia na kondensatorze, otrzymamy napięcie w stanie niestabilnym:

$$v_c = v_{cp} + v_{cu} = K e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{V_m}{Z\omega C} \cdot \cos(\omega t + \psi + \varphi).$$

Zakładając w tym wzorze  $t=0$ ,  $v_c=0$ , otrzymamy

$$K = \frac{V_m}{L\omega C} \cos(\psi + \varphi) \quad /8/$$

wobec czego

$$v_c = \frac{V_m}{L\omega C} [\cos(\psi + \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} - \cos(\omega t + \psi + \varphi)] \quad /9/$$

Łatwo jest zauważyć, że wyraz stojący w nawiasach nie może być większy od dwóch, gdyż

$$\begin{aligned} |\cos(\psi + \varphi)| &\leq 1, \\ |\cos(\omega t + \psi + \varphi)| &\leq 1, \\ e^{-\frac{t}{RC}} &\leq 1, \end{aligned}$$

wobec tego

$$\max v_c = \frac{2 V_m}{L\omega C},$$

a ponieważ  $\frac{V_m}{L\omega C}$  stanowi napięcie na kon-

densatorze w stanie ustalonym, przeto przyszedliśmy do wniosku, że w stanie nieustalonym napięcie na kondensatorze nie może przekroczyć podwójnej wartości napięcia, które mamy w stanie ustalonym.

Na podstawie wzoru /5/ po uwzględnieniu /8/ mamy:

$$v_{cp} = \frac{V_m}{L\omega C} \cos(\psi + \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}; \quad /10/$$

stąd znajdujemy prąd przejściowy

$$i_p = C \frac{dv_{cp}}{dt} = - \frac{V_m}{L} \frac{1}{R\omega C} \cdot \cos(\psi + \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{RC}};$$

ponieważ

$$\frac{V_m}{L} = I_m, \quad \frac{1}{R\omega C} = \operatorname{tg} \varphi,$$

więc

$$i_p = -I_m \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos(\psi + \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad /11/$$

Dodając do siebie wartości prądów ze wzorów /6/ i /11/, otrzymamy prąd w stanie nieustalonym

$$i = i_u + i_p = I_m \sin(\omega t + \psi + \varphi) - I_m \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}} \quad /12/$$

Łatwo stwierdzić ze wzorów /10/ i /11/, że nie będziemy mieli ani napięcia przejściowego, ani prądu przejściowego, gdy  $\psi + \varphi = \frac{\pi}{2}$ .

Dla  $t=0$  wzór /12/ daje

$$i = I_m [\sin(\psi + \varphi) - \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos(\psi + \varphi)] = \frac{I_m}{\cos \varphi} \sin \psi;$$

największą wartość prądu w tym wypadku otrzymamy wtedy, gdy  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , to znaczy, gdy w chwili zamknięcia obwodu napięcie przechodzi przez wartość maksy-

malną; wtedy

$$\max i = \frac{I_m}{\cos \varphi} = \frac{Z}{R} I_m.$$

Przy małym  $\cos \varphi$ , czyli przy małej oporności rzeczywistej w porównaniu do oporności pojemnościowej, prąd  $i$  może w znacznym stopniu przewyższać prąd, który pozostaje w stanie ustalonym, a chociaż tego rodzaju przeteżenie trwa nadzwyczaj mały okres czasu, ltem niemniej w wielu wypadkach wskazaniem jest włączanie dodatkowych oporników do czasu ustalenia się prądu, lub stopniowe zwiększanie napięcia, działającego w obwodzie. -

Dla przykładu weźmiemy

$$R = 1 \Omega, C = 1 \mu F, f = 50 \frac{\text{okr}}{\text{sek.}}$$

Wtedy

$$Z = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{314 \cdot 10^{-6}}\right)^2} = 3185 \Omega,$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{1}{3185}.$$

Dla  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  oraz  $t = 0$ ,  $\max i = 3185 I_m$ .

Prąd przejściowy w tej chwili ma wartość  $3184 I_m$ . Stała czasu  $T = RC = 10^{-6} \text{ sec}$ . Wartość prądu przejściowego spadnie do wartości  $I_m$  po upływie czasu  $t_0$ , gdy

$$e^{-10^6 t_0} = \frac{1}{3184},$$

czemu odpowiada  $t_0 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$ .

Do wartości  $0,001 I_m$  prąd przejściowy spadnie już po upływie  $15 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$ .

### § 3 Wyładowanie kondensatora.

Jeżeli rozpatrzmy obwód, zawierający oporność rzeczywistą i kondensator, który w pewnej chwili zostaje zwarty w ten sposób, że ładunek znajdujący się na kondensatorze stanowi jedyne źródło energii elektrycznej, wówczas następuje wyładowanie kondensatora. Oznaczmy wartość napięcia na kondensatorze w chwili takiego zwarcia przez  $v_c$ , niezależnie od tego, czy to napięcie powstało od prądu stałego lub zmiennego, zaś wartość chwilową napięcia po zwarcu przez  $v_c$  oraz prądu, powstającego przy wyładowaniu kondensatora przez  $i$ . Będziemy mieli dla takiego obwodu

$$Ri = v_c,$$

a ponieważ  $i = -C \frac{dv_c}{dt}$ , więc

$$RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = 0,$$

skąd, jak poprzednio,

$$v_c = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Zakładając  $t=0$ ,  $v_c = V_c$ , będziemy mieli

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= V_c, \\ v_c &= V_c \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

Prąd wyładowania, mający kierunek odwrotny do kierunku prądu ładowania, otrzymamy w postaci:

$$i = -C \frac{dv_c}{dt} = \frac{V_c}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Widzimy więc, że w rozpatrywanym obwodzie zarówno napięcie na kondensatorze, jak też i prąd wyładowania, maleją stopniowo z biegiem czasu. Prędkość zanikania napięcia i prądu zależy od wartości stałej czasu  $T = RC$ .

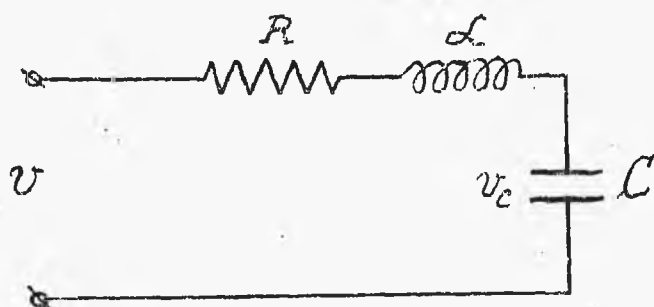
### R O Z D Z I A Ⅲ.

#### OBWÓD Z OPORNOŚCIĄ RZECZYWISTĄ, INDUKCYJNOŚCIĄ I POJEMNOŚCIĄ.

##### § 1. Całka ogólna równania dla takiego obwodu.

Rozpatrując obwód, jak na rys. d, będziemy mieli w każdej chwili:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + v_c = v. \quad //1//$$



$$i = C \frac{dv_c}{dt}; \quad /2/$$

podstawiamy /2/  
do /1/, wtedy

rys. 8.

albo

$$RC \frac{dv_c}{dt} + LC \frac{d^2 v_c}{dt^2} + v_c = v,$$

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{LC} v_c = \frac{1}{LC} v; \quad /3/$$

$v$  może być napięciem o wartości stałej lub zmiennej.

Przy rozwiązywaniu równania /3/ przedewszystkiem musimy znaleźć całkę ogólną równania uproszczonego

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{LC} v_c = 0, \quad /4/$$

następnie musimy wyszukać całkę szczególną równania /3/ i obie te znalezione całki dodać do siebie, wówczas otrzymamy całkę ogólną równania /3/.

Przypomnijmy, że równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach typu

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

rozwiązać możemy w ten sposób, że piszemy algebraiczne równanie charakterystyczne

$$k^2 + p_1 k + p_2 = 0,$$



które po rozwiązaniu może dać pierwiastki

1/  $k_1$  i  $k_2$  - rzeczywiste i różne,

2/  $k_1 = k_2 = k_0$  " i równe,

3/  $k_1 = m + nj$ ,  $k_2 = m - nj$ , /gdzie  $j = \sqrt{-1}$  /,

w postaci liczb zespolonych sprzężonych.

Całki takiego równania będą w tych wypadkach:

$$1/ y = A_1 e^{k_1 x} + A_2 e^{k_2 x}, \quad 15/$$

$$2/ y = e^{k_0 x} (A_1 + A_2 x), \quad 16/$$

$$3/ y = e^{mx} (A_1 \sin nx + A_2 \cos nx), \quad 17/$$

gdzie  $A_1$  i  $A_2$  stałe dowolne.

Na tej podstawie, rozwiązując równanie /4/, napiszemy równanie charakterystyczne w postaci:

$$k^2 + \frac{R}{2L} k + \frac{1}{LC} = 0,$$

skąd

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \quad 18/ \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad 19/ \end{array} \right.$$

Oczywiście w zależności od tego, czy podpierwiastkowa jest większa od zera, równa zera lub mniejsza od zera, otrzymamy każdy z 3-oh rozpatrzonych wypadków, a więc przy

$R > 2\sqrt{\frac{d}{c}}$  pierwiastki będą rzeczywiste " i różne,  
 $R = 2\sqrt{\frac{d}{c}}$  " " " i równe,  
 $R < 2\sqrt{\frac{d}{c}}$  " " liczbami zespo-  
lonemi sprzężonemi.

Wypadek I.

$$R > 2\sqrt{\frac{d}{c}}.$$

Łatwo zauważyć, że oba pierwiastki  $k_1$  i  $k_2$  z wzorów /8/ i /9/ mają wartości ujemne, przy czym wartość bezwzględna pierwiastka  $k_2$  jest większa od wartości bezwzględnej pierwiastka  $k_1$ ; oznaczając te wartości bezwzględne przez  $a_1$  i  $a_2$ , czyli zakładając

$$k_1 = -a_1,$$

$$k_2 = -a_2$$

gdzie  $a_1$  i  $a_2$  stanowią liczby dodatnie, przy czym  $a_2 > a_1$ , możemy na podstawie wzoru /5/ napisać

$$v_c = A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t}. \quad /10/$$

Wypadek II:

$$R = 2\sqrt{\frac{d}{c}}$$

Jak widać ze wzorów /8/ i /9/

$$k_1 = k_2 = -\frac{R}{2L} = -a,$$

gdzie  $a = \frac{R}{2L}$  jest liczbą dodatnią.

Na podstawie wzoru /6/ będziemy mieli

$$v_c = e^{-at} (A_1 + A_2 t). \quad /11/$$

Wypadek III:

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Pierwiastki ze wzorów /8/ i /9/ możemy wówczas przepisać w postaci:

$$k_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot \sqrt{-1},$$

$$k_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot \sqrt{-1};$$

oznaczając

$$\frac{R}{2L} = \alpha,$$

$$\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \beta, \quad \sqrt{-1} = j,$$

będziemy mieli

$$k_1 = -\alpha + j\beta,$$

$$k_2 = -\alpha - j\beta,$$

wobec tego na podstawie wzoru /7/ otrzymamy:

$$v_c = e^{-\alpha t} (A_1 \sin \beta t + A_2 \cos \beta t). \quad /12/$$

## § 2. Wyladowanie kondensatora aperiodyczne.

Rozpatrzmy wypadek, gdy w naszym obwodzie /rys.8/,  $R$ ,  $L$  i  $C$  w pewnej chwili zostały zwarte pomimo zewnętrznego napięcia. Wtedy nastąpi wyladowanie kondensatora, posiadającego w początkowej chwili napięcie o określonej wartości np.  $V_0$ . Będziemy mieli obwód, w którym zewnętrzne napięcie  $v=0$ , zaś prąd płynący będzie prądem wyladowania kondensatora, którego kierunek jest przeciwny do kierunku prądu, płynącego przedtem od zewnętrznego źródła. Dla takiego obwodu będziemy mieli przy  $t=0$ ,  $v_c = V_0$ ,  $i=0$ ,

/13/

$$i = -C \frac{dv_c}{dt}. \quad /14/$$

Wobec tego, że  $v=0$ , zamiast równania /3/ będziemy mieli równanie /4/, dla którego mamy już znalezione całki ogólne, a więc

w wypadku I, według wzoru /10/

$$v_c = A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t},$$

skąd

$$i = -C \frac{dv_c}{dt} = A_1 C a_1 e^{-a_1 t} + A_2 C a_2 e^{-a_2 t};$$

zakładając w obu tych wzorach wartości ze wzorów /13/, otrzymamy

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= V_0, \\ A_1 a_1 + A_2 a_2 &= 0, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a_2}{a_2 - a_1} V_0, \\ A_2 &= -\frac{a_1}{a_2 - a_1} V_0. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$v_c = \left\{ \frac{a_2}{a_2 - a_1} e^{-a_1 t} - \frac{a_1}{a_2 - a_1} e^{-a_2 t} \right\} V_0,$$

albo

$$v_c = \frac{V_0}{a_2 - a_1} (a_2 e^{-a_1 t} - a_1 e^{-a_2 t}). \quad /15/$$

Biorąc pochodną  $v_c$  względem  $t$ , otrzymamy

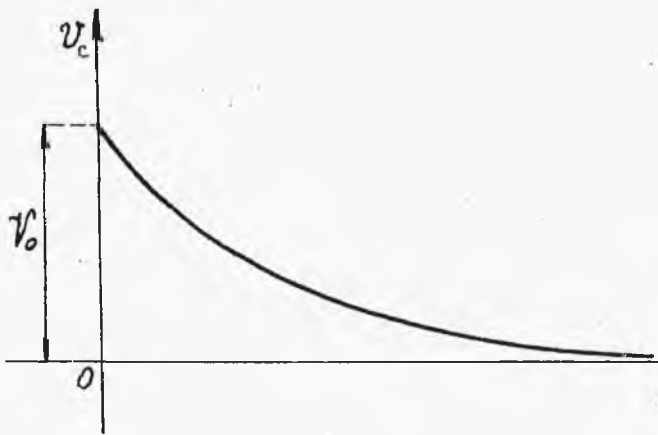
$$\begin{aligned} \frac{dv_c}{dt} &= \frac{V_0}{a_2 - a_1} (-a_1 a_2 e^{-a_1 t} + a_2 a_1 e^{-a_2 t}) = \\ &= \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} V_0 (e^{-a_2 t} - e^{-a_1 t}); \quad /16/ \end{aligned}$$

ponieważ, jak to przedtem stwierdziliśmy,  $a_2 > a_1$ ,  
przeto  $e^{-a_2 t} < e^{-a_1 t}$  i wyraz stojący w na-

wiasach wzoru /16/ jest liczbą ujemną, zaś wyraz  
stojący przed tym nawiasem jest liczbą dodatnią,  
więc

$$\frac{dv_c}{dt} < 0;$$

na tej podstawie stwierdzamy, że  $v_c$  jest funk-  
cją malejącą z biegiem czasu i ma wartość zawsze  
dodatnią, gdyż



$a_2 > a_1$ ,  
 $e^{-a_1 t} > e^{-a_2 t}$ ,  
 $a_2 e^{-a_1 t} > a_1 e^{-a_2 t}$ ,  
więc najmniejsza  
jej wartość = 0  
teoretycznie przy  
 $t = \infty$  /rys 9/;

rys. 9.

wartość prądu  $i$  znajdziemy na podstawie wzorów  
/14/ i /16/

$$\begin{aligned} i &= -C \frac{dv_c}{dt} = -\frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} C v_0 (e^{-a_2 t} - e^{-a_1 t}) = \\ &= \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} C v_0 (e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t}). \end{aligned} \quad /17/$$

Dla zbadania tej funkcji bierzemy pochodną względem  $t$ :

$$\frac{di}{dt} = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} C V_0 (a_2 e^{-a_2 t} - a_1 e^{-a_1 t}); \quad /18/$$

wyraz stojący w nawiasach może być większy lub mniejszy od zera, lub może się równać zero, mianowicie  $\frac{di}{dt} = 0$ , jeżeli

$$a_1 e^{-a_1 t} = a_2 e^{-a_2 t}, \quad /19/$$

skąd

$$e^{(a_2 - a_1)t} = \frac{a_2}{a_1},$$

$$(a_2 - a_1)t = \lg_n \frac{a_2}{a_1},$$

$$t = \frac{1}{a_2 - a_1} \lg_n \frac{a_2}{a_1} > 0. \quad /20/$$

Biorąc jeszcze raz pochodną we wzorze /18/, otrzymamy:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} C V_0 (a_1^2 e^{-a_1 t} - a_2^2 e^{-a_2 t}). \quad /21/$$

Dla wartości  $t$ , przy której pierwsza pochodna staje się równą zero, czyli gdy ma miejsce równanie /19/, druga pochodna  $i$  ze wzoru /21/ będzie ujemną, gdyż wyraz stojący w nawiasach staje się mniejszym od zera; rzeczywiście, na podstawie wzo-

ru /19/

$$a_1^2 e^{-a_1 t} - a_2^2 e^{-a_2 t} = a_1^2 e^{-a_1 t} - a_1 a_2 e^{-a_1 t} =$$

$$= a_1 e^{-a_1 t} (a_1 - a_2) < 0,$$

gdyż  $a_1 < a_2$ .

Wobec tego przy znalezionej we wzorze /20/ wartości  $t$ , rozpatrywana funkcja  $i$  ze wzoru /17/ otrzymuje wartość największą, ponieważ zaś

$e^{-a_1 t} > e^{-a_2 t}$ , przeto  $i$  zawsze jest większe

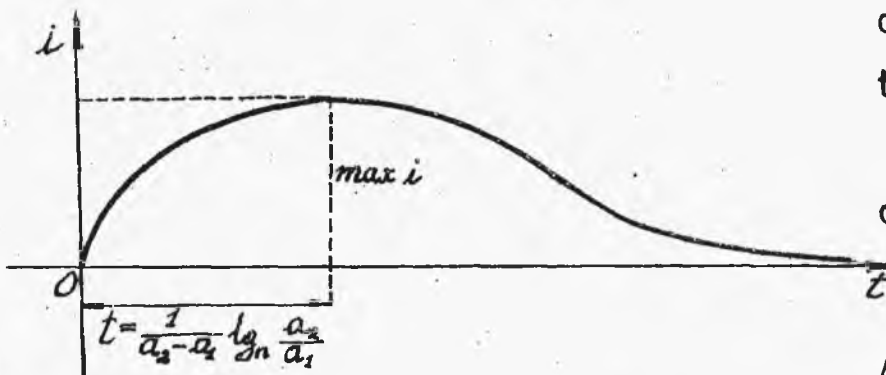
od zera;

tylko przy

$t = \infty, i = 0,$

oraz przy

$t = 0, i = 0,$



/rys.10./

rys.10.

W wypadku II.  $R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

$$k_1 = k_2 = -\frac{R}{2L} = -a;$$

stosujemy wzór /11/

$$v_c = e^{-at} (A_1 + A_2 t); \quad /22/$$

skąd

$$i = -C \frac{dv_c}{dt} = -C e^{-at} (A_2 - A_1 a - A_2 a t); \quad /23/$$



zakładając  $t=0$ ,  $v_c = V_0$ ,  $i=0$ ,  
będziemy mieli

$$\begin{aligned} A_1 &= V_0, \\ A_2 - A_1 a &= 0, \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} A_1 &= V_0, \\ A_2 &= a V_0. \end{aligned}$$

Podstawiając te wartości do wzorów /22/ i /23/  
otrzymamy:

$$\begin{cases} v_c = V_0 (1 + at) e^{-at}, & /24/ \\ i = Ca^2 t V_0 e^{-at}; \end{cases}$$

wobec tego, że  $Ca^2 = C \frac{R^2}{4L^2}$ ,

zaś  $R^2 = 4 \frac{L}{C}$ ,

$$Ca^2 = \frac{C}{4L^2} \cdot \frac{4L}{C} = \frac{1}{L},$$

możemy napisać

$$i = \frac{V_0}{L} t e^{-at} \quad /25/$$

$v_c$  ze wzoru /24/ jest funkcją malejącą, gdyż  
jej pochodna

$$\frac{dv_c}{dt} = -a^2 t V_0 e^{-at} < 0,$$

więc napięcie na kondensatorze stopniowo zanika, natomiast prąd ze wzoru /25/, tak samo jak w wypadku I, najpierw wzrasta, dochodzi do swej największej wartości, poczem stopniowo zanika; łatwo to stwierdzić z następujących działań

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_0}{L} e^{-at} (1 - at).$$

Z równania:

$$e^{-at} (1 - at) = 0$$

znajdujemy

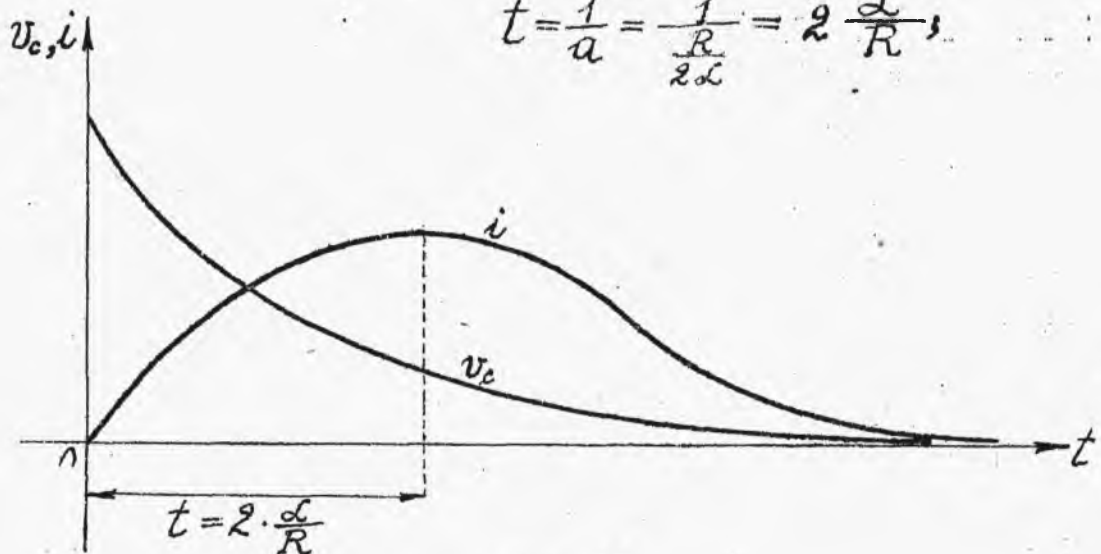
$$t = \frac{1}{a};$$

przy tej wartości  $t$  druga pochodna

$$\left| \frac{d^2 i}{dt^2} \right|_{t=\frac{1}{a}} = \left| e^{-at} (a^2 t - 2a) \right|_{t=\frac{1}{a}} = -e^{-1} a < 0,$$

wobec czego stwierdzamy, że  $\max i$  będzie przy

$$t = \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{R}{2L}} = 2 \frac{L}{R},$$



rys. 11.

wartość tego prądu największego będzie

$$\max i = \frac{V_0}{L} 2 \frac{L}{R} e^{-1} = \frac{2V_0}{Re} \approx 0,74 \frac{V_0}{R}.$$

Rys. 11 podaje przebieg  $v_c$  oraz  $i$ . W obu rozpatrzonych wypadkach wyładowanie zachodzi w sposób równomierny bez wahań i z tego powodu takie wyładowania możemy nazwać aperiodycznymi.

### § 3. Wyładowanie kondensatora oscylacyjne.

Rozpatrzmy wypadek III

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Na podstawie wzoru /12/

$$v_c = e^{-\alpha t} (A_1 \sin \beta t + A_2 \cos \beta t), \quad /26/$$

gdzie

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}.$$

Znajdujemy

$$i = -C \frac{dv_c}{dt} = C e^{-\alpha t} \left\{ \alpha A_1 \sin \beta t + \right. \\ \left. + \alpha A_2 \cos \beta t + \beta A_2 \sin \beta t - \beta A_1 \cos \beta t \right\}. /27/$$

Zakładając we wzorach /26/ i /27/  $t=0$ ,

$v_c = V_0, i = 0$ , otrzymamy

$$A_2 = V_0, \quad \alpha A_2 - \beta A_1 = 0,$$

skąd

$$A_1 = \frac{\alpha}{\beta} V_0,$$

$$A_2 = V_0;$$

wobec tego

$$v_c = \frac{V_0}{\beta} e^{-\alpha t} (\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t),$$

$$i = L V_0 e^{-\alpha t} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} \sin \beta t.$$

Ponieważ

$$\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\beta t + \delta),$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\beta}{\alpha},$$

zaś

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \frac{1}{L^2 C} - \alpha^2 = \frac{1}{L^2 C},$$

przeto

$$v_c = \frac{V_0 e^{-\alpha t}}{\beta \sqrt{L^2 C}} \sin(\beta t + \delta), \quad /28/$$

$$i = \frac{V_0 e^{-\alpha t}}{\beta L} \sin \beta t, \quad /29/$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \sin \delta = \beta \sqrt{L^2 C}, \quad \cos \delta = \alpha \sqrt{L^2 C}. \quad /30/$$

Łatwo jest zauważyć, że stosunek pomiędzy amplitudami  $v_c$  oraz  $i$  wynosi  $\sqrt{\frac{L}{C}}$ ; prąd  $i$  jest opóźniony względem  $v_c$  o kąt  $\delta = \arctg \frac{\beta}{L}$ .

Stwierdzamy, że napięcie na kondensatorze  $v_c$  oraz prąd  $i$ , płynący w obwodzie, mają przebieg nieco odmienny od przebiegu sinusoidalnego; różnica polega na tem, że zmiana wartości tych wielkości z biegiem czasu zachodzi nie tylko według sinusoidy, lecz jeszcze według funkcji wykładniczej  $e^{-\alpha t}$ ; ta ostatnia, jako funkcja malejąca, tłumii zjawisko, doprowadzając wreszcie wartości do zera. Tęgo rodzaju przebieg można nazwać przebiegiem sinusoidalnym tłumionym. W naszym wypadku pulsację stanowi  $\beta$ , częstotliwość zaś  $f_s = \frac{\beta}{2\pi}$ . W obwodzie zachodzą więc drgania napięcia i prądu czyli oscylacje; drgania te nazywamy swobodnymi lub własnymi, dla odróżnienia od drgań wymuszonych, wywołanym napięciem sinusoidalnym, przyłożonym od zewnętrznego źródła. Taki obwód nazywamy obwodem oscylacyjnym. Częstotliwość drgań swobodnych

$$f_s = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad /31/$$

Amplitudy napięcia na kondensatorze i prądu będą

$$V_{em} = \frac{V_0}{\beta \sqrt{LC}} e^{-\alpha t},$$

$$I_m = \frac{V_0}{\beta L} e^{-\alpha t}.$$

Iloraz tych amplitud, równy  $\sqrt{\frac{L}{C}}$ , możemy nazwać opornością pozorną drgań swobodnych.

Jak widzimy, amplitudy te stanowią funkcje malejące z biegiem czasu i szybkość, z jaką one maleją, zależy od współczynnika tłumienia

$$\alpha = \frac{R}{2L}.$$

Badając funkcję  $v_c$  ze wzoru /28/, stwierdzamy, że jej pierwsza pochodna względem czasu

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{V_0}{\beta \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} [-\alpha \sin(\beta t + \delta) + \beta \cos(\beta t + \delta)] =$$

$$= \frac{V_0 e^{-\alpha t}}{\beta \sqrt{LC}} \cdot \alpha [\cos(\beta t + \delta) \frac{\beta}{\alpha} - \sin(\beta t + \delta)] =$$

$$= \frac{V_0 e^{-\alpha t}}{\operatorname{tg} \delta \sqrt{LC}} [\cos(\beta t + \delta) \operatorname{tg} \delta - \sin(\beta t + \delta)] =$$

$$= \frac{V_0 e^{-\alpha t} \sin \beta t}{\sin \delta \sqrt{LC}} = \frac{V_0 e^{-\alpha t}}{\beta \cdot LC} \sin \beta t$$

staje się równą zero dla wartości

$$\beta t = 0, \pi, \dots, k\pi,$$

$$t = 0, \frac{\pi}{\beta}, \dots, k \frac{\pi}{\beta},$$

gdzie  $k$  dowolna liczba całkowita, zaś druga pochodna

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} = \frac{V_0 e^{-\alpha t}}{\beta \omega L C} [\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t]$$

dla powyższych wartości będzie mniejszą od zera, gdy  $k$  jest równe zero lub jest liczbą parzystą; natomiast druga pochodna będzie większą od zera, gdy  $k$  jest liczbą nieparzystą; będziemy mieli więc szereg największych i najmniejszych /największych dodatnich i ujemnych/ wartości napięcia  $v_c$ , idących w równych odstępach czasu; wartości te maleją z biegiem czasu według prawa funkcji wykładniczej  $e^{-\alpha t}$ . Największą wartość będziemy mieli dla  $t=0$ , wtedy ze wzoru /28/

$$\max v_c = \frac{V_0}{\beta \omega L C} \sin \delta,$$

a ponieważ  $\sin \delta = \beta \omega L C$ , więc

$$\max v_c = V_0.$$

Napięcie więc na kondensatorze zmienia się według prawa sinusoidy tłumionej i posiada największą

swą wartość w pierwszej chwili po rozpoczęciu  
się wyładowania kondensatora.

Dla prądu  $i$  ze wzoru /29/

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= \frac{V_0 e^{-\alpha t}}{\beta L} (\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t) = \\ &= \frac{\alpha V_0 e^{-\alpha t}}{\beta L} (\cos \beta t \operatorname{tg} \delta - \sin \beta t) = \\ &= - \frac{V_0 e^{-\alpha t}}{\operatorname{tg} \delta L \cos \delta} \sin(\beta t - \delta) = \\ &= - \frac{V_0 e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \delta)}{\sin \delta \cdot L}\end{aligned}$$

Pochodna ta staje się równą zeru, gdy

$$\sin(\beta t - \delta) = 0;$$

$$\beta t - \delta = k \cdot \pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$t = \frac{\delta}{\beta}, \frac{\pi}{\beta} + \frac{\delta}{\beta}, \frac{2\pi}{\beta} + \frac{\delta}{\beta}, \dots$$

Dруга pochodna

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = - \frac{V_0 e^{-\alpha t}}{\sin \delta \cdot L} [\beta \cdot \cos(\beta t - \delta) - \alpha \cdot \sin(\beta t - \delta)]$$

dla powyższych wartości  $(\beta t - \delta)$  będzie ujemną, gdy



$k=0$  oraz gdy  $k$  jest liczbą parzystą, natomiast będzie dodatnią, gdy  $k$  jest liczbą nieparzystą. W ten sposób stwierdzamy, że również prąd wyładowania będzie przechodził przez szereg największych i najmniejszych wartości, zmieniając się oscylacyjnie według wzoru /29/. Oczywiście, największa ze wszystkich wartości tego prądu otrzyma się dla najmniejszej wartości  $t$ , dającej maximum funkcji  $i$ , to znaczy dla

$$\beta t - \delta = 0,$$
$$t = \frac{\delta}{\beta}.$$

Wtedy

$$\max i = \frac{V_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta} \delta} \cdot \sin \delta}{\beta L},$$

a ponieważ  $\sin \delta = \beta \sqrt{LC}$ , więc

$$\max i = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\beta} \delta} \quad /32/$$

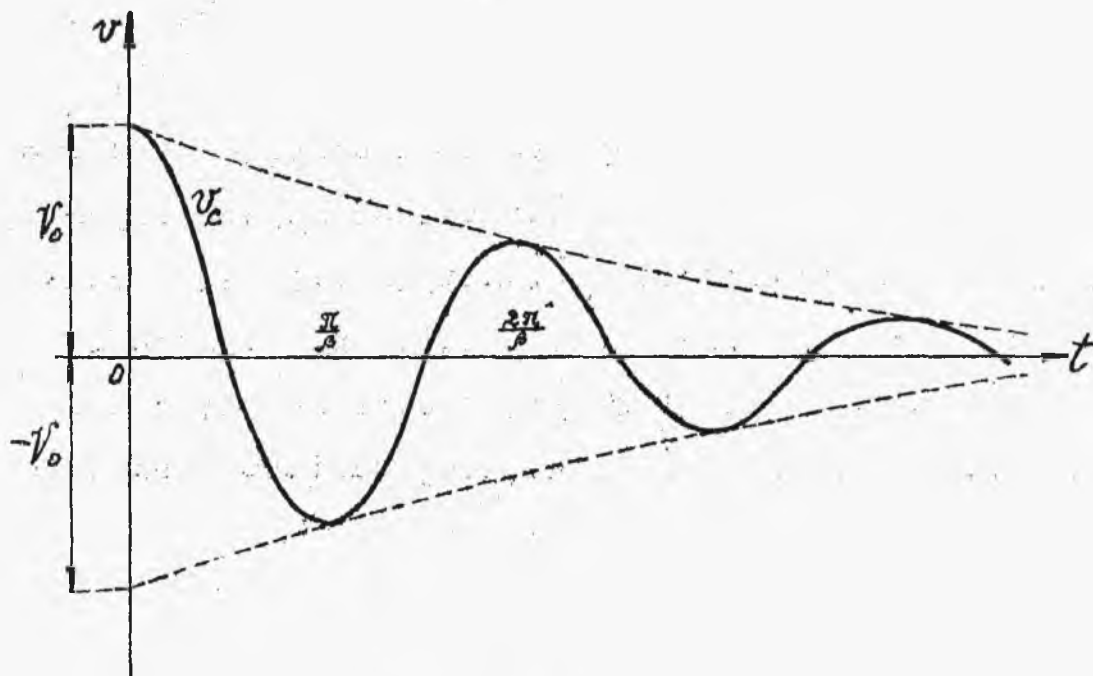
Przebieg napięcia  $v_c$  oraz prądu  $i$  w obwodzie oscylacyjnym podany jest na rys.12 i rys.13.

Zarówno dla napięcia, jak i dla prądu, miarą tłumienia jest funkcja

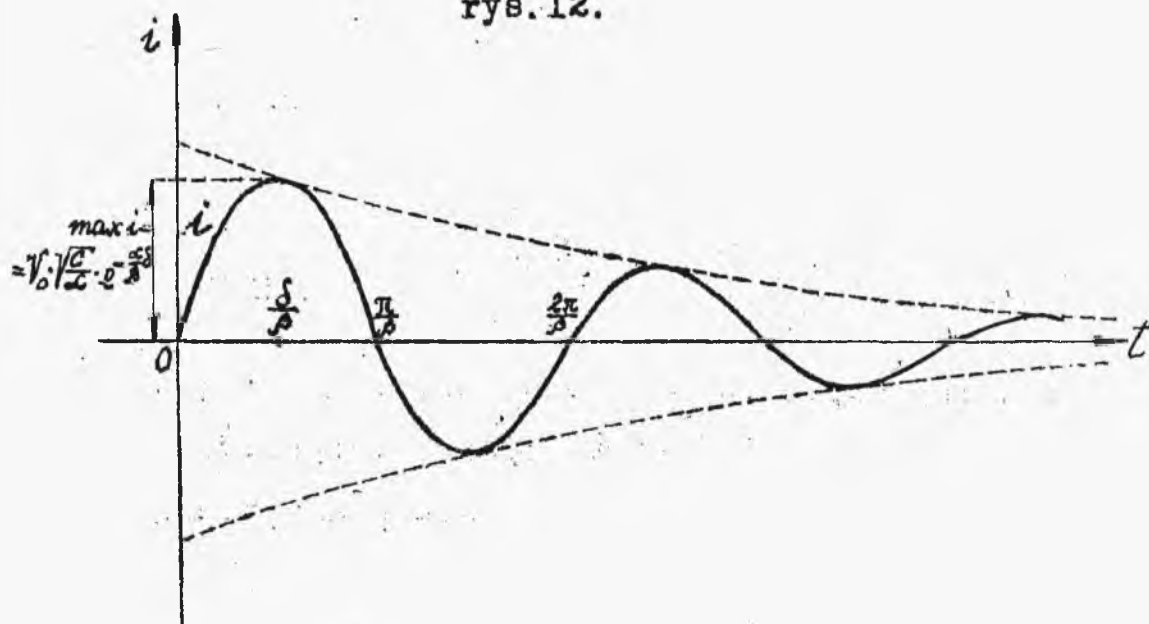
$$e^{-\alpha t};$$

stosunek amplitud, odpowiadających zmianie czasu o cały okres  $T$ , wynosi:

$$\frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T)}} = e^{\alpha T};$$



rys. 12.



rys. 13.

logarytm naturalny tego stosunku, równy

$$\lambda = \alpha T = \frac{R}{2L} T,$$

nazywają logarytmicznym dekrementem tłumienia.

§ 4. Wyladowanie kondensatora w obwodzie  
z bardzo małą opornością rzeczywistą.  
Wzór W. Thomsona.

Na szczególne uwzględnienie zasługuje wypadek, gdy  $R$  jest bardzo małe w porównaniu do  $L$ , tak, iż praktycznie  $\frac{R}{2L}$  można przyjąć za równe zero; wówczas

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 0,$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\beta}{\alpha} = \infty, \quad \delta = \frac{\pi}{2}$$

i ze wzorów /28/, /29/ i /30/ otrzymamy:

$$v_c = V_0 \sin\left(\beta t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$i = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \beta t,$$

$$f_s = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$T_s = \frac{1}{f_s} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

/33/

Jeżeli przyjmiemy pod uwagę, że rezonans napięć w obwodzie zachodzi, jeżeli

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

czyli

$$\omega^2 = \frac{1}{LC},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

to znaczy przy

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC};$$

wtedy przyjdziemy do wniosku, że częstotliwość drgań własnych, odpowiada warunkowi rezonansu napięć.

Wzór /33/ na okres drgań własnych obwodu oscylacyjnego, w wypadku  $\frac{R}{2L} = 0$ , znany jest jako wzór Thomsona, bo był po raz pierwszy wyprowadzony przez Williama Thomsona, późniejszego Lorda Kelvina; oczywiście, że w rozpatrywanym wypadku tłumienie jest bardzo małe i wobec tego drgania swobodne obwodu trwają bardzo długo.

#### § 5: Ładowanie kondensatora prądem stałym.

Jeżeli zamkniemy rozpatrywany obwód /rys.8/

przy napięciu prądu stałego o wartości  $\mathcal{V}$ , wówczas dla określenia napięcia na kondensatorze będziemy mieli na podstawie wzoru /3/ /str.40 / równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{LC} v_c = \frac{1}{LC} \mathcal{V}, \quad /34/$$

zaś prąd, płynący w obwodzie, będzie określony wzorem /2/

$$i = C \frac{dv_c}{dt}.$$

Całka szczególna równania /34/ będzie  $v_c = \mathcal{V}$ , co łatwo sprawdzić, wobec tego całkę ogólną tegoż równania otrzymamy, dodając  $\mathcal{V}$  do całek ogólnych równania /4/, które znaleźliśmy już dla trzech rozmaitych wypadków.

Dla określenia stałych, wchodzących do tych całek ogólnych, będziemy mieli warunek początkowy

$$t=0, \quad v_c=0, \quad i=0.$$

W ten sposób otrzymamy:

w wypadku I  $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

według wzoru /10/

$$v_c = A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t} + \mathcal{V}, \quad /35/$$

$$i = C \frac{dv_c}{dt} = -a_1 C A_1 e^{-a_1 t} - a_2 C A_2 e^{-a_2 t}, \quad /36/$$

skąd przy  $t=0$

$$A_1 + A_2 = -V,$$

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 = 0.$$

Rozwiązując te równania, znajdziemy

$$A_1 = -\frac{a_2}{a_2 - a_1} V; \quad A_2 = \frac{a_1}{a_2 - a_1} V.$$

Wobec tego

$$v_c = -\frac{V}{a_2 - a_1} \left\{ +a_2 e^{-a_1 t} - a_1 e^{-a_2 t} \right\} + V. \quad /37/$$

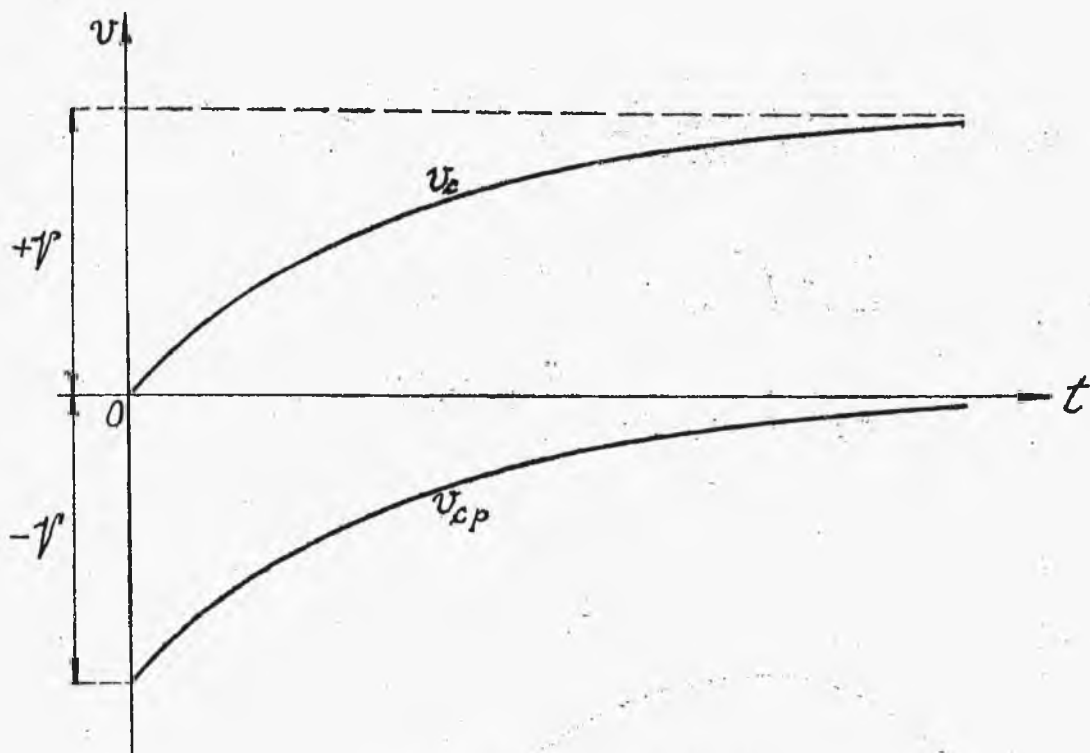
Jeżeli porównamy pierwszy wyraz prawej strony tego wzoru ze wzorem /15/, to spostrzegamy, że różni się on od tego ostatniego tylko znakiem; poprzednio już zbadaliśmy, że taka funkcja jest malejącą z biegiem czasu; wyraz ten stanowi napięcie przejściowe na kondensatorze, gdy wyraz drugi  $V$  stanowi napięcie ustalone:

$$v_{cp} = -\frac{V}{a_2 - a_1} \left\{ a_2 e^{-a_1 t} - a_1 e^{-a_2 t} \right\}. \quad /38/$$

Przebieg napięć uwidoczniiony jest na rys.14.

Prąd  $i$  znajdziemy, podstawiając wartości stałych  $A_1$  i  $A_2$  do wzoru /36/; wtedy

$$i = C V \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \left\{ e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t} \right\}; \quad /39/$$



rys. 14.

badając funkcję, stojącą w nawiasach, znajdziemy, że pochodna  $\frac{di}{dt}$  staje się równą zero, gdy

$$-a_1 e^{-a_1 t} + a_2 e^{-a_2 t} = 0, \quad /40/$$

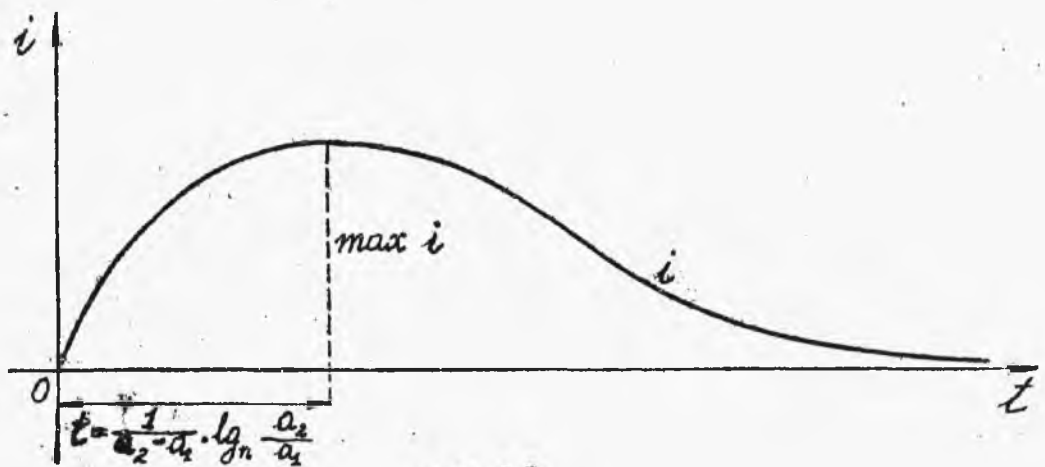
$$e^{(a_2 - a_1)t} = \frac{a_2}{a_1},$$

$$t = \frac{1}{a_2 - a_1} \lg_n \frac{a_2}{a_1} > 0; \quad /41/$$

ponieważ druga pochodna  $\frac{d^2 i}{dt^2}$  przy znalezionej wartości  $t$  jest mniejszą od zera, więc ta wartość  $t$  daje nam  $\max i$ .

Uwzględniając /39/, /40/ i /41/, otrzymamy

$$\begin{aligned} \max i &= CV \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \left\{ e^{-a_1 t} - \frac{a_1}{a_2} e^{-a_2 t} \right\} = \\ &= CV a_1 e^{-a_1 t} = \\ &= CV \cdot a_1 \cdot e^{-\frac{a_1}{a_2 - a_1} \cdot \lg_n \frac{a_2}{a_1}} \quad /42/ \end{aligned}$$



rys. 15.

Rys. 15 podaje przebieg prądu ładowania kondensatora.

W wypadku II

$$R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} ;$$

według wzoru /22/

$$v_c = e^{-at} (A_1 + A_2 \cdot t) + V, \quad /43/$$

gdzie  $a = \frac{R}{2L} ;$



$$i = C \frac{dv_c}{dt} = C \cdot e^{-at} (A_2 - a A_1 - a A_2 t); \quad /44/$$

zakładając w tych wzorach  $t=0, v_c=0, i=0$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned} A_1 &= -V, \\ A_2 - a A_1 &= 0, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} A_1 &= -V \\ A_2 &= -aV. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} v_c &= -V(1+at)e^{-at} + V, \\ i &= VC \cdot a^2 t e^{-at}, \end{aligned} \quad /45/$$

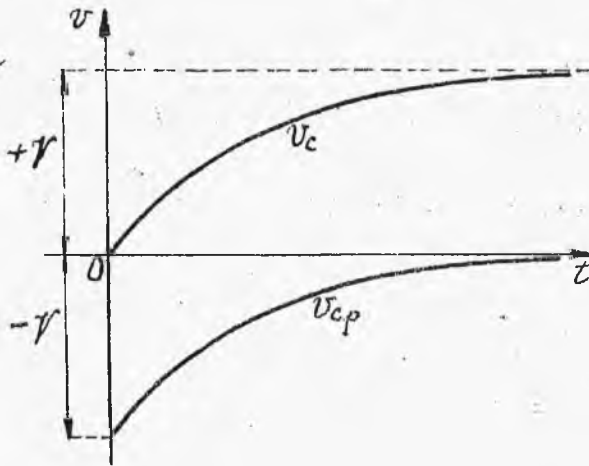
ponieważ

$$a^2 = \frac{R^2}{4L^2} = \frac{\frac{4L}{C}}{4L^2} = \frac{1}{LC},$$

więc

$$i = \frac{V}{L} t e^{-at}. \quad /46/$$

We wzorze /45/ pierwszy wyraz z prawej strony stanowi napięcie przejściowe  $v_{cp}$ ; jest to funkcja malejąca z biegiem czasu. Przebieg napięć podaje rys. 16.



rys. 16.

Dla funkcji prądu  
znajdujemy, jak w ana-  
logicznym wypadku

wyładowania /str. 50/,

maxi przy

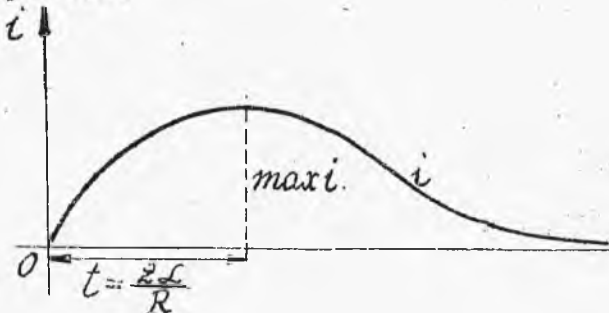
$$t = \frac{1}{a} = \frac{2L}{R},$$

czyli

$$\max i = \frac{V}{L} \cdot \frac{2L}{R} e^{-1} = \frac{2V}{Re} \approx 0,74 \frac{V}{R}. \quad /47/$$

Przebieg prądu ładowania pokazany jest na

rys. 17.



rys. 17.

W wypadku III

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}};$$

na podstawie wzoru

/26/ /str. 51/.

$$v_c = e^{-\alpha t} \{ A_1 \sin \beta t + A_2 \cos \beta t \} + V,$$

$$i = C \frac{dv_c}{dt} = C e^{-\alpha t} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha A_1 \sin \beta t - \alpha A_2 \cos \beta t - \\ -\beta A_2 \sin \beta t + \beta A_1 \cos \beta t \end{array} \right\}.$$

Zakładając w tych wzorach:

$$t = 0, \quad v_c = 0, \quad i = 0,$$

otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -V, \\ -\alpha A_2 + \beta A_1 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

skąd

$$A_1 = -\frac{\alpha}{\beta} V; \quad A_2 = -V;$$

wobec tego

$$\left\{ \begin{aligned} v_c &= -\frac{V}{\beta} e^{-\alpha t} (\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t) + V, \\ i &= C V e^{-\alpha t} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \sin \beta t. \end{aligned} \right.$$

Mamy

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{LC},$$

$$\begin{aligned} \alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\beta t + \delta) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin(\beta t + \delta), \end{aligned}$$

gdzie  
przeto  $\operatorname{tg} \delta = \frac{\beta}{\alpha},$

$$\left\{ \begin{aligned} v_c &= -\frac{V e^{-\alpha t}}{\beta \sqrt{LC}} \sin(\beta t + \delta) + V, & /48/ \\ i &= \frac{V e^{-\alpha t}}{\beta L} \sin \beta t. & /49/ \end{aligned} \right.$$

Napięcie przejściowe na kondensatorze wynosi

$$v_{cp} = -\frac{V}{\beta \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \delta).$$

Jest to funkcja zupełnie ta sama, co i we wzorze /28/ /str.52/, dla której znaleźliśmy, że maleje ona, zmniejszając się sinusoidalnie, przechodząc przez szereg wartości największych dodatnich i ujemnych dla  $t = 0, \frac{\pi}{\beta}, \frac{2\pi}{\beta}, \dots$

Najbliższą największą wartość dodatnią dla napięcia przejściowego otrzymamy, gdy  $t = \frac{\pi}{\beta}$ , wtedy bowiem

$$\sin(\beta t + \delta) = \sin(\pi + \delta) = -\sin \delta;$$

ponieważ

$$\sin \delta = \beta \sqrt{LC},$$

więc dla  $t = \frac{\pi}{\beta}$  otrzymamy:

$$\begin{aligned} \max v_c &= \frac{V e^{-\alpha t}}{\beta \sqrt{LC}} \beta \sqrt{LC} + V = \\ &= V(1 + e^{-\alpha t}) = V(1 + e^{-\frac{\alpha}{\beta} \pi}). \end{aligned}$$

Funkcja wykładnicza, stojąca w nawiasie, nie może być większa od 1, wobec tego możemy napisać

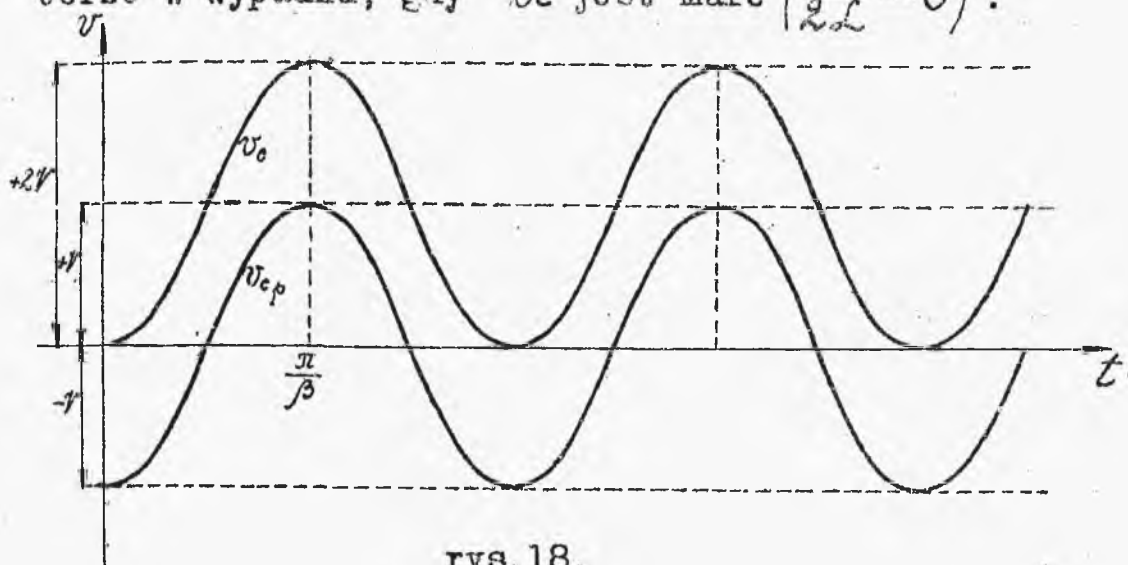
$$\max v_c \leq 2V.$$

Co się tyczy prądu  $i$ , to, ponieważ wzór /49/ jest zupełnie taki sam, jak i wzór /29/, więc otrzymamy /patrz str.52/ największą jego wartość dla  $t = \frac{\delta}{\beta}$

$$\max i = V \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\beta} \delta}.$$

Na rys.18 mamy przebieg napięcia na kondensa-

torze w wypadku, gdy  $\alpha$  jest małe ( $\frac{R}{2L} \approx 0$ ).



rys.18.

Przebieg prądu ładowania jest zupełnie taki sam, jak przy wyładowaniu /rys. 12 str. 58/.

### § 6. Ładowanie kondensatora prądem zmiennym.

Niech w chwili  $t=0$  zamknięcia obwodu z prądem zmiennym, napięcie na zaciskach przechodzi przez fazę  $\psi$ , to znaczy jest określone wzorem

$$v = V_m \cdot \sin(\omega t + \psi).$$

Na podstawie wzoru /3/ równanie dla takiego obwodu będzie:

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{LC} v_c = \frac{V_m}{LC} \sin(\omega t + \psi). \quad /50/$$

Oczywiście, przy rozwiązywaniu tego równania, tak samo jak poprzednio, będziemy mieli do rozpa-

trzenia trzy wypadki; jednakże w pierwszych dwóch wypadkach w porównaniu z tem, co mieliśmy przy prądzie stałym, nie szczególnego nie spostrzegamy. przejdziemy więc odrazu do wypadku III, gdy

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{LC}$$

Całka ogólna równania uproszczonego będzie  
/wzór 12/

$$v_c = e^{-\alpha t} (A_1 \sin \beta t + A_2 \cos \beta t),$$

gdzie  $A_1$  i  $A_2$  stałe dowolne; daje ona nam wartość napięcia przejściowego na kondensatorze; możemy ją napisać w postaci jednej funkcji sinusoidalnej

$$v_{cp} = e^{-\alpha t} \cdot M \cdot \sin(\beta t + \delta), \quad /51/$$

gdzie  $M$  i  $\delta$  stanowią stałe dowolne.

Całkę szczególną równania /50/ znajdziemy na podstawie takiego samego rozumowania, jakie stosowaliśmy w § 2 Rozdz. II /str. 34/, mianowicie określamy najpierw dla naszego obwodu prąd ustalony:

$$i_u = \frac{V_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi), \quad /52/$$

gdzie

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R};$$

mając wartość tego prądu, znajdujemy wartość napięcia ustalonego na kondensatorze:

$$v_{cu} = \frac{V_m}{L \omega C} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}),$$

albo

$$v_{cu} = -\frac{V_m}{L \omega C} \cos(\omega t + \psi - \varphi). \quad /53/$$

Ze wzoru /51/ znajdujemy przejściowy prąd

$$i_p = C \frac{dv_{cp}}{dt} = C e^{-\alpha t} [\beta M \cos(\beta t + \delta) - \alpha M \sin(\beta t + \delta)]. \quad /54/$$

Ze wzorów /53/ i /51/ oraz /52/ i /54/ otrzymujemy wartości napięcia na kondensatorze i prądu w stanie nieustalonym:

$$v_c = v_{cu} + v_{cp} = -\frac{V_m}{L \omega C} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + e^{-\alpha t} M \sin(\beta t + \delta), \quad /55/$$

$$i = i_u + i_p = \frac{V_m}{L} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + C e^{-\alpha t} [\beta M \cos(\beta t + \delta) - \alpha M \sin(\beta t + \delta)] /56/$$

Zakładając w obu tych wzorach  $t=0$ ,  $v_c=0$ ,  $i=0$ , otrzymamy:

$$M \sin \delta = \frac{V_m}{L \omega C} \cos(\psi - \varphi),$$

$$\alpha C M \sin \delta - \beta C M \cos \delta = \frac{V_m}{L} \sin(\psi - \varphi);$$

podstawiając wartość  $M \sin \delta$  z pierwszego wzoru do drugiego, znajdujemy:

$$M \cos \delta = \frac{V_m}{2\omega C} \left[ \frac{\alpha}{\beta} \cos(\psi - \varphi) - \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \right].$$

Na tej podstawie obliczamy:

$$\begin{aligned} M \sin(\beta t + \delta) &= \underline{M \cos \delta} \sin \beta t + \underline{M \sin \delta} \cos \beta t = \\ &= \frac{V_m}{2\omega C} \left[ \frac{\alpha}{\beta} \cos(\psi - \varphi) \sin \beta t - \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \sin \beta t + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\psi - \varphi) \cos \beta t \right] = \\ &= \frac{V_m}{2\omega C} \left[ \frac{(\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t)}{\beta} \cos(\psi - \varphi) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \sin \beta t \right] = \\ &= \frac{V_m}{2\omega C} \left[ \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \cos(\psi - \varphi) \sin(\beta t + \gamma) - \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \sin \beta t \right], \end{aligned}$$

gdzie  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ .

Następnie:

$$\begin{aligned} M \cos(\beta t + \delta) &= \underline{M \cos \delta} \cos \beta t - \underline{M \sin \delta} \sin \beta t = \\ &= \frac{V_m}{2\omega C} \left[ \frac{\alpha}{\beta} \cos(\psi - \varphi) \cos \beta t - \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \cos \beta t - \right. \\ &\quad \left. - \cos(\psi - \varphi) \sin \beta t \right] = \end{aligned}$$



$$= \frac{V_m}{Z\omega C} \left[ -\cos(\psi - \varphi) \left( \frac{\beta \sin \beta t - \alpha \cos \beta t}{\beta} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \cos \beta t \right] = \\ = \frac{V_m}{Z\omega C} \left[ \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \cos(\psi - \varphi) \sin(\beta t - \gamma') + \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \cos \beta t \right],$$

gdzie  $\operatorname{tg} \gamma' = \frac{\alpha}{\beta}$ .

Podstawiając znalezione wartości  $M \sin(\beta t + \delta)$  oraz  $M \cos(\beta t + \delta)$  do wzorów /51/ oraz /54/, znajdujemy, uwzględniając, że  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{L C}$ ,

$$v_{ep} = -e^{-\alpha t} \frac{V_m}{\beta Z C} \left[ \sin(\psi - \varphi) \sin \beta t - \right. \\ \left. - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\omega L C} \sin(\beta t + \gamma') \right], \quad /57/$$

gdzie  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ ,

oraz

$$i_p = e^{-\alpha t} \frac{V_m}{Z\omega} \left[ -\frac{\cos(\psi - \varphi)}{\sqrt{L C}} \sin(\beta t - \gamma') - \right. \\ \left. - \omega \sin(\psi - \varphi) \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta \sqrt{L C}} \cos(\psi - \varphi) \sin(\beta t + \gamma) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{\beta} \omega \sin(\psi - \varphi) \sin \beta t \right] =$$

$$= e^{-\alpha t} \frac{V_m}{L\beta} \left\{ \sin(\psi - \varphi) (\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t) - \right. \\ \left. - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\omega \sqrt{LC}} [\alpha \sin(\beta t + \gamma) + \beta \sin(\beta t - \gamma')] \right\},$$

gdzie  $\operatorname{tg} \gamma' = \frac{\alpha}{\beta};$

ponieważ  $\operatorname{tg} \gamma' = \operatorname{cotg} \gamma = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \gamma),$

przeto  $\gamma' = \frac{\pi}{2} - \gamma,$

więc  $\sin(\beta t - \gamma') = -\cos(\beta t + \gamma);$

następnie

$$\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\beta t - \gamma) = \\ = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin(\beta t - \gamma),$$

$$\alpha \sin(\beta t + \gamma) - \beta \cos(\beta t + \gamma) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\beta t + \gamma - \gamma) = \\ = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin \beta t,$$

więc ostatecznie:

$$i_p = e^{-\alpha t} \frac{V_m}{L\beta \sqrt{LC}} \left[ \sin(\psi - \varphi) \sin(\beta t - \gamma) - \right. \\ \left. - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\omega \sqrt{LC}} \sin \beta t \right].$$

Porównywując wzory /57/ i /58/ na  $v_{cp}$  i  $i_p$  wi-  
dzimy, że każda z tych wielkości określona jest  
przez dwie sinusoidy /dwie fale/ z amplitudami ma-  
lejącymi, zależnymi od współczynnika tłumienia

$\alpha = \frac{R}{2L}$ . Pulsacja tych sinusoid wynosi  $\beta$ , czy-  
li ich częstotliwość  $\frac{\beta}{2\pi}$ ; obie sinusoidy są  
przesunięte względem siebie o kąt  $\gamma$ , przy czym

$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ . Sinusoidy prądu są przesunięte  
względem odpowiednich sinusoid napięcia o kąt  $\gamma$   
wstecz /prądy są opóźnione we fazie o kąt  $\gamma$  /.

Stosunek amplitudy napięcia do amplitudy prądu wy-  
nosi  $\sqrt{\frac{L}{C}}$ .

Wzór /57/ można przepisać w postaci:

$$v_{cp} = e^{-\alpha t} \frac{V_m}{\beta LC} \left\{ \left[ \sin(\psi - \varphi) - \frac{\cos(\psi - \varphi) \cos \gamma}{\omega \sqrt{LC}} \right] \sin \beta t - \right. \\ \left. \frac{\cos(\psi - \varphi) \sin \gamma}{\omega \sqrt{LC}} \cos \beta t \right\},$$

skąd widać, że amplituda tego napięcia równa jest

$$V_{cpm} = e^{-\alpha t} \frac{V_m}{\beta LC} \sqrt{\sin^2(\psi - \varphi) + \frac{\cos^2(\psi - \varphi)}{\omega^2 LC} - \frac{2 \sin(\psi - \varphi) \cos(\psi - \varphi) \cos \gamma}{\omega \sqrt{LC}}}$$

ponieważ

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{R \sqrt{LC}}{2L} = \frac{R \sqrt{C}}{2L},$$

więc

$$V_{cpm} = \frac{e^{-\alpha t} V_m}{\beta Z C} \sqrt{\sin^2(\psi - \varphi) + \frac{\cos^2(\psi - \varphi)}{\omega^2 LC} - \frac{R}{2\omega L} \sin 2(\psi - \varphi)}$$

$$= \frac{e^{-\alpha t} V_m}{\beta Z C} \sqrt{1 - \cos^2(\psi - \varphi) \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) - \frac{R}{2\omega L} \sin 2(\psi - \varphi)} \cdot 59.$$

W analogiczny sposób przepisemy wzór /58/

$$i_p = \frac{e^{-\alpha t} V_m}{Z \beta \sqrt{LC}} \left\{ \left[ \sin(\psi - \varphi) \cos \gamma - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\omega \sqrt{LC}} \right] \sin \beta t - \sin(\psi - \varphi) \sin \gamma \cos \beta t \right\},$$

skąd znajdujemy amplitudę prądu przejściowego:

$$J_{pm} = \frac{e^{-\alpha t} V_m}{Z \beta \sqrt{LC}} \sqrt{\sin^2(\psi - \varphi) + \frac{\cos^2(\psi - \varphi)}{\omega^2 LC} - \frac{2 \sin(\psi - \varphi) \cos(\psi - \varphi) \cos \gamma}{\omega \sqrt{LC}}}$$

i na podstawie takich samych działań, co i poprzednio:

$$J_{pm} = \frac{e^{-\alpha t} V_m}{Z \beta \sqrt{LC}} \sqrt{1 - \cos^2(\psi - \varphi) \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) - \frac{R}{2\omega L} \sin 2(\psi - \varphi)} \cdot 60.$$

Porównywując wzory /59/ i /60/ spostrzegamy, że amplituda napięcia na kondensatorze i amplituda prądu w jednakowy sposób są uzależnione od fazy  $\psi$ , którą ma napięcie źródła prądu zmiennego w chwili zamknięcia obwodu. Aby znaleźć taką wartość  $\psi$ , dla której obie wymienione amplitudy otrzymują największe wartości, musimy zbadać funkcję, znajdującą się pod pierwiastkiem w obu wzorach /59/ i /60/, mianowicie

$$U = \sqrt{1 - \cos^2(\psi - \varphi) \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) - \frac{R}{2\omega L} \sin 2(\psi - \varphi)};$$

mamy

$$\frac{dU}{d\psi} = \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) \sin 2(\psi - \varphi) - \frac{R}{2\omega L} \cos 2(\psi - \varphi).$$

Gdy przyrównamy tę pochodną do 0, otrzymamy:

$$\operatorname{tg} 2(\psi - \varphi) = \frac{R}{\omega L \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)} = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}},$$

ale

$$\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \operatorname{tg} \varphi,$$

więc

$$\operatorname{tg} 2(\psi - \varphi) = \operatorname{cotg} \varphi. \quad /61/$$

W granicach jednego okresu daje to dwa rozwiązania:

$$1) \quad 2(\psi - \varphi) = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

skąd

$$\psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4};$$

$$2/ \quad 2(\psi - \varphi) = \frac{3}{2}\pi - \varphi,$$

skąd

$$\psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}\pi.$$

Biorąc drugą pochodną  $U$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{d\psi^2} &= 2\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) \cos 2(\psi - \varphi) + \frac{2R}{\omega L} \sin 2(\psi - \varphi) = \\ &= \frac{2R}{\omega L} \cos 2(\psi - \varphi) \left[ \frac{\omega L - \omega C}{R} + \operatorname{tg} 2(\psi - \varphi) \right] = \\ &= \frac{2R}{\omega L} \cos 2(\psi - \varphi) \left[ \operatorname{cotg} \varphi + \operatorname{tg} 2(\psi - \varphi) \right]; \end{aligned}$$

przy uwzględnieniu /61/

$$\frac{d^2U}{d\psi^2} = \frac{4R}{\omega L} \cos 2(\psi - \varphi) \operatorname{cotg} \varphi.$$

Dla wartości  $\psi$ , odpowiadającej 1-mu rozwiązaniu t.j.  $\psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$$\frac{d^2U}{d\psi^2} = \frac{4R}{\omega L} \operatorname{cotg} \varphi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{4R}{\omega L} \cos \varphi;$$

przy wszelkich wartościach  $\varphi$  w granicach

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \frac{d^2U}{d\psi^2} > 0;$$

dla drugiej wartości  $\psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}\pi$  otrzymamy

$$\frac{d^2U}{d\psi^2} = \frac{4R}{\omega L} \cotg \varphi \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right) = -\frac{4R}{\omega L} \cos\varphi,$$

czyli

$$\frac{d^2U}{d\psi^2} < 0.$$

Otrzymujemy więc dla funkcji  $V_{cpm}$  i  $I_{pim}$  minimum, gdy  $\psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ,  
maximum, gdy  $\psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}\pi$ .

Zbadajmy jeszcze te wartości, dla  $\psi - \varphi = 0$  oraz  $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$ ; w pierwszym wypadku wzory /59/ i /60/ dają

$$V_{cpm} = \frac{e^{-\alpha t} V_m}{\beta Z C} \cdot \frac{1}{\omega L C},$$

$$I_{pim} = \frac{e^{-\alpha t} V_m}{\beta Z \sqrt{L C}} \cdot \frac{1}{\omega L C} = \frac{e^{-\alpha t} V_m}{\beta Z \omega L C}.$$

Porównyując te wartości z maksymalną wartością napięcia na kondensatorze i prądu w stanie ustalonym /wzory 53 i 52/, mianowicie

$$V_{cum} = \frac{V_m}{Z \omega C}, \quad I_{cum} = \frac{V_m}{Z},$$

znajdujemy

$$\frac{V_{cpm}}{V_{cum}} = e^{-\alpha t} \cdot \frac{1}{\beta L C}, \quad \frac{I_{pim}}{I_{cum}} = e^{-\alpha t} \cdot \frac{1}{\omega \beta L C}.$$

W wypadku, gdy  $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$ , będziemy mieli:

$$V_{cpm} = \frac{e^{-\alpha t} V_m}{\beta Z L}, \quad I_{pm} = \frac{e^{-\alpha t} V_m}{\beta Z \sqrt{L C}}$$

$$\frac{V_{cpm}}{V_{cum}} = e^{-\alpha t} \cdot \frac{\omega}{\beta}, \quad \frac{I_{pm}}{I_{um}} = e^{-\alpha t} \cdot \frac{1}{\beta \sqrt{L C}}$$

Na szczególne uwzględnienie zasługuje wypadek, gdy tłumienie jest bardzo małe, czyli  $R$  bardzo małe w porównaniu do  $L$ . Wtedy możemy założyć:

$$\alpha = \frac{R}{L} = 0; \quad e^{-\alpha t} = 1,$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{L C} - \alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{L C}}, \quad \beta \sqrt{L C} = 1.$$

W tym wypadku będziemy mieli:

przy  $\psi - \varphi = 0$ :

$$\frac{V_{cpm}}{V_{cum}} = 1,$$

$$\frac{I_{pm}}{I_{um}} = \frac{\beta}{\omega};$$

przy

$$\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{V_{cpm}}{V_{cum}} = \frac{\omega}{\beta},$$

$$\frac{I_{pm}}{I_{um}} = 1.$$



Z tych wzorów wnioskujemy, że przy  $\omega > \beta$  można oczekiwać przepięcia na kondensatorze; przy  $\beta > \omega$  przetężenia w obwodzie.

-----

Stwierdziliśmy, że stosunek wartości maksymalnej napięcia na kondensatorze do wartości maksymalnej prądu wynosi  $\sqrt{\frac{L}{C}}$ :

$$\frac{V_{cm}}{I_m} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

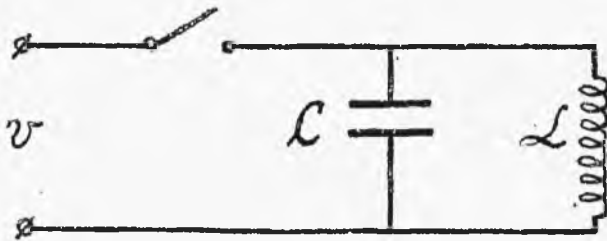
Stąd

$$\frac{1}{2} C V_{cm}^2 = \frac{1}{2} L I_m^2.$$

Pierwszy wyraz stanowi maksymalną energję elektryczną kondensatora, drugi maksymalną energję magnetyczną cewki indukcyjnej. Zachodzi więc w obwodzie oscylacyjnym przemiana energji elektrycznej na energję magnetyczną i naodwrot i, gdyby nie było tłumienia ( $R=0$ ), taka przemiana energji miała by miejsce nieprzerwanie. Obecność  $R$  wywołuje straty ciepłne energji, zachodzi tłumienie i sja-wisko oscylacyjne stopniowo zanika.

§ 7. Otwieranie obwodu, w którym indukcyjność i pojemność są połączone równoległe.

Zastosujemy powyższe wyniki do obwodu prądu zmiennego, w którym  $C$  i  $L$  są połączone równoległe,  $R=0$ . /rys.19/.



rys.19.

Przypuśćemy, że otwarcie nastąpiło w chwili, gdy napięcie na kondensatorze

przechodziło przez swoją wartość największą, równą wartości maksymalnej napięcia na zaciskach prądu zmiennego t. j.

$$v_c = V_m ;$$

wtedy prąd w obwodzie

$$i = 0 ,$$

gdyż prąd wyprzedza napięcie  $v_c$  o kąt prosty.

Cała energia znajduje się wówczas na kondensatorze i wynosi  $\frac{1}{2} C V_m^2$ . Zaczyna się oscylacyjne wyładowanie kondensatora i po upływie 1/4 okresu cała energia kondensatora przechodzi w energię magnetyczną na cewkę; prąd przechodzi przez cewkę i osiąga wartość  $I$ , przy czym

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} C V_m^2,$$

skąd

$$I = V_m \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad /62/$$

Jeżeli zaś wyłączenie nastąpiło w chwili, gdy  $V_c = 0$ , to znaczy, gdy prąd  $i = I_m$  przechodził przez cewkę; wtedy cała energia znajduje się w cewce i wynosi  $\frac{1}{2} L I_m^2$ . Po upływie 1/4 okresu energia ta przejdzie na kondensator, który uzyska napięcie  $V_c$ , przyczem

$$\frac{1}{2} C V_c^2 = \frac{1}{2} L I_m^2,$$

skąd

$$V_c = I_m \sqrt{\frac{L}{C}} \quad /63/$$

W stanie ustalonym mamy

$$V_m = I_m Z,$$

gdzie  $Z$  oporność pozorną naszego układu, którą możemy łatwo znaleźć, jako oporność wypadkową dwóch oporności  $\hat{Z}_1 = j\omega L$  oraz  $\hat{Z}_2 = -j \frac{1}{\omega C}$ ; mamy

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} = \frac{\omega L \cdot \frac{1}{\omega C}}{j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = j \frac{\frac{L}{C}}{\frac{1}{\omega C} - \omega L},$$

skąd

$$Z = \frac{\frac{L}{C}}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}$$

Podstawiając do wzoru /62/ zamiast  $V_m$  —  $I_m Z$  oraz do wzoru /63/ zamiast  $I_m$  —  $\frac{V_m}{Z}$ , otrzymamy:

$$I = I_m \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}, \quad /64/ \quad V_c = V_m \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}, \quad /65/$$

W tych wzorach można łatwo porównać prąd i napięcie, powstające przy wyładowaniu kondensatora, z wartościami tychże wielkości w stanie ustalonym.

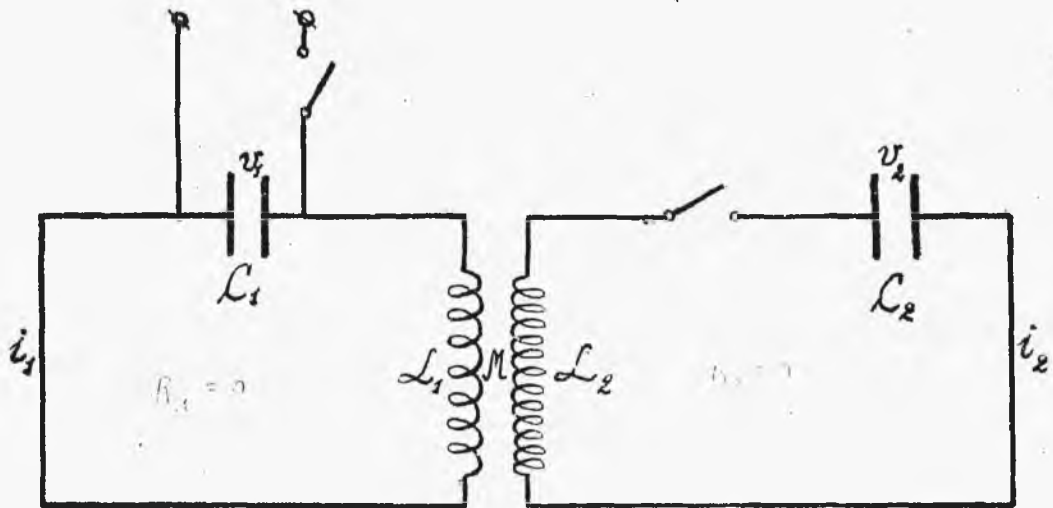
## R O Z D Z I A Ł IV.

### OBWODY SPRZEŻONE MAGNETYCZNIE.

#### § 1. Wyładowanie kondensatora w jednym z dwóch obwodów, sprzężonych magnetycznie.

Rozpatrzmy dwa obwody, znajdujące się jeden obok drugiego /rys.20/; w każdym mamy kondensator o pojemności  $C_1$ , względnie  $C_2$ , oraz cewkę o indukcyjności własnej  $L_1$ , względnie  $L_2$ . Oporności

rzeczywiste w obu obwodach przyjmujemy równe zero.



rys.20.

Kondensator pierwszego obwodu  $C_1$  przyłączony jest do źródła prądu stałego lub zmiennego i w pewnej chwili  $t=0$  zostaje wyłączony od tego źródła, gdy napięcie na kondensatorze wynosi  $V_0$ , jednocześnie zostaje zamknięty obwód 2-gi. Oznaczając wartości chwilowe napięć na kondensatorach przez  $v_1$  i  $v_2$ , zaś wartości chwilowe prądów, które przy wyładowaniu kondensatorów powstają, przez  $i_1$  oraz  $i_2$ , wreszcie współczynnik indukcji wzajemnej obu cewek przez  $M$ , będziemy mieli na podstawie znanych wzorów

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = v_1, \quad //1//$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = v_2, \quad /2/$$

oraz warunki graniczne

$$t=0, v_1 = v_0, i_1 = 0, v_2 = 0, i_2 = 0. \quad /3/$$

Ponieważ

$$i_1 = -C_1 \frac{dv_1}{dt}; \quad i_2 = -C_2 \frac{dv_2}{dt},$$

przeto wzory /1/ i /2/ możemy przepisać w postaci:

$$\left\{ \begin{array}{l} -L_1 C_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2} - M C_2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} = v_1, \\ -L_2 C_2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} - M C_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2} = v_2, \end{array} \right.$$

albo

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1'' + \frac{1}{L_1 C_1} v_1 + \frac{M C_2}{L_1 C_1} v_2'' = 0, \\ v_2'' + \frac{1}{L_2 C_2} v_2 + \frac{M C_1}{L_2 C_2} v_1'' = 0. \end{array} \right.$$

Oznaczmy :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{M C_2}{L_1 C_1} = k_1, \quad \frac{M C_1}{L_2 C_2} = k_2, \\ \frac{1}{L_1 C_1} = a^2, \quad \frac{1}{L_2 C_2} = b^2, \end{array} \right\} \quad /4/$$

wtedy

$$v_1'' + a^2 v_1 = -k_1 v_2'' \quad , \quad 15/$$

$$v_2'' + b^2 v_2 = -k_2 v_1'' \quad ; \quad 16/$$

z równania /6/

$$v_2 = -\frac{k_2}{b^2} v_1'' - \frac{1}{b^2} v_2'' \quad ,$$

zaś z równania /5/

$$-v_2'' = \frac{1}{k_1} v_1'' + \frac{a^2}{k_1} v_1 \quad ,$$

więc

$$-\frac{1}{b^2} v_2'' = \frac{1}{k_1 b^2} v_1'' + \frac{a^2}{k_1 b^2} v_1 \quad ,$$

$$v_2 = -\frac{k_2}{b^2} v_1'' + \frac{1}{k_1 b^2} v_1'' + \frac{a^2}{k_1 b^2} v_1 = \frac{1 - k_1 k_2}{k_1 b^2} v_1'' + \frac{a^2}{k_1 b^2} v_1 \quad . \quad 17/$$

Biorąc pochodną względem  $t$  dwa razy, otrzymamy:

$$v_2'' = \frac{1 - k_1 k_2}{k_1 b^2} v_1'' + \frac{a^2}{k_1 b^2} v_1'' \quad ,$$

$$k_1 v_2'' = \frac{1 - k_1 k_2}{b^2} v_1'' + \frac{a^2}{b^2} v_1'' \quad .$$

Ponieważ

$$k_1 k_2 = \frac{M \mathcal{L}_2}{L_1 \mathcal{C}_1} \cdot \frac{M \mathcal{C}_1}{L_2 \mathcal{L}_2} = \frac{M^2}{L_1 L_2} = k^2 \quad , \quad 18/$$

gdzie  $k < 1$  stanowi współczynnik sprzężenia magnetycznego<sup>x/</sup>, więc podstawiając te wartości do równania

-----  
<sup>x/</sup> /  $k=1$ , jeżeli nie uwzględniamy rozproszenia magnetycznego/.

nania /5/ otrzymamy

$$v_1'' + a^2 v_1 + \frac{1-k^2}{b^2} v_1^{(\bar{r})} + \frac{a^2}{b^2} v_1'' = 0,$$

albo

$$(1-k^2) v_1^{(\bar{r})} + (a^2+b^2) v_1'' + a^2 b^2 v_1 = 0. \quad /9/$$

Jest to równanie liniowe 4-go stopnia, którego równanie charakterystyczne

$$(1-k^2) x^4 + (a^2+b^2) x^2 + a^2 b^2 = 0$$

jako równanie bikwadratowe daje pierwiastki:

$$x^2 = \frac{-(a^2+b^2) \pm \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4(1-k^2)a^2 b^2}}{2(1-k^2)};$$

podpierwiastkowa

$$(a^2+b^2)^2 - 4a^2 b^2 + 4k^2 a^2 b^2 = (a^2-b^2)^2 + 4k^2 a^2 b^2 > 0,$$

następnie

$$|a^2 + b^2| > \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4(1-k^2)a^2 b^2}, \quad k < 1,$$

więc  $x^2$  zawsze  $< 0$ . Oznaczając:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4(1-k^2)a^2 b^2}}{2(1-k^2)} &= \beta_1^2, \\ \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4(1-k^2)a^2 b^2}}{2(1-k^2)} &= \beta_2^2, \end{aligned} \right\} /10/$$

otrzymamy 4 pierwiastki dla  $x$  :



$$x_1 = +j\beta_1, \quad x_2 = -j\beta_1,$$

$$x_3 = +j\beta_2, \quad x_4 = -j\beta_2.$$

Wobec tego całka ogólna równania /9/ będzie:

$$v_1 = A_1 \sin \beta_1 t + A_2 \cos \beta_1 t + \\ + A_3 \sin \beta_2 t + A_4 \cos \beta_2 t. \quad //11//$$

Biorąc dwa razy pochodną  $v_1$ , znajdujemy

$$v_1'' = -\beta_1^2 A_1 \sin \beta_1 t - \beta_1^2 A_2 \cos \beta_1 t - \\ - \beta_2^2 A_3 \sin \beta_2 t - \beta_2^2 A_4 \cos \beta_2 t.$$

Wstawiając tę wartość do /7/, znajdujemy:

$$v_2 = -\frac{(1-k^2)}{k_1 b^2} \left\{ \beta_1^2 (A_1 \sin \beta_1 t + A_2 \cos \beta_1 t) + \right. \\ \left. + \beta_2^2 (A_3 \sin \beta_2 t + A_4 \cos \beta_2 t) \right\} + \\ + \frac{a^2}{k_1 b^2} \left\{ A_1 \sin \beta_1 t + A_2 \cos \beta_1 t + \right. \\ \left. + A_3 \sin \beta_2 t + A_4 \cos \beta_2 t \right\} = \\ = \frac{1}{k_1 b^2} \left\{ [a^2 - \beta_1^2 (1-k^2)] [A_1 \sin \beta_1 t + A_2 \cos \beta_1 t] + \right. \\ \left. + [a^2 - \beta_2^2 (1-k^2)] [A_3 \sin \beta_2 t + A_4 \cos \beta_2 t] \right\},$$

albo

$$v_2 = B_1 \sin \beta_1 t + B_2 \cos \beta_1 t + \\ + B_3 \sin \beta_2 t + B_4 \cos \beta_2 t, \quad /12/$$

gdzie

$$B_1 = \frac{a^2 - \beta_1^2 (1 - k^2)}{k_1 b^2} A_1,$$

$$B_2 = \frac{a^2 - \beta_1^2 (1 - k^2)}{k_1 b^2} A_2,$$

$$B_3 = \frac{a^2 - \beta_2^2 (1 - k^2)}{k_1 b^2} A_3,$$

$$B_4 = \frac{a^2 - \beta_2^2 (1 - k^2)}{k_1 b^2} A_4,$$

lub, oznaczając w skróceniu:

$$p = \frac{a^2 - \beta_1^2 (1 - k^2)}{k_1 b^2};$$

$$q = \frac{a^2 - \beta_2^2 (1 - k^2)}{k_1 b^2},$$

$$B_1 = p A_1,$$

$$B_2 = p A_2,$$

$$B_3 = q A_3,$$

$$B_4 = q A_4.$$

/13/

/14/

Ze wzoru /11/ znajdujemy:

$$i_1 = -C_1 \frac{dv_1}{dt} = -C_1 \beta_1 A_1 \cos \beta_1 t + C_1 \beta_1 A_2 \sin \beta_1 t - \\ - C_1 \beta_2 A_3 \cos \beta_2 t + C_1 \beta_2 A_4 \sin \beta_2 t. \quad /15/$$

Ze wzoru /12/ znajdujemy:

$$i_2 = -C_2 \frac{dv_2}{dt} = -C_2 \beta_1 B_1 \cos \beta_1 t + C_2 \beta_1 B_2 \sin \beta_1 t - \\ - C_2 \beta_2 B_3 \cos \beta_2 t + C_2 \beta_2 B_4 \sin \beta_2 t. \quad /16/$$

Zakładając do wzorów /11/, /12/, /15/ i /16/ warunki graniczne /3/, znajdujemy

$$\begin{aligned} V_0 &= A_2 + A_4, \\ 0 &= B_2 + B_4, \\ 0 &= \beta_1 A_1 + \beta_2 A_3, \\ 0 &= \beta_1 B_1 + \beta_2 B_3, \end{aligned}$$

albo po uwzględnieniu /14/

$$\begin{aligned} A_2 + A_4 &= V_0, \\ pA_2 + qA_4 &= 0, \\ \beta_1 A_1 + \beta_2 A_3 &= 0, \\ \beta_1 pA_1 + \beta_2 qA_3 &= 0. \end{aligned}$$

Z ostatnich dwóch równań znajdujemy:

$$A_1 = 0,$$

$$A_3 = 0,$$

zaś z pierwszych dwóch:

$$A_2 = \frac{q}{q-p} V_0,$$

$$A_4 = -\frac{p}{q-p} V_0.$$

Wobec tego na podstawie wzorów /11/

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{pq}{q-p} V_0,$$

$$B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{pq}{q-p} V_0,$$

$$B_2 = -B_4.$$

Podstawiając określone wartości stałych do wzorów /11/, /12/, /15/ i /16/, znajdujemy:

$$v_1 = \frac{q}{q-p} V_0 \cos \beta_1 t - \frac{p}{q-p} V_0 \cos \beta_2 t,$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{pq}{q-p} V_0 \cos \beta_1 t - \frac{pq}{q-p} V_0 \cos \beta_2 t = \\ &= \frac{pq}{q-p} V_0 (\cos \beta_1 t - \cos \beta_2 t), \end{aligned}$$

$$i_1 = C_1 \beta_1 \frac{q}{q-p} V_0 \sin \beta_1 t - C_1 \beta_2 \frac{p}{q-p} V_0 \sin \beta_2 t,$$

$$i_2 = C_2 \beta_1 \frac{pq}{q-p} V_0 \sin \beta_1 t - C_2 \beta_2 \frac{p^2}{q-p} V_0 \sin \beta_2 t =$$

$$= C_2 \frac{pq}{q-p} V_0 (\beta_1 \sin \beta_1 t - \beta_2 \sin \beta_2 t).$$

Z powyższych wzorów widać, że napięcia i prądy zmieniają się sinusoidalnie, przyczem mają drgania o dwóch pulsacjach  $\beta_1$  i  $\beta_2$ .

§ 2. Wyładowanie kondensatora w wypadku, gdy oba obwody są ze sobą w rezonansie.

Na szczególne uwzględnienie zasługuje wypadek, gdy każdy z obwodów rozpatrywany samodzielnie posiada drgania swobodne o tej samej częstotliwości; mówimy wtedy, że obwód drugi jest w rezonansie z pierwszym obwodem.

Oznaczając częstotliwości drgań swobodnych obu obwodów odpowiednio przez  $f_{s_1}$  i  $f_{s_2}$ , będziemy mieli na podstawie wzoru /33/ z Rozdziału III /str. 59 /

$$f_{s_1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}, \quad f_{s_2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}},$$

skąd otrzymujemy warunek rezonansu obu obwodów:

$$L_1 C_1 = L_2 C_2.$$

Wobec tego na podstawie /4/ i /10/

$$a^2 = b^2,$$

$$\beta_1^2 = \frac{2a^2 + \sqrt{4a^4 - 4a^4 + 4k^2 a^4}}{2(1-k^2)} = \frac{a^2(1+k)}{1-k^2} = \frac{a^2}{1-k},$$

$$\beta_2^2 = \frac{2a^2 - \sqrt{4a^4 - 4a^4 + 4k^2 a^4}}{2(1-k^2)} = \frac{a^2(1-k)}{1-k^2} = \frac{a^2}{1+k},$$

$$\beta_1 = \pm \frac{a}{\sqrt{1-k}}; \quad \beta_2 = \pm \frac{a}{\sqrt{1+k}};$$

zaś na podstawie /13/

$$p = \frac{a^2 - a^2(1+k)}{k_1 a^2} = -\frac{k}{k_1},$$

$$q = \frac{a^2 - a^2(1-k)}{k_1 a^2} = \frac{k}{k_1},$$

albo, uwzględniając /8/, że  $k = \sqrt{k_1 k_2}$ , oraz

/4/, że  $\frac{k_2}{k_1} = \frac{C_1}{C_2}$  /dla  $L_1 C_1 = L_2 C_2$ / będziemy

mieli

$$p = -\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}, \quad q = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}};$$

$$q-p = 2 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} .$$

Wobec tego wzory dla napięć i prądów otrzymamy ostatecznie w postaci:

$$v_1 = \frac{1}{2} V_0 \cos \beta_1 t + \frac{1}{2} V_0 \cos \beta_2 t =$$

$$= \frac{1}{2} V_0 [\cos \beta_1 t + \cos \beta_2 t],$$

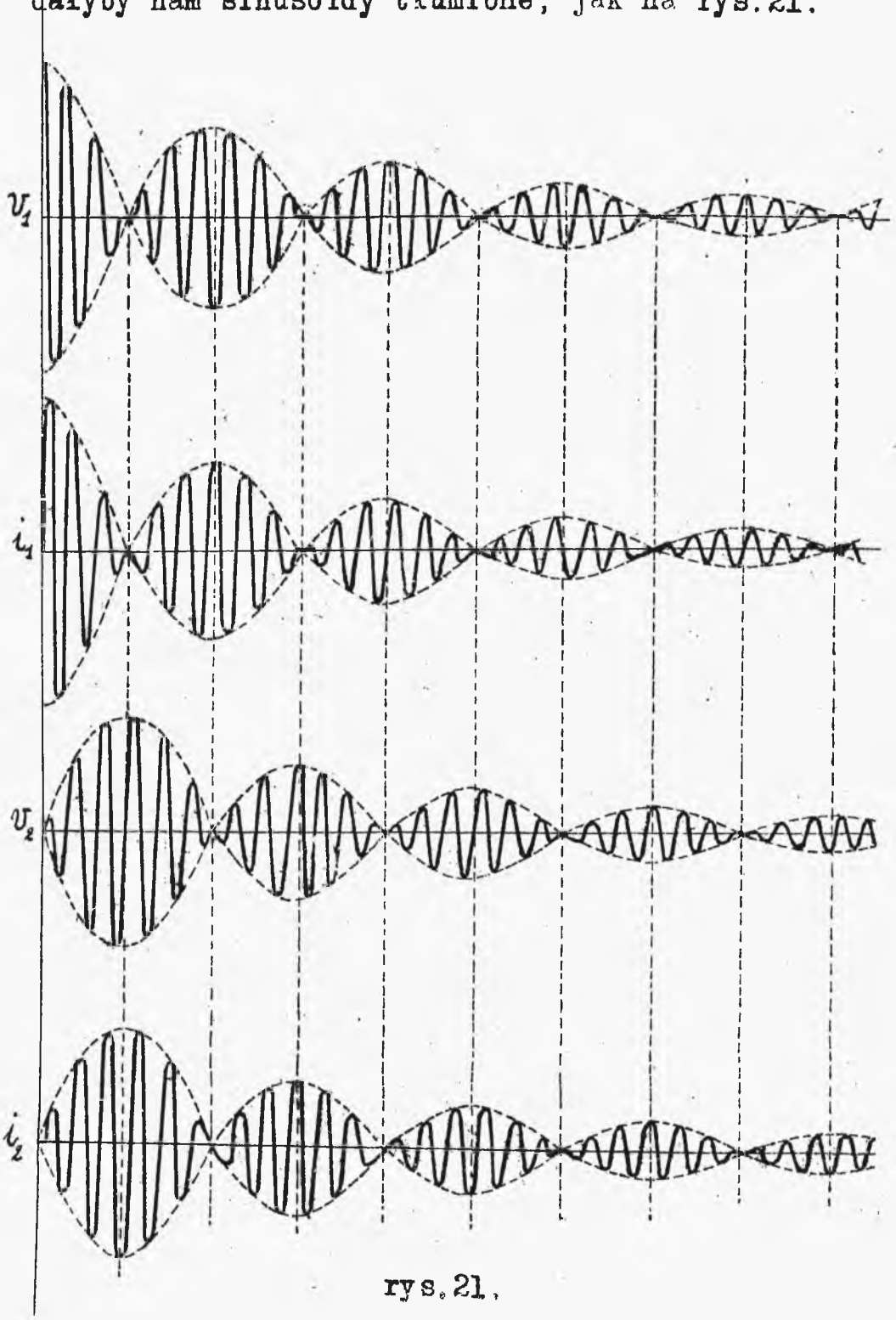
$$v_2 = -\frac{\sqrt{C_1}}{2} V_0 [\cos \beta_1 t - \cos \beta_2 t],$$

$$i_1 = C_1 V_0 \frac{1}{2} [\beta_1 \sin \beta_1 t + \beta_2 \sin \beta_2 t],$$

$$i_2 = -C_2 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \frac{1}{2} V_0 [\beta_1 \sin \beta_1 t - \beta_2 \sin \beta_2 t].$$

Z tych wzorów wnioskujemy, że prądy są przesunięte we fazie o kąt prosty względem odpowiednich napięć, przy czem prądy są opóźnione we fazie o  $\frac{\pi}{2}$  względem napięć. Gdy napięcia przechodzą przez wartość maksymalną, prądy przechodzą przez wartość zero i naodwrot. Gdybyśmy uwzględnili obecność oporności rzeczywistej  $R$ , otrzymalibyśmy jeszcze zjawisko tłumienia i wzory na napięcia i prądy

dałyby nam sinusoidy tłumione, jak na rys.21.



rys. 21.



Kształt funkcji prądu  $i_1$  jest zależny od pulsacji  $\beta_1$  oraz  $\beta_2$ , a mianowicie: nazwijmy przez  $U$  funkcję:

$$U = \beta_1 \sin \beta_1 t + \beta_2 \sin \beta_2 t = \\ = (\beta_1 + \beta_2) \left\{ \sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} t \cos \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} t \right\} + (\beta_1 - \beta_2) \left\{ \sin \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} t \cos \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} t \right\}$$

Na rys. 21 mamy wykres tej funkcji, w wypadku ogólnym, t. j. gdy drgania są tłumione, czyli we wzorach na prąd i napięcie wchodzi jeszcze funkcje wykładnicze. Z rysunku widać, że powstają dudnienia o pulsacji  $\left( \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \right)$ ; gdyby bowiem  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  mielibyśmy dla drgań nietłumionych  $U = 2\beta \sin \beta t$ , czyli stałą amplitudę. Dla drgań tłumionych amplitudy byłyby stale malejące.

Częstotliwość dudnień drgań swobodnych zależy od współczynnika sprzężenia  $k$ .

$$\beta_1 = \frac{a}{\sqrt{1-k}}; \quad \beta_2 = \frac{a}{\sqrt{1+k}};$$

gdy  $k=1$ , czyli dla max. sprzężenia:

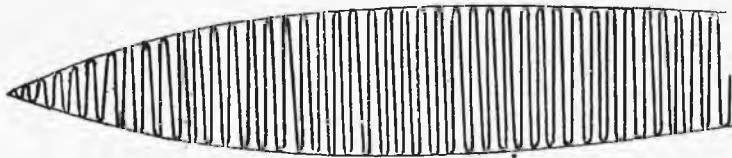
$\beta_1 = \infty$ ,  $\beta_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ; cobydwa obwody drgają z tą samą częstotliwością  $\beta_2 = \beta$ ; dudnień niema.

Analogicznie dla  $k=0$ :

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = a ;$$

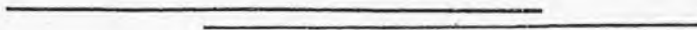
dudnień niema.

Gdy  $k$  jest małe, obwody małe wpływają na siebie, dudnienia będą bardzo powolne, otrzymamy wykres dla prądu  $i_2$ , jak na rys.22.



$$i_2 = f(t).$$

rys.22.



B. O B W O D Y Z R O Z Ł O Ż O N E M I  
S T A Ł E M I .

R O Z D Z I A Ł I.

OKREŚLENIE NAPIĘĆ I PRĄDÓW W OBWODACH Z RÓWNO  
MIERNIE ROZŁOŻONEMI STAŁEMI.

§ 1. Równania różniczkowe dla wartości chwilo-  
wych napięć i prądów. Całki ogólne tych  
równań.

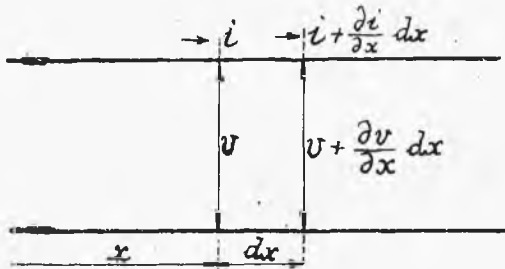
W części I Teorii prądów zmiennych rozpatrywaliśmy przewody z równomiernie rozłożonemi stałemi  $R$ ,  $L$ ,  $A$  i  $C$ , ale tylko w stanie ustalonym, wprowadzając wartości skuteczne napięć i prądów; obecnie dla stanu nieustalonego musimy wyprowadzić wzory dla wartości chwilowych tych wielkości. Rozpatrujemy nieskończenie mały odcinek  $dx$  linii dwuprzewodowej /rys 23/ w odległości  $x$  od źródła prądu. Oznaczając wartości chwilowe napięcia i prądu w rozpatrywanym punkcie odpowiednio przez  $v$  i  $i$ , otrzymamy na podstawie znanych już rozumowań:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} dx = R dx i + L dx \frac{di}{dt},$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} dx = A dx v + C dx \frac{\partial v}{\partial t},$$

albo:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial v}{\partial x} = Ri + L \frac{di}{dt}, \quad /1/ \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = Av + C \frac{\partial v}{\partial t}; \quad /2/ \end{array} \right.$$



rys. 23.

biorąc pochodną /1/  
względem  $x$  i podsta-  
wiając zamiast  $\frac{\partial i}{\partial x}$  je-  
go wartość z /2/ otrzy-  
mujemy:

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -RAv - R \cdot C \frac{\partial v}{\partial t} - LA \frac{\partial v}{\partial t} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

albo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = RAv + (RC + LA) \frac{\partial v}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad /3/$$

Po znalezieniu wartości  $v$  z tego równania mo-  
żemy określić wartość  $i$  z równania /2/.

Równanie /3/ jest równaniem różniczkowym o po-  
chodnych cząstkowych i może być rozwiązane rozmai-  
temi sposobami; odpowiedź otrzymamy w postaci roz-  
maitych szeregów, sumy tych szeregów muszą dawać  
te same rezultaty Zastosujemy metodę Eulera.

Założmy, że niewiadoma funkcja  $v$  jest iloczynem dwóch funkcyj, z których każda jest funkcją jednej tylko zmiennej  $t$  lub  $x$ , więc:

$$v = T \cdot X, \quad /4/$$

gdzie

$$T = f_1(t),$$

$$X = f_2(x);$$

wtedy

$$\frac{\partial v}{\partial x} = T \frac{dX}{dx}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = T \frac{d^2 X}{dx^2};$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = X \frac{dT}{dt}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = X \frac{d^2 T}{dt^2}.$$

Podstawiając te wartości do /3/, otrzymamy:

$$T \frac{d^2 X}{dx^2} = R A T X + (R C + L A) X \frac{dT}{dt} + L C X \frac{d^2 T}{dt^2},$$

lub po podzieleniu przez  $T X$ :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = R A + \frac{R C + L A}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{L C}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad /5/$$

Lewa strona tego równania zależy tylko od  $x$ , prawa zaś tylko od  $t$ ; ponieważ równość musi mieć miejsce przy dowolnych wartościach  $x$  i  $t$ , więc jest to możliwe tylko wówczas, gdy każdy z tych wyrazów ma jedną i tę samą stałą i rzeczywistą wartość liczbowa.

Ta stała nie może mieć wartości dodatniej, np.  $+a^2$ , gdzie  $a$  może mieć jaką choć wartość liczbowa; rzeczywiście mielibyśmy wówczas:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = a^2,$$

skąd

$$X = K_1 e^{ax} + K_2 e^{-ax},$$

gdzie  $K_1$  i  $K_2$  stałe dowolne, ale z tego wynikałoby, że przy wzroście  $x$  do  $\infty$  funkcja  $X$  również wzrastałaby do nieskończoności; do takich samych rezultatów doszlibyśmy, badając funkcję  $T$  gdybyśmy przyrównali do  $+a^2$  prawą stronę równania /5/; czyli, że w takim wypadku napięcie  $v=TX$  wzrastałoby do nieskończoności ze wzrostem  $x$ , co oczywiście nie odpowiada naszemu zagadnieniu. Wobec tego musimy przyjąć tę stałą w postaci liczby ujemnej, a więc  $-a^2$  gdzie  $a$  może naogół mieć wartość dowolną.

Z równania /5/ wobec tego otrzymujemy:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -a^2,$$

$$RA + \frac{RL + LA}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{LC}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -a^2,$$

albo

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + a^2 X = 0,$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \left( \frac{R}{L} + \frac{A}{C} \right) \frac{dT}{dt} + \frac{RA + a^2}{LC} T = 0. \quad /7/$$

Rozwiązując równanie /6/, znajdujemy:

$$X = A_0 \cos ax + B_0 \sin ax, \quad /8/$$

gdzie  $A_0$  i  $B_0$  stałe dowolne.

Dla rozwiązania równania /7/ piszemy równanie charakterystyczne:

$$k^2 + \left( \frac{R}{L} + \frac{A}{C} \right) k + \frac{RA + a^2}{LC} = 0,$$

które daje pierwiastki:

$$k_1 = - \left( \frac{R}{2L} + \frac{A}{2C} \right) + \sqrt{\left( \frac{R}{2L} - \frac{A}{2C} \right)^2 - \frac{a^2}{LC}},$$

$$k_2 = - \left( \frac{R}{2L} + \frac{A}{2C} \right) - \sqrt{\left( \frac{R}{2L} - \frac{A}{2C} \right)^2 - \frac{a^2}{LC}}.$$

W zależności od tego, czy pierwiastki  $k_1$  i  $k_2$  są rzeczywiste różne, lub równe, lub są liczbami zespolonemi, otrzymamy trzy postacie rozwiązań; w pierwszych dwóch wypadkach:

$$1/ \quad T = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t},$$

$$2/ \quad T = e^{kt} (C_1 + C_2 t),$$

gdzie  $C_1$  i  $C_2$  stałe dowolne; ponieważ  $k_1$  i  $k_2$  są

liczbami ujemnymi, więc otrzymujemy funkcje malejąco i to nie osobliwego nie przedstawia; rozpatrujemy więc wypadek, gdy pierwiastki są liczbami zespolonymi; wtedy możemy napisać:

$$k_1 = -\alpha + j\beta,$$

$$k_2 = -\alpha - j\beta,$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{R}{2L} + \frac{A}{2C}, \quad /9/$$

$$\beta = \sqrt{\frac{a^2}{LC} - \gamma^2}, \quad /10/$$

$$\gamma = \frac{R}{2L} - \frac{A}{2C}. \quad /11/$$

Zwróćmy uwagę, że  $\alpha$  i  $\gamma$  zależą tylko od stałych obwodu, więc dla rozpatrywanego obwodu mają wartości stałe, gdy tymczasem  $\beta$  zależy od stałej dowolnej  $a$ .

Całka ogólna w tym wypadku będzie:

$$T = e^{-\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

Podstawiając tę wartość  $T$ , a także wartość  $X$  z /8/, do /4/ i zamieniając iloczyny stałych dowolnych pojedynczemi literami, otrzymamy:

$$v = e^{-\alpha t} \{ (A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t) \cos ax + (B_1 \cos \beta t + B_2 \sin \beta t) \sin ax \}.$$



W zależności od wartości  $a$  możemy otrzymać nieskończoną ilość takich rozwiązań, całka ogólna będzie więc sumą wszystkich takich całek szczególnych; oznaczając dla dowolnej całki szczególnej wartości  $a$  przez  $a_n$ , odpowiednią wartość  $\beta$  przez  $\beta_n$ , zaś stałe dowolne dla tej całki przez  $A_{1n}, A_{2n}, B_{1n}, B_{2n}$ , możemy napisać całkę ogólną w postaci:

$$v = e^{-\alpha t} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ (A_{1n} \cos \beta_n t + A_{2n} \sin \beta_n t) \cos a_n x + (B_{1n} \cos \beta_n t + B_{2n} \sin \beta_n t) \sin a_n x \right\}.$$

Wzór ten można przepisać inaczej, zakładając:

$$A_{1n} \cos \beta_n t + A_{2n} \sin \beta_n t = M_n \sin(\beta_n t + \delta_n),$$

$$B_{1n} \cos \beta_n t + B_{2n} \sin \beta_n t = N_n \sin(\beta_n t + \psi_n),$$

gdzie  $M, N, \delta$  i  $\psi$  stałe dowolne; w ten sposób

$$v = e^{-\alpha t} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ M_n \sin(\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x + N_n \sin(\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x \right\} \quad /12/$$

Teraz określimy prąd ze wzoru /2/:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Av + C \frac{\partial v}{\partial t};$$

biorąc wartość  $v$  ze wzoru /12/, będziemy mieli:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = e^{-\alpha t} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ A M_n \sin(\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x + \right. \\ \left. + A N_n \sin(\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x - \alpha C M_n \sin(\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x - \right. \\ \left. - \alpha C N_n \sin(\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x + \beta_n C M_n \cos(\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x + \right. \\ \left. + \beta_n C N_n \cos(\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x \right\},$$

albo

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = e^{-\alpha t} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ M_n \left[ (A - \alpha C) \sin(\beta_n t + \delta_n) + \beta_n C \cos(\beta_n t + \delta_n) \right] \cos a_n x + \right. \\ \left. + N_n \left[ (A - \alpha C) \sin(\beta_n t + \psi_n) + \beta_n C \cos(\beta_n t + \psi_n) \right] \sin a_n x \right\}.$$

Wyrazy, stojące w nawiasach prostokątnych, możemy zastąpić sinusoidami, których amplitudy będą jednakowe i równe:

$$\sqrt{(A - \alpha C)^2 + (\beta_n C)^2}; \quad \text{wielkość}$$

podpierwiastkowa przy uwzględnieniu /9/, /10/ i /11/ będzie równa:

$$(A - \alpha C)^2 + (\beta_n C)^2 = A^2 - 2AC\alpha + C^2\alpha^2 + C^2\beta_n^2 = \\ = A^2 - 2AC\alpha + C^2(\alpha^2 + \beta_n^2) =$$

$$\begin{aligned}
 &= A^2 - \frac{RAC}{L} - A^2 + C^2 \left\{ \left( \frac{R}{2L} + \frac{A}{2C} \right)^2 + \frac{a_n^2}{LC} - \left( \frac{R}{2L} - \frac{A}{2C} \right)^2 \right\} \\
 &= -\frac{RAC}{L} + C^2 \left\{ \left( \frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{RA}{2LC} + \left( \frac{A}{2C} \right)^2 + \frac{a_n^2}{LC} - \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{RA}{2LC} - \left( \frac{A}{2C} \right)^2 \right\} = -\frac{RAC}{L} + \frac{RAC}{L} + a_n^2 \frac{C}{L}
 \end{aligned}$$

wobec tego amplituda sinusoidy będzie:

$$a_n \sqrt{\frac{C}{L}};$$

kąt przesunięcia fazy tej sinusoidy  $\vartheta_n$  określimy ze wzoru:

$$\operatorname{tg} \vartheta_n = \frac{\beta_n C}{A - \alpha C} = \frac{\beta_n}{\frac{A}{C} - \alpha} = \frac{\beta_n}{\frac{A}{C} - \frac{R}{2L} - \frac{A}{2C}} = -\frac{\beta_n}{\gamma}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial i}{\partial x} = e^{-\alpha t} \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \{ &M_n \sin(\beta_n t + \delta_n + \vartheta_n) \cos a_n x + \\
 &+ N_n \sin(\beta_n t + \psi_n + \vartheta_n) \sin a_n x \}.
 \end{aligned}$$

Dla znalezienia  $i$  całkujemy ten wzór względem  $x$ , wtedy:

$$i = e^{-\alpha t} \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ -M_n \sin(\beta_n t + \delta_n + \vartheta_n) \sin a_n x + \right.$$

$$+ N_n \sin(\beta_n t + \varphi_n + \vartheta_n) \cos a_n x. \quad /13/$$

Stałej dowolnej nie piszemy, gdyż, oczywiście, jest ona równa zero, bowiem przy  $t = \infty, i = 0$ , /bo  $U = 0$ /. Ponieważ

$$-\sin a_n x = \cos\left(a_n x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos a_n x = \sin\left(a_n x + \frac{\pi}{2}\right);$$

przeto, porównywując /13/ z /12/, możemy sformułować otrzymany wynik w ten sposób:

amplitudę prądu otrzymujemy z amplitudy napięcia, mnożąc tę ostatnią przez  $\sqrt{\frac{C}{L}}$ . W czasie prąd jest przesunięty o kąt

$$\vartheta_n = \arctg\left(-\frac{\beta_n}{\gamma}\right);$$

jeżeli  $\gamma > 0$ , czyli  $\frac{R}{L} > \frac{A}{C}$ ,

wtedy  $\vartheta_n < 0$ ,  $\beta_n$  zawsze  $> 0$ , bo to wartość bezwzględna pierwiastka, czyli prąd jest opóźniony w czasie względem napięcia;

gdy  $\frac{R}{L} < \frac{A}{C}$ ,  $\gamma < 0$ , wtedy  $\vartheta_n > 0$ ,

prąd jest przyspieszony w czasie względem napięcia; wreszcie

gdy  $\frac{R}{L} = \frac{A}{C}$ ,  $\gamma = 0$ ,

$$\vartheta_n = \arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2},$$

prąd jest opóźniony w czasie o kąt prosty względem napięcia.

W przestrzeni prąd wyprzedza napięcia o kąt prosty.

Wzory /12/ i /13/ dają nam wartości chwilowe napięcia i prądu w dowolnym punkcie obwodu, odległym o  $X$  od początku w najogólniejszym wypadku; w tych wzorach mamy stałe dowolne:

$M_n, S_n, N_n, \varphi_n, a_n,$   
stałe  $\beta_n$  i  $\gamma_n$  zależą od  $a_n$ .

Wartość tych stałych dowolnych może być znaleziona tylko wtedy, gdy będziemy mieli dostateczną ilość dodatkowych danych, dotyczących wartości napięć i prądów w wiadomych chwilach i w określonych miejscach.

Mówiliśmy już poprzednio, że wartości chwilowe napięć i prądów w stanie nieustalonym można rozpatrywać jako sumę dwóch wartości chwilowych, odpowiadających stanowi ustalonemu i stanowi przejściowemu

$$U = U_u + U_p,$$

$$i = i_u + i_p.$$

Wyżej wyprowadzone równania różniczkowe mogą być zastosowane zarówno do wartości  $U$  i  $i$ , jako też i do poszczególnych wartości  $U_u, i_u$  lub  $U_p, i_p$ . Oczy

wiście, w zależności od tego, jaki stan obwodu rozpatrujemy, stałe dowolne, wchodzące do całek ogólnych równań różniczkowych, będą miały inne wartości

Zajmiemy się obecnie określeniem napięć i prądów przejściowych w okresie nieustalonego stanu obwodu.

Będziemy więc mieli ze wzorów /12/ i /13/:

$$u_p = e^{-\alpha t} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ M_n \sin(\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x + N_n \sin(\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x \right\}, \quad /14/$$

$$i_p = e^{-\alpha t} \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ -M_n \sin(\beta_n t + \delta_n + \vartheta_n) \sin a_n x + N_n \sin(\beta_n t + \psi_n + \vartheta_n) \cos a_n x \right\}, \quad /15/$$

gdzie

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{A}{C} \right), \quad /16/$$

$$\beta_n = \sqrt{\frac{a_n^2}{LC} - \gamma^2}, \quad /17/$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} - \frac{A}{C} \right), \quad /18/$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_n = -\frac{\beta_n}{\gamma}. \quad /19/$$

§ 2. Załączanie linii w końcu otwartej do źródła prądu stałego.

Niech wartość napięcia prądu stałego na zaciskach, do których załączana jest linia w końcu otwarta, wynosi  $V$ . Będziemy mieli następujące warunki graniczne:

przy wszelkich wartościach  $t$ :

1/ dla  $x=0$ : /na początku przy zaciskach/  
wobec tego:  $v = V,$   
 $v_u = V,$   
 $v_p = 0;$

2/ dla  $x=l$ : /w końcu linii/  
 $i = 0,$   
 $i_u = 0,$   
 $i_p = 0;$

przy wszelkich wartościach  $x > 0$ :

3/ dla  $t=0$ :  $v=0,$   $v_u=V,$   $v_p = -V.$

4/ dla  $t=0$ :  $i=0,$   $i_u=0,$   $i_p=0$

Uwzględniając we wzorze /14/ pierwszy warunek graniczny, otrzymamy:

$$0 = e^{-\alpha t} \sum_{n=1}^{n=\infty} M_n \sin(\beta_n t + \delta_n),$$

wobec czego:

$$M_n = 0.$$

W ten sposób zamiast wzorów /14/ i /15/ będziemy mieli

$$v_p = e^{-\alpha t} \sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin(\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x, \quad /20/$$

$$i_p = e^{-\alpha t} \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin(\beta_n t + \psi_n + \vartheta_n) \cos a_n x. \quad /21/$$

Zakładając w ostatnim wzorze na podstawie warunku /2/  $x=l$ ,  $i_p=0$  i zaznaczając, że  $N_n$  nie może być równe zeru, gdyż wtedy  $v_p=0$  przy wszelkich wartościach  $x$ , co przeczy warunkowi /3/, otrzymujemy po uproszczeniu:

$$\cos a_n l = 0,$$

czyli, że wszelkie wartości  $a_n l$  muszą być nieparzystymi wielokrotnościami  $\frac{\pi}{2}$ , a więc

$$a_1 l = \frac{\pi}{2}; a_3 l = 3 \frac{\pi}{2}; a_5 l = 5 \frac{\pi}{2}; \dots; a_{2k+1} l = (2k+1) \frac{\pi}{2};$$

stąd wynika, że stała dowolna  $a_n$  może mieć w tym wypadku tylko następujące wartości:

$$a_1 = \frac{\pi}{2l}; a_3 = \frac{3\pi}{2l} = 3a_1; \dots; a_{2k+1} = \frac{(2k+1)\pi}{2l} = (2k+1)a_1 / 22/$$

Rozpatrując falę napięcia i prądu wzdłuż linii



w określonej chwili, spostrzegamy ze wzorów /20/ i /21/, że długość fali  $\lambda_n$  otrzymamy, gdy

$$a_n(x + \lambda_n) = a_n x + 2\pi,$$

skąd

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{a_n};$$

gdy  $a_n = a_1 = \frac{\pi}{2l}$ , będziemy mieli  $\lambda_1 = 4l$ ,

to znaczy, że cała długość linii zawiera tylko  $1/4$  fali tej sinusoidy; nazwiemy tę sinusoidę główną, inne zaś harmonicznymi sinusoidami.

Dla  $a_n = a_3 = \frac{3\pi}{2l}$  /trzecia harmoniczna/

$$\lambda_3 = \frac{4l}{3},$$

dla  $a_n = a_5 = \frac{5\pi}{2l}$  /piąta harmoniczna/

$$\lambda_5 = \frac{4l}{5};$$

widzimy więc, że cała fala układa się na długości linii tylko dla harmonicznycb wyższych, zaczynając od piątej, przyczem będziemy mieli tylko nieparzyste harmoniczne

Uwzględnijmy teraz warunek /3/ i założmy we wzorze /20/  $t=0, v_p = -V$ , wtedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n \sin \psi_n \sin a_n x = -V, \quad /23/$$

przyczem, jak stwierdziliśmy wyżej,  $a_n$  może mieć tylko wartości podane w /22/.

Wzór /23/ daje nam nieskończony szereg Fouriera:

$$N_1 \sin \psi_1 \sin a_1 x + N_3 \sin \psi_3 \sin 3 a_1 x + \\ + \dots + N_{2k+1} \sin \psi_{2k+1} \sin (2k+1) a_1 x + \dots = -V;$$

w tym szeregu wchodzi tylko nieparzyste sinusoidy, więc krzywa, przedstawiająca naszą funkcję, jest symetryczną i względem osi  $x$  i względem swego początku. Oznaczając dla dogodności

$$a_1 x = z, \quad N_{2k+1} \sin \psi_{2k+1} = A_{2k+1},$$

będziemy mieli szereg

$$A_1 \sin z + A_3 \sin 3z + \dots + A_{2k+1} \sin (2k+1)z = -V;$$

spółczynnik dowolnej sinusoidy określimy ze znanego wzoru

$$A_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(z) \sin (2k+1)z \, dz;$$

u nas  $f(z) = -V$ , więc

$$R_{2k+1} = N_{2k+1} \sin \psi_{2k+1} = - \frac{4V}{\pi} \left| \frac{-\cos(2k+1)z}{2k+1} \right|_0^{\frac{\pi}{2}},$$

czyli ostatecznie:

$$N_{2k+1} \sin \psi_{2k+1} = - \frac{4V}{(2k+1)\pi}. \quad /24/$$

Wreszcie z ostatniego warunku granicznego,  $t=0$ ,  $i_p=0$ , ze wzoru /21/ otrzymamy po skróceniu przez  $\frac{\sqrt{C}}{L}$ :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin(\psi_n + \vartheta_n) \cos a_n x = 0.$$

Ponieważ ta równość powinna mieć miejsce przy wszelkich wartościach  $x$ , przeto każdy współczynnik przy wszystkich  $\cos a_n x$  oddzielnie powinien się równać zero. Uwzględniając, że  $n=2k+1$ , otrzymamy:

$$N_{2k+1} \sin(\psi_{2k+1} + \vartheta_{2k+1}) = 0. \quad /25/$$

Ale  $N_{2k+1}$  nie może być równe 0, jak widać ze wzoru /24/, więc powinno być

$$\sin(\psi_{2k+1} + \vartheta_{2k+1}) = 0,$$

skąd

$$\psi_{2k+1} + \vartheta_{2k+1} = 0,$$

lub wogóle

$$\psi_{2k+1} + \vartheta_{2k+1} = k\pi,$$

gdzie  $k$  liczba całkowita; wtedy

$$\operatorname{tg} \psi_{2k+1} = -\operatorname{tg} \vartheta_{2k+1};$$

ponieważ, ze wzoru /19/ ,

$$\operatorname{tg} \vartheta_{2k+1} = -\frac{\beta_{2k+1}}{\gamma},$$

przeto

$$\operatorname{tg} \psi_{2k+1} = \frac{\beta_{2k+1}}{\gamma}.$$

Z tego wzoru znajdujemy:

$$\sin \psi_{2k+1} = \frac{\operatorname{tg} \psi_{2k+1}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_{2k+1}}} = \frac{\beta_{2k+1}}{\sqrt{\beta_{2k+1}^2 + \gamma^2}};$$

ponieważ ze wzoru /17/

$$\beta_{2k+1}^2 + \gamma^2 = \frac{a_{2k+1}^2}{LC},$$

przeto ostatecznie

$$\sin \psi_{2k+1} = \frac{\beta_{2k+1}}{a_{2k+1}} \sqrt{LC}. \quad /26/$$

Ze wzorów /24/ i /26/ znajdujemy:

$$N_{2k+1} = \frac{4 \sqrt{a_{2k+1}}}{(2k+1)\pi \beta_{2k+1} \sqrt{LC}}.$$

Zamieniając w tym wzorze  $a_{2k+1}$  przez jego wartość ze wzoru 22, a mianowicie

$$a_{2k+1} = (2k+1) \frac{\pi}{2l},$$

trzymamy po skróceniu ostatecznie

$$N_{2k+1} = \frac{2V}{l\sqrt{LC} \cdot \beta_{2k+1}} \quad /27/$$

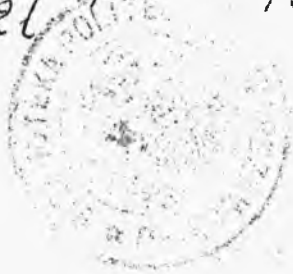
Podstawiając do wzorów /20/ i /21/ znalezione wartości stałych dowolnych, otrzymamy:

$$v_p = - \frac{2V e^{-\alpha t}}{l\sqrt{LC}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_{2k+1}} \sin(\beta_{2k+1} t - \vartheta_{2k+1}) \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x, \quad /28/$$

$$i_p = - \frac{2V e^{-\alpha t}}{lL} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_{2k+1}} \sin \beta_{2k+1} t \cdot \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x, \quad /29/$$

albo inaczej

$$v_p = - \frac{2V}{l\sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \left\{ \frac{1}{\beta_1} \sin(\beta_1 t - \vartheta_1) \sin \frac{\pi x}{2l} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_3} \sin(\beta_3 t - \vartheta_3) \sin \frac{3\pi x}{2l} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_5} \sin(\beta_5 t - \vartheta_5) \sin \frac{5\pi x}{2l} + \dots \right. \quad /30/$$



$$i_p = -\frac{2V}{lL} e^{-\alpha t} \left\{ \frac{1}{\beta_1} \sin \beta_1 t \cos \frac{\pi x}{2l} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_3} \sin \beta_3 t \cos \frac{3\pi x}{2l} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_5} \sin \beta_5 t \cos \frac{5\pi x}{2l} + \dots \right\}, \quad /31/$$

gdzie

$$\beta_{2k+1} = \sqrt{\frac{a_{2k+1}^2}{LC} - \gamma^2} = \sqrt{\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4l^2 LC} - \left(\frac{R}{2L} - \frac{A}{2C}\right)^2} \quad /32/$$

$$\vartheta_{2k+1} = \operatorname{arctg} \left( -\frac{\beta_{2k+1}}{\gamma} \right). \quad /33/$$

Z tych wzorów możemy zbadać amplitudy zarówno głównej fali, jak i wszelkich harmonicznycch, np. dla głównej fali

$$v_{1p} = -\frac{2V}{l\sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \frac{1}{\beta_1} \sin(\beta_1 t - \vartheta_1) \sin \frac{\pi x}{2l},$$

$$i_{1p} = -\frac{2V}{lL} e^{-\alpha t} \frac{1}{\beta_1} \sin \beta_1 t \cos \frac{\pi x}{2l},$$

$$V_{1pm} = \frac{2V e^{-\alpha t}}{l\sqrt{LC} \beta_1},$$

$$I_{1pm} = \frac{2V e^{-\alpha t}}{lL \beta_1},$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{A}{C} \right); \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{\pi^2}{4l^2 LC} - \left( \frac{R}{2L} - \frac{A}{2C} \right)^2}.$$

W zależności od wartości mianownika we wzorach na  $V$  lub  $I$  możemy otrzymać przepięcie lub przetężenie.

§ 3. Załączanie linii w końcu zwartej do źródła prądu stałego.

Warunki graniczne będą:  
przy wszelkich wartościach  $t$ :

1/ dla  $x=0$ :  $v_p=0$ , ( $v=V$ ,  $v_u=V$ ),

2/ dla  $x=l$ :  $v_p=0$ , ( $v=0$ ,  $v_u=0$ ),

przy wszelkich wartościach  $x > 0$ :

3/ dla  $t=0$ :  $v_p = -V$  ( $v=0$ ,  $v_u=V$ ),

4/ dla  $t=0$ :  $i_p = -i_u$  ( $i=0$ ,  $i_p + i_u = 0$ ),

gdzie  $i_u$  może być znalezione ze znanych wzorów dla przewodów w stanie ustalonym.

Wartości napięć i prądów mogą być znalezione w sposób, podany w poprzednim paragrafie.

§ 4. Załączanie linii w końcu otwartej do źródła prądu zmiennego.

Niech wartość napięcia prądu zmiennego sinusoidalnego w chwili zamknięcia obwodu przechodzi przez fazę  $\psi$ , czyli, że wartość chwilowa będzie określona wzorem

$$v_u = V_m \sin(\omega t + \psi).$$

Będziemy mieli następująco warunki graniczne przy wszelkich wartościach  $t$ :

1/ dla  $x=0$  napięcie  $v$  będzie odrazu takie jak po ustaleniu się

$$v = v_u + v_p,$$

2/ dla  $x=l$ :  $v_p = 0$ ;  
 $i = 0$ ,  $i_u = 0$ ,

$$i_p = 0;$$

przy wszelkich wartościach  $x > 0$ :

3/ dla  $t=0$ :  $v = 0$ ,  
 $v_u + v_p = 0$ ,

4/ dla  $t=0$ :  $v_p = -v_u$ ;  
 $i = 0$ ,  $i_u + i_p = 0$ ,  
 $i_p = -i_u$ .

Wartości ustalone napięcia  $v_u$  oraz prądu  $i_u$ , jako funkcje zmiennej odległości  $x$ , mogą być zna-



lezione ze wzorów, dotyczących stanu ustalonego.

Zastosowując te same ogólne wzory /14/ i /15/ dla przejściowych wartości napięcia i prądu, i spostrzegając, że pierwsze dwa warunki graniczne są te same, co i przy prądzie stałym, znajdziemy jak w § 2:

$$M_n = 0; \quad \cos a_n l = 0.$$

Warunek 3-ci da nam

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin \psi_n \sin a_n x = -v_u,$$

skąd, jak dla szeregu Fourier'a,

$$N_{2k+1} \sin \psi_{2k+1} = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_u \sin(2k+1)a_1 x \cdot d(a_1 x); \quad (34)$$

w tym wypadku  $v_u$  jest funkcją  $x$ , która może być określona przez stałe obwodu i przez wartości napięć na początku lub w końcu w stanie ustalonym.

Wreszcie ostatni warunek daje

$$\sqrt{\frac{C}{L}} \sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin(\psi_n + \vartheta_n) \cos a_n x = -i_u,$$

co znowu nam daje szereg Fourier'a, dla którego

$$N_{2k+1} \sin(\psi_{2k+1} + \vartheta_{2k+1}) = -\frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{L}{C}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} i_u \sin(2k+1)a_1 x \cdot d(a_1 x),$$

albo

$$N_{2k+1} \cos \vartheta_{2k+1} \sin \psi_{2k+1} + N_{2k+1} \sin \vartheta_{2k+1} \cos \psi_{2k+1} =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{L}{C}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} i_u \sin(2k+1) a_u x d(a_u x) \quad /35/$$

Ze wzorów /19/ i /17/ znajdujemy:

$$\cos \vartheta_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\beta_{2k+1}^2}{\gamma^2}}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \beta_{2k+1}^2}} = \frac{\gamma \sqrt{LC}}{a_{2k+1}}$$

$$\sin \vartheta_{2k+1} = -\frac{\beta_{2k+1} \gamma \sqrt{LC}}{\gamma a_{2k+1}} = -\frac{\beta_{2k+1} \sqrt{LC}}{a_{2k+1}}$$

zaś ze wzorów /34/ i /35/ możemy znaleźć  $N_{2k+1}$   
oraz  $\psi_{2k+1}$ .

§ 5. Załączanie linii w końcu zwartej do źródła napięcia zmiennego.

Będziemy mieli warunki graniczne analogiczne do tych, które ustaliliśmy dla prądu stałego, mianowicie:

przy wszelkich wartościach  $t$ :

1/ dla  $x=0$ :  $\underline{v_p=0}$  ( $v=v_u$ ),

2/ dla  $x=L$ :  $\underline{v_p=0}$  ( $v=0, v_u=0$ );

przy wszelkich wartościach  $x > 0$ :

3/ dla  $t=0$ :  $\underline{v_p = -v_u}$  ( $v=0$ ),

4/ dla  $t=0$ :  $\underline{i_p = -i_u}$  ( $i=0$ ),

gdzie  $v_u$  i  $i_u$  są funkcjami  $x$ , które mogą być określone na podstawie znanych wzorów dla stanu ustalonego. Sposób rozwiązywania zagadnienia jest taki sam, jak w § 4.

§ 6. Linja nieodkształcająca. Przedstawienie wartości chwilowych napięć i prądów w postaci dwóch fal.

Znaczne uproszczenia we wzorach dla napięć i prądów otrzymamy, rozpatrując linię, w której stałe tworzą znaną proporcję:

$$\frac{R}{L} = \frac{A}{C}, \quad /36/$$

czyli t.zw. linię nieodkształcającą. W tym wypadku wzory /16/ i /18/ dają

$$\alpha = \frac{R}{L} = \frac{A}{C}, \quad /37/ \quad \gamma = 0.$$

Weźmy ogólne równanie różniczkowe /3/:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = RAv + (RC + LA) \frac{\partial v}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad /38/$$

małóżny:

$$v = U e^{-\alpha t}, \quad /39/$$

gdzie  $U$  narazie niewiadoma funkcja dwóch zmiennych  $x$  i  $t$ :

$$U = f(x, t).$$

Wtedy

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-\alpha t} \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{-\alpha t} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = e^{-\alpha t} \left( \frac{\partial U}{\partial t} - \alpha U \right); \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = e^{-\alpha t} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\alpha \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha^2 U \right)$$

Podstawiając te wartości do /38/ i dzieląc obie strony przez  $e^{-\alpha t}$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= RAU + (RC + LA) \left( \frac{\partial U}{\partial t} - \alpha U \right) + LC \left( \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\alpha \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha^2 U \right) = \\ &= U [RA - \alpha(RC + LA) + \alpha^2 LC] + \\ &+ \frac{\partial U}{\partial t} [RC + LA - 2\alpha LC] + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} LC. \quad /40/ \end{aligned}$$

Uwzględniając wartości  $\alpha$  ze wzoru /34/ obliczamy:

$$RA - \alpha(RC + LA) + \alpha^2 LC = RA - \frac{R^2 C}{L} - RA + \frac{R^2 C}{L} = 0,$$

$$RC + LA - 2\alpha LC = RC + RC - 2RC = 0$$

Wobec tego równanie /40/ otrzymuje postać:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \mathcal{L}C \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Oznaczmy

$$a = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}}, \quad /41/$$

czyli  $\mathcal{L}C = \frac{1}{a^2}$ , wówczas

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad /42/$$

Jest to znane równanie różniczkowe d'Alembert'a, wyprowadzone dla drgającej struny. Całka ogólna tego równania ma postać:

$$U = f_1(x-at) + f_2(x+at), \quad /43/$$

gdzie  $f_1$  i  $f_2$  stanowią naogół dowolne funkcje odległości  $x$  i czasu  $t$

Można łatwo sprawdzić słuszność tego rozwiązania, gdyż

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial(x-at)} \cdot -a + \frac{\partial f_2}{\partial(x+at)} \cdot a,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial(x-at)^2} \cdot a^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial(x+at)^2} \cdot a^2 = \\ &= a^2 \left[ \frac{\partial^2 f_1}{\partial(x-at)^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial(x+at)^2} \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial(x-at)} + \frac{\partial f_2}{\partial(x+at)},$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial(x-at)^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial(x+at)^2},$$

skąd widać, że warunek /42/ spełniony.

Podstawiając wartość  $U$  ze wzoru /43/ do /39/, otrzymamy:

$$v = e^{-\alpha t} \{f_1(x-at) + f_2(x+at)\}. \quad /44/$$

Dla znalezienia  $i$  bierzemy wzór /2/:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Av + C \frac{\partial v}{\partial t};$$

podstawiając tutaj znalezioną wartość  $v$ , otrzymamy:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = e^{-\alpha t} \left\{ A(f_1 + f_2) - \alpha C(f_1 + f_2) - Ca \frac{\partial f_1}{\partial(x-at)} + Ca \frac{\partial f_2}{\partial(x+at)} \right\} =$$
$$= e^{-\alpha t} \left\{ (A - \alpha C)(f_1 + f_2) - Ca \left( \frac{\partial f_1}{\partial(x-at)} - \frac{\partial f_2}{\partial(x+at)} \right) \right\}.$$

Wobec /37/

$$A - \alpha C = A - A = 0,$$

więc

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = -Cae^{-\alpha t} \left\{ \frac{\partial f_1(x-at)}{\partial(x-at)} - \frac{\partial f_2(x+at)}{\partial(x+at)} \right\},$$

albo, podstawiając  $a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  i zmieniając znaki

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\alpha t} \left\{ \frac{\partial f_1(x-at)}{\partial(x-at)} - \frac{\partial f_2(x+at)}{\partial(x+at)} \right\}.$$

Całkując względem  $x$ , otrzymamy:

$$i = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\alpha t} \{ f_1(x-at) - f_2(x+at) \}. \quad /45/$$

Wzory /44/ i /45/ dają nam wartości chwilowe napięcia i prądu w dowolnym punkcie przewodu.

Rozpatrzmy dwa punkty, znajdujące się w odległości  $dx$ ; w tym drugim punkcie wartość napięcia i prądu będzie taką samą, jak w punkcie pierwszym po upływie czasu  $dt$ . Wobec tego:

$$1/ \quad x + dx - a(t+dt) = x - at,$$

$$2/ \quad x + dx + a(t+dt) = x + at;$$

z pierwszego równania otrzymujemy

$$dx - a dt = 0; \quad a = \frac{dx}{dt},$$

z drugiego równania

$$dx + a dt = 0; \quad a = -\frac{dx}{dt}.$$

Widzimy stąd, że współczynnik  $a$  stanowi prędkość

kość, z jaką się rozchodzą z jednego dowolnego punktu do drugiego - te same wartości prądu i napięcia; inaczej mówiąc jest to prędkość rozchodzenia się fal napięcia i prądu wzdłuż przewodu.

Ze wzorów /44/ i /45/ stwierdzamy, że napięcie stanowi sumę dwóch fal, zaś prąd różnicę dwóch fal, które rozchodzą się z jedną i tą samą prędkością, ale w kierunkach przeciwnych /prędkości mają znaki przeciwne/; fale te nie zmieniają swego kształtu, tylko zmieniają amplitudy, gdyż zachodzi tłumienie z biegiem czasu, zależne od funkcji wykładniczej  $e^{-\alpha t}$ , która jest funkcją malejącą.

Fale prądu są podobne do odpowiednich fal napięcia; amplitudy fal prądu otrzymujemy z amplitud napięcia, mnożąc je przez  $\sqrt{\frac{C}{L}}$ , co stanowi odwrotność oporności falowej lub oporności charakterystycznej linii w rozpatrywanym wypadku

Prędkość rozchodzenia się fal

$$a = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

gdzie  $c = 3 \cdot 10^8$  km/sec. stanowi prędkość rozchodzenia się światła. Dla przewodów nienawietrzonych z metali magnetycznie obojętnych:

$$\epsilon = 1, \mu = 1, a = c,$$

dla przewodów kablowych

$$\mu = 1, a = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$$



gdzie  $\epsilon$  stała dielektryczna izolacji kabla.

§ 7. Załączanie linii nieodkształcającej do źródła prądu stałego

Zastosujemy otrzymane wzory do wypadku już poprzednio rozpatrzonego, mianowicie do załączenia linii w końcu otwartej do napięcia prądu stałego.

Mieliśmy następujące warunki graniczne:  
przy wszelkich wartościach  $t$  :

1/ dla  $x=0$  ,  $v_p = 0$ ,

2/ "  $x=l$  ,  $i_p = 0$ ;

dla wszelkich wartości  $x > 0$  :

3/ przy  $t=0$  ,  $v_p = -V$ .

4/ "  $t=0$  ,  $i_p = 0$ .

Wprowadzimy te warunki do wzorów /44/ i /45/

$$v_p = e^{-\alpha t} \{ f_1(x-at) + f_2(x+at) \},$$

$$i_p = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \{ f_1(x-at) - f_2(x+at) \}.$$

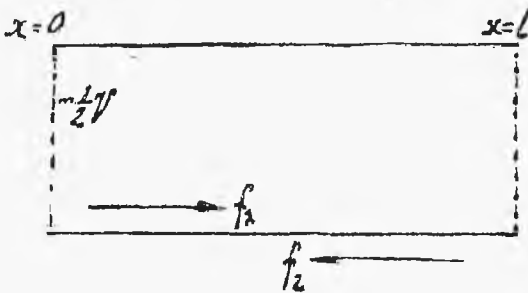
Uwzględniamy 3-ci i 4-ty warunek, wtedy:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= -V, \\ f_1(x) - f_2(x) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

stad

$$f_1(x) = f_2(x) = -\frac{1}{2}V.$$

To znaczy, że przy  $t=0$  obie fale, idąc naprzeciw siebie, są równe sobie i mają stałą wartość  $-\frac{1}{2}V$ . /rys.24/:



Dla innych wartości  $t > 0$  mamy warunki /1/ i /2/; wtedy:

$$f_1(0-at) = -f_2(0+at),$$

$$f_1(l-at) = f_2(l+at).$$

Pierwszy z tych wyni-

rys. 24.

ków wskazuje, że na po-

czątku pierwsza fala /wychodząca/ ma taką samą wartość, jak i druga fala /wchodząca/, ale znak przeciwny. Można rozumować w ten sposób, że fala wychodząca jest odbiciem fali wchodzącej i wypowiedzieć rezultat ten w sposób następujący: fala wchodząca zostaje na początku odbita, zmieniając przy tem znak.

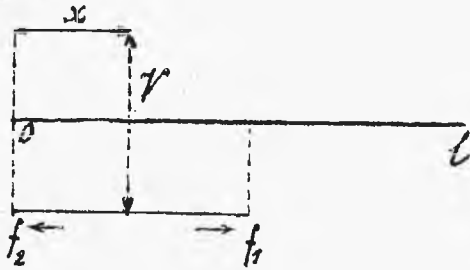
Drugi rezultat wskazuje, że w końcu linii otwartej fala wchodząca  $f_1$  zostaje odbita z tym samym znakiem; to następuje po upływie czasu  $\frac{l}{a}$ .

Na rys.25 wskazany jest wypadek, gdy tłumienia nie uwzględniamy. W odległości  $x$  po upływie cza-

su  $t_0 = \frac{x}{a}$

mamy dwie fale, które się sumują / bo odbita fala zmienia

znak/ i dają napięcie  $V$ . Fala  $f_1$  w miejscu  $x$  wskazuje skok - do nap.  $V$ , spowodowany odbiciem fali  $f_2$  na początku.



rys. 25.

Gdybyśmy uwzględnili tłumienie, to mielibyśmy napięcie

$$V e^{-\alpha t} = V e^{-\alpha \frac{x}{a}}$$

Po upływie czasu  $t_1 = \frac{l}{a}$  / gdy w końcu linii osiągamy napięcie  $V$  / fala  $f_1$  zostaje odbita z tym samym znakiem, wobec tego od tego miejsca  $f_2$  doznaje analogicznego skoku, który dochodzi do początku linii po upływie czasu  $t_2 = \frac{2l}{a}$ . Można zauważyć, że każda fala zmienia swój znak po dwukrotnym przebiegu wzdłuż całej długości linii. Cały okres, zawierający dwie przeciwne zmiany kierunku dla każdej fali, jest dwa razy większy, czyli

$$T = \frac{4l}{a},$$

to znaczy na długości linii mamy 1/4 fali.

Wartości rzeczywiste napięć i prądów otrzymujemy, dodając do wartości przejściowych wartości

ustalone:

$$V = V_p + V_u; \quad i = i_p + i_u.$$


## R O Z D Z I A Ł     II.

### OBLICZANIE POJEMNOŚCI I INDUKCYJNOŚCI W LINIACH ELEKTRYCZNYCH.

#### § 1. Pojemność.

W Podstawach Elektrotechniki określiliśmy pojemność elektryczną przewodnika, jako iloraz znajdującego się na nim ładunku elektrycznego do potencjału tego przewodnika, czyli:

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Tam też wyprowadzone były wzory dla  których układów, tak np. dla kuli o promieniu  $r$ , znajdującej się w powietrzu /stała dielektryczna  $\epsilon = 1$  /:

$$C = r_{cm.} = r \frac{1}{9} 10^{-11} F.$$

Dla kondensatora płaskiego:

$$C = \frac{\epsilon \cdot S}{4\pi d},$$

gdzie  $\epsilon$  stała dielektryczna dielektryka, znajdującego się między dwiema płaskimi okładzinami o po-

wierzchni  $S$  każda, zaś  $d$  grubość dielektryka, czyli odległość między okładzinami.

Dla kondensatora cylindrycznego:

$$C = \frac{\epsilon l}{2 \lg \frac{r_2}{r_1}},$$

gdzie  $l$  długość obu cylindrów,  $r_1$  i  $r_2$  promienie cylindrów wewnętrznego i zewnętrznego,  $\epsilon$  stała dielektryczna dielektryka, znajdującego się między cylindrami.

Obecnie będziemy rozpatrywali przewody, składające się z drutów lub linek okrągłych, gołych oraz izolowanych, czyli przewodów cylindrycznych. Ładunki, znajdujące się na takich przewodach, dają pole elektryczne, którego natężenie będzie skierowane prostopadłe do powierzchni przewodów, czyli prostopadłe do ich osi. Aby móc określać pojemność dla rozmaitych układów takich przewodów, musimy przedewszystkiem umieć określać wartość potencjału w dowolnym punkcie pola elektrycznego, powstającego pod wpływem ładunku przewodów. Najogólniejszy wzór dla potencjału  $V$  w dowolnym punkcie  $(x, y, z)$  pola, jest to wzór Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad //$$

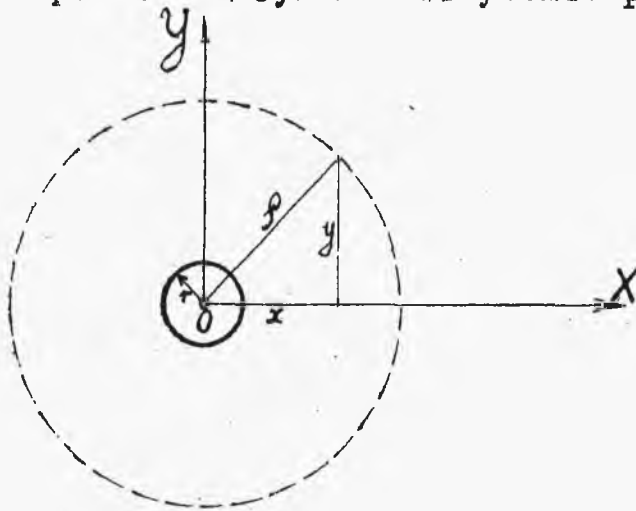
Dla naszych celów wzór ten możemy znacznie

uprościć. Mianowicie będziemy rozpatrywali przewody, których kształt, rozmiary i całe otoczenie są jednakowe na całej rozpatrywanej ich długości. Jeżeli przeprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do takiego przewodu, to zmiana potencjału w rozmaitych punktach tej płaszczyzny będzie niezależną od tego, w jakim miejscu przewodu taka płaszczyzna została przeprowadzona. Biorąc oś przewodu za oś  $Z$ , wyrazimy warunek powyższy w ten sposób, że zmiana potencjału nie zależy od  $Z$ , czyli

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0.$$

/2/

Następnie, ponieważ, jak założyliśmy, przewód jest okrągły, przeto w płaszczyźnie prostopadłej do przewodu /rys.26/ wszystkie punkty, znajdujące



rys.26.

się w jednakowej odległości od osi przewodu  $O$ , będą miały potencjał o tej samej wartości; można więc zamiast dwóch zmiennych  $x$  i  $y$  wprowadzić tylko jedną zmienną  $\rho$

stanowiącą odległość rozpatrywanego punktu od osi przewodu. Wtedy będziemy mieli dla dowolnego punktu

$$\rho^2 = x^2 + y^2; \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}.$$

i wprowadzając do równania /1/ zamiast pochodnych względem  $x$  i  $y$ , pochodne względem  $\rho$ , otrzymamy po uwzględnieniu równania /2/

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{V}_\rho}{\partial \rho} = 0, \quad /3/$$

gdzie  $\mathcal{V}_\rho$  oznacza potencjał w punkcie odległym o  $\rho$  od osi przewodu.

Zakładając w równaniu /3/

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho} = \mathcal{U}, \quad /4/$$

będziemy mieli

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\rho} + \frac{\mathcal{U}}{\rho} = 0,$$

skąd

$$\frac{d\mathcal{U}}{\mathcal{U}} = -\frac{d\rho}{\rho},$$

$$\lg_n \mathcal{U} = -\lg_n \rho + \lg_n \mathcal{K}_1,$$

gdzie  $\mathcal{K}_1$  stała dowolna; wtedy

$$\mathcal{U} = \frac{\mathcal{K}_1}{\rho}$$

i na podstawie /4/

$$\frac{d\mathcal{V}_\rho}{d\rho} = \frac{\mathcal{K}_1}{\rho},$$

czyli

$$V_{\rho} = K_1 \lg_n \rho + K_2, \quad /5/$$

gdzie  $K_2$  druga stała dowolna.

Oznaczając wartość potencjału na samym przewo-  
dzie, którego promień wynosi  $r$ , to znaczy dla

$\rho = r$ , przez  $V_1$ , otrzymamy z /5/

$$V_1 = K_1 \lg_n r + K_2;$$

odejmując stronami ostatni wzór od wzoru /5/, otrzy-  
mamy:

$$V_{\rho} = V_1 + K_1 \lg_n \frac{\rho}{r}. \quad /6/$$

Dla określenia stałej  $K_1$  musimy znać wartość  
potencjału jeszcze w jakiegokolwiek odległości, np gdy  
dla  $\rho = R$  potencjał ma wartość  $V_2$ , wtedy ze wzo-  
ru /6/ będziemy mieli

$$V_2 = V_1 + K_1 \lg_n \frac{R}{r},$$

$$K_1 = - \frac{V_1 - V_2}{\lg_n \frac{R}{r}},$$

$$V_{\rho} = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{\lg_n \frac{R}{r}} \lg_n \frac{\rho}{r}. \quad /7/$$

Z Podstaw Elektrotechniki wiemy, że natężenie po-  
ła elektrycznego  $\vec{F}$ , wywołanego przez ładunek rów-  
nomiernie rozłożony na powierzchni walca /przewodu



cylintrycznego/, określone jest wzorem

$$F = \frac{2Q}{\epsilon \cdot \rho},$$

gdzie  $Q$  ładunek, przypadający na 1 cm długości walca,  $\epsilon$  stała dielektryczna środowiska, w którym się walec znajduje,  $\rho$  odległość rozpatrywanego punktu pola do osi walca.

Również wiemy, że

$$F = - \frac{dV_\rho}{d\rho},$$

wobec czego

$$- \frac{dV_\rho}{d\rho} = \frac{2Q}{\epsilon \rho}. \quad /8/$$

Ze wzoru /7/ znajdujemy:

$$- \frac{dV_\rho}{d\rho} = \frac{V_1 - V_2}{\lg_n \frac{R}{r}} \cdot \frac{1}{\rho},$$

więc ze wzoru /8/ otrzymamy

$$\frac{V_1 - V_2}{\lg_n \frac{R}{r}} = \frac{2Q}{\epsilon}. \quad /9/$$

Uwzględniając ostatnie równanie oraz wzór /7/, możemy potencjał w punkcie, znajdującym się w odległości  $\rho$  od osi przewodu, określić w sposób następujący:

$$V_\rho = V_1 - \frac{2Q}{\epsilon} \lg_n \frac{\rho}{r}, \quad /10/$$

gdzie  $V_1$  stanowi potencjał własny przewodu,  $Q$  ładunek, przypadający na 1 cm. długości,  $r$  promień przewodu,  $\epsilon$  stałą dielektryczną środowiska, otaczającego przewód.

Wzory /9/ i /10/ dadzą możność określania pojemności dla rozmaitych układów przewodów.

## § 2. Pojemność kabla jednożyłowego obołowionego.

Taki kabel można rozpatrywać jako kondensator cylindryczny, którego jedną okładzinę stanowi sam przewód, zaś drugą okładzinę płaszcz ołowiany. Oznaczając promień przewodu przez  $r$ , lub jego średnicę przez  $d$ , zaś promień kabla pod płaszczem przez  $R$ , lub jego średnicę przez  $D$ , odpowiednie potencjały przez  $V_1$  i  $V_2$ , otrzymamy wprost ze wzoru /9/ dla pojemności takiego kabla na 1 cm. długości:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon}{2 \lg_n \frac{R}{r}} = \frac{\epsilon}{2 \lg_n \frac{D}{d}};$$

wzór ten daje nam wartość pojemności w jednostkach układu elektrostatycznego, czyli w centymetrach, dla przejścia do układu elektromagnetycznego musimy uwzględnić, że

$$1 F = 9 \cdot 10^{11} c., \text{ lub } 1 \mu F = 9 \cdot 10^5 c.;$$

następnie zwykle obliczamy pojemność przewodów nie

na 1 cm. długości, lecz na  $1 \text{ km} = 10^5 \text{ c.}$  i podajemy w  $\mu\text{F}$ ; wobec tego będziemy mieli:

$$C = \frac{\epsilon}{18 \lg_n \frac{R}{r}} = \frac{\epsilon}{18 \lg_n \frac{D}{d}},$$

lub, wprowadzając logarytmy dziesiętne, otrzymamy:

$$C = \frac{0,0241 \cdot \epsilon}{\lg \frac{R}{r}} = \frac{0,0241 \cdot \epsilon}{\lg \frac{D}{d}} \frac{\mu\text{F}}{\text{km}}. \quad //11/$$

### Przykład .

Kabel jednożyłowy obołowiony ma przewód o przekroju  $16 \text{ mm}^2$ ; średnica przewodu wynosi  $d = 5,1 \text{ mm.}$ , grubość izolacji papierowej  $2 \text{ mm.}$ , wobec czego średnica kabla pod płaszczem wynosi  $9,1 \text{ mm.}$  Mamy:

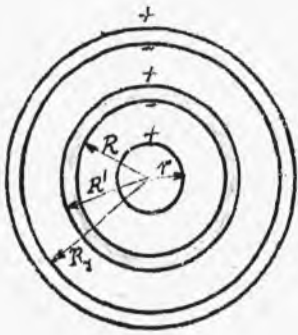
$$\frac{D}{d} = \frac{91}{51}; \quad \lg \frac{91}{51} = 0,251.$$

Stała diel. dla papieru impregnowanego  $\epsilon = 4,31$ .

$$C = \frac{0,0241 \cdot 4,31}{0,251} = 0,414 \frac{\mu\text{F}}{\text{km}}.$$

### § 3. Pojemność kabla jednożyłowego opancerzonego.

Kabel opancerzony posiada trzy metalowe powierzchnie cylindryczne: sam przewód, następnie płaszcz ołowiany, wreszcie opancerzenie żelazne /rys. 27/.



rys. 27.

Taki układ można rozpatrywać jako dwa kondensatory połączone w szereg. Oznaczając przez  $C_1$  pojemność 1-go kondensatora /przewód i płaszcz ołowiany/, przez  $C_2$  pojemność 2-go kondensatora /płaszcz ołowiany i pan-

cerz/, będziemy mieli dla pojemności kabla:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Oznaczając przez  $r, R, R', R_1$  promienie przewodu, pod płaszczem, nad płaszczem i pod pancierzem, otrzymany na podstawie wzoru /11/

$$C_1 = \frac{0,0241 \ \epsilon_1}{\lg \frac{R}{r}} \frac{\mu F}{km},$$

$$C_2 = \frac{0,0241 \ \epsilon_2}{\lg \frac{R_1}{R'}} \frac{\mu F}{km},$$

gdzie  $\epsilon_1$  - stała dielektryczna izolacji przewodu, zaś  $\epsilon_2$  stała dielektryczna materiału, znajdującego się pomiędzy płaszczem ołowianym i pancierzem /zwykle nasycona taśma papierowa i warstwa materiału włóknistego, nasyconego asfaltem/.

Wobec tego

$$C = \frac{0,0241}{\frac{1}{\epsilon_1} \lg \frac{R}{r} + \frac{1}{\epsilon_2} \lg \frac{R_1}{R'}} \frac{\mu F}{km}.$$

Jeżeli  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$  /np. papier nasycony i juta mają prawie równe stałe dielektryczne 4,31/, wtedy

$$C = \frac{0,0241 \epsilon}{\lg \frac{RR_1}{rR'}} \frac{\mu F}{km} \quad 121$$

Porównując wzór /12/ ze wzorem /11/, możemy stwierdzić, że obecność drugiej okładziny metalowej zmniejsza pojemność kabla  $(\frac{RR_1}{rR'} > \frac{R}{r})$ .

### Przykład .

Ten sam kabel, co w przykładzie poprzednim /str 139/, posiada jeszcze pancera żelazny, grubość płaszcza ołowianego wynosi 2 mm., grubość warstwy pomiędzy ołowiem i żelazem wynosi również 2 mm.

Wobec tego

$$r = 2,55 \text{ mm.}, \quad R = 2,55 + 2 = 4,55 \text{ mm.},$$

$$R' = 4,55 + 2 = 6,55 \text{ mm.},$$

$$R_1 = 6,55 + 2 = 8,55 \text{ mm.},$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 4,31,$$

$$C = \frac{0,0241 \cdot 4,31}{\lg \frac{455 \cdot 855}{255 \cdot 655}} = 0,280 \frac{\mu F}{km},$$

gdy tymczasem przy jednym płaszczu ołowianym pojemność wyniosła:

$$0,414 \frac{\mu F}{km}.$$

§ 4. Rozkład napięć na okładzinach metalowych kabla opancerzonego.

Na rozpatrzonym kablu z dwiema okładzinami metalowymi zbadajmy, jak się rozkłada napięcie pomiędzy przewodem i poszczególnymi okładzinami. Oznaczmy napięcia /względem ziemi/ przewodu, płaszcza ołowianego i pancerza odpowiednio przez  $V, V_1, V_2$ , zaś pojemności, jak i poprzednio - przewodu względem płaszcza ołowianego przez  $C_1$  oraz płaszcza ołowianego względem pancerza przez  $C_2$ . Oznaczmy dalej ładunek elektryczny, który mamy na przewodzie i tak samo na każdej z okładzin, przez  $Q$

Wtedy

$$Q = C_1 (V - V_1),$$

$$Q = C_2 (V_1 - V_2),$$

skąd

$$\frac{V - V_1}{V_1 - V_2} = \frac{C_2}{C_1}.$$

Z tego wzoru widzimy, że spadki napięć w rozpatrywanych częściach kabla są odwrotnie propor-

cyjonalne do pojemności tych części. -

Jeżeli, co bywa przeważnie, pancierz jest połączony z ziemią i ma napięcie = 0, wtedy, zakładając w powyższym wzorze  $V_2 = 0$ , otrzymamy:

$$\frac{V - V_1}{V_1} = \frac{C_2}{C_1},$$

skąd

$$V_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V.$$

#### Przykład.

Ten sam kabel, co i poprzednio, o przekroju  $16 \text{ mm}^2$  jest pod napięciem  $V = 100$  woltów, pancierz uziemiony; mieliśmy

$$C_1 = 0,414 \frac{\text{mF}}{\text{km}},$$

$$C_2 = \frac{0,0241 \cdot 4,31}{\lg \frac{85,3}{655}} = 0,898 \frac{\text{mF}}{\text{km}},$$

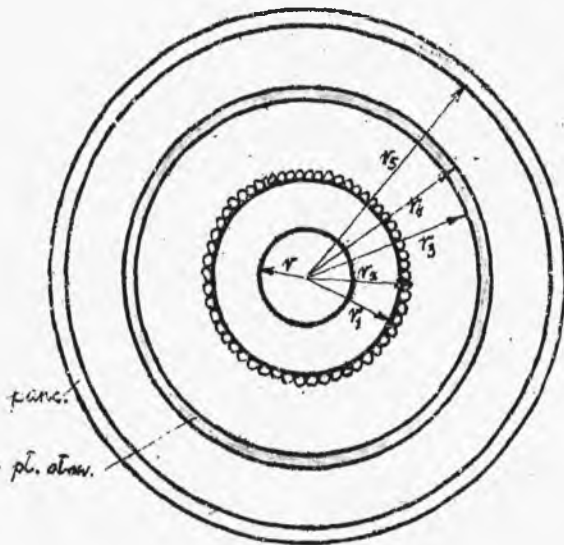
wobec tego napięcie na ołowiu będzie.

$$V_1 = \frac{0,414}{0,414 + 0,898} \cdot 100 = 31,6 \text{ wolta.}$$

To znaczy, że spadek napięcia od przewodu do płaszcza ołowianego wynosi 68,4 wolta, - od płaszcza do pancierza - 31,6 wolta.

§ 5. Pojemność kabla dwużyłowego - koncentrycznego.

Przekrój takiego kabla z oznaczeniem promieni pokazany jest na rys. 28.



rys 28.

Dwa przewody zewnętrzny i wewnętrzny służą do przenoszenia tego samego prądu w dwóch przeciwnych kierunkach. Wobec tego napięcia na nich mają te same wartości i różnią się tylko znakiem,

Niech na jednym przewodzie napięcie będzie  $+V$ , zaś na drugim  $-V$ . Ładunek, przypadający na 1 cm. długości przewodu wewnętrznego, określimy ze wzoru /9/

$$Q = \frac{\epsilon(V_1 - V_2)}{2 \lg_n \frac{r_2}{r}} = \frac{\epsilon [V - (-V)]}{2 \lg_n \frac{r_2}{r}} = \frac{\epsilon V}{\lg_n \frac{r_2}{r}}.$$

Wobec tego pojemność przewodu wewnętrznego będzie w centymetrach:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon}{\lg_n \frac{r_2}{r}},$$

albo, po przejściu do zwykłych logarytmów i do jednostek praktycznych:



$$C_1 = \frac{0,0483 \varepsilon}{\lg \frac{r_1}{r}} \frac{\mu F}{km}$$

Pojemność przewodu zewnętrznego stanowi sumę dwóch pojemności, jedną w stosunku do przewodu wewnętrznego - i ta pojemność ma tę samą wartość  $C_1$ , druga pojemność - w stosunku do płaszcza ołowianego, ta druga pojemność według wzoru /11/ będzie:

$$C_0 = \frac{0,0241 \varepsilon}{\lg \frac{r_3}{r_2}} \frac{\mu F}{km},$$

zaś w razie istnienia jeszcze pancerza żelaznego będzie według wzoru /12/

$$C_0' = \frac{0,0241 \varepsilon}{\lg \frac{r_3 r_5}{r_2 r_4}} \frac{\mu F}{km}$$

Wobec tego pojemność przewodu zewnętrznego będzie przy jednym płaszczu ołowianym

$$C_2 = C_1 + C_0 = 0,0483 \varepsilon \left\{ \frac{1}{\lg \frac{r_1}{r}} + \frac{1}{2 \lg \frac{r_3}{r_2}} \right\},$$

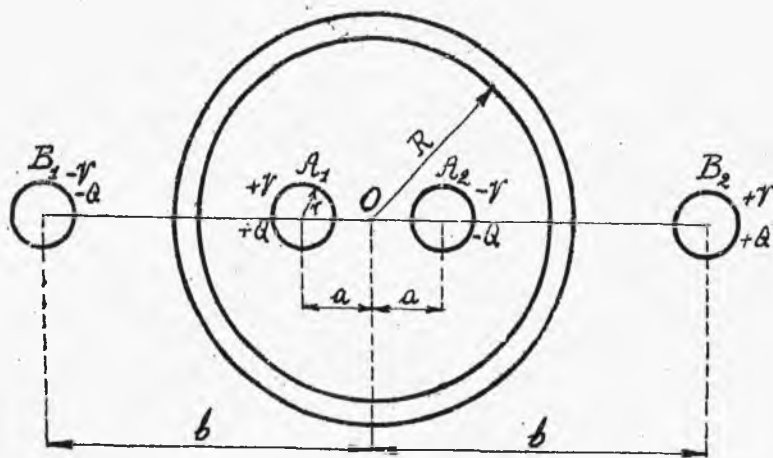
zaś przy płaszczu i uziemieniu pancerza

$$C_2 = C_1 + C_0' = 0,0483 \varepsilon \left\{ \frac{1}{\lg \frac{r_1}{r}} + \frac{1}{2 \lg \frac{r_3 r_5}{r_2 r_4}} \right\}.$$

Niejednostajna pojemność obu przewodów w takim kablu powoduje to, że prądy ładowania będą w nich różne; oprócz tego straty w izolacji, otaczającej przewody, na histerezę dielektryczną, zależne od pojemności, również będą się różniły. Te okoliczności mogą wywoływać niepożądane zjawiska. Obecnie kable koncentryczne coraz rzadziej są używane.

§6. Pojemność kabla dwużyłowego skręconego.

W przekroju /rys. 29 / mamy dwa przewody /żyły/  $A_1$  i  $A_2$  okrągłe, o jednakowym promieniu  $r$ , symetrycznie położone z obu stron środka kabla  $O$ . Od-



rys. 29.

ległość osi tych przewodów od osi kabla niech będzie  $a$ . - Płaszcz ołowiany ma średnicę wewnętrzną  $R$ . Przez

oba przewody płynie prąd o tej samej wartości, lecz o kierunkach przeciwnych. Ładunki na 1 cm. długości i potencjały obu przewodów oznaczmy odpowiednio

przez  $\pm a$ ,  $\pm b$ .

Lord Kelvin wykazał, że układ, zawierający szereg naładowanych przewodów, znajdujących się wewnątrz cylindrycznej powierzchni metalowej, można zastąpić układem równoważnym, w którym zamiast cylindrycznej powierzchni będziemy mieli t.zw. elektryczne odbicia tych przewodów. Elektrycznym odbiciem jest przewód umysłony, znajdujący się poza powierzchnią cylindryczną; oś takiego przewodu leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez oś układu /kable/ w takiej odległości, że promień przekroju powierzchni cylindrycznej /płaszczyzna/  $R$  stanowi średnią geometryczną pomiędzy odległościami od osi układu rzeczywistego przewodu  $a$  i elektrycznego odbicia  $b$ .

Dla ścisłości trzeba zaznaczyć, że odległości powinny być mierzone nie od geometrycznych osi przewodów, lecz od ich osi elektrycznych, czyli od linii, w których możemy skupić ładunki, rozłożone na powierzchni przewodów, aby otrzymać takie same działanie zewnętrzne. Osie elektryczne przy niewielkich przekrojach przewodów znajdują się bardzo blisko od osi geometrycznych, wobec czego tej różnicy przy wyprowadzeniu wzorów praktycznych

nie uwzględniamy.

Na tych elektrycznych odbiciach musimy mieć ładunki i potencjały te same, co i na odnośnych przewodach, lecz o znakach przeciwnych.

Na rys.29  $B_1$  stanowi elektryczne odbicie przewodu  $A_1$ , na nim mamy  $-Q$  i  $-V$ ;  $B_2$  stanowi odbicie przewodu  $A_2$ , na nim mamy  $+Q$  i  $+V$ . Po-  
zatem musi być spełniony warunek:

$$R^2 = a \cdot b.$$

Pojemność każdej żyły znajdziemy, dzieląc ładunek przez potencjał tej żyły. Każdy z przewodów posiada potencjał wypadkowy, stanowiący sumę potencjału własnego, powstającego od własnego ładunku /w przypuszczeniu, że wszystkie inne przewody są połączone z ziemią/, oraz potencjałów, powstających od ładunków, znajdujących się na przewodach, otaczających rozpatrywany przewód. Oznaczając potencjał własny każdego z dwóch przewodów przez  $\pm V_1$ , będziemy mogli określić wartość potencjału na rozpatrywanym przewodzie, powstającego od innych ładunków, stosując wzór /10/:

$$V_s = V_1 - \frac{2Q}{\epsilon} \lg_n \frac{R}{r}.$$

Rozpatrzmy przewód  $A_1$ .

Jego potencjał własny wynosi  $+V_1$   
 Potencjał od ładunku na odbiciu  $B_1: -V_1 + \frac{2Q}{\epsilon} \lg_{\rho_n} \frac{b-a}{r}$

" " " na przewodzie  $A_2: -V_1 + \frac{2Q}{\epsilon} \lg_{\rho_n} \frac{2a}{r}$

" " " " odbiciu  $B_2: +V_1 - \frac{2Q}{\epsilon} \lg_{\rho_n} \frac{b+a}{r}$

Biorąc sumę tych potencjałów, otrzymamy faktyczny potencjał przewodu:

$$V = \frac{2Q}{\epsilon} \left[ \lg_{\rho_n} \frac{b-a}{r} + \lg_{\rho_n} \frac{2a}{r} - \lg_{\rho_n} \frac{b+a}{r} \right],$$

albo

$$V = \frac{2Q}{\epsilon} \lg_{\rho_n} \left[ \frac{2a(b-a)}{r(b+a)} \right].$$

Na podstawie zależności  $R^2 = ab$ , mamy  $b = \frac{R^2}{a}$

i wobec tego:

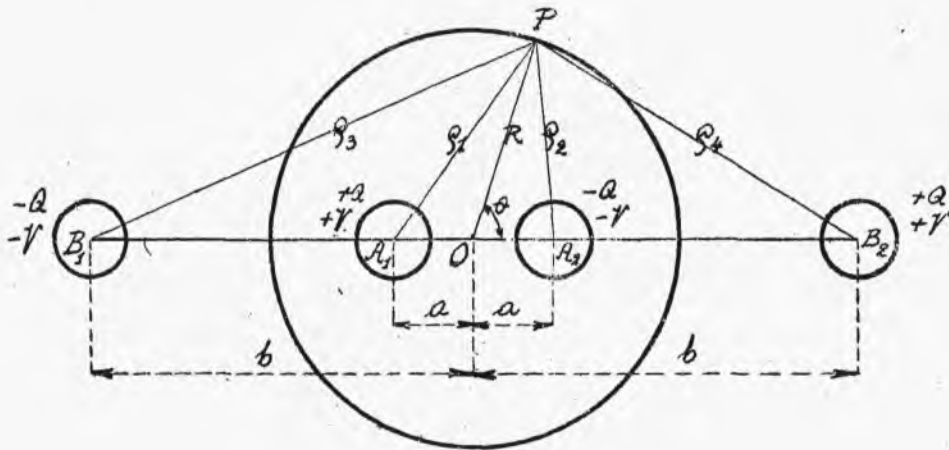
$$V = \frac{2Q}{\epsilon} \lg_{\rho_n} \left[ \frac{2a(R^2 - a^2)}{r(R^2 + a^2)} \right];$$

stąd otrzymujemy pojemność jednej żyły w centymetrach na 1 cm. długości

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon}{2 \lg_{\rho_n} \left[ \frac{2a(R^2 - a^2)}{r(R^2 + a^2)} \right]},$$

lub

$$C = \frac{0,0241 \epsilon}{\lg \left[ \frac{2a(R^2 - a^2)}{r(R^2 + a^2)} \right]} \frac{\mu F}{km}.$$



rys. 30.

Można wykazać, że w rozpatrywanym kablu, gdy potencjały na obu przewodach różnią się tylko znakami, na płaszczy ołowianym potencjał będzie równy 0.

W tym celu rozpatrzmy dowolny punkt  $P$  na płaszczy /rys.30/. Oznaczmy odległości tego punktu od osi  $A_1, A_2$  i  $B_1, B_2$  odpowiednio przez  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  i  $\rho_4$ .

Dla obliczenia potencjału  $V_P$  w punkcie  $P$  mamy:

potencjał od ładunku prze-

wodu  $A_1$  wynosi  $V_1 = \frac{2Q}{\epsilon} \lg_n \frac{\rho_1}{r}$ ,

" " " "  $A_2$  "  $-V_1 + \frac{2Q}{\epsilon} \lg_n \frac{\rho_2}{r}$ ,

" " " "  $B_1$  "  $-V_1 + \frac{2Q}{\epsilon} \lg_n \frac{\rho_3}{r}$ ,

potencjał od ładunku przewodu  $B_2$

$$\text{wynosi : } V_1 = \frac{2Q}{\epsilon} \lg \frac{\rho_4}{r}.$$

Suma tych potencjałów daje nam:

$$V_P = \frac{2Q}{\epsilon} \lg \frac{\rho_2 \rho_3}{\rho_1 \rho_4}.$$

Oznaczając kąt  $POA_2$  przez  $\theta$  i spostrzegając, że  $OP=R$ ,  $OA_1=OA_2=a$ ,  $OB_1=OB_2=b$ ,

będziemy mieli:

$$\rho_1^2 = R^2 + a^2 + 2aR \cos \theta,$$

$$\rho_2^2 = R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta,$$

$$\rho_3^2 = R^2 + b^2 + 2bR \cos \theta,$$

$$\rho_4^2 = R^2 + b^2 - 2bR \cos \theta.$$

Ponieważ  $b = \frac{R^2}{a}$ , więc:

$$\begin{aligned} \rho_3^2 &= R^2 + \frac{R^4}{a^2} + \frac{2R^3}{a} \cos \theta = \frac{R^2}{a^2} (R^2 + a^2 + 2aR \cos \theta) = \\ &= \frac{R^2}{a^2} \rho_1^2, \end{aligned}$$

$$\rho_4^2 = R^2 + \frac{R^4}{a^2} - \frac{2R^3}{a} \cos \theta = \frac{R^2}{a^2} \rho_2^2,$$

albo

$$\rho_3 = \frac{R}{a} \rho_1,$$

$$\rho_4 = \frac{R}{a} \rho_2,$$

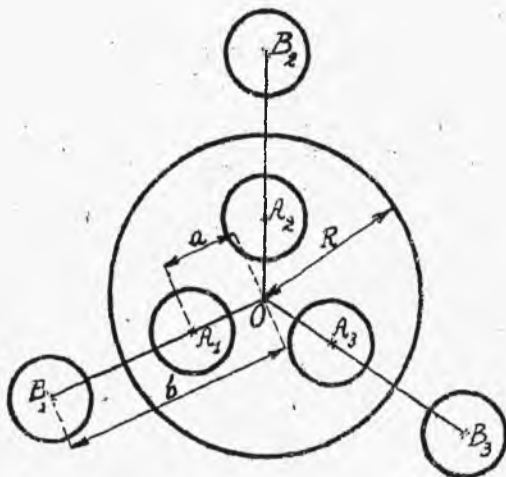
$$\frac{\rho_2 \rho_3}{\rho_1 \rho_4} = \frac{\rho_2 \cdot \frac{R}{a} \rho_1}{\rho_1 \cdot \frac{R}{a} \rho_2} = 1.$$

Wobec tego

$$V_P = \frac{2Q}{\epsilon} \lg_n \frac{\rho_2 \rho_3}{\rho_1 \rho_4} = \frac{2Q}{\epsilon} \lg_n 1 = 0.$$

Więc w dowolnym punkcie płaszcza ołowianego potencjał równy jest 0, czyli na płaszczu niema napięcia. Jasnym jest, że wobec tego następne metalowe powłoki, znajdujące się nad płaszczem, jak np. pancierz, nie mają już żadnego wpływu na pojemności kabla.

### § 7. Pojemność kabla trzyżyłowego skręconego.



rys. 31.

W przekroju poprzecznym /rys. 31/ trzy żyły  $A_1, A_2$  i  $A_3$  są ułożone symetrycznie względem osi  $O$ . Promień każdej żyły  $= r$ , odległość osi żyły od osi kabla  $= a$ . Promień kabla pod płaszczem ołowianym  $= R$ .



Elektryczne odbicia tych przewodów będą  $B_1, B_2, B_3$ ,  
osie których od osi kabla są w odległości  $b$ . Przy  
tem:

$$ab = R^2.$$

Oznaczmy ładunki /w pewnej chwili/ na przewodach  
oraz potencjały odpowiednio przez  $Q_1, Q_2$  i  $Q_3$ ,  $V_1, V_2$   
i  $V_3$ ; te wielkości mogą mieć znaki dodatnie lub  
ujemne; wtedy na odbiciach będziemy mieli odpowied-  
nio:  $-Q_1, -Q_2, -Q_3, -V_1, -V_2, -V_3$ .

Układ, zawierający 3 przewody i płaszczyznę ołowianą,  
zastępujemy więc układem, zawierającym 3 przewody i  
3 elektryczne ich odbicia. Określimy potencjał każ-  
dego z przewodów. Potencjał żyły  $A_1$  stanowi sumę  
potencjałów, powstających od własnego ładunku /równy  
 $V_1'$ / oraz od ładunków innych przewodów. Oznaczmy  
dalej potencjały, które powstałyby na  $A_2$  i  $A_3$  od  
własnych ładunków przez  $V_2'$  i  $V_3'$ ; na odbiciach  
będziemy mieli własne potencjały  $-V_1', -V_2'$  i  $-V_3'$ .

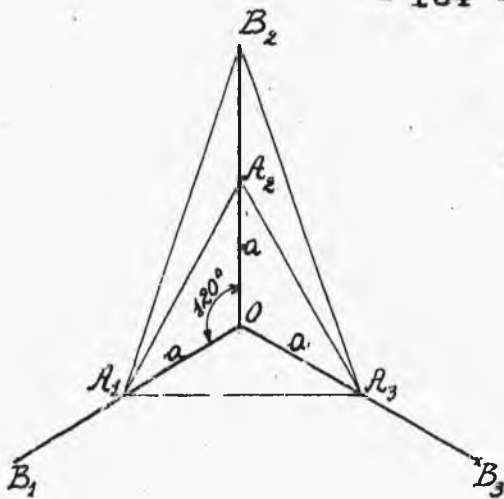
Określamy poszczególne potencjały ze wzoru

$$V_p = V - \frac{2Q}{\epsilon} \lg_n \frac{p}{r}.$$

Mamy następujące geometryczne zależności /rys. 32/:

$$A_1 A_2 = A_1 A_3 = A_2 A_3 = A_1 O \sqrt{3} = a \sqrt{3},$$

$$A_1 B_1 = OB_1 - OA_1 = b - a,$$



rys. 32.

$$\begin{aligned} \overline{B_2 A_1}^2 &= \overline{O A_1}^2 + \overline{O B_2}^2 - \\ &\quad - 2 \cdot O A_1 \cdot O B_2 \cdot \cos 120^\circ = \\ &= a^2 + b^2 + ab, \end{aligned}$$

$$B_2 A_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + ab} = B_2 A_2$$

tak samo:

$$B_3 A_1 = B_3 A_2 = B_1 A_2 =$$

$$= B_1 A_3 = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}.$$

Dla przewodu  $A_1$ :

potencjał własny wynosi:

$$\text{" od przew. } B_1 \text{ " : } -V_1' + \frac{2Q_1}{\epsilon} \lg_n \frac{b-a}{r},$$

$$\text{" " " } A_2 \text{ " : } V_2' - \frac{2Q_2}{\epsilon} \lg_n \frac{a\sqrt{3}}{r},$$

$$\text{" " " } B_2 \text{ " : } -V_2' + \frac{2Q_2}{\epsilon} \lg_n \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + ab}}{r},$$

$$\text{" " " } A_3 \text{ " : } V_3' - \frac{2Q_3}{\epsilon} \lg_n \frac{a\sqrt{3}}{r},$$

$$\text{" " " } B_3 \text{ " : } -V_3' + \frac{2Q_3}{\epsilon} \lg_n \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + ab}}{r}.$$

Biorąc sumę, otrzymamy rzeczywisty potencjał przewodu  $A_1$ :

$$V_1 = \frac{2Q_1}{\epsilon} \lg_n \frac{b-a}{r} + \frac{2Q_2}{\epsilon} \lg_n \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + ab}}{a\sqrt{3}} +$$

$$+ \frac{2Q_3}{\varepsilon} \lg_{\gamma_n} \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{2}{\varepsilon} \left[ Q_1 \lg_{\gamma_n} \frac{b-a}{r} + (Q_2+Q_3) \lg_{\gamma_n} \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} \right].$$

Analogicznie:

$$V_2 = \frac{2}{\varepsilon} \left[ Q_2 \lg_{\gamma_n} \frac{b-a}{r} + (Q_1+Q_3) \lg_{\gamma_n} \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} \right],$$

$$V_3 = \frac{2}{\varepsilon} \left[ Q_3 \lg_{\gamma_n} \frac{b-a}{r} + (Q_1+Q_2) \lg_{\gamma_n} \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} \right],$$

skąd

$$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{2}{\varepsilon} (Q_1 + Q_2 + Q_3) \cdot \left\{ \lg_{\gamma_n} \frac{b-a}{r} + 2 \lg_{\gamma_n} \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} \right\}.$$

Przy prądzie trójfazowym:

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0,$$

wobec czego w tym wypadku również

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0,$$

albo

$$Q_2 + Q_3 = -Q_1.$$

Wobec tego

$$V_1 = \frac{2Q_1}{\varepsilon} \lg_{\gamma_n} \left( \frac{b-a}{r} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+ab}} \right);$$

nie  $b = \frac{R^2}{a}$ , więc  $b-a = \frac{R^2-a^2}{a}$ ;

$$\sqrt{a^2+b^2+ab} = \frac{1}{a} \sqrt{a^4+a^2R^2+R^4};$$

$$V_1 = \frac{2Q_1}{\epsilon} \lg_{10} \frac{(R^2-a^2)a\sqrt{3}}{r\sqrt{a^4+a^2R^2+R^4}} =$$

$$= \frac{Q_1}{\epsilon} \lg_{10} \frac{(R^2-a^2)^2 \cdot 3a^2}{r^2(a^4+a^2R^2+R^4)} =$$

$$= \frac{Q_1}{\epsilon} \lg_{10} \frac{3a^2(R^2-a^2)^3}{r^2(R^6-a^6)}.$$

Stąd znajdujemy pojemność jednej żyły, jako iloraz ładunku  $Q_1$  przez potencjał  $V_1$  w centymetrach

$$C = \frac{\epsilon}{\lg_{10} \frac{3a^2(R^2-a^2)^3}{r^2(R^6-a^6)}},$$

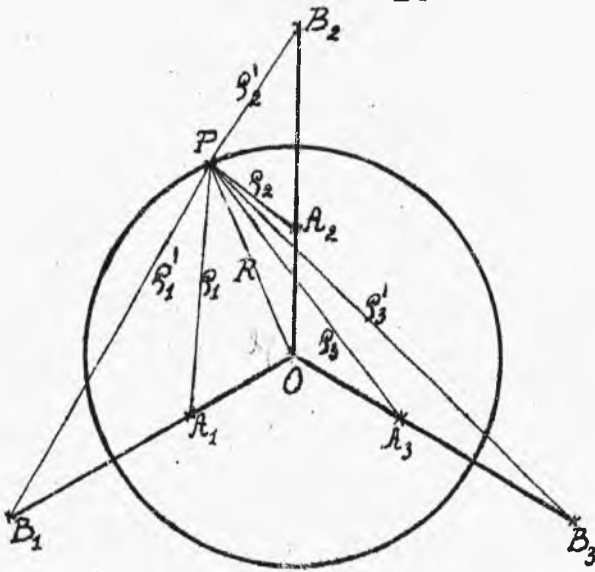
albo

$$C = \frac{0,0483 \cdot \epsilon}{\lg_{10} \frac{3a^2(R^2-a^2)^3}{r^2(R^6-a^6)}} \frac{\mu F}{km}.$$

Wobec symetrii trzech przewodów oczywiście pojemności żył są jednakowe.

Przy prądzie trójfazowym, gdy spełniony jest warunek:

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0,$$



rys. 33.

my / rys. 33 / :

$$A_1 P = \rho_1,$$

$$A_2 P = \rho_2,$$

$$A_3 P = \rho_3,$$

$$B_1 P = \rho'_1,$$

$$B_2 P = \rho'_2,$$

$$B_3 P = \rho'_3.$$

Potencjał od ład  $A_1$  wynosi:  $V_1' = \frac{2Q_1}{\epsilon} \lg_n \frac{\rho_1}{r},$

" " "  $B_1$  "  $:-V_1' + \frac{2Q_1}{\epsilon} \lg_n \frac{\rho'_1}{r},$

" " "  $A_2$  "  $V_2' = \frac{2Q_2}{\epsilon} \lg_n \frac{\rho_2}{r},$

na płaszczyźnie ołowianym napięcia nie będzie, to znaczy, że w dowolnym punkcie  $P$  płaszczyzna potencjał  $V_P = 0$ .

Rzeczywiście, potencjał  $V_P$  znajdziemy jako sumę potencjałów, powstających od ładunku przewodów  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3$  i  $B_3$ . Oznacz-

Potencjał od ład.  $B_2$  wynosi:  $-\mathcal{V}'_2 + \frac{2Q_2}{\varepsilon} \lg \frac{\rho'_2}{r}$ ,

" " "  $A_3$  " :  $\mathcal{V}'_3 - \frac{2Q_3}{\varepsilon} \lg \frac{\rho'_3}{r}$ ,

" " "  $B_3$  " :  $-\mathcal{V}'_3 + \frac{2Q_3}{\varepsilon} \lg \frac{\rho'_3}{r}$ .

Suma daje nam

$$\mathcal{V}'_P = \frac{2}{\varepsilon} \left[ Q_1 \lg \frac{\rho'_1}{\rho_1} + Q_2 \lg \frac{\rho'_2}{\rho_2} + Q_3 \lg \frac{\rho'_3}{\rho_3} \right].$$

Znajdziemy wartości  $\frac{\rho'_1}{\rho_1}$ ,  $\frac{\rho'_2}{\rho_2}$  i  $\frac{\rho'_3}{\rho_3}$ .

z  $\Delta OA_1P$ :  $A_1P^2 = OP^2 + OA_1^2 - 2OP \cdot OA_1 \cos \angle A_1OP$ ,  
czyli

$$\rho_1'^2 = R^2 + a^2 - 2aR \cos \angle A_1OP;$$

z  $\Delta OB_1P$ :

$$B_1P^2 = OP^2 + OB_1^2 - 2OP \cdot OB_1 \cos \angle A_1OP,$$

czyli

$$\rho_1'^2 = R^2 + b^2 - 2bR \cos \angle A_1OP;$$

ale wobec  $b = \frac{R^2}{a}$ ,

$$\rho_1'^2 = R^2 + \frac{R^4}{a^2} - \frac{2R^3}{a} \cos \angle A_1OP =$$

$$= \frac{R^2}{a^2} (R^2 + a^2 - 2aR \cos \angle A_1OP) =$$

$$= \frac{R^2}{a^2} \cdot \rho_1^2,$$

więc

$$\frac{\rho_1'}{\rho_1} = \frac{R}{a};$$

analogicznie znajdziemy:

$$\frac{\rho_2'}{\rho_2} = \frac{\rho_3'}{\rho_3} = \frac{R}{a},$$

więc

$$V_P = \frac{2}{\epsilon} (Q_1 + Q_2 + Q_3) \lg_n \frac{R}{a};$$

ponieważ

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0,$$

więc

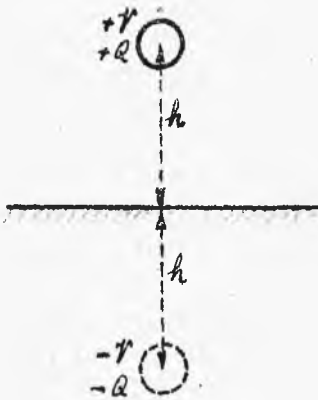
$$V_P = 0.$$

Na tej podstawie możemy stwierdzić, że przy prądzie trójfazowym pojemność kabla trójżyłowego nie zależy od wszelkich powierzchni metalowych, znajdujących się nad płaszczem ołowianym.

§ 8. Pojemność przewodu napowietrznego pojedynczego /drugi przewód ziemia/.-

Układ, zawierający przewód cylindryczny i przewód w postaci powierzchni płaskiej, według teorii Lorda Kelvina możemy zastąpić układem, zawierającym dwa przewody cylindryczne, z których drugi będzie odbiciem elektrycznym, znajdującym się po drugiej stronie płaszczyzny w takiej samej od niej odległości,

co i dany przewód, czyli stanowiący jakby zwierciadlane odbicie pierwszego. - Oznaczając przez  $h$



rys. 34.

odległość osi przewodu od ziemi /rys. 34 /, przez  $r$  jego promień, przez  $\pm V$  i  $\pm Q$  potencjały i ładunki /na 1 cm. długości/ przewodów, rzeczywistego i jego odbicia, oraz przez  $\pm V'$  potencjały własne tych przewodów,

będziemy mieli na zasadzie wzoru /10/:

dla danego przewodu:

potencjał własny

$$V'$$

" od elek. odbicia ( $g=2h$ ):  $-V' + \frac{2Q}{\epsilon} \lg_n \frac{2h}{r}$ ,

a więc suma

$$V = \frac{2Q}{\epsilon} \lg_n \frac{2h}{r};$$

stad znajdujemy pojemność przewodu na 1 cm. długości, uwzględniając, że dla powietrza  $\epsilon=1$ ; w centymetrach

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{2 \lg_n \frac{2h}{r}},$$

albo

$$C = \frac{0,0241}{\lg \frac{2h}{r}} \frac{\mu F}{km}.$$



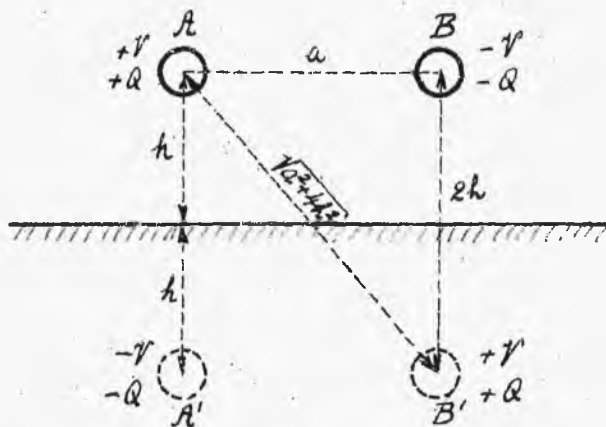
§ 9. Pojemność dwóch równoległych do siebie przewodów napowietrznych.

Tutaj możemy rozpatrzeć dwa wypadki:

I. gdy osie obu przewodów leżą w płaszczyźnie poziomej i II. gdy osie te leżą w płaszczyźnie pionowej.

W obu wypadkach mamy na myśli dwa przewody, należące do wspólnego obwodu, i wprowadzimy zamiast powierzchni ziemi elektryczne odbicia rozpatrywanych przewodów.

W wypadku I /rys. 35 / oba przewody  $A$  i  $B$  są w odległości  $a$  od siebie oraz na jednakowej wysokości  $h$  nad ziemią. Takie same odległości mamy dla



odbić  $A'$  i  $B'$ .

Potencjał na każdym z przewodów, np.  $A$ , znajdziemy, mając: potencjał własny przewodu

rys. 35.

potencjał własny przew.  $A$  :  $V'$ ,  
 " od ładunku  $B$  :  $-V' + 2Q \log \frac{a}{r}$ ,

potencjał od ładunku  $A'$ :  $-V' + 2Q \lg_{3n} \frac{2h}{r}$ ,

" " "  $B'$ :  $V' - 2Q \lg_{3n} \frac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{r}$ ;

biorąc sumę otrzymamy:

$$V^2 = 2Q \lg_{3n} \frac{2ah}{r\sqrt{a^2 + 4h^2}} = 2Q \lg_{3n} \frac{a}{r\sqrt{1 + \left(\frac{a}{2h}\right)^2}},$$

skąd pojemność każdego przewodu w cm.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{2 \lg_{3n} \frac{a}{r\sqrt{1 + \left(\frac{a}{2h}\right)^2}}}.$$

Ponieważ odległość między przewodami  $a$  jest zwykle znacznie mniejsza od podwójnej wysokości zawieszenia  $2h$ , więc najczęściej odrzuca się wyraz  $\frac{a}{2h}$  i używa się wzór uproszczony:

$$C \approx \frac{1}{2 \lg_{3n} \frac{a}{r}},$$

lub

$$C \approx \frac{0,0241 \text{ mF}}{\lg \frac{a}{r} \text{ km}}.$$

W wypadku II / rys. 36 / oba przewody  $A$  i  $B$  są zawieszane na rozmaitych wysokościach  $a+h$  i  $h$ . Dla obliczenia potencjałów w  $A$  i  $B$  mamy:

na przewodzie  $A$  :

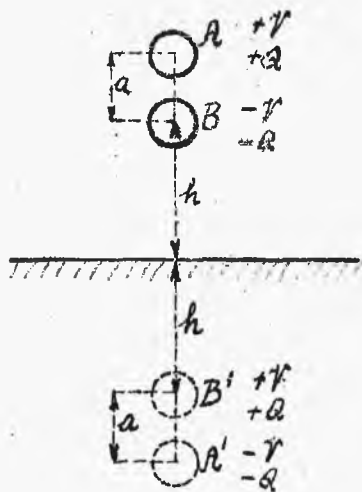
potencjał własny:  $V'$ ,

potencjał od ładunku  $B$ :  $-V' + 2Q \lg_n \frac{a}{r}$ ,

" " "  $B'$ :  $V' - 2Q \lg_n \frac{a+2h}{r}$ ,

" " "  $A'$ :  $-V' + 2Q \lg_n \frac{2a+2h}{r}$ ;

na przewodzie  $B$ :



rys. 36.

potencjał własny  $-V'$ ,

" od ładunku  $A$ :

$$V' - 2Q \lg_n \frac{a}{r},$$

potencjał od ładunku  $B$ :

$$V' - 2Q \lg_n \frac{2h}{r},$$

potencjał od ładunku  $A'$ :

$$-V' + 2Q \lg_n \frac{a+2h}{r}.$$

Wobec tego:

$$\begin{aligned} V_A = +V &= 2Q \lg_n \frac{2a(a+h)}{r(a+2h)} = \\ &= 2Q \lg_n \frac{2ah(1+\frac{a}{h})}{2rh(1+\frac{a}{2h})} \approx 2Q \lg_n \frac{a}{r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_B = -V &= -2Q \lg_n \frac{2ah}{r(a+2h)} = \\ &= -2Q \lg_n \frac{2ah}{2rh(1+\frac{a}{2h})} \approx -2Q \lg_n \frac{a}{r}, \end{aligned}$$

skąd pojemność każdego przewodu w cm.

$$C = \frac{Q}{V} \approx \frac{1}{2 \lg \frac{a}{r}},$$

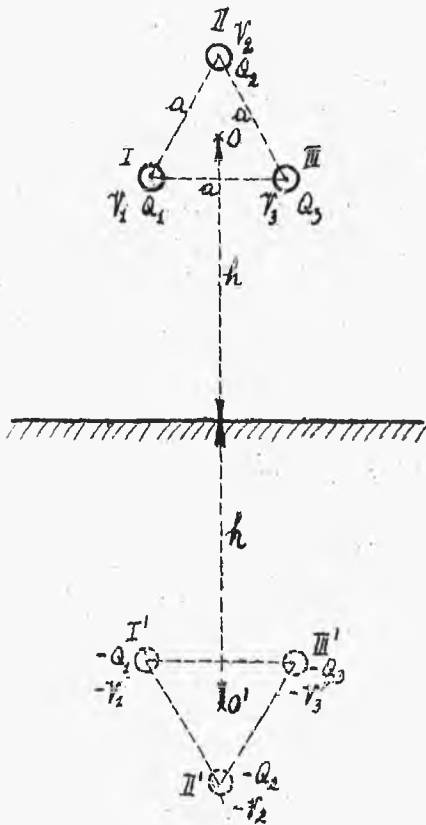
lub

$$C \approx \frac{0,0241}{\lg \frac{a}{r}} \frac{\mu F}{km},$$

czyli pojemność jest taka sama, jak w wypadku I.

§ 10. Pojemność trzech równoległych symetrycznie ułożonych przewodów napowietrzanych.

Rozpatrujemy układ z 3-ch przewodów I, II i III /rys. 37 /, przeznaczonych do przenoszenia prądu trójfazowego.



rys. 37

trójfazowego.

Dla wyprowadzenia wzoru przybliżonego, mając na względzie, że odległość między przewodami  $a$  jest nieznaczną w stosunku do wysokości zawieszenia  $h$  /liczonej od środka koła, przechodzącego przez środki przekroju przewodów/, będziemy przyjmowali odległość między każdym przewodem i każdym odbiciem za

równą  $2h$ . Oznaczając przez  $V_1', V_2', V_3'$  własne potencjały przewodów oraz przez  $Q_1, Q_2$  i  $Q_3$  ładunki ich na 1 cm. długości, będziemy mieli:

dla przewodu I:

potencjał własny :  $V_1'$ ,

" od ładunku I' :  $-V_1' + 2Q_1 \lg_n \frac{2h}{r}$ ,

" " " II :  $V_2' - 2Q_2 \lg_n \frac{a}{r}$ ,

" " " II' :  $-V_2' + 2Q_2 \lg_n \frac{2h}{r}$ ,

" " " III :  $V_3' - 2Q_3 \lg_n \frac{a}{r}$ ,

" " " III' :  $-V_3' + 2Q_3 \lg_n \frac{2h}{r}$ ,

skąd

$$V_1' \approx 2(Q_1 + Q_2 + Q_3) \lg_n \frac{2h}{r} - 2(Q_2 + Q_3) \lg_n \frac{a}{r}.$$

Ale dla prądu trójfazowego:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0, \quad Q_2 + Q_3 = -Q_1,$$

więc

$$V_1' \approx 2Q_1 \lg_n \frac{a}{r}$$

i analogicznie:

$$V_2' \approx 2Q_2 \lg_n \frac{a}{r},$$

$$V_3 = 2Q_3 \lg_n \frac{a}{r}.$$

Wobec tego pojemność każdego przewodu na 1 cm. długości w cm. będzie:

$$C = \frac{1}{2 \lg_n \frac{a}{r}},$$

lub

$$C = \frac{0,0241}{\lg \frac{a}{r}} \frac{\mu F}{\text{cm}},$$

a więc taka sama, jak i w wypadku dwóch równoległych przewodów.

### § 11. Współczynnik indukcji własnej i indukcyjność.

Rozpatrując obwód z prądem, złożony z dwóch długich przewodów, końce których ze sobą są połączone, możemy każdy z tych przewodów traktować samodzielnie, obliczając strumień magnetyczny, powstający tylko od prądu tego przewodu; w ten sposób określilibyśmy współczynnik indukcji własnej pojedynczego obwodu. Ale dla uwzględnienia całokształtu zjawisk indukcyjnych musielibyśmy rozpatrzeć jeszcze wpływ drugiego przewodu, przez który przepływa prąd o takim samym natężeniu, lecz o kierunku przeciwnym,

jako zjawisko indukcji wzajemnej, wprowadzając współczynnik indukcji wzajemnej. Tego rodzaju ujęcie zjawisk doprowadza do wprowadzenia wypadkowego współczynnika, stanowiącego różnicę współczynników indukcji własnej i indukcji wzajemnej, który można nazwać w skróceniu wypadkową indukcyjnością lub wprost indukcyjnością przewodu. Taki sposób traktowania linii elektrycznych jest konieczny, gdy się ma kilka obwodów, działających na siebie wzajemnie; natomiast, gdy się ma do czynienia z jednym tylko obwodem, dogodniej jest rozpatrywać go jako całość i obliczać całkowity strumień, objęty przez ten obwód. Dzieląc ten strumień przez prąd, przepływający w obwodzie, otrzymamy współczynnik indukcji własnej obwodu lub indukcyjność rozpatrywanej linii elektrycznej. Jeżeli w obwodzie płynie prąd  $J$  i całkowity strumień magnetyczny, objęty przez ten obwód pod wpływem tego prądu, będzie  $\phi$ , wówczas współczynnik indukcji własnej obwodu będzie:

$$L = \frac{\phi}{J}.$$

Liczbowo współczynnik indukcji własnej równa się wartości strumienia, wywołanego prądem o natężeniu równym jednostce. W układzie elektromagnetycznym

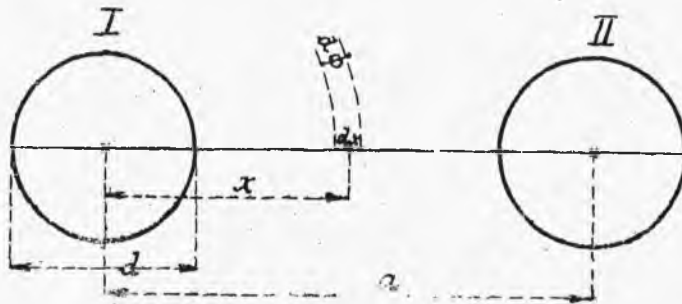
spółczynnik indukcji własnej ma wymiar długości i wobec tego może być określany w cm. Praktyczną jednostką jest henr, oznaczany przez  $\mathcal{H}$ , przy czym

$$1 \mathcal{H} = 10^9 \text{ cm.}$$

Będziemy rozpatrywali przewody z materiałów magnetycznie obojętnych, jak miedź lub aluminium, dla których przenikalność magnetyczna równa jest 1. W tym wypadku  $\mathcal{L}$  stanowi współczynnik stały.

### § 12. Indukcyjność linii dwuprzewodowej.

Dwa długie i jednakowe przewody I i II /rys.38 / o długości  $l$  i średnicy  $d$ , znajdują się w odległości  $a$  /między osiami/. Z Podstaw Elektrotechniki



wiemy, że długi prostoliniowy przewód, po którym przepływa prąd  $I$ , daje pole magnetyczne, którego natężenie w odległości  $x$  będzie  $H_x = \frac{2I}{x}$ . Takie natężenie pola będziemy mieli we wszystkich punk-



tach, znajdujących się poza przewodem czyli dla  $x \geq \frac{d}{2}$ . Dla określenia natężenia pola magnetycznego wewnątrz przewodu, czyli dla  $x < \frac{d}{2}$ , musimy brać pod uwagę nie cały prąd  $J$ , rozłożony w przekroju poprzecznym przewodu, lecz tylko tę jego część, która odpowiada polu przekroju o promieniu  $x$ ; oznaczając wartość tego prądu przez  $J_x$ , będziemy mieli:

$$\frac{J_x}{J} = \frac{\pi x^2}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{4x^2}{d^2},$$

skąd

$$J_x = \frac{4x^2}{d^2} J.$$

Wobec tego natężenie pola wewnątrz przewodu w odległości  $x$  będzie:

$$\mathcal{H}_x = \frac{8x^2}{d^2} \frac{J}{x} = \frac{8x}{d^2} J. \quad /13/$$

Obliczmy teraz strumień magnetyczny, przenikający przez rozpatrywany obwód pod wpływem prądu przewodu I. Przeprowadźmy płaszczyznę przez osie przewodów i rozpatrzmy na tej płaszczyźnie w odległości  $x$  od przewodu I nieskończenie wąski pasek szerokości  $dx$  o długości  $l$ . Natężenie pola w tym pasku będzie równe  $\mathcal{H}_x$ , zaś strumień magnetyczny, przenikający przez ten pasek, będzie miał wartość

$$d\phi = \mathcal{H}_x l dx.$$

Dla otrzymania całego strumienia, powstającego od przewodu I, musimy scałkować ten wyraz oddzielnie dla  $x < \frac{d}{2}$  i dla  $x > \frac{d}{2}$ . Część strumienia, znajdująca się wewnątrz przewodu, będzie:

$$\phi_1 = \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{2x}{d^2} \mathcal{H} l dx = \mathcal{H} l, \quad /14/$$

zaś druga część, znajdująca się zewnątrz przewodu, będzie:

$$\phi_2 = \int_{\frac{d}{2}}^a \frac{2\mathcal{H}}{x} l dx = 2\mathcal{H} l \left| \lg x \right|_{\frac{d}{2}}^a = 2\mathcal{H} l \lg \frac{2a}{d}. \quad /15/$$

Cały strumień od przewodu I będzie:

$$\phi_1 + \phi_2 = \mathcal{H} l \left( 1 + 2 \lg \frac{2a}{d} \right).$$

Rozpatrując teraz przewód II z takim samym prądem  $\mathcal{H}$ , lecz o znaku przeciwnym, otrzymamy zupełnie taki sam strumień, okrążający przewód II w kierunku przeciwnym, a więc mający kierunek jednakowy z kierunkiem strumienia przewodu I w polu, objętem przez rozpatrywany obwód. W ten sposób całkowity strumień działający na obwód będzie:

$$\phi = 2\mathcal{H} l \left( 1 + 2 \lg \frac{2a}{d} \right),$$

skąd znajdujemy indukcyjność całej linii w jednostkach CGS.

$$L = \frac{\Phi}{J} = \left( 2 + 4 \lg_n \frac{2a}{d} \right) l.$$

Zakładając w tym wzorze  $l = 1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm.}$  i wyrażając  $L$  w  $\text{mH} = 10^6 \text{ cm.}$ , otrzymamy:

$$L = \left( 0,2 + 0,4 \lg_n \frac{2a}{d} \right) \frac{\text{mH}}{\text{km}}. \quad /16/$$

Przy wielkiej częstotliwości prądu zmiennego, wskutek zjawiska naskórkowości, nie cały przekrój przewodu przyjmuje udział w przenoszeniu prądu. Jeżeli założymy, że prąd przepływa tylko po powierzchni przewodu, co może mieć miejsce przy bardzo wielkiej częstotliwości, będziemy musieli uwzględnić tylko strumień magnetyczny  $\phi_2$  dla każdego z przewodów I i II; wtedy całkowity strumień będzie:

$$\phi = 2 \phi_2 = 4 J \cdot l \lg_n \frac{2a}{d},$$

albo

$$L = 4 l \cdot \lg_n \frac{2a}{d},$$

$$L = 0,4 \lg_n \frac{2a}{d} \frac{\text{mH}}{\text{km}}. \quad /17/$$

Zwykle przyjmują do obliczeń wartość średnią ze wzorów /16/ i /17/, czyli

$$L = \left( 0,1 + 0,4 \lg_n \frac{2a}{d} \right) \frac{\text{mH}}{\text{km}}, \quad /18/$$

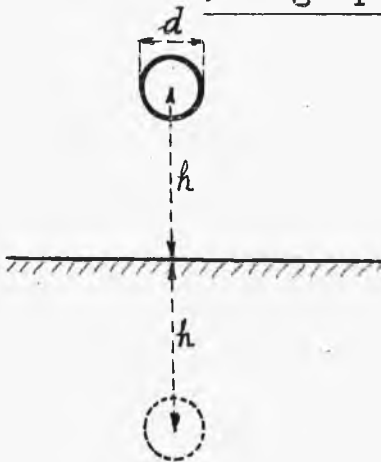
albo, wprowadzając zwykłe logarytmy:

$$L = \left( 0,1 + 0,92 \lg \frac{2a}{d} \right) \frac{\text{mH}}{\text{km}} \quad /19/$$

Ten wzór może być zastosowany zarówno do linii napowietrznej, jak i w wypadku linii kablowej, zawierającej dwa jednożyłowe kable obołowane, lecz nie opancerzone. Również wzór ten nadaje się do kabla dwużyłowego kręconego opancerzonego; żelazo pancerza bowiem bardzo nieznacznie mogłoby wpływać na indukcyjność linii, gdyż w każdej chwili w obydwóch przewodach prądy mają wartości jednakowe, zaś kierunki przeciwne, więc nie powinno zachodzić magnesowanie się żelaza pancerza.

### § 13. Indukcyjność linii jedнопrzewodowej

/drugi przewód ziemia/.



rys. 39.

Układ taki można zastąpić za pomocą metody Lorda Kelvina przez linię dwuprzewodową /rys. 39 /, przytem drugi umyślony przewód stanowi zwierciadlane odbicie danego przewodu. Oznaczając

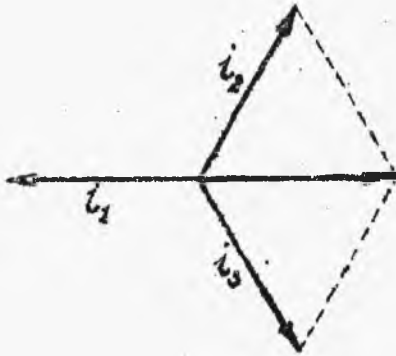
przez  $h$  wysokość zawieszenia przewodu nad ziemią, zaś przez  $d$  jego średnicę, otrzymamy odległość między przewodami  $a=2h$ . Ponieważ w rzeczywistości mamy jeden przewód, który daje połowę strumienia całkowitego linii dwuprzewodowej, przeto we wzorze /19/ musimy założyć  $a=2h$  i wszystko pomnożyć przez  $1/2$ ; wobec tego dla rozpatrywanej linii

$$L = \left( 0,05 + 0,46 \lg \frac{4h}{d} \right) \frac{\text{mH}}{\text{km}}.$$

#### § 14. Indukcyjność linii trzyprzewodowej prądu trójfazowego.

Jeżeli mamy układ, zawierający trzy przewody prądu trójfazowego, symetrycznie ułożone, wtedy we wszystkich trzech przewodach w każdej chwili będą płynęły prądy, suma których równa jest zeru. Z tego wynika, że w każdej chwili prąd w jednym z przewodów co do wartości swej równy jest sumie prądów, płynących w dwóch pozostałych przewodach. Wobec tego w każdej chwili strumień magnetyczny, wywołany przez dwa przewody, równy jest strumieniowi, wywołanemu przez trzeci przewód. Można więc uważać dwa przewody pod względem działania ze-

wewnętrznego za równoznaczne z trzecim i zamienić dwa przewody przez jeden równoważny /rys.40 /; wte-



rys. 40.

dy otrzymamy linię dwuprzewodową, gdy na każdy przewód przypada połowa całkowitego strumienia magnetycznego. Możemy więc zastosować dla indukcyjności

ten sam wzór /19/, biorąc dla każdego przewodu połowę wartości t.j.

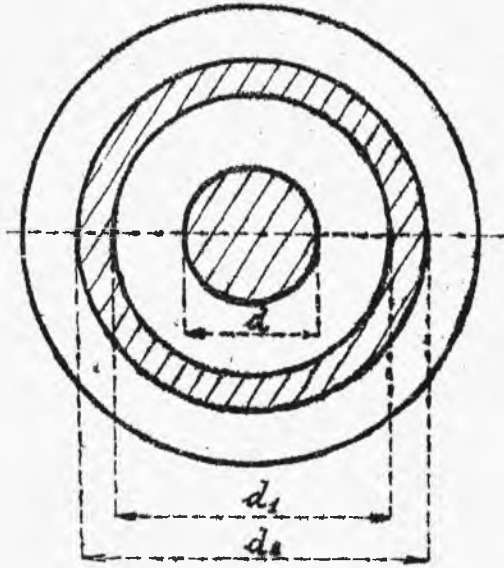
$$L = \left( 0,05 + 0,46 \lg \frac{2a}{d} \right) \frac{\text{mH}}{\text{km}}.$$

Taki wzór możemy stosować zarówno dla linii napowietrznej, jak i do kabla trójżyłowego skróconego.

### § 15. Indukcyjność kabla dwużyłowego koncentrycznego.

Oznaczmy przez  $d$  średnicę wewnętrznego przewodu, zaś przez  $d_1$  i  $d_2$  średnice wewnętrzną i zewnętrzną drugiego przewodu koncentrycznego /rys.41/.

W dowolnym punkcie, znajdującym się w odległości  $x \ll \frac{d_1}{2}$  od osi kabla, natężenie pola magnetycznego będzie zależało wyłącznie od prądu wewnętrznego



rys. 41.

wstających od prądów  $+J$  oraz  $-J$ , płynących w obu przewodach; pierwsze będzie równe  $+\frac{2J}{x}$ , drugie  $-\frac{2J}{x}$ ; bo odległość mierzy się od osi przewodu, a w tym wypadku osie są wspólne.

Musimy więc rozpatrywać natężenie pola:

1/ dla  $0 < x \ll \frac{d}{2}$ ,

2/ dla  $\frac{d}{2} \ll x \ll \frac{d_1}{2}$ ,

3/ dla  $\frac{d_1}{2} \ll x \ll \frac{d_2}{2}$ ;

w pierwszym wypadku, według wzoru /13/,

$$d_x' = \frac{8xJ}{d^2},$$

w drugim

przewodu, ponieważ prąd zewnętrzny pola magnetycznego nie daje. Dla punktów zaś, znajdujących się poza zewnętrznym przewodem, dla których  $x \gg \frac{d}{2}$ , natężenie pola magnetycznego będzie równe zeru; rzeczywiście, natężenie to będzie wypadkiem

dwóch natężeń pola, po-

$$\mathcal{H}_x'' = \frac{2J}{x},$$

zaś w trzecim, to znaczy w masie przewodu koncentrycznego, działa prąd wewnętrznego przewodu  $+J$  oraz część prądu własnego /rys.42 /, mianowicie:

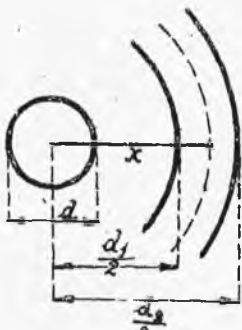
$$J_x = \frac{-J}{\frac{\pi d_2^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4}} \cdot \pi \left( x^2 - \frac{d_1^2}{4} \right) = J \frac{d_1^2 - 4x^2}{d_2^2 - d_1^2},$$

wypadkowy prąd będzie:

$$J_w = J \left( 1 + \frac{d_1^2 - 4x^2}{d_2^2 - d_1^2} \right) = J \frac{d_2^2 - 4x^2}{d_2^2 - d_1^2};$$

wobec tego

$$\mathcal{H}_x''' = \frac{2J(d_2^2 - 4x^2)}{x(d_2^2 - d_1^2)}.$$



rys.42.

Dla obliczenia całkowitego strumienia magnetycznego, objętego dwoma przewodami kabla o długości  $l$ , obliczymy strumienie w oddzielnych częściach kabla, a więc

dla wartości  $x$  od 0 do  $\frac{d}{2}$ :

$$\phi_1 = l \int_0^{\frac{d}{2}} \mathcal{H}_x' dx = l \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{8J}{d^2} x dx = J \cdot l;$$

dla wartości  $x$  od  $\frac{d}{2}$  do  $\frac{d_1}{2}$ :



$$\phi_2 = l \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d_1}{2}} \mathcal{H}_x'' dx = l \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d_1}{2}} \frac{2J}{x} dx = 2Jl \cdot \lg \frac{d_1}{d}$$

wreszcie dla wartości  $x$  od  $\frac{d_1}{2}$  do  $\frac{d_2}{2}$ :

$$\begin{aligned} \phi_3 &= l \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \mathcal{H}_x''' dx = l \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \frac{2J}{x} \frac{d_2^2 - 4x^2}{d_2^2 - d_1^2} dx \\ &= \frac{2Jl}{d_2^2 - d_1^2} \left[ d_2^2 \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \frac{dx}{x} - 4 \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} x dx \right] = \\ &= \frac{2Jl}{d_2^2 - d_1^2} \left[ d_2^2 \lg \frac{d_2}{d_1} - \frac{d_2^2 - d_1^2}{2} \right] = \frac{2Jl d_2^2 \lg \frac{d_2}{d_1}}{d_2^2 - d_1^2} - Jl. \end{aligned}$$

Dodając do siebie te trzy strumienie, znajdziemy całkowity strumień:

$$\phi = 2Jl \left[ \lg \frac{d_1}{d} + \frac{d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} \lg \frac{d_2}{d_1} \right],$$

skąd

$$\mathcal{L} = 2l \left[ \lg \frac{d_1}{d} + \frac{d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} \lg \frac{d_2}{d_1} \right]. \quad 1201$$

Jeżeli założyć, jak to czyniliśmy dla innych linii elektrycznych, że wskutek maskórkowości prąd przepływa tylko po powierzchni przewodów, wtedy wzięlibyśmy tylko strumień

$$\phi = l \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d_1}{2}} \frac{2J}{x} dx = 2Jl \lg_n \frac{d_1}{d}$$

oraz

$$L = 2l \cdot \lg_n \frac{d_1}{d} \quad /21/$$

W praktyce bierzemy zwykle średnią z dwóch wartości /20/ i /21/, czyli

$$L = 2l \left[ \lg_n \frac{d_1}{d} + \frac{1}{2} \frac{d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} \lg_n \frac{d_2}{d_1} \right],$$

albo dla  $l = 1 \text{ km}$ . i  $L$  w  $\text{mH}$ :

$$L = 0,2 \left[ \lg_n \frac{d_1}{d} + \frac{1}{2} \frac{d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} \lg_n \frac{d_2}{d_1} \right] \frac{\text{mH}}{\text{km}}$$



S P I S R Z E C Z Y .

W S T Ę P . . . . .	str. 3
---------------------	--------

A. OBWODY ZE SKUPIONEMI STAŁEMI.

ROZDZIAŁ I.

Obwód z opornością rzeczywistą i indukcyjnością własną.

§ 1. Powstawanie prądu stałego . . . . .	7
§ 2. Zanikanie prądu stałego . . . . .	10
§ 3. Zmiana oporności w obwodzie prądu stałego	12
§ 4. Powstawanie prądu zmiennego . . . . .	13
§ 5. Zanikanie prądu zmiennego . . . . .	21
§ 6. Otwieranie obwodu z uwzględnieniem zmiany oporności na wyłączniku . . . . .	21

ROZDZIAŁ II.

Obwód z opornością rzeczywistą i pojemnością.

§ 1. Ładowanie kondensatora prądem stałym . . . . .	29
§ 2. Ładowanie kondensatora prądem zmiennym . . . . .	32
§ 3. Wyladowanie kondensatora . . . . .	38

ROZDZIAŁ III.

1. <u>Obwód z opornością rzeczywistą, indukcyjnością i pojemnością.</u>	
---	--

§ 1. Całka ogólna równania dla takiego obwodu	39
§ 2. Wyładowanie kondensatora aperiodyczne . . .	44
§ 3. Wyładowanie kondensatora oscylacyjne . . .	51
§ 4. Wyładowanie kondensatora w obwodzie z bar- dzo małą opornością rzeczywistą. Wzór W. Thomsona . . . . .	59
§ 5. Ładowanie kondensatora prądem stałym. . .	60
§ 6. Ładowanie kondensatora prądem zmiennym . .	69
§ 7. Otwieranie obwodu, w którym indukcyjność i pojemność są połączone równoległe . . .	82

#### ROZDZIAŁ IV.

##### Obwody sprzężone magnetycznie.

§ 1. Wyładowanie kondensatora w jednym z dwóch obwodów, sprzężonych magnetycznie	84
§ 2. Wyładowanie kondensatora w wypadku, gdy oba obwody są ze sobą w rezonansie . . . .	93

#### B. OBWODY Z ROZŁOŻONEMI STAŁEMI.

##### ROZDZIAŁ I.

##### Określenie napięć i prądów w obwodach z równomiernie rozłożonemi stałemi.

§ 1. Równania różniczkowe dla wartości chwilo- wych napięć i prądów. Całki ogólne tych	
---	--

równań . . . . .	99
§ 2. Załączanie linii w końcu otwartej do źródła prądu stałego . . . . .	111
§ 3. Załączanie linii w końcu zwartej do źródła prądu stałego . . . . .	119
§ 4. Załączanie linii w końcu otwartej do źródła prądu zmiennego . . . . .	120
§ 5. Załączanie linii w końcu zwartej do źródła prądu zmiennego . . . . .	122
§ 6. Linja nieodkształcająca. Przedstawienie wartości chwilowych napięć i prądów w postaci dwóch fal . . . . .	123
§ 7. Załączanie linii nieodkształcającej do źródła prądu stałego . . . . .	129

## ROZDZIAŁ II.

### Obliczanie pojemności i indukcyjności w liniach elektrycznych.

§ 1. Pojemność . . . . .	132
§ 2. Pojemność kabla jednożyłowego obołwionego	138
§ 3. Pojemność kabla jednożyłowego opancerzonego	139.
§ 4. Rozkład napięć na okładzinach metalowych kabla opancerzonego . . . . .	142
§ 5. Pojemność kabla dwużyłowego koncentrycznego	144

	str.
§ 6. Pojemność kabla dwużyłowego skręconego	146
§ 7. Pojemność kabla trójżyłowego skręconego	152
§ 8. Pojemność przewodu napowietrznego pojedynczego /drugi przewód ziemia/ . . . . .	159
§ 9. Pojemność dwóch równoległych do siebie przewodów napowietrznych . . . . .	161
§ 10. Pojemność trzech równoległych symetrycznie ułożonych przewodów napowietrznych	164
§ 11. Spółczynnik indukcji własnej i indukcyjności . . . . .	166
§ 12. Indukcyjność linii dwuprzewodowej . . . . .	168
§ 13. Indukcyjność linii jednoprzewodowej /drugi przewód ziemia/ . . . . .	172
§ 14. Indukcyjność linii trzyprzewodowej prądu trójfazowego . . . . .	173
§ 15. Indukcyjność kabla dwużyłowego koncentrycznego . . . . .	174
SPIS RZECZY . . . . .	179



nr. 49