y II 7 20

POLSKIE TOWARZYSTWO
MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 7 · ZESZYT 2

BIBLIOTEKA NARODOWA

WARSZAWA 1969
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

S. Borkowski, Przegląd prac dotyczących naprężeń termicznych w ciałach stałych (lata 1965-1967) 107
Обзор работ, касающихся термических напряжений в твердых телах (1965–1967)
Thermal stresses in solids. Survey of papers published in 1965-1967
J. Klepaczko, O pewnym przypadku anizotropii 155
О некотором случае анизотропии
On a certain case of anisotropy
Z. Wiśniewski, Analiza układu wibro-uderzeniowego z nieliniową charakterystyką sprężystą 165
Анализ виброударной системы с нелинейной упругой характеристикой
Analysis of a vibratory-impact system with nonlinear spring characteristics
J. Orkisz, J. Wilk, Numeryczne obliczanie wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok poddanych plastycznemu płynięciu w zakresie dużych odkształceń 179
Численное решение пластического течения гибких оболочек вращения в области конечных деформаций
Numerical calculation of flexible shells of revolution subjected to plastic flow at finite strains
Z. Wesołowski, Skończone odkształcenia sprężystego klina i stożka 195
Конечные деформации упругого клина и конуса
Finite deformations of an elastic wedge and cone
W. Barański, Statyka powierzchniowych ośrodków włóknistych 205
Статика поверхностной волокнистой среды
Statics of surface fibrous media
Biuletyn Informacyjny 223

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

TOM 7 • ZESZYT 2

WARSZAWA 1969
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

KOMITET REDAKCYJNY

STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR
CZESŁAW EIMER · BARBARA SKARŻYŃSKA
MAREK SOKOŁOWSKI · WOJCIECH SZCZEPIŃSKI

REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (583+117) egz. Arkuszy wydawn. 11,0. Arkuszy drukarskich 8,0. Papier druk. sat. III kl., 80 g. 70×100. Oddano do składania 24.I.1969 r., druk ukończono w czerwcu 1969 r. Zam 189/68. P-98 Cena zł 30.—

Druk. im. Rewolucji Październikowej. Warszawa

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 7 (1969)

PRZEGLĄD PRAC DOTYCZĄCYCH NAPRĘŻEŃ TERMICZNYCH W CIAŁACH STAŁYCH (LATA 1965–1967)

SZCZEPAN BORKOWSKI (GLIWICE)

1. Wstęp

Przedstawiony tutaj przegląd prac dotyczących wyznaczania pól odkształceń i naprężeń, które zostały wywołane polami termicznymi, odnosi się do publikacji jakie ukazały się w latach 1965–1967. Niniejsze zestawienie obejmuje tematykę należącą do mechaniki ośrodka ciągłego stałego.

Przegląd prac wcześniejszych jest wystarczająco omówiony w monografiach: B. A. BOLEYA, J. H. WEINERA [16, 300], B. E. GATEWOODA [64, 318], E. MELANA, H. PARKUSA [167, 408], W. NOWACKIEGO [186, 200], H. PARKUSA [216, 423] oraz pracy zbiorowej pod redakcją I. I. GOLDENBLATA [319]. Z tym tematem wiążą się również prace przeglądowe W. NOWACKIEGO [193], odnoszące się do sprzężonych zagadnień dynamicznych, i G. A. KILCZYŃSKIEJ [365], poświęcone procesom falowym w ośrodkach termosprężystych. O kierunkach rozwojowych, między innymi i termosprężystości, traktuje praca W. NOWACKIEGO [203].

Omówione tutaj prace odnoszą się do ośrodków sprężystych, plastycznych, lepkich itp.; reprezentują też obszerną tematykę, która znalazła odbicie w publikacjach przede wszystkim typu naukowego; niemniej jednak, w niniejszy przegląd włączono również i prace dotyczące zagadnień stosowanych. W ten sposób otrzymany przegląd obejmuje bardzo obszerny zbiór zagadnień, zarówno teoretycznych, jak i o wyraźnie praktycznych zastosowaniach.

Podział na problemy jest następujący: najpierw omawiamy prace dotyczące ogólnych zagadnień teoretycznych, po czym problemy związane z przestrzenią i półprzestrzenią; dalej — zagadnienia wiążące się z ośrodkami ukształtowanymi jako elementy grubościenne, następnie — obszerną dziedzinę dotyczącą powłok cienkościennych, w dalszej kolejności — zagadnienia odnoszące się do tarcz i płyt, a wreszcie najmniej liczną grupę prac dotyczącą problematyki prętowej.

Prace oznaczone w wykazie literatury gwiazdką nie były przez autora przeglądane, a informacje o nich podano w oparciu o czasopisma przeglądowe.

2. Zagadnienia ogólne

W pracy M. BEN-AMOZA [14] została sformułowana zasada wariacyjna sprzężonej termosprężystości. B. A. BOLEY [17] zajmuje się zagadnieniem szacowania błędów przy aproksymacji pól temperatur i naprężeń. L. BRUN [21] zajmował się analogią wzoru

Clapeyrona w dynamicznej termosprężystości. C. L. CHOW, R. A. HOYLE [33], stosując metodę różnic skończonych, podali rozwiązanie osiowo-symetrycznych zadań termosprężystości. Opracowaną metodę zastosowano do obliczenia naprężeń termicznych w wirniku turbiny. J. L. ERICKSEN [51], wychodząc z nierówności Clausiusa–Duhema, rozpatrzył równania nieliniowej termosprężystości i wykazał, że znane kryterium stateczności sprężystej może być otrzymane z rozwiązania termo-kinetycznego. A. C. ERINGEN [52] rozwinął metodę, formalną i aksjomatyczną, budowy równań zagadnienia termosprężystości w mechanice ośrodka ciągłego. Przedstawiona teoria obejmuje i uogólnia wcześniejsze teorie, a w szczególności teorie ośrodków prostych i cieczy. Szczegółowo zbadano klasę nieprostych cieczy lepkich. J. D. HOVANESIAN, H. C. KOWALSKI [86], wychodząc z równań quasi-statycznego zagadnienia termosprężystości, ustalili podobieństwo dla przestrzennych i płaskich stanów; podobne rozważania przeprowadzili też dla równania przewodnictwa ciepła uwzględniając w tym ostatnim człon odnoszący się do źródeł ciepła. J. IGNACZAK, W. NOWACKI [100, 101] otrzymali przedstawienie podstawowych funkcji termosprężystości w postaci całek powierzchniowych. Otrzymane rozwiązanie wykorzystano przy wprowadzaniu ogólnych potencjałów termosprężystości dla warstwy pojedynczej i podwójnej. W pracy podano też równania całkowe osobliwe dla spotykanych zagadnień brzegowych. V. IONESCU [102], posługując się potencjałami termosprężystości, podała uogólnioną analogię twierdzenia Castigliano. Wprowadzając funkcję dysypacji temperatury i stosując jeden z potencjałów termosprężystości, sformułowała ona zasadę wariacyjną quasi-statycznej sprzężonej termosprężystości. L. JENTSCH [108] sformułował dla równań przemieszczeniowych termosprężystości, w ośrodkach podobszarami jednorodnych, pierwsze i drugie zadanie brzegowe. J. MINARDI [170] określił wpływ zmiany współczynnika rozszerzalności cieplnej na pole naprężeń termicznych. M. V. MOUTFORT [174] wykazał, że przy użyciu — zamiast funkcji temperatury — dwu innych funkcji, z których jedna jest nieznana, druga natomiast proporcjonalna do niezmiennika tensora naprężenia, istnieje możliwość rozbicia sprzężonych równań quasi-statycznego zagadnienia na równania nie sprzężone, lecz ze sprzężonymi warunkami brzegowymi. W. NOWACKI [192] podał zasadę wzajemności dla sprzężonych pól mechanicznych i termoelektrycznych, dla ośrodka z kryształów piezoelektrycznych. W pracach [194, 195, 196, 418] podano równania konstytutywne termosprężystości dla ośrodka Cosseratów, zbudowane przy uwzględnieniu termodynamiki procesów nieodwracalnych. Przytoczono zasadę wzajemności oraz twierdzenia o jednoznaczności. Uwzględniono także sprzężenie pól odkształceń i temperatur. W pracy [198] podano niektóre twierdzenia termosprężystości dla drgań harmonicznych ośrodka ciągłego. Uogólniono twierdzenia Helmholtza i Greena. Rozpatrzono również fale kuliste w nieskończonym ośrodku sprężystym. W pracy [199] podano podstawowe równania różniczkowe, sformułowanie zasady wariacyjnej i zasady wzajemności dla dystorsyjnych zadań termosprężystości. Praca [201] zawiera twierdzenia odnoszące się do niesymetrycznej termosprężystości, a w szczególności zawiera twierdzenie o minimum energii potencjalnej, twierdzenie o minimum energii uzupełniającej oraz uogólnione twierdzenie Reissnera. W pracy [202] udowodniono twierdzenie o zupełności funkcji naprężeń w sprzężonej termosprężystości. Przeprowadzono dyskusję przejścia od problemów sprzężonej termosprężystości do tzw. technicznej teorii naprężeń termicznych. G. PAOLINI [214], posługując się podstawowymi równaniami i zasadami

termodynamiki, otrzymał ogólne wyrażenia dla potencjałów termodynamicznych i entropii dla ośrodków sprężystych izotropowych. A. I. SOLER, M. A. BRULL [244] rozwiązywali sprzężone zadania termosprężystości stosując metodę perturbacji. E. SOÓS [245] omówił rolę funkcji naprężeń w sprzężonej termosprężystości. E. VARLEY, A. DAY [261] badali równowagę faz sprężystego ośrodka przy równomiernie rozłożonej temperaturze i ciśnieniu. J. WYRWIŃSKI [277] podał rozwiązanie równań termosprężystości dla ośrodka Cosseratów. Określono pola przemieszczeń i temperatur od wpływów będących funkcjami okresowo zmiennymi (harmonicznymi) czasu. W pracy [278] uogólniono zasadę Webera na przypadek sprzężonej termosprężystości. J. L. ZEMAN [282, 283] przedstawił stochastyczne podejście do rozwiązywania liniowych zadań termosprężystości i równań przewodnictwa cieplnego. S. W. ALEKSANDROWSKI [291] podał sposoby obliczania konstrukcji żelbetowych z uwzględnieniem, między innymi, wpływów termicznych. B. A. BATUROW [297], wykorzystując sposób Samarskiego (ekonomiczny schemat różnicowy), przedstawił algorytm rozwiązania różnicowego niektórych problemów brzegowych termosprężystości. S. G. WINOKUROW [314], stosując rozdzielenie tensora naprężenia na sumę dwu tensorów (jeden związany z prawem Hooke'a, drugi — z «obciążeniem cieplnym») otrzymał rozbicie energii na analogiczne dwa składniki. Formułując końcowe równania termosprężystości, wykorzystano równania wariacyjne Lagrange'a i Castigliano. W. I. DANIŁOWSKA, I. P. FRENKINA [333] podały algorytm (na maszynę cyfrową) rozwiązujący problem wyznaczania pola naprężeń dla podanego pola temperatur. Przy rozwiązywaniu zadania stosowano metodę Fiłonienki–Borodicza. N. S. MOŻAROWSKI, A. A. JUSZCZENKO [412] badali wpływ czasu na wielkość residualnych naprężeń przy nagrzewaniu oraz przy zmiennych warunkach termicznych.

P. CHADWICK, B. POWDRILL [24] rozwinęli ogólną teorię powierzchni nieciągłości w rozwiązaniach równań liniowej sprzężonej termosprężystości. Rozpatrzone rodzaje nieciągłych fal termosprężystych w zależności od rzędu powierzchni nieciągłości, w polu przemieszczeń i temperatur: fala słaba (silna) — rząd $\geqslant 2$ (rząd 0 lub 1). S. KALISKI [115, 116] wyprowadził równania falowe termosprężystości przy uwzględnieniu nowych równań falowych przewodnictwa ciepła. W tych ostatnich uwzględniono skończone prędkości propagacji zaburzeń sprężysto-termicznych. C. M. PURUSHOTHAMA [222] rozpatrywał płaskie fale magneto-termosprężyste. Rozwiązanie zadania podano dla ośrodków posiadających przewodność elektryczną, przy uwzględnieniu wpływów pola magnetycznego i temperatury. P. M. ZOŁOTAROW [342] wyprowadził równania falowe dla ośrodków porowatych przy uwzględnieniu wpływów termicznych. N. A. KILCZEWSKI, E. A. BRUSIENCOWA [362] podali uogólnione równania przewodnictwa ciepła dla ośrodka ciągłego z dyslokacjami. Otrzymano równanie typu hiperbolicznego, co pozwala wprowadzić określenie falowego rozchodzenia się pola temperatur.

L. DRAGOS [42, 43] podał równania magneto-termosprężystości i przedstawił ich rozwiązanie za pomocą potencjałów. S. KALISKI [114] podał równania opisujące model ośrodka ciągłego przy uwzględnieniu efektów cieplnych i magneto-elektrycznych. Uwzględniono też uogólnione prawo przewodnictwa cieplnego, co pozwala na bardziej realne rozpatrywanie rozprzestrzeniania się ciepła (propagacja fal ze skończoną prędkością). W pracy [117], z układu równań magneto-termosprężystości typu hiperbolicznego, wyprowadzono zasadę wzajemności, a w [118] analogiczną zasadę podano dla zagadnień

termo-piezoelektrycznych. S. KALISKI, W. NOWACKI [119, 120] sformułowali zasadę wzajemności dla ośrodka magneto-termosprężystego, a w [121] podali tę zasadę dla przewodników anizotropowych. S. LEVONI [145] sformułował zasadę jednoznaczności dla równań opisujących drgania magneto-termosprężyste, a w [146] podał zasadę wzajemności dla ośrodków znajdujących się w polu termicznym i elektromagnetycznym. W tej ostatniej pracy otrzymano całkowe sprzężenie dwu stanów termodynamicznych ośrodka, które ujmuje siły zewnętrzne, pole termiczne, współrzędne tensora Maxwella i wektora Pointinga, a także początkowe wartości wektora przemieszczeń, prędkości i strumienia elektromagnetycznego energii pola. W. NOWACKI [188] zajął się zagadnieniem liniowej sprzężonej magneto-termosprężystości; podał też zasady energetyczne i twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań. Ośrodek rozpatrzono jako sprężysty, będący pod wpływem pola magnetycznego, o skończonej przewodności elektrycznej. Uwzględniono sprzężenie ze sobą pola przemieszczeń, temperatury i pola elektromechanicznego. W [189] rozpatrzono zagadnienie liniowej sprzężonej magneto-termosprężystości oraz podano zasadę wariacyjną dla takich ośrodków. W [190, 417] analizowano zagadnienie propagacji płaskich fal w nieograniczonym ośrodku wywołanych działaniem sił masowych i źródeł ciepła. Ośrodek znajduje się też w stałym polu magnetycznym. J. I. BURAK [309] podał równania różniczkowe ośrodka sprężystego przewodzącego elektryczność. Przyjęto, że energia swobodna jest kwadratową funkcją temperatury, potencjału elektrostatycznego i tensora odkształcenia. Założono też, że strumień cieplny i elektryczny są funkcjami liniowymi gradientów temperatury i potencjału elektrycznego.

D. IEŞAN [97] analizował niejednorodny ośrodek anizotropowy z uwagi na przyjęte niestacjonarne zadanie termosprężystości. Podano układy równań wraz ze sformułowaniem podstawowych oraz mieszanych zagadnień brzegowych dla problemu sprzężonego. W pracy [99] podano równania dla ośrodka z naprężeniami momentowymi przy założonej jednorodności i anizotropii. Podano twierdzenie o wzajemności, z którego otrzymano twierdzenie Somigliano. Sformułowano zagadnienie wariacyjne. A. M. MESSNER, D. R. SCHLIESSMANN [168] zajmowali się zagadnieniami niestacjonarnych naprężeń termicznych w ziarnach stałego paliwa rakietowego. C. WOŹNIAK [271] podał równania termosprężystości dla ośrodków z mikrostrukturą, a w [272] dla ośrodka charakteryzującego się sześcioma lokalnymi stopniami swobody. W pracy [274] analizowano, w zakresie dużych odkształceń i przy uwzględnieniu linearyzacji równań, zagadnienia termosprężystości dla ośrodków z mikrostrukturą. W [275] rozpatrzono szczególny przypadek ośrodka z mikrostrukturą, tj. ośrodka nieprostego (ze względów mechanicznych i termicznych). W pracy [276] analizowano zadanie termosprężystości dla ośrodka z przestrzenną dyspersją i wewnętrznymi stopniami swobody, uogólniając je na przypadek zjawisk nieizotermicznych teorię modelu ośrodka podanego w pracach Nolla, Mindlina, Greena i Rivlina. L. P. CHOROSZUN [485] rozpatrywał ośrodek sprężysty zbrojony losowo rozłożonymi elementami o zadanych własnościach termosprężystych. Rozpatrzono ośrodki warstwowe, jednokierunkowe, włókniste i ziarniste. W. M. LEWIN [395] badał odkształcenia termiczne ośrodków niejednorodnych, będących połączeniem dyskretnym ośrodków jednorodnych izotropowych i sprężystych. Zakładano przy tym, że każda taka faza jednorodna jest na tyle duża, iż może być rozpatrywana jako ośrodek ciągły. W. S. PAWLINA [420] zajęła się wpływem dyfuzji na naprężenia termiczne ośrodka w obszarze wycięcia walcowego.

J. S. PODSTRIGACZ [430] podał uogólnienie zagadnienia o rozkładzie pól temperatur i naprężeń dla ośrodków zawierających wtrącenia złożone z innych ośrodków.

A. D. FINE [54] podał równania sprzężonej teorii termoplastyczności wraz z warunkami na powierzchni nieciągłości, to jest powierzchni oddzielającej obszary sprężyste od obszarów plastycznych. Wykazano, że warunki na powierzchni nieciągłości mają taką postać, jak i na powierzchni czoła fali plastycznej. Autorzy pracy [292] analizowali osiowo-symetryczne zagadnienia termiczne w teorii sprężystości, plastyczności i pełzania. Podali też uniwersalny program na maszynę cyfrową, który umożliwia wyznaczenie pól naprężeń dla cylindrów, dysków, pierścieni i powłok walcowych. D. A. HOCHFELD [324] uogólnił kinetyczne twierdzenie Koitera na przypadek cyklicznie działających, niestacjonarnych pól temperatur w ośrodkach sprężysto-plastycznych. W pracy [325] zajęto się problemem adaptacji ośrodków nierównomiernie nagrzewanych. W charakterze przykładu rozpatrzono zagadnienie płyty kołowej utwierdzonej na brzegu i poddanej obciążeniu oraz polu temperatur. S. D. KŁACZKO [370] podał przegląd prac poświęconych analogii między zadaniami termosprężystości i termoplastyczności a problemami w ośrodkach nienagrzewanych. J. N. SZEWCZENKO [497] udowodnił dwa twierdzenia o odciążaniu w teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych przy uwzględnieniu nierównomiernego ogrzania. W rozważaniach tych uwzględniono zależność własności sprężystych od temperatury. W pracy [498], w oparciu o postulat plastyczności Iljuszyna i przy uwzględnieniu zależności własności fizycznych od temperatury i deformacji plastycznej, otrzymano uogólnione stowarzyszone prawo płynięcia. Prawo to jest słuszne dla przypadku nieizotermicznego obciążenia i dla modelu ośrodka ze wzmocnieniem. W pracy [499], wychodząc z teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych, warunków ciągłości i równań przewodnictwa ciepła, otrzymano (dla sformułowanych warunków początkowych i brzegowych) zamknięty układ równań wyjściowych pozwalający analizować historię obciążenia ośrodka — przy nierównomiernym nagrzewaniu.

H. H. HILTON, S. B. DONG [84] podali analogię sprężysto-lepkosprężystą dla anizotropowej liniowej termo-lepkosprężystości. A. JOHANSHAHI [110] badał pole naprężeń w liniowym ośrodku lepkosprężystym, które zostało wywołane wolno przemieszczającym się polem temperatur o stałej prędkości. E. H. LEE, T. G. ROGERS [143] badali rozkład naprężeń residualnych w ośrodku termo-lepkosprężystym o symetrii kulistej. H. PARKUS [217], wychodząc z zależności energetycznych, analizował liniowe równania stanu opisujące pole naprężeń termicznych w ośrodku lepkosprężystym, którego własności reologiczne są funkcjami temperatury. G. A. WAN FO FY [312] rozpatrywał możliwość zastosowania równań anizotropowej termo-lepkosprężystości do analizy pracy konstrukcji wykonanych z mas plastycznych. A. A. ILJUSZYN, P. M. OGIBAŁOW [347] przeprowadzili krytyczną analizę prac odnoszących się do analogii czasowo-termicznej przy wzięciu pod uwagę możliwości zastosowania jej do zagadnień wytrzymałości na długotrwałe obciążenie. Ł. M. KACZANOW [359] analizuje zagadnienie pełzania w przypadku, gdy pole temperatur jest funkcją okresowo zmienną. M. A. KOŁTUNOW [381] zajmował się nieliniową termolepkosprężystością. A. M. SKUDRA, W. M. ANTANS [461] podali reologiczne równania stanu dla ośrodka termo-lepkosprężystego zbrojonego materiałem o własnościach lepkosprężystych. Ł. P. CHOROSZUN [486] rozpatrywał reologiczne własności ośrodków ze stochastycznie rozłożonymi niejednorodnościami. W pracy przyjęto zależność między

lokalnymi naprężeniami a odkształceniami, jak dla ośrodka sprężysto-lepkiego będącego elementem strukturalnym ośrodka globalnego przy statystycznie rozłożonych niejednorodnościach. Zależność ta ma postać prawa Boltzmanna–Volterry, w którym występujące jądra zawierają funkcję współrzędnych stochastycznych. A. I. CZUDNOWSKI [490], w oparciu o ogólne zasady termodynamiki procesów nieodwracalnych, wyprowadził związki między naprężeniami a odkształceniami dla ośrodka termo-lepkosprężystego.

D. IEŞAN [98] zajmował się nieliniową termosprężystością. K. A. V. PANDALAI, A. PATEL SHARAD [212] analizowali naprężenia termiczne w ośrodku niesprężystym wykorzystując uogólnione związki Ramberga–Osgooda. Szczegółowo badano cylinder i kulistą powłokę grubościenną. Ośrodki te poddane były działaniu ciśnienia wewnętrznego i zewnętrznego oraz działaniu pola temperatur. N. W. WASILENKO [313] wypi owadził równania nieliniowej termosprężystości.

J. KLEPACZKO [130] analizował potęgową postać mechanicznego równania stanu przy uwzględnieniu wpływów temperatury. Otrzymano podstawowe równanie za pomocą analizy wyników doświadczalnych. Otrzymane równania dobrze opisują pierwsze stadium pełzania i relaksacji.

M. F. Mc CARTHY [506] rozpatrywał propagację fal przyspieszeń w ośrodku sprężystym o doskonałej elektroprzewodności i skończonej przewodności cieplnej. Podano warunki propagacji tych fal oraz prędkość propagacji w dowolnym kierunku. Rozwiązanie przeprowadzono dla sprężystego ośrodka anizotropowego znajdującego się — przed nadejściem czoła fali — w dowolnym stanie odkształcenia i magnesowania. H. W. LORD, Y. A. SHULMAN [515] zajmowali się uogólnieniem dynamicznej termosprężystości. Założono, że wektor strumienia cieplnego i temperatura związane są uogólnionym prawem Fouriera (uwzględnienie czasu relaksacji). Podano równania sprzężone, a następnie przeprowadzono ich linearyzację. Rozwiązano jednowymiarowe zadanie propagacji fal dla półprzestrzeni. Stwierdzono, że w rozważonym przykładzie czoło fali termicznej propaguje się szybciej niż czoło fali sprężystej. Autorzy pracy [516] wyznaczali naprężenia termiczne w asfaltobetonie, który stanowi pokrycie nawierzchni drogi. Stwierdzono, że naprężenia termiczne (przy obniżeniu temperatury poniżej zera) przekraczają znacznie wytrzymałość ośrodka na rozrywanie, co powoduje powstanie charakterystycznych rys. Zadanie rozwiązano w zakresie liniowej termo-lepkosprężystości. Otrzymane rozwiązanie teoretyczne potwierdzono badaniami doświadczalnymi. Autorzy pracy [524] podali rozwiązanie zadania Cauchy'ego dla układu równań różniczkowych termodyfuzji i dla odkształcalnych ośrodków izotropowych. Wykazano jednoznaczność rozwiązania zagadnienia w klasie wybranych funkcji. T. J. ZAGORSKI, G. S. IWANIENKO [525] rozwiązali zadanie Cauchy'ego dla równań przemieszczeniowych quasi-statycznego zadania termosprężystości. Wykazano istnienie i jednoznaczność otrzymanego rozwiązania.

3. Przestrzeń i półprzestrzeń

J. R. BARBER, K. WRIGHT [11], wykorzystując rozwiązania dla pola temperatur z punktowym źródłem ciepła, otrzymali pole przemieszczeń brzegu półprzestrzeni. N. FOX [56] wyznaczył pole naprężeń w półprzestrzeni wywołane liniowo rozłożonym źródłem ciepła, które porusza się na brzegu półprzestrzeni. A. GAŁKA [60] otrzymał funkcję Greena dla

temperatury w nieograniczonej przestrzeni termosprężystej dla zagadnień trój- i dwuwymiarowych. Zadanie rozwiązano dla problemu sprzężonego. W pracy [61] wyznaczono rozkład temperatury i pole przemieszczeń dla przestrzeni termosprężystej, wywołane nieokresowym działaniem punktowego źródła ciepła, a w [62] podano przybliżone rozwiązanie płaskiego zadania w nieograniczonej przestrzeni dla wpływów podobnych, jak w [61]. Z. J. HOLY [88] rozpatruje pole temperatur i naprężeń w półprzestrzeni przy założeniu osiowo-symetrycznej powierzchni przejmowania ciepła. W pracy [89] analizuje się osiowo-symetryczne zadanie dla przestrzeni półnieskończonej przy lokalnym wzbudzeniu termicznym na powierzchni brzegowej. A. JAHANSHAHI [111] wyznaczył quasi-statyczne pole naprężeń wywołane — stałym wewnątrz okręgu — poruszającym się polem temperatur, które zostaje zlokalizowane na brzegu półprzestrzeni. J. KOWALEWSKI [138] wyznaczył funkcję wpływu dla przemieszczeń i naprężeń wywołanych polem temperatur. C. VAN MOW, S. H. CHENG [175] wyznaczyli naprężenia cieplne w półprzestrzeni sprężystej wywołane ruchomym, dowolnie rozłożonym źródłem ciepła, przy założeniu, że gradient przepływu ciepła w kierunku ruchu jest mały w porównaniu z gradientem w kierunku poprzecznym. W. NOWACKI [191] rozpatrywał zagadnienie rozchodzenia się termosprężystych fal podłużnych w nieograniczonym ośrodku, a w [187, 197], w ramach sprzężonego zadania termosprężystości, rozpatrzono zagadnienie quasi-statyczne dla przestrzeni przy uwzględnieniu działania siły skupionej i skupionego źródła ciepła. Podano wzory określające pole temperatur, pole przemieszczeń oraz funkcję Greena. H. REISMANN [236] podał rozwiązanie zadania termosprężystości dla przestrzeni w przypadku, gdy działają ruchome płaskie źródła. E. SOÓS [246] wyznaczył przedstawienie typu Galorkina dla termosprężystości sprzężonej przy zastosowaniu macierzy stowarzyszonych. W. E. WARREN, J. A. WEESE [264] rozpatrzyli zagadnienie osiowo-symetrycznej deformacji przestrzeni wywołanej polem temperatur. Rozpatrzono w szczególności przestrzeń z dwiema symetrycznymi pustkami oraz półprzestrzeń z wycięciem sferycznym. E. V. WILMS [268] rozwiązał sposobem iteracyjnym niestacjonarne sprzężone zagadnienie termosprężystości dla przestrzeni z pustką kulistą, wewnątrz której przyłożono nagle stałe ciśnienie. E. M. SZEFTER [500] rozwiązał zagadnienie polegające na określeniu pola naprężeń w przestrzeni sprężystej wywołanego działaniem promieniowania i strumienia energii cieplnej.

E. DEUTSCH [39] badał rozkład naprężeń termicznych w nieskończonym ośrodku zawierającym szczelinę w postaci walca kołowego. Y. K. MEHTA [165] podał rozkład naprężeń termicznych wokół szczeliny znajdującej się w półnieskończonym ośrodku o izotropii poprzecznej. N. M. BORODACZEW [303] rozpatrzył zagadnienie termosprężystości dla szczeliny w przypadku, gdy wewnątrz działa ciśnienie i określone pole temperatur. M. M. SIDLAR [450] rozwiązał płaskie zadanie polegające na wyznaczeniu naprężeń w nieskończonej przestrzeni sprężystej ze szczeliną walcową w przypadku, gdy działają dwa skupione (zmienne okresowo w czasie) źródła ciepła.

LIU HSIEN CHIH [147] rozpatrzył zagadnienie kontaktowe, określone przez wciskanie walca w półprzestrzeń, przy założeniu równych temperatur walca i półprzestrzeni oraz przyjęciu równoległości osi walca do brzegu półprzestrzeni. Z. OLESIAK, J. ŚLIŻEWICZ [208] wyznaczyli pole naprężeń i odkształceń w półprzestrzeni sprężystej wywołane nagrzaniem zamocowanej części płaszczyzny brzegowej. Z. OLESIAK [209] rozpatruje zagadnienie kontaktowe termosprężystości dla półprzestrzeni sprężystej w przypadku, gdy na

brzegu półprzestrzeni (na powierzchni stykowej) zadana jest temperatura, a na pozostałej części temperatura jest równa zeru. W pracy [210] rozpatrzono zadanie kontaktowe i zagadnienie szczeliny przy uwzględnieniu wpływów termicznych. I. D. KILL [361] wyznaczył pole naprężeń w półprzestrzeni sprężystej wywołane kontaktem brzegowym z ośrodkiem, którego temperatura jest określoną funkcją przy założonej wymianie ciepła zgodnej z prawem Newtona. A. M. SIMONJAN [455] rozpatrzył zagadnienie kontaktowe dla dwu ośrodków ortotropowych znajdujących się w strumieniu cieplnym, przy założeniu występowania kilku obszarów styku. Zadanie rozwiązano przyjmując płaski stan odkształcenia. W pracy [456] badano nacisk w obszarze styku dwu ściskanych osiowo-symetrycznych ośrodków o izotropii poprzecznej, znajdujących się w osiowo-symetrycznym polu temperatur. A. F. CHRUSTALEW [487] rozwiązał zadanie kontaktowe dla półprzestrzeni, w którą wciskany jest stempel o dowolnym przekroju poprzecznym i posiadający stałą temperaturę.

LIU HSIEN CHIH [149] podał rozwiązanie płaskiego zadania termosprężystości dla półprzestrzeni, która zawiera wtrącenia w postaci graniastosłupa o podstawie prostokątnej przy założonych różnych współczynnikach rozszerzalności liniowej. J. S. PODSTRIGACZ, I. W. GAJWAS' [431] rozpatrzyli zagadnienie termosprężyste dla nieograniczonej sfery z wtrąceniem walcowym.

KOBAJASHI AKIRA [133] rozpatrzył jednowymiarowe dynamiczne zagadnienie termosprężystości dla półprzestrzeni, której powierzchnia brzegowa przemieszcza się na skutek ablacji ze stałą prędkością. W pracy [134] rozpatrywano zagadnienia termosprężyste dla układu gaz—ośrodek stały, wynikające z uprzedniego nagłego ogrzania brzegu półprzestrzeni ośrodka stałego do temperatury przewyższającej temperaturę sublimacji ośrodka drugiego. H. MÜLLER, K. STARK [176] rozpatrywali płaskie fale termosprężyste w nieskończonym ośrodku. M. MURTHY, GOPALA KRISHNA [178] rozpatrywali zagadnienia dynamiczne dla półprzestrzeni traktując problem jednowymiarowo. Rozpatrzono też ośrodek termo-lepkosprężysty. D. V. SINGH [243] rozpatrywał udarowe nagrzanie półprzestrzeni sprężystej w wyniku nagłego pojawienia się strumienia ciepła skierowanego na brzeg tej półprzestrzeni. Y. TSUI [255] rozwiązał dynamiczne zagadnienie termosprężystości dla półprzestrzeni o temperaturze brzegu stałej w skończonych przedziałach czasu. Otrzymane rozwiązanie porównano z wynikami uzyskanymi przez W. J. Daniłowską. W. NOWACKI [191] podał funkcję Greena w zamkniętej postaci dla nieskończonego ośrodka sprężystego w przypadku, gdy działają siły skupione i źródła ciepła. Zadanie rozwiązano dla zagadnienia quasi-statycznego. E. ZIEGLER [285] rozpatrywał propagację fal płaskich w półprzestrzeni przy wzbudzaniu stochastycznym, z uwzględnieniem związku pola przemieszczeń i temperatur. E. B. POPOW [439] rozpatrywał sprzężone dynamiczne zagadnienie termosprężystości dla półprzestrzeni przy uwzględnieniu skończonej prędkości rozprzestrzeniania się ciepła i przy założeniu, że temperatura jest skończoną i określoną funkcją czasu, a brzeg jest nieobciążony.

D. IEŞAN [96] rozpatrywał dwuwymiarowe zagadnienie termosprężystości dla ośrodka anizotropowego.

W. K. NOWACKI [204, 205] badał udary cieplne na brzegu sprężysto-lepkoplastycznej półprzestrzeni. Rozwiązał też zagadnienie propagacji fal w półprzestrzeni sprężysto-lepkoplastycznej dla udarów termicznych przy założeniu skończonej prędkości zmian na

brzegu. W pracy [206] podano rozwiązanie zadania o udarze termicznym na powierzchni sferycznej pustki w ośrodku sprężysto-lepkoplastycznym. W. K. NOWACKI, B. RANIECKI [207] rozpatrzyli przypadek propagacji fal termosprężystych ze szczególnym uwzględnieniem rozwiązania dla półprzestrzeni i płyty nieskończonej spoczywającej na podłożu sprężystym. B. RANIECKI [225] rozpatrywał quasi-statyczne zagadnienie termoplastyczności dla ośrodka z wycięciem sferycznym, w którym zadana jest temperatura zmienna w czasie. W pracy [226] rozpatrzono zagadnienie udaru termicznego dla przestrzeni z pustką kulistą i dla ośrodka termoplastycznego. J. STEFANIAK [247, 248] rozpatrywał propagację fal w nieskończonym ośrodku sprężysto-lepkim wywołaną działaniem płaskiego źródła ciepła, którego natężenie jest funkcją okresowo zmienną w czasie.

A. D. FINE, H. KRAUS [511] przedstawili rozwiązanie dynamicznych problemów termoplastyczności dla zagadnień niesprzężonych. Szczegółowe rozwiązanie podano dla półprzestrzeni. W. WARREN, J. A. WESE [520] wyznaczyli pole naprężeń termicznych dla przestrzeni zawierającej dwie pustki kuliste znajdujące się w dowolnej odległości. Praca ta jest kontynuacją rozważań podanych w [264]. D. F. ŁAZUTKIN [530], wykorzystując twierdzenie Bettiego, rozpatrzył zagadnienie liniowej termosprężystości w ujęciu quasi-statycznym i otrzymał rozwiązanie zagadnienia dla przestrzeni przy uwzględnieniu sił skupionych lub skupionych źródeł ciepła.

4. Ustroje grubościenne

W. ALBRECHT [2] analizował pole niestacjonarnych naprężeń termicznych w cylindrze, w którym powierzchnia zewnętrzna jest izolowana, a na wewnętrznej zachodzi wymiana ciepła przez konwekcję. ATSUMI AKIRA [5] podał rozwiązanie dla cylindra z wycięciem sferycznym w przypadku, gdy wewnątrz przepływa stacjonarny strumień cieplny posiadający stały gradient temperatury. H. BUTKIEWICZJUS [22] podał rozwiązanie niestacjonarnego zadania termosprężystości dla nieskończonego cylindra przy założeniu, że wymiana ciepła z otaczającym ośrodkiem zewnętrznym i wewnętrznym zachodzi zgodnie z prawem Newtona. CHAŁTOPADHYAY NETAI CHAND [23] badał naprężenia termiczne w cylindrze, będącym w kontakcie z gładkimi sztywnymi płytami w przypadku, gdy zadane jest pole temperatur na powierzchniach walcowych. CHANDRA BAGHI MADHAB [25] rozwiązał zagadnienie, polegające na wyznaczeniu naprężeń termicznych w długim cylindrze anizotropowym nagrzewanym promieniowaniem gamma. W pracy [26] rozpatrzono stan naprężeń pojawiający się w sprężystym stożku półnieskończonym w przypadku, gdy jądro termosprężystej deformacji znajduje się w osi stożka. Praca [27] dotyczy naprężeń termicznych występujących w długim cylindrze, a wywołanych ogrzaniem zewnętrznej powierzchni do stałej temperatury przez kontakt z rozgrzanym pierścieniem. W pracy [28] rozpatrzono stan naprężeń termicznych występujących w cylindrze znajdującym się w kontakcie z gładkimi izolowanymi i sztywnymi płytami. Cylinder posiada skończoną długość, a temperatura na jego powierzchniach walcowych jest zadana. K. CHANDRASHEKHARA [29] wyznaczył naprężenia termiczne dla skończonego cylindra wywołane osiowosymetrycznym polem temperatur. D. DELGAO, J. JOSÉ [38] rozpatrzyli zagadnienie osiowosymetryczne termosprężystości dla cylindra i dla warunków brzegowych pierwszego i drugiego rodzaju. A. F. EMERY [47] rozpatruje długi cylinder poddany działaniu nie-

stacjonarnego pola temperatur. Przyjęto również, że jedna z powierzchni cylindra posiada stałą temperaturę, a na drugiej następuje wymiana ciepła według prawa Newtona. Założono też, że w cylindrze istnieją dwuwymiarowe szczeliny, położone na zewnętrznej lub wewnętrznej powierzchni. R. A. GELLATLY, P. P. BIJLAARD, R. M. GALLAGHAR [66] analizowali naprężenia termiczne i zagadnienie termostateczności trójwarstwowego cylindra, sztywno zamocowanego na podporach. D. S. GRIFFIN, R. B. KELLOG [72] zastosowali metodę różnic skończonych dla zadań termosprężystych (płaskich i osiowo-symetrycznych) wraz z podaniem algorytmu na maszynę cyfrową. Podano liczbowe wyniki dla koncentracji naprężeń w obszarze przejścia rury grubościennej o większej średnicy zewnętrznej na średnicę mniejszą. I. GRINDEI [73] analizował osiowo-symetryczne stany naprężeń termicznych występujące w walcach o skończonej długości przy izolowanych brzegach płaskich. W pracy [74] rozpatrzono naprężenia termiczne w cylindrze dla przypadku, gdy temperatura jest funkcją nieciągłą na powierzchni walca. K. HERMANN [83] podał rozwiązanie zagadnienia termosprężystości dla cylindra, przy temperaturze będącej funkcją przedziałami ciągłą. HWANG CHIN-TSUN, F. R. DEUT [94] rozpatrywali naprężenia termiczne w cylindrze wywołane ochładzaniem jego powierzchni. Zadanie rozpatrzono dla stanów sprężystych i sprężysto-plastycznych. D. IEŞAN [95] wyznaczył naprężenia termiczne w cylindrze składającym się z dwu różnych materiałów. K. T. IYENGAR SUNDARARAJA, K. CHANDRASHEKHARA [104, 106] wyznaczyli naprężenia termiczne w cylindrze o skończonej długości wywołane osiowo-symetrycznym polem temperatur zadanym na jednym z brzegów cylindra. K. T. IYENGAR SUNDARARAJA [105] rozpatrywał naprężenia termiczne w cylindrze o skończonej długości. Założono, że na powierzchniach walcowych temperatura jest zależna od współrzędnej tworzącej tę powierzchnię. YU DIA CHY [107] podał rozwiązanie niestacjonarnego zadania przewodnictwa ciepła dla cylindra przy warunkach brzegowych zależnych od czasu. Następnie wyznaczono pole naprężeń. KASUKI KADZUO [123] wyznaczył rozkład temperatur, naprężeń i odkształceń (dla zadania quasi-statycznego), wywołany zmianą temperatury w nieskończenie długim cylindrze, znajdującym się w kontakcie z dwoma ośrodkami o różnych współczynnikach przewodnictwa ciepła. KOIDZUMA TAKASI, TANIWAKI TIKARA [131] przedstawili analizę niestacjonarnych naprężeń termicznych w cylindrze, zanurzającym się w ośrodku o zerowej temperaturze przy założeniu, że cylinder posiada stałą temperaturę. KOIDZUMA TAKASI, NAKAHARA YTIRO [132] wyznaczyli naprężenia termiczne w cylindrze pod działaniem niestacjonarnego źródła ciepła znajdującego się na wewnętrznej powierzchni cylindra. M. V. KOROVCHINSKI [136] rozpatrywał płaskie quasi-statyczne zagadnienie termosprężystości przy uwzględnieniu wydzielania ciepła na powierzchni kontaktowej. Rozpatrzono zagadnienie przesuwania się jednego cylindra w drugim przy uwzględnieniu tarcia na powierzchni kontaktowej. C. W. LEE [144] analizował pole naprężeń termicznych w cylindrze przy założeniu istnienia osiowych gradientów pola temperatur. C. K. LIU, C. H. CHANG [153] określili dynamiczne naprężenia termiczne pojawiające się w nieskończenie długim cylindrze, poddanym działaniu wewnętrznego ciśnienia oraz osiowo-symetrycznemu polu temperatur. R. LONGO [154] rozwiązał zadanie termosprężystości dla anizotropowego cylindra. MAHALANABIS RANJIT KUMAR [161] analizuje zadania osiowo-symetryczne o naprężeniach termicznych w nieskończonym cylindrze przy mieszanych warunkach brzegowych na powierzchni zewnętrznej. P. MARTINOT [164] rozwiązał metodą

graficzną zagadnienie termosprężystości dla rurociągu grubościennego. N. NAERLOVIĆ-VELJAKOVIĆ [182] rozpatrzyła zagadnienie naprężeń termicznych w cylindrze dla nieliniowego modelu ośrodka przy założonej różnicy temperatur powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej cylindra. Autorzy pracy [185] wyznaczyli naprężenia termiczne dla długiego walca przy założeniu stałych temperatur na jego powierzchniach. K. A. V. PANDALAI, A. PATEL SHARAD [212] podali analizę naprężeń termicznych w ośrodku niesprężystym przy szczególnym rozwiązaniu dla cylindra i kuli, poddanych działaniu ciśnienia oraz różnicy temperatur ścianki zewnętrznej i wewnętrznej. T. ROŻNOWSKI [232] badał niestacjonarny rozkład temperatury w długim cylindrze, którego połowa powierzchni bocznej jest chwilowo nagrzana do stałej temperatury, po czym ogrzanie to przesuwa się wzdłuż osi cylindra ze stałą prędkością. W pracy [233] rozpatrzono przypadek nieustalonego rozkładu temperatury w długim walcu, a w [234] badano quasi-statyczny osiowo-symetryczny problem termosprężystości przy warunkach brzegowych zależnych od czasu. P. D. SCHWIEBERT [238] badał sprężysto-plastyczne odkształcenia oraz pełzanie długich cylindrów dla ośrodków ze wzmocnieniem poddanych zmiennej temperaturze lub obciążeniom mechanicznym. K. STIEPER, R. HOFFMANN [249] wyznaczyli naprężenia termiczne w cylindrze w przypadku, gdy temperatura jest funkcją czasu — liniową lub odcinkami ciągłą. R. SHAIL [240] zajmował się wyznaczaniem naprężeń termicznych w cylindrach i rurach cienkościennych. J. VALENTA [259] analizował osiowo-symetryczne zagadnienia termosprężystości w grubościennych powłokach walcowych. G. WILIAM [267] rozpatrywał naprężenia termiczne w wycinku walca wywołane działaniem stałego strumienia cieplnego. S. WOELKE [269] wyznaczał naprężenia dynamiczne występujące w nieskończenie długim walcu, które wywołane zostały zmiennym polem temperatur. J. L. ZEMAN [280, 281], stosując teorię korelacji, podał rozkład temperatur dla ośrodka będącego pod wpływem źródeł ciepła, które są rozłożone losowo. Otrzymane wyniki zastosowano do wyznaczenia pola temperatur w nieskończonym walcu kołowym przy umieszczeniu źródła ciepła na jego zewnętrznej powierzchni. Następnie wyznaczono pole naprężeń przy założeniu, że powierzchnia cylindra odkształca się swobodnie. W. W. BOŁOTIN, K. S. BOŁOTINA [302] określili naprężenia termiczne w cylindrze wykonanym z ośrodka zbrojonego warstwowo. G. M. WAŁOW [311] rozpatrzył zadanie kontaktowe odnoszące się do osiowo-symetrycznego zagadnienia termosprężystości występującego w nieskończenie długim cylindrze. W. T. GRINCZENKO [330] rozpatrywał osiowo-symetryczne zagadnienia termosprężystości dla cylindra o skończonej długości w ujęciu quasi-statycznym. I. A. DANIUSZEWSKI, G. CH. LISTWINSKI [334] rozpatrzyli zadanie ustalonego pełzania rury grubościennej poddanej ciśnieniu wewnętrznemu i nierównomiernemu nagrzaniu na obwodzie. G. B. KOŁCZIN [382] rozpatrywał naprężenia termiczne w betonie w czasie jego tężenia. W. I. MACHOWIKOW [404] wyznaczył ustalone termosprężyste drgania cylindra przy założeniu, że na powierzchni bocznej cylindra zadana jest temperatura okresowo zmienna w czasie, a na brzegach bocznych zadana jest alternatywnie temperatura, obciążenie normalne i dwie współrzędne wektora przemieszczenia lub podana jest normalna współrzędna strumienia cieplnego oraz obciążenie styczne i radialne przemieszczenie. W pracy [405] rozpatrzono dynamiczne zadanie termosprężystości dla ośrodka obrotowego o izotropii poprzecznej z wycięciem otrzymanym za pomocą dwu półpłaszczyzn południkowych. A. K. MOJSIEJENKO, I. A. CURPAŁ [414] rozwiązali zagadnienie wyznaczenia naprężeń w cylindrze

poddanym ciśnieniu zewnętrznemu i wewnętrznemu oraz ogrzewanym strumieniem ciepła. Zadanie rozwiązano przy założeniu ośrodka fizycznie nieliniowego. I. A. MOTOWIŁOWIEC, I. F. KIRICZOK [415] określili osiowo-symetryczny stan naprężeń w cylindrze o nieskończonej długości, znajdującym się w warunkach wymiany ciepła z otaczającym ośrodkiem. D. A. PIERIEWIERZIEW [424] rozwiązał zadanie niestacjonarnego przewodnictwa cieplnego w cylindrze trójwarstwowym o nieskończonej długości, przy warunkach brzegowych trzeciego rodzaju. W rozwiązaniu wyznaczono też pole naprężeń. A. I. PODGORNY [429] rozpatrywał termosprężyste osiowo-symetryczne zagadnienie dla cylindra poddanego wpływom obciążenia i pola temperatur. W. G. SAWCZENKO [444] badał naprężenia termiczne w cylindrze posiadającym wycięcia, a wykonanym z ośrodka lepkosprężystego. J. A. SAMONŁOWICZ [446] rozpatrzył stan sprężysto-plastyczny, dla warunku plastyczności Misesa–Hubera–Hencky'ego, w cylindrze znajdującym się w nierównomiernym polu temperatur. A. M. SIMONJAN [452] rozpatruje termoplastyczne zagadnienie związane z rurą walcową będącą pod działaniem ciśnienia i strumienia cieplnego. Zadanie sprowadzono do nieliniowego równania funkcyjnego. W pracy [453] rozpatrzono zagadnienie pełzania rury obracającej się wokół osi i znajdującej się pod działaniem strumienia cieplnego. Zadanie rozwiązano dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia. P. S. SOŁOMIN [462] podał rozwiązanie nieustalonego zagadnienia termosprężystego dla cylindra trójwarstwowego w ujęciu quasi-statycznym, a w [463] podano rozwiązanie nieustalonego zadania termo-lepkosprężystego dla rury walcowej przy wykorzystaniu analogii sprężysto-lepkosprężystej. B. F. TRACHTENBERG, M. S. KENIS [468] rozpatrywali zagadnienie quasi-statyczne termosprężystości dla cylindra o nieskończonej długości poddanego działaniu źródeł ciepła, umieszczonych na wewnętrznej powierzchni cylindra, o natężeniu zmiennym w czasie. B. D. CHAN'ŻOW [481] zbudował funkcjonał dla osiowo-symetrycznego zadania wariacyjnego termosprężystości, dla cylindra o skończonej długości. Autorzy pracy [502] analizowali sprężysto-plastyczny stan naprężeń termicznych w odlewach o kształcie walca przy nagrzewaniu w niestacjonarnym polu temperatur.

Z. J. HOLY [87] podał algorytm przydatny dla obliczeń numerycznych na maszynie cyfrowej, dotyczący wyznaczania naprężeń termicznych w kuli zawierającej źródła ciepła. P. PURI [221] analizuje zagadnienie udaru cieplnego dla kuli nagle ogrzanej na powierzchni. B. RANIECKI [227] rozpatrywał termoplastyczne zagadnienie dla kuli wydrążonej, która znajduje się w zmiennym polu temperatur. W pracy [228] rozpatrzono wpływ współczynnika przenikania ciepła na końcowy stan naprężenia w kuli poddanej procesowi ochładzania. Ośrodek rozpatrywano jako sprężysto-plastyczny. T. TSUI, H. KRAUS [254] rozwiązali zagadnienie propagacji fal termosprężystych w kuli grubościennej wywołanych nagłym podwyższeniem temperatury na wewnętrznej powierzchni kuli. Autorzy pracy [292] przedstawili rozwiązanie osiowo-symetrycznych zadań termosprężystości, termoplastyczności i termolepkości z podaniem algorytmu obliczeniowego na maszynę cyfrową. A. Sz. DADASZEW [331] podał rozwiązanie zagadnienia termoplastycznego dla wydrążonej kuli z cienkim wewnętrznym pokryciem wykonanym z materiału różnego od kuli podstawowej, poddanej wpływom symetrycznego pola temperatur. D. KOŁAROW, A. BAŁTOW [380] rozpatrzyli dynamiczne zagadnienie termo-lepkoplastyczności, przy uwzględnieniu zależności własności fizycznych od temperatury, dla sferycznej powłoki grubościennej poddanej wewnętrznemu ciśnieniu i zmiennemu polu temperatur.

A. M. SIMONJAN [454] rozpatrywał zadania termo-lepkosprężystości dla ośrodków o sferycznej symetrii. Jako szczególny przypadek rozpatrzono grubościenny zbiornik sferyczny poddany działaniu ciśnienia wewnętrznego i strumienia cieplnego.

J. DVOŘÁK [509] wyznaczył pole temperatur i naprężeń w grubościennym i cienkościennym cylindrze, w którym zachodzi wymiana ciepła między powierzchnią zewnętrzną cylindra a ośrodkiem otaczającym. Założono, że powierzchnia wewnętrzna jest izolowana cieplnie. Otrzymane wyniki liczbowe zostały zestawione na wykresach. Z. J. HOLY [512] rozpatrzył zadanie polegające na wyznaczeniu pola temperatur i naprężeń w kuli sprężystej, w której znajdują się rozłożone źródła ciepła o stałej intensywności. Założono, że na powierzchni kuli następuje wymiana ciepła z otaczającym ośrodkiem. A. BAŁTOW, N. BOGDANOW [523] wyznaczyli pole naprężeń termicznych w nieskończonym cylindrze wykonanym z ośrodka sztywno-plastycznego poddanym działaniu pola temperatur. Rozpatrzono przypadek stacjonarnego i niestacjonarnego pola temperatur. W przypadku pola stacjonarnego i quasi-statycznego problemu płynięcia otrzymano rozwiązanie w postaci zamkniętej.

5. Powłoki

S. A. AMBARTSUMIAN, S. M. DURGARIAN [1] rozpatrywali zagadnienia drgań i stateczności powłok małowyniosłych i płyt w ujęciu nieliniowym geometrycznie. W analizie przyjęto nieustalone pola temperatur. A. P. BORESI, I. C. WANG [18] wyprowadzili wzory określające energię odkształcenia przy uwzględnieniu dużych ugięć. Wzory te są ważne dla powłok izotropowych sprężystych (walcowa, stożkowa, sferyczna), poddanych wpływom pola temperatur. Autor pracy [19] zastosował metodę sił zespolonych w teorii powłok ortotropowych przy uwzględnieniu wpływów termicznych. K. CZARNOWSKI [36] przedstawił porównanie różnych metod obliczeń zbiorników ciśnieniowych z wykładziną. W pracy zaproponowano sposób, który pozwala na uwzględnienie wpływu nieustalonego przepływu ciepła na naprężenia w wykładzinach wielowarstwowych. M. H. GRADOWCZYK [70, 71] wyprowadził podstawowe równania dla teorii błonowej i zgięciowej powłok o małej wyniosłości przy uwzględnieniu faktu, że pole temperatur jest stacjonarne. E. HEER [82] podał podstawowe równania teorii powłok z uwzględnieniem wpływów dynamicznych, wywołanych zmiennym polem temperatur. H. PARKUS [218] wyznaczył naprężenia termiczne w powłoce kontaktującej się ze sztywnym gładkim ośrodkiem. C. N. SILVA, S. J. ALLEN [242] zajmowali się liniowymi, termosprężystymi zadaniami w teorii powłok. C. WOŹNIAK [273] badał beznaprężeniowe stany w powłokach wywołane polem temperatur. Z. ZUDAUS [287] uwzględniał wpływy dynamiczne w powłokach, wywołane impulsami mechanicznymi i termicznymi. E. L. AKSELRAD [289] rozpatrywał zagadnienia termosprężyste dla niejednorodnych powłok ortotropowych. W. W. BOŁOTIN, W. M. MOSKALENKO [301] zajmowali się losowymi naprężeniami termicznymi; podali też ocenę termosprężystego stochastycznego efektu brzegowego w powłokach walcowych. A. I. BRUSIŁOWSKI, J. A. TOROSJAN [304] wyprowadzili równania dla trójwarstwowych małowyniosłych powłok z uwzględnieniem wpływów termicznych. O. J. KALEKIN [351] rozpatrywał zagadnienia termosprężyste dla powłok obrotowych średniej grubości. G. A. KILCZYŃSKA [366] badała problemy dynamiki powłok w warunkach wysokich temperatur i przy uwzględnieniu, że własności

sprężyste są funkcjami temperatury. A. D. KOWALENKO, W. G. KARNOUCHOW [372] wychodząc z równań termodynamiki procesów nieodwracalnych, otrzymali układy równań opisujące problemy termo-lepkosprężyste w powłokach. Przyjęto, że własności sprężyste są zależne od temperatury. A. N. KUDINOW [391], przyjmując za punkt wyjścia teorię nieliniową, wyprowadził równania ujmujące zagadnienia termosprężyste i termostateczne w powłokach ortotropowych o małej wyniosłości. W. I. MACHNIENKO, E. A. WIELIKOIWANIENKO [403] analizowali proces rozwijania termoplastycznych odkształceń i naprężeń w powłoce obrotowej małowyniosłej o zmiennej grubości. Zagadnienie rozpatrywano jako niestacjonarne, w sformułowaniu dogodnym dla techniki maszyn cyfrowych. N. D. PANKRATOW [421] rozpatrzył zagadnienie termosprężystości dla dwukrzywiznowych powłok małowyniosłych. W. W. PIETROW [425] badał pola naprężeń w powłokach małowyniosłych w ujęciu teorii ugięć skończonych przy uwzględnieniu, że własności sprężyste zależą od temperatury. W. S. CZERNINA [488] rozpatrywała zagadnienia termosprężyste dla powłok obrotowych. R. N. SZWEC [493] udowodnił twierdzenia o jednoznaczności rozwiązania zagadnienia brzegowego w teorii powłok dla liniowego sprzężonego zagadnienia termosprężystości. S. J. JAREMA, T. W. ŻELEŹNIAK [503] zajmowali się termostatecznością małowyniosłych powłok obrotowych. E. M. JASIN [504] zbadał w zakresie nieliniowym kilka przypadków, dotyczących zagadnień termostateczności w płytach i powłokach (powłoka walcowa i płyta nieograniczona).

A. A. BELĘS, M. SOARE [12, 13] zajmowali się wpływem równomiernej zmiany temperatury na pole ugięć skończonych w małowyniosłych powłokach typu paraboloidy hiperbolicznej o prostokątnym konturze. Autorzy pracy [48] wyznaczyli stacjonarne pole naprężeń w pierścieniu częściowo wypełnionym cieczą chłodzącą przyjmując, że warunki brzegowe są trzeciego rodzaju. A. C. RAPIER, T. M. JONES [231] zajmowali się zagadnieniami termosprężystymi występującymi przy obliczaniu elementów reaktora. W. A. SUCHAREW [465] rozpatrywał osiowo-symetryczne odkształcenia toroidalnej powłoki o zmiennej sztywności znajdującej się w stacjonarnym polu temperatur. Z. BACZYŃSKI [7] zajął się wyznaczaniem naprężeń termicznych w powłoce kulistej w przypadku, gdy pole temperatur jest osiowo-symetryczne. Założono, że brzeg powłoki posiada temperaturę zerową. H. KRAUS [139] analizował drgania swobodnie podpartych powłok sferycznych, które zostały wywołane strumieniem ciepła równomiernie rozłożonym na zewnętrznej powierzchni powłoki. N. NEARLOVIĆ-VELJAKOVIĆ [183] rozpatrzyła zagadnienie naprężeń termicznych, przy dużych odkształceniach, dla powłoki sferycznej w przypadku, gdy zadana jest temperatura na zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni powłoki. Autorzy pracy [235] wyznaczyli pole przemieszczeń w powłoce sferycznej o małej wyniosłości, poddanej działaniu skupionych obciążeń lub punktowemu nagrzaniu. I. S. ACHMEDJANOW [294] badał osiowo-symetryczne zagadnienie termosprężystości dla powłok sferycznych; podobne zagadnienia rozpatrywano w pracy T. W. BUGNIKOWEJ [307]. W. F. GRIBANOW, N. M. SMIRNOW [327] podali rozwiązanie lokalnego zagadnienia termostateczności dla powłoki sferycznej. O. N. IWANOW [344] rozwiązał problem osiowo-symetrycznego zadania termosprężystości występujący w dnie sferycznym osłabionym otworem kołowym. Dno wykonane jest z ośrodka, którego własności sprężyste zależą od temperatury. B. A. KORBUT [385] analizował zagadnienie termostateczności dla powłoki sferycznej z wypełnieniem sprężystym. J. A. CZERNUCHA [489] badała zagadnienia termostateczności w powłoce

sferycznej przy uwzględnieniu ugięć skończonych. G. S. SZACHROMANOW [491] podał funkcję ugięcia dla powłoki sferycznej poddanej wpływom termicznym, której rzut na płaszczyznę prostopadłą do osi powłoki jest prostokątem.

D. BENDAWID, J. SINGER [15] analizowali zagadnienie termostateczności dla małowyniosłej powłoki stożkowej. Otrzymane wyniki porównano z danymi doświadczalnymi. S. Y. LU, C. L. SUN [156] rozpatrywali zagadnienia udarów cieplnych w powłokach stożkowych przy uwzględnieniu członów inercyjnych związanych z przemieszczeniami normalnymi do powierzchni środkowej powłoki. S. Y. LU, L. K. CHANG [157], przyjmując równania teorii powłok małowyniosłych, analizowali zagadnienia termostateczności w powłokach stożkowych utwierdzonych lub przegubowo zamocowanych na brzegu. F. TWARDOSZ [257] wyznaczał naprężenia termiczne występujące w powłokach stożkowych. A. D. KOWALENKO [371] analizował pole przemieszczeń i naprężeń w powłokach stożkowych wywołane wpływami termicznymi.

D. H. CHENG, N. A. WEIL [30] rozpatrywali osiowo-symetryczne zagadnienia dla powłoki walcowej, której brzegi poddane są działaniu ustalonego pola temperatur. S. CURIONI [35] badał stan naprężenia w połączeniach reaktora jądrowego z rurą doprowadzającą ciecz chłodzącą. Uwzględniono przy tym wpływy termiczne i ciśnienie wewnętrzne. J. EIBL [46] wyznaczał naprężenia termiczne w powłokach przekryciowych. M. FINTEL, F. R. KHAN [55] podali uproszczony, wykreślno-analityczny sposób wyznaczania pola temperatur i przemieszczeń występujących w kolumnach destylacyjnych. P. HRYCAK, R. E. HELGAUS [90] rozpatrywali stacjonarne zagadnienie termosprężystości dla powłoki walcowej nagrzewanej w czasie ruchu w kosmosie. A. E. JOHNSON, B. KHAN [112] zajmowali się obliczaniem zbiorników ciśnieniowych poddanych wpływom termicznym. M. KLEČKOWA [128] analizowała niestacjonarny stan naprężeń w powłoce walcowej w obszarze połączenia z kołnierzem. W pracy [129] rozpatrywała ona naprężenia termiczne w powłoce walcowej wywołane chwilową zmianą temperatury przepływającego medium. J. KRZEMIŃSKI [141] rozpatrywał stan naprężenia w nieskończenie długiej powłoce walcowej wywołany działaniem przesuwającego się źródła ciepła. Zadanie rozwiązano jako niesprzężone i quasi-statyczne. W pracy [140] rozpatrzono analogiczne pole termiczne przy nieruchomym źródle ciepła. MIZOGUCHI KOKI [171] rozpatrywał quasi-statyczne zadanie dla powłoki walcowej przy założeniu liniowego rozkładu temperatury na elemencie normalnym. K. VARGA [260] analizował naprężenia w strefie połączenia kolumny z pierścieniem oporowym wywołane gradientami temperatur. Ł. I. BAŁABUCH, Ł. A. SZAPOWAŁOW [296] rozpatrywali zagadnienia termosprężyste dla powłok walcowych otwartych wzmocnionych układem żeber. N. BUTKIEWICZJUS, W. BABILUS [308] analizowali pole temperatur i przemieszczeń występujące w walcowych i sferycznych kokilach, które znajdują się w warunkach konwekcyjnej wymiany ciepła z otoczeniem. R. N. GOROCHOWSKI [321] analizował stan naprężeń w powłoce walcowej, wywołany równomiernym polem temperatur. Autorzy pracy [328] sformułowali zadanie wariacyjne dla powłoki walcowej znajdującej się w osiowo-symetrycznym polu temperatur. J. M. ŻIGAŁKO [339] wyznaczył funkcję Greena dla zagadnienia termosprężystego w powłoce walcowej. W pracy [340] przytoczono asymptotyczne wzory dla wielkości wewnętrznych w powłoce walcowej w otoczeniu skupionego źródła ciepła. W. A. ZARUCKI, T. A. NIESZUMAJEWA [341] rozpatrzyli stan naprężeń w powłokach walcowych użebrowanych wzdłuż tworzących wy-

wołany działaniem stacjonarnego pola temperatur. Zbadano wpływ usztywnienia żebrami w przypadku, gdy powłoka jest podparta przegubowo. Z. G. KIERIMOW, N. I. JAGUBOW [360] wyznaczyli naprężenia termiczne w kolumnach destylacyjnych. K. CH. KOŻACHMETOW, R. M. FINKELSZTEIN [373] rozpatrywali osiowo-symetryczne zagadnienia termosprężystości dla półnieskończonej i skończonej powłoki walcowej, pod działaniem ruchomego źródła ciepła. W. N. MOSKALENKO [410] rozpatrzył losowy efekt brzegowy w powłoce walcowej dla osiowo-symetrycznego stanu naprężeń termicznych. Przyjęto, że zachodzi konwekcyjna wymiana ciepła z dwoma różnymi ośrodkami. A. B. PUCHOWSKI [427] rozpatrywał wpływ nagrzania słonecznego na pole naprężeń w powłokach walcowych. W pracy [428] rozpatrzono powłokę walcową wzmocnioną prętami i nagrzewaną od zewnątrz. L. I. FRIDMAN [478] wyznaczył pole naprężeń termicznych w osłonie komory spalania.

Autorzy pracy [45] badali trójwarstwowe powłoki przy dowolnych obciążeniach i przy uwzględnieniu wpływów termicznych. HAGAO CHIROSI [77] rozpatrywał osiowo-symetryczny stan naprężeń termicznych w trójwarstwowej powłoce walcowej swobodnie podpartej na brzegu. W. P. KARNOŻYCKI, P. G. TYDYKOW [356] analizowali naprężenia termiczne w powłokach walcowych trójwarstwowych ze sztywnym wypełnieniem przy założeniu, że temperatura jest funkcją promienia. Podobne zagadnienie rozpatrzono w pracy [358]. J. S. PODSTRIGACZ, P. R. SZEWCZUK [434] określili warunki termomechanicznego współdziałania ośrodków sprężystych z ośrodkami warstwowymi pokrywającymi. I. B. TARASOW [466] podał obliczenia wytrzymałościowe zbiorników walcowych wyłożonych warstwami ognioodpornymi.

V. J. MODI [180] rozpatrzył drgania powłoki walcowej swobodnie podpartej na brzegu i poddanej wpływom ciśnienia i promieniowego gradientu temperatury.

T. HAYASHI [81] zajmował się zagadnieniami dużych ugięć i stanów pokrytycznych w powłoce małowyniosłej wywołanych obciążeniami i polem temperatur. M. A. MAHAYNI [159] badał problem termostateczności małowyniosłego wycinka powłoki walcowej swobodnie podpartej na brzegu. W. W. KABANOW [348] rozpatrzył wpływ efektu brzegowego na wytrzymałość i stateczność powłoki walcowej o ortotropii konstrukcyjnej przy uwzględnieniu, między innymi, różnicy temperatur powłoki i podpór. W pracy [349] zajęto się zagadnieniem stateczności powłoki walcowej wzmocnionej wzdłużnymi żebrami, posiadającymi temperaturę różną od temperatury powłoki, przy osiowym ściskaniu. W. P. KARNOŻYCKI [355] wyznaczył krytyczne naprężenie w ściskanej powłoce walcowej trójwarstwowej przy założeniu, że temperatura jest zmienna wzdłuż elementu normalnego powłoki. G. L. KOMISSAROWA, S. A. LEONOW [383] badali dynamiczne zagadnienia termostateczności powłoki walcowej pofałdowanej w kierunku osiowym pod wpływem nierównomiernego pola temperatur. G. L. KOMISSAROWA [384] badała dynamiczne zagadnienia ustroju składającego się z dwu walcowych powłok współosiowych, ściskanych siłami osiowymi. Przyjęto, że na wewnętrzną powłokę działa — zmienne w czasie — osiowo-symetryczne pole temperatur, a między powłokami przepływa ośrodek chłodzący. B. A. KORBUT [386] rozpatrywał stateczność powłoki walcowej swobodnie podpartej na brzegu w przypadku, gdy jest ona ściskana osiowo, skręcana, poddana ciśnieniu i równomiernie ogrzana.

J. A. WIELIKOIWANIENKO, W. I. MACHNIENKO [315] badali termoplastyczne quasistatyczne zagadnienie dla powłoki walcowej o grubości zmiennej wzdłuż osi, przy osiowo-

symetrycznym obciążeniu i niestacjonarnym polu temperatur. Zadanie rozwiązano dla modelu Prandtla–Reissa i przy warunku plastyczności Hubera–Misesa–Hencky'ego. Autorzy pracy [323] analizowali stan naprężeń w powłoce walcowej przy uwzględnieniu działania niestacjonarnego osiowo-symetrycznego pola temperatur i dla ośrodka sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem. G. G. MIEJNIKOW, W. M. SWIESZNIKOW [407] rozpatrywali proces relaksacji naprężeń termicznych przy nieustalonym i ustalonym pełzaniu powłoki walcowej. W. W. PISKUN [426] rozpatrywał sprężysto-plastyczny, osiowo-symetryczny stan naprężeń w powłoce walcowej wywołany wewnętrznym ciśnieniem, siłą osiową i niestacjonarnym polem temperatur. L. I. POLAKOW, M. A. RUDIS [436] wyznaczył nośność graniczną dwuwarstwowej powłoki walcowej przy zmiennym polu temperatur i uwzględnieniu faktu, że tak moduł wzmocnienia, jak i granica plastyczności są funkcjami temperatury. J. G. SKOMOROWSKI [460] analizuje pole naprężeń termicznych w betonowej powłoce walcowej przy uwzględnieniu pełzania.

Autorzy pracy [507] rozpatrywali trójwarstwowe wycinki powłoki małowyniosłej, poddanej wpływom gradientów temperatur, normalnych do powierzchni środkowej. Równanie różniczkowe i warunki brzegowe zadania otrzymano na zasadzie prac przygotowanych. F. J. LOCKETT, L. W. MORLAND [514] wyznaczyli naprężenia termiczne w lepkosprężystej powłoce walcowej przyjmując, że własności fizyczne ośrodka zależą od temperatury. E. J. AKOPOW, B. S. WASILKOW [521] podali przykłady obliczeń wielofalowych przekryć dwukrzywiznowych przy założeniu, że temperatura jest równomiernie rozłożona. A. A. ANTIPOW [522] podał obliczenia małowyniosłego wycinka powłoki trójwarstwowej przy założeniu stacjonarnego nagrzewania.

6. Płyty i tarcze

W. ALBRECHT [3] analizuje niestacjonarne naprężenia termiczne pojawiające się w płycie na skutek udaru cieplnego. Zakłada się, że między płytą a otaczającym ośrodkiem istnieje wymiana ciepła. R. ARIENTI [4] badał naprężenia w płycie szklanej wywołane nagrzaniem słonecznym. ATSUMI AKIRA, YOSHIDA KIMIO [6] podali rozwiązanie zagadnienia termosprężystości dla grubej płyty posiadającej sferyczne wycięcie, a znajdującej się w symetrycznym polu temperatur. B. R. BAKER [8] rozpatruje płaskie zadania termosprężystości w klinach ortotropowych i pasmach. W pracy [9] rozpatrzono stacjonarne zadanie termosprężystości dla płyty ortotropowej, której powierzchnie są izolowane. A. BRODEAN [20] bada naprężenia termiczne w ścianach podłużnic. F. DUNN, C. LIBOVE [44] podali liczbowe wyniki obliczeń płaskiego pola temperatur i naprężeń dla tarczy kwadratowej ograniczonej czterema brzegowymi żebrami. Tarcza poddana jest działaniu stałego — wzdłuż elementu normalnego — pola temperatur. J. FILIPKOWSKI [53] otrzymał ogólne rozwiązanie dwuwymiarowego zagadnienia termosprężystości przez wprowadzenie funkcji zmiennej zespolonej. I. GRINDEI [75] badał quasi-statyczne naprężenia termiczne w płycie kołowej przy przyjęciu założenia o liniowym rozkładzie temperatury na elemencie normalnym płyty. K. S. HAVNER [78] zastosował metodę różnic skończonych do rozwiązania osiowo-symetrycznego zadania termosprężystości dla płyty kołowej o stałej i zmiennej grubości. W rozwiązaniu uwzględniono, że własności sprężyste zależą od temperatury. K. S. HAVNER, E. L. STANTON [79] rozpatrzyli mieszany problem brzegowy płaskiego zadania ter-

mosprężystości przy uwzględnieniu zależności własności sprężystych od temperatury. M. HOLLAND [85] analizował stan naprężeń termicznych w dyskach. Autorzy pracy [103] wyznaczyli naprężenia termiczne w skończonej i półnieskończonej płycie prostokątnej przy założeniu, że pole temperatur jest dowolną funkcją współrzędnych punktu powierzchni środkowej. KAWAI TADACHKO [125] podał analizę płaskich zadań termosprężystości stosując «dyslokacyjną» teorię Volterry. E. KĄCKI [122] analizował zagadnienia termosprężystości dla belki tarczowej. Stan naprężeń wywołany jest nagrzaniem za pomocą strumienia elektrycznego o stałym natężeniu, a następnie — ochłodzeniem. Wymianę ciepła z otoczeniem przyjęto zgodnie z prawem Newtona. L. M. KEER, W. S. FU [126] badali pola naprężeń w płycie wywołane kontaktem ze sztywnym ogrzanym stemplem. N. LAWS [142] rozpatrywał ustalone zagadnienia termosprężystości w płytach. LIU HSIEN-CHIH [150] analizował naprężenia i odkształcenia w nieskończonej płycie pod wpływem ustalonego skupionego źródła ciepła znajdującego się wewnątrz płyty. W pracach [148, 150, 151, 152] badano zagadnienia termosprężystości dla płyt, w których znajdują się różnego kształtu wtrącenia (sferyczne, cylindryczne, pryzmatyczne). R. A. LUCA, F. ERDOGAN [155] rozpatrzyli quasi-statyczne zagadnienie termosprężystości dla nieskończonego klina wywołane działaniem chwilowego źródła ciepła przyłożonego w dowolnym punkcie ośrodka. MAHALANABIS RANJIT KUMAR [160] wyznaczył naprężenia i przemieszczenia w półpłaszczyźnie sprężystej w przypadku, gdy na obszarze kołowym zadana jest temperatura, a na pozostałej części płaszczyzny zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem. K. MOCH [172] rozpatrzył zagadnienie termosprężystości dla płyty poddanej działaniu nieciągłego pola temperatur działającego na jednej powierzchni. Na drugiej powierzchni założono idealną izolację cieplną. S. K. PAN [211] wyznaczył naprężenia termiczne w płycie eliptycznej wywołane źródłem ciepła przy założeniu, że brzegi płyty są izolowane cieplnie. R. SHAIL [239] rozwiązał zagadnienie termosprężystości dla płyty nieskończonej, zamocowanej na jednej powierzchni (z zerową temperaturą) i nieobciążonej na drugiej powierzchni (z temperaturą będącą funkcją współrzędnych biegunowych). Autorzy pracy [250] rozpatrywali analogię między płaskim zadaniem teorii sprężystości, a zagadnieniem zginania płyty dla obszarów wielospójnych. TAKENTI YOTIRO [252] rozpatrywał naprężenia termiczne w tarczach kołowych wywołane niestacjonarnym liniowym źródłem ciepła; w pracy [253] uwzględniono, że źródło jest ruchome. WAN THEIN [262] rozpatrywał naprężenia termiczne w tarczy prostokątnej wywołane dowolnym polem temperatur, stałym na grubości tarczy. W. E. WARREN [263] rozwiązał zagadnienie koncentracji naprężeń termicznych w półpłaszczyźnie posiadającej wycięcie. J. P. H. WEBBER, D. S. HOUGHTON [265] zajmowali się wyznaczaniem niestacjonarnych pól temperatury i naprężeń w skrzydłach samolotów. J. P. H. WEBBER [266] podał rozwiązania zadania termosprężystości dla płyty prostokątnej o zmiennej grubości poddanej wpływom nierównomiernego pola temperatury. C. K. YOUNGDAHL [279] zajmował się wyznaczaniem naprężeń termicznych w płytach paliwowych reaktorów atomowych. W. A. ABŁASISKIJ, G. A. DŻENA [288] wyznaczyli naprężenia termiczne w kutych z całości wirnikach turbin. W pracy założono, że temperatura każdego dysku zmienia się wzdłuż promienia, a sam dysk znajduje się w płaskim stanie naprężenia. Rozpatrzono konstrukcje dyskowe i bębnowe. W. G. BAŻENOW [295] rozpatrywał płaskie stacjonarne zadania przewodnictwa cieplnego dla dowolnych obszarów dwuspójnych przy założeniu, że na brzegach obszarów zadane są warunki wymiany

ciepła z otaczającym ośrodkiem. Podano też program na maszynę cyfrową obliczania pól temperatur i naprężeń. S. I. BOGOMOŁOW, A. M. ŻURAWLEWA [298] przedstawili próbę zastosowania maszyn cyfrowych do obliczenia drgań giętnych dysków turbin i kompresorów poddanych działaniu obciążeń oraz pola temperatur. J. F. BURMISTROW [310] analizował zadanie termosprężystości dla płyty prostokątnej znajdującej się w stacjonarnym polu temperatur, liniowo zmiennym wzdłuż elementu normalnego do powierzchni płyty; podobne zadanie rozpatrywał P. G. GOŁOSKOW [320] lecz przy założeniu zmiennej grubości płyty. W. T. GRINCZENKO, A. F. ULITKO [329] rozpatrywali zagadnienia quasi-statyczne dla płyty prostokątnej przy niestacjonarnym polu temperatur w przypadku, gdy brzegi są nieobciążone. A. A. JEMIELIANOW [337] wyznaczał naprężenia termiczne w płytach. Otrzymane wyniki mogą znaleźć zastosowanie przy obliczaniu ścian i przekryć budynków. A. I. IWANOWA [345] wyznaczyła ugięcie płyty o zmiennej grubości dla dowolnego znanego pola temperatury. J. M. KOŁANO, J. A. MAKUŁA [378] otrzymali rozwiązanie niestacjonarnego zagadnienia termosprężystości dla nieograniczonej płyty ogrzewanej źródłami ciepła, przy uwzględnieniu wymiany ciepła z otoczeniem. Podobne zadanie rozpatrywał J. M. KOŁANO [377]. B. G. KORENIEW [387] rozpatrywał problem termosprężystości dla nieskończonej płyty wymieniającej ciepło z otoczeniem na powierzchniach brzegowych. Na powierzchniach tych działają źródła ciepła będące funkcjami okresowymi czasu. W. W. KOROBIEJNIKOW [388] analizował płaskie zagadnienia termosprężystości dla nieskończonego klina. W. R. KULBACH [393] wyznaczył odkształcenia termiczne w płytach kołowych przy uwzględnieniu skupionych (w środku płyty) źródeł ciepła. A. I. ŁOBANOW, M. M. SIDLAR [398] rozpatrywali quasi-statyczne sprzężone zagadnienia termosprężystości dla półnieskończonej płyty, która znajduje się w warunkach konwekcyjnej wymiany ciepła z otoczeniem, a w pracy [399] rozpatrzono szczegółowe rozwiązanie dla płyty kołowej w przypadku okresowej zmiany jej temperatury. L. A. MAŁASZENKO [401] wyznacza naprężenia termiczne w konstrukcjach cienkościennych ze wzmocnieniami. I. A. MIEDNIKOW [406] rozpatrywał zadania sprowadzające się do wyznaczenia naprężeń termicznych w prostokątnych płytach betonowych. W. W. MOSKALENKO [410, 411] podał rozwiązanie zagadnienia wyznaczania losowego pola temperatur i naprężeń w płytach, poddanych opływowi nieizotermicznego burzliwego strumienia. N. S. RYŻKOW, G. S. TIER-AKOPIAN [442] podali przybliżony sposób wyznaczania nieustalonego pola temperatur i naprężeń w dyskach bębnów turbin parowych. L. P. TRAPEZNIKOW [467] wyznaczył naprężenia termiczne w graniastosłupie dla płaskiego stanu naprężenia i dla zadanego pola temperatur. A. G. UGODCZYKOW [474], stosując analogię Timoshenki, podał rozwiązanie płaskiego, stacjonarnego, quasi-statycznego zagadnienia termosprężystości przy zastosowaniu funkcji zmiennej zespolonej. W pracy [473] przedstawiono metodę wyznaczania dwuwymiarowych stacjonarnych pól temperatur i naprężeń w przypadku dowolnie położonych źródeł ciepła i dla warunków brzegowych pierwszego rodzaju. W. M. CHOROLSKI [482] rozpatrywał quasi-statyczne zagadnienia rozkładu naprężeń termicznych, wywołanych chwilowymi oraz ciągle działającymi źródłami ciepła w klinie nieskończonym z adiabatycznymi brzegami. W. M. CHOROLSKI, W. W. BASOW [483] podali rozwiązanie płaskiego zagadnienia niestacjonarnych naprężeń termicznych w ujęciu quasi-statycznym dla nieskończonego klina z liniowym źródłem ciepła umieszczonym w wierzchołku. R. N. SZWEC [492], stosując termodynamikę procesów nieodwracalnych,

wyprowadził sprzężone równania termosprężystości dla płyty przy uwzględnieniu wymiany ciepła na powierzchniach płyty. A. A. SZEWIELEW [494] zajmuje się wyborem warunków optymalnego nagrzewania płyt z uwagi na problem wywołanych pól naprężeń. W pracy [496] rozpatrzono powyższe zagadnienie dla przypadku, gdy temperatura jest funkcją wykładniczą zmiennej czasowej.

CHANDRA BAGHI MADHAB [27] badał zagadnienia stacjonarne termosprężystości dla nieskończonej anizotropowej płyty spoczywającej na izolowanym podłożu. Źródła ciepła położone są na powierzchni zewnętrznej względem podłoża. W. T. CHEN [31] badał płaski stan naprężeń wywołany strumieniem ciepła w ośrodku ortotropowym posiadającym otwór izolowany cieplnie. B. E. GATEWOOD, N. OHANIAN [65] badali naprężenia termiczne we wzmocnionych płytach anizotropowych o zmiennej grubości. Y. K. MEHTA [166] analizował naprężenia termiczne w tarczach o izotropii poprzecznej. Szczegółowe obliczenia przytoczono dla przypadku, gdy wpływy termiczne są wywołane powierzchniowym promieniowaniem. Autorzy pracy [179] rozpatrywali termosprężyste zadania dla półnieskończonej ortotropowej płyty w przypadku, gdy na części brzegu zadana jest stała temperatura. F. PIETRAS, J. WYRWIŃSKI [219] określili pole naprężeń termicznych w płaskim anizotropowym continuum Cosseratów o trzech lokalnych stopniach swobody. Autorzy pracy [352] badali płaskie zadania termosprężystości przedstawiając funkcję temperatury w postaci podwójnego szeregu potęgowego. J. M. KOLANO [376] analizował zagadnienia dla ortotropowego i izotropowego pasma płytowego w przypadku, gdy na powierzchniach bocznych oraz na jednym z brzegów następuje wymiana ciepła z ośrodkiem zgodnie z prawem Newtona. Pozostałe brzegi są izolowane. W pracy [379] analizowano niestacjonarne pola temperatur i naprężeń w płytach wymieniających ciepło z otoczeniem przy założeniu, że własności sprężyste zależą od temperatury. W. S. SARKISJAN [447] uwzględnił w równaniu płyt anizotropowych człony termiczne od liniowo w kierunku normalnym zmiennej funkcji temperatury. W pracy [448] badano naprężenia termiczne w płycie o cylindrycznej anizotropii. A. I. UZGALEW [470] rozwiązał zadanie termosprężystości dla płyty eliptycznej przy zadanej na brzegu temperaturze. W pracy [460] rozpatrzono nieskończoną płytę ortotropową, w której działają niestacjonarne źródła ciepła. A. I. UZDALOW [472] rozpatrzył płaskie zadania termosprężystości dla pasma ortotropowego poddanego wpływom skupionych źródeł ciepła.

D. BARBARO [10] rozwiązał zagadnienie termosprężystości dla pasma płytowego trójwarstwowego przy założeniu, że warstwa środkowa jest cienka, a pozostałe warstwy są symetrycznie usytuowane. V. KOVAŘIK [137] analizował zagadnienia rozkładu naprężeń termicznych w ortotropowej płycie trójwarstwowej ze sztywnym wypełnieniem, znajdującej się pod działaniem obciążenia i pola temperatur. Założono, iż na powierzchniach warstw zewnętrznych temperatura jest wielkością znaną, a na powierzchniach brzegowych jest ona równa zeru. L. E. BRIUKKER [305, 306] badał zagadnienia termosprężyste dla płyt trójwarstwowych o różnych warstwach skrajnych. A. F. RJABOW [443] rozpatrywał zagadnienia termosprężyste dla płyt wielowarstwowych przy założeniu liniowej zmiany temperatury na elemencie normalnym. J. A. SZEWLAKOW, G. A. FEN' [476, 495] zajmowali się zagadnieniami termosprężystymi płyt, składających się z nieskończonych warstw posiadających różne własności sprężyste i cieplne.

P. CHOUDHURY, S. C. GHOSH [32] podali wzory określające pole przemieszczeń punktów

powierzchni szczeliny umieszczonej wewnątrz płaszczyzny środkowej płyty. Wewnątrz szczeliny działa strumień ciepła lub stała temperatura. H. D. CONWAY [34] wyznaczył naprężenia termiczne w pasmach i walcach, wywołane przez równomiernie ogrzane i centralnie usytuowane elementy kołowe lub kuliste. E. FUNAJOLI [58] rozpatrywał zagadnienie termosprężyste dla płyty znajdującej się pod wpływem źródła ciepła, dowolnie położonego w płaszczyźnie płyty i posiadającej otwory eliptyczne. Zadanie rozpatrzono przy stałej temperaturze brzegów. J. N. GOODIER, A. L. FLORENCE [68] rozpatrywali koncentrację naprężeń termicznych wokół szczeliny oraz termiczne warunki, przy których wystąpi rozprzestrzenianie się szczeliny. Zadanie rozpatrywano dla płaskiego stanu odkształcenia. MURAMACU MASAMICU [177] wyznaczył naprężenia termiczne w nieskończonej płycie zawierającej trzy otwory kołowe, których środki leżą na jednej prostej. Zadanie rozwiązano, zakładając istnienie jednorodnego źródła ciepła. PREM NARAIN [220] wyznaczył naprężenia termiczne w belce nieskończenie długiej posiadającej płaską szczelinę, na którą działa ciśnienie i temperatura. P. RAFALSKI [224] wyznaczył pole temperatur i naprężeń dla półnieskończonej ściany posiadającej jeden lub dwa cylindryczne kanały chłodzące. Przyjęto, że na brzegach rozpatrywanych obszarów działa ciśnienie i temperatura. B. N. RAO SREANIVAS [230] wyznaczył naprężenia termiczne w nieskończonej płycie posiadającej izolowany otwór epitrochoidalny, który narusza ciągłość jednorodnego strumienia cieplnego. F. SZELĄGOWSKI [251] rozwiązał problem wyznaczenia pola naprężeń termicznych w tarczy nieskończonej posiadającej otwór eliptyczny. Stan naprężenia wywołany jest obniżeniem temperatury ośrodka. I. W. GAJWAS [316] badał wpływ otworów izolowanych cieplnie, a także wtrąceń eliptycznych na stan naprężenia w płycie poddanej działaniu strumienia cieplnego. G. KIT, J. S. PODSTRIGACZ [369] badali rozkład naprężeń w nieskończonej płycie posiadającej szczelinę płaską przy założeniu, że w nieskończoności istnieje źródło ciepła. A. K. MOISIEJENKO, I. A. CURPAŁ [413] przedstawili metodę, pozwalającą określić płaskie pole temperatur i naprężeń w nieskończonym sprężystym ośrodku, posiadającym krzywoliniową szczelinę. W pracy [414] zajęto się zagadnieniem koncentracji naprężeń termicznych w płycie wykonanej z ośrodka nieliniowego fizycznie, posiadającej otwór izolowany cieplnie. Na płytę działa jednorodny strumień cieplny. J. S. PODSTRIGACZ, G. S. KIT [433] rozwiązali problem płaskiego zadania termosprężystości dla tarczy posiadającej szczelinę o dowolnym konturze. B. L. FOMIN [477] rozwiązał zagadnienie termosprężystości dla płaszczyzny sprężystej posiadającej wycięcie kołowe.

M. A. GOPALAKRISHNA MURTHY [69] rozpatruje dynamiczne zagadnienia termosprężystości w tarczach kołowych. A. JAHANSHAHI [109] analizował dynamiczne zagadnienia dla płyt nieskończonych przy uwzględnieniu ruchomych skupionych źródeł ciepła. R. K. KAUL [124] zajmował się drganiami termicznymi w płytach anizotropowych stosując jako równania wyjściowe — równania teorii ugięć skończonych. W. C. LYONS [158] badał drgania poprzeczne w płycie, wywołane polem temperatur. Przedstawiona praca jest kontynuacją tematu podanego w [286]. C. D. MOTE [173, 181] zajął się problemem wpływu nieustalonych naprężeń termicznych na częstość drgań własnych tarcz kołowych. G. PAPA, A. TARANTINI [215] rozpatrują stan naprężenia w płycie kołowej swobodnie podpartej, który jest wywołany działaniem chwilowego punktowego źródła ciepła. H. ZORSKI, W. C. LYONS [286] wyprowadzili równania dynamiczne termosprężystości dla płyt stosując uogólnienie metody symbolicznej Łuriego, przy uwzględnieniu sprzężenia pola temperatur

i przemieszczeń. W. I. DANIŁOWSKA [332] zajmowała się dynamicznymi naprężeniami pojawiającymi się w pasmie nieskończonym, a wywołanymi zmianą temperatury jednego z brzegów, przy ustalonej temperaturze drugiego. Autorzy pracy [343] badali zagadnienia dynamiczne termosprężystości płyt przy założeniu, że pole temperatur zależy tylko od czasu. G. A. KILCZYŃSKA [367] analizowała zagadnienie propagacji fal termosprężystych w warstwie przy uwzględnieniu konwekcyjnej wymiany ciepła na powierzchni warstwy. L. J. KUŹMIN [392] rozpatrzył układ równań płaskiego dynamicznego zadania termosprężystości. Dla przykładu wyznaczono naprężenia w sprężystej warstwie, której dolna powierzchnia spoczywa na izolowanym podłożu, a na powierzchnię zewnętrzną przyłożono nagle strumień cieplny o określonym natężeniu. M. M. SIDLAR [451] zajmuje się rozwiązaniem dynamicznego zadania termosprężystości dla płyty przy uwzględnieniu konwekcyjnej wymiany ciepła z otoczeniem. A. G. SINICYN [457] podał metodę wyznaczania drgań nieliniowych dla układów prętowych i płyt, wywołanych udarami cieplnymi. W pracy [458] rozpatrzono drgania termosprężyste w płycie na podłożu sprężystym, która znajduje się pod wpływem chwilowo przyłożonego, poprzecznego strumienia cieplnego. W pracy [459] analizowano zagadnienie termosprężyste dla płyty prostokątnej trójwarstwowej podpartej na brzegu. Założono, że na płytę działa strumień cieplny w postaci dużej liczby przypadkowych impulsów termicznych o małym natężeniu.

B. GUERRINI [76] zajmował się zagadnieniami termostateczności płyt paliwowych reaktorów. HUANG JU-CHIN, J. K. ABCIOGLU [92] badali trójwarstwową płytę będącą pod działaniem sił ściskających i gradientów temperatur. K. I. MCKENZIE [127] rozpatrywał utratę stateczności przedniej warstwy skrzydła samolotu przy połączonym działaniu naprężeń termicznych i obciążeń aerodynamicznych. E. H. MANSFIELD [162] rozpatrywał zagadnienie utraty stateczności płyty eliptycznej o zmiennej grubości, spowodowanej gradientem temperatur w kierunku normalnym do powierzchni środkowej. Zadanie rozpatrzono w ujęciu teorii ugięć skończonych. W pracy [163] rozwiązano zagadnienie termostateczności dla płyty kołowej o zmiennej grubości, mającej kształt soczewki dwuwypukłej. C. MICKIEWICZ [169] rozpatrywał stany pokrytyczne w płytach pierścieniowych, przy stacjonarnych polach temperatur. UEMURA MASUDZI [258] analizował zagadnienia stateczności dla prętów i płyt poddanych działaniu nierównomiernego pola temperatur. J. M. ARTUCHIN [293] badał stateczność prostokątnej bimetalicznej płyty nierównomiernie ogrzewanej. S. K. GALIMOW, M. S. GANIEJEWA [317], stosując metodę Bubnowa-Galorkina, rozwiązali zagadnienie stateczności płyty prostokątnej sztywno utwierdzonej na obwodzie, poddanej działaniu pola temperatur. M. A. IŁGAMOW, Ch. M. MUSZTARI [346] zajęli się rozwiązaniem zagadnienia termostateczności dla płyt trójwarstwowych, poddanych działaniu siły ściskającej i nierównomiernemu nagrzewaniu warstw nośnych. M. KOZAROW [374] podał równania płyty ortotropowej nierównomiernie ogrzanej i obciążonej siłami leżącymi w płaszczyźnie środkowej płyty. Zadanie rozpatrywano w zakresie pokrytycznym. N. D. PANKRATOW [422] analizował zagadnienie utraty stateczności ortotropowej, nierównomiernie ogrzewanej płyty kołowej. W. J. POPOWICZ [437] zajmuje się zagadnieniem stateczności płyty prostokątnej nierównomiernie ogrzewanej i o zmiennej sztywności, przy uwzględnieniu zależności własności sprężystych od temperatury. W pracy [438] rozpatrzono zagadnienie termostateczności dla nierównomiernie ogrzanej płyty pierścieniowej.

HSIUNG TSIEN-KUO [91] przedstawił porównanie płaskiego stanu naprężenia z płaskim stanem odkształcenia dla liniowej termo-lepkosprężystości. P. RAFALSKI [223] rozwiązał zadanie termo-lepkosprężyste dla warstwy płaskiej poddanej działaniu niestacjonarnych wewnętrznych źródeł ciepła i nieustalonych pól temperatur na brzegach. N. N. GOŁUB [322] rozwiązał zadanie o najszybszym nagrzewaniu lepkosprężystej płyty przy założeniu, że wzrost naprężeń termicznych powinien być z góry ograniczony. W. A. ŻAŁNIN [338] badał wpływ pola temperatur na nieliniowy ośrodek lepkosprężysty (płyty i powłoki obrotowe). S. S. KRESTOWSKI [389] rozpatrywał zagadnienie zginania skrzydła samolotu dla obciążeń oraz nagrzania, przy uwzględnieniu pełzania elementów nośnych. W. W. KRISALNY [390] rozpatrywał płaski stan naprężenia dla długiego bloku o przekroju prostokątnym w przypadku, gdy jego temperatura zmienia się wzdłuż osi. Rozpatrzono też przypadek układu dwu bloków, wolnych od więzów wewnętrznych i leżących na sztywnym podłożu. W rozwiązaniu uwzględniono pełzanie betonu. A. A. POZDIEJEW, A. M. SZAŁAWIN [435] rozpatrzyli odkształcenia łopatki nierównomiernie nagrzewanego, wirującego dysku przy uwzględnieniu pełzania. Do rozwiązania zastosowano teorię małych sprężysto-plastycznych odkształceń. F. W. DOPIŃSKI, W. A. MARACHOWSKI [336] wyznaczyli naprężenia termiczne w grubej płycie wykonanej z polimeru, przy założeniu istnienia gradientu temperatury wzdłuż elementu normalnego.

U. GAMER [63] badał naprężenia termiczne w idealnie plastycznym dysku, nagrzewanym kołowym źródłem ciepła o stałym natężeniu. Rozpatrzono stan naprężenia w czasie działania źródła ciepła i po jego zniknięciu (odciążenie). Rozpatrzono też wpływ powtórnego nagrzania. W. N. ALPERT [290] analizował skończone sprężysto-plastyczne odkształcenia nierównomiernie nagrzewanych dysków. D. A. HOCHFELD, O. F. CZERNIAWSKI [326] zastosowali metodę programowania liniowego do zagadnienia obciążeń granicznych i problemu adaptacji konstrukcji, występującego w płycie kołowej poddanej osiowo-symetrycznym obciążeniom i wpływom temperatur. M. G. KABIELEWSKI [350] zastosował teorię odkształceniową do obliczania odkształceń plastycznych, występujących w dyskach turbin pracujących w zmiennych w czasie polach temperatur i obciążeń. Podano metodę obliczeń i przytoczono wyniki badań doświadczalnych. J. LEPIK [396], stosując teorię małych odkształceń sprężysto-plastycznych, uogólnił teorię Kàrmàna odnoszącą się do skończonych ugięć płyt — na przypadek wpływów termicznych. W. I. MACHNIENKO, E. A. WIELIKOIWANIENKO [402] badali quasi-statyczne zadanie dla płyty ogrzewanej walcowym źródłem ciepła, którego wydajność jest dowolną ograniczoną funkcją promienia i czasu. Do rozwiązania zadania zastosowano teorię plastycznego płynięcia. G. Z. SIERIEBRIENNIKOW [449] rozpatrywał koncentrację naprężeń wokół otworów w płytach poddanych działaniu pola temperatur przy uwzględnieniu stanów plastycznych. L. I. FRIEDMAN [479] rozpatrywał problem odnoszący się do narastania odkształceń plastycznych przy nierównomiernym ogrzewaniu w płytach prostokątnych. W pracy [480] badano zagadnienie adaptacji nierównomiernie ogrzewanego, wirującego dysku. Dysk posiada zmienną grubość i jest obciążony siłami radialnymi działającymi na obwodzie.

N. GAJENDAR [59], wychodząc z nieliniowych układów równań i formułując zasady wariacyjne dla zagadnienia termosprężystego, przeanalizował naprężenia termiczne występujące w płycie prostokątnej. Płyta ta jest utwierdzona na dwu przeciwległych brzegach, a na pozostałych — swobodnie podparta. Ogrzewanie płyty jest typu aerodynamicznego.

NAGAO CHIROSI [184] badał trójwarstwowe płyty nierównomiernie nagrzewane przy uwzględnieniu geometrycznej nieliniowości. Rozpatrzono płytę prostokątną utwierdzoną na obwodzie oraz podpartą na dwu brzegach swobodnie, a na pozostałych utwierdzoną. B. RAO KESAVA, S. RAO RAMA [229] rozpatrzyli skończone odkształcenia termiczne w dyskach, wywołane polem temperatur i obciążeniem na brzegu. W. G. SAWCZENKO [445] badał płaskie zadania termosprężystości, przy założeniu nieliniowości fizycznej i geometrycznej ośrodka. Rozpatrzono procesy odwracalne, wykorzystując do rozwiązania funkcje zmiennej zespolonej. A. G. UGODCZYKOW [475] podał rozwiązanie płaskiego zadania termosprężystości, wprowadzając potencjały Muschieliszwiliego oraz dwie uogólnione funkcje analityczne. Zadanie rozwiązano dla ośrodka nieliniowego fizycznie.

J. S. PODSTRIGACZ, W. S. PAWLINA [432] wyprowadzili podstawowe równania płaskiego zagadnienia termodyfuzji.

BAGHI MADHAB CHANDRA [505] rozpatrywał termosprężyste naprężenia w półnieskończonym pasmie o izotropii poprzecznej przy zadanym rozkładzie temperatury na brzegu skończonym oraz przy izolowanych cieplnie brzegach pozostałych. R. DZIĘCIELAK [510] badał półpasmo płytowe utwierdzone na brzegu skończonym, a swobodnie podparte na pozostałych brzegach. Rozpatrzono wpływ stacjonarnego pola temperatur. Zadanie sprowadzono do równania całkowego Fredholma pierwszego rodzaju. V. KOVAŘIK [513] rozpatrywał zadania termostateczności dla płyty trójwarstwowej ortotropowej ze sztywnym wypełnieniem dla stacjonarnego pola temperatur. Rozpatrzono też drgania płyt prostokątnych, które zostały wywołane niestacjonarnym polem temperatur. S. K. SARKAR [517] badał quasi-statyczne zginanie izotropowej płyty prostokątnej o zmiennej sztywności przy założeniu, że pole temperatur jest niestacjonarne. TSUI ISAMU [519] analizuje zagadnienie naprężeń termicznych występujących w belce tarczowej, a wywołanych cyklicznym działaniem pola temperatur. Tarcza obciążona siłami osiowymi oraz momentami zginającymi przyłożonymi do brzegów rozpatrywana jest jako ośrodek sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem. Zadanie rozwiązano stosując hipotezę płaskich przekrojów. N. N. KARKUZASZWILI [526, 527] rozwiązał zadanie termosprężystości dla pasma płytowego, poddanego działaniu temperatury na jednym brzegu, przy izolowanym brzegu pozostałym.

7. Pręty

G. DARRIEUS [37] rozpatrywał odkształcenia termiczne wałów. O. W. DILLON [40] rozwiązał trzy zadania termosprężystości dla nieskończenie długiego pręta. Zadanie rozwiązano przy warunkach: a) temperatura powierzchni pręta jest odcinkami ciągła, b) odkształcenie na powierzchni jest odcinkami ciągłe, c) szybkość udaru jest stała. Celem pracy było porównanie wyników otrzymanych dla sprzężonych i niesprzężonych zagadnień termosprężystości. W pracy [41] rozpatrzono zagadnienia termosprężystości dla pręta półnieskończonego przy założeniach: a) stałe odkształcenie na końcu pręta, b) stała prędkość udaru, c) stała prędkość odkształcenia, d) stałe przyspieszenie. Wyniki otrzymane z maszyny cyfrowej zestawiono na wykresach. R. ERICH [50] analizował zmniejszanie się termicznego ugięcia wału turbiny parowej w warunkach zmniejszonej liczby obrotów. J. GOLECKI [67] przyjmując, że pole temperatur zależy od iloczynu trzech funkcji: czasu,

współrzędnej przekroju belki i współrzędnych punktu przekroju, wyznaczył pole przemieszczeń i naprężeń w odlewie. B. PANT, P. BADHE [213] analizowali stan naprężeń termicznych w belce spoczywającej na podłożu sprężystym. Y. L. SADANA, K. C. VERMA [237] badali efekty termiczne w ramach żelbetowych. SHEN MOK-KONG [241] podał wzory określające naprężenia i odkształcenia w nieskończenie długiej belce bimetalicznej, poddanej wpływom równomiernego ogrzania. E. S. KAREPIETOW [353, 354] badał naprężenia termiczne pojawiające się w wstępnie sprężonych konstrukcjach w procesie ich eksploatacji. R. I. KURPAT, J. D. MIROSZNICZENKO [394] podali rozwiązanie teoretyczne, wraz z badaniami doświadczalnymi, problemu naprężeń termicznych występujących w łopatkach turbin gazowych. W. A. NIKONOW [416] zajmuje się wyznaczaniem naprężeń termicznych dla układów statycznie niewyznaczalnych oraz podaje algorytm rozwiązujący na maszynę cyfrową. J. S. RUDNICKI [440] bada naprężenia termiczne dla zagadnienia quasi-statycznego w pierścieniu ochładzającym się w ośrodku ze stałą temperaturą. W. M. CHOROLSKI, W. W. BASOW [484] badają naprężenia termiczne występujące w narzędziach skrawających w procesie obróbki.

B. I. OGARKOW [419] badał naprężenia termiczne w ośrodku prętowym anizotropowym nasiąkniętym wilgocią, przy uwzględnieniu zależności własności sprężystych od temperatury i wilgotności.

P. H. FRANCIS [57] rozpatrywał propagację fal w cienkim pręcie przy uwzględnieniu liniowej zależności modułu sprężystości od temperatury. J. JOHN [113] rozpatrywał drgania belki podpartej przegubowo, przy uwzględnieniu gradientów termicznych na brzegach. Założono też, że powierzchnie boczne i brzegi są izolowane. Zadanie rozwiązano dla sprzężonych równań termosprężystości. Rozpatrzono drgania poprzeczne i podłużne i stwierdzono, że w obydwu przypadkach wpływ sprzężenia jest nieznaczny. Autorzy pracy [299] badali niesprzężone zagadnienie termosprężystości w pręcie przegubowo zamocowanym dla wpływów nagłego ogrzania jednego z brzegów. Założono, że powierzchnie boczne są izolowane. G. A. KILCZYŃSKA [363] badała drgania podłużne pręta przy wysokich temperaturach, przy uwzględnieniu liniowej zależności sprężystych własności ośrodka od temperatury. W pracy [364] rozpatrzono wpływ sprzężenia termicznego i obciążeń okresowo zmiennych w czasie na stateczność pręta. W rozwiązaniu uwzględniono zależność własności sprężystych od temperatury. G. A. KILCZYŃSKA, M. M. PIETRIENKO [368] badali zagadnienia fal termicznych, występujących przy drganiach podłużnych w pręcie o stałym przekroju poprzecznym. Zadanie rozwiązano w ujęciu sprzężonym. J. W. ŁUSZCZYCKI [400] rozwiązał zagadnienie fal termicznych występujących w pręcie, przy uwzględnieniu doprowadzenia ciepła z brzegu i bocznych powierzchni pręta. Założono, że temperatura otaczającego ośrodka jest funkcją okresową. M. M. STRATONOWA [464] rozwiązała zagadnienie dynamicznych naprężeń termosprężystych w pręcie. Naprężenia te zostały wywołane nagłym ogrzaniem brzegu pręta półnieskończonego. Brzeg przyjęto jako nieobciążony lub utwierdzony.

I. S. TUBA, D. P. WEI [256] rozpatrywali zagadnienie termoplastyczności dla pręta nieskończenie długiego o przekroju prostokątnym, posiadającego rdzeń otulony zewnętrzną powłoką. Zadanie rozwiązano stosując teorię małych odkształceń sprężysto-plastycznych przy uwzględnieniu wzmocnienia i przy nierównomiernym rozkładzie temperatury.

G. L. ENGLAND [49] podał równania umożliwiające określenie wielkości wewnętrznych

w belce dwuprzęsłowej poddanej wpływom termicznym oraz obciążeniu, przy uwzględnieniu pełzania. T. HAYASHI, A. KIKUCHI [80] rozpatrywali zagadnienie stateczności pręta, w warunkach pełzania, przy nierównomiernym rozkładzie temperatury wzdłuż osi. N. C. HUANG, E. H. LEE [93] badali zagadnienie drgań ustalonych w pręcie lepko-sprężystym przy uwzględnieniu zależności własności fizycznych od temperatury. W pracy rozwiązano problem rozkładu temperatur i naprężeń dla pręta o określonej temperaturze początkowej poddanego okresowo zmiennym obciążeniom. KOBAJASHI AKIRA [135] badał wpływ nierównomiernego rozkładu temperatury (funkcja potęgowa współrzędnej przekroju pręta) na wyboczenie pręta. Zadanie rozwiązano dla ośrodka lepko-sprężystego, przy uwzględnieniu czteroparametrowego modelu. W. G. LITWINOW [397], stosując podstawowe założenia o włóknach znajdujących się w ośrodku lepko-sprężystym (polimer), podał podstawowe równania opisujące proces usytuowania się włókien w takim ośrodku. J. S. RUDNICKI [441] rozpatruje fale naprężeń w pierścieniu, wywołane nagłym podwyższeniem temperatury powierzchni zewnętrznej. Zadanie rozwiązano dla ośrodka lepko-sprężystego. R. A. TURUSOW, M. M. STRATONOWA [469] podali rozwiązanie zagadnienia pełzania pręta o stałym przekroju poprzecznym, utwierdzonego na brzegach, w warunkach niejednorodnego nagrzewania. O. F. SZLENSKI, W. F. MLISKO [501] podali wykreślno-analityczny sposób obliczenia odkształceń pręta rozciąganego dla ośrodka lepko-sprężystego, przy niestacjonarnym polu temperatur.

G. DINCĂ [508] rozpatrywał wpływ temperatury na propagację fal w rozciąganych niciach przy uwzględnieniu zagadnienia sprzężonego. C. SILLI [518] bada możliwości pojawienia się osobliwych fal nieciągłości w nici termosprężystej. W. I. KLIMOW [528] rozpatrywał wpływ nierównomiernego nagrzania na pole naprężeń termicznych w prętach cienkościennych o profilu otwartym. Autorzy pracy [529] analizowali stan naprężenia w łopatkach turbin gazowych przy niestacjonarnych warunkach nagrzewania i ochładzania. A. M. SZAŁAWIN [531] podał metodę obliczania (na pełzanie) nierównomiernie nagrzewanych łopatek turbin gazowych. W pracy wykorzystano związki analogiczne do równań otrzymanych z teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. S. A. AMBARTSUMIAN, S. M. DURGARIAN, *Some problems of vibrations and stability of shallow shells and plates in a time alternating temperature field*, Appl. Mech., Proc., 11th Int. Congr. Appl. Mech., Springer Verl., 1966, 256–261.
2. W. ALBRECHT, *Thermoimpulsspannungen in einer ebenen Platte*, Konstr., 9, **19** (1967), 351–355.
3. W. ALBRECHT, *Instationäre Wärmespannungen in Hohlzylindern*, Konstr., 6, **18** (1966), 224–231.
4. R. ARIENT, *Tensioni termiche di bardo in lastra di vetro libera soggetta ad irragia mento solare*, Riv. Ingegn., 11, 1965, 1082–1098.

5* ATSUMI AKIRA, *Naprężenia termiczne występujące w cylindrze, mającym wycięcie sferyczne, przy stacjonarnym strumieniu cieplnym*, Trans. Jap. SME, 221, **31** (1965), 16–24.

6* ATSUMI AKIRA, YOSHIDA KIMIO, *Thermal stresses in an elastic thick plate containing a spherical cavity under steady distribution of temperature*. Part I. *Solution for the case of symmetric distribution of temperature*, Bull. Jap. SME, 36, **9** (1966), 644–653.

7. Z. BACZYŃSKI, *Naprężenia termiczne w cienkiej otwartej powloce kulistej*, Arch. Bud. Masz., 3, **13** (1966), 365–376.

8. B. R. BAKER, *Stationäre ebene thermoelastische Probleme in orthotropen Keilen und Streifen*, Z. angew Math. Mech., Sonderh., 45 (1965), 99–101.
9. B. R. BAKER, *Some fundamental thermoelastic problems in orthotropic slabs*, Trans. ASME, 1, E33 (1966), 45–51.
10* D. BARBARO, *Transmissione del calore ed analisi delle sollecitazioni termoelastiche in structure miste*, Termotecnica, 9, **20** (1966), 529–533.
11. J. R. BARBER, K. WRIGHT, *The thermal distortion due to a uniform circular heat source on the surface of a semi-infinite solid*, Inter. J. Mech. Sci., 12, **9** (1967), 811–815.
12. A. A. BELĘS, M. SOARE, *Certain effects of temperature variations in saddle hypar shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 2, **13** (1965), 111–115.
13. A. A. BELĘS, M. SOARE, *Deformaţile mari ale paraboloidulni hyperbolic în şa datorite variatiilor de temperatură, Studii şi cercetări*, Mec. Apl. Acad. RSR, 2, **21** (1966), 297–322.
14. M. BEN-AMOZ, *On a variational theorem in coupled thermoelasticity*, Trans. ASME, 4, E32 (1965), 943–945.
15. D. BENDAVID, J. SINGER, *Buckling of conical shells heated along a generator*, AIAA Journ., 9, **5** (1967), 1710–1713.
16. B. A. BOLEY, J. H. WEINER, *Theory of thermal stresses*, New York, London 1960.
17. B. A. BOLEY, *Estimate of errors in approximate temperature and thermal stress calculations*, Appl. Mech., Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech., 586–596, Springer Verl., 1966.
18. A. P. BORESI, I. C. WANG, *Strain energy expression for large deformations of isotropic elastic shells subjected to arbitrary temperature distribution*, Nucl. Engng Design, 4, **5** (1967), 443–464.
19. S. BORKOWSKI, *Zastosowanie metody sil zespolonych w teorii powlok ortotropowych*, Rozpr. Inż., 2, **13** (1965), 355–380.
20* A. BRODEAN, *Contraintes thermiques dans les plaques minces. Etude préliminaire á la détermination des contraintes thermiques dans les ames de longerous*, Doc-Air-Espace, 33, 1965, 3–18.
21. L. BRUN, *Sur l'unicité en thermoélasticité dynamique et diverses expressions analogues á la formule de Clapeyron*, C. R. Acad. Sci., 14, **261** (1965), 2584–2587.
22* H. BUTKIEWICZJUS, *Aukštųjų mokuklų mokslo dirbai*, Naucz. Tr. Wuzow Lit. SSR, Mech., 2, 1966, 57–60.
23* CHAŁTOPADHYAY NETAI CHAND, *Thermal stresses due to prescribed temperature on the curved lateral surface of a finite cylinder with ends in contact with smooth insulating plates*, Indian J. Pure Appl. Phys., 1, **4** (1966), 36–38.
24. P. CHADWICK, B. POWDRILL, *Singular surfaces in linear thermoelasticity*, Inter. J. Engng Sci., 6, **3** (1965), 561–595.
25* CHANDRA BAGHI MADHAB, *Thermal stresses in long hollow aelotropic cylinders subjected to γ-ray heating*, J. Sci. Engng Res., 1, **9** (1965), 171–178.
26. CHANDRA BAGHI MADHAB, *Note on stresses in an elastic cone due to a nucleus of thermoelastic strain placed on the axis*, Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. Méc. Appl., 2, **10** (1965), 351–369.
27. CHANDRA BAGHI MADHAB, *Thermo-elastic stresses in an infinite aelotropic slab which rests on an insulating base and has a nucleus of heat of the upper surface*, Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. Méc. Appl., 3, **10** (1965), 583–592.
28. CHANDRA BAGHI MADHAB, *Thermal stresses in a long aelotropic cylinder due to a hot ring in contact with its curved surface*, Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. Méc. Appl., 6, **10** (1965), 1481–1491.
29. K. CHANDRASHEKHARA, *Thermal stresses in a finite hollow cylinder due to temperature variation along the curved surface*, Arch. Mech. Stos., 5, **18** (1966), 639–648.
30* D. H. CHENG, N. A. WELL, *Axial thermal gradient stresses in thin cylinders of finite length*, Paper ASME, WA/Met., 17, 1965.
31. W. T. CHEN, *Plane thermal stress at an insulated hole under uniform heat flow in an orthotropic medium*, Trans. ASME, 1, E34 (1967), 133–136.
32* P. CHOUDHURY, S. C. GHOSH, *Thermal stresses in the vicinity of a crack in a thick elastic plate*, J. Sci. Engng Res., 1, **11** (1967), 73–84.
33. C. L. CHOW, R. A. HOYLE, *A method of convergence for finite difference thermal stress computation in axially symmetrical bodies*, J. Strain Anal., 4, **2** (1967), 332–340.

34. H. D. CONWAY, *Thermoelastic stresses in elastic strips and cylinders*, Arch. Mech. Stos., 2, **18** (1966), 171–179.
35* S. CURIONI, *Sul calcolo delle tensioni termiche in un raccordo assial simmetrico*, Riv. Ingr. Nucl., 21, **4** (1966), 1075–1085.
36. K. CZARNOWSKI, *Teoria wykladzin zbiorników ciśnieniowych eksploatowanych w warunkach nieustalonego przeplywu ciepla*, Zesz. Nauk. Pol. Wrocł., Budownictwo, 26, 1965, 95.
37. G. DARRIEUS, *Déformation thermique d'un arbre*, Appl. Mech., Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech. 256–261, Springer Ver., 1966.
38* D. DELGAO, J. JOSÉ, *Tensoes num tubo elástico sujeito a variações de temperatura*, Rev. Port. Guím., 3, **8** (1966), 157–189.
39. E. DEUTSCH, *The distribution of axisymmetric thermal stress in an infinite elastic medium containing a penny-shaped crack*, Inter. J. Engng Sci., 5, **3** (1965), 485–490.
40. O. W. DILLON, *Thermoelasticity when the material coupling parameter equals unity*, Trans. ASME, 2, E32 (1965), 378–382.
41. O. W. DILLON, *Coupled thermoelasticity of bars*, Trans. ASME, 1, E34 (1967), 137–145.
42. L. DRAGOS, *Sur la représentation par potentiels de la solution des équations de la magnéto-thermo-élastodynamique*, C. R. Acad. Sci., 1, AB262 (1966), 64–67.
43. L. DRAGOS, *Sur les équations de la magnétothermo-elasticite*, Z. angew. Math. Phys., 2, **17** (1966), 249–259.
44. F. DUNN, C. LIBOVE, *Thermal plane stresses in square plates with edge stiffeners*, Trans. ASME, 3, E34 (1967), 757–760.
45. J. K. EBCIOGLU, J. A. ROBERTSON, J. R. SCHMERMUND, K. D. SHIMMIN, *Bending of sandwich panels under thermal and mechanical loads*, Devel. Mech., vol. 2, p. 2, Perg. Press, 1965, 131–135.
46. J. EIBL, *Kreiszylindrische Tonnenschalen unter Temperatureinwirkung*, Beton- und Stahlbetonbau, 11, **60** (1965), 257–266.
47* A. F. EMERY, *Stress-intensity factors for thermal stresses in thick cylinders*, Paper ASME, WA/Met., 7, 1965.
48* A. F. EMERY, C. F. BARRET, A. S. KOBAYASHI, *Temperature distributions and thermal stress in a partially filled annulus*, Expl. Mech., 12, **6** (1966), 602–608.
49. G. L. ENGLAND, *Steady-state stresses in concrete structures subjected to sustained temperatures and loads*. Part 1, Nucl. Engng Design, 1, **3** (1966), 54–65.
50. R. ERICH, *Abklingen thermischer Durchbiegungen bei Teildrehzahl von Dampfturbinen*, Brennstoff-Wärme-Kraft, 9, **17** (1965), 427–432.
51. J. L. ERICKSEN, *A thermo-kinetic view of elastic stability theory*, Intern. J. Sol. Struct., 4, **2** (1966), 573–580.
52. A. C. ERINGEN, *A unified theory of thermomechanical materials*, Intern. J. Engng Sci., 2, **4** (1966), 179–202.
53. J. FILIPKOWSKI, *Dwuwymiarowe zagadnienie teorii naprężeń cieplnych*, Rozpr. Inż., 4, **14** (1966), 531–557.
54. A. D. FINE, *Continuity conditions at wave fronts in coupled thermo-plasticity*, Quart. Appl. Math., 2, **25** (1967), 121–128.
55* M. FINTEL, F. R. KHAN, *Effects of column exposure in tall structures-temperature variations and their effects*, J. Amer. Concrete Inst., Proceedings, 12, **62** (1965), 1533–1556.
56. N. FOX, *Thermal stresses due to a moving line source on a plane boundary*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1, **18** (1965), 25–30.
57. P. H. FRANCIS, *Wave propagation in thin rods with quiescent temperature gradients*, Trans. ASME, 3, E33 (1966), 702–704.
58* E. FUNAJOLI, *Sullo stato di tensione prodotto da una sorgente di calore in una piastra forata*, Aerotecnica, 7, **46** (1966), 60–65.
59. N. GAJENDAR, *Deformation and thermal stress in a rectangular plate having a pair of opposite edges simply-supported and the remaining two edges are clamped and subjected to aerodynamic heating*, Arch. Mech. Stos., 2, **17** (1965), 197–209.

60. A. GAŁKA, *Green's functions for the coupled problem of thermoelasticity obtained from the solutions of the theory of thermal stresses*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 7, **13** (1965), 369–376.
61. A. GAŁKA, *Singular solutions of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 10, **13** (1965), 523–529.
62. A. GAŁKA, *Green functions for plane thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 2, **14** (1966), 123–130.
63. U. GAMER, *Ein radialsymmetrischer Wärmespannungszustand in der ideal-plastischen Scheibe*, Ing. Arch., 3, **36** (1967), 174–191.
64. B. E. GATEWOOD, *Thermal stresses with applications to airplanes, missiles, turbines and nuclear reactors*, New York–Toronto-London, 1957.
65. B. E. GATEWOOD, N. OHANIAN, *Applied and thermal stresses in stiffened nonisotropic plates with variable thicknes*, AIAA Bull., 3, **2** (1965), 91.
66* R. A. GELLATLY, P. P. BIJLAARD, R. M. GALLAGHAR, *Thermal stresses and instability of sandwich cylinders on rigid supports*, J. Aircraft, 1, **2** (1965), 44–48.
67. J. GOLECKI, *Naprężenia cieplne w odlewach* (I), Arch. Hutn., 4, **11** (1966), 325–338.
68. J. N. GOODIER, A. L. FLORENCE, *Localized thermal stress at holes, cavities and inclusions disturbing uniform heat flow. Thermal crack propagation*, Appl. Mech., Proc. 11th Intern. Congr. Appl. Mech., Springer Verl. 1966, 562–568.
69* M. A. GOPALAKRISHNA MURTHY, *A dynamical problem of thermoelasticity concerning a circular disc*, Indian J. Pure Appl. Phys., 10, **4** (1966), 367–370.
70. M. H. GRADOWCZYK, *On thermal membrane stresses in thin shallow shells*, Arch. Mech. Stos., 1, **17** (1965), 123–144.
71. M. H. GRADOWCZYK, *Thermal stresses in thin elastic shells*, Appl. Mech., Proc. 11th Intern. Congr. Appl. Mech., Springer Verl., 1966, 332–340.
72. D. S. GRIFFIN, R. B. KELLOG, *A numerical solution for axially symmetrical and plane elasticity problems*, Intern. J. Sol. Struc., 5, **3** (1967), 781–794.
73* I. GRINDEI, *Tensiuni termice axial simetrice în corpuri cylindrice izotrope de lungine finită*, Ann. Ştiinţ. Univ. Iaşi, Sec. 1a, 1, **12** (1966), 191–196.
74* I. GRINDEI, *Tensiuni termice în corpuri cilindrice izotrope plasate într-un cîmp de temperatură discontinuu*, Bull. Inst. Pol. Iaşi, 3/4, **12** (1966), 93–98.
75* I. GRINDEI, *Tensiuni termice nestaţionare în plăci cirulare subţiri (discuri) în ipoteza variatiei liniare a temperaturi după grosimea lor*, Ann. Ştinnţ. Univ. Iaşi, Sec. 1a, 1, **13** (1967), 103–116.
76. B. GUERRINI, *Sulla stabilitá termoelastoplastica di elementi combustibili laminari impiegati in reattori nucleari*, Ener. Nucl., 1, **12** (1965), 17–25.
77* HAGAO CHIROSI, *Naprężenia termiczne i deformacje w trójwarstwowych cylindrach*, J. Jap. Soc. Aer. Sp. Sci., 135, **13** (1965), 113–120.
78* K. S. HAVNER, *Finite-difference solution of two variable thermal and mechanical deformation problems*, J. Sp. Cr. Rock., 4, **2** (1965), 542–549.
79* K. S. HAVNER, E. L. STANTON, *On energy-derived difference equations in thermal stress problems*, J. Franklin Inst., 2, **284** (1967), 127–143.
80* T. HAYASHI, A. KIKUCHI, *Creep buckling of columns under axially non-uniform temperature distributions*, Trans. Jap. Soc. Aer. Sp. Sci., 12, **8** (1965), 15–22.
81* T. HAYASHI, *The effective width and deflections of a skin panel under in-plane forces, surface pressure and thermal load*, Proc. 6th Int. Symp. Spac. Techn. Sci., Tokyo, 1966, 349–358.
82. E. HEER, *Thermal excitations of thin elastic shells*, AIAA Journ., 12, **4** (1966), 2234–2236.
83. K. HERMANN, *Geschlossene Lösung eines ebenen Temperatur-spannungs-problems bei vorliegen einer aus stetigen und unstetigen Anteilen zusammengesetzten Temperaturverteilung*, Z. angew. Math. Mech., 5, **46** (1966), 281–287.
84. H. H. HILTON, S. B. DONG, *An analogy for anisotropic nonhomogeneous linear viscoelasticity including thermal stresses*, Developm. Mech., vol 2, part 2, 1965, 58–73.
85. M. HOLLAND, *Thermal stresses in a thin solid disc*, Engineer, 5740, **221** (1966), 165–168.
86. J. D. HOVANESIAN, H. C. KOWALSKI, *Similarity in thermoelasticity*, Expl. Mech., 2, 7 (1967), 82–84.

87. Z. J. HOLY, *Temperature and thermoelastic stress fields in a heat producing sphere due to axisymmetric surface heat transfer*, Nucl. Engng Design, 5, 4 (1966), 443–445.
88. Z. J. HOLY, *Temperature and thermoelastic fields in an infinite half-space due to axisymmetric surface heat transfer*. Part I, Nucl. Engng Design, 3, 5 (1967), 255–267.
89. Z. J. HOLY, *Temperature and thermoelastic stres fields in an infinite half-space du to axisymmetric surface heat trans*. Part II, Nucl. Engng Design, 4, 5 (1967), 367–374.
90* P. HRYCAK, R. E. HELGAUS, *Equilibrium temperature of long thin-walled cylinders in space*, Chem. Engng Progr., Sympos. Ser., 59, 61 (1965), 172–178.
91. HSIUNG TSIEN-KUO, *Plane-strain and plane-stress state in linear thermo-viscoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 7, **13** (1965), 351–360.
92. HUANG JU-CHIN, J. K. ABCIOGLU, *Circular sandwich plate under radial compression and thermal gradient*, AIAA Journ., 6, **3** (1965), 1146–1148.
93. N. C. HUANG, E. H. LEE, *Thermomechanical coupling behavior of viscoelastic rods subjected to cyclic loading*, Trans. ASME, 1, E34 (1967), 127–132.
94. HWANG CHIN-TSUN, F. R. DEUT, *An integration technique to study the nonlinear thermal stresses in a cooling cylinder*, Developm. Theor. Appl. Mech., vol. 2, Perg. Press, London 1965, 231–245.
95* D. IEŞAN, *Tensiuni termice într-un cilindru circular armatcu o tijă longitudinală din alt material*, Ann. Ştiinţ. Univ. Iaşi, Sec. 1a, 2, **11** (1965), 347–356.
96* D. IEŞAN, *Tensiuni termice în corpuri anizotrope în cazul problemelor plane*, Ann. Ştiinţ. Univ. Jaşi. Sec. 1a, 1, **12** (1966), 205–212.
97* D. IEŞAN, *Principes variationnels dans théorie de la thermoélasticité couplée*, An. Ştiinţ. Univ. Iaşi, Sec. 1a, 2, **12** (1966), 439–456.
98* D. IEŞAN, *Asupra tieoriei temoelasticitaţii neliniare*, An. Ştiinţ. Univ. Iaşi, Sec. 1a, I, **13** (1967), 161–175.
99. D. IEŞAN, *Sur la théorie de la thermoélasticité micropolaire couplée*, C. R. Acad. Sci., 9, 265A (1967), 271–274.
100. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *Singular integral equations of thermoelasticity*, Intern. J. Engng Sci., 1, **4** (1966), 53–58.
101. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *Osobliwe równania całkowe termosprężystości*, Rozpr. Inż., 4, **13** (1965), 655–670.
102* V. IONESCU, *O teoremă variaţională pentru problema termoelasticiţii couplate*, An. Univ. Bucureşti, Ser. ştiinţ. nat., Mat.-mec., 2, **15** (1966), 33–40.
103* K. T. IYENGAR SUNDARARAJA, K. CHANDRASHEKHARA, *Thermal stresses in rectangular plates*, Appl. Scient. Res., 2, A15 (1965), 141–160.
104. K. T. IYENGAR SUNDARARAJA, *Thermal stresses in a finite solid cylinder due to an axisymmetric temperature field at the end surface*, Nucl. Engng Design, 1, **3** (1966), 21–31.
105. K. T. IYENGAR SUNDARARAJA, *Thermal stresses in a finite hollow cylinder due to an axisymmetric temperature field at the end surface*, Nucl. Engng Design, 3, **3** (1966), 382–393.
106. K. T. IYENGAR SUNDARARAJA, K. CHANDRASHEKHARA, *Thermal stresses in a finite solid cylinder due to steady temperature variation along the curved and end surfaces*, Intern. J. Engng Sci., 4, **5** (1967), 393–413.
107* YU DIA-CHY, *Badanie naprężeń termicznych w walcach do walcowania cienkich wstęg stalowych*, Kigo Konchak, 2, 1967, 66–79.
108. L. JENTSCH, *Zur Thermoelastostatik stückweise homogener Körper*, Arch. Rat. Mech. Anal., 2, **24** (1967), 141–172.
109. A. JAHANSHAHI, *Elastic plates subjected to moving heat sources*, J. Engng Mech. Div., Proc. ASCE, 4, **91** (1965), 27–40.
110. A. JAHANSHAHI, *Thermoviscoelastic stresses for moving temperature fields*, J. Engng Mech. Div., Proc. ASCE, 2, **92** (1966), 25–35.
111. A. JAHANSHAHI, *Quasi-static stresses due to moving temperature discontinuity on a plane boundary*, Trans. ASME, 4, E33 (1966), 814–816.
112. A. E. JOHNSON, B. KHAN, *Thermal gradient in cylindrical pressure vessels*, Engineer, 5705, **219** (1965), 924–930.
113* J. JOHN, *Thermoelastic vibrations of a beam*, J. Acoust. Soc. Amer., 3, **39** (1966), 542–548.

114. S. KALISKI, *Wave equations of thermo-electro-magnetoelasticity*, Proc. Vibr. Probl., 3, **6** (1965), 231–265.
115. S. KALISKI, *Wave equations of heat conduction*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 4, **13** (1965), 211–219.
116. S. KALISKI, *Wave equations of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 5, **13** (1965), 253–260.
117. S. KALISKI, *The reciprocity theorem for the wave equations of thermo-magneto-elasticity*, Proc. Vibr. Probl., 1, 7 (1966), 85–91.
118. S. KALISKI, *The theorem on reciprocity for the wave-type equations of thermo-piezo-electricity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 4, **14** (1966), 251–256.
119. S. KALISKI, W. NOWACKI, *The reciprocity theorem in magneto-thermoelasticity*. I, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 2, **13** (1965), 67–73.
120. S. KALISKI, W. NOWACKI, *The reciprocity theorem of magneto-thermoelasticity*. II, *Real conductors*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 7, **13** (1965), 377–384.
121. S. KALISKI, W. NOWACKI, *The theorem on reciprocity for real anisotropic conductors in thermo-magneto-elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 3, **14** (1966), 169–174.
122. E. KĄCKI, *Quasi-statyczne termonaprężenia w plaskowniku przewodzącym prąd elektryczny i oddającym cieplo przez konwekcję*, Mech. Teor. Stos., 4, **5** (1967), 439–450.
123* KASUKI KADZUO, *Quasi-statyczny rozklad temperatur, naprężeń i odksztalceń w cylindrze o nieskończonej dlugości, znajdującym się w kontakcie z dwoma ośrodkami o różnych współczynnikach przewodnictwa cieplnego, wywolany zmianą temperatury*, Trans. Jap. SME, 243, **32** (1966), 1621–1638.
124. R. K. KAUL, *Finite thermal oscillations of thin plates*, Intern. J. Sol. Struct., 3, **2** (1966), 337–350.
125* KAWAI TADACHKO, *Niektóre problemy termosprężystości*, J. Jap. Soc. Aer. Sp. Sci., 135, **13** (1965), 94–110.
126. L. M. KEER, W. S. FU, *Some stress distribution in an elastic plate due to rigid heated punches*, Intern. J. Engng Sci., 7, **5** (1967), 555–570.
127* K. I. MCKENZIE, *Leading edge buckling under the combined action of thermal stresses and aerodynamic loads*, Proc. 4th Congr. Intern. Con. Aer. Sci., MacMillan a. Co., 1965, 1041–1052.
128. M. KLEČKOVA, *Teplotní pnutí v tenskostěnné trubce vlivem okamžité změny teploty protekajícího média*, Strojnícky Časop., 4, **17** (1966), 391–402.
129. M. KLEČKOVA, *Teplotní pnutí v tenkostěnném izolovaném potrubí v oblasti přírubového spaje při nestacionárním teplotním režimu*, Strojnícky Časop., 1, **17** (1967), 24–29.
130. J. KLEPACZKO, *O potęgowej postaci mechanicznego równania stanu z uzwględnieniem temperatury*, Rozpr. Inż., 3, **13** (1965), 561–586..
131* KOIDZUMA TAKASI, TANIWAKI TIKARA, *Naprężenia cieplne w długim cylindrze, którego własności fizyczne zależą od temperatury*, Trans. Jap. SME, 221, **31** (1965), 9–15.
132* KOIDZUMA TAKASI, NAKAHARA YTIRO, *Naprężenia termiczne występujące w cylindrze, wywolane niestacjonarnym źródłem ciepla umieszczonym na wewnętrznej powierzchni cylindra*, Trans. Jap. SME, 225, **31** (1965), 704–713.
133* KOBAJASHI AKIRA, *An investigation of oblation effects on a transient thermoelastic problem*, Trans. Jap. Soc. Aer. Sp. Sci., 13, 8 (1965), 54–60.
134* KOBAJASHI AKIRA, *On a simplified approach to the transient thermoelastic problem with sublimation*, Trans. Jap. Soc. Aer. Sp. Sci., 13, **8** (1965), 61–66.
135* KOBAJASHI AKIRA, *Wplyw nierównomiernego rozkladu temperatury na stateczność pręta, dla liniowego zadania lepkosprężystości*, Bull. Inst. Sp. Aer. Sci., Univ. Tokyo, 3, A2 (1966), 895–906.
136. M. V. KOROVCHINSKI, *Plane-contact problem of thermoelasticity during quasi-stationary heat generation on the contact surfaces*, Trans. ASME, 4, D87 (1965), 811–817.
137. V. KOVAŘIK, *On thermal stresses in sandwich plates*, Acta techn. ČSAV, 4, **12** (1967), 445–446.
138. J. KOWALEWSKI, *Influence functions for displacements and stresses from temperature and heat loads*, AIAA Journ., 9, **5** (1967), 1694–1696.
139. H. KRAUS, *Thermally induced vibrations of thin nonshallow spherical shells*, AIAA Journ., 3, **4** (1966), 500–505.

140. J. KRZEMIŃSKI, *Thermal stresses in an infinite cylindrical shell due to a moving heat source*, Arch. Mech. Stos., 3, **17** (1965), 467–478.
141. J. KRZEMIŃSKI, *Temperature field in an infinite cylindrical shell induced by an immobile source of heat*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 9, **13** (1965), 491–496.
142. N. LAWS, *On the steady state thermoelastic problem for a thin plate*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 2, **18** (1965), 161–172.
143. E. H. LEE, T. G. ROGERS, *On the generation of residual stresses in thermo-viscoelastic bodies*, Trans. ASME, 4, E32 (1965), 874–880.
144. C. W. LEE, *Thermoelastic stresses in thick-walled cylinders under axial temperature gradient*, Trans. ASME, 2, E33 (1966), 467–469.
145. S. LEVONI, *Su un teorema di unicitá per la equazioni della magneto-termo-elasticitá*, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena, **14** (1965), 146–156.
146. S. LEVONI, *Due relazioni di reciprocitá in magneto-termo-elasticitá*, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena, 16 (1967), 66–76.
147. LIU HSIEN-CHIH, *Odkształcenia i naprężenia termiczne wywołane wciskaniem walca w półprzestrzeń sprężystą*, Acta, Mech. Sin., 1, **8** (1965), 12–27.
148. LIU HSIEN-CHIH, *Thermo-elastic stress deformation caused by a prismatic inclusion of rectangular cross-section in an infinite elastic plate*, Sc. Sin., 3, 15 (1966), 304–317.
149. LIU HSIEN-CHIH, *Naprężenia termiczne i przemieszczenia półprzestrzeni zawierającej prostokątne wtrącenie*, Acta Mech. Sin., 4, **8** (1965), 302–315.
150. LIU HSIEN-CHIH, *The stresses and deformations in an infinite elastic plate due to a steady point heat source within the plate*, Sc. Sin., 4, **14** (1965), 539–552.
151. LIU HSIEN-CHIH, *Thermo-elastic stress and deformation caused by a spherical inclusion in an infinite elastic slab*, Sc. Sin., 10, **14** (1965), 1400–1413.
152. LIU HSIEN-CHIH, *Thermo-elastic stress and deformation caused by a cylindrical inclusion of circular cross section in an infinite elastic plate*, Sc. Sin., 10, **14** (1965), 1414–1424.
153. C. K. LIU, C. H. CHANG, *Thermal and dynamic response of an infinite hollow cylinder*, Devel. Theor. Appl. Mech., vol. 2, Perg. Press, London 1965, 487–501.
154. R. LONGO, *Thermal stresses in a hollow anisotropic cylinder*, Devel. Mech., vol. 2, part 2, Perg. Press, 1965, 7–18.
155. R. A. LUCA, F. ERDOGAN, *Quasi-static transient thermal stresses in an infinite wedge*, Intern. J. Sol. Struct., 2, **2** (1966), 205–222.
156* S. Y. LU, C. L. SUN, *Vibrations of thin conical shells subjected to sudden heating*, J. Aircraft, 1, **4** (1967), 11–15.
157. S. Y. LU, L. K. CHANG, *Thermal buckling of conical shells*, AIAA Journ., 10, **5** (1967), 1877–1882.
158. W. C. LYONS, *On heat induced transverse vibrations of a plate*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 1, **13** (1965), 19–27.
159. M. A. MAHAYNI, *Thermal buckling of shallow shells*, Intern. J. Sol. Struct., 2, **2** (1966), 167–180.
160. MAHALANABIS RANJIT KUMAR, *A mixed boundary value problem of thermoelasticity for a half-space* Quart. J. Mech. Appl. Math., 1, **20** (1967), 127–134.
161* MAHALANABIS RANJIT KUMAR, *Thermal stresses in an elastic cylinder*, J. Sci. Engng Res., 1, **11** (1967), 126–131.
162. E. H. MANSFIELD, *The effect of a temperature gradient through the thicknes of an unsupported plate*, Appl. Mech., Proc. 11th Intern. Congr. Appl. Mech., Springer Verl., 1966, 597–602.
163. E. H. MANSFIELD, *Thermal buckling of a circular plate*, J. Roy. Aer. Soc., 683, **71** (1967), 683.
164* P. MARTINOT, *Cointraintes thermiques en régime transitoire dans les tuyantories épaisses*, Rev. Gén. Theorem., 52, **5** (1966), 323–335.
165. Y. K. MEHTA, *The distribution of thermal stresses around a crack in a semi-infinite elastic solid of transversely isotropic material*, Arch. Mech. Stos., 6, **18** (1966), 749–759.
166* Y. K. MEHTA, *Thermal stresses in a plate with transversely isotropic material*, Proc. Indian Acad. Sci., 3, **65** (1967), 170–178.
167. E. MELAN, H. PARKUS, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Wien 1953.

168. A. M. MESSNER, D. R. SCHLIESSMANN, *Transient thermal stresses in solid propellant grains*, J. Sp. Cr. Rock., 4, **2** (1965), 565–570.
169. C. MICKIEWICZ, *Osiowo-symetryczny stan pokrytyczny plyt pierścieniowych o brzegach swobodnych w stacjonarnym polu temperatur*, Rozpr. Inż., 3, **15** (1967), 471–486.
170. J. MINARDI, *Effect of variations in the coefficient of thermal expansion upon thermal stress*, AIAA Journ., 3, **4** (1966), 542-544.
171* MIZOGUHI KOKI, *On thermoelasticity of cylindrical shells*, Bull. Univ. Osaka Prefect., 2, A15 (1966), 1–9.
172. K. MOCH, *Spezielle Randwertaufgaben bei elastischen, instationären Wärmespannungen in Platten mit Vorhinderter Krümmung*, MAN Forschung, 13, 1966/67, 77–84.
173. C. D. MOTE, *Transient thermal stress and associated natural frequency variations in circular disc elements*, Trans. ASME, 2, B89 (1967), 265–270.
174. M. V. MOUNTFORD, *A transformation in coupled thermoelasticity problems*, Trans. ASME, 1, E33 (1966), 196–198.
175. C. V. MOW, S. H. CHENG, *Thermal stresses in an elastic half space associated with an arbitrarily distributed moving heat source*, Z. angew. Math. Phys., 4, **18** (1967), 500–507.
176. H. MÜLLER, K. STARK, *Zum Problem der Ausbreitung thermoelastischer Wellen*, Ann. Phys., 5/6, **18** (1966), 214–218.
177* MARAMUCU MASAMICU, *Naprężenia termiczne w nieskończonej plycie, zawierającej trzy otwory kolowe, których środki leżą na jednej prostej, wywolane dzialaniem jednorodnego źródła ciepla*, Trans. Jap. SME., 234, **32** (1966), 163–176.
178* M. MURTHY, GOPALA KRISHNA, *A dynamical problem of thermoelasticity concerning a semi-infinite medium*, J. Sci. Engng Res., 2, **9** (1966), 274–283.
179* M. MURTHY, GOPALA KRISHNA, K. S. SARMA, *Steady state thermoelastic problem concerning semi-infinite orthotropic plate*, Vishwakarma, 8, **7** (1966), 32–35.
180* V. J. MODI, *Vibration of a cylinder with temperature gradient a cross the thickness*, Canad. Aer. Sp. J., 7, **11** (1965), 227–233.
181. C. D. MOTE, *Theory of thermal natural frequency variations in discs*, Intern. J. Mech. Sci., 8, **8** (1966), 547–557.
182. N. NAERLOVIĆ-VELJAKOVIĆ, *Prilog proćunu termičkich napona u šupijej sferi*, Mater. Konstr., 5, **8** (1965), 3–7.
183. N. NAERLOVIĆ-VELJAKOVIĆ, *Prilog izučavanju termička deformacije cylindra od nelinearno-elastičnogo materijala*, Mater. Konstr., 3, **8** (1965), 3–9.
184* NAGAO CHIROSI, *Przemieszczenia i naprężenia występujące w trójwarstwowych plytach, wywolane ich ogrzewaniem*, J. Jap. SME, 562, **68** (1965), 1592–1600.
185* NAKADZAWA CHADZIME, KOIDZUMI TAKASI, TANIWAKI TIKARA, *Naprężenia termiczne występujące w dlugim walcu przy stalej temperaturze na jego powierzchni*, Trans. Jap. SME, 248, **33** (1967), 522–532.
186. W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Perg. Press, London 1962.
187. W. NOWACKI, *Green functions for a thermoelastic medium*. III, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 4, **13** (1965), 227–234.
188. W. NOWACKI, *Problem of linear coupled magneto-thermoelasticity. I. Energetic theorem and uniqueness theorem of solutions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 4, **13** (1965), 235–240.
189. W. NOWACKI, *Problem of linear coupled magneto-thermo-elasticity. II. Variational formulation for magneto-thermo-elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 6, **13** (1965), 331–336.
190. W. NOWACKI, *Two-dimensional problem of magneto-thermo-elasticity. III*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. sci. techn., 5, **13** (1965), 305–312.
191. W. NOWACKI, *Certain dynamic problems of thermoelasticity*. III, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 7, **13** (1965), 409–418.
192. W. NOWACKI, *A reciprocity theorem for coupled mechanical and thermoelectric fields in piezoelectric crystals*, Proc. Vibr. Probl., 1, **6** (1965), 3–12.
193. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienie termosprężystości*, Mech. Teor. Stos., 3, **3** (1965), 3–49.
194. W. NOWACKI, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*. I, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 2, **14** (1966), 97–106.

195. W. NOWACKI, *Couple stresses in the theory of thermoelasticity*. II, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 3, **14** (1966), 203–212.
196. W. NOWACKI, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*. III, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 8, **14** (1966), 505–513.
197. W. NOWACKI, *Green's functions for an thermoelastic medium (quasi-static problem)*, Bull. Inst. Pol. Iaşi, 3/4, **12** (1966). 83–92.
198. W. NOWACKI, *Quelques théorèmes de la thermoélasticité*, Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. méc. appl., 5, **11** (1966), 1173–1183.
199. W. NOWACKI, *Thermoelastic distortion problems*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 3, **14** (1966), 213–223.
200. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1966.
201. W. NOWACKI, *Some theorems of asymmetric thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 5, **15** (1967), 289–296.
202. W. NOWACKI, *On the completeness of stress functions in thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 9, **15** (1967), 583–590.
203. W. NOWACKI, *Kierunki rozwojowe i zadania badawcze w dziedzinie mechaniki ciala stalego*, Mech. Teow. Stos., 3, **6** (1968), 251–258.
204. W. K. NOWACKI, *Thermal shock on the boundary of an elastic-visco-plastic semi-infinite body*, I, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 2, **13** (1965), 75–84.
205. W. K. NOWACKI, *Thermal shock on the boundary of an elastic-visco-plastic infinite body*, II, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 7, **13** (1965), 361–367.
206. W. K. NOWACKI, *The problem of a thermal shock on the boundary of a spherical cavity in an elastic-visco-plastic space*, Proc. Vibr. Probl., 3, **6** (1965), 279–293.
207. W. K. NOWACKI, B. RANIECKI, *Note on the propagation of thermoelastic (non coupled) waves*, Proc. Vibr. Probl., 2, **8** (1967), 129–143.
208. Z. OLESIAK, J. ŚLIŻEWICZ, *Stresses and strain in a semi-space heated on a constrained part of the bounding plane*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 8, **13** (1965), 433–437.
209. Z. OLESIAK, *Some remarks on the contact problem of the thermoelasticity for a semi-space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 8, **13** (1965), 439–444.
210. Z. OLESIAK, *O pewnych wlasnościach naprężeń cieplnych*, Mech. Teor. Stos., 2, **5** (1967), 181–191.
211* S. K. PAN, *On the stresses due to nucleus of thermo-elastic strain at any point of an elliptic plate held fixed with a rigid non-conducting rim*, Indian J. Theor. Phys., 2, **13** (1965), 39–54.
212* K. A. V. PANDALAI, A. PATEL SHARAD, *Stress analysis in the inelastic range in the presence of temperature*, J. Aer. Soc. India, 3, **17** (1965), 149–153.
213. B. PANT, P. BADHE, *Rapid analysis of thermal stress in intake tower of a hydroelectric project*, J. Inst. Engrs, Civil Engng Div., 7, **46** (1966), 313–336.
214. G. PAOLINI, *Thermodynamic potentials in isotropic elastic media with applications to some basic thermoelastic problems*, Nuovo Cimento, 2, B50 (1967), 309–344.
215* G. PAPA, A. TARANTINI, *Studio del compartamento dinamico di un mezzo termoelastico*, Riv. Ingr. Nucl., 20, **4** (1966), 1007–1014.
216. H. PARKUS, *Grundlagen und Probleme der Thermo- und Viskothermoelastizität*, Z. angew. Math. Mech., Sondehr., **46** (1966), 16–24.
217. H. PARKUS, *Thermal stresses in a thin shell in contact with a smooth, rigid container*, J. Mech. Engng Sci., 1, **9** (1967), 62–66.
218. H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Wien 1959.
219. F. PIETRAS, J. WYRWIŃSKI, *Thermal stresses in a plane anisotropic Cosserat continnum*, Arch. Mech. Stos., 5, **19** (1967), 627–635.
220. PREM NARAIN, *Rozklad naprężeń cieplnych w belce z plaską szczeliną*, Rozpr. Inż., 1, **14** (1966), 175–181.
221. P. PURI, *Thermal shock on the lateral surface of a sphere*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 12, **15** (1967), 691–697.
222. C. M. PURUSHOTHAMA, *Magneto-thermo-elastic plane waves*, Proc. Cambr. Phil. Soc., 4, **61** (1965), 939–944.

223. P. RAFALSKI, *Dynamic thermal stresses in viscoelastic slab*, Arch. Mech. Stos., 4, **17** (1965), 617–631.
224. P. RAFALSKI, *Three steady state plane thermoelastic problems in regions with cylindrical holes*, Arch. Mech. Stos., 2, **18** (1966), 151–163.
225. B. RANIECKI, *A quasi-static spherically symmetric problem of thermoplasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 2, **13** (1965), 91–100.
226. B. RANIECKI, *Spherical thermoplastic stress-waves*, Proc. Vibr. Probl., 4, **6** (1965), 379–399.
227. B. RANIECKI, *Naprężenia w sprężysto-plastycznej kuli z pustką kulistą, znajdującej się w zmiennym polu temperatur*, Rozpr. Inż., 3, **14** (1966), 479–498.
228. B. RANIECKI, *Badanie wpływu współczynnika przenikania ciepła na końcowy stan naprężenia w sprężysto-plastycznej kuli, poddanej procesowi chłodzenia*, Rozpr. Inż., 1, **15** (1967), 111–122.
229* B. RAO KESAVA, S. RAO RAMA, *Finite thermal strain in the bending of circular block*, Vishwakarma, 8, 7 (1966), 38–40.
230* B. N. RAO SREANIVAS, *Thermal stresses due to disturbance of uniform heat flow by an insulated epitrochoidal hole*, Vishwakarma, 10, **6** (1966), 54–56.
231. A. C. RAPIER, T. M. JONES, *Thermal bowing of reactor fuel elements*, J. Nucl. Energy, 3, AB19 (1965), 145–191.
232. T. RÓŻNOWSKI, *Non-steady state of temperature in a long cylinder with moving boundary condition*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 1, **13** (1965), 45–51.
233. T. RÓŻNOWSKI, *Pewien przypadek nieustalonego rozkładu temperatury w długim walcu*, Rozpr. Inż., 2, **13** (1965), 437–443.
234. T. RÓŻNOWSKI, *An axially symmetric thermoelastic problem with a moving boundary condition*, Arch. Mech. Stos., 5, **17** (1965), 693–710.
235. H. REISMANN, G. A. THURSON, A. A. HOLSTON, *The shallow spherical shell subjected to point load hol spot*, Z. angew. Math. Mech., 2/3, **45** (1965), 95–103.
236. H. REISMANN, *The moving plane heat source in an elastic medium*, Appl. Sci. Res., 3, A15 (1965), 216–220.
237. Y. L. SADANA, K. C. VERMA, *Temperature effects in reinforced concrete frames*, J. Instn. Engrs Civ. Engng, 5, **47** (1967), 303–327.
238. P. D. SCHWIEBERT, *Elastic, plastic and creep deformations in long thick-walled cylinders of work-hardening material subjected to transient thermal and mechanical loading*, Intern. J. Mech. Sci., 2, **7** (1965), 115–125.
239* R. SHALL, *On some steady state thermoelastic stress distributions in a slab*, Proc. Edinburgh Math. Soc., 4, **14** (1965), 303–310.
240. R. SHAIL, *A note on the steady state distribution of thermal stress in circular cylinders and thick-walled tubes*, Intern. J. Engng Sci., 6, **3** (1965), 597–602.
241. SHEN MOK-KONG, *Temperature deformations of bi-metal beams*, Z. angew. Math. Mech., 5, **46** (1966), 325.
242. C. N. de SILVA, S. J. ALLEN, *The non-stationary thermal problem in the linear theory of elastic shells*, Z. angew. Math. Mech., 4, **45** (1965), 225–233.
243. D. V. SINGH, *Thermal stresses in a semi-infinite medium due to constant heat flux at the surface*, Arch. Bud. Masz., 1, **14** (1967), 65–72.
244. A. I. SOLER, M. A. BRULL, *On the solution to transient coupled thermoelastic problems by perturbation techniques*, Trans. ASME, 2, E32 (1965), 389–399.
245* E. SOÓS, *Funcţi de tensiume în probleme cuplată a termoelasticităţii*, An. Univ. Ser. Ştiinţ. Natur. Mat.-mec., 1, **14** (1965), 131–141.
246. E. SOÓS, *The Green's function (for short time) in the linear theory of the coupled thermoelasticity*, Arch. Mech. Stos., 1, **18** (1966), 101–109.
247. J. STEFANIAK, *Fale Rayleigha w cialach lepkosprężystych przy uwzględnieniu sprzężenia termomechanicznego*, Prace Kom. Nauk Podst. Stos., Pozn. Tow. Przyj. Nauk, 4, **2** (1965), 27–43.
248. J. STEFANIAK, *Zagadnienie rozchodzenia się fal w nieograniczonym ośrodku lepkosprężystym przy uwzględnieniu sprzężenia termomechanicznego*, Rozpr. Inż., 1, **15** (1967), 49–60.
249. K. STIEPER, R. HOFFMANN, *Temperaturen und Wärmespannungen von Platten und Zylindern bei sprung-*

hafter oder linear zeitlicher Änderung der Umgebungstemperatur, Masch. Bautech., 12, **15** (1966), 626–634.

250* SUMI SEJNOSUKE, MACOMOTO EJITI, SEKIJA SUJOCI, *Mechaniczny analog dla rozwiązywania płaskiego zadania termosprężystości*, J. Jap. Soc. Aer. Sp. Sci., 135, **13** (1965), 101–108.

251. F. SZELĄGOWSKI, *State of stress induced by the decrease of temperature in infinite disc with an elliptic hole*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 12, **15** (1967), 709–715.

252. TAKENTI YOTIRO, *Thermal stresses in circular disc due to instantaneous line heat source*, Z. angew. Math. Mech., 4, **45** (1965), 177–184.

253* TAKENTI YOTIRO, *Thermal stresses in a circular disc due to an instantaneous point heat source*, Bull. JSME, 39, **10** (1967), 423–429.

254* T. TSUI, H. KRAUS, *Thermal stress-wave propagation in hollow elastic spheres*, J. Acoust. Soc. Amer. 4, **37** (1965), 730–737.

255* Y. TSUI, *Problem in dynamic thermoelasticity*, J. Acoust. Soc. Amer., 1, **40** (1966), 176–178.

256. I. S. TUBA, D. P. WEI, *Thermo-elastic plastic stress distribution in composite media with nonuniform temperature distribution and temperature dependent material properties*, Nucl. Engng Design, 1, **5** (1967), 43–51.

257. F. TWARDOSZ, *Równania termosprężystości oraz ustalonego pola temperatur, cienkościennej powloki stożkowej*, Zesz. Nauk. Pol. Pozn., Mech., 6, 1965, 173–184.

258* UEMURA MASUDZI, *Stateczność przy nierównomiernym rozkładzie temperatury*, J. Jap. SME, 562, **68** (1965), 1601–1608.

259. J. VALENTA, *Termoelastická rotačně symetrická deformace tlustostěnných válcovách skořepin*, Strojírenství, 11, **17** (1967), 837–841.

260. K. VARGA, *Vliv tepelných účinků na namáhání válcových podstavců kolon*, Strojírenství, 1, **17** (1965), 21–25.

261. E. VARLEY, A. DAY, *Equilibrium phases of elastic materials at uniform temperature and pressure*, Arch. Rat. Mech. Anal., 4, **22** (1966), 253–269.

262. WAN THEIN, *Thermal stresses in thin beams*, Intern. J. Sol. Struct., 2, **2** (1966), 293–305.

263. W. E. WARREN, *Thermal stress concentrations in a notched half-plane*, Trans. ASME, 1, E32 (1965), 192–193.

264. W. E. WARREN, J. A. WEESE, *The axisymmetric thermoelastic problem in bispherical coordinates*, Trans. ASME, 1, E34 (1967), 146–152.

265. J. P. H. WEBBER, D. S. HOUGHTON, *On transient temperatures and thermal stresses in an idealised wing structure*, J. Roy. Aer. Soc., 653, **69** (1965), 347–350.

266. J. P. H. WEBBER, *Thermo-elastic analysis of rectangular plates in plane stress by the finite-element displacement method*, J. Struc. Anal., 1, **2** (1967), 43–51.

267. G. WILIAM, *Thermal stresses in a sector of a cylinder having constant heat generation*, Devel. Theor. Appl. Mech., Vol. 2, Perg. Press, London 1965, 213–229.

268. E. V. WILMS, *Temperature induced in a medium due to a suddenly applied pressure inside a spherical cavity*, Trans. ASME, 4, E33 (1966), 941–943.

269. S. WOELKE, *Naprężenia dynamiczne w nieskończenie długim walcu, wywołane działaniem zmiennej temperatury*, Rozpr. Inż., 3, **15** (1967), 553–571.

270. S. WOELKE, *Dynamiczne zagadnienia naprężeń cieplnych w cienkiej nieograniczonej tarczy, wywołanych działaniem chwilowego punktowego źródła ciepła z uwzględnieniem wymiany ciepła na powierzchniach tarczy*, Zesz. Nauk. Pol. Pozn., 48, 1967, 169–181.

271. C. WOŹNIAK, *Thermoelasticity of micro-materials*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 10, **14** (1966) 573–578.

272. C. WOŹNIAK, *Hyperstresses in linear thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 11/12, **14** (1966), 637–642.

273. C. WOŹNIAK, *Nieliniowa teoria powlok*, Warszawa 1966.

274. C. WOŹNIAK, *Thermoelasticity of bodies with micro-structure*, Arch. Mech. Stos., 3, **19** (1967), 335–365.

275. C. WOŹNIAK, *Theory of thermoelasticity of non-simple materials*, Arch. Mech. Stos., 4, **19** (1967), 485–493.

276. C. WOŹNIAK, *Thermoelasticity of non-simple oriented materials*, Intern. J. Engng Sci., 8, **5** (1967), 605–612.
277. J. WYRWIŃSKI, *Green function for a thermoelastic Cosserat medium*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 2, **14** (1966), 113–122.
278. J. WYRWIŃSKI, *A generalization of Weber's theorem for problems of the coupled thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 7, **14** (1966), 377–385.
279. C. K. YOUNGDAHL, *Thermoelastic stress and deformations in reactor fuel plates*, Nucl. Engng Design, 2, **3** (1965), 205–222.
280. J. L. ZEMAN, *Örtlich und zeitlich zufällig verteile Temperatur und Spannungsfelder*. 1. Teil, Acta Mech., 2, **1** (1965), 194–211.
281. J. L. ZEMAN, *Örtlich und zeitlich zufällig verteile Temperatur und Spannungsfelder*. 2. Teil, Acta Mech., 4, **1** (1965), 371–385.
282. J. L. ZEMAN, *A method for the solution of stochastic problems in linear thermoelasticity and heat conduction*, Intern. J. Sol. Struct., 4, **2** (1966), 581–589.
283. J. L. ZEMAN, *Eine Methode zur Lösung zufallsabhängiger Wärmespannunprobleme*, Z. angew. Math. Mech., Sonderh., 46 (1966), 181–182.
284. R. D. ZERKLE, J. E. SUNDERLAND, *The transient temperature distribution in a slab subject to thermal radiation*, Trans. ASME, 1, C87 (1965), 117–130.
285. F. ZIEGLER, *Ebene Wellen ausbreitung im Halbraum bei Zufallserregung und Kopplung zwischen Spannungs- und Temperaturfeld*, Acta Mech. 3, **1** (1966), 307–327.
286. H. ZORSKI, W. C. LYONS, *Dynamics of thermoelastic plates*, Arch. Mech. Stos. 3, **17** (1965), 497–515.
287. Z. ZUDAUS, *Dynamic response of shells type structures subjected to impulsive mechanical and thermal loadings*, Nucl. Engng Design, 1, **3** (1966), 117–137.
288. В. А. Абласиский, Г. А. Джена, *Приближенное определение температурных напряжений в цельнокованных роторах*, Термопр. маш. и констр., вып. 4, Киев, 502–508.
289* Э. Л. Аксельрад, *О температурных деформациях неоднородных ортотропных оболочек*, Сб, тр. Лен. ин. инж. ж.д. трансп., вып. 249, 1966, 181–186.
290. В. Н. Алперт, *Конечные упруго-пластические деформации неравномерно нагретого вращающегося диска*, Прикл. Мех., 3, 1 (1965), 58–64.
291. С. В. Александровский, *Расчет бетонных и железнобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия (с учетом ползучести)*, Москва 1966.
292. А. В. Амельянчик, В. Т. Лаптева, Е. П. Струнина, *Решение двумерных осесимметричных температурных задач теории упругости, упруго-пластических деформаций и ползучести на ЭВМ „Урал 2"*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 141–146.
293. Ю. М. Артюхин, *Устойчивость прямоугольной биметаллической пластинки при неравномерном нагреве*, Исслед. по теор. пласт. и обол., вып. 3, Казань 1965, 294–298.
294. И. С. Ахмедьянов, *Температурные деформации тонкой сферической оболочки при осесимметричном нагреве*, Изв. высш. учебн. зав., Авиац. Тех., 3, 1965, 46–51.
295* В. Г. Баженов, *О построении плоских стационарных температурных полей и термоупругих напряжений в двухсвязных областях*, Тр. горковск. инж. стр. ин., вып. 50, 1967, 27–31.
296. Л. И. Балабух, Л. А. Шаповалов, *Исследование температурных напряжений в цилиндрической оболочке подкрепленной продольными ребрами*, Расч. на прочн., вып. 12, Москва 1966, 32–62.
297 Б. А. Батуров, *К решении задач теории термоупругости на ЭЦВМ локально-одномерным методом А. А. Самарского*, Вопр. киб. и выч. мат., вып. 5, Ташкент 1966, 75–84.
298. С. И. Богомолов, А. М. Журавлева, *Применение ЭЦВМ к расчету изгибных колебаний дисков в поле центробежных сил с учетом неравномерного нагрева*, ЭЦВМ в стр. мех., Строиздат, 1967, 517–583.
299. А. Н. Божинский, А. С. Волмир, А. Т. Пономарев, *Устойчивость упругих стержней при тепловом ударе*, Изв. высш. учебн. зав., Машиностр., 4, 1966, 34–38.
300. Б. Боли, Д. Уэйнер, *Теория температурных напряжений*, Москва 1964.
301. В. В. Болотин, В. Н. Москаленко, *Случайные термоупругие напряжения в оболочках*, Тр. VI. всес. конф. по теории обол. и пл., Москва 1966, 168–176.

302. В. В. Болотин, К. С. Болотина, *Температурная задача для кругового цилиндра из армированного слоистого материала*, Мех. Полим., 1, 1967, 136–141.
303. Н. М. Бородачев, *Термоупругая задача для безконечного тела с осесимметричной трещиной*, Прикл. Мех., 2, **2** (1966), 91–99.
304. А. И. Брусиловский, Е. А. Торосян, *Расчет трехслойных пологих оболочек с учетом термоупругих напряжений*, Строит. Мех. и Расч. Соор., 3, 1965, 5–9.
305* Л. Э. Брюккер, *Изгиб трехслойных пластин с различными внешними слоями при повышенных температурах*, Расч. эл. авиац. констр., вып. 4. Машиностроение, 1965, 71–85.
306. Л. Э. Брюккер, *Изгиб трехслойных пластин при неравномерном нагреве по поверхности*, Тр. VI всес. конф. по теории обол. и пл., Москва 1966.
307. Т. В. Бугникова, *Осесимметричное напряженное состояние сферической оболочки произвольной распределении температуры вдоль меридиана*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 269–275.
308* Н. Буткевичюс, В. Бабилюс, *Температурные деформации в сферическом и цилиндрическом кокилях*, Научн. тр. высш. учебн. зав., Лит. ССР, Мех. 2, 1966, 61–67.
309. Я. И. Бурак, *Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в деформируемом теплоэлектро проводном твердом теле*, Физ. Хим. Мех. Матер., 4, **2** (1966), 371–377.
310. Е. Ф. Бурмистров, *Изгиб тонкой изотропной плиты с отверстием общего вида с учетом температурных напряжений*, Конц. напр., вып. 1, Киев 1965, 53–58.
311. Г. М. Валов, *Контактная задача об упругой и термоупругой осесимметричной деформации бесконечного сплошного цилиндра*, Изв. АН ССР, Мех., 5, 1965, 60–67.
312. Г. А. Ван Фо Фы, *К основам теории анизотропной термовязкой упругости*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 109–115.
313. Н. В. Василенко, *О физически нелинейных уравнениях термоупругости*, Тепл. Напр. в элем. констр., вып. 5, Киев 1965, 279–286.
314. С. Г. Винокуров, *Об одной форме вариационных уравнений термоупругости*, Иссл. по теор. пласт. и обол., вып. 3, Казань 1965, 314–321.
315. Е. А. Великоивлненко, В. И. Махненко, *Задача термопластичности для круговой цилиндрической оболочки при произвольном осесимметричной нагреве*, Тр. VI всес. конф. по теории обол. и пл., Москва 1966, 232–236.
316. И. В. Гайвась, *Температурные напряжения, обусловленные возмущением однородного теплового потока в окресности макровключений*, Прикл. Мех., 2, **2** (1966), 81–90.
317. Ш. К. Галимов, М. С. Ганеева, *Устойчивость прямоугольной защепленной пластинки при неравномерном несимметричном нагреве*, Исслед. по пласт. и обол., вып. 5, Казань 1967, 332–341.
318. Б. Е. Гейтвуд, *Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам, турбинам и ядерным реакторам*, Москва 1959.
319. И. И. Голденблат, *Расчеты на прочность, устойчивость и колебание в условиях высоких температур*, Москва 1965.
320* П. Г. Голосков, *Решение задач об изгибе прямоугольной пластинки переменной толщины при температурных воздействиях*, Тр. лен. ин. водн. тр., вып. 89, 1967, 140–149.
321* Р. Н. Гороховский, *К расчету на прочность цилиндрической оболочки с температурными напряжениями*, Прочн. и дин. авиац. двиг. вып. 3, Москва 1966, 101–108.
322. Н. Н. Гогубь, *Управление нагревом линейно вязко-упругой пластины при ограничении температурных напряжений*, Автом. телем., 2, 1966, 18–27.
323. Д. А. Гохфельд, П. И. Ермаков, И. М. Плагов, *Упруго-пластическое доформирование цилиндрической оболочки при повторных воздействиях движущегося осесимметричного источника тепла*, Тепл. напр. в эл. констр., вып. 6, Киев 1966, 89–98.
324. Д. А. Гохфельд, *О применении теоремы Койтера к задачам приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел*, Прикл. Мех., 8, **3** (1967), 41–49.
325. Д. А. Гохфельд, *Теоремы и методы теории приспособляемости упруго-пластических тел*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 93–102.

326. Д. А. Гохфельд, О. Ф. Чернявский, *Применение методов линейного программирования к некоторым двумерным задачам предельного равновесия и приспособляемости в статической формулировке*, Тепл. напр. в эл. констр., вып. 7, Киев 1967, 103–107.
327. В. Ф. Грибанов, Н. М. Смирнов, *Локальная устойчивость сферической оболочки при температурных напряжениях*, Прикл. Мех., 6, 3 (1967), 128–131.
328. Э. И. Григолюк, Я. И. Бурак, Я. С. Подстригач, *Об одной экспериментальной задаче термоупругости для бесконечной цилиндрической оболочки*, Докл. АН СССР, 3, **177** (1967), 534–537.
329. В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, *Краевая задача термоупругости для прямоугольной пластинки*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 5, Киев 1965, 138–145.
330. В. Т. Гринченко, *Термонапряженное состояние толстостенного цилиндра конечной длины*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 147–154.
331. А. Ш. Дадашев, *Упруго-пластическое равновесие и приспособляемость полой сферы с внутренним покрытием под действием температурного поля*, Изв. АН Азерб. ССР, Сер. Физ. Техн. Мат. Н., 3, 1966, 34–41.
332. В. И. Даниловская, *Тепловые волны*, Прикл. Мех., 11, 1 (1965), 126–129.
333. В. И. Даниловская, И. П. Френкина, *Об одном методе решения задачи термоупругости и построение алгоритма счета*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 250–259.
334. И. А. Данюшевский, Г. Х. Листвинский, *Ползучесть неравномерно нагретой толстостенной трубы под действием внутреннего давления*, Инж. Журн., МТТ, 2, 1966, 106–108.
335. Ю. Д. Дениский, Д. Д. Шенкер, *Напряжения при обемнотепловом ударе в равномерно нагреваемых телах*, Инж. Журн., МТТ, 4, 1966, 168–171.
336. Ф. В. Допинский, В. А. Мараховский, *К вопросу определения поля температурных напряжений пластины из полимерного материала*, Мех. Полим., 6, 1967, 1130–1133.
337. А. А. Емельянов, *К расчету однослойных плит на температурные воздействия*, Стр. Мех. и Рас. Соор., 6, 1967, 4–8.
338. В. А. Жалнин, *О деформировании круглых пластин и оболочек вращения из нелинейного вязкоупругого материала в температурном поле*, Тепл. напр. в эл. констр., вып. 6, Киев 1966, 147–154.
339. Ю. М. Жигалко, *О фундаментальном решении температурной задачи для круговой цилиндрической оболочки*, Прикл. Мех., 4, 1 (1965), 30–33.
340. Ю. М. Жигалко, *Вывод асимптонических формул соответствующих сосредоточенному нагреву цилиндрической оболочки*, Прикл. Мех., 10, 1 (1965), 124–126.
341. В. А. Заруцкий, Т. А. Нешумаева, *Термоупругие напряжения в ребристых цилиндрических оболочках*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 202–208.
342. П. М. Золотаров, *Об уравнениях термоупругости для насыщенных жидкостью или газом пористых сред*, Инж. Журн. МТТ, 3, **5** (1965), 425–430.
343. М. Х. Ибрагимов, В. И. Меркулов, В. И. Субботин, *О случаиных термо-упругих напряжениях в стенке, обусловленных пулсасями температуры*, Атомн. Энерг., 6, **21** (1966), 513–514.
344. О. Н. Иванов, *Напряженное состояние осесимметричного нагретого ортотропного днища ослабленного круглым отверстием*, Прикл. Мех., 10, 1 (1965), 127–132.
345* А. И. Иванова, *Оценка искрывления пластины переменной толщины в температурном поле*, Тр. Моск. ин. эл. маш., вып. 2, Москва 1966, 488–491.
346. М. А. Илгамов, Х. М. Муштари, *О температурной устойчивости трехслойных пластинок с защемленными краями*, Изв. АН СССР, Мех., 3, 1965, 145–148.
347. А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов, *К вопросу о длительной прочности полимеров*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 5–10.
348. В. В. Кабанов, *Влияние краевого эффекта на прочность и устойчивость конструктивно-анизотропной круговой цилиндрической оболочки при сжатии внутреннем давлении в нагреве*, Изв. выс. учебн. зав. Авиац. Техн., 1, 1966, 54–62.
349. В. В. Кабанов, *Устойчивость пластической подкрепленной кругловой оболочки при неравномерном нагреве и сжатии*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 197–204.
350. М. Г. Кабелевский, *О применимости деформационной теории к расчету турбинных дисков при сложенном режиме нагружения*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 49–56.

351. О. Ю. Калекин, *Температурная задача для оболочек вращения средней толщины*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 5, Киев 1965, 157–166.

352. О. Камердинов, А. Ф. Саранчев, И. Г. Цай, *О полиномяльных решениях системы уравнений термоупругого равновесия анизотропной пластинки*, Изв. АН Каз. ССР, Сер. Физ. Мат., 1, 1967, 74–77.

353* Э. С. Карепетов, *Температурные напряжения в предварительно напряженной эселезобетонной балке*, Сб. тр. Лен. Ин. Инж. ж.-д. трансп., вып. 245, 1966, 26–52.

354* Э. С. Карепетов, *Температурные напряжения возникающие в предварительно напряженных эселезобетонных пролетных строениях в период их эксплуатации*, Сб. тр. лен. ин. инж. ж.-д. трансп., вып. 258, 1967, 148–156.

355. В. П. Карножицкий, *О влиянии температурных напряжений на устойчивость трехслойной цилиндрической оболочки (асимметричная деформация)*, Тр. VI. всес. конф. по теор. обол. и пл., Москва 1966, 463–466.

356. В. П. Карножицкий, П. Г. Тыдыков, *Температурные напряжения в цилиндрической оболочке с заполнителем имеющим канал*, Изв. выс. учеб. зав., Авиац. Техн., 4, 1965, 90–96.

357. В. П. Карножицкий, В. П. Ингульцов, *Влияние температурных напряжений на устойчивость трехслойной панели крыла несимметричной структуры*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 205–212.

358. В. П. Карножицкий, В. Л. Ингульцов, *Температурные напряжения в трехслойной цилиндрической оболочке конечной длины*, Прикл. Мех., 5, **3** (1967).

359. Л. М. Качанов, *О задачах ползучести при термодинамических изменениях температурного поля*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 23–28.

360. З. Г. Керимов, Н. И. Ягубов, *Термоупругие напряжения в обсадной колонне*, Изв. АН, Азерб. ССР, Сер. Физ.-Техн. Мат. Н., 5, 1965, 154–159.

361. И. Д. Килль, *О термоупругих напряжениях внутри полупространства*, Инж. Журн., МТТ, 1, 1966, 140–144.

362. Н. А. Кильчевский, Е. А. Брусенцова, *Волновое распространение тепла в континууме с дислокациями*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 155–158.

363. Г. А. Кильчинская, *Нелинейные эффекты при колебаниях упругих стержней в условиях высокотемпературного нагрева*, Прикл. Мех., 4, 1 (1965), 73–78.

364. Г. А. Кильчинская, *Динамическая устойчивость неравномерно нагретого стержня*, Дин. сист. тверд. и жид. тел, Киев 1965, 49–55.

365. Г. А. Кильчинская, *Исследование волновых процессов с обратным термоупругим эффектом в нагретых упругих телах*, Прикл. Мех., 10, **2** (1966), 16–21.

366. Г. А. Кильчинская, *Влияние нестационарного высокотемпературного поля на динамическую устойчивость теплопроводящей оболочки*, Дин. сист. тверд. и жид. тел, Киев 1966, 37–46.

367. Г. А. Кильчинская, *Распространение термоупругих волн в упругом слое при конвективном теплообмене на его поверхностях*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 174–183.

368. Г. А. Кильчинская, М. М. Петренко, *Распространение продольных термоупругих волн в стержне*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 5, Киев 1965, 189–195.

369. Г. Кит, Я. С. Подстригач, *Определение стационарного температурного поля и напряжений в окрестности щели, облагающей термосопротивлением*, Физ. Хим. Мех. Матер., 3, **2** (1966), 247–252.

370* С. Д. Клачко, *Аналогия между температурными задачами теории упругости и пластичности и задачами для ненагретых тел*, Тр. Новосиб. ин. инж. ж.-д. трансп., вып. 62, 1967, 296–304.

371. А. Д. Коваленко, *Выражения для тепловых напряжений и перемещений в конической оболочке при цикличной деформации*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 283–290.

372. А. Д. Коваленко, В. Г. Карноухов, *Уравнения и решения некоторых задач теории вязко-упругих оболочек*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 11–24.

373. К. Х. Кожахметов, Р. М. Финкельштейн, *Цилиндрическая оболочка и пластина под действием подвижного источника тепла*, Исслед. по упр. и пласт., вып. 4, Ленинград 1965, 86–106.

374* М. Козлров, *Термоеластична устойчивость на анизотропной плочи*, Техн. Мисъл., 2, **4** (1967), 63–69.

375* М. Козаров, *Загубване на эластичната устойчивост на цилиндрични черупку, запълнели с эластичен материал от действието на външно налягание и температура*, Техн. Мисъл, 3, **4** (1967), 59–65.

376. Ю. М. Колано, *Нестационарное температурное поле и температурные напряжения в тонких пластинках с теплоотдачей, термоупругие характеристики которых зависят от температуры*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 5, Киев 1965, 111–126.

377. Ю. М. Колано, *Температурные напряжения в тонких пластинках с подкрепленным краем*, Конц. напр., вып. 1, Киев 1965, 137–146.

378. Ю. М. Колано, Е. А. Макула, *Температурные напряжения в нагреваемой источниками тепла полосе-пластинке с теплоотдачей*, Прикл. Мех., 3, **3** (1967), 77–87.

379. Ю. М. Колано, *Температурные напряжения в ортотропной полосе–пластинке с теплоотдачей*, Прикл. Мех., 6, **3** (1967), 39–47.

380* Д. Коларов, А. Балтов, *Визкозна–пластична сфера под действието на вътретно налягане и температура*, Изв. Инив. Техн. Мех. Бълг. А.Н., 3, 1966, 5–21.

381. М. А. Колтунов, *К вопросу построения нелинейных соотношений термовязкоупругости*, Мех. Полим., 6, 1967, 989–998.

382* Г. Б. Колчин, *Термоупругие напряжения в бетонном массиве при его наращивании*, Тр. Леннингр. Пол. Ин., 257, 1965, 18–26.

383. Г. Л. Комиссарова, С. А. Леонов, *О динамической устойчивости продольно гофрированной цилиндрической оболочки, находящейся в неравномерном температурном поле*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 5, Киев 1965, 196–207.

384. Г. Л. Комиссарова, *Динамическая устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, находящихся в неравномерном температурном поле*, Тепл. напр., в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 184–196.

385. Б. А. Корбут, *Устойчивость сферической оболочки с упругим заполнителем при действии давления и температуры*, Изв. выс. учебн. зав., Авиац. Техн., 4, 1965, 97–102.

386. Б. А. Корбут, *Устойчивость цилиндрической оболочки с упругим заполнителем при действии нагрузок и температуры*, Пробл. устойч. в стр. мех., Строиздат, 1965, 273–279.

387. Б. Г. Коренев, *Некоторые плоские задачи термоупругости при периодических тепловых воздействиях*, Докл. АН ССР, 2, **164** (1965), 294–297.

388. В. В. Коробейников, *Плоская температурная деформация бесконечного клина*, Вопр. выч. мат. и геом. модель., Ленинград 1966, 33–37.

389* С. С. Крестовский, *Определение срока службы крыла летательного аппарата в условиях аэродинамического нагрева*, Тр. Казанск. Авиац. Ин., вып. 91, 1966, 139–147.

390. В. В. Крисальный, *Температурные напряжения в системе двух массивных бетонных блоков*, Изв. АН Арм. ССР, Мех., 6, **19** (1966), 52–64.

391* А. Н. Кудинов, *Уравнения термоупругости и термоустойчивости нелинейной теории пологих ортотропных оболочек*, Уч. зап., Томский Ин., 68, 1967, 76–85.

392* Л. Ю. Кузьмин, *О решении плоской задачи термоупругости*, Тр. моск. ин. инж. ж.-д. трансп., вып. 280, 1967, 47–63.

393* В. Р. Кульбах, *Температурные деформации тонких пластин при воздействии сосредоточенных источников тепла*, Тр. Таллинск. Пол. Ин., вып. 229, 1965, 61–72.

394. Р. И. Курпат, Ю. Д. Мирошниченко, *Температурные напряжения в сопловых лопатках газовой турбины при неустановившихся тепловых режимах*, Энергомаш., 10, 1966, 30–32.

395. В. М. Левин, *О коэффициентах температурного расширения неоднородных материалов*, Инж. Журн., МТТ, 1, 1967, 88–94.

396* Ю. Лепик, *Температурные напряжения в гибких неоднородных пластинах за пределом упругости*, Уч. зап. тортуск. ун., вып. 117, 1965, 168–179.

397. В. Г. Литвинов, *О распределении напряжений и температур в полимерных волокнах в процессе их ориентации*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 31–36.

398. А. И. Лобанов, М. М. Сидляр, *Влияние взаимодействия полей деформаций и температуры на квазистатическое напряженное состояние тонкой пластинки*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 164–168.

399. А. И. Лобанов, М. М. Сидляр, *Связанные задачи термоупругости для тонких пластинок*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 243–252.

400* Ю. В. Луцицкий, *Тепловые волны в стержне при наличии теплоподвода к боковой поверхности*, Двигат. внутр. сгор., вып. 5, Харков 1967, 96–101.

401* Л. А. Малашенко, *К вопросу определения температурных напряжений тонкостенных систем с упругими шпангоутами*, Самолетстр. и мех. возд. флота, Респ. межд. науч. тех. сб., вып. 2, 1965, 63–69.

402. В. И. Махненко, Е. А. Великоиваненко, *Упруго-пластическое состояние в неограниченной тонкой пластине при произвольном осесимметричном нагреве*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 52–62.

403. В. И. Махненко, Е. А. Великоиваненко, *Задача термопластичности для пологой оболочки вращения*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 57–64.

404. В. И. Маховиков, *О решении температурных задач для трансверально-изотропного упругого цилиндра*, Изв. АН СССР, Мех., 6, 1965, 100–105.

405* В. И. Маховиков, *О решении динамических задач термоупругости для тела вращения с вырезом*, Дин. и проч. машин, Респ. межвед. науч. техн. сб., вып. 3, 1966, 92–97.

406* И. А. Медников, *Некоторые вопросы расчета дорожных бетонных плит на температуру и нагрузку*, Тр. гос. всес. дор. н.и. ин., вып. 7, 1966, 69–79.

407. Г. Г. Мейников, В. М. Свешников, *Релаксация температурных напряжений в тонкостенной трубе в условиях упруго-пластического деформирования*, Изв. высш. учебн. зав., Авиац. Техн., 3, 1966, 133–136.

408. Э. Мелан, Г. Паркус, *Термоупругие напряжения вызываемые стационарными температурными полями*, Физматгиз, 1958.

409. В. Н. Москаленко, *Стохастические краевые эффекты в осесимметричных задачах термоупругости для круговых цилиндрических оболочек*, Инж. Журн., МТТ, 3, 1967, 95–101.

410. В. Н. Москаленко, *Стохастические краевые эффекты в пластинах*, Изв. АН Арм. ССР, Мех., 5, **20** (1967), 38–47.

411. В. Н. Москаленко, *О случайных термоупругих напряжениях в пластинах*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 209–216.

412. Н. С. Можаровский, А. А. Ющенко, *Остаточные напряжения при теплосменах и их влияние на долговечность металла*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 84–92.

413. А. К. Моисеенко, І. А. Цурпал, *Концентрація термонапружень в фізично нелінійній пружній пластинці з отвором при однорідному теплопотоці*, Допов. АН УССР, А5, 1967, 453–457.

414. А. К. Моисеенко, И. А. Цурпал, *Температурные напряжения в пологом цилиндре и пластинке с отверстием из нелинейного материала*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 130–140.

415. И. А. Мотовиловец, И. Ф. Киричок, *Напряженное состояние цилиндра при смешанных граничных условиях нагрева*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 217–226.

416. В. А. Никонов, *Термоупругие напряжения в статически неопределимых системах*, Прикл. Мех., 9, **2** (1966), 107–112.

417. В. Новацкий, *Цлоская задача магнитотермоупругости*, Прикл. Мех., 6, 1 (1965), 1–7.

418. В. Новацкий, *Моментные напряжения в термоупругости*, Прикл. Мех., 1, 3 (1967), 3–17.

419. Б. И. Огарков, *Температурно-влажностные напряжения в анизотропном кольце с учетом зависимости модулей упругости материала от температуры и влажности*, Иэв. высш. учебн. зав., машиностр., 5, 1966, 26–30.

420. В. С. Павлина, *О влиянии диффузии на температурные напряжения в окрестности цилиндрической полостью*, Физ.-Хим. Мех. Матер., 4, **1** (1965), 390–394.

421* Н. Д. Панкратов, *Температурные напряжения в пологих тонких оболочках двоякой кривизны*, Саратовск Пол. Инс., Вып. Техн., 1965, 207–211.

422* Н. Д. Панкратов, *Устойчивость круглых конструктивно ортотропных пластин при неравномерном нагреве*, Науч. тр. Саратовск Пол. Ин., вып. 23, 1966, 193–198.

423. Г. Паркус, *Неустановившиеся температурные напряжения*, Москва 1963.

424. Д. А. Переверзев, *Нестационарная теплопроводность и термоупругость в многослойных цилиндрических системах*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 182–193.
425* В. В. Петров, *Расчет пологих оболочек в температурном поле при конечных прогибах с учетом изменения свойств материала от нагревания*, Тр. мол. уч. Сарат. Поль. Ин., Вып. Тех., 1965, 333–341.
426. В. В. Пискун, *Упруго-пластическое осесимметричное напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины при нестационарном нагреве*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 79–88.
427. А. Б. Пуховский, *О статическом расчёте замкнутых металлических цилиндрических оболочек на действие солнечной радиации*, Стр. Арх., 3, 1965, 27–32.
428. А. Б. Пуховский, *Об одной задаче статического расчёта металлических цилиндрических оболочек в условиях односторонного нагрева*, Изв. высш. учебн. зав., Стр. и Арх., 3, 1967, 27–32.
429* А. И. Подгорный, *Термоупругие напряжения в толстостенном цилиндре конечной длины*, Дин. и проч. матер., Респ. Межвед. науч. тех. сб., вып. 2, 1965, 89–95.
430. Я. С. Подстригач, *Влияние инородных макровключений на распределение температурных полей и напряжений в упругих телах*, Конц. напр., вып. 1, Киев 1965, 207–218.
431. Я. С. Подстригач, И. В. Гайвась, *Двумерная задача термоупругости для бесконечной среды с цилиндрическим включением*, Прикл. Мех., 3, **2** (1966), 124–126.
432. Я. С. Подстригач, В. С. Павлина, *Основные уравнения плоской задачи термодиффузии*, Прикл. Мех., 3, **1** (1965), 101–106.
433. Я. С. Подстригач, Г. С. Кит, *Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 194–201.
434. Я. С. Подстригач, П. Р. Шевчук, *Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 227–233.
435* А. А. Поздеев, А. М. Шалавин, *Расчёты напряженно-деформированного состояния при ползучести в неравномерном температурном поле*, Газодин. двиг., дин. и прочн. маш., 1967, 3–9.
436. Л. И. Поляков, М. А. Рудис, *О предельном равновесии двухслойной цилиндрической оболочки с учетом температурных эффектов*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 70–78.
437. В. Е. Попович, *Устойчивость неравномерно нагретых прямоугольных пластин переменной жесткости*, Расч. на прочн., вып. 12, Москва 1966, 378–385.
438. В. Е. Попович, *Осесимметричная потеря устойчивости неравномерно нагретой по радиусу кольцевой пластинки типа шпангоума*, Изв. высш. учебн. зав., Авиац. Техн., 2, 1967, 67–73.
439. Е. Б. Попов, *Динамическая связная задача термоупругости для полупространства с учетом конечности распределения тепла*, Прикл. Мат. Мех., 2, **31** (1967), 328–334.
440. Ю. С. Рудницкий, *Квазістаціонарні термопружні напружения в кільці що охолоджуэтся у середовищі із сталою температурою*, Допов. АН УССР, 10, 1965, 1298–1303.
441. Ю. С. Рудницкий, *Тепловый удар по зовнішньому контуру кільця з врахуванням вязкопружного демпфірування колибань в матеріалі*, Допов. АН УРСР, 11, 1965, 1455–1460.
442. Н. С. Рыжков, Г. С. Тер-Акопянц, *Приближенный метод расчёта неустановившегося температурного поля и напряжений в дисковых роторах паровых турбин*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 5, Киев 1965, 76–90.
443. А. Ф. Рябов, *Задача термоупругости для многослойной пластинки*, Прикл. Мех., 4, **3** (1967), 16–23.
444. В. Г. Савченко, *Напряженное состояние вязко-упругого неравномерно нагретого цилиндра со звездообразной полостью*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 5, Киев 1965, 137–146.
445. В. Г. Савченко, *Плоская задача термоупругости с учетом физической и геометрической нелинейности*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 119–129.
446. Ю. А. Самонлович, *Упруго-пластическое равновесие сплошного кругового цилиндра в неравномерном температурном поле*, Изв. высш. учебн. зав., Черн. Метал., 12, 1965, 132–139.
447. В. С. Саркисян, *Температурные напряжения в анизотропных (неортотропных) пластинках*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 5, Киев 1965, 127–137.
448. В. С. Саркисян, *Температурные напряжения в пластинках, обладающих цилиндрической анизотропией (неортотропией)*, Тр. VI. всес. конф. по теор. об. и пл., Москва 1966, 674–679.

449. Г. З. Серебренников, *Концентрация термических напряжений в кромках поперечных отверстий тонкостенных деталей*, Расч. на прочн., вып. 12, Москва 1966, 220–240.
450. М. М. Сидляр, *Об одном случае нестационарных термонапряжений в неограниченном упругом пространстве с цилиндрической полостью*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 5, Киев 1965, 208–215.
451. М. М. Сидляр, *Обобщенное термонапряженное состояние тонкой пластинки при взаимодействии поля деформации и температуры*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 169–173.
452. А. М. Симонян, *Температурная задача цилиндрических труб в условиях пластической наследственности*, Изв. АН Арм. ССР, Сер. Физ.-Мат. Н., 4, **18** (1965), 55–72.
453. А. М. Симонян, *О двух температурных задачах пластической наследственности*, Изв. АН Арм. ССР, Мех., 1, **19** (1966), 51–66.
454. А. М. Симонян, *Некоторые температурные центрально симметричные задачи нелинейной наследственности*, Изв. АН Арм. ССР, Мех., 3, **19** (1966), 39–53.
455. А. М. Симонян, *О плоской температурной задаче контакта ортотропных тел с учетом ползучести*, Изв. АН Арм. ССР, Мех., 6, **19** (1966), 17–28.
456. А. М. Симонян, *О решении осесимметричной температурной контактной задачи ползучести трансверсально-изотропных тел*, Изв. АН Арм. ССР, Мех., 1, **20** (1967), 37–47.
457. А. Г. Синицын, *Термоупругие и термопластические колебания стержневых систем и пластинок*, Исслед. по теор. соор., вып. 14, Строиздат., 1965, 93–111.
458. А. Г. Синицын, *Вычисление поверхностей влияния при термоупругих колебаниях пластинки*, ЭЦВМ в стр. мех., Строиздат., 1966, 477–484.
459. А. Г. Синицын, *Термоупругие колебания трехслойной пластинки от случайных импульсов*, Тр. VI. всес. конф. по теор. обол. и пл., Москва 1966, 685–689.
460* Я. Г. Скоморовский, *Расчёт температурных напряжений в тонкостенных бетонных сооружениях с учетом ползучести*, Вопр. гидрот. и гидравл., Киев 1965, 13–18.
461. А. М. Скудра, В. М. Антанс, *Некоторые вопросы термореологии армированных полимеров*, Прикл. Мех., 5, **2** (1966), 95–101.
462* П. С. Соломин, *Термоупругие напряжения в системе трехслойных цилиндров*, Уч. зап. томск. ун., 68, 1967, 117–125.
463* П. С. Соломин, *Анализ температурных напряжений в цилиндрической трубе*, Уч. зап. томск. ун., 68, 1967, 126–133.
464. М. М. Стратонова, *Исследование динамических температурных напряжений с учетом изменения свойств материала с температурой*, Изв. выс. учебн. зав., Машиностр., 5, 1967, 39–42.
465* В. А. Сухарев, *Тороидальная оболочка переменной жесткости в стационарном температурном поле*, Дин. и прочн. маш., Респ. Межвед. науч.-техн. сб. вып. 4, 1966, 17–22.
466. И. Б. Тарасов, *Расчёт на прочность цилиндрических футерованых сосудов при воздействии высокой температуры*, Матер. по метал. констр., вып. 12, Москва 1967, 113–122.
467* Л. П. Трапезников, *Температурные напряжения в плоскодеформируемой призме прямоугольного сечения при двумерном численно заданном температурном поле*, Изв. всес. н.и. ин. гидротех., 85, 1967, 77–85.
468. Б. Ф. Трахтенберг, М. С. Кенис, *Применение метода источников при расчёте термоупругих напряжений*, Изв. выс. уч. зав., машин., 11, 1966, 32–36.
469. Р. А. Турусов, М. М. Стратонова, *Температурные напряжения в полимерных стержнях при неоднородном нагреве*, Мех. Полим., 5, 1967, 944–947.
470. А. И. Узгалев, *Распределение температурных напряжений в эллиптической анизотропной пластинке*, Изв. высш. учебн. зав., Матем., 3, 1966, 171–177.
471. А. И. Узгалев, *Температурные напряжения в ортотропной пластинке под влиянием распределенных и сосредоточенных источников тепла*, Инж. Журн., МТТ, 3, 1966, 160–163.
472. А. И. Уздалов, *Напряженное состояние ортотропной полосы, вызванное сосредоточенным источником тепла*, Прикл. Мех., 12, **2** (1966), 109–115.
473. А. Г. Угодчиков, *К расчёту температурных напряжений вызываемых двумерными температурными полями*, Прикл. Мех., 7, **1** (1965), 1–10.

474. А. Г. Угодчиков, *Об одном методе решения плоской задачи термоупругости*, Прикл. Мех., 2, **3** (1967), 99–105.

475. А. Г. Угодчиков, *О комплексном представлении решения плоской задачи термоупругости для физически нелинейных материалов*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 114–118.

476* Г. А. Фень, Ю. А. Шевляков, *Температурные напряжения многослойных пластин при осесимметричном температурном поле*, Гидроаэромех, Респ. Межвед. научн. тех. сб., вып. 4, 1966, 39–43.

477. В. Л. Фомин, *О влиянии стационарного теплового поля на концентрацию напряжений в бесконечной упругой плоскости с круговым вырезом*, Конц. напр., вып. 1, Киев 1965, 294–298.

478* Л. И. Фридман, *Температурные напряжения в кожухе кольцевой камеры сгорания*, Тр. Куйб. авиац. ин., вып. 19, 1965, 299–306.

479* Л. И. Фридман, *Пластические деформации при многократных неравномерных нагревах*, Прочн. и дин. двиг., вып. 3, Москва 1966, 80–100.

480. Л. И. Фридман, *Приспособляемость неравномерно нагретого вращающего диска*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 108–113.

481. Б. Д. Ханьжов, *Вариационные решения осесимметричной задачи термоупругости для трансверсально-изотропного цилиндра конечной длины*, Изв. высш. учебн. зав., Матем., 4, 1967, 111.

482. В. М. Хорольский, *Температурные напряжения от источника тепла, расположенного на стороне прямого клина*, Инж. Физ. Ж., 6, 11 (1966), 721–724.

483. В. М. Хорольский, В. В. Басов, *Температурные напряжения в прямоугольном клине*, Изв. высш. учебн. зав., Мат., 11, 1966, 113–116.

484* В. М. Хорольский, В. В. Басов, *Температурные напряжения в режущем инструменте*, Сб. научн. тр. Куйбыш. Пол. Ин. Мех., 1967, 293–297.

485. Л. П. Хорошун, *Термоупругие свойства стохастически армированных сред*, Прикл. Мех., 9, **2** (1966), 99–106.

486. Л. П. Хорошун, *Реологические свойства твердых тел со случайно расположенными неоднородностями*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 25–30.

487. А. Ф. Хрусталев, *Контактная задача термоупругости для полупространства*, Инж. Журн., МТТ, 1, **5** (1965), 180–183.

488* В. С. Чернина, *Напряженное состояние оболочки вращения при неосесимметричном распределении температуры*, Тр. Лен. Пол. Ин., вып. 252, 1967, 114–124.

489. Ю. А. Чернуха, *Влияние неравномерного нагрева на устойчивость сферической оболочки при конечных прогибах и несимметричной деформации*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 234–242.

490. А. И. Чудновский, *О неизометрической деформации вязко-упругой среды*, Ж. Прикл. Мех. и Техн. Физ., 3, 1966, 84–89.

491. Г. С. Шахроманов, *К температурному расчёту оболочек*, Изв. высш. учебн. зав., Стр. Арх., 6, 1965, 39–43.

492. Р. Н. Швец, *Взаимосвязная задача термоупругости для тонкой пластинки*, Прикл. Мех., 3, **1** (1965), 107–115.

493. Р. Н. Швец, *О единственности решения динамической задачи термоупругости тонких оболочек*, Прикл. Мех., 4, **1** (1965), 25–29.

494. А. А. Шевелев, *Температурные напряжения в пластине и выбор оптимального решения нагревания*, Инж. Физ. Журн., 1, **8** (1965), 79–81.

495* Ю. А. Шевляков, Г. А. Фень, *Термоупругие напряжения многослойных пластин и оснований*, Гидрот. респ. межвед. науч. техн. сб., вып. 12, 1965, 75–83.

496. А. А. Шевелев, *Температурные напряжения в пластине и цилиндре при их нагреве в условиях изменяющейся температуры среды*, Прикл. Мех., 11, **1** (1965), 119–126.

497. Ю. Н. Шевченко, *Теоремы о разгрузке в теории малых упруго-пластических деформаций при неравномерном нагреве*, Прикл. Мех., 7, **2** (1966), 12–21.

498. Ю. Н. Шевченко, *О теориях термопластичности упрочняющегося материала*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 5–22.

499. Ю. Н. Шевченко, *Приближенные методы решения задач термопластичности с учетом истории нагружения*, Тепл. напр. в элем. констр. вып. 7, Киев 1967, 37–48.

500. Э. М. Шефтер, *Температурное поле и температурные напряжения возникающие в разплавляемом упругом полупространстве*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 6, Киев 1966, 236–241.

501. О. Ф. Шленский, В. Ф. Млиско, *Графоаналитический метод расчёта деформации упруго-вязкого стержня при осевом растяжении в условиях нестационарного режима нагревания*, Мех. Полим., 3, 1966, 413–420.

502. М. И. Янковский, И. Ф. Иваненко, Г. С. Кондратов, *Температурные напряжения при неравномерном нагреве слитка с учетом пластических деформаций*, Прикл. Мех., 4, **3** (1967), 126–128.

503. С. Я. Ярема, Т. В. Железняк, *Осесимметричная температурная задача гибких пластин и пологих оболочек*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 5, Киев 1965, 287–296.

504. Э. М. Ясин, *Некоторые задачи температурной устойчивости пластин и оболочек*, Тр. VI Всес. Конф. по теор. об. и пл., 1966, 859–864.

505* BAGHI MADHAB CHANDRA, *Thermo-elastic stresses in a semi-infinite elastic strip of transversely isotropic material due to a given temperature distribution on one straight edge, two paralled edges bounding the strip being insulated*, Indian J. Theor. Phys., 2, **14** (1966), 27–38.

506. M. F. MCCARTHY, *Wave propagation in nonlinear magneto-thermoelasticity. Propagation of acceleration*, Proc. Vibr. Probl., 4, **8** (1967), 337–349.

507* CHOJASI CUJOSI, KOBAJASI SATOMI, *Teoretyczne badania osłony silników odrzutowych*, J. Japan Soc. Aer. a Space Sci., 164, **15** (1967), 302–308.

508* G. DINCĂ, *Influenţa temperaturii asupra propagări undelor în fire extensibile (problema cuplată)*, Studii şi cerc. mat., Acad. RSR, 5, **19** (1967), 659–680.

509. J. DVOŘÁK, *Experimentálně-teoretické vyšetřeni napjatosci ve stěně rotačniho válce při tepelném rázu*, Strojn. Čas., 4, **18** (1967), 299–304.

510. R. DZIĘCIELAK, *Półpasmo plytowe o mieszanych warunkach brzegowych, poddane dzialaniu pola temperatury*, Zesz. Nauk. Pol. Pozn., 48, 1967, 145–167.

511. A. D. FINE, H. KRAUS, *On wave propagation in thermoplastic media*, Trans. ASME, 3, E33 (1966), 514–520.

512. Z. J. HOLY, *Three dimensional temperature and thermoelastic stress fields in a heat producing sphere due to arbitrary surface heat transfer*, Nucl. Engng a. Design, 5, **6** (1967), 395–420.

513. V. KOVAŘÍK, *Thermoelastic stability and thermally induced vibrations of sandwich plates*, Acta techn. ČSAV, 6, **12** (1967), 702–729.

514. F. J. LOCKETT, L. W. MORLAND, *Thermal stresses in a viscoelastic thinwalled tube with temperature-dependent properties*, Intern. J. Engng Sci., 12, **5** (1967), 879–898.

515. M. W. LORD, Y. A. SHULMAN, *A generalized dynamical theory of thermoelasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 5, **15** (1967), 299–309.

516* C. L. MONISMITH, G. A. SECOR, K. E. SECOR, *Temperature induced stresses and deformations in asphalt concrete*, Proc. Assoc. Asph., Pov. Techn. Sess., Philadelphia 1965, vol. 34, Ann. Arbor. Mich., 1965, 248–279.

517. S. K. SARKAR, *Thermal deflection of a non-homogeneous rectangular plate*, Aplikace mat., 4, **12** (1967), 300–307.

518. C. SILLI, *Sulla propagazione di onde straordinarie di discontinuitá in un filo termoelastico*, Atti sem. mat. fis., Univ. Modena, 16, 1967, 121–142.

519* TSUI ISAMU, *Elastoplastic stresses and deformations in mild steel plates subjected to thermal cycles*, Mem. fac. engng Kyushu Univ., 2, **27** (1967), 51–100.

520. W. WARREN, J. A. WEESE, *On the axisymmetric thermoelastic problem in bispherical coordinates*, Trans. ASME, 4, E34 (1967), 975–978.

521* Э. В. Акопов, Б. С. Васильков, *К расчёту многоволных складок двоякой кривизны на температурные воздействия*, Уч. Зап., Азерб. Пол. Ин-т, Арх. Стр., Транс. и легк. пром., 3, 1967, 63–67.

522* А. А. Антипов, *Расчёт трехслойной панели при неравномерном нагреве по толщине*, Судостр. и Морск. Сооруж., Респ. Межвед. научно-тех. сб., вып. 6, 1967, 38–45.

523* А. Балтов, Н. Богданов, *Напряженное и деформированное состояние полого вязко-пластического цилиндра под действием динамической нагрузки и температуры*, Изв. Ин-та техн. Мех., 4, 1967, 5–22.

524. Т. Я. Загорский, І. Г. Варшина, І. П. Кулько, *Задача Коші для системы дефенціальных рівнянь термодифузії в твердому деформованному ізотропному тілі*, Вісн. Львівск. Пол. Инс., 16, 1967, 26–31.

525. Т. Я. Загорский, Г. С. Іваненко, *Про задачу Коші для системы рівнянь теорії термоупругости*, Вісн. Львівск. Иол. Инс., 16, 1967, 32–36.

526. Н. Н. Каркузашвили, *Температурные напряжения в частично закрепленной полосе*, Некот. вопр. прикл. Мех., вып. 3, Киев 1967, 120–133.

527. Н. Н. Каркузашвили, *Определение стационарного температурного поля и напряжения бесконечной пластинки при заданной температуре на одной из кромек*, Некот. вопр. прикл. мат., вып. 3, Киев 1967, 134–144.

528. В. И. Климов, *Цилиндрические тонкостенные конструкции открытого профиля с переменными параметрами упругости при неравномерном нагреве*, Изв. Вузов, Авиац. Техн., 40, 1967, 78–87.

529. Р. И. Курнат, Г. М. Третьяченко, Л. В. Кравчук, *О температурных напряжениях в сопловых лопатках газовых турбин*, Термопр. матер. и констр. элем., вып. 4, Киев 1967, 407-417.

530* Д. Ф. Лазуткин, *Термоупругие деформации анизотропной среды и теория взаимности Бетти*, Уч. зап. Курск. пед. Ин., 38, 1967, 51–61.

531* А. М. Шалавин, *К расчёту на прочность неравномерно нагретых лопаток газовых турбин*, Некот. особ. обраб. констр. и парам. авиац. газотурб. двиг., Перм., 1967, 110–116.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 stycznia 1969 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 7 (1969)

O PEWNYM PRZYPADKU ANIZOTROPII

JANUSZ KLEPACZKO (WARSZAWA)

Dotychczasowe badania eksperymentalne warunku plastyczności sprowadzały się głównie do śledzenia zmian pewnej powierzchni, która jest geometrycznym przedstawieniem matematycznego sformułowania takiego warunku w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń. Ze względu na trudności związane z techniką eksperymentu, doświadczenia przeprowadza się zazwyczaj dla płaskiego stanu naprężenia, gdy jedna ze składowych stanu naprężenia jest równa zeru; na przykład $\sigma_z = 0$. Taki schemat doświadczalny odpowiada przeprowadzaniu prób na cienkościennych próbkach rurkowych lub na blachach rozciąganych w odpowiedni sposób. Zwykle doświadczenia takie są przeprowadzane dla materiałów, które można uważać za izotropowe przy małych wartościach odkształceń, na przykład $\varepsilon_{max} \approx 0{,}005$. Wyniki są przedstawiane w postaci powierzchni lub przekrojów tej powierzchni dla jednakowych wartości odkształceń w trójwymiarowej przestrzeni naprężeń σ_x, σ_y, τ_{xy}.

Jak wiadomo, podczas odkształcania metali w stanie wyżarzonym do wartości odkształceń w przybliżeniu większych niż 0,5%, ($\varepsilon \geqslant 0{,}005$), daje się wyraźnie zauważyć zjawisko anizotropii. Wówczas poszczególne krzywe umocnienia są funkcją kierunku, przy czym główne kierunki anizotropii mogą się różnić od kierunków naprężeń głównych.

Zwykle można wyróżnić dwa przypadki anizotropii, a mianowicie:

a. Materiał, który można uznać początkowo za izotropowy nabywa cech anizotropowych podczas procesu deformacji. Jest to przypadek tzw. anizotropii odkształceniowej. Jako przykład takiego zachowania się można wymienić rury lub blachy w stanie wyżarzonym poddawane odkształceniu plastycznemu o odpowiednio dużej wartości.

b. Anizotropia, która istnieje już w materiale przed przystąpieniem do badań. Jest to przypadek tzw. anizotropii rodzimej. Przykładem takiego zachowania się są plastiki zbrojone, drewno itp.

Przedmiotem dyskusji w niniejszej pracy jest przypadek a.

Jednym z warunków plastyczności dla ciał anizotropowych jest warunek przedyskutowany w pracy [2] oraz [3]

$$F(\sigma_y-\sigma_z)^2+G(\sigma_z-\sigma_x)^2+H(\sigma_x-\sigma_y)^2+2L\tau_{yz}^2+2M\tau_{zx}^2+2N\tau_{xy}^2 = 1, \tag{1}$$

gdzie F, G, H, L, M, N są pewnymi parametrami charakteryzującymi bieżący stan anizotropii w ciele. Równocześnie pomija się efekt Bauschingera i wpływ ciśnienia hydro-

statycznego, a główne osie anizotropii pokrywają się z układem współrzędnych x, y, z, w których opisuje się stan naprężenia. W przypadku istnienia izotropii równanie (1) redukuje się do warunku plastyczności Hubera-Misesa; wówczas

$$L = M = N = 3H = 3G = 3F$$

oraz

$$2F = \frac{1}{\sigma^2}, \qquad \sigma^2 = 3k^2,$$

gdzie σ jest naprężeniem plastycznego płynięcia przy jednoosiowym rozciąganiu, k stanowi analogiczną wielkość przy czystym ścinaniu. Bardziej ogólną dyskusję warunków plastyczności z uwzględnieniem anizotropii zamieszczono w pracy [5], gdzie warunek (1) wynika jako jeden z przypadków szczególnych.

Dla przypadku płaskiego stanu naprężenia, tj. dla $\sigma_z = 0$, warunek (1) przyjmuje postać

$$(G+H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (H+F)\sigma_y^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1; \tag{2}$$

gdy istnieje izotropia, warunek plastyczności przedstawia elipsoidę (3) w przestrzeni naprężeń σ_x, σ_y, τ_{xy},

$$\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = 3k^2. \tag{3}$$

Tak więc w przypadku płaskiego stanu naprężenia pozostają do wyznaczenia cztery stałe F, G, H, N, oczywiście o ile traktować je jako stałe, a nie jako parametry zależne od odkształcenia.

Gdy próbki wycina się z arkusza blachy pod kątem α w stosunku do kierunku walcowania, wówczas naprężenie plastycznego płynięcia σ w funkcji kierunku α można przedstawić jako następującą zależność

$$\sigma(\alpha) = [F\sin^4\alpha + G\cos^4\alpha + H(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + 2N\sin^2\alpha\cos^2\alpha]^{-1/2}. \tag{4}$$

Równocześnie w przypadku płaskiego stanu naprężenia, stosunek odkształcenia w kierunku poprzecznym do osi wyciętej pod kątem α próbki do odkształcenia po grubości blachy wyraża się zależnością

$$q = \frac{H(2N - F - G - 4H)\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{F\sin^2\alpha + G\cos^2\alpha}. \tag{5}$$

Geometryczne przedstawienie warunku (2) w postaci pewnej powierzchni różni się nieco od elipsoidy (3). Kilka tego typu powierzchni dla różnych materiałów anizotropowych zostało przedstawionych w pracy [1].

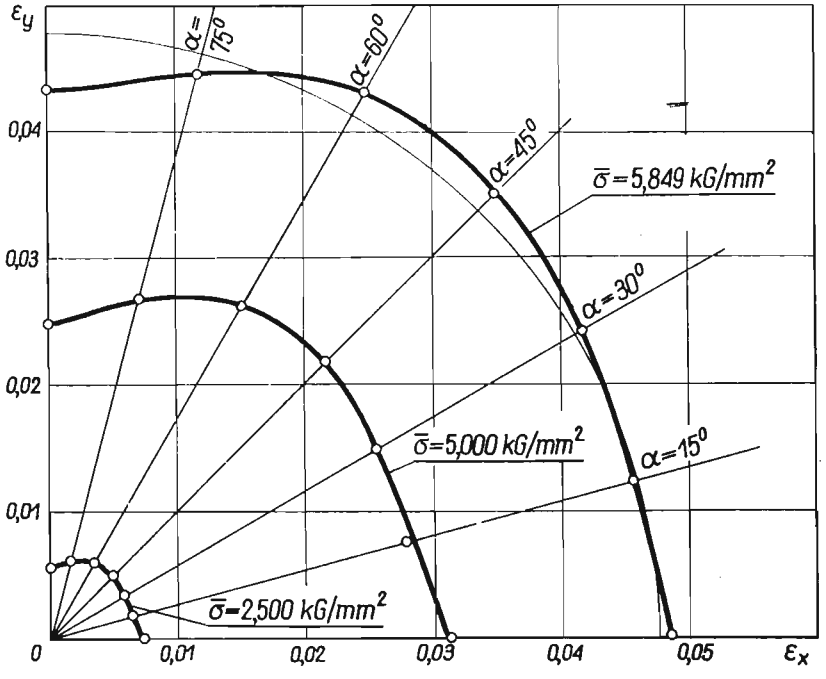
Celem obecnej pracy jest dyskusja stwierdzonego doświadczalnie pewnego przypadku anizotropii blachy z technicznie czystego aluminium w stanie wyżarzonym.

Eksperymenty przeprowadzono w następujący sposób. Arkusz blachy aluminiowej (99,6% Al) o grubości $g = 1{,}40$ mm pocięto na duże próbki o wymiarach 250×300 mm i następnie wyżarzono rekrystalizacyjnie w temperaturze 450°C w czasie jednej godziny. Tak przygotowane próbki służyły bądź do pocięcia na małe próbki celem przeprowadzenia prób rozciągania w siedmiu kierunkach w odniesieniu do kierunku walcowania, bądź do rozciągania w postaci dużej próbki w kierunku zgodnym z kierunkiem walcowania, a następ-

nie do dalszych prób rozciągania dla kolejnych siedmiu kierunków. W ten sposób badano anizotropię odkształceniową lub wpływ wstępnego odkształcenia przy $\alpha = 0$ (kierunek wstępnego rozciągania pokrywa się z kierunkiem walcowania) na późniejszy stan anizotropii blachy. Podobną metodę badań, jednak w innym celu, zastosowano w pracy [6].

Duże próbki rozciągano w specjalnych uchwytach na zrywarce hydraulicznej typu ZD-10 z automatyczną rejestracją wydłużenia za pomocą urządzenia typu Mke z tensometrem indukcyjnym. Taka technika eksperymentu umożliwiała uzyskiwanie dokładnych krzywych umocnienia do odkształcenia maksymalnego $\varepsilon_{max} \approx 0{,}05$; baza tensometru $l_0 = 20$ mm. Mniejsze próbki rozciągano na odpowiednio mniejszej maszynie. Wszystkie doświadczenia przeprowadzano w przybliżeniu stałej prędkości odkształcenia $\dot{\varepsilon} = 8{,}3 \cdot 10^{-3}\text{sek}^{-1}$.

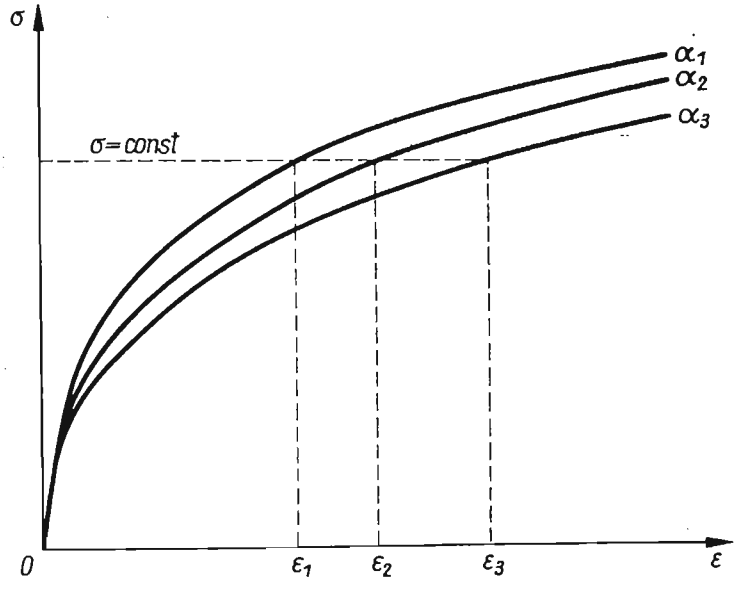
Jako jeden z wyników doświadczeń przeprowadzonych dla badanego aluminium w stanie wyżarzonym uzyskano wykresy biegunowe wielkości odkształceń w funkcji kierunku α przy stałej średniej wartości naprężenia $\bar{\sigma} = \text{const}$, ($\bar{\sigma} = 2{,}500$ kG/mm^2) oraz $\bar{\sigma} = 5{,}849$ kG/mm^2. Wykres przedstawiono na rys. 1. Korzyści z przedstawienia



Rys. 1. Wykres biegunowy wielkości odkształceń w funkcji kierunku α dla stałej wartości naprężenia $\bar{\sigma} = 5{,}849$ kG/mm^2 oraz $\bar{\sigma} = 2{,}500$ kG/mm^2; $\alpha = 0°$ jest kierunkiem walcowania. Poszczególne punkty stanowią średnie dla trzech próbek

własności anizotropowych w takich współrzędnych przy większych odkształceniach plastycznych wynikają z rys. 2 i są oczywiste, gdyż wówczas anizotropia jest bardziej wyraźnie widoczna. Podobne wykresy sporządzono również dla innych wartości naprężeń uzyskując podobne krzywe. Na podstawie rys. 1 można stwierdzić, że badana blacha

aluminiowa ma najwyższe własności wytrzymałościowe w kierunku prostopadłym do kierunku walcowania, tj. dla $\alpha = 90°$. Dla tego kierunku krzywa umocnienia leży najwyżej. Minimum własności wytrzymałościowych obserwuje się w zakresie $45° \leqslant \alpha \leqslant 60°$, natomiast dla kierunku walcowania własności wytrzymałościowe są zbliżone do wartości średniej. Średnią wartość wydłużenia dla $\bar{\sigma} = 5{,}849$ kG/mm^2 zaznaczono łukiem okręgu cienką linią.



Rys. 2. Schematyczne wyjaśnienie sposobu w jaki otrzymano rys. 1

Pamiętając o zależności (4) dla płaskiego stanu naprężenia należy stwierdzić, iż aby wyznaczyć parametry anizotropii F, G, H, N należałoby znać wartości naprężenia plastycznego płynięcia dla czterech wybranych kierunków. Jednak zagadnienie to jest niewyznaczalne w ten sposób, gdyż nawet w płaskim stanie naprężenia stałe anizotropii F, G oraz H są również funkcjami naprężenia plastycznego płynięcia w kierunku z, tj. po grubości blachy. Z tego powodu należy równocześnie uwzględniać równanie (5).

Celem wyznaczenia stałych anizotropii dla badanego aluminium, przyjęto zgodnie z rys. 1 charakterystyczne wartości naprężenia plastycznego płynięcia dla trzech kątów α, a mianowicie dla $\alpha = 0°, \sigma(0°)$; dla $\alpha = 60°$, $\sigma(60°) = \sigma_{\min}$; dla $\alpha = 90°$, $\sigma(90°) = \sigma_{\max}$. W ten sposób warunek (5) dla $\alpha = 0°$ i równanie (4) dla trzech podanych wartości kątów α dostarczają układu czterech równań z niewiadomymi F, G, H, N. Otrzymano następujący układ równań

$$
\begin{aligned}
qG - H &= 0, \\
G + H &= \frac{1}{\sigma^2(0°)}, \\
F + H &= \frac{1}{\sigma^2(90°)},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$9F+G+4H+6N = \frac{16}{\sigma^2(60°)}.$$

W wyniku rozwiązania układu równań (6) otrzymuje się szukane parametry anizotropii

$$F = \frac{1}{\sigma^2(90°)} - \frac{q}{1+q}\frac{1}{\sigma^2(0°)},$$

$$G = \frac{1}{1+q}\frac{1}{\sigma^2(0°)},$$

$$H = \frac{q}{1+q}\frac{1}{\sigma^2(0°)},$$

$$N = \frac{10q-2}{12(1+q)}\frac{1}{\sigma^2(0°)} + \frac{8}{3}\frac{1}{\sigma^2(60°)} - \frac{3}{2}\frac{1}{\sigma^2(90°)}.$$

Dla znalezienia liczbowych wartości współczynników anizotropii wybrano z danych doświadczalnych następujące wartości $\sigma(\alpha)$

$$\sigma(0°) = 5{,}90 \text{ kG/mm}^2,$$
$$\sigma(60°) = 5{,}77 \text{ kG/mm}^2,$$
$$\sigma(90°) = 6{,}30 \text{ kG/mm}^2.$$

Wszystkie dane odnoszą się do wartości odkształcenia $\varepsilon_x \approx 0{,}05$. Zmierzono również dla jednej serii próbek wartości q; średnia wartość q dla $\varepsilon_x = 0{,}05$ wynosi $q \approx 1{,}05$. W wyniku obliczeń uzyskano następujące wartości liczbowe współczynników anizotropii dla $\varepsilon = 0{,}05$:

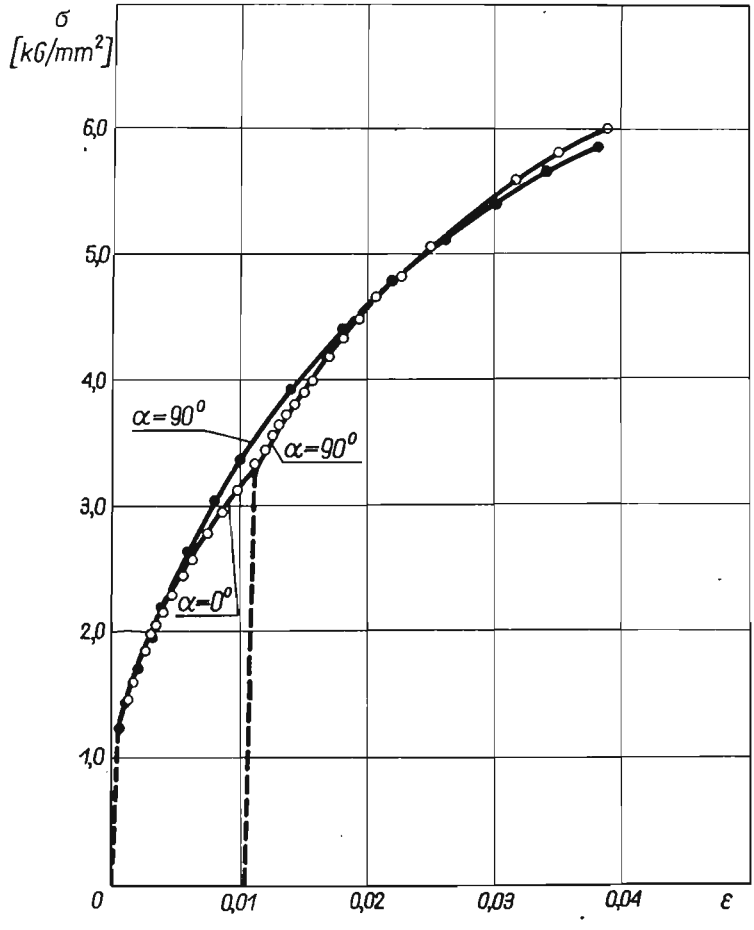
$$F = 0{,}01048 \text{ mm}^4/\text{kG}^2,$$
$$G = 0{,}01401 \text{ mm}^4/\text{kG}^2,$$
$$H = 0{,}01471 \text{ mm}^4/\text{kG}^2,$$
$$N = 0{,}06613 \text{ mm}^4/\text{kG}^2.$$

Jak wspomniano poprzednio, przeprowadzono również badania celem stwierdzenia wpływu wstępnego odkształcenia dla $\alpha = 0°$ (odkształcenie wstępne zgodne z kierunkiem walcowania) na późniejsze własności anizotropowe blachy. W tym celu duże próbki odkształcano wstępnie do trzech wartości odkształceń ε_0; $(\varepsilon_0)_1 \approx 0{,}01$, $(\varepsilon_0)_2 \approx 0{,}03$, $(\varepsilon_0)_3 \approx 0{,}05$, dalej wycinano próbki mniejsze i poddawano je dalszemu odkształcaniu dla pozostałych sześciu kierunków. Wartości wybranych kątów podano na rys. 1. Na wykresach rys. 3 i 4 przedstawiono uzyskane wyniki dla $\alpha = 0°$ i $\alpha = 90°$. Ponieważ tensometr indukcyjny wraz z układem rejestrującym został przystosowany do pomiaru odkształceń większych, przeto otrzymane krzywe umocnienia nie są zbyt dokładne w obszarze odkształceń sprężystych, z tego też powodu te części krzywych zaznaczono liniami przerywanymi.

W wyniku tych doświadczeń można stwierdzić, że odkształcanie wstępne blachy wykazującej cechy anizotropii odkształceniowej w kierunku słabszym, tj. dla $\alpha = 0°$, powoduje równoczesne bardziej intensywne umacnianie się tej blachy w kierunku prostopadłym, tj. dla $\alpha = 90°$. Podczas ponownego odkształcania dla $\alpha = 90°$ omawiany efekt daje się zauważyć jednak wyłącznie przy większych wartościach odkształcenia ε^*, tj. około $\varepsilon^* \geqslant \geqslant 0{,}5\%$ dla odkształcenia wstępnego $\varepsilon_0 \approx 0{,}05$. Przy mniejszych odkształceniach dodat-

kowych ε^* efekt ten może pozostać w ogóle niezauważony i materiał mógłby być uważany za w przybliżeniu izotropowy. Anizotropia odkształceniowa może pozostawać również niezauważalna dla stanu wyżarzonego przy małych wartościach odkształceń początkowych. Zagadnienie to jest szczególnie ważne z punktu widzenia weryfikacji doświadczalnej warunków plastyczności dla materiałów odkształconych wstępnie.

Podane fakty prowadziłyby do dalszych wniosków, a mianowicie po pierwsze, przy obciążeniach proporcjonalnych ze stanu wyżarzonego powierzchnia plastyczności, posiadająca początkowo w obecnym przypadku kształt zbliżony do elipsoidy, stopniowo,



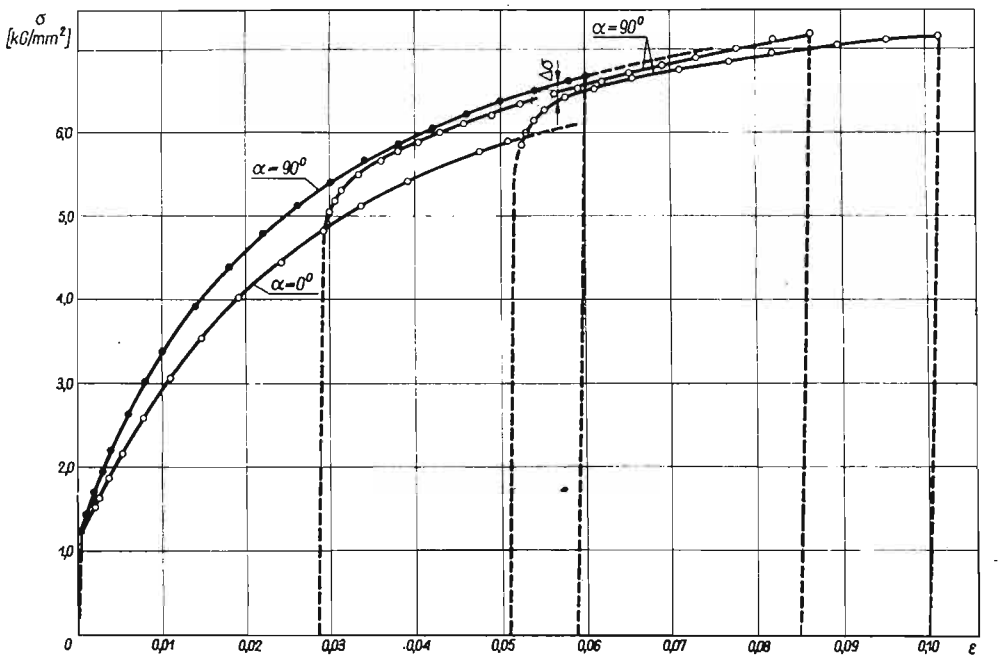
Rys. 3. Krzywe umocnienia badanej blachy aluminiowej dla dwóch kierunków, $\alpha = 0°$ oraz $\alpha = 90°$; kierunek równoległy i prostopadły do kierunku walcowania; ● uśredniona krzywa umocnienia z trzech prób dla $\alpha = 90°$, ○ krzywa umocnienia ze zmianą kierunku rozciągania, odkształcenie wstępne $\varepsilon_0 \approx 0{,}01$ dla $\alpha = 0°$, a następnie dalsze odkształcanie dla $\alpha = 90°$

w miarę wzrostu odkształcenia deformuje się odbiegając coraz bardziej od kształtu początkowego. Jednak proces deformacji elipsoidy przebiega w ten sposób, że kolejne bryły są podobne. Fakt ten stwierdzono doświadczalnie, gdy sporządzono wykres przedstawiony na rys. 5. Na wykresie tym zaznaczono punktami dla trzech próbek wartości stosunku

$$\chi = \frac{\sigma(90°)}{\sigma(0°)}$$

w funkcji odkształcenia ε; wykres odnosi się do obciążania proporcjonalnego. Otrzymano praktycznie stałą wartość χ, $\bar{\chi} = 1{,}088$, oprócz małych wartości odkształceń, gdzie wartość χ powinna być zbliżona do jedności.

Po drugie, przy nagłej zmianie kierunku obciążania materiał «zapomina» stopniowo o tej zmianie, co przejawia się w stopniowym zbliżaniu się dwóch krzywych uzyskanych dla jednakowej wartości α, np. $\alpha = 90°$. Przy czym jedna z tych krzywych odnosi się do



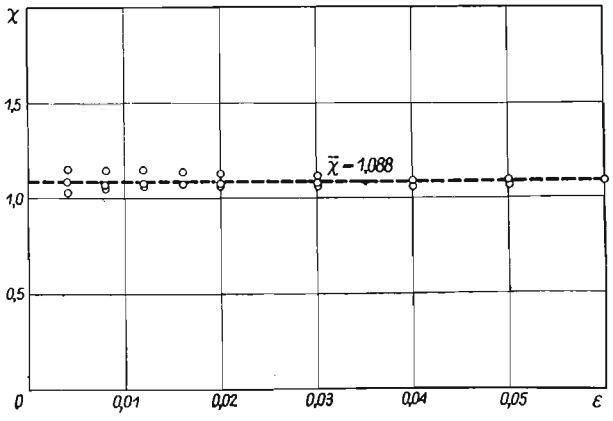
Rys. 4. Krzywe umocnienia badanej blachy aluminiowej dla $\alpha = 0°$ oraz $\alpha = 90°$; ● uśredniona krzywa umocnienia z trzech prób rozciągania dla $\alpha = 90°$, ○ krzywe umocnienia ze zmianą kierunku rozciągania, odkształcenie wstępne $\varepsilon_0 \approx 0{,}03$ oraz $\varepsilon_0 \approx 0{,}05$ dla $\alpha = 0°$, następnie dalsze odkształcenie dla $\alpha = 90°$

stałej wartości α, druga do zmienianej podczas procesu deformacji. Należy podkreślić, że zaobserwowany efekt pamięci nie ma nic wspólnego z efektem pamięci reologicznej wywołanej lepkością.

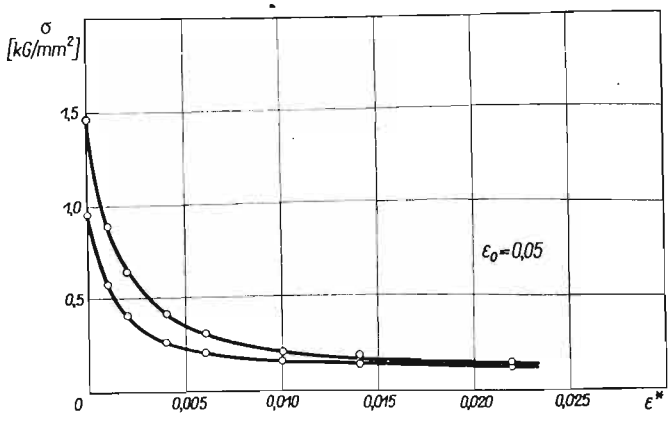
Funkcje «zapominania» o zmianie kierunku α uzyskane dla dwóch próbek przedstawiono na rys. 6; odkształcenie wstępne dla tych próbek wynosi $\varepsilon_0 \approx 0{,}05$. Z rysunku wynika, że odkształcenie dodatkowe ε^*, $\varepsilon^* \approx 0{,}01$ można praktycznie uznać za wartość powyżej której materiał praktycznie zapomniał o zmianie kierunku odkształcenia; oczywiście stwierdzenie to odnosi się wyłącznie do wartości odkształcenia wstępnego $\varepsilon_0 \approx 0{,}05$. Przez $\Delta\sigma$ oznaczono $\Delta\sigma = \sigma(90°) - \sigma^*(90°)$; $\sigma^*(90°)$ oznacza naprężenie plastycznego płynięcia krzywej umocnienia po zmianie kierunku z $\alpha = 0°$ do $\alpha = 90°$. Dla mniejszych wartości odkształcenia wstępnego ε_0 efekt praktycznie całkowitego zapominania zachodzi przy nieco mniejszych wartościach odkształceń dodatkowych ε^*. Przy czym jako definicję

całkowitego zapominania przyjęto, że $\Delta\sigma$ stanowi około 10% wartości początkowej dla $\varepsilon^* = 0$.

Równocześnie należy dodać, że podobny efekt zapominania, jednak w przypadku zmiany znaku odkształcenia przy ścinaniu, zaobserwowano dla miedzi w pracy [4].



Rys. 5. Wykres stosunku $\chi = \dfrac{\sigma(90°)}{\sigma(0°)}$ w funkcji odkształcenia. Dla trzech próbek otrzymano praktycznie stałą wartość χ dla $\varepsilon > 0{,}005$, $\bar{\chi} = 1{,}088$



Rys. 6. Funkcje «zapominania« $\Delta\sigma = \Delta\sigma(\varepsilon^*)$ dla dwóch próbek przy $\alpha = 90°$. ε^* oznacza odkształcenie dodatkowe liczone od momentu zmiany kierunku rozciągania, ε_0 odkształcenie wstępne, $\Delta\sigma$ oznacza przyrost naprężenia zgodnie z rys. 5

Zarówno przedstawione fakty jak i dyskusja wskazują, że należałoby podjąć dalsze badania nad zjawiskiem anizotropii odkształceniowej ze szczególnym uwzględnieniem wpływu tego efektu na warunek plastyczności. Badania takie pozwoliłyby uściślić na gruncie teorii plastyczności propozycje opisów zachowania się ciał anizotropowych.

Literatura cytowana w tekście

1. Е. К. Ашкенази, *Прочность анизотропных древесных и синтетических материалов*, Лесная Промышленность, Москва 1966.
2. R. Hill, *Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, second ed., 1956.
3. R. Mises, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Zeit. für Angew. Math. u. Mech., 3, **8** (1928), 161.
4. Z. Marciniak, *Influence of the sign change of the load on the strain hardening curve of a copper test piece subject to torsion*, Arch. Mech. Stos., 6, **13** (1961), 743.
5. W. Olszak, W. Urbanowski, *Ortotropia i niejednorodność w teorii plastyczności*, Arch. Mech. Stos., 1, **8** (1956), 85.
6. W. Szczepiński, *On the effect of plastic deformation on yield condition*, Arch. Mech. Stos., 2, **15** (1963), 275.

Р е з ю м е

О НЕКОТОРОМ СЛУЧАЕ АНИЗОТРОПИИ

Работа является анализом некоторого случая анизотропии дла листового алюминия в отожженном состоянии. Обсуждение ограничивается для случая деформированной анизотропии, т. е. анизотропии приобретенной во время процесса, деформации образцов, в противоположность с естественной анизотропией, существующей в материале до начала исследований.

Приводились две серии экспериментов. В первой серии, образцы подвергались растяжению в отожженном состоянии в семи выбранных направлениях по отношению к прокатке. На этом основании, определяются коэффициенты анизотропии для плоского напряженного состояния. Во второй серии, деформированные образцы по направлению к прокатке, подвергались добавочному растяжению в других направлениях. В результате этих экспериментов, наблюдался эффект «забывания» об изменении направления деформации.

S u m m a r y

ON A CERTAIN CASE OF ANISOTROPY

This work represents an analysis of a certain case of anisotropy for an annealed aluminium sheet. The entire analysis is focused on the case when anisotropy takes place during the testing, c ntrary to the case when a tested material exhibits anisotropy before the testing. Two series of experiments hav been carried out. In the first series the stress-strain characteristics for seven directions were taken. On this basis the anisotropy coefficients were obtained. In the second series, the specimens deformed in the rolling direction were reloaded in six different directions. As a result of reloading the «fading memory» effects were observed

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 października 1968 r. po uzupełnieniu (dnia 7 października 1967 r. po raz pierwszy)

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 7 (1969)

ANALIZA UKŁADU WIBRO-UDERZENIOWEGO Z NIELINIOWĄ CHARAKTERYSTYKĄ SPRĘŻYSTĄ

ZBIGNIEW WIŚNIEWSKI (GDAŃSK)

Wykaz ważniejszych oznaczeń

S pole powierzchni dna tłoka elementu sprężystego,
l maksymalna odległość pomiędzy dnem tłoka a dnem cylindra,
p_0 ciśnienie w przestrzeni sprężania przy $X = l$,
$\varkappa$ wykładnik adiabaty,
X przemieszczenie masy drgającej,
$\dot{X}$ prędkość masy drgającej,
$\ddot{X}$ przyspieszenie masy drgającej,
x bezwymiarowe przemieszczenie,
$\dot{x}$ bezwymiarowa prędkość,
$\ddot{x}$ bezwymiarowe przyspieszenie,
t czas,
ω częstość siły wymuszającej,
φ kąt przesunięcia fazowego pomiędzy siłą wymuszającą i przemieszczeniem,
R współczynnik restytucji,
V prędkość uderzenia masy drgającej o ogranicznik,
v bezwymiarowa prędkość uderzenia,
X_0 luz pomiędzy częścią uderzającą a ogranicznikiem,
x_0 luz bezwymiarowy,
F_0 amplituda siły wymuszającej,
Q ciężar masy drgającej,
n stosunek okresu ruchu do okresu siły wymuszającej.

1. Wprowadzenie

Jednym z kierunków prac nad rozwojem konstrukcji wibro-uderzeniowych urządzeń do pogrążania pali (tzw. wibromłotów) były badania układów z nieliniowymi elementami sprężystymi. Celem zastosowania takich elementów było uzyskanie możliwości regulacji częstości uderzeń, co mieć może istotne znaczenie dla poprawy efektywności pracy wibromłotów.

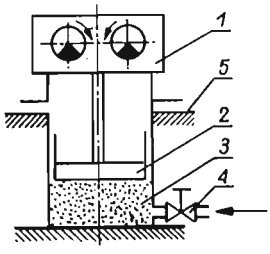
Bardzo obszerna bibliografia dotycząca układów wibro-uderzeniowych dotyczy w zasadzie jedynie takich układów, które opisane są liniowymi (w przedziale czasu między uderzeniami) równaniami. Metody stosowane do badania takich układów nie dadzą się zastosować w przypadkach, gdy w równaniach ruchu występują elementy nieliniowe.

W niniejszej pracy rozważa się możliwość badania ruchu układu wibro-uderzeniowego z nieliniową charakterystyką sprężystą za pomocą znanych przybliżonych metod analitycznych oraz pewną metodą numeryczną zaproponowaną przez autora.

2. Sformułowanie zagadnienia

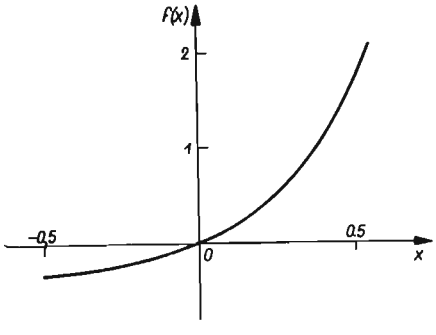
Badać będziemy układ wibro-uderzeniowy zawierający element sprężysty posiadający tę własność, że umożliwia on zmianę sztywności, a więc pośrednio i częstości uderzeń układu w sposób ciągły.

Schemat elementu sprężystego przedstawiono na rys. 1. Do wibratora *1* zamocowano



Rys. 1

tłok *2* poruszający się w cylindrze *3* połączonym sztywno z nieruchomym ogranicznikiem. Do przestrzeni między tłokiem a cylindrem dostarcza się poprzez zawór *4* powietrze. Gdy zawór jest zamknięty, tłok poruszając się w kierunku dna cylindra, spręża powietrze, którego warstwa znajdująca się między tłokiem a dnem cylindra tworzy sprężyste zawieszenie masy zamocowanej do tłoka. Ruch tłoka wymuszany jest siłą wywołaną przez obrót niewyważonych mas wibratora bezwładnościowego.



Rys. 2

Gdy siła wymuszająca i ciśnienie powietrza są odpowiednio dobrane, ruch tłoka ma charakter oscylacyjny, a przy dostatecznie dużej amplitudzie drgań następują zderzenia masy drgającej z ogranicznikiem na powierzchni *5*.

Przy założeniu, że zmiana ciśnienia i objętości powietrza ma charakter adiabatyczny, zależność siły sprężystej od położenia tłoka (rys. 2) określa związek

$$N = Sp_0\left[\left(1-\frac{X}{l}\right)^{-\varkappa}-1\right]. \tag{2.1}$$

Rozpatrzymy ruch masy drgającej, zawieszonej na opisanym wyżej elemencie sprężystym, przy następujących założeniach:

1) możliwe są drgania okresowe o okresie równym okresowi siły wymuszającej lub jego krotności;

2) drgania wymuszone są siłą harmoniczną skierowaną wzdłuż osi tłoka elementu sprężystego, przy czym częstość siły wymuszającej jest stała w ciągu cyklu ruchu;

3) uderzenia masy drgającej o ogranicznik zachodzą w przedziale czasu małym w porównaniu z okresem ruchu;

4) zderzenie charakteryzuje się współczynnikiem restytucji $0 < R < 1$, który zależy wyłącznie od rodzaju materiałów zderzających się części;

5) masa ogranicznika jest nieskończenie wielka i nie bierze udziału w drganiach;

6) w przedziale czasu między uderzeniami na układ nie działają żadne siły oporu;

7) nie występują wzajemne oddziaływania układu i źródła energii;

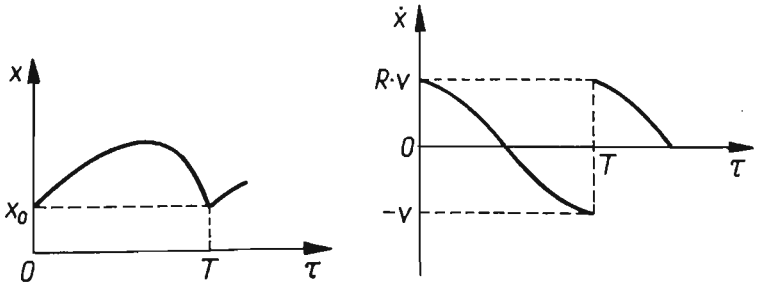
8) masa drgająca skupiona jest w środku masy, przy czym ruch mas wibratora nie wpływa na położenie środka masy;

9) wszystkie parametry układu mają charakter zdeterminowany. Zgodnie z powyższymi założeniami ruch układu opisywać będzie równanie

$$\frac{Q}{g}\ddot{X}+Sp_0\left[\left(1-\frac{X}{l}\right)^{-\varkappa}-1\right] = F_0\cos(\omega t+\varphi). \tag{2.2}$$

Warunki okresowości ruchu mają postać (rys. 3)

$$\begin{aligned} &X(0) = X_0 \qquad X\left(\frac{2\pi}{\omega}n\right) = x_0, \\ &X(0) = RV \qquad X\left(\frac{2\pi}{\omega}n\right) = -V. \end{aligned} \tag{2.3}$$



Rys. 3

Charakterystykę sprężystą (2.1) aproksymować można wielomianem szóstego stopnia dla $\frac{x}{l} \in [0 \div 0{,}8]$.

W pierwszej fazie analizy ruchu układu ograniczymy się do badania charakterystyki w postaci wielomianu trzeciego stopnia.

Otrzymamy więc

$$N(X) = A^2X + BX^3. \tag{2.4}$$

Wprowadzając podstawienia

$$X = \frac{F_0 g}{Q\omega^2}x; \qquad \tau = \omega t, \tag{2.5}$$

otrzymamy równanie ruchu we współrzędnych bezwymiarowych

$$\ddot{x} + a^2x + bx^3 = \cos(\tau + \varphi), \tag{2.6}$$

gdzie

$$a^2 = \frac{Sp_0 A^2 g}{Q\omega^2}; \qquad b = \frac{Sp_0 BF_0^2 g^3}{Q^3\omega^2}. \tag{2.7}$$

Warunki okresowości przybiorą teraz postać

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, & x(2\pi n) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= Rv, & \dot{x}(2\pi n) &= -v, \end{aligned} \tag{2.8}$$

przy czym oznaczono

$$v = \frac{F_0 g}{Q\omega}V.$$

3. Wybór metody rozwiązania

Znane metody rozwiązywania równań różniczkowych nieliniowych nie są w pełni ogólne, odnoszą się bowiem do pewnych określonych klas zagadnień. Badanie układów silnie nieliniowych prowadzi się w zasadzie wyłącznie metodami numerycznymi, gdyż przybliżone metody analityczne odnoszą się przeważnie do układów słabo nieliniowych.

Stosowanie metody numerycznej do badanego układu wibro-uderzeniowego wymaga znajomości warunków początkowych, których w rozpatrywanym przypadku nie znamy, ponieważ warunki początkowe odpowiadające rozwiązaniu spełniającemu warunki okresowości są funkcją parametrów układu [2, 3].

Na przykładzie dwóch typowych metod badania układów nieliniowych wykażemy, że z uwagi na specyficzne cechy układów wibro-uderzeniowych należy poszukiwać nowych metod.

3.1. Metoda kolejnych przybliżeń. Metoda kolejnych przybliżeń stosowana jest zwykle do równań zawierających nieliniowość w postaci wielomianu [1].

Jako pierwszy krok przybliżenia przyjmiemy całkę równania

$$\ddot{x}_1 + a^2x_1 = \cos(\tau + \varphi) \tag{3.1}$$

z warunkami okresowości (2.8).

Rozwiązanie takiego zagadnienia dla $a \neq 1$ podano w pracy [2]. Mamy więc

$$X_1(\tau) = A\cos(a\tau+\psi)+\frac{1}{a^2-1}\cos(\tau+\varphi) \tag{3.2}$$

przy czym oznaczono

$$A = \frac{v(1+R)}{2a}\frac{1}{\sin\pi a}; \quad \psi = -\pi a$$

$$\sin\varphi = (a^2-1)\frac{v(1-R)}{2}; \quad \cos\varphi = (a^2-1)\left[x_0-\frac{v(1+R)\operatorname{ctg}\pi na}{2a}\right],$$

(3.3)

$$v = \frac{2}{1-R}\,\frac{x_0 f+\sqrt{\dfrac{1+f^2}{(a^2-1)^2}-x_0^2}}{1+f^2}; \quad f = \frac{1+R}{1-R}\,\frac{\operatorname{ctg}\pi na}{a}.$$

W drugim kroku iteracji podstawiamy do równania (2.6) związek (3.2)

$$\ddot{x}_2+a^2x_2 = \cos(\tau+\varphi)-bx_1^3(\tau), \tag{3.4}$$

a stąd po przekształceniach otrzymujemy

$$\ddot{x}+a^2x_2 = A_1\cos(\tau+\varphi)-A_2\cos(a\tau+\psi)-A_3\cos 3(\tau+\varphi)-A_4\cos 3(a\tau+\psi)-$$
$$-A_5\cos\alpha-A_6\cos\beta-A_7\cos\gamma-A_8\cos\delta, \tag{3.5}$$

gdzie

$$A_1 = 1-\frac{3b}{(a^2-1)^3}-\frac{3bA^2}{2(a^2-1)}; \quad A_2 = 3b\left[\frac{A^3}{4}-\frac{A}{2(a^2-1)}\right];$$

$$A_3 = \frac{b}{4(a^2-1)^3}; \quad A_4 = \frac{bA^3}{4}; \quad A_5 = A_6 = \frac{3A^2b}{4(a^2-1)};$$

(3.6)

$$A_7 = A_8 = \frac{3Ab}{4(a^2-1)^2};$$

$$\alpha = \varphi+2\psi+(2a+1)\tau; \quad \beta = (2a-1)\tau+2\psi-\varphi;$$

$$\gamma = (a+2)\tau+\psi+2\varphi; \quad \delta = (2-a)\tau+2\varphi-\psi.$$

Całka ogólna równania (3.5) ma postać

$$x_2 = A\cos(a\tau+\psi)+C_1\cos(\tau+\varphi)-C_2\tau\sin(a\tau+\psi)+C_3\cos 3(\tau+\varphi)+$$
$$+C_4\cos 3(a\tau+\psi)+C_5\cos\alpha+C_6\cos\beta+C_7\cos\gamma+C_8\cos\delta, \tag{3.7}$$

gdzie

$$C_1 = \frac{A_1}{a^2-1}; \quad C_2 = \frac{A_2}{2a}; \quad C_3 = \frac{A_3}{9-a^2}; \quad C_4 = \frac{A_4}{8a^2};$$

$$C_5 = \frac{A_5}{1+4a+3a^2}; \quad C_6 = \frac{A_6}{3a^2-4a+1}; \quad C_7 = \frac{A_7}{4(a+1)}; \tag{3.8}$$

$$C_8 = \frac{A_8}{4(1-a)}.$$

Podstawiając do (3.7) warunki okresowości (2.8) otrzymujemy układ czterech równań dla wyznaczenia stałych: A, v, ψ, φ:

$$
\begin{cases}
A\cos\psi+C_1\cos\varphi-C_2\sin\psi+C_3\cos 3\varphi+C_4\cos 3\psi+C_5\cos(\varphi+2\psi)+ \\
\qquad +C_6\cos(2\psi-\varphi)+C_7\cos(\varphi+2\psi)+C_8\cos(2\varphi-\psi)=x_0; \\
-Aa\sin\psi-C_1\sin\varphi-C_2\cos\psi-3C_3\sin 3\varphi-3C_4\sin 3\psi- \\
\qquad -(1+2a)C_5\sin(\varphi+2\psi)-(2a-1)C_6\sin(2\psi-\varphi)-(a+2)C_7\sin(\psi+2\varphi)- \\
\qquad -(2-a)C_8\sin(2\varphi-\psi)=Rv; \\
A\cos(2\pi na+\psi)+C_1\cos\varphi-C_2\sin(2\pi na+\psi)+C_3\cos 3\varphi+C_4\cos 3(2\pi na+\psi)+ \\
\qquad +C_5\cos[\varphi+2(2\pi na+\psi)]+C_6\cos[2(2\pi na+\psi)-\varphi]+C_7\cos(2\pi na+\psi+\varphi)+ \\
\qquad +C_8\cos(2\varphi-2\pi na-\psi)=x_0; \\
-Aa\sin(2\pi na+\psi)-C_1\sin\varphi-C_2(2\pi na+\psi)-3C_3\sin 3\varphi- \\
\qquad -3C_4\sin 3(2\pi na+\psi)-(1+2a)C_5\sin[\varphi+2(2\pi na+\psi)]- \\
\qquad -(2a-1)C_6\sin[2(2\pi na+\psi)-\varphi]-(a+2)C_7\cos(2\pi na+\psi+2\varphi)- \\
\qquad -(2-a)C_8\sin(2\varphi-2\pi na-\psi)=-v.
\end{cases}
\tag{3.9}
$$

Równania (3.9) są równaniami przestępnymi.

Rozwiązanie tego układu wymaga, jak wykazała wstępna analiza, około 20 godzin ciągłej pracy maszyny cyfrowej o nominalnej szybkości 200 elementarnych operacji na sekundę. Ponieważ jednak nie ma pewności, czy drugi krok iteracji będzie wystarczająco dokładnym przybliżeniem rozwiązania, zaś następny krok wymagałby nieporównanie bardziej pracochłonnych obliczeń, można stwierdzić, że metoda kolejnych przybliżeń nie prowadzi do pozytywnych wyników.

3.2. Metoda linearyzacji. Spośród wielu wariantów metody linearyzacji do badania układów silnie nieliniowych można stosować jedynie metodę PANOWKO [4], opartą na kryterium energetycznym.

Charakterystykę elementu sprężystego określoną funkcją

$$f(x)=a^2x+bx^3 \tag{3.10}$$

zastępujemy przez wyrażenie

$$f^*(x)=\alpha^2(x+\Delta)$$

gdzie $\Delta=\dfrac{x_0+L}{2}$, zaś L — maksymalne wychylenie masy drgającej od położenia równowagi.

Oznaczmy $$r(x)=f(x)-\alpha^2(x+\Delta),$$

oraz $$m(x)=(x+\Delta)r(x).$$

Wartość współczynnika α^2 wyznaczymy przyjmując kryterium najmniejszej różnicy między charakterystyką (3.10), a charakterystyką układu zlinearyzowanego.

Warunek ten sformułujemy następująco

$$I=\int_{x_0}^{L} m^2(x)\,dx=\min. \tag{3.11}$$

Aby całka (3.11) osiągnęła minimum, musi być

$$\frac{\partial I}{\partial(\alpha^2)}=0,$$

a stąd

$$\alpha^2 = \frac{\int_{x_0}^{L} f(x)(x+\Delta)^3 dx}{\int_{x_0}^{L} (x+L)^4 dx}. \tag{3.12}$$

Oznaczając licznik prawej strony związku (3.12) przez I_1, zaś mianownik przez I_2, otrzymujemy

$$I_1 = \frac{713}{1120} bL^7 + \frac{133}{160} bx_0 L^6 + \frac{162a^2+69bx_0^2}{160} L^5 + \frac{x_0}{16}\left(17a^2+\frac{3}{2}bx_0^2\right)L^4 +$$

$$+\frac{3}{8}x_0^2\left(a^2-\frac{3}{4}bx_0^2\right)L^3 - \frac{x_0^3}{4}\left(a^2+\frac{69}{40}bx_0^2\right)L^2 - \frac{x_0^4}{16}\left(\frac{133}{10}bx_0^2+17a^2\right)L - \tag{3.13}$$

$$-\frac{x_0^5}{80}\left(\frac{713}{14}bx_0^2+81a^2\right),$$

$$I_2 = 242L^5+390L^4x_0+180L^3x_0^2+180L^2x_0^3-390Lx_0^4-242x_0^5.$$

Podstawiając wyrażenia (3.13) do (3.12) otrzymujemy zależność wiążącą współczynnik zlinearyzowanej charakterystyki α^2 oraz amplitudę L. Ponieważ jednak wartość L nie jest znana, do wyznaczenia L konieczne jest dodatkowe równanie.

Aby bezwymiarowe przemieszczenie masy drgającej osiągnęło wartość maksymalną

$$x(\tau, \alpha) = L \tag{3.14}$$

musi być spełniony warunek

$$\dot{x}(\tau, \alpha) = 0. \tag{3.15}$$

Jeśli $\tau = \tau_i$ będzie pierwiastkiem równania (3.15) oraz jeśli spełniony będzie warunek

$$\ddot{x}(\tau_i, \alpha) < 0,$$

to związek (3.14) określać będzie maksimum lokalne przemieszczenia x.

Jednakże równanie (3.15) zawiera nieznaną wartość α, a zatem nie możemy wyznaczyć jego pierwiastków.

Zastosujemy więc następujący sposób postępowania:

1) dla przyjętej wartości $\tau = \tau_i$ wyznaczymy z równania (3.15) odpowiednie wartości $\alpha = \alpha_i$;

2) parę liczb $(\alpha_i; \tau_i)$ podstawimy do (3.14) i obliczymy odpowiadającą wartość $x = x_i$;

3) powtarzając czynności wymienione w p. 1) i 2) dla szeregu wartości τ_i z przedziału $[0; 2\pi n]$ otrzymamy ciąg par wartości $(x_i; \tau_i)$, przy czym jedna z tych wartości x_i jest przybliżeniem amplitudy L;

4) w układzie współrzędnych (α, x) kreślimy przebieg zależności określonej związkiem (3.12) oraz zależności $\alpha(L)$.

Punkt przecięcia się tych dwóch linii wyznacza szukaną parę wartości (α, L). Łatwo udowodnić, że istnieje jeden i tylko jeden punkt przecięcia tych linii (tylko jedna wartość współczynnika α spełniającego warunki linearyzacji).

Linearyzując równanie (2.6) zastępujemy je równaniem

(3.16) $$\ddot{x}+\alpha^2 x = \cos(\tau+\varphi),$$

którego całka [5] ma postać ($n = 1$):

(3.17) $$x = \frac{v(1+R)}{2\alpha}[\operatorname{ctg}\pi\alpha(\cos\alpha\tau-\cos\tau)+\sin\alpha\tau]+x_0\cos\tau-\frac{v(1-B)}{2}\sin\tau,$$

zaś pochodna

(3.18) $$\dot{x} = \frac{v(1+R)}{2}\left[\operatorname{ctg}\pi\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\sin\tau-\sin\alpha\tau\right)+\cos\alpha\tau\right]-x_0\sin\tau-\frac{v(1-R)}{2}\cos\tau.$$

Zrealizowanie wyżej opisanego postępowania wiąże się z dwiema zasadniczymi trudnościami:

1) koniecznością wielokrotnego rozwiązywania układu równań przestępnych o złożonej formie, co wymaga stosowania odpowiednio szybkiej maszyny cyfrowej;

2) sprawdzeniem poprawności rozwiązania, które wymaga możliwości oceny błędu, zaś dla oszacowania błędu trzeba znać wartość kąta przesunięcia fazowego φ, która zależy od warunków początkowych oraz parametrów układu, a więc wymaga znajomości rozwiązania. Oszacowanie dokładności rozwiązania jedynie na podstawie liczbowego porównania charakterystyki nieliniowej i zlinearyzowanej nie daje dostatecznej pewności, czy rozwiązanie równania zlinearyzowanego dostatecznie dobrze przybliża rozwiązanie rzeczywiste.

Tak więc metoda linearyzacji również nie nadaje się do zastosowania do badania nieliniowych układów wibro-uderzeniowych.

4. Metoda próbnego doboru parametrów

Podstawową trudnością związaną z omówionymi wyżej metodami były pracochłonne obliczenia, wymagające stosowania elektronicznej techniki obliczeniowej.

Dalsze poszukiwania prowadzono zatem w kierunku opracowania procesu numerycznego wymagającego możliwie najmniejszej ilości obliczeń.

Ogólnie znane metody numeryczne wymagają znajomości warunków początkowych równania, zaś w rozpatrywanym przypadku warunki początkowe dla rozwiązań okresowych są m.in. funkcją prędkości uderzenia, której nie znamy.

Tak więc omawiana metoda przyjmuje za punkt wyjścia poszukiwanie pary wartości prędkości uderzenia i kąta przesunięcia fazowego, którym odpowiada rozwiązanie okresowe.

Metoda próbnego doboru parametrów przewiduje następujący tok postępowania.

1. Określa się wstępnie obszar I, w którym należy poszukiwać wartości v i φ.

2. Badane równanie modeluje się na maszynie analogowej i wybierając kolejno pary wartości v i φ, którym odpowiadają poszczególne punkty obszaru, obserwuje się rozwiązanie np. na oscyloskopie katodowym.

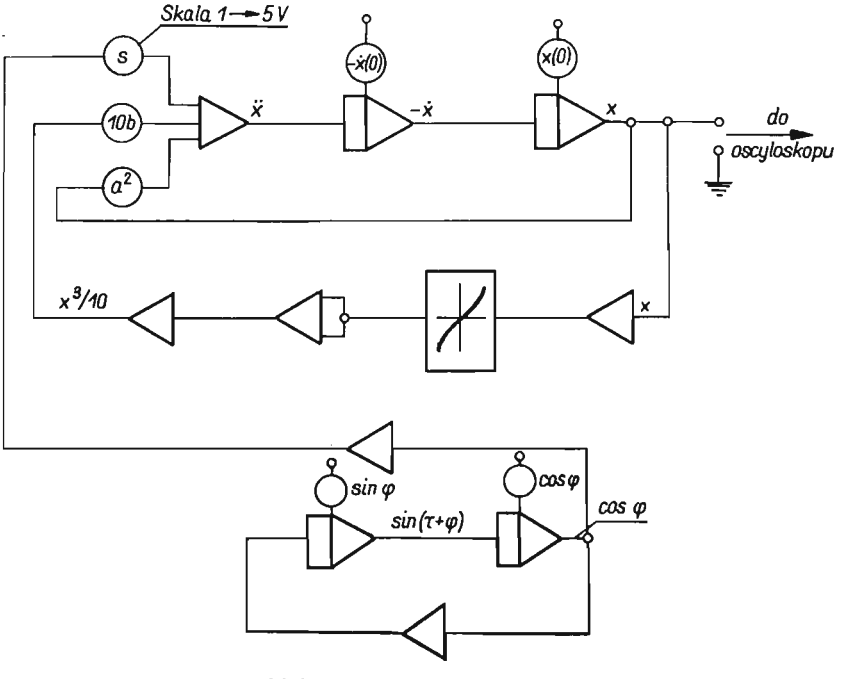
3. Takie postępowanie pozwoli określić poszukiwane rozwiązanie okresowe dla danych wartości x_0 i R, z niewielką dokładnością (ze względu na dość duży błąd modelowania członu nieliniowego rys. 4). Jako wynik prób na maszynie analogowej otrzymamy cztery pary wartości v i φ, określające obszar II, wewnątrz którego poszukiwać będziemy rozwiązania przy pomocy maszyny cyfrowej, co pozwoli uzyskać dokładniejszy wynik.

Opisany tok postępowania obrazują schematy operacyjne na rys. 5 i 6. Zastosowanie maszyny analogowej związane jest z możliwością szybkiej zmiany parametrów, co pozwala na prowadzenie poszukiwań w większym obszarze. Maszyna cyfrowa natomiast pozwala prowadzić obliczenia z większą dokładnością, przy użyciu standartowych metod numerycznych.

Każda próba (zarówno na maszynie analogowej, jak i cyfrowej) obejmuje sprawdzenie trzech warunków

$$x(2\pi n) = x_0; \quad \dot{x}(2\pi n) = -v; \quad x > x_0 \quad \text{dla} \quad \tau \in (0, 2\pi n). \tag{4.1}$$

W przypadku, gdy którykolwiek z warunków (4.1) nie zostanie spełniony, wybiera się następną parę wartości v i φ.



Rys. 4. Schemat blokowy modelu analogowego równania (2.6)

Wobec tego, że dokładność modelowania tak ciągłego, jak i dyskretnego jest ograniczona, warunki (4.1) będą miały postać

$$\begin{aligned} &|x(2\pi n) - x_0| < \varepsilon_\tau, \\ &|\dot{x}(2\pi n) - (-v)| < \varepsilon_v, \\ &|x - x_0| < \varepsilon_x, \end{aligned} \tag{4.2}$$

gdzie: ε_τ; ε_v; ε_x — założone dopuszczalne odchyłki otrzymanych wyników od wartości oczekiwanych.

Omówiony wyżej tok postępowania zilustrujemy przykładem.

Poszukujemy rozwiązania okresowego równania

$$\ddot{x} + 0{,}25x + 0{,}20x^3 = \cos(\tau + \varphi),$$

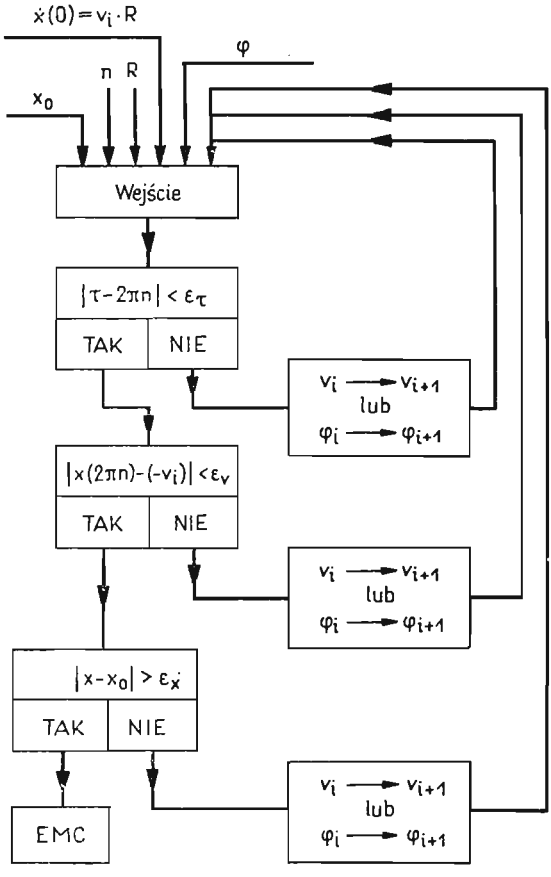
z warunkami okresowości

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0{,}5v,$$
$$x(2\pi) = 0, \qquad \dot{x}(2\pi) = -v,$$

a więc $x_0 = 0, \quad R = 0{,}5, \quad n = 1.$

Badania prowadzono przy pomocy maszyny analogowej ELWAT-1 oraz maszyny cyfrowej ZAM-2 beta.

Wstępnie ustalono, że wartości φ i v poszukiwane będą w zbiorze $I(v, \varphi)$: $v \in [0; 5{,}0]$; $\varphi \in [0; 2\pi]$.



Rys. 5. Schemat operacyjny działań maszyny analogowej

W wyniku badań na maszynie analogowej określono przybliżone rozwiązanie (rys. 7)

$$II(v; \varphi): \quad v \in [2{,}1; 2{,}5]; \quad \varphi \in [2{,}8; 3{,}6].$$

Próby prowadzone na maszynie cyfrowej dały w wyniku wartości

$$v = 2{,}25; \quad \varphi = 3{,}14.$$

Przebieg rozwiązania przedstawiono na rys. 8.

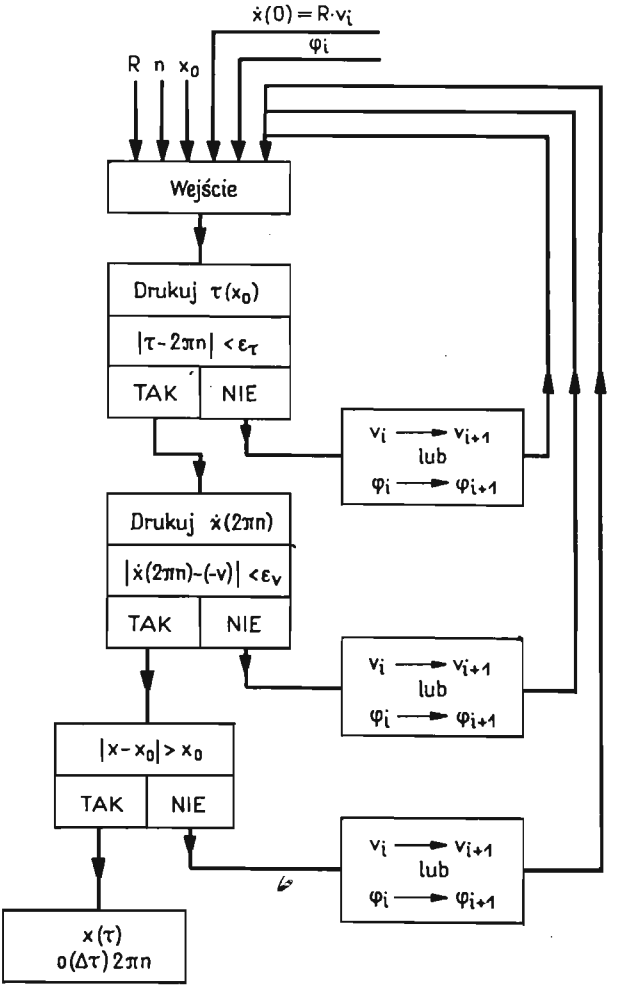
Aby zmniejszyć czas trwania prób negatywnych drukowano wyłącznie wartości początkowe i końcowe, a dopiero po uzyskaniu przebiegu spełniającego warunki okreso-

wości z żądaną dokładnością następowało drukowanie dla dostatecznie małego kroku zmiennej τ.

Wartość współczynnika restytucji R, obliczona jako stosunek modułów początkowej i końcowej wartości prędkości w otrzymanym rozwiązaniu wynosi

$$R = 0{,}498,$$

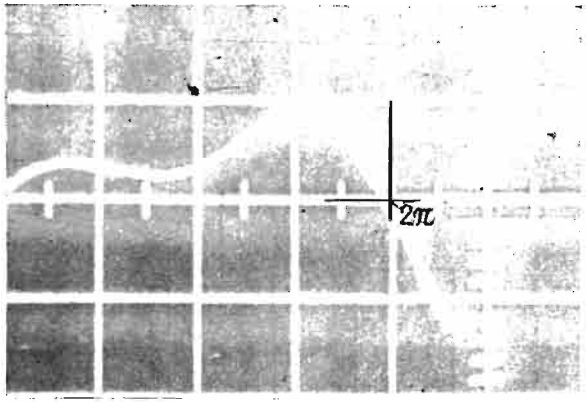
a więc różni się o 0,4% od wartości przyjętej.



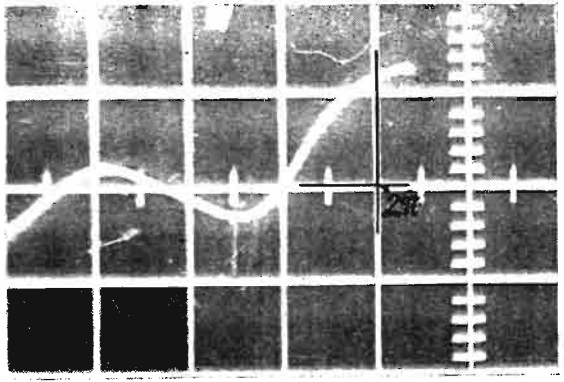
Rys. 6. Schemat operacyjny działań maszyny cyfrowej

Kontynuując próby możnaby oczywiście uzyskać mniejszy błąd (dla szeregu zbadanych przykładów uzyskano rozwiązanie z błędem mniejszym niż 0,1%).

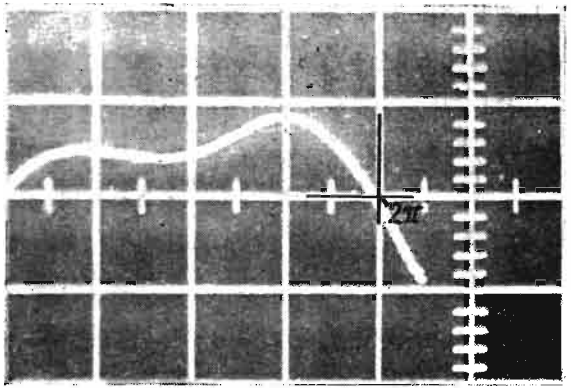
Omawiana metoda pozwala również na uzyskanie pewnych informacji o stabilności strukturalnej badanego układu, a ściślej — o wpływie małych zmian parametrów układu na przebieg rozwiązania. Wprowadzając mianowicie pewne zaburzenia warunków po-



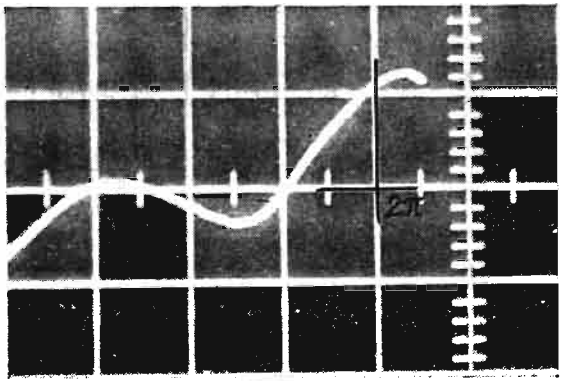
Rys. 7a



Rys. 7b

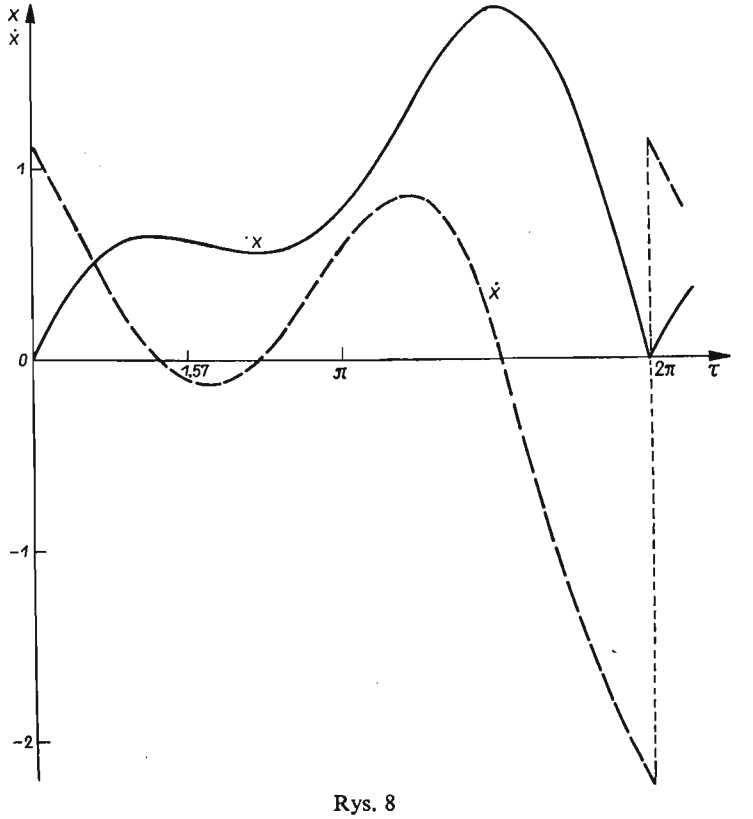


Rys. 7c



Rys. 7d

czątkowych lub parametrów układu można zaobserwować, jak zmienia się przebieg rozwiązania w stosunku do rozwiązania niezaburzonego oraz jak zmienia się różnica w miarę wzrostu ilości cykli ruchu (tablica 1).



Rys. 8

Tablica 1

τ	x_z	$\dot{x}_z$	$x_z - x$
+0,00000	+0,00000	+1,12500	+0,00000
+0,50000	+0,43439	+0,61196	−0,00022
+1,00000	+0,62232	+0,16103	−0,00167
+1,50000	+0,62662	−0,10461	−0,00497
+2,00000	+0,56065	−0,11577	−0,00981
+2,50000	+0,55028	+0,10093	−0,01541
+3,00000	+0,68999	+0,46197	−0,02115
+3,50000	+1,00678	+0,78195	−0,02657
+4,00000	+1,42776	+0,83598	−0,03130
+4,50000	+1,75986	+0,40252	−0,03522
+5,00000	+1,75673	−0,45630	−0,03818
+5,50000	+1,30306	−1,32550	−0,03871
+6,00000	+0,47152	−1,96718	−0,03582
+6,20000	+0,05662	−2,17872	−0,03397

$n = 1$, $a = 0{,}51$, $b = 0{,}21$, $x_0 = 0{,}0$, $R = 0{,}5$, $\varphi = 3{,}14159$, $\Delta\tau = 0{,}05$.

5. Wnioski końcowe

Na podstawie analizy możliwości zastosowania do rozpatrywanego układu różnych metod badania układów nieliniowych stwierdzono, że nie nadają się one do układów wibro-uderzeniowych, zawierających człony nieliniowe.

Zaproponowana w niniejszym artykule metoda pozwala uzyskać przybliżone rozwiązanie numeryczne z dokładnością nie mniejszą niż metody stosowane w innych zagadnieniach nieliniowych.

Omawiana metoda pozwala uzyskać pewne informacje o stabilności strukturalnej, co ma istotne znaczenie ze względu na nieuniknione różnice pomiędzy założonymi a rzeczywistymi wartościami parametrów układu, wynikającymi zawsze przy realizacji technicznej.

Literatura cytowana w tekście

1. W. J. CUNNINGHAM, *Analiza układów nieliniowych*, Warszawa 1962.
2. А. Э. КОБРИНСКИЙ, *Механизмы с упругимы связьями*, Москва 1964.
3. B. KOWALCZYK, *Badanie stabilności strukturalnej układu wibro-uderzeniowego o jednym stopniu swobody*, (w druku)
4. J. G. PANOWKO, *A review of applications of the methods of direct linearization*, Proc. XI Conf. Appl. Mech., Monachium 1964.
5. Z. WIŚNIEWSKI, *Analiza układu wibro-uderzeniowego z nieliniową charakterystyką sprężystą*. Rozprawa doktorska, Politechnika Gdańska, 1967.

Р е з ю м е

АНАЛИЗ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

В работе изучено движение виброударной системы с одной степенью свободы и нелинейной упругой характеристикой.

Рассматриваемая нелинейность типа многочлена по отношению к перемещениям колеблющейся массы получается из адиабатической аппроксимации характеристики упругого элемента применяемого в системе.

Исследуется возможность решения уравнения движения при помощи метода последовательных приближений или метода линеаризации Пановко. Показываются трудности связанные с применением этих методов. Предлагается некоторый численный метод, в котором совместно используются электронные аналоговая и цифровая вычислительные машины.

S u m m a r y

ANALYSIS OF A VIBRATORY-IMPACT SYSTEM WITH NONLINEAR SPRING CHARACTERISTICS

The paper deals with an oscillatory system with one degree of freedom. The vibrating mass is suspended on nonlinear spring, and striking a rigid stop. Two methods of solution are assumed: the perturbation method and Panovko's direct linearization method. On account of difficulties involved, the methods mentioned above had to be replaced by a certain digital method based on cooperation of analog and digital computers.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 lipca 1968 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 7 (1969)

NUMERYCZNE OBLICZANIE WIOTKICH OBROTOWO-SYMETRYCZNYCH POWŁOK PODDANYCH PLASTYCZNEMU PŁYNIĘCIU W ZAKRESIE DUŻYCH ODKSZTAŁCEŃ

JANUSZ ORKISZ, JÓZEF WILK (KRAKÓW)

1. Sformułowanie problemu i uwagi wstępne

W pracy [14] rozważany był problem wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok w świetle teorii płynięcia plastycznego uogólnionej na zakres skończonych odkształceń. Przyjęto że: materiał powłoki jest plastyczny nieściśliwy, izotropowy, obciążenie dowolne obrotowo-symetryczne, a sama powłoka jest wiotka, tj. może znajdować się jedynie w stanie błonowym i przenosić tylko naprężenia rozciągające. Przy powyższych założeniach wyprowadzony został układ quasi-liniowych równań różniczkowych cząstkowych,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\xi\cos\varphi}{ux\cos\psi}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial \xi}=-\frac{p_1}{u}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\xi\cos\varphi}{ux^2\cos\psi}\left(p_2-p_1+\frac{xQ_s}{fu\cos\varphi}\right)-\frac{p_1}{f}\frac{df}{d\xi},\\
&\frac{\partial y}{\partial \xi}=\frac{\xi\sin\varphi}{ux\cos\psi}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}=\frac{\xi}{p_1 ux\cos\psi}\left(\frac{Q_n}{fu}-p_2\frac{\sin\varphi}{x}\right),\\
&u(p_1+p_2)\frac{\partial x}{\partial \tau}+x(2p_2-p_1)\frac{\partial u}{\partial \tau}=0,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

opisujących formę naprężenia i odkształcenia w procesie obciążania takich powłok. W równaniach tych niewiadomymi są współrzędne Eulera punktu powłoki $x(\xi, \tau)$ i $y(\xi, \tau)$, rzeczywiste naprężenia główne $p_1(\xi, \tau)$ i $p_2(\xi, \tau)$, kąt $\varphi(\xi, \tau)$ zawarty między styczną do południka (po odkształceniu) a osią x (rys. 1) oraz sprowadzona grubość powłoki $u(\xi, \tau)$, zmiennymi niezależnymi są: ξ — osiowa współrzędna punktu powłoki oraz τ — parametr wzrostu obciążenia. Szóste równanie, które należy rozpatrywać łącznie z układem (1.1) ma charakter algebraiczny, a jego postać zależy od założonej fizycznej charakterystyki $F(p_1, p_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3)=0$ materiału powłoki. W dalszych rozważaniach przyjmiemy ją dla prostoty obliczeń jako zależność potęgową (μ — stała materiałowa)

$$
p_i=\varepsilon_i^{\mu} \tag{1.2}
$$

między intensywnościami rzeczywistych naprężeń p_i i odkształceń ε_i liczonych w mierze logarytmicznej Hencky'ego. W rozpatrywanym tu płaskim stanie naprężenia

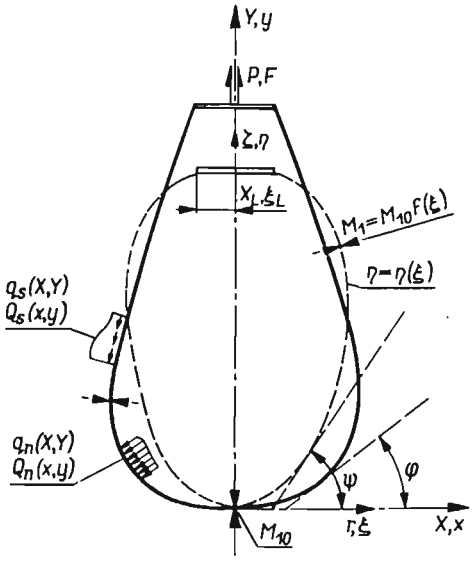
$$
p_i=\sqrt{p_1^2+p_2^2-p_1 p_2}, \qquad \varepsilon_i=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_2\varepsilon_3}, \tag{1.3}
$$

przy czym indeks 1 oznacza kierunek południkowy, 2 — równoleżnikowy, 3 — normalny do powłoki. Odkształcenia główne wyrażają się poprzez pozostałe funkcje następująco:

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial \xi}} \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}, \qquad \varepsilon_2 = \ln \frac{x}{\xi}, \qquad \varepsilon_3 = \ln u, \tag{1.4}$$

gdzie $\psi = \psi(\xi)$ — oznacza kąt zawarty między styczną do południka (przed odkształceniem) a osią x. Pozostałe wielkości (por. rys. 1), które traktujemy jako znane oznaczają: $Q_n = Q_n(x, y, \tau)$ i $Q_s = Q_s(x, y, \tau)$ — obciążenia liczone na jednostkę powierzchni odkształconej powłoki odpowiednio w kierunku normalnym i południkowym, $f = f(\xi)$ — funkcję opisującą zmianę grubości ścianki powłoki w stanie nieodkształconym.

Wszystkie wyrażenia we wzorach (1.1)–(1.4) zapisane są w wielkościach bezwymiarowych (por. [14]).



Rys. 1. Powłoka przed odkształceniem i po odkształceniu

Dla równań (1.1) podane zostały warunki początkowe

$$\begin{aligned} &x(\xi, 0) = x_*(\xi), \quad y(\xi, 0) = y_*(\xi), \quad u(\xi, 0) = u_*(\xi), \\ &\varphi(\xi, 0) = \varphi_*(\xi), \quad p_1(\xi, 0) = p_{1*}(\xi), \quad p_2(\xi, 0) = p_{2*}(\xi) \end{aligned} \tag{1.5}$$

zdeterminowane przez stan wyjściowy (oznaczony $_*$) w powłoce, w którym intensywność naprężeń osiąga co najmniej granicę plastyczności. Sformułowane również były różne typy warunków brzegowych (por. [14]).

Praca [14] nie zawiera jednak rozwiązania tak postawionego problemu. Zagadnienie to podejmuje niniejsza praca, której celem jest podanie pewnej numerycznej metody całkowania układu równań (1.1) i opracowanie na tej podstawie schematu blokowego oraz programu obliczeń na maszynę cyfrową, a następnie rozwiązanie tym sposobem konkretnego przypadku powłoki walcowej obciążonej parciem wewnętrznym. Równocześnie przeprowadzono porównanie otrzymanych wyników z rozwiązaniem analogicznego zadania w oparciu o odkształceniową teorię plastyczności uogólnioną na zakres skończonych odkształceń.

Zastosowanie teorii płynięcia plastycznego w teorii wiotkich powłok napotyka znaczne trudności natury matematycznej. Dlatego też podjęto w tym kierunku jedynie nieliczne próby. Stosunkowo najwięcej uwagi poświęcono stacjonarnym procesom obróbki plastycznej rur cienkościennych. Zagadnienie przeciągania rur bez uwzględnienia wzmocnienia rozważał ILJUSZYN [7], a ze wzmocnieniem izotropowym, lecz w sposób uproszczony SWIFT [18] (por. także KIJKO [8]). Ścisłe ujęcie tego problemu przy warunku plastyczności Hubera-Misesa i bez pomijania tarcia daje MALININ [9], a SZCZEPIŃSKI [20] uwzględnia ponadto kinematyczną hipotezę wzmocnienia.

Pierwsze rozwiązanie niestacjonarnego osiowo-symetrycznego zagadnienia tłoczenia podał HILL [5] dla izotropowej hipotezy wzmocnienia, przyjmując przy tym znaczne uproszczenia. Ścisłe rozwiązanie tego problemu, tak dla hipotezy wzmocnienia izotropowego, jak i anizotropowego, podaje SZCZEPIŃSKI [20]. Praca ta zawiera również przykłady liczbowe rozwiązane numerycznie metodą iteracyjną (por. [19]). HILL [4], [5] i następnie TRAN ŁYU CZIONG [24] (wzmocnienie anizotropowe) rozpatrzyli — w ujęciu teorii płynięcia — skończone odkształcenia plastyczne kołowej membrany poddanej równomiernemu ciśnieniu. Uzyskali oni przybliżone rozwiązanie przy aproksymacji formy odkształconej membrany powierzchnią kulistą. Analogiczne zadanie przy założeniu jedynie dużych przemieszczeń omawiają ROSS i PRAGER [17].

Przedstawione wyżej zagadnienia omawiają też monografie [6], [10], [12], [21], [22], [23]. Prócz wspomnianych już rozwiązań podają one również uproszczone inżynierskie metody obliczeń stosowanych w procesach plastycznej obróbki metali. Wspólną cechą tych wszystkich zadań (z wyjątkiem membrany) jest to, że forma powłoki, tak przed odkształceniem, jak i po odkształceniu jest z góry ustalona. Upraszcza to znacznie zagadnienie w stosunku do rozpatrywanego w niniejszej pracy, gdzie forma końcowa jest poszukiwana.

2. Metoda całkowania równań powłoki

Przedstawimy obecnie pewną numeryczną metodę rozwiązania układu równań (1.1). Łączy ona w sobie elementy metody charakterystyk oraz tzw. «metody prostych» (por. [1], [2]) i polega na sprowadzeniu układu równań cząstkowych do dwóch układów równań zwyczajnych, które następnie rozwiązuje się ściśle lub (jak w naszym przypadku) jedną ze znanych metod numerycznych. Sposób tego sprowadzenia nie jest jednak dowolny, lecz zdeterminowany rozkładem charakterystyk rozpatrywanego układu równań.

Przed przystąpieniem do numerycznego całkowania danego układu należy więc określić jego typ, znaleźć rozkład charakterystyk (jeśli one istnieją), a także ustalić rodzaj warunków brzegowych. Kierunki charakterystyczne układu równań (1.1) otrzymamy (por. [11], [16]) z warunku zerowania się wyznacznika

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_\xi & 0 & 0 & 0 & u(p_1+p_2)\lambda_\tau \\ 0 & \lambda_\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_\xi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_1}{u}\lambda_\xi & 0 & x(2p_2-p_1)\lambda_\tau \\ 0 & 0 & \lambda_\xi & 0 & 0 \end{vmatrix} = x(2p_2-p_1)\lambda_\xi^4\lambda_\tau = 0. \tag{2.1}$$

Znajdujemy stąd wektory własne $\bar{\lambda}_I^*(\lambda_\xi, 0)$ i $\bar{\lambda}_{II}^*(0, \lambda_\tau)$. Równania (1.1) stanowią zatem pewien szczególny quasi-liniowy układ hiperboliczny, którego charakterystykami są linie $\xi = \text{const}$ (jednokrotna) oraz $\tau = \text{const}$ (czterokrotna), co wynika z przyjęcia współrzędnej Lagrange'a ξ (a nie x) jako zmiennej niezależnej i znacznie upraszcza sposób rozwiązywania. Warunki zgodności na charakterystyce $\xi = \text{const}$ sprowadzają się do równania:

$$u(p_1+p_2)\frac{dx}{d\tau}+x(2p_2-p_1)\frac{du}{d\tau}=0. \tag{2.2}$$

Podobnie dla drugiego kierunku charakterystycznego ($\tau = \text{const}$) otrzymujemy równania

$$\frac{dx}{d\xi}=-\frac{\xi\cos\varphi}{ux\cos\psi}, \qquad \frac{dp_1}{d\xi}+\frac{p_1}{u}\frac{du}{d\xi}=\frac{\xi}{ux^2}\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\left(p_2-p_1+\frac{xQ_s}{fu\cos\varphi}\right)-\frac{p_1}{f}\frac{df}{d\xi},$$

$$\frac{dy}{d\xi}=\frac{\xi\sin\varphi}{ux\cos\psi}, \qquad \frac{d\varphi}{d\xi}=\frac{\xi}{p_1ux\cos\psi}\left(\frac{Q_n}{fu}-\frac{p_2}{x}\sin\varphi\right). \tag{2.3}$$

Tak więc układ (1.1) rozpadł się na dwie grupy zwyczajnych równań różniczkowych (2.2) i (2.3), które mogą być spełnione wzdłuż odpowiednich charakterystyk. Równania te rozwiązywać będziemy numerycznie. Z postaci warunków zgodności wynika, że funkcję u możemy wyznaczyć z równania (2.2), funkcję x, y, φ, p_1 z równań (2.3), zaś p_2 z algebraicznego związku (1.2), który po rozwikłaniu ma postać

$$p_2=\frac{p_1}{2}+\sqrt{\varepsilon_i^{2\mu}-\frac{3}{4}p_1^2}. \tag{2.4}$$

Obszar całkowania $D(\xi, \tau)$ podzielimy na n części za pomocą linii $\tau = \tau_j = \text{const}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ przeprowadzonych w jednakowych odstępach $\Delta\tau = \tau_j - \tau_{j-1}$. Dla uproszczenia zapisu oznaczymy krótko

$$u(\xi, \tau_j) = u_j(\xi) = u_j, \qquad \frac{du(\xi, \tau_j)}{d\xi}=\frac{du_j}{d\xi}, \qquad \left.\frac{du(\xi, \tau)}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_j}=\frac{du_j}{d\tau}. \tag{2.5}$$

Podobnie jak w metodzie prostych równanie (2.2) zamieniamy na różnicowe. Korzystnie jest przy tym dla pochodnej funkcji posłużyć się wzorem różnicowym

$$\frac{du_{j-1}}{d\tau}=\frac{1}{\Delta\tau}\sum_{r=0}^{k}\beta_{kr}u_{j-r}, \tag{2.6}$$

który jest stabilny. Wartości liczbowe kilku pierwszych współczynników β_{kr} zawiera tablica 1. Z równania (2.2) tą drogą obliczymy:

Tablica 1. Współczynniki β_{kr}

k \ r	0	1	2	3	4
1	1	−1			
2	1/2	0	−1/2		
3	1/3	1/2	−1	1/6	
4	1/4	5/6	−3/2	1/2	−1/12

$$u_j = -\frac{1}{\beta_{k0}}\left[\frac{u(p_1+p_2)}{x(2p_2-p_1)}\right]_{j-1}\sum_{r=0}^{k}\beta_{kr}x_{j-r} - \frac{1}{\beta_{k0}}\sum_{r=1}^{k}\beta_{kr}u_{j-r}. \tag{2.7}$$

W najprostszym przypadku, gdy $k = 1$ mamy stąd

$$u_j = u_{j-1}\left[1+\left(\frac{p_1+p_2}{2p_2-p_1}\right)_{j-1}\left(1-\frac{x_j}{x_{j-1}}\right)\right]. \tag{2.8}$$

Przy $\tau = 0$ wszystkie funkcje występujące w tych wzorach są określone przez warunki początkowe (1.5).

Podstawiając do (2.3) p_2 oraz u_j wyrażone odpowiednio wzorami (2.4) i (2.7) dostajemy przy $\tau = \tau_j = \text{const}$ układ zwyczajnych równań różniczkowych zawierający jedynie cztery niewiadome funkcje x_j, y_j, φ_j, $(p_1)_j$. Warunki brzegowe dla tego układu otrzymamy kładąc $\tau = \tau_j$ w podanych w pracy [14] zależnościach (3.2)–(3.5). Warunki te nie pozwalają na bezpośrednie obliczenie na brzegu $\xi = \xi_0$ wartości wszystkich poszukiwanych funkcji i prowadzą do problemów brzegowych dla równań (2.3). Problemy te sprowadzamy następnie do zagadnień początkowych (ponieważ z uwagi na znaczną nieliniowość prawych stron równań (2.3) korzystamy z metod numerycznych takich jak Eulera, Adamsa, Rungego–Kutty itp., w których całkowanie odbywa się krok po kroku począwszy od punktu wyjściowego), zakładając na brzegu wyjściowym pewne dodatkowe warunki i rozwiązując zadanie metodą półodwrotną. Do rozpoczęcia obliczeń potrzebna jest zatem znajomość wartości funkcji $x(\xi_0, \tau)$, $y(\xi_0, \tau)$, $\varphi(\xi_0, \tau)$, $p_1(\xi_0, \tau)$ (po części wyznaczamy je z warunków brzegowych, a brakujące zakładamy dodatkowo) oraz $u(\xi_0, \tau)$ i $p_2(\xi_0, \tau)$ dla każdego $\tau = \tau_j$. Dla warunków (3.2) sprecyzowanych w pracy [14] wystarczy założyć jedynie $u(0, \tau_j)$, a wówczas z równań fizycznych znajdujemy

$$p_2(0, \tau_j) = p_1(0, \tau_j) = [-\ln u(0, \tau_j)]^{\mu}. \tag{2.9}$$

Z warunków brzegowych (3.4) i (3.5) bezpośrednio możemy określić tylko $x(\xi_0, \tau_j)$ i $y(\xi_0, \tau_j)$ zakładając dodatkowo $u(\xi_0, \tau_j)$ otrzymamy (ze związków fizycznych)

$$p_2(\xi_0, \tau_j) = 1/2p_1(\xi_0, \tau_j) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\mu+1}[-\ln u(\xi_0, \tau_j)]^{\mu}, \tag{2.10}$$

a następnie $\varphi(\xi_0, \tau)$ z zależności (3.3). Inne warunki wymagają przyjęcia dwóch dodatkowych danych na brzegu $\xi = \xi_0$. Wielkości, które dodatkowo zakładamy dla $\xi = \xi_0$ kolejno na każdej linii $\tau = \tau_j = \text{const}$, muszą być tak dobrane, aby każdorazowo spełnione były wszystkie warunki zadane na obu brzegach. Wymaga to na ogół wielu prób (iteracja), przy czym w pierwszym przybliżeniu wygodnie jest przyjąć, że dla $\tau = \tau_j$ brakujące dane osiągają na brzegu $\xi = \xi_0$ te same wartości co dla $\tau = \tau_{j-1}$ np. $u(\xi_0, \tau_j) = u(\xi_0, \tau_{j-1})$.

3. Algorytm obliczeń

Całkowanie równań cząstkowych (1.1) sprowadza się więc do rozwiązywania szeregu układów zwyczajnych równań różniczkowych (2.3) wzdłuż kolejnych linii $\tau = \tau_j = \text{const}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ w całym obszarze $D(\xi, \tau)$ przy omówionych wyżej warunkach brzegowych. Równania te będziemy rozwiązywać numerycznie. Można to uczynić opierając się ściśle

na metodzie prostych, czyli rugując w tych równaniach u_j i $(p_2)_j$ za pomocą związków (2.7) i (2.4). Taki sposób postępowania nie byłby jednak dogodny ze względu na obliczanie pochodnej $\frac{du_j}{d\xi}$ występującej w równaniach (2.3). Wprawdzie wystarczyłoby wówczas zróżniczkować wyrażenie (2.7), ale wtedy zachodziłaby potrzeba (zwłaszcza przy większej dokładności wzorów różnicowych) zachowania w pamięci maszyny cyfrowej zbyt wielu danych na liniach $\tau = \tau_{j-r} = \text{const}$, $r = 1, 2, 3, \ldots, k$, co często praktycznie nie jest możliwe. Obliczymy więc tę pochodną nieco inaczej. Podzielmy w tym celu obszar całkowania na $2m$ części za pomocą linii $\xi = \xi_i = \text{const}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2m$ przeprowadzonych w jednakowych odstępach $1/2\Delta\xi = 1/2(\xi_i - \xi_{i-2})$. Niech $w(\xi, \tau)$ przedstawia dowolną z rozpatrywanych funkcji; aby uprościć zapis oznaczmy krótko $w(\xi_i, \tau_j) = w_{ij}$. W niektórych przypadkach dla lepszego rozróżnienia wskaźników rozdzielać je będziemy przecinkiem. Chcąc teraz obliczyć pochodną $\left(\frac{du}{d\xi}\right)_{i-1,j}$ znajdujemy naprzód ze wzoru (2.7) u_{ij}, a następnie korzystamy ze schematu różnicowego analogicznego do (2.6).

Pokażemy obecnie jaki ma ostatecznie przebieg numeryczne rozwiązywanie układu (1.1) oparte na metodzie Rungego–Kutty (por. [2]) całkowania zwyczajnych równań różniczkowych. Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy przy tym następujące oznaczenia [por. (2.3), (2.4), (2.6), (2.7)]:

$$B = \frac{\xi\cos\varphi}{ux\cos\psi} = \frac{dx}{d\xi}, \qquad C = \frac{B}{p_1\cos\varphi}\left(\frac{Q_n}{fu} - \frac{p_2}{x}\sin\varphi\right) = \frac{d\varphi}{d\xi},$$

$$D = \frac{B}{u}\left(p_2 - p_1 + \frac{xQ}{fu\cos\varphi}\right) - p_1\left(\frac{1}{f}\frac{df}{d\xi} + \frac{1}{u}\frac{du}{d\xi}\right) = \frac{dp_1}{d\xi}, \tag{3.1}$$

$$E = B\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{d\xi}, \qquad F = \frac{p_1}{2} + \sqrt{\varepsilon_i^{2\mu} - \frac{3}{4}p_1^2} = p_2,$$

$$L_{i-2,j} = \frac{2}{\Delta\xi}\sum_{s=0}^{k}\beta_{ks}u_{i-s-1,j} \simeq \left(\frac{du}{d\xi}\right)_{i-2,j}, \tag{3.2}$$

$$S_{ij} = -\frac{1}{\beta_{k0}}\left[\frac{u(p_1+p_2)}{x(2p_2-p_1)}\right]_{i,j-1}\sum_{r=0}^{k}\beta_{kr}x_{i,j-1} - \frac{1}{\beta_{k0}}\sum_{r=1}^{k}\beta_{kr}u_{i,j-r} = u_{ij}, \tag{3.3}$$

$$M_\nu(w)_{ij} = \gamma K_{\nu(w)ij}, \tag{3.4}$$

gdzie

$$K_{\nu(w)} = \frac{dw}{d\xi}\Delta\xi, \qquad \nu = 1, 2, 3, 4. \tag{3.5}$$

$$H_{i-\varkappa,j}(w) = 1/6\sum_{r=1}^{4}\omega K_{\nu(w)i-\alpha,j}. \tag{3.6}$$

Wielkości $\gamma = \gamma(\nu)$ i $\omega = \omega(\nu)$ będące współczynnikami występującymi we wzorach Rungego–Kutty przybierają wartości dyskretne 1/2, 1/2, 1, 1 oraz 1, 2, 2, 1, podobnie jak wyrażenie $\alpha = \alpha(\nu) = 2, 1, 1, 0$. Przy przyjętych wyżej oznaczeniach proces obliczeń będzie przebiegać następująco

$$
\begin{aligned}
K_\nu(x)_{i-\alpha,j} &= B_{i-\alpha,j}\Delta\xi,\\
K_\nu(y)_{i-\alpha,j} &= E_{i-\alpha,j}\Delta\xi,\\
K_\nu(\varphi)_{i-\alpha,j} &= C_{i-\alpha,j}\Delta\xi,\\
x_{i+2\gamma-2,j} &= x_{i-2,j}+M_\nu(x)_{i-\alpha,j},\\
y_{i+2\gamma-2,j} &= y_{i-2,j}+M_\nu(y)_{i-\alpha,j},\\
\varphi_{i+2\gamma-2,j} &= \varphi_{i-2,j}+M_\nu(\varphi)_{i-\alpha,j},\\
u_{i+2\gamma-2,j} &= S_{i+2\gamma-2,j},\\
\left(\frac{du}{d\xi}\right)_{i-\alpha,j} &= L_{i-\alpha,j},\\
K_\nu(p_1)_{i-\alpha,j} &= D_{i-\alpha,j}\Delta\xi,\\
(p_1)_{i+2\gamma-2,j} &= (p_1)_{i-2,j}+M_\nu(p_1)_{i-\alpha,j},\\
(p_2)_{i+2\gamma-2,j} &= F_{i+2\gamma-2,j}.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Ostatecznie dla $\nu = 4$ wartości poszukiwanych funkcji w punkcie (ξ_i, τ_j) wyznaczamy ze wzorów

$$
\begin{aligned}
x_{ij} &= x_{i-2,j}+H(x)_{i-2,j},\\
y_{ij} &= y_{i-2,j}+H(y)_{i-2,j},\\
\varphi_{ij} &= \varphi_{i-2,j}+H(\varphi)_{i-2,j},\\
u_{ij} &= S_{ij},\\
(p_1)_{ij} &= (p_1)_{i-2,j}+H(p_1)_{i-2,j},\\
(p_2)_{ij} &= F_{ij},
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

po czym przechodzimy do punktów (ξ_{i+2}, τ_j), (ξ_{i+4}, τ_j), ..., (ξ_{2m}, τ_j), a potem na linie $\tau_{j+1} = \text{const}$, $\tau_{j+2} = \text{const}$ ..., $\tau_n = \text{const}$, aż skonstruujemy rozwiązanie w całym obszarze $D(\xi, \tau)$.

Jak widać ze wzorów różnicowych (3.2) i (3.3) do prowadzenia sukcesywnych obliczeń może być potrzebna (przy dokładniejszych wzorach) znajomość wartości poszukiwanych funkcji w kilku początkowych punktach na liniach $\xi = \xi_i = \text{const}$ oraz $\tau = \tau_j = \text{const}$. Wartości te uzyskujemy za pomocą tzw. iteracji wejścia zależnej od przyjętej metody rozwiązywania, zastosowanych wzorów różnicowych i żądanej dokładności obliczeń.

Przytoczone wyżej rozważania dotyczyły, jak to zaznaczyliśmy na wstępie, powłok wykonanych z materiałów izotropowych o charakterystyce fizycznej opisanej równaniem (1.2); łatwo zauważyć, że przyjęcie ortotropii materiału, jak w pracy [15], lub też innego równania fizycznego typu $F(p_1, p_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = 0$ w niczym nie zmienia przedstawionego toku obliczeń.

4. Przykład

W charakterze przykładu rozpatrzymy powłokę o kształcie walca kołowego (w stanie nieodkształconym) zakończoną dwoma sztywnymi, swobodnie przesuwnymi denkami, obciążoną równomiernie rozłożonym parciem wewnętrznym. Ścianka powłoki nieobcią-

żonej ma stałą grubość ($f = 1$). Podstawowy układ równań w świetle teorii płynięcia plastycznego ma wówczas postać (por. [16])

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\cos\varphi}{ux}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial \eta} = -\frac{p_1}{u}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\cos\varphi}{ux^2}(p_2 - p_1),\\
&\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\sin\varphi}{ux}, \qquad u(p_1+p_2)\frac{\partial x}{\partial \tau} + x(2p_2 - p_1)\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0,\\
&\sin\varphi = \frac{xQ(\tau)}{2p_1 u}, \qquad p_2 = 1/2\, p_1 + \sqrt{\varepsilon_i^{2\mu} - 3/4 p_1^2},
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

gdzie η jest osiową współrzędną powłoki (typu Lagrange'a — por. rys. 1), a $Q(\tau)$ dowolną monotonicznie rosnącą funkcją, którą odtąd przyjmować będziemy jako $Q(\tau) = Q_0 + \tau$. Przy założeniu pierwotnej długości powłoki $L_0 = 2$, równania (4.1) mają spełnić następujące warunki brzegowe (por. [14]):

$$
x(0, \tau) = 1, \qquad y(0, \tau) = 0, \qquad x(2, \tau) = 1,
\tag{4.2}
$$

$$
p_1(0, \tau) = 2p_2(0, \tau) = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\mu+1} [-\ln u(1, \tau)]^{\mu}.
\tag{4.3}
$$

W obliczeniach zamiast trzeciego z warunków (4.2) z uwagi na symetrię korzystamy z zależności $\varphi(1, \tau) = \pi/2$.

Warunki początkowe dla równań (4.1) stanowi rozwiązanie (przy warunkach brzegowych (4.2) układu równań — por. [16])

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{d\eta} = \frac{\cos\varphi}{ux}, \qquad \frac{du}{d\eta} = -u\frac{\frac{1}{x}\frac{dx}{d\eta}[1 + D(1+BT)]}{B(1+BT)+2},\\
&\frac{dy}{d\eta} = \frac{\sin\varphi}{ux}, \qquad \sin\varphi = \frac{xQ_0}{2p_1 u},
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

powłoki walcowej opartych na fizycznych związkach deformacyjnej teorii plastyczności uogólnionej na zakres skończonych odkształceń. W równaniach tych

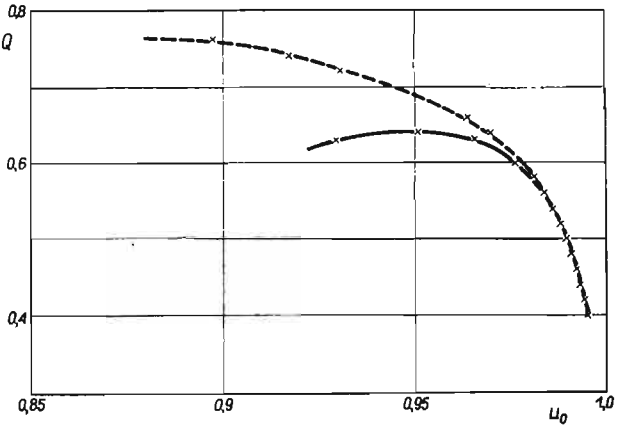
$$
\begin{aligned}
&T = \frac{2(\mu-1)}{3\varepsilon_i^2}, \qquad B = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3, \qquad D = 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3,\\
&\varepsilon_1 = \ln\left(\frac{dx}{d\eta}\frac{1}{\cos\varphi}\right), \qquad \varepsilon_2 = \ln x, \qquad \varepsilon_3 = \ln u.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Do obliczeń przyjęto $\mu = 1/3$ oraz $Q_0 = 0{,}4$.

Równania (4.4) obowiązują w danym punkcie powłoki do chwili osiągnięcia przez intensywność rzeczywistych naprężeń p_i granicy plastyczności $\bar{p}$, za którą w przypadku potęgowego wzmocnienia (1.2) można np. przyjąć tzw. umowną granicę plastyczności. Przy wzroście obciążenia Q od zera do pełnej wielkości — wartość tak czy inaczej zdefiniowanej granicy plastyczności nie jest oczywiście osiągana w całej powłoce jednocześnie, lecz stopniowo w coraz to większej strefie. Wobec tego, w pewnym zakresie obciążeń należałoby w niektórych obszarach powłoki stosować równania (4.1) (dla $p_i(\eta, \tau) > \bar{p}$),

a w pozostałych równania (4.4) (dla $p_i(\eta, \tau) \leqslant \bar{p}$) tak długo, dopóki w całej powłoce nie będzie spełniony warunek $p_i \geqslant \bar{p}$. Taki sposób rozwiązywania choć poprawny merytorycznie okazuje się jednak niecelowy praktycznie, gdyż jak wynika z konkretnych obliczeń, różnice między rezultatami osiągniętymi w oparciu o obie rozważane teorie plastyczności są znikomo małe w zakresie odkształceń odpowiadających $\bar{p}$. Z tego względu w naszym przykładzie poprzestaliśmy na rozwiązaniu układu (4.4) dla jednej ustalonej wartości obciążenia $Q = 0{,}4$, a otrzymane rezultaty przyjęto jako warunki początkowe dla równań (4.1) od razu w całej powłoce. Przy $Q > 0{,}4$ obliczenia przeprowadzono już na podstawie równań (4.1); równocześnie jednak, celem porównania obu teorii, scałkowano też układ (4.4) dla szeregu wybranych wartości Q.

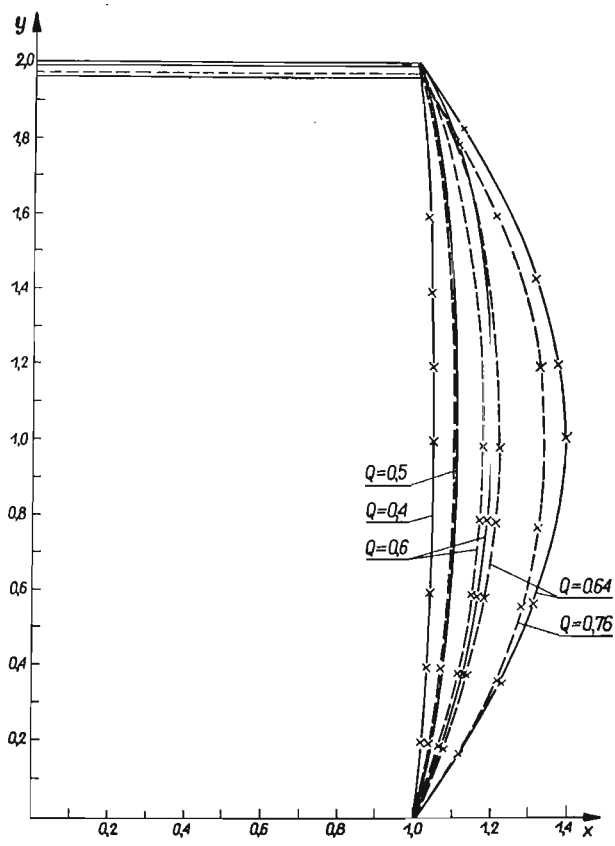
Wyniki przedstawione są na rys. 2–7*. Rysunek 2 pokazuje jakie wartości ostatecznie przybiera — w zależności od zadanego obciążenia Q — parametr u_0 (grubość powłoki przy denku) przyjmowany dodatkowo (drogą prób) przy zamianie problemu brzegowego dla równań (4.1) i (4.4) na problem początkowy. Rysunek ten rzuca również światło na zagadnienie stateczności powłoki; dla teorii odkształceniowej widać wyraźnie maksimum obciążenia $Q = 0{,}64$, natomiast przy zastosowaniu związków fizycznych teorii płynięcia



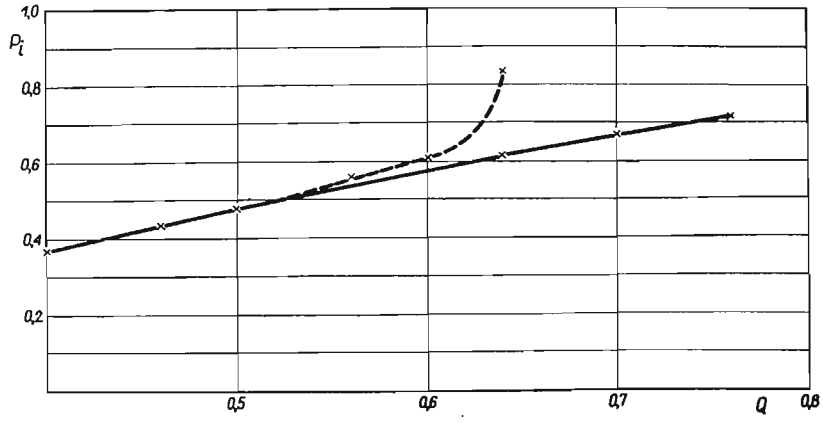
Rys. 2. Wykresy funkcji $Q = f(u_0)$

plastycznego obciążenie nie może przekroczyć (czego nie da się już stwierdzić bezpośrednio na wykresie) wartości $Q = 0{,}77$. Rysunek 3 ilustruje zmianę formy powłoki w procesie obciążenia. W miarę wzrostu obciążenia różnice w kształcie powłoki obliczanej w myśl równań (4.1) i (4.4) wyraźnie się pogłębiają. Podobny wniosek nasuwa analiza rys. 4 i 5, gdzie przedstawione są krzywe opisujące zmianę intensywności naprężeń $p_i = p_i(Q)$ oraz odkształceń $\varepsilon_i = \varepsilon_i(Q)$ wybranego punktu w środku długości powłoki ($\eta = 1$) w zależności od obciążenia Q. Na rys. 6 i 7 pokazano rozkład naprężeń i odkształceń w powłoce dla $Q = 0{,}64$, tj. wówczas, gdy różnice między wynikami obu teorii (w zakresie statecznym dla teorii odkształceniowej) są największe.

*Linia przerywana odpowiada teorii płynięcia na rys. 2, 3, 6, 7 oraz teorii deformacyjnej na rys. 4 i 5.



Rys. 3. Forma odkształconej powłoki dla różnych warstw obciążenia Q



Rys. 4. Intensywność rzeczywistych naprężeń p_i w środku długości powłoki jako funkcja obciążenia Q

Z przytoczonych tu porównań wynikają następujące spostrzeżenia:

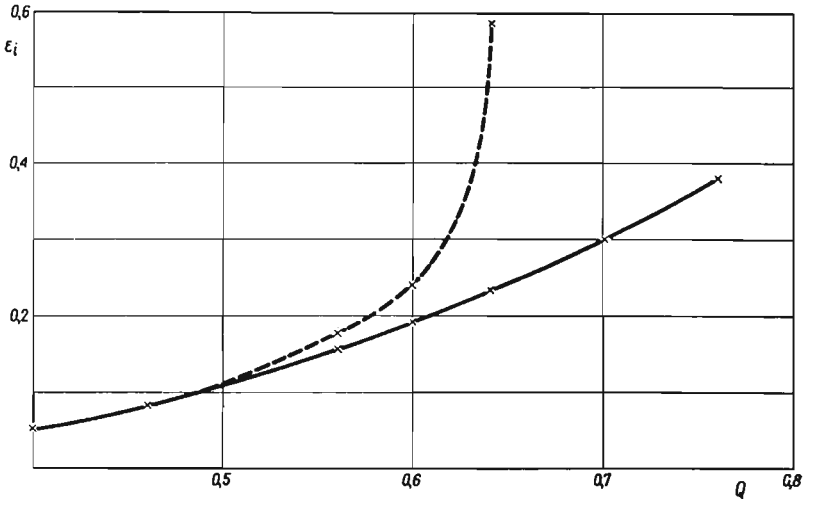
1) zgodność obu teorii jest dobra przy stosunkowo niewielkich odkształceniach;

2) w miarę wzrostu obciążeń zgodność ta się psuje i powstają istotne różnice ilościowe i jakościowe;

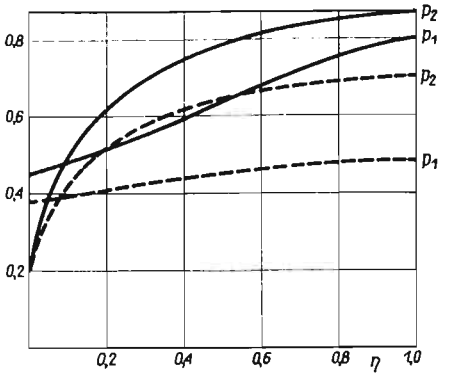
3) w całym zakresie obciążeń teoria płynięcia plastycznego daje niższe wartości naprężeń i odkształceń w powłoce niż teoria odkształceniowa;

4) powłoka traci stateczność przy niższej wartości obciążenia dla teorii odkształceniowej.

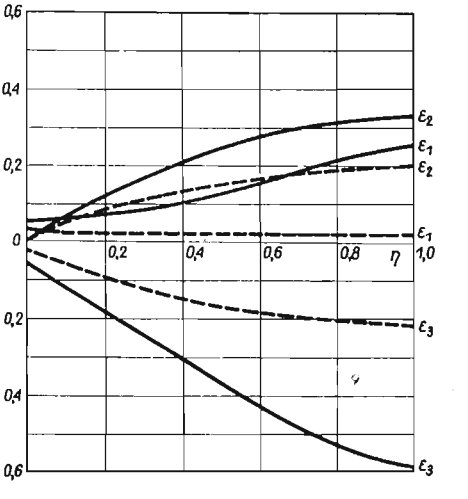
Całkowanie zwyczajnych równań różniczkowych (4.4) odbywało się metodą Rungego–Kutty. Obliczenia przeprowadzono sposobem półodwrotnym, przy czym program przewidywał automatyczną korektę danych wyjściowych (u_0) aż do spełnienia z żądaną dokładnością warunku $\varphi(1, \tau) = \pi/2$ na drugim brzegu ($\eta = 1$). Schemat blokowy obliczeń pokazuje tablica 2.



Rys. 5. Intensywność odkształceń ε_i w środku długości powłoki jako funkcja obciążenia Q

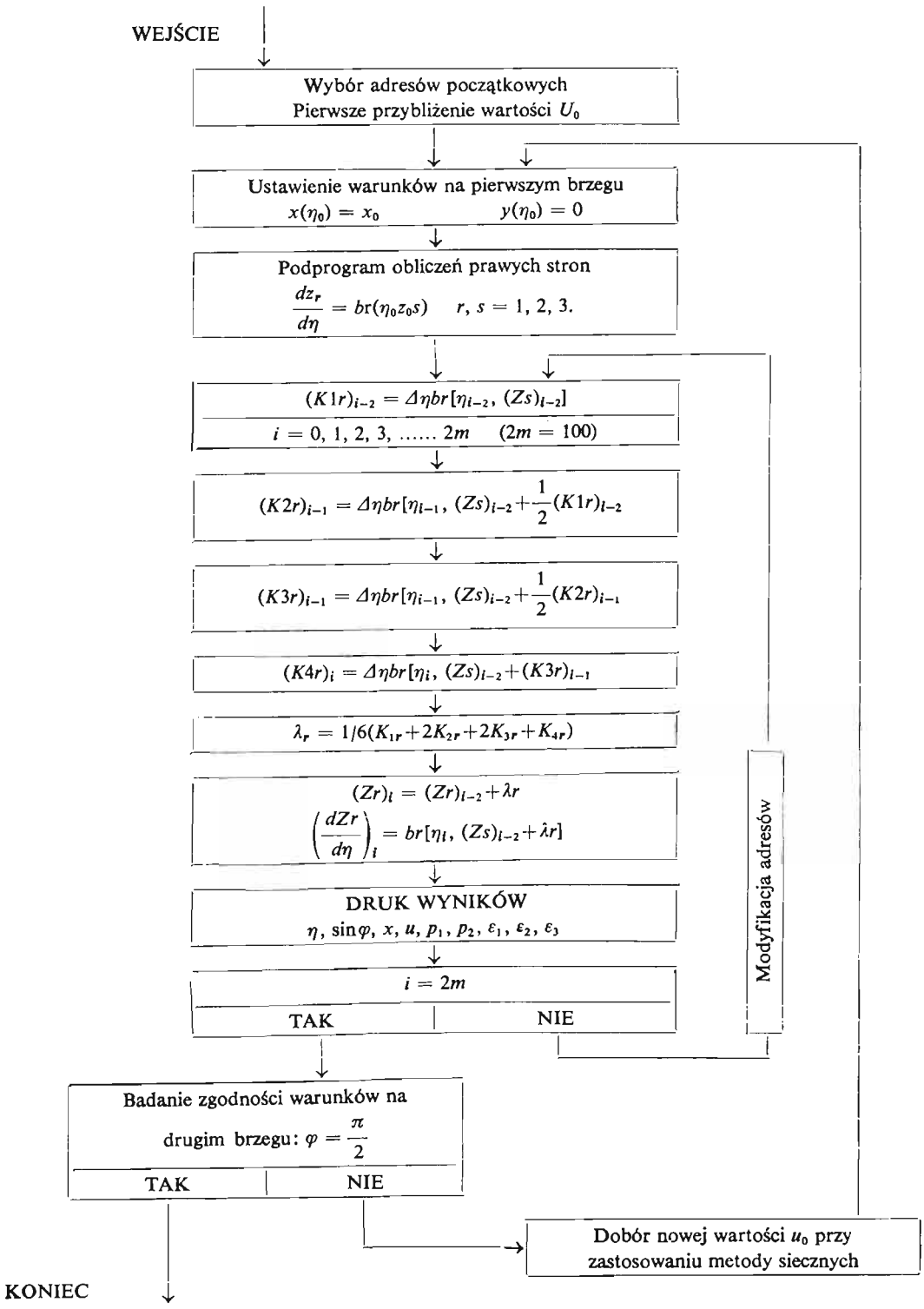


Rys. 6. Rozkład rzeczywistych naprężeń głównych wzdłuż długości powłoki dla obciążenia $Q = 0{,}64$

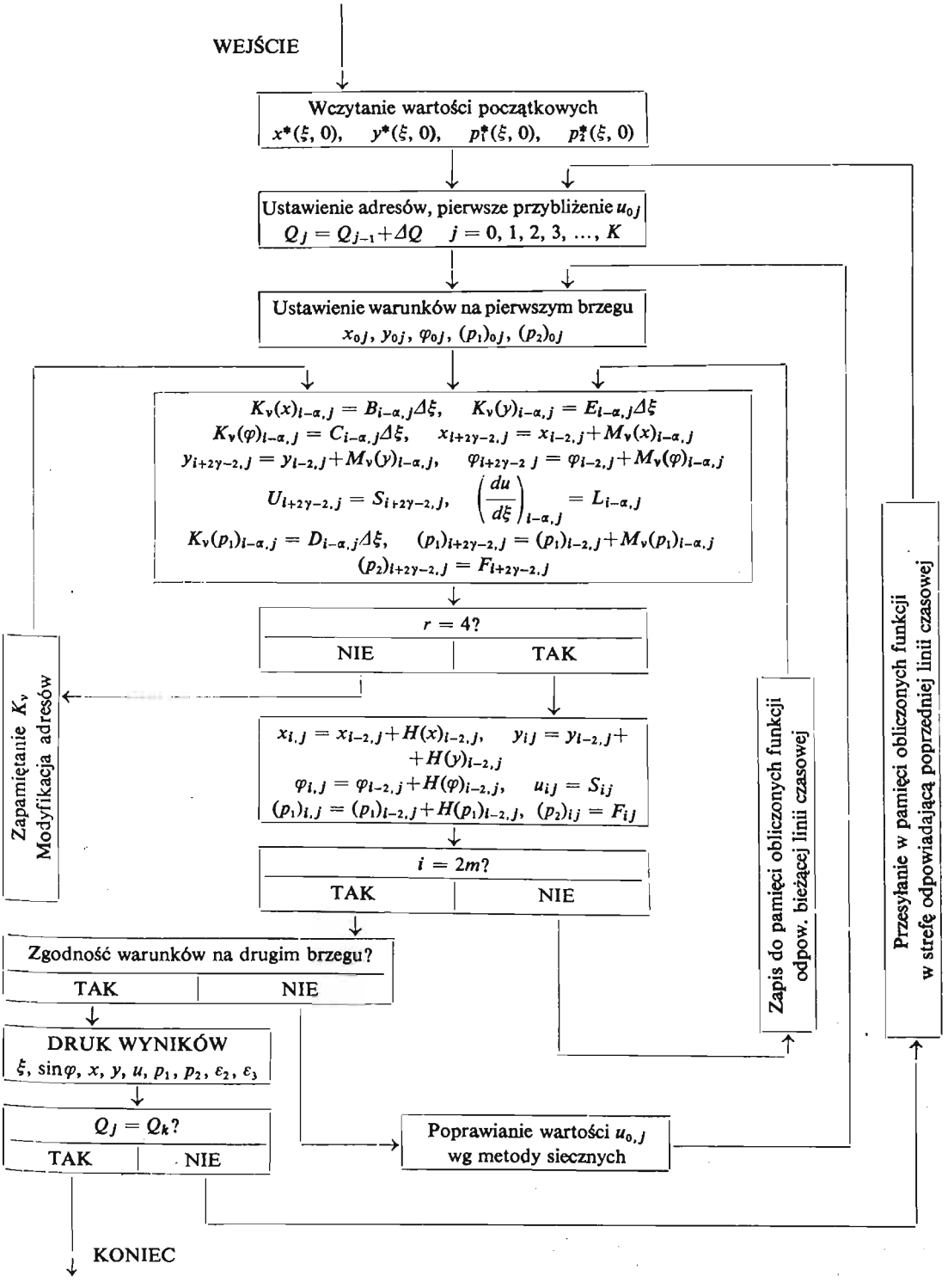


Rys. 7. Rozkład odkształceń głównych wzdłuż długości powłoki dla obciążenia $Q = 0{,}64$

Tablica 2. Schemat blokowy algorytmu obliczeń układu równań (4.4)



Tablica 3. Schemat blokowy algorytmu obliczeń układów równań (1.1) i (4.1)



Celem numerycznego całkowania równań (1.1) dla dowolnej obrotowo-symetrycznej powłoki w oparciu o algorytm (3.7), (3.8) opracowany został schemat blokowy, którego wersję przeznaczoną również dla powłoki walcowej przedstawia tablica 3. Sporządzono także odpowiedni [słuszny zarówno dla równań (4.1) jak i ogólnego układu (1.1)] program obliczeń na elektroniczną maszynę cyfrową ODRA-1013 gwarantujący pełną automatyzację rachunków. Program jest opracowany w języku wewnętrznym maszyny, wszystkie operacje matematyczne (za wyjątkiem rozkazów organizacyjnych) są wykonywane w pamięci ferrytowej. Zapewnia to maksymalną szybkość obliczeń możliwą do uzyskania na maszynie cyfrowej ODRA-1013. Pomimo to otrzymanie kompletnych wyników liczbowych rozwiązanej powłoki wymagało kilkudziesięciu godzin nieprzerwanej pracy maszyny. Program jest obecnie przechowywany w Ośrodku Maszyn Cyfrowych przy Katedrze Mechaniki Teoretycznej Politechniki Krakowskiej, gdzie wykonane były wszystkie obliczenia.

Literatura cytowana w tekście

1. Я. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, Физматгиз., Т. 2, Москва 1962.
2. L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin–Gottingen–Heidelberg 1955.
3. A. S. GRIGORIEV, *The Stress State and the Carrying Capacity of Flexible Plates and Shells at Large Deformations*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam; PWN Warszawa 1964, repr. *Non-Classica Shell Problems*, Proc. IASS Symp., Warsaw, Sept. 1963.
4. R. HILL, *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*, Proc. Roy. Soc. A 193 (1948), 281–297.
5. R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford 1950.
6. O. HOFFMAN, G. SACHS, *Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers*, McGraw-Hill Book Co, 1953.
7. А. А. Ильюшин, *Пластичность*, ГТТИ, Москва 1948.
8. И. А. Кийко, *Безконтактная штамповка оболочки вращения*, Вестник МГУ, Сер. мат., 5, 1957.
9. Н. Н. Малинин, *Волочение труб через конические матрицы*, Изв. АН СССР, Механика, 5, 1965.
10. Z. MARCINIAK, *Mechanika procesów tłoczenia blach*, PWNT, Warszawa 1961.
11. R. MISES, *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Academic Press INC, New York 1958.
12. Praca zbiorowa pod red. W. OLSZAKA, P. PERZYNY, A. SAWCZUKA, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.
13. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy pewnych typach fizycznej nieliniowości*, Rozpr. Inż. 4, **13** (1965), Streszczenie ang.: Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 1, **15** (1967), 31–40.
14. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok w świetle teorii płynięcia plastycznego*, Mech. Teoret. i Stos. 4, **5** (1967).
15. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia niesprężystych wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok ortotropowych*, Rozpr. Inż., 4, **15** (1967).
16. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok z uwzględnieniem reologicznych własności materiału*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, nr 11, Kraków 1968.
17. E. ROSS, W. PRAGER, *On the theory of the bulge test*, Quart. Appl. Math. 1, **12** (1954).
18. H. W. SWIFT, *Stresses and strains in tube-drawing*, Phil. Mag., **40** (1949), 883–902.
19. W. SZCZEPIŃSKI, *The method of succesive aproximations of some strain-hardening solutions*, Proc. 4th US Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1962.

20. W. SZCZEPIŃSKI, *Axially symetric plane stress problem of a plastic strain-hardening body*, Arch. Mech Stos., 5, **15** (1963).
21. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, Warszawa 1967.
22. А. Д. Томленов, *Пластическое напряженное состояние и устойчивость процесса вытяжки деталей сложной формы*, Вопросы обработки металлов давлением, Изд. АН СССР, Москва 1958.
23. А. Д. Томленов, *Механика процессов обработки металлов давлением*, Машгиз., Москва 1963.
24. Тран Лыу Чионг, *Жестко-пластический анализ мембран с учетом упрочнения*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. Маш., 4, 1965.

Р е з ю м е

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ В ОБЛАСТИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

В работе рассматривается разработанный авторами метод численного интегрирования системы (1.1), квазилинейных гиперболических дифференциальных уравнений первого порядка, (выведенных в работе [14]), описывающих форму, напряжения и деформации гибких вратательно-симметрических оболочек, с точки зрения теории пластического течения, обобщенной на область конечных деформаций. На основе, представленной в работе блоксхемы, составлено программу вычислений на электронной счетной машине ОДРА-1013, с помощью которой решается, с большой точностью, конкретный случай гибкой цилиндрической оболочки, загруженной равномерным внутренним давлением. Результаты этих расчетов, сравниваются с решением аналогичной задачи обобщенной деформационной теории пластичности, при разных величинах нагрузки.

S u m m a r y

NUMERICAL CALCULATION OF FLEXIBLE SHELLS OF REVOLUTION SUBJECTED TO PLASTIC FLOW AT FINITE STRAINS

The paper is concerned with a method of numerical integration of the system (1.1) of quasi-linear hyperbolic partial differential equations that has been derived by the authors in [14]. These equations describe the form, the stresses, and the deformations of flexible shells in the light of the theory of plastic flow, generalized for finite strains. On the basis of a block scheme (presented in the paper), a program for the electronic computer ODRA-1013 has been established and a particular case of a thin cylindrical shell under uniform internal pressure has been solved with great accuracy. The results of calculations have been compared with a solutions of an analogous problem on the basis of physical relations in the generalized deformational plastic theory at different intensities of load.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 października 1968 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 7 (1969)

SKOŃCZONE ODKSZTAŁCENIA SPRĘŻYSTEGO KLINA I STOŻKA

ZBIGNIEW WESOŁOWSKI (WARSZAWA)

W nieliniowej teorii sprężystości znanych jest dotychczas zaledwie kilka ścisłych rozwiązań (por. [1] i [2]). Spowodowane to jest faktem, że równania nieliniowej teorii sprężystości są znacznie bardziej złożone niż teorii liniowej. Ta złożoność ogranicza w istotny sposób możliwość uzyskania rozwiązań ogólnych.

Praktycznie biorąc istnieje szansa rozwiązania zagadnienia nieliniowego jeśli sprowadza się ono do jednego równania różniczkowego zwyczajnego. Należy podkreślić, że nawet w przypadku, gdy poszukiwane funkcje są funkcjami jednej tylko zmiennej, na ogół otrzymuje się nie jedno równanie, a układ równań różniczkowych zwyczajnych, co wobec nieliniowości uniemożliwia rozwiązanie.

W niniejszej pracy przeprowadzono obliczenia dla dwóch odkształceń, dla których zagadnienie sprowadza się do rozwiązania jednego równania różniczkowego zwyczajnego.

1. Podstawowe zależności

Przed przystąpieniem do obliczeń konkretnych przypadków podamy tutaj za pracą [1] podstawowe zależności dotyczące nieliniowej teorii sprężystości. Wprowadźmy dwa na ogół różne układy współrzędnych: układ $\{x^i\}$ z tensorem metrycznym g_{ij} oraz układ $\{X^\alpha\}$ z tensorem metrycznym $g_{\alpha\beta}$. Współrzędne typowego punktu P rozważanego ciała w stanie naturalnym w układzie $\{X^\alpha\}$ oznaczmy przez X^α. Współrzędne tego samego punktu w stanie odkształconym w układzie $\{x^i\}$ oznaczymy przez x^i

$$x^i = x^i(X^\alpha). \tag{1.1}$$

Cząstkowe pochodne funkcji $x^i(X^\alpha)$ względem X^α

$$F^i_\alpha = \partial x^i/\partial X^\alpha \tag{1.2}$$

nazywamy gradientami odkształcenia. Lewy tensor Cauchy-Greena zdefiniowany jest przez związek

$$B^{ij} = F^i_\alpha F^i_\beta g^{\alpha\beta}, \tag{1.3}$$

a jego niezmienniki przez związki

$$I_1 = B_i^i,$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[I_1^2 - (B^2)_i^i], \tag{1.4}$$

$$I_3 = \det B_j^i,$$

przy czym

$$(B^2)^{ij} = B^{ir} B^{js} g_{rs}. \tag{1.5}$$

Jeśli deformacja jest izochoryczna

$$I_3 = 1. \tag{1.6}$$

Dla rozważanych dalej izotropowych nieściśliwych materiałów sprężystych tensor naprężenia τ^{ij} określony jest związkiem

$$\tau^{ij} = \chi_1 B^{ij} + \chi_2 (B^2)^{ij} + p g^{ij}, \tag{1.7}$$

gdzie p jest dowolną funkcją skalarową, a χ_1 i χ_2 funkcjami niezmienników I_1 i I_2. Funkcje te są funkcjami materiałowymi, charakterystycznymi dla danego materiału. Równania równowagi są

$$\nabla_i \tau^{ij} = 0, \tag{1.8}$$

gdzie ∇_i oznacza różniczkowanie kowariantne w układzie $\{x^i\}$. Obciążenia brzegowe t^i odniesione do jednostki powierzchni w stanie odkształconym określone są związkami

$$t^i = \tau^{ij} n_j, \tag{1.9}$$

gdzie n_j jest jednostkową normalną do powierzchni ciała w stanie odkształconym.

2. Deformacja klina

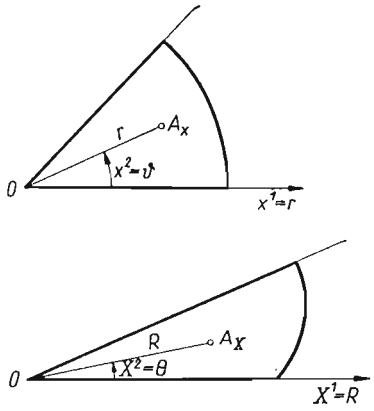
Rozważmy deformację, która w ustalonym walcowym układzie współrzędnych opisana jest związkami

$$r = R\alpha(\Theta),$$

$$\vartheta = \beta(\Theta), \tag{2.1}$$

$$z = \lambda Z,$$

gdzie α oraz β są pewnymi funkcjami, a λ ustalonym parametrem. Jak wynika z (2.1) płaszczyzny $Z = \text{const}$ przechodzą w płaszczyzny $z = \text{const}$, a linie proste $\Theta = \text{const}$



Rys. 1

w linie proste $\vartheta = \text{const}$. Okręgi $R = \text{const}$ nie przechodzą przy tym w okręgi $r = \text{const}$, lecz doznają pewnego zniekształcenia opisanego funkcją $\alpha(\Theta)$. Celem dalszych rozważań jest takie określenie funkcji α i β, żeby deformacja była możliwa.

Oznaczając $x^i = (r, \vartheta, z)$, $X^\alpha = (R, \Theta, Z)$ mamy

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Obliczając teraz w oparciu o (2.1) gradient odkształcenia F_α^i otrzymujemy

$$F_\alpha^i = \begin{bmatrix} \alpha & R\alpha' & 0 \\ 0 & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

gdzie primem oznaczono różniczkowanie względem Θ. W oparciu o (1.3), (1.4) oraz (2.2) (2.3) możemy teraz wyznaczyć tensor B^{ij} oraz $(B^2)^{ij}$

$$B^{ij} = \begin{bmatrix} \alpha^2+\alpha'^2 & \alpha'\beta'/R & 0 \\ \alpha'\beta'/R & \beta'^2/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

$$(B^2)^{ij} = \begin{bmatrix} (\alpha^2+\alpha'^2)^2+\alpha^2\alpha'^2\beta'^2 & \alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2)/R & 0 \\ \alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2)/R & (\alpha'^2\beta'^2+\alpha^2\beta'^4)/R & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Zgodnie z (1.4) pierwsze dwa niezmienniki tensora B^{ij} są

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2+\lambda^2, \\ I_2 &= \alpha^4\beta'^2+\lambda^2(I_1-\lambda^2). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dla rozpatrywanego tutaj materiału nieściśliwego zgodnie z (1.6) trzeci niezmiennik I_3 jest równy jedności; obliczając ten niezmiennik i przyrównując go do jedności otrzymujemy

$$\lambda^4\alpha^4\beta'^2 = 1, \tag{2.8}$$

skąd wynika

$$\beta' = \frac{1}{\alpha^2\lambda} \quad \text{lub} \quad \beta' = -\frac{1}{\alpha^2\lambda}. \tag{2.9}$$

Warunek nieściśliwości jest więc spełniony jeśli zachodzi $(2.9)_1$ lub $(2.9)_2$. Dalsze rozważania ograniczymy do przypadku, kiedy zachodzi $(2.9)_1$. Podstawiając (2.9) do (2.5)-(2.7) otrzymujemy

$$B^{ij} = \begin{bmatrix} \alpha^2+\beta'^2 & \frac{1}{R}\frac{\alpha'}{\alpha^2\lambda} & 0 \\ \frac{1}{R}\frac{\alpha'}{\alpha^2\lambda} & \frac{1}{\alpha^2\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

$$(2.11)\qquad (B^2)^{ij}=\begin{bmatrix} (\alpha^2+\alpha'^2)^2+\dfrac{\alpha'^2}{\alpha^2\lambda^2} & \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\alpha'}{\lambda}+\dfrac{\alpha'^3}{\alpha^2\lambda}+\dfrac{\alpha'}{\alpha^4\lambda^3}\right) & 0 \\ \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\alpha'}{\lambda}+\dfrac{\alpha'^3}{\alpha^2\lambda}+\dfrac{\alpha'}{\alpha^4\lambda^3}\right) & \dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{\alpha'^2}{\alpha^4\lambda^2}+\dfrac{1}{\alpha^6\lambda^4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix},$$

$$(2.12)\qquad I_1=\lambda^2+\alpha^2+\alpha'^2+\frac{1}{\alpha^2\lambda^2},\qquad I_2=\frac{1}{\lambda^2}+\lambda^2(I_1-\lambda)^2.$$

Jak wynika z (2.12) niezmienniki I_1, I_2 są jedynie funkcjami kąta Θ, nie są natomiast funkcjami promienia r. Fakt ten istotnie upraszcza dalsze obliczenia.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia naprężeń τ^{ij}. (Zgodnie z (1.7) mamy

$$(2.13)\qquad \begin{aligned} \tau^{11} &= \chi_1(\alpha^2+\alpha'^2)+\chi_2(\alpha^4+\alpha'^4+2\alpha^2\alpha'^2+\lambda^{-2}\alpha^{-2}\alpha'^2)+p,\\ r^2\tau^{22} &= \chi_1\lambda^{-2}\alpha^{-2}+\chi_2(\lambda^{-2}\alpha^{-2}\alpha'^2+\lambda^{-4}\alpha^{-4})+p,\\ \tau^{33} &= \chi_1\lambda^2+\chi_2\lambda^4+p,\\ r\tau^{12} &= \chi_1\lambda^{-1}\alpha^{-1}\alpha'+\chi_2(\lambda^{-1}\alpha\alpha'+\lambda^{-1}\alpha^{-1}\alpha'^3+\lambda^{-3}\alpha^{-3}\alpha'),\\ \tau^{23} &= \tau^{31}=0. \end{aligned}$$

W walcowym układzie współrzędnych równania równowagi (1.8) przyjmują postać

$$(2.14)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\tau^{11}+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\tau^{21}+\frac{1}{r}(\tau^{11}-r^2\tau^{22})=0,\\ &\frac{\partial}{\partial r}\tau^{12}+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\tau^{22}+\frac{3}{r}\tau^{12}=0,\\ &\frac{\partial}{\partial z}\tau^{33}=0. \end{aligned}$$

Zgodnie z (2.1) i (2.9) należy przy tym pamiętać, że $d/dr=\alpha^{-1}\,d/dR$, $d/d\vartheta=1/\beta'\;d/d\Theta=\lambda\alpha^2\,d/d\Theta$. Podstawiając do powyższych równań (2.13) i uwzględniając (2.12) otrzymujemy

$$(2.15)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial R}=-L_1(R,\Theta),\\ &\frac{\partial p}{\partial\Theta}=-L_2(R,\Theta),\\ &\frac{\partial p}{\partial Z}=0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} (2.16)\qquad RL_1(R,\Theta) &= \chi_1(\alpha^2-\lambda^{-2}\alpha^{-2}+\alpha\alpha'')+\\ &+\chi_2(\alpha^4-\lambda^{-4}\alpha^{-4}-3\lambda^{-2}\alpha'^2+3\alpha^2\alpha'^2+\alpha^3\alpha''+3\alpha\alpha'^2\alpha'')+\\ &+2\alpha'^2(\alpha^2+\alpha\alpha''-\lambda^{-2}\alpha^{-2})\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial I_1}+\lambda^2\frac{\partial\chi_1}{\partial I_2}\right)+\\ &+2\alpha'^2(\alpha^2+\alpha\alpha''-\lambda^{-2}\alpha^{-2})(\alpha^2+\alpha'^2+\lambda^{-2}\alpha^{-2})\left(\frac{\partial\chi_2}{\partial I_1}+\lambda^2\frac{\partial\chi_2}{\partial I_2}\right), \end{aligned}$$

$$\lambda\alpha^2 L_2(R,\Theta) = 2\chi_2(\alpha\alpha'\lambda^{-1}+\alpha'\alpha''\lambda^{-1}-3\alpha'\alpha^{-3}\lambda^{-3})+ \tag{2.17}$$
$$+\frac{2\alpha'}{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial I_1}+\lambda^2\frac{\partial\chi_1}{\partial I_2}\right)(\alpha^2+\alpha\alpha''-\lambda^{-2}\alpha^{-2})+$$
$$+\frac{2\alpha'}{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial I_1}+\lambda^2\frac{\partial\chi_2}{\partial I_2}\right)(\alpha^2+\alpha\alpha''-\lambda^{-2}\alpha^{-2})(\alpha'^2+\lambda^{-2}\alpha^{-2}).$$

Z równania $(2.15)_3$ wynika, że p nie zależy od Z, $p = p(R, \Theta)$. Koniecznym warunkiem istnienia funkcji p jest więc

$$\frac{\partial L_1}{\partial\Theta} = \frac{\partial L_2}{\partial R}, \tag{2.18}$$

co wobec niezależności $L_2(\Theta)$ od R prowadzi do wniosku, że $L_1(R, \Theta)$ nie zależy od Θ. Zgodnie z $(2.15)_1$ warunkiem równowagi jest więc

$$\chi_1(\alpha^2-\lambda^{-2}\alpha^{-2}+\alpha\alpha'')+\chi_2(\alpha^4-\lambda^{-4}\alpha^{-4}+3\alpha^2\alpha'^2-3\lambda^{-2}\alpha'^2+\alpha^3\alpha''+3\alpha\alpha'^2\alpha''+\lambda^{-2}\alpha^{-1}\alpha'')+$$
$$+2\alpha'^2\left(\frac{\partial\chi_2}{\partial I_1}+\lambda^2\frac{\partial\chi_2}{\partial I_2}\right)(\alpha^2+\alpha\alpha''-\lambda^{-2}\alpha^{-2})(\alpha^2+\alpha'^2+\lambda^{-2}\alpha^{-2})+ \tag{2.19}$$
$$+2\alpha'^2\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial I_1}+\lambda^2\frac{\partial\chi_1}{\partial I_2}\right)(\alpha^2+\alpha\alpha''-\lambda^{-2}\alpha^{-2}) = H,$$

gdzie H jest dowolną stałą. Związek ten jest nieliniowym zwyczajnym równaniem różniczkowym pozwalającym wyznaczyć funkcję $\alpha(\Theta)$. Rozwiązanie równania (2.19) możliwe jest jednak dopiero po podaniu funkcji $\chi_1(I_1, I_2)$ oraz $\chi_2(I_1, I_2)$.

Dalsze rozważania ograniczamy do materiału, gdzie χ_1 jest stałą materiałową, a χ_2 jest równe zeru (tzw. *neohookean*)

$$\chi_1 = C, \quad \chi_2 = 0. \tag{2.20}$$

Dla tego materiału (2.19) redukuje się do równania

$$\alpha_2+\alpha\alpha''-\frac{1}{\lambda^2\alpha^2} = \frac{H}{C}. \tag{2.21}$$

Oznaczając

$$\alpha'(\Theta) = \varkappa(\alpha(\Theta)), \tag{2.22}$$

mamy

$$\alpha'' = \varkappa\frac{d\varkappa}{d\alpha}. \tag{2.23}$$

Równanie (2.21) można więc przedstawić w następującej postaci

$$\varkappa\frac{d\varkappa}{d\alpha} = \frac{H}{\alpha C}-\alpha+\frac{1}{\lambda^2\alpha^3}, \tag{2.24}$$

skąd wynika, że

$$\frac{1}{2}\varkappa^2 = \frac{H}{C}\ln\alpha-\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\frac{1}{\lambda^2\alpha^2}\right)+D, \tag{2.25}$$

gdzie D jest stałą całkowania. Ponowne całkowanie prowadzi do

$$\Theta = \int_1^{\alpha} \left(\frac{H}{C} \ln \alpha^2 - \alpha^2 - \frac{1}{\lambda^2 \alpha^2} \right)^{-1/2} d\alpha + E, \tag{2.26}$$

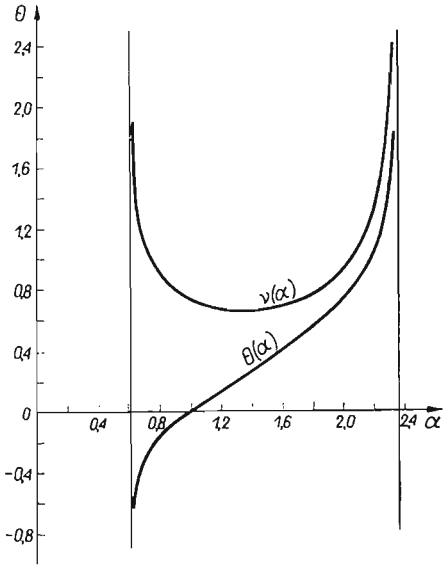
gdzie E jest stałą całkowania. W ten sposób określona została dwuparametrowa rodzina deformacji możliwych w materiale (2.20).

Jeśli $H = 0$, to ogólnym rozwiązaniem równania (2.26) jest

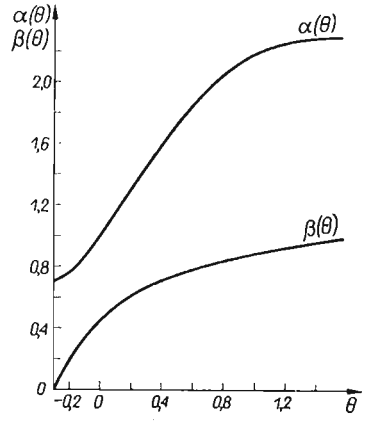
$$\alpha(\Theta) = \sqrt{\varkappa^2 \cos^2(\Theta - \Theta_0) + \frac{1}{\varkappa^2 \lambda^2} \sin^2(\Theta - \Theta_0)}, \tag{2.27}$$

gdzie Θ_0 oraz $\varkappa$ są dowolnymi stałymi. Deformacja (2.27) jest deformacją jednorodną.

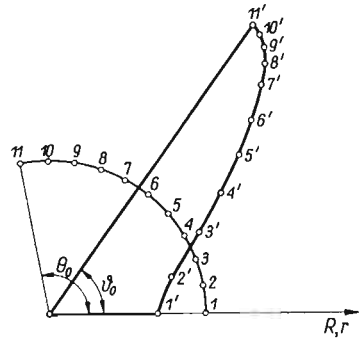
W przypadku $H \neq 0$ funkcja $\alpha(\Theta)$ nie daje się wyrazić przez funkcje elementarne. W celu pokazania jakiemu odkształceniu odpowiada (2.26), wykonano odpowiednie



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

obliczenia numeryczne dla $H = C$, $D = 4$, $E = 0$, $\lambda = 1$. Na rys. 2 pokazano obliczoną dla tych wartości funkcję $\nu = \left(D + H\ln\frac{\alpha^2}{C} - \alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2\lambda^2}\right)^{-1/2}$ oraz jej całkę, która jest poszukiwaną funkcją $\Theta(\alpha)$. Na rys. 3 pokazano funkcję $\alpha(\Theta)$ oraz funkcję $\beta(\Theta)$. Na rys. 4 pokazano klin nieodkształcony i odkształcony. Po odkształceniu punkty 0', 1', 2', ... przechodzą w punkty 0, 1, 2, ...

3. Deformacja stożka

Istnienie deformacji (2.1) sugeruje, że podobna deformacja jest również możliwa, jeśli walcowy układ współrzędnych zastąpić kulistym. Wykażemy, że tak jest w rzeczywistości.

Rozważamy deformację, która w ustalonym kulistym układzie współrzędnych opisana jest związkami[1])

$$\begin{aligned} r &= R\alpha(\Theta), \\ \vartheta &= \beta(\Theta), \\ \varphi &= \Phi, \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdzie α oraz β są pewnymi funkcjami. Celem dalszych rozważań jest takie określenie funkcji α i β, żeby deformacja była możliwa.

Oznaczając $x^i = (r, \vartheta, \varphi)$, $X^\alpha = (R, \Theta, \Phi)$ mamy

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\vartheta \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\sin^2\Theta \end{bmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R^2\sin^2\Theta \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Obliczając teraz w oparciu o (3.1) gradient odkształcenia F^i_α (1.2) otrzymujemy

$$F^i_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & R\alpha' & 0 \\ 0 & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

gdzie primem oznaczono różniczkowanie względem Θ.

W oparciu o (1.3), (1.4), (3.2) i (3.3) możemy teraz wyznaczyć tensory B^{ij} i $B^{ir}B^{js}g_{rs} = (B^2)^{ij}$, a mianowicie

$$B^{ij} = \begin{bmatrix} \alpha^2 + \alpha'^2 & \frac{1}{R}\alpha'\beta' & 0 \\ \frac{1}{R}\alpha'\beta' & \frac{1}{R^2}\beta'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R^2\sin^2\Theta \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

[1]) Deformację nieco ogólniejszą rozważał w 1967 r. R. M. Christensen [3], popełnił jednak omyłkę w obliczeniach tensora B^{ij}, która rzutuje na dalsze obliczenia.

$$(3.6)\qquad (B^2)^{ij} = \begin{bmatrix} (\alpha^2+\alpha'^2)+\alpha^2\alpha'^2\beta'^2 & \frac{1}{R}\alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2) & 0 \\ \frac{1}{R}\alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2) & \frac{1}{R^2}\beta'^2(\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha^2}{R^2}\frac{\sin^2\beta}{\sin^4\Theta} \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z (1.4) pierwsze dwa niezmienniki tensora B^{ij} są

$$(3.7)\qquad I_1 = \alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2+\alpha^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\Theta},$$

$$I_2 = \alpha^4\beta'^2+\alpha^2(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2)\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\Theta}.$$

Niezmienniki te są więc tylko funkcjami kąta Θ.

Dla rozpatrywanego tutaj materiału nieściśliwego zgodnie z (1.5) trzeci niezmiennik jest równy jedności. Obliczając ten niezmiennik i przyrównując go do jedności otrzymujemy warunek nieściśliwości

$$(3.8)\qquad \alpha^6\beta'^2\sin^2\beta = \sin^2\Theta.$$

W stosunku do (2.8) zachodzi tu ta różnica, że (3.8) jest równaniem różniczkowym ze względu na β.

Ograniczymy się dalej do przypadku, kiedy każda z wielkości w (3.8) jest dodatnia. W tym przypadku po wyciągnięciu pierwiastka z obu stron (3.8) otrzymujemy

$$(3.9)\qquad \alpha = \left(\frac{\sin^2\Theta}{\beta'\sin\beta}\right)^{1/3}.$$

Deformacja jest więc izochoryczna jeśli zmianie kąta towarzyszy określona przez (3.3) i (3.1) zmiana promienia r.

Zgodnie z (1.7) naprężenia τ^{ij} są

$$(3.10)\qquad \begin{aligned} \tau^{11} &= \chi_1(\alpha^2+\alpha'^2)+\chi_2(\alpha^4+\alpha'^4+2\alpha^2\alpha'^2+\alpha^2\alpha'^2\beta'^2)+p, \\ r^2\tau^{22} &= \chi_1\alpha^2\beta'^2+\chi_2\alpha^2\beta'^2(\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2)+p, \\ r^2\tau^{33}\sin^2\vartheta &= \chi_1\alpha^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\Theta}+\chi_2\alpha^4\frac{\sin^4\beta}{\sin^4\Theta}+p, \\ r\tau^{12} &= \chi_1\alpha\alpha'\beta'+\chi_2\alpha\alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2), \\ \tau^{23} &= \tau^{31} = 0, \end{aligned}$$

a równania równowagi (1.8) w rozpatrywanym kulistym układzie współrzędnych przybierają postać

$$(3.11)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\tau^{11}+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\tau^{21}+\frac{1}{r}(2\tau^{11}-r^2\tau^{22}-r^2\tau^{33}\sin^2\vartheta)+\tau^{21}\operatorname{ctg}\vartheta = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial r}\tau^{12}+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\tau^{22}+\frac{2}{r}\tau^{12}+(\tau^{22}-\tau^{33}\sin^2\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial\varphi}\tau^{33} = 0, \end{aligned}$$

przy czym zgodnie z (3.1) $\frac{d}{dr}=\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dR}$, $\frac{d.}{d\vartheta}=\frac{1}{\beta'}\frac{d}{d\Theta}$, $\frac{d}{d\varphi}=\frac{d}{d\Phi}$.

Dla oszczędności miejsca ograniczymy dalsze rozważania do neohookeanu [por. (2.20)]. Dla tego materiału (3.11) redukuje się do

$$\frac{\partial p}{\partial R}+\frac{1}{R}\chi_1\left(2\alpha^2+3\alpha'^2+\alpha\alpha''-\alpha\beta'^2+\frac{\alpha\alpha'\beta''}{\beta'}-\alpha^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\Theta}+\alpha\alpha'\beta'\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)=0,$$

$$\frac{1}{\beta'}\frac{\partial p}{\partial\Theta}+\chi_1\left(\alpha\alpha'\beta'+2\alpha^2\alpha'+2\alpha\beta'\alpha'+\alpha\beta'^2\operatorname{ctg}\beta-\alpha^2\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\Theta}\right)=0, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial p}{\partial Z}=0.$$

Jak wynika z $(3.12)_3$ funkcja p nie zależy od Z, $p=p(R,\Theta)$.

Wobec tego, że $(3.12)_2$ nie zależy od R mamy $\partial^2 p/\partial R\partial\Theta=0$. Warunkiem istnienia p jest więc

$$2\alpha+3\alpha'+\alpha\alpha''-\alpha\beta'^2+\frac{\alpha\alpha'\beta''}{\beta'}-\alpha^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\Theta}+\alpha\alpha'\beta'\operatorname{ctg}\beta=\text{const}. \tag{3.13}$$

Po podstawieniu (3.9) do powyższego warunku, otrzymujemy jedno zwyczajne równanie różniczkowe na funkcję $\beta(\Theta)$. Równanie to jest jednak bardzo skomplikowane i nie udało się znaleźć analitycznego rozwiązania tego równania. Rozwiązanie numeryczne można znaleźć w sposób podobny jak w części drugiej dla odkształcenia płaskiego.

Literatura cytowana w tekście

1. C. TRUESDELL, W. NOLL, *Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Flügge's Encyclopedia of Physics, Berlin 1960.
2. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
3. R. M. CHRISTENSEN, *Large elastic deformation of a spherical wedge*, Int. J. Non-Lin. Mech., **3**, **2** (1967), 207–216.

Резюме

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОГО КЛИНА И КОНУСА

Рассматривается конечная упругая деформация несжимаемого клина. Точки клина подвергаются таким радиальным и окружным перемещениям, что плоскости в пределах которых находится край клина, остаются плоскостями. Показано, что для того чтобы определить напряженное и деформированное состояние, следует решить дифференциальное уравнение второго порядка. Это уравнение решается для случая, когда материалом является так наз. неогукиан. Дается одно численное решение.

Аналогичные решения проводились для конуса, который подвергается такой осесимметрической деформации, что прямые, проходящие через вершину клина, остаются прямыми.

Summary

FINITE DEFORMATIONS OF AN ELASTIC WEDGE AND CONE

The finite deformations of the elastic incompressible wedge are investigated. The points of the wedge suffer radial and transversal displacements, such that the surfaces $\vartheta = \text{const}$ remain plane. It is shown, that in order to find the stress and strain, it is necessary to solve a second order ordinary differential equation. This equation is solved for the neo-Hookean material. The numerical solution is given.

Similar investigations are performed for an elastic cone under axially-symmetric deformation in such a manner that the surfaces $\vartheta = \text{const}$ remain the conical surfaces.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 października 1968 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 7 (1969)

STATYKA POWIERZCHNIOWYCH OŚRODKÓW WŁÓKNISTYCH

WOJCIECH BARAŃSKI (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

W ostatnich latach można zaobserwować dość gwałtowny rozwój mechaniki ośrodków ciągłych, między innymi mechaniki tzw. ciała typu Cosserat. Ciałem typu Cosserat zwykło się nazywać ośrodek ciągły, w którym stan naprężenia opisuje się za pomocą niesymetrycznego tensora naprężenia, a nawet za pomocą tensorów naprężeń wyższych rzędów. Ten kierunek badań został zapoczątkowany pracami braci E. i F. COSSERAT [4]. Najbardziej reprezentatywnymi dla tego kierunku są prace TOUPINA [12], [13], GREENA i RIVLINA [9], [10], oraz ZAHORSKIEGO [17]. Szczegółowe omówienie prac z tego zakresu, które ukazały się do lipca 1966 r. zostało zamieszczone w pracy BARAŃSKIEGO, WILMAŃSKIEGO i WOŹNIAKA [2].

Teorie dwuwymiarowych ośrodków ciągłych typu Cosserat były rozpatrywane w pracach E. i F. COSSERAT [4], ERICKSENA i TRUESDELLA [5], GREENA, NAGHDIEGO i WAINRIGHTA [8] oraz COHENA i DESILVY [3]. Były to pewne uogólnienia teorii powłok obejmujące jako przypadek szczególny teorię Kirchhoffa–Love'a. W pracy [15], [16] WOŹNIAK znalazł po raz pierwszy inżynierskie zastosowanie teorii dwuwymiarowego ośrodka typu Cosserat, mianowicie wprowadził tzw. powierzchniowy ośrodek włóknisty jako ciągły model odpowiednio regularnego powierzchniowego dźwigara rusztowego. Powierzchniowy ośrodek włóknisty jest w zasadzie dwuwymiarowym ośrodkiem typu Cosserat wyposażonym dodatkowo w wewnętrzną strukturę — odpowiednik siatki utworzonej z osi dźwigara rusztowego — daną pewnym zbiorem rodzin krzywych.

Niniejsza praca jest w zasadzie streszczeniem rozprawy doktorskiej autora [1]. Zawiera teorię ośrodka włóknistego znajdującego się w stanie równowagi, zbudowaną w oparciu o podstawowe założenia mechaniki ośrodków ciągłych oraz o pewne dodatkowe postulaty wynikające z tego, że powierzchniowy ośrodek włóknisty ma być modelem powierzchniowego dźwigara rusztowego. Szczególnie dużo uwagi poświęcono wyjaśnieniu konsekwencji wprowadzenia wewnętrznej struktury oraz wyjaśnieniu podobieństwa powierzchniowego ośrodka włóknistego do powierzchniowego dźwigara rusztowego.

2. Podstawowe oznaczenia

$\{x_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ przestrzenny układ współrzędnych kartezjańskich,

S powierzchnia jaka tworzy powierzchniowy ośrodek w konfiguracji odniesienia,

$\{\eta^\alpha\}$ $(\alpha = 1, 2)$ układ współrzędnych materialnych powierzchni S,

$(.), \alpha$ pochodna cząstkowa według współrzędnej η^α,

$(.)|\alpha$ pochodna kowariantna według współrzędnej η^α w układzie współrzędnych materialnych,

$\Delta = 1, 2, 3 \ldots N$ martwe wskaźniki wyróżniające poszczególne rodziny krzywych,

$\underset{\Delta}{u}(\eta^\alpha) = \text{const}$ równanie rodziny włókien Δ,

$\underset{\Delta}{\tilde{t}_\alpha}$ wektor jednostkowy normalny do włókna $\underset{\Delta}{u} = \text{const}$,

$\underset{\Delta}{t_\alpha}$ wektor jednostkowy styczny do włókna $\underset{\Delta}{u} = \text{const}$,

y_{ai} $(a = 1, 2, 3)$ ortogonalny tensor obrotu cząstki ośrodka,

e gęstość energii wewnętrznej,

$P^\alpha_{\cdot i}$ tensor naprężenia,

$M^\alpha_{\cdot ij}$, $(\overset{\bullet}{M}{}^\alpha_{\cdot i})$ tensor i pseudotensor naprężeń momentowych,

$\underset{\Delta}{\bar{P}_i}$ wektor napięcia w rodzinie włókien Δ,

$\underset{\Delta}{\bar{M}_{ij}}$, $(\underset{\Delta}{\overset{\bullet}{\bar{M}}_i})$ tensor i pseudowektor napięcia momentowego w rodzinie włókien Δ,

$G_{\alpha a}$, $K_{\alpha ab}$ miary odkształcenia ośrodka włóknistego,

$\underset{\Delta}{H_a}$, $\underset{\Delta}{L_{ab}}$ miary odkształcenia rodziny włókien Δ,

u_i wektor przemieszczenia cząstki ośrodka włóknistego,

v_i pseudowektor obrotu cząstki ośrodka włóknistego,

$\gamma_{\alpha i}$, $\varkappa_{\alpha i}$ miary małego odkształcenia ośrodka,

$\underset{\Delta}{R_{ij}}$, $\underset{\Delta}{Q_{ij}}$, $\underset{\Delta}{S_{ij}}$ macierze sztywności rodziny włókien Δ,

U_i, V_i przemieszczenia i obroty węzłów rusztu,

$\underset{\Delta}{\pi_i}$, $\underset{\Delta}{\mu_i}$ siły i momenty przekrojowe w prętach rusztu,

$\underset{\Delta}{\mathscr{G}_i}$, $\underset{\Delta}{\mathscr{K}_i}$ miary globalnego odkształcenia prętów rusztu,

$\underset{\Delta}{\mathscr{R}_{ij}}$, $\underset{\Delta}{\mathscr{Q}_{ij}}$, $\underset{\Delta}{\mathscr{S}_{ij}}$ macierze sztywności prętów rusztu.

3. Podstawowe definicje i pojęcia pierwotne

D.1. Powierzchniowym ośrodkiem włóknistym nazywać będziemy dwuwymiarową rozmaitość różniczkowalną S (GOETZ [6]) cząstek materialnych η z zadanymi na niej N rodzinami przebiegów $\underset{\Delta}{u}$ $(\Delta = 1, 2, \ldots N)$, posiadającą w każdej chwili t realizację w postaci powierzchni zwyczajnej s_t odpowiedniej klasy.

Wprowadźmy w rozmaitości S lokalne współrzędne $\{\eta^\alpha\}$ $(\alpha = 1, 2)$ i nazwijmy je współrzędnymi materialnymi. Powierzchnię s_t zadawać będziemy równaniami

$$x_i = x_i(\eta, t), \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3.1}$$

gdzie $\{x_i\}$ jest układem współrzędnych kartezjańskich zwanym dalej układem współrzędnych przestrzennych.

D. 2. Konfiguracją aktualną powierzchniowego ośrodka włóknistego nazywać będziemy powierzchnię s_t wraz z określonymi na niej odpowiednio regularnymi polami trzech wektorów

$$y_{ai} = y_{ai}(\eta, t), \quad (a = 1, 2, 3) \tag{3.2}$$

tworzących w każdym punkcie i w każdej chwili ortonormalny układ odniesienia, tzn.

$$y_{ai}y_{bi} = \delta_{ab}, \quad y_{ai}y_{aj} = \delta_{ij}. \tag{3.3}$$

Wektory y_{ai} nazywać będziemy wektorami kierunkowymi.

D. 3. Ruchem powierzchniowego ośrodka włóknistego nazywać będziemy jednoparametrową rodzinę konfiguracji aktualnych; parametrem tej rodziny jest czas. Ruch ośrodka opisany jest równaniami (3.1) i (3.2).

D. 4. Konfiguracją odniesienia powierzchniowego ośrodka włóknistego nazywać będziemy jedną z konfiguracji aktualnych.

Powierzchnię s_t w konfiguracji odniesienia zadamy równaniami

$$x_i = X_i(\eta) \tag{3.4}$$

i będziemy ją oznaczać literą S, natomiast wartości wektorów kierunkowych w konfiguracji odniesienia oznaczymy $Y_{ai}(\eta)$. Współrzędne materialne $\{\eta^\alpha\}$ w konfiguracji odniesienia traktować będziemy jako układ współrzędnych Gaussa powierzchni S i nazywać będziemy układem współrzędnych materialnych.

Z przedstawionej definicji ruchu ośrodka (D.3) wynika, że każda cząstka materialna η posiada sześć stopni swobody. Trzy z nich odpowiadają przemieszczeniu cząstki, natomiast pozostałe trzy odpowiadają obrotom cząstki. Ciała dwuwymiarowe, których konfigurację opisuje się za pomocą wektorów kierunkowych są nazywane powierzchniami zorientowanymi. Po raz pierwszy teorię powierzchni zorientowanej rozpatrywali bracia E. i F. COSSERAT [4], a ostatnio ERICKSEN i TRUESDELL [5], TRUESDELL i TOUPIN [14], GREEN, NAGHDI i WAINRIGHT [8] oraz COHEN i DESILVA [3]. Powierzchniowy ośrodek włóknisty jest przypadkiem szczególnym powierzchni zorientowanej. Jedyna różnica polega na tym, że ośrodek włóknisty jest wyposażony w N rodzin przebiegów, opisujących tzw. wewnętrzną strukturę ośrodka.

D. 5. O dwóch ruchach

$$x_i = x_i(\eta, t), \quad y_{ai} = y_{ai}(\eta, t) \tag{3.5}$$

oraz

$$x_i = x_i^*(\eta, t^*), \quad y_{ai} = y_{ai}^*(\eta, t^*) \tag{3.6}$$

będziemy mówili, że różnią się o ruch sztywny, gdy spełniają związki

$$\begin{aligned} x_i^*(\eta, t^*) &= Q_{ij}(t)x_j(\eta, t)+a_i(t), \\ y_{ai}^*(\eta, t^*) &= Q_{ij}(t)y_{aj}(\eta, t), \\ t^* &= t+b, \end{aligned} \tag{3.7}$$

gdzie Q_{ij} jest tensorem ortogonalnym właściwym, tzn.

$$Q_{ij}Q_{kj} = \delta_{ik}, \quad \det Q_{ij} = 1, \tag{3.8}$$

a_i jest wektorem, natomiast b jest skalarem.

Dotychczasowe rozważania dotyczyły wyłącznie geometrycznych aspektów teorii ośrodka włóknistego. W dalszym ciągu do opisu właściwości mechanicznych ośrodka będziemy używali następujących pojęć pierwotnych[1]):

P.1 gęstości energii wewnętrznej e,

P.2 gęstości sił przekrojowych p_i,

P.3 gęstości momentów przekrojowych m_{ij},

P.4 gęstości sił zewnętrznych f_i,

P.5 gęstość momentów zewnętrznych h_{ij}.

O wymienionych powyżej wielkościach mechanicznych będziemy zakładali, że są odpowiednio regularnymi polami. Będziemy mówili, że pola sił i momentów przekrojowych określają stan naprężenia ośrodka.

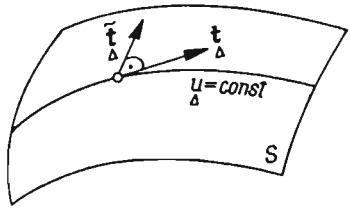
W dalszych rozważaniach używać będziemy wyłącznie opisu materiałowego, tzn. przyjmiemy, że wszystkie gęstości odniesione są do jednostki powierzchni lub jednostki długości w konfiguracji odniesienia, a wszystkie pola zależą wyłącznie od współrzędnych materialnych $\{\eta^\alpha\}$. Przyjmiemy również, że wszystkie składowe oznaczone małymi literami alfabetu greckiego są odniesione do bazy naturalnej układu współrzędnych materialnych.

4. Wewnętrzna struktura powierzchniowego ośrodka włóknistego

Z definicji ośrodka (D.1) wynika, że N zadanych rodzin przebiegów $\underset{\Delta}{u}$ posiada w każdej chwili t realizację w postaci N rodzin krzywych, które nazwiemy włóknami. Siatkę utworzoną z N rodzin krzywych oznaczymy literą $\mathfrak{M}_N$. Przyjmiemy, że przez każdą cząstkę η przechodzi dokładnie po jednej krzywej z każdej rodziny. Równanie rodziny krzywych Δ napiszemy w postaci uwikłanej:

$$\underset{\Delta}{u}(\eta^\alpha) = \text{const}. \tag{4.1}$$

W płaszczyźnie stycznej w danym punkcie do powierzchni S wyróżnimy dwa wektory jednostkowe $\underset{\Delta}{t}$ i $\underset{\Delta}{\tilde{t}}$, przy czym niech pierwszy z nich będzie styczny, a drugi normalny do krzywej $\underset{\Delta}{u} = \text{const}$ (rys. 1). Wektory te spełniają związki



Rys. 1

$$\underset{\Delta}{\tilde{t}}_\alpha = \pm \underset{\Delta}{u}_{,\alpha}(a^{\mu\nu}\underset{\Delta}{u}_{,\mu}\underset{\Delta}{u}_{,\nu})^{-1/2}, \quad \underset{\Delta}{t}_\alpha = \pm \epsilon_{\alpha\beta}\underset{\Delta}{u}^{,\beta}(a^{\mu\nu}\underset{\Delta}{u}_{,\mu}\underset{\Delta}{u}_{,\nu})^{-1/2} \tag{4.2}$$

oraz

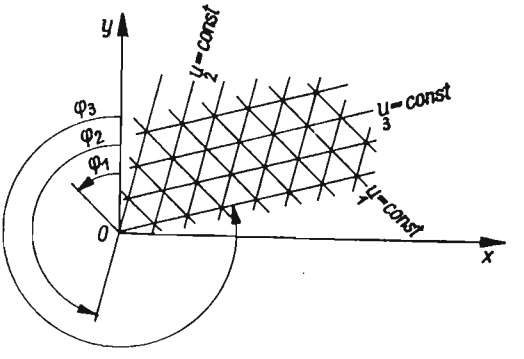
$$\underset{\Delta}{t}_\alpha \underset{\Delta}{t}^\alpha = 1, \quad \underset{\Delta}{t}_\alpha \underset{\Delta}{\tilde{t}}^\alpha = 0, \quad \underset{\Delta}{\tilde{t}}_\alpha \underset{\Delta}{\tilde{t}}^\alpha = 1. \tag{4.3}$$

[1]) W dalszych rozważaniach nie będziemy używać żadnych pojęć dynamicznych, takich jak pęd, kręt czy energia kinetyczna.

O siatce $\mathfrak{M}_3$ złożonej z trzech rodzin krzywych będziemy mówili, że jest siatką sześciokątną, gdy w każdym płacie prostym będącym częścią powierzchni S daje się odwzorować topologicznie na siatkę

$$(4.4) \qquad \underset{\Delta}{u}(x, y) = \operatorname{Re}[(x+iy)\exp(-\underset{\Delta}{\varphi})], \quad \left(\underset{\Delta}{\varphi} = \varphi_0 + \frac{2\pi}{3}\Delta\right), \quad (\Delta = 1, 2, 3)$$

złożoną z trzech rodzin prostych równoległych (rys. 2).



Rys. 2

5. Podstawowe założenia teorii powierzchniowego ośrodka włóknistego

Z.1. W danym punkcie gęstości sił i momentów przekrojowych zależą wyłącznie od orientacji przekroju, przy pomocy którego zostały uzewnętrznione, tzn. w danym punkcie zachodzi

$$(5.1) \qquad p_i = p_i(\mathbf{n}), \quad m_{ij} = m_{ij}(\mathbf{n}),$$

gdzie $\mathbf{n}$ jest jednostkowym wektorem leżącym w płaszczyźnie stycznej w tym punkcie do powierzchni S i zewnętrznie normalnym w tym punkcie do linii przekrojowej.

Z.2. Wszystkie wprowadzone dotychczas wielkości mechaniczne (P.1–P.5) są addytywne względem poszczególnych rodzin włókien, tzn. można jednoznacznie wyróżnić tą część danej wielkości mechanicznej, która przypada na daną rodzinę włókien.

Dla energii wewnętrznej będzie zatem zachodził rozkład

$$(5.2) \qquad e = \sum_{\Delta=1}^{N} \underset{\Delta}{e},$$

gdzie $\underset{\Delta}{e}$ jest gęstością energii wewnętrznej rodziny włókien $\underset{\Delta}{u}$. Związki analogiczne do (5.2) zachodzą dla pozostałych wielkości mechanicznych.

Z.3. Bezpośrednie oddziaływania mechaniczne sąsiednich włókien danej rodziny są równe zeru, tzn.

$$(5.3) \qquad \underset{\Delta}{p_i}(\tilde{\mathbf{t}}) = 0, \quad \underset{\Delta}{m_{ij}}(\tilde{\mathbf{t}}) = 0.$$

Dalsze założenia dotyczyć będą wyłącznie sprężystego ośrodka włóknistego znajdującego się w stanie równowagi.

Z.4. W każdym stanie równowagi sprężystego powierzchniowego ośrodka włóknistego energia wewnętrzna spełnia równanie

$$\underset{\Delta}{e} = \underset{\Delta}{\in}(x_{i,\alpha};\ y_{ai};\ y_{ai,\alpha};\ \eta), \tag{5.4}$$

gdzie $\underset{\Delta}{\in}$ jest tzw. potencjałem sprężystości rodziny.

Z.5. Potencjał sprężystości jest wielkością materialnie obiektywną, tzn. jest niezmiennikiem grupy przekształceń

$$x_i \to Q_{ij}x_j + a_i, \qquad y_{ai} \to Q_{ij}y_{aj}, \tag{5.5}$$

gdzie Q_{ij} oraz a_i spełniają założenie wymienione w definicji ruchu sztywnego (D.5).

Z.6. W stanie równowagi sprężystego powierzchniowego ośrodka włóknistego spełniona jest zasada prac przygotowanych przyjęta w następującej postaci:

$$\delta\int_\sigma \underset{\Delta}{e}\,dS = \int_\sigma (\underset{\Delta}{f_i}\delta x_i + \underset{\Delta}{h_{ij}}y_{ai}\delta y_{aj})\,dS + \oint_{\partial\sigma}(\underset{\Delta}{p_i}\delta x_i + \underset{\Delta}{m_{ij}}y_{ai}\delta y_{aj})\,dl, \tag{5.6}$$

gdzie σ jest dowolną częścią powierzchni S, natomiast $\partial\sigma$ jest brzegiem tej części.

6. Podstawowe równania statyki sprężystego powierzchniowego ośrodka włóknistego

T.1. Równania Eulera dla problemu wariacyjnego (5.6) mają postać

$$\begin{gathered}\frac{\partial \underset{\Delta}{\in}}{\partial x_{l,\alpha}}|_\alpha + \underset{\Delta}{f_l} = 0,\\ \left(y_{a[j}\frac{\partial \underset{\Delta}{\in}}{\partial y_{|a|i],\alpha}}\right)|_\alpha + \frac{\partial \underset{\Delta}{\in}}{\partial x_{[i,|\alpha|}}x_{j],\alpha} + \underset{\Delta}{h_{lj}} + \underset{\Delta}{K_{[ij]}} = 0 \qquad \text{dla } \eta \in \sigma\end{gathered} \tag{6.1}$$

oraz

$$\underset{\Delta}{p_i}(\mathbf{n}) = n_\alpha\frac{\partial \underset{\Delta}{\in}}{\partial x_{l,\alpha}}, \qquad \underset{\Delta}{m_{ij}}(\mathbf{n}) = n_\alpha y_{a[j}\frac{\partial \underset{\Delta}{\in}}{\partial y_{|a|i],\alpha}}, \qquad \text{dla } \eta \in \partial\sigma, \tag{6.2}$$

gdzie oznaczono

$$\underset{\Delta}{K_{ij}} \equiv \frac{\partial \underset{\Delta}{\in}}{\partial x_{i,\alpha}}x_{j,\alpha} + \frac{\partial \underset{\Delta}{\in}}{\partial y_{ai}}y_{aj} + \frac{\partial \underset{\Delta}{\in}}{\partial y_{ai,\alpha}}y_{aj,\alpha}. \tag{6.3}$$

Dowód powyższego twierdzenia przeprowadza się, korzystając ze znanych reguł rachunku wariacyjnego.

Równania (6.1) i (6.2) są podstawowymi równaniami statyki sprężystego powierzchniowego ośrodka włóknistego. Równania (6.1) nazwiemy równaniami równowagi, natomiast równania (6.2) nazwiemy warunkami brzegowymi.

D.6. Obiektem naprężeń $P^\alpha_{\cdot i}$ i obiektem naprężeń momentowych $M^\alpha_{\cdot ij}$ nazywać będziemy wielkości sił i momentów przekrojowych uzewnętrznionych przekrojami poprowadzonymi wzdłuż linii parametrycznych układu współrzędnych materialnych, tzn.

$$\begin{aligned}P^\alpha_{\cdot i} &\equiv \sqrt{a^{\alpha\alpha}}\,p_i\big(\mathbf{a}^\alpha(a^{\alpha\alpha})^{-1/2}\big),\\ M^\alpha_{\cdot ij} &\equiv \sqrt{a^{\alpha\alpha}}\,m_{ij}\big(\mathbf{a}^\alpha(a^{\alpha\alpha})^{-1/2}\big),\end{aligned} \qquad \alpha \text{ — nie sumowane} \tag{6.4}$$

gdzie $a^{\alpha\beta}$ jest tensorem metrycznym powierzchni S, natomiast $\mathbf{a}^{\alpha}$ jest bazą wzajemną układu współrzędnych materialnych.

Korzystając z założenia o addytywności wielkości mechanicznych (2.1) można wprowadzić pojęcia obiektu naprężeń $\underset{\Delta}{P}{}^{\alpha}_{\cdot i}$ i obiektu naprężeń momentowych $\underset{\Delta}{M}{}^{\alpha}_{\cdot ij}$ w rodzinie włókien Δ. Wzory definiujące te pojęcia będą podobne do wzorów (6.4).

T.2. Obiekty naprężeń i naprężeń momentowych w rodzinie włókien są odpowiednimi pochodnymi potencjału sprężystości

$$\underset{\Delta}{P}{}^{\alpha}_{\cdot i} = \frac{\partial \underset{\Delta}{\in}}{\partial x_{i,\alpha}}, \qquad \underset{\Delta}{M}{}^{\alpha}_{\cdot ij} = \frac{\partial \underset{\Delta}{\in}}{\partial y_{a[i,|\alpha|]}} y_{|a|j]}, \tag{6.5}$$

a zatem są tensorami.

Aby wykazać powyższe stwierdzenie wystarczy do wzorów (6.4) podstawić warunki brzegowe (6.2), a następnie sprawdzić, że prawe strony związków (6.5) są rzeczywiście tensorami.

Podstawiając (6.5) do (6.1) i (6.2) otrzymujemy

$$\underset{\Delta}{P}{}^{\alpha}_{\cdot i}|_{\alpha} + \underset{\Delta}{f}_{i} = 0, \qquad \underset{\Delta}{M}{}^{\alpha}_{\cdot ij}|_{\alpha} + \underset{\Delta}{P}{}^{\alpha}_{\cdot [i} x_{j],\alpha} + \underset{\Delta}{h}_{ij} + \underset{\Delta}{K}_{[ij]} = 0. \tag{6.6}$$

oraz

$$\underset{\Delta}{p}_{i}(\mathbf{n}) = n_{\alpha} \underset{\Delta}{P}{}^{\alpha}_{\cdot i}, \qquad \underset{\Delta}{m}_{ij}(\mathbf{n}) = n_{\alpha} \underset{\Delta}{M}{}^{\alpha}_{\cdot ij}. \tag{6.7}$$

Równania (6.5)–(6.7) są inną postacią podstawowego układu równań (6.1) i (6.2).

7. Konsekwencje istnienia wewnętrznej struktury ośrodka

T.3. Z założenia o nieoddziaływaniu sąsiednich włókien (Z.2) wynika, że potencjał sprężystości $\underset{\Delta}{\in}$ daje się przedstawić w postaci

$$\underset{\Delta}{\in} = \underset{\Delta}{\in}{}'(\underset{\Delta}{\partial} x_i;\ y_{ai};\ \underset{\Delta}{\partial} y_{ai};\ \tilde{\underset{\Delta}{\partial}}\, y_{ai};\ \eta), \qquad \frac{\partial \underset{\Delta}{\in}{}'}{\partial (\tilde{\underset{\Delta}{\partial}}\, y_{a[i]})} y_{|a|j]} = 0, \tag{7.1}$$

gdzie $\underset{\Delta}{\partial}$ oznacza operator różniczkowy pochodnej absolutnej w kierunku $\underset{\Delta}{\mathbf{t}}$

$$\underset{\Delta}{\partial}(.) \equiv \underset{\Delta}{t}{}^{\alpha}(.)|_{\alpha}. \tag{7.2}$$

Dowód. Zauważmy, że oznaczając

$$\tilde{\underset{\Delta}{\partial}}(.) \equiv \tilde{\underset{\Delta}{t}}{}^{\alpha}(.)|_{\alpha} \tag{7.3}$$

mamy tożsamość

$$(.)|_{\alpha} = \underset{\Delta}{t}_{\alpha} \underset{\Delta}{\partial}(.) + \tilde{\underset{\Delta}{t}}_{\alpha} \tilde{\underset{\Delta}{\partial}}(.). \tag{7.4}$$

Korzystając z niej możemy — bez umniejszania ogólności rozważań — przedstawić potencjał sprężystości w następującej postaci

$$\underset{\Delta}{\in} = \underset{\Delta}{\in}{}'(\underset{\Delta}{\partial} x_i;\ \tilde{\underset{\Delta}{\partial}}\, x_i;\ y_{ai};\ \underset{\Delta}{\partial} y_{ai};\ \tilde{\underset{\Delta}{\partial}}\, y_{ai};\ \eta). \tag{7.5}$$

Następnie podstawiając do równań (5.3) kolejno związki (6.2) i (7.5) otrzymujemy

$$\frac{\partial \epsilon'_{\Delta}}{\partial(\tilde{\partial}_{\Delta} x_i)} = 0, \qquad \frac{\partial \epsilon'_{\Delta}}{\partial(\tilde{\partial}_{\Delta} y_{a[i})} y_{|a|j]} = 0, \tag{7.6}$$

co kończy dowód.

Ze związków (7.1) i (6.5) łatwo wynika

$$P^{\alpha}_{\Delta \cdot i} = t^{\alpha}_{\Delta} \overline{P}_{\Delta i}, \qquad M^{\alpha}_{\Delta \cdot ij} = t^{\alpha}_{\Delta} \overline{M}_{\Delta ij}, \tag{7.7}$$

gdzie oznaczono

$$\overline{P}_{\Delta i} \equiv \frac{\partial \epsilon'_{\Delta}}{\partial(\partial_{\Delta} x_i)}, \qquad \overline{M}_{\Delta ij} \equiv y_{a[j} \frac{\partial \epsilon'_{\Delta}}{\partial(\partial_{\Delta} y_{|a|i]})}. \tag{7.8}$$

T.4. Wielkości $\overline{P}_{\Delta i}$ i $\overline{M}_{\Delta ij}$ są gęstościami sił i momentów przekrojowych w rodzinie włókien Δ uzewnętrznionymi przekrojem normalnym w danym punkcie do włókna u_{Δ}, tzn.

$$\overline{P}_{\Delta i} = p_{\Delta i}(\mathbf{t}_{\Delta}), \qquad \overline{M}_{\Delta ij} = m_{\Delta ij}(\mathbf{t}_{\Delta}). \tag{7.9}$$

Aby wykazać powyższe stwierdzenie należy do warunków brzegowych (6.7) podstawić związki (7.7), a następnie położyć $\mathbf{n} = \mathbf{t}_{\Delta}$.

Korzystając ze związków (7.7) i (4.2) można równania równowagi (6.6) przekształcić do postaci

$$\partial_{\Delta}(\overline{\lambda}_{\Delta} \overline{P}_{\Delta i}) + \lambda_{\Delta} f_i = 0, \qquad \partial_{\Delta}(\overline{\lambda}_{\Delta} \overline{M}_{\Delta ij}) + \overline{\lambda}_{\Delta}(\overline{P}_{\Delta [i} \partial_{\Delta} x_{j]} + h_{\Delta ij} + K_{\Delta [ij]}) = 0, \tag{7.10}$$

gdzie

$$\lambda_{\Delta} \equiv (a^{\alpha\beta} u_{\Delta,\alpha} u_{\Delta,\beta})^{-1/2}. \tag{7.11}$$

Interpretację geometryczną wielkości λ_{Δ} otrzymamy rozpatrując różniczkę zupełną funkcji $u_{\Delta}(\eta^{\alpha})$,

$$du_{\Delta} = u_{\Delta,\alpha} d\eta^{\alpha}. \tag{7.12}$$

Jeżeli przyjmiemy, że wektor $d\eta^{\alpha}$ jest prostopadły do krzywej u_{Δ}, a zatem kolinearny z wektorem $u_{\Delta,\alpha}$, wówczas iloczyn skalarny wektorów $d\eta^{\alpha}$ i $u_{\Delta,\alpha}$ równa się iloczynowi ich długości

$$du_{\Delta} = \pm |u_{\Delta,\alpha}| |d\eta^{\beta}|. \tag{7.13}$$

Ale

$$|u_{\Delta,\alpha}| = (a^{\mu\nu} u_{\Delta,\mu} u_{\Delta,\nu})^{1/2} = \lambda_{\Delta}^{-1}, \tag{7.14}$$

przeto

$$|d\eta^{\alpha}| = \pm \lambda_{\Delta} du_{\Delta}. \tag{7.15}$$

Wielkość λ_{Δ} jest zatem miarą odległości między krzywymi $u_{\Delta} = \text{const}$ i $u_{\Delta} + du_{\Delta} = \text{const}$. Interpretacja geometryczna wielkości λ_{Δ} upoważnia nas do nazwania równań (7.10) równaniami równowagi włókna Δ.

8. Materialna obiektywność

Założenie Z.5 żąda, aby potencjał sprężystości spełniał równanie funkcyjne

$$\epsilon(x_{i,\alpha};\, y_{ai};\, y_{al,\alpha};\, \eta) = \epsilon(Q_{ij}x_{j,\alpha};\, Q_{ij}y_{aj};\, Q_{ij}y_{aj,\alpha};\, \eta), \tag{8.1}$$

gdzie Q_{ij} jest dowolnym tensorem ortogonalnym właściwym.

T.5. Ogólne rozwiązanie równania (8.1) ma postać

$$\underset{\Delta}{\epsilon} = \underset{\Delta}{\epsilon}''(G_{\alpha a};\, K_{\alpha ab};\, \eta), \tag{8.2}$$

gdzie

$$G_{\alpha a} \equiv y_{ai}x_{i,\alpha}, \qquad K_{\alpha ab} \equiv y_{ai}y_{bi,\alpha} \tag{8.3}$$

są tzw. miarami odkształcenia ośrodka włóknistego.

D o w ó d. Bez umniejszania ogólności rozważań możemy przyjąć, że numeracja wektorów kierunkowych y_{ai} jest taka, że

$$\det y_{ai} = 1. \tag{8.4}$$

Zatem w równaniu (8.1) można położyć

$$Q_{ij} = \delta_{ia}y_{aj}, \tag{8.5}$$

co nam daje

$$\underset{\Delta}{\epsilon} = \underset{\Delta}{\epsilon}(\delta_{ia}G_{\alpha a};\, \delta_{ia};\, \delta_{ib}K_{\alpha ab};\, \eta). \tag{8.6}$$

Ponieważ macierz jednostkowa δ_{ia} nie jest zmienną niezależną, zatem postać (8.6) jest równoważna postaci (8.2), co kończy dowód.

Zauważmy, że z równania (8.2) wynika

$$\underset{\Delta}{K}_{[ij]} = 0. \tag{8.7}$$

Równania równowagi (6.6) można zatem przedstawić w postaci

$$\underset{\Delta}{P}{}^{\alpha}_{\cdot i}|_{\alpha} + \underset{\Delta}{f}_{i} = 0, \qquad \underset{\Delta}{M}{}^{\alpha}_{ij}|_{\alpha} + \underset{\Delta}{P}{}^{\alpha}_{[i}x_{j],\alpha} + \underset{\Delta}{h}_{ij} = 0. \tag{8.8}$$

Podstawiając równanie (8.2) do (6.5) otrzymujemy

$$\underset{\Delta}{P}{}^{\alpha}_{\cdot i} = \frac{\partial \underset{\Delta}{\epsilon}''}{\partial G_{\alpha a}}y_{ai}, \qquad \underset{\Delta}{M}{}^{\alpha}_{ij} = \frac{\partial \underset{\Delta}{\epsilon}''}{\partial K_{\alpha ab}}y_{ai}y_{bj}. \tag{8.9}$$

T.6. Z założeń o nieoddziaływaniu sąsiednich włókien (Z.3) i o materialnej obiektywności potencjału sprężystości (Z.5) wynika

$$\underset{\Delta}{\epsilon}' = \underset{\Delta}{\epsilon}'''(\underset{\Delta}{H}_{a};\, \underset{\Delta}{L}_{ab};\, \eta), \tag{8.10}$$

gdzie

$$\underset{\Delta}{H}_{a} \equiv y_{ai}\underset{\Delta}{\partial} x_i = \underset{\Delta}{t}{}^{\alpha}G_{\alpha a}, \qquad \underset{\Delta}{L}_{ab} \equiv y_{ai}\underset{\Delta}{\partial} y_{bi} = \underset{\Delta}{t}{}^{\alpha}K_{\alpha ab} \tag{8.11}$$

są tzw. miarami odkształcenia rodziny włókien Δ.

D o w ó d. Zasada materialnej obiektywności żąda, aby postać (7.1) potencjału sprężystości, wynikająca z założenia nieoddziaływań sąsiednich włókien, była rozwiązaniem równania funkcyjnego

$$\underset{\Delta}{\epsilon}'(\underset{\Delta}{\partial} x_i;\, y_{ai};\, \underset{\Delta}{\partial} y_{ai};\, \underset{\Delta}{\tilde{\partial}}\, y_{ai};\, \eta) = \underset{\Delta}{\epsilon}'(Q_{ij}\underset{\Delta}{\partial} x_j;\, Q_{ij}y_{ai};\, Q_{ij}\underset{\Delta}{\partial} y_{ai};\, Q_{ij}\underset{\Delta}{\tilde{\partial}} y_{aj};\, \eta). \tag{8.12}$$

Dalsze rozumowanie analogiczne do zastosowanego przy dowodzeniu twierdzenia T.5 prowadzi nas do związku

$$\underset{\Delta}{\epsilon}' = \underset{\Delta}{\epsilon}'''(\underset{\Delta}{H_a}; \underset{\Delta}{L_{ab}}; y_{ai}\underset{\Delta}{\tilde{\partial}}y_{bi}; \eta). \tag{8.13}$$

Korzystając ze związku $(7.1)_2$ można wykazać, że

$$\frac{\partial \underset{\Delta}{\epsilon}'''}{\partial(y_{ai}\underset{\Delta}{\tilde{\partial}}y_{bi})} = 0, \tag{8.14}$$

co kończy dowód.

Podstawiając równanie (8.10) do związków (7.8) otrzymujemy

$$\underset{\Delta}{\overline{P}} = \frac{\partial \underset{\Delta}{\epsilon}'''}{\partial \underset{\Delta}{H_a}} y_{ai}, \qquad \underset{\Delta}{\overline{M}_{ij}} = \frac{\partial \underset{\Delta}{\epsilon}'''}{\partial \underset{\Delta}{L_{ab}}} y_{ai}y_{bj}. \tag{8.15}$$

Dokonując operacji sumowania na równaniach (8.8), (8.9), (8.10) i (6.7) dostajemy kolejno: równania równowagi

$$P^{\alpha}_{\cdot i}|_{\alpha} + f_i = 0, \qquad M^{\alpha}_{\cdot ij}|_{\alpha} + P^{\alpha}_{\cdot [i}x_{j],\alpha} + h_{ij} = 0, \tag{8.16}$$

równania konstytutywne

$$e = \sum_{\Delta} \underset{\Delta}{\epsilon}'''(\underset{\Delta}{H_a}; \underset{\Delta}{L_{ab}}; \eta),$$

$$P^{\alpha}_{\cdot i} = \frac{\partial e}{\partial G_{\alpha a}} y_{ai}, \qquad M^{\alpha}_{\cdot ij} = \frac{\partial e}{\partial K_{\alpha ab}} y_{ai}y_{bj}, \tag{8.17}$$

oraz warunki brzegowe

$$p_i = n_{\alpha}P^{\alpha}_{\cdot i}, \qquad m_{ij} = n_{\alpha}M^{\alpha}_{\cdot ij}. \tag{8.18}$$

9. Opis dualny

Zauważmy, że wielkości m_{ij}, $M^{\alpha}_{\cdot ij}$, $\underset{\Delta}{\overline{M}_{ij}}$ są tensorami antysymetrycznymi względem wskaźników ij. Wielkości $K_{\alpha ab}$ i $\underset{\Delta}{L_{ab}}$ są antysymetryczne względem wskaźników ab. Każdą taką wielkość można jednoznacznie przedstawić za pomocą odpowiednich pseudowektorów lub pseudotensorów[1]). Takie przedstawienie będziemy nazywać reprezentacją dualną i wyróżniać za pomocą gwiazdki. Dla tensora naprężeń $M^{\alpha}_{\cdot ij}$ mamy

$$M^{\alpha}_{\cdot ij} = -\frac{1}{2}e_{ijk}\overset{*}{M}{}^{\alpha}_{\cdot k}, \qquad \overset{*}{M}{}^{\alpha}_{\cdot k} = -M^{\alpha}_{\cdot ij}e_{ijk}, \tag{9.1}$$

gdzie $\overset{*}{M}{}^{\alpha}_{\cdot k}$ jest pseudotensorem naprężeń momentowych.

Wprowadzając do opisu reprezentacje dualne można otrzymać następującą postać równań statyki sprężystego powierzchniowego ośrodka włóknistego:
równania równowagi

$$P^{\alpha}_{\cdot i}|_{\alpha} + f_i = 0, \qquad \overset{*}{M}{}^{\alpha}_{\cdot k}|_{\alpha} - e_{ijk}P^{\alpha}_{\cdot i}x_{j,\alpha} + \overset{*}{h}_k = 0, \tag{9.2}$$

[1]) Pseudotensorem nazywamy tutaj gęstość tensorową Weyla o wadze zero (GOŁĄB [7]).

równania geometryczne

$$H_a = y_{ai}\overset{\Delta}{\partial} x_i = \overset{\Delta}{t}{}^{\alpha} G_{\alpha a}, \qquad \overset{\Delta}{L}{}^{\bullet}_{c} = -e_{abc} y_{ai}\overset{\Delta}{\partial} y_{bi} = \overset{\Delta}{t}{}^{\alpha}\overset{\bullet}{K}_{\alpha c}, \tag{9.3}$$

równania konstytutywne

$$e = \sum_{\Delta} \overset{\Delta}{\in}{}^{\mathrm{IV}}(\overset{\Delta}{H}_a; \overset{\Delta}{L}{}^{\bullet}_{a}\ ;\ \eta),$$

$$P^{\alpha}_{\cdot i} = \frac{\partial e}{\partial G_{\alpha a}} y_{ai}, \qquad \overset{\bullet}{M}{}^{\alpha}_{\cdot k} = 2\frac{\partial e}{\partial \overset{\bullet}{K}_{\alpha a}} y_{ak}, \tag{9.4}$$

warunki brzegowe

$$p_i = n_\alpha P^{\alpha}_{\cdot i}, \qquad \overset{\bullet}{m}_k = n_\alpha \overset{\bullet}{M}{}^{\alpha}_{\cdot k}. \tag{9.5}$$

Związki (8.13) przyjmują postać

$$\overset{\Delta}{\bar{P}}_i = \frac{\partial \overset{\Delta}{\in}{}^{\mathrm{IV}}}{\partial \overset{\Delta}{H}_a} y_{ai}, \qquad \overset{\Delta}{\bar{M}}{}^{\bullet}_{k} = 2\frac{\partial \overset{\Delta}{\in}{}^{\mathrm{IV}}}{\partial \overset{\Delta}{L}{}^{\bullet}_{a}} y_{ak}, \tag{9.6}$$

natomiast dla równań równowagi włókna $\overset{u}{\Delta}$ (7.10) mamy

$$\overset{\Delta}{\partial}(\overset{\Delta}{\lambda}\overset{\Delta}{\bar{P}}_i) + \overset{\Delta}{\lambda}\overset{\Delta}{f}_i = 0, \qquad \overset{\Delta}{\partial}(\overset{\Delta}{\lambda}\overset{\Delta}{\bar{M}}{}^{\bullet}_{k}) - \overset{\Delta}{\lambda} e_{ijk}\overset{\Delta}{\bar{P}}_i \overset{\Delta}{\partial} x_j + \overset{\Delta}{\lambda}\overset{\Delta}{\overset{\bullet}{h}}_k = 0. \tag{9.7}$$

10. Teoria liniowa

W przypadku małych obrotów cząstek ośrodka możemy równania (3.1) i (3.2) przedstawić w postaci

$$x_i(\eta, t) = X_i(\eta) + u_i(\eta, t), \qquad y_{ai}(\eta, t) = Y_{aj}(\eta)[\delta_{ij} - e_{ijk} v_k(\eta, t)] \tag{10.1}$$

gdzie u_i jest polem wektora przemieszczenia, natomiast v_i jest polem pseudowektora małego obrotu. Proces linearyzacji równań (9.2)–(9.7) przeprowadzimy w oparciu o założenie

$$|u_{i,(\alpha)}| \ll 1, \qquad |v_{ij}| \ll 1. \tag{10.2}$$

Odpowiednie równania teorii liniowej mają następującą postać: równania równowagi

$$P^{\alpha}_{\cdot i}|_{\alpha} + f_i = 0, \qquad \overset{\bullet}{M}{}^{\alpha}_{\cdot k}|_{\alpha} - e_{ijk} P^{\alpha}_{\cdot i} X_{j,\alpha} + \overset{\bullet}{h}_k = 0; \tag{10.3}$$

równania konstytutywne

$$e = \sum_{\Delta} \overset{\Delta}{\in}{}^{\mathrm{V}}(\overset{\Delta}{t}{}^{\alpha}\gamma_{\alpha i}; \overset{\Delta}{t}{}^{\alpha}\varkappa_{\alpha i};\ \eta) = \sum_{\Delta} \overset{\Delta}{t}{}^{\alpha}\overset{\Delta}{t}{}^{\beta}\left(\frac{1}{2}\overset{\Delta}{R}_{ij}\gamma_{\alpha i}\gamma_{\beta j} + \overset{\Delta}{Q}_{ij}\gamma_{\alpha i}\varkappa_{\beta j} + \frac{1}{2}\overset{\Delta}{S}_{ij}\varkappa_{\alpha i}\varkappa_{\beta j}\right),$$

$$P^{\alpha}_{\cdot i} = \frac{\partial e}{\partial \gamma_{\alpha i}} = \sum_{\Delta} \overset{\Delta}{t}{}^{\alpha}\overset{\Delta}{t}{}^{\beta}(\overset{\Delta}{R}_{ij}\gamma_{\beta j} + \overset{\Delta}{Q}_{ij}\varkappa_{\beta j}), \tag{10.4}$$

$$\overset{\bullet}{M}{}^{\alpha}_{\cdot i} = \frac{\partial e}{\partial \varkappa_{\alpha i}} = \sum_{\Delta} \overset{\Delta}{t}{}^{\alpha}\overset{\Delta}{t}{}^{\beta}(\overset{\Delta}{Q}_{ji}\gamma_{\beta j} + \overset{\Delta}{S}_{ij}\varkappa_{\beta j});$$

równania geometryczne

$$\gamma_{\alpha i} = u_{i,\alpha} + e_{ijk} v_k X_{j,\alpha}, \quad \varkappa_{\alpha i} = v_{i,\alpha}; \tag{10.5}$$

warunki brzegowe

$$p_i = n_\alpha P^\alpha_{\underset{\Delta}{i}}, \quad \overset{*}{m}_i = n_\alpha \overset{*}{M}{}^\alpha_{\underset{\Delta}{i}}, \tag{10.6}$$

w której tensory $\underset{\Delta}{R}_{ij}$, $\underset{\Delta}{Q}_{ij}$, $\underset{\Delta}{S}_{ij}$ są miarami sztywności rodziny włókien Δ.

Zachodzą również związki

$$\overset{*}{K}_{\alpha c} \cong -e_{abc} Y_{ai} Y_{bi,\alpha} + 2 Y_{ci} v_{i,\alpha}, \quad G_{\alpha a} \cong Y_{ai} X_{i,\alpha} + Y_{ai} \gamma_{\alpha i} \tag{10.6}$$

oraz odwrotne do nich

$$\begin{aligned} \varkappa_{\alpha i} &\cong \frac{1}{2} \overset{*}{K}_{\alpha a} Y_{ai} - \frac{1}{2} e_{ijk} Y_{aj} Y_{ak,\alpha}, \\ \gamma_{\alpha i} &\cong G_{\alpha a} Y_{ai} - X_{i,\alpha}. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Zlinearyzowane równania (9.6) przyjmują postać

$$\begin{aligned} \overline{P}_i &= \frac{\partial \epsilon^{\mathrm{V}}}{\partial (t^\alpha \gamma_{\alpha i})} = \underset{\Delta}{R}_{ij} t^\beta \gamma_{\beta j} + \underset{\Delta}{Q}_{ij} t^\beta \varkappa_{\beta j}, \\ \overset{*}{\overline{M}}_i &= \frac{\partial \epsilon^{\mathrm{V}}}{\partial (\varkappa_{\alpha i})} = \underset{\Delta}{Q}_{ji} t^\beta \gamma_{\beta j} + \underset{\Delta}{S}_{ij} t^\beta \varkappa_{\beta j}, \end{aligned} \tag{10.8}$$

natomiast dla zlinearyzowanych równań równowagi włókna $\underset{\Delta}{u}$ otrzymujemy

$$\partial(\lambda \overline{P}_i) + \lambda f_i = 0, \quad \partial(\lambda \overset{*}{\overline{M}}_k) - e_{ijk} \lambda \overline{P}_i \partial X_j + \lambda \overset{*}{h}_k = 0. \tag{10.9}$$

Równania (10.3)–(10.5) stanowią podstawowy układ równań liniowej teorii sprężystego powierzchniowego ośrodka włóknistego. Jest to układ równań różniczkowych liniowych dwunastego rzędu. Znając rozwiązanie układu równań (10.3)–(10.5) spełniające odpowiednie warunki brzegowe [np. naprężeniowe warunki brzegowe (10.6)] można za pomocą wzorów (10.8) ustalić napięcia w poszczególnych włóknach ośrodka. Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań tego układu równań zostało udowodnione w pracy autora [1].

11. Ośrodek włóknisty jako model powierzchniowego dźwigara rusztowego

Powierzchniowym dźwigarem rusztowym nazywać będziemy tutaj układ prętowy o sztywnych węzłach spełniających następujące założenia:

Z.7. Osie wszystkich prętów leżą na odpowiednio regularnej powierzchni S zwanej dalej powierzchnią środkową.

Z.8. Siatka dyskretna utworzona z osi prętów, zawarta w każdym płacie prostym będącym częścią powierzchni S daje się odwzorować topologicznie na siatkę

$$\mathrm{Re}[(x+iy)\exp(-i\underset{\Delta}{\varphi})] = n\varepsilon, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{11.1}$$

$$(\varepsilon = \mathrm{const}), \quad \left(\underset{\Delta}{\varphi} = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\Delta\right), \quad (\Delta = 1, 2)$$

lub na siatkę

$$\text{(11.2)} \qquad \operatorname{Re}[x+iy)\exp(-\underset{\Delta}{\varphi})] = n\varepsilon, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$(\varepsilon = \text{const}), \quad \left(\underset{\Delta}{\varphi} = \varphi_0 + \frac{2\pi}{3}\Delta\right), \quad (\Delta = 1, 2, 3).$$

W wymienionych wyżej dwóch przypadkach będziemy mówili, że ruszt składa się z dwóch lub trzech rodzin prętów. Odległość między osiami sąsiednich prętów danej rodziny oznaczymy literą $\underset{\Delta}{\tilde{l}}$ natomiast długość odcinka pręta wyznaczonego dwoma kolejnymi węzłami oznaczymy literą $\underset{\Delta}{l}$.

Z.9. Ruszt jest gęsty, tzn. wymiary $\underset{\Delta}{l}$ i $\underset{\Delta}{\tilde{l}}$ są znacznie mniejsze zarówno od wymiarów charakteryzujących krzywiznę poszczególnych włókien jak i od wymiarów globalnych powierzchni S.

Założenie powyższe pozwala nam traktować pręty rusztu jako w przybliżeniu — prostoliniowe.

Z.10. Każdy z prętów znajduje się w stanie równowagi statecznej.

Z.11. Zmiany charakterystyk geometrycznych przekrojów poprzecznych prętów rusztu są pomijalnie małe.

Z.12. Pręty rusztu są na tyle smukłe, aby można było stosować wzory wytrzymałości materiałów.

Założenia Z.7–Z.12 pozwalają nam rozpatrywać poszczególne pręty rusztu jako pręty pryzmatyczne. Korzystając ze wzorów wytrzymałości materiałów słusznych dla prętów pryzmatycznych, obciążonych jedynie na swych końcach, nietrudno udowodnić następujące spostrzeżenia:

S.1. Wartości sił i momentów przekrojowych występujących w połowie rozpiętości pręta są równe średnim dla danego pręta wartościom sił i momentów przekrojowych.

Wartości średnich sił i momentów przekrojowych będziemy oznaczać literami $\underset{\Delta}{\pi}$ i $\underset{\Delta}{\mu}$.

S.2. Wartości średnich sił $\underset{\Delta}{\pi}$ i momentów przekrojowych $\underset{\Delta}{\mu}$ wyznaczają jednoznacznie stan naprężenia danego pręta.

S.3. Przemieszczenia końców pręta $\mathbf{U}'$ i $\mathbf{U}''$ oraz ich obroty $\mathbf{V}'$ i $\mathbf{V}''$ wyznaczają stan naprężenia pręta, a w szczególności średnie wartości sił i momentów przekrojowych oraz średnią wartość energii sprężystej. W układzie odniesienia $\underset{\Delta}{\mathbf{D}}_{\alpha}$ (α = I, II, III) wyznaczonym wektorem stycznym $\underset{\Delta}{\mathbf{t}}$ oraz głównymi centralnymi kierunkami bezwładności przekroju pręta rodziny Δ, odpowiednie związki mają postać

$$\text{(11.3)} \qquad \underset{\Delta}{\pi}_{\mathrm{I}} = \underset{\Delta\Delta}{EF}\frac{U_{\mathrm{I}}'' - U_{\mathrm{I}}^{1}}{\underset{\Delta}{l}}, \quad \underset{\Delta}{\pi}_{\mathrm{II}} = \frac{12\underset{\Delta\Delta}{EJ}_{\mathrm{III}}}{\underset{\Delta}{l}^2}\left(\frac{U_{\mathrm{II}}'' - U_{\mathrm{II}}'}{\underset{\Delta}{l}} - \frac{V_{\mathrm{III}}'' + V_{\mathrm{III}}'}{2}\right),$$

$$\underset{\Delta}{\pi}_{\mathrm{III}} = \frac{12\underset{\Delta\Delta}{EJ}_{\mathrm{II}}}{\underset{\Delta}{l}^2}\left(\frac{U_{\mathrm{III}}'' - U_{\mathrm{III}}'}{\underset{\Delta}{l}} + \frac{V_{\mathrm{II}}'' + V_{\mathrm{II}}'}{2}\right),$$

$$\underset{\Delta}{\mu}_{\mathrm{I}} = \underset{\Delta\Delta}{GJ}_{\mathrm{I}}\frac{V_{\mathrm{I}}'' - V_{\mathrm{I}}'}{\underset{\Delta}{l}}, \quad \underset{\Delta}{\mu}_{\mathrm{II}} = \underset{\Delta\Delta}{EJ}_{\mathrm{II}}\frac{V_{\mathrm{II}}'' - V_{\mathrm{II}}'}{\underset{\Delta}{l}},$$

$$\mu_{\Delta\,\mathrm{III}} = \underset{\Delta\Delta}{EJ}_{\mathrm{III}} \frac{V''_{\mathrm{III}} - V'_{\mathrm{III}}}{\underset{\Delta}{l}},$$

$$E_{\Delta\,\mathrm{śr}} = \frac{1}{2}\left[\underset{\Delta\Delta}{EF}\left(\frac{U''_{\mathrm{I}} - U'_{\mathrm{I}}}{\underset{\Delta}{l}}\right)^2 + \frac{12\underset{\Delta\Delta}{EJ}_{\mathrm{III}}}{\underset{\Delta}{l^2}}\left(\frac{U''_{\mathrm{II}} - U'_{\mathrm{II}}}{\underset{\Delta}{l}} - \frac{V''_{\mathrm{III}} + V'_{\mathrm{III}}}{2}\right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{12\underset{\Delta\Delta}{EJ}_{\mathrm{II}}}{\underset{\Delta}{l^2}}\left(\frac{U''_{\mathrm{III}} - U'_{\mathrm{III}}}{\underset{\Delta}{l}} + \frac{V''_{\mathrm{II}} + V'_{\mathrm{II}}}{2}\right)^2 + \underset{\Delta\Delta}{GJ}_{\mathrm{I}}\left(\frac{V''_{\mathrm{I}} - V'_{\mathrm{I}}}{\underset{\Delta}{l}}\right)^2 +$$

$$\left. + \underset{\Delta\Delta}{EJ}_{\mathrm{II}}\left(\frac{V''_{\mathrm{II}} - V'_{\mathrm{II}}}{\underset{\Delta}{l}}\right)^2 + \underset{\Delta\Delta}{EJ}_{\mathrm{III}}\left(\frac{V''_{\mathrm{III}} - V'_{\mathrm{III}}}{\underset{\Delta}{l}}\right)^2\right],$$

w której $\underset{\Delta}{E}$ i $\underset{\Delta}{G}$ są modułami Yunga i sztywności postaciowej, $\underset{\Delta}{G}\underset{\Delta}{J}_{\mathrm{I}}$ jest sztywnością skrętną, $\underset{\Delta}{J}_{\mathrm{II}}$ i $\underset{\Delta}{J}_{\mathrm{III}}$ są głównymi centralnymi momentami bezwładności przekroju pręta.

Równania (11.3) można zapisać w bardziej zwartej postaci

$$\underset{\Delta}{E}_{\mathrm{śr}} = \frac{1}{2}\underset{\Delta}{\mathscr{R}}_{\mathfrak{ab}}\,\underset{\Delta}{\mathscr{G}}_{\mathfrak{a}}\,\underset{\Delta}{\mathscr{G}}_{\mathfrak{b}} + \frac{1}{2}\underset{\Delta}{\mathscr{S}}_{\mathfrak{ab}}\,\underset{\Delta}{\mathscr{K}}_{\mathfrak{a}}\,\underset{\Delta}{\mathscr{K}}_{\mathfrak{b}},$$

(11.4)

$$\underset{\Delta}{\pi}_{\mathfrak{a}} = \frac{\partial \underset{\Delta}{E}_{\mathrm{śr}}}{\partial \underset{\Delta}{\mathscr{G}}_{\mathfrak{a}}} = \underset{\Delta}{\mathscr{R}}_{\mathfrak{ab}}\,\underset{\Delta}{\mathscr{G}}_{\mathfrak{b}}, \qquad \underset{\Delta}{\mu}_{\mathfrak{a}} = \frac{\partial \underset{\Delta}{E}_{\mathrm{śr}}}{\partial \underset{\Delta}{\mathscr{K}}_{\mathfrak{a}}} = \underset{\Delta}{\mathscr{S}}_{\mathfrak{ab}}\,\underset{\Delta}{\mathscr{K}}_{\mathfrak{b}},$$

gdzie

$$\underset{\Delta}{\mathscr{R}}_{\mathfrak{ab}} \equiv \left\| \begin{matrix} \underset{\Delta\Delta}{EF}, & 0, & 0, \\ 0, & 12\underset{\Delta\Delta}{EJ}_{\mathrm{III}}\underset{\Delta}{l^{-2}}, & 0, \\ 0, & 0, & 12\underset{\Delta\Delta}{EJ}_{\mathrm{II}}\underset{\Delta}{l^{-2}} \end{matrix} \right\|,$$

(11.5)

$$\underset{\Delta}{\mathscr{S}}_{\mathfrak{ab}} \equiv \left\| \begin{matrix} \underset{\Delta\Delta}{GJ}_{\mathrm{I}}, & 0, & 0 \\ 0, & \underset{\Delta\Delta}{EJ}_{\mathrm{II}}, & 0 \\ 0, & 0, & \underset{\Delta\Delta}{EJ}_{\mathrm{III}} \end{matrix} \right\|$$

są macierzami sztywności pręta rodziny Δ, natomiast

$$\underset{\Delta}{\mathscr{G}}_{\mathfrak{a}} \equiv \frac{U''_{\mathfrak{a}} - U'_{\mathfrak{a}}}{\underset{\Delta}{l}} + e_{\mathfrak{a}1\mathfrak{b}}\frac{V''_{\mathfrak{b}} + V'_{\mathfrak{b}}}{2}, \qquad \underset{\Delta}{\mathscr{K}}_{\mathfrak{a}} \equiv \frac{V''_{\mathfrak{a}} - V'_{\mathfrak{a}}}{\underset{\Delta}{l}} \tag{11.6}$$

są miarami globalnego odkształcenia pręta rodziny Δ.

Uogólniając spostrzeżenie S.3 na przypadek prętów niepryzmatycznych otrzymujemy następujące twierdzenie:

T.7. Wartości średnich sił i momentów przekrojowych są odpowiednimi pochodnymi średniej energii sprężystej, tj.

$$\underset{\Delta}{E}_{\mathrm{śr}} = \frac{1}{2}\underset{\Delta}{\mathscr{R}}_{ij}\,\underset{\Delta}{\mathscr{G}}_{i}\,\underset{\Delta}{\mathscr{G}}_{j} + \underset{\Delta}{\mathscr{Q}}_{ij}\,\underset{\Delta}{\mathscr{G}}_{i}\,\underset{\Delta}{\mathscr{K}}_{j} + \frac{1}{2}\underset{\Delta}{\mathscr{S}}_{ij}\,\underset{\Delta}{\mathscr{K}}_{i}\,\underset{\Delta}{\mathscr{K}}_{j},$$

$$\underset{\Delta}{\pi}_{i} = \frac{\partial \underset{\Delta}{E}_{\mathrm{śr}}}{\partial \underset{\Delta}{\mathscr{G}}_{i}} = \underset{\Delta}{\mathscr{R}}_{ij}\,\underset{\Delta}{\mathscr{G}}_{j} + \underset{\Delta}{\mathscr{Q}}_{ij}\,\underset{\Delta}{\mathscr{K}}_{j}, \tag{11.7}$$

$$\underset{\Delta}{\mu_i} = \frac{\partial \underset{\Delta}{E_{śr}}}{\partial \underset{\Delta}{\varkappa_i}} = \underset{\Delta}{\mathcal{Q}_{ji}}\,\underset{\Delta}{\gamma_j} + \underset{\Delta}{\mathcal{S}_{ij}}\,\underset{\Delta}{\varkappa_j}.$$

D o w ó d. Z założenia Z.10 wynika, że globalna deformacja pręta dana wektorami

$$\underset{\Delta}{\gamma_i} \equiv \frac{U_i'' - U_i'}{\underset{\Delta}{l}} + e_{ijk}\,\underset{\Delta}{\tilde{l}_j}\,\frac{V_k'' + V_k'}{2}, \qquad \underset{\Delta}{\varkappa_i} \equiv \frac{V_i^{II} - V_i'}{\underset{\Delta}{l}}, \tag{11.8}$$

gdzie $\underset{\Delta}{l}$ jest odległością końców pręta, a $\underset{\Delta}{\tilde{l}_i}$ jest jednostkowym wektorem wyznaczającym kierunek prostej łączącej końce pręta, jednoznacznie określa wartości sił i momentów przekrojowych na końcach pręta. A zatem zachodzi

$$\begin{aligned} \underset{\Delta}{\pi_i''} &= \underset{\Delta}{\mathcal{R}_{ij}''}\,\underset{\Delta}{\gamma_j} + \underset{\Delta}{\mathcal{Q}_{ij}''}\,\underset{\Delta}{\varkappa_j}, \qquad \underset{\Delta}{\pi_i'} = \underset{\Delta}{\mathcal{R}_{ij}'}\,\underset{\Delta}{\gamma_j} + \underset{\Delta}{\mathcal{Q}_{ij}}\,\underset{\Delta}{\varkappa_j}, \\ \underset{\Delta}{\mu_i''} &= \underset{\Delta}{\hat{\mathcal{Q}}_{ij}''}\,\underset{\Delta}{\gamma_j} + \underset{\Delta}{\mathcal{S}_{ij}''}\,\underset{\Delta}{\varkappa_j}, \qquad \underset{\Delta}{\mu_i'} = \underset{\Delta}{\hat{\mathcal{Q}}_{ij}'}\,\underset{\Delta}{\gamma_j} + \underset{\Delta}{\mathcal{S}_{ij}'}\,\underset{\Delta}{\varkappa_j}, \end{aligned} \tag{11.9}$$

gdzie $\underset{\Delta}{\mathcal{R}''}$, $\underset{\Delta}{\mathcal{R}'}$, $\underset{\Delta}{\mathcal{Q}''}$, $\underset{\Delta}{\mathcal{Q}'}$, $\underset{\Delta}{\hat{\mathcal{Q}}''}$, $\underset{\Delta}{\hat{\mathcal{Q}}''}$, $\underset{\Delta}{\mathcal{S}''}$, $\underset{\Delta}{\mathcal{S}'}$ są macierzami sztywności pręta. Związki (11.9) są wzorami transformacyjnymi znanymi z mechaniki budowli. Z warunków równowagi rozpatrywanego pręta

$$\underset{\Delta}{\pi_i''} - \underset{\Delta}{\pi_i'} = 0, \qquad \underset{\Delta}{\mu''} - \underset{\Delta}{\mu_i'} + e_{ijk}(X_j'' \underset{\Delta}{\pi_k''} - X_j' \underset{\Delta}{\pi_k'}) = 0 \tag{11.10}$$

wynika, że wzory transformacyjne (11.9) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \underset{\Delta}{\pi_i''} &= \underset{\Delta}{\pi_i'} = \underset{\Delta}{\mathcal{R}_{ij}}\,\underset{\Delta}{\gamma_j} + \underset{\Delta}{\mathcal{Q}_{ij}}\,\underset{\Delta}{\varkappa_j}, \\ \underset{\Delta}{\mu_i''} &= \left(\underset{\Delta}{\mathcal{Q}_{ij}} - \frac{1}{2}\,\underset{\Delta}{e_{ikl}}\,\underset{\Delta}{\tilde{l}_k}\,\underset{\Delta}{\mathcal{R}_{lj}}\right)\underset{\Delta}{\gamma_j} + \left(\underset{\Delta}{\mathcal{S}_{ij}} - \frac{1}{2}\,\underset{\Delta}{e_{ikl}}\,\underset{\Delta}{\tilde{l}_k}\,\underset{\Delta}{\mathcal{Q}_{lj}}\right)\underset{\Delta}{\varkappa_j}, \\ \underset{\Delta}{\mu_i'} &= \left(\underset{\Delta}{\hat{\mathcal{Q}}_{ij}} + \frac{1}{2}\,\underset{\Delta}{e_{ikl}}\,\underset{\Delta}{\tilde{l}_k}\,\underset{\Delta}{\mathcal{R}_{lj}}\right)\underset{\Delta}{\gamma_j} + \left(\underset{\Delta}{\mathcal{S}_{ij}} + \frac{1}{2}\,\underset{\Delta}{e_{ikl}}\,\underset{\Delta}{\tilde{l}_k}\,\underset{\Delta}{\mathcal{Q}_{lj}}\right)\underset{\Delta}{\varkappa_j}, \end{aligned} \tag{11.11}$$

gdzie oznaczono

$$\underset{\Delta}{\mathcal{R}} \equiv \underset{\Delta}{\mathcal{R}''} = \underset{\Delta}{\mathcal{R}'}, \underset{\Delta}{\mathcal{Q}} \equiv \underset{\Delta}{\mathcal{Q}''} = \underset{\Delta}{\mathcal{Q}'}, \underset{\Delta}{\hat{\mathcal{Q}}} = \frac{1}{2}(\underset{\Delta}{\hat{\mathcal{Q}}''} + \underset{\Delta}{\hat{\mathcal{Q}}'}), \underset{\Delta}{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}(\underset{\Delta}{\mathcal{S}''} + \underset{\Delta}{\mathcal{S}'}). \tag{11.12}$$

Z twierdzenia Rayleigha o wzajemności reakcji wynika

$$\underset{\Delta}{\mathcal{R}_{ij}} = \underset{\Delta}{\mathcal{R}_{ji}}, \qquad \underset{\Delta}{\mathcal{Q}_{ij}} = \underset{\Delta}{\mathcal{Q}_{ji}}, \qquad \underset{\Delta}{\mathcal{S}_{ij}} = \underset{\Delta}{\mathcal{S}_{ji}}. \tag{11.13}$$

Zasada zachowania energii dla pręta daje nam

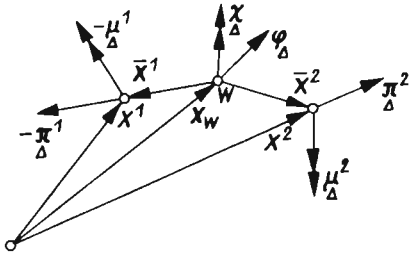
$$\begin{aligned} \underset{\Delta}{E} &= \frac{1}{2}(\underset{\Delta}{\pi_i''}\,U_i'' - \underset{\Delta}{\pi_i'}\,U_i' + \underset{\Delta}{\mu_i''}\,V_i'' - \underset{\Delta}{\mu_i'}\,V_i') = \\ &= \underset{\Delta}{l}\left(\frac{1}{2}\,\underset{\Delta}{\mathcal{R}_{ij}}\,\underset{\Delta}{\gamma_i}\,\underset{\Delta}{\gamma_j} + \underset{\Delta}{\mathcal{Q}_{ij}}\,\underset{\Delta}{\gamma_i}\,\underset{\Delta}{\varkappa_j} + \frac{1}{2}\,\underset{\Delta}{\mathcal{S}_{ij}}\,\underset{\Delta}{\varkappa_i}\,\underset{\Delta}{\varkappa_j}\right). \end{aligned} \tag{11.14}$$

Dzieląc obie strony równania (11.14) przez rozpiętość pręta $\underset{\Delta}{l}$ otrzymujemy związek (11.7). Aby wskazać pozostałe dwa wystarczy sprawdzić, że zachodzą o ile przyjmiemy

$$\underset{\Delta}{\pi_i} = \frac{1}{2}(\underset{\Delta}{\pi_i''}+\underset{\Delta}{\pi_i'}), \quad \underset{\Delta}{\mu_i} = \frac{1}{2}(\mu_i''+\mu_i'). \tag{11.15}$$

Nietrudno zauważyć, że średnia wartość momentu przekrojowego jest momentem przekrojowym występującym w przekroju płaszczyzną symetrii odcinka o współrzędnych (X_i'') i (X'), liczonym względem śladu tego odcinka na tej płaszczyźnie. Wektory $\underset{\Delta}{\pi_i}$ i $\underset{\Delta}{\mu_i}$ są zatem zaczepione w punkcie o współrzędnych $\frac{1}{2}(X_i''+X_i')$.

Rozpatrzmy równowagę dwóch prętów danej rodziny spotykających się w węźle W (rys. 3). Jeżeli przyjmiemy, że obciążenie przypadające na węzeł W dane jest za pomocą



Rys. 3

wektora siły $\underset{\Delta}{\boldsymbol{\varphi}}$ i wektora momentu $\underset{\Delta}{\mathbf{X}}$ to warunki równowagi tych prętów można zapisać w postaci

$$\underset{\Delta}{\boldsymbol{\pi}^2}-\underset{\Delta}{\boldsymbol{\pi}^1}+\underset{\Delta}{\boldsymbol{\varphi}} = 0$$

$$2(\underset{\Delta}{\boldsymbol{\mu}^2}-\underset{\Delta}{\boldsymbol{\mu}^1})+(\mathbf{X}^2-\mathbf{X}^1)\times(\underset{\Delta}{\boldsymbol{\pi}^2}+\underset{\Delta}{\boldsymbol{\pi}^1})+(\bar{\mathbf{X}}^2+\bar{\mathbf{X}}^1)\times(\underset{\Delta}{\boldsymbol{\pi}^2}-\underset{\Delta}{\boldsymbol{\pi}^1})+2\underset{\Delta}{\mathbf{X}} = 0, \tag{11.16}$$

gdzie $\boldsymbol{\pi}^2$, $\boldsymbol{\pi}^1$, $\boldsymbol{\mu}^2$, $\boldsymbol{\mu}^1$ są średnimi wartościami sił i momentów przekrojowych w tych prętach, $\mathbf{X}^2$ i $\mathbf{X}^1$ są współrzędnymi punktów zaczepienia tych sił, natomiast $\mathbf{X}^2$ i $\mathbf{X}^1$ są równe

$$\bar{\mathbf{X}}^2 = \mathbf{X}^2-\mathbf{X}_w, \quad \bar{\mathbf{X}}^1 = \mathbf{X}^1-\mathbf{X}_w, \tag{11.17}$$

gdzie $\mathbf{X}_w$ są współrzędnymi węzła W. Zauważmy, że zachodzą nierówności

$$|\bar{\mathbf{X}}^2+\bar{\mathbf{X}}^1| \ll |\mathbf{X}^2-\mathbf{X}^1|, \quad |\boldsymbol{\pi}^1-\boldsymbol{\pi}^2| \ll |\boldsymbol{\pi}^1+\boldsymbol{\pi}^2|. \tag{11.18}$$

Nietrudno zauważyć, że powierzchniowy ośrodek włóknisty wykazuje pewne podobieństwa do powierzchniowego dźwigara rusztowego omówionego w niniejszym rozdziale. Polom opisującym ośrodek włóknisty odpowiadają dyskretne zbiory liczb podobnej natury geometrycznej opisujące dźwigar rusztowy. Równaniom różniczkowym ośrodka włóknistego odpowiadają równania różnicowe dźwigara rusztowego. Wyróżnimy następujące zasadnicze podobieństwa ośrodka włóknistego i dźwigara rusztowego:

A.1. Podobieństwo geometryczne:

1° Wewnętrznej strukturze powierzchniowego ośrodka włóknistego odpowiada struktura powierzchniowego dźwigara rusztowego.

2° Polom wektora przemieszczenia u_i i wektora małego obrotu v_i cząstek ośrodka włóknistego odpowiadają zbiory przemieszczeń U_i i obrotów V_i węzłów dźwigara rusztowego.

Wobec powyższego porównanie związków geometrycznych (10.5) i (11.8) wskazuje że:

3° Miarom małego odkształcenia ośrodka włóknistego $\underset{\Delta}{t}^{\alpha}\gamma_{\alpha i}$ i $\underset{\Delta}{t}^{\alpha}\varkappa_{\alpha i}$ odpowiadają miary globalnego odkształcenia prętów dźwigara rusztowego $\underset{\Delta}{\mathscr{G}}_i$ i $\underset{\Delta}{\mathscr{K}}_i$.

A.2. Podobieństwo statyczne:

1° Zarówno sąsiednie włókna ośrodka włóknistego jak i sąsiednie pręty dźwigara rusztowego nie oddziaływują na siebie bezpośrednio.

2° Stan naprężenia włókien oraz prętów opisujemy przy pomocy wektorów sił i momentów. Analogia ilościowa ma postać

$$\underset{\Delta\Delta}{\tilde{l}}\overline{P}_i-\underset{\Delta}{\pi}_i, \qquad \underset{\Delta\Delta}{\tilde{l}}\overset{*}{\overline{M}}_i-\underset{\Delta}{\mu}_i. \tag{11.19}$$

3° Obciążenie ośrodka włóknistego oraz dźwigara rusztowego opisujemy przy pomocy wektorów sił i momentów zewnętrznych. Analogia ilościowa ma postać

$$\underset{\Delta\Delta}{\tilde{l}}f_i-\underset{\Delta}{l}^{-1}\underset{\Delta}{\varphi}_i, \qquad \underset{\Delta\Delta}{\tilde{l}}h_i-\underset{\Delta}{l}^{-1}\underset{\Delta}{\chi}_i. \tag{11.20}$$

4° Równania równowagi ośrodka włóknistego (10.9) są podobne do równań równowagi dźwigara rusztowego (11.16).

A.3. Podobieństwo fizyczne:

1° Jeżeli węzły rusztu są sztywne to można — podobnie jak w ośrodku włóknistym — stwierdzić jaka część energii wewnętrznej przypada na poszczególną rodzinę prętów.

2° Równania fizyczne (10.4) i (10.8) są podobne do równań (11.7).

Analogie ilościowe mają postać

$$\begin{gathered}\underset{\Delta\Delta}{\tilde{l}}e-\underset{\Delta}{E}_{\text{śr}}, \qquad \underset{\Delta\Delta}{\tilde{l}}R_{ij}-\underset{\Delta}{\mathscr{R}}_{ij},\\ \underset{\Delta\Delta}{\tilde{l}}Q_{ij}-\underset{\Delta}{\mathscr{Q}}_{ij}, \qquad \underset{\Delta\Delta}{\tilde{l}}S_{ij}-\underset{\Delta}{\mathscr{S}}_{ij}.\end{gathered} \tag{11.21}$$

Podobieństwa A.1–A.3 wskazują na to, że powierzchniowy ośrodek włóknisty jest pewnym ciągłym modelem powierzchniowego dźwigara rusztowego. Niemniej otwartym problemem pozostaje określenie warunków, w których podobieństwo wykazują rozwiązania równań ośrodka włóknistego z rozwiązaniami równań dźwigara rusztowego. Dla płaskich zagadnień kołowo symetrycznych problem ten był rozpatrywany w pracy KONIECZNEGO [11]. Ogólnie można powiedzieć, że podobieństwo rozwiązań zachodzi, o ile obroty i przemieszczenia sąsiednich węzłów rusztu różnią się nieznacznie.

Literatura cytowana w tekście

1. W. BARAŃSKI, *Powierzchniowe ośrodki włókniste i ich zastosowanie*, Rozprawa doktorska, Łódź 1967.
2. W. BARAŃSKI, K. WILMAŃSKI, CZ. WOŹNIAK, *Mechanika ośrodków ciągłych typu Cosserat*, Mech. Teor. Stos., 2, 5 (1967).

3. H. COHEN, C. DESILVA, *Nonlinear theory of elastic directed surfaces*, J. Math. Phys., **7** (1966), 960–967.
4. E. i F. COSSERAT, *Theorie des corps deformables*, Paris 1909.
5. J. ERICKSEN, C. TRUESDELL, *Exact theory of stress and strain in rods and shells*, Arch. Rat. Mech. Anal., **1** (1958), 295–323.
6. A. GOETZ, *Geometria różniczkowa*, Warszawa 1965.
7. S. GOŁĄB, *Rachunek tensorowy*, Warszawa 1966.
8. A. GREEN, P. NAGHDI, W. WAINRIGHT, *A general theory of Cosserat surface*, Arch. Rat. Mech. Anal., **20** (1965), 287–308.
9. A. GREEN, R. RIVLIN, *Simple force and stress multipoles*, Arch. Rat. Mech. Anal., **16** (1964), 325–353.
10. A. GREEN, R. RIVLIN, *Multipolar continuum mechanics*, Arch. Rat. Mech. Anal., **17** (1964), 113–147.
11. S. KONIECZNY, *O zastosowaniu teorii ośrodków włóknistych do obliczania rusztów pierścieniowych*, Arch. Inż. Ląd., 1, **13** (1967).
12. R. TOUPIN, *Elastic materials with couple-stresses*, Arch. Rat. Mech. Anal., **11** (1962), 385–414.
13. R. TOUPIN, *Theories of elasticity with couple-stresses*, Arch. Rat. Mech. Anal., **17** (1964), 85–112.
14. C. TRUESDELL, R. TOUPIN, *The clasical field theories*, Handbuch der Physik, III/1, Berlin–Heidelberg–New York 1960.
15. CZ. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media* (I), Arch. Mech. Stos., **17** (1965), 651–669.
16. CZ. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media* (II), Arch. Mech. Stos., **17** (1965), 777–799.
17. S. ZAHORSKI, *On motion and thermodynamics of non-simple continua with microstructure*, Arch. Mech. Stos., 1, **19** (1967).

Р е з ю м е

СТАТИКА ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛОКНИСТОЙ СРЕДЫ

В работе рассматривается статическая теория поверхностной волокнистой среды состоящей из N фамилий волокон. Теория построена с помощью основных законов механики сплошной среды, закона невоздействия соседних волокон и предположении об аддитивности механических величин, по отношению к отдельным волокнам. Рассмотрено также подобие поверхностной волокнистой среды и поверхностной решетчатой оболочки.

S u m m a r y

STATICS OF SURFACE FIBROUS MEDIA

This paper is concerned with the statical theory of surface media composed of N families of fibres. The theory is developed using fundamental laws of continuum mechanics and the principle of nonreaction of neighbouring fibres together with additivity requirement of mechanical quantities with respect to the particular families of fibres. The problem of analogies between surface fibrous media and surface grate systems is also considered.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 listopada 1968 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

PRZYCZYNEK DO ROZWOJU UKŁADÓW DYSKRETNYCH W OSTATNIM DZIESIĘCIOLECIU W POLSCE

ADAM MORECKI, JAN ODERFELD (WARSZAWA)

W zeszycie 3, 6 (1968) MTiS ukazał się artykuł W. BOGUSZA, E. KARAŚKIEWICZA i S. WIŚNIEWSKIEGO pt. *Rozwój mechaniki układów dyskretnych w ostatnim dziesięcioleciu w Polsce.*

Przeczytaliśmy go z wielkim zainteresowaniem, zarówno z uwagi na treść, jak na charakter całego zeszytu, który poświęcony jest dziesięcioleciu PTMTiS. Szczególną uwagę skupiliśmy na § 3, którego tytuł *Teoria maszyn i regulacji automatycznej* pokrywa się niemal dosłownie z nazwą naszej katedry w Politechnice Warszawskiej. Zdajemy sobie sprawę, że treściwość tego paragrafu i odpowiadającej mu części spisu bibliograficznego postawiła Autorów w konieczności trudnego wyboru.

Wydaje nam się jednak, że pożądane są pewne uzupełnienia. Nie czujemy się na siłach, by zrobić to w przekroju nauki polskiej. Znając jednak kronikę naszej katedry, nie mogliśmy nie zwrócić uwagi na niejednolitość materiału, na którym oparli się Autorzy. Ich spis bibliograficzny obejmuje lata 1953 (pozycja 51) do 1968 (pozycja ogłoszona 92 i pozycja w druku 83). W odniesieniu do naszej katedry analizę zakończono na roku 1965, pomijając w ten sposób mniej więcej jedną trzecią naszego dorobku i to najbardziej aktualnego. Ponadto do reprezentacji tego dorobku wybrano 13 pozycji, niezbyt, naszym zdaniem, trafnie. Ta niejednolitość odbiła się także na słownej treści § 3 na str. 263, gdzie pominięto niektóre kierunki badań, jak sądzimy ważne.

Wdzięczni jesteśmy za uprzejmość Redakcji, która pozwoliła nam przedstawić dorobek naszej katedry. Najpierw jednak informacja kronikarska.

Teoria mechanizmów była uprawiana w okresie międzywojennym przez R. SZEWALSKIEGO, a w latach czterdziestych przez W. MOSZYŃSKIEGO. Nasza katedra powstała w 1955 roku jako pierwsza w Polsce wyspecjalizowana placówka naukowa, poświęcona teorii maszyn i mechanizmów. Obecnie w 11 politechnikach polskich istnieją bądź katedry TMM, bądź też zakłady TMM przy katedrach Mechaniki lub Podstaw Konstrukcji Maszyn.

Od roku 1955 pracownicy naszej katedry i osoby z nią związane ogłosiły lub skierowały do druku około 180 prac. Oczywiście nie wszystkie mają walor naukowy, a ponadto niektóre stanowią powtórzenia innych, jako wyciągi lub tłumaczenia. To, co naszym zdaniem warte jest zarejestrowania w kwartalniku MTiS, sprowadza się do 106 pozycji, z których część jest zbiorcza. Odpowiedni spis ogłaszamy na końcu niniejszej notatki.

Pamiętając, że tytuł notatki ogranicza nas do lat 1958–1968, pozwoliliśmy sobie tylko w pięciu przypadkach na umieszczenie pozycji wcześniejszych, które były potrzebne dla zachowania ciągłości pewnych tematów.

Charakterystyka naszego dorobku jest następująca:

1. Struktura i kinematyka mechanizmów i maszyn. W zakresie struktury poszukiwano między innymi nowych systemów klasyfikacji, prostszych lub ogólniejszych od znanych oraz podstawowych własności topologicznych mechanizmów (poz. 1–8); w zakresie kinematyki — nowych metod oraz oceny znanych metod pod względem ich dokładności (poz. 9–20).

2. Synteza klasyczna i synteza optymalna maszyn. Prace z zakresu syntezy klasycznej (poz. 21–25) dotyczyły tworzenia nowych układów mechanicznych lub elektro-mechanicznych metodami w zasadzie znanymi. Synteza optymalna (poz. 26–45) obejmuje nowe metody statystyczne wymagające na ogół użycia maszyn cyfrowych oraz zastosowanie tych metod do realnych zadań techniki. W ostatnim przypadku z reguły udawało się wykazać korzyść w porównaniu z metodami klasycznymi.

3. Dynamika maszyn. Interesowano się głównie następującymi tematami: odpowiedzią układów na obciążenie impulsowe, dynamiką układów o zmiennej strukturze i dynamiką układów o niektórych parametrach niezdeterminowanych (poz. 46–63).

4. Miernictwo parametrów mechanicznych maszyn. Prace (poz. 64–81) szły w trzech kierunkach: tworzenie nowych metod, tworzenie nowych narzędzi mierniczych, badanie parametrów mechanicznych w realnych układach dotąd nie badanych. Najczęściej interesowano się metodami elektrycznymi lub elektronicznymi, rzadziej optycznymi i mechanicznymi.

5. Biocybernetyka. Tu należą (poz. 82–102) prace podstawowe z zakresu bioniki ruchu i biomechaniki, w szczególności w zakresie analizy sił i miopotencjałów w organizmach żywych oraz prace z zakresu modelowania. Drugim kierunkiem są opracowania w zakresie protetyki kończyny ludzkiej. Trzecim — prace nad manipulatorami.

Odpowiednie prace bibliograficzne podajemy w załączonym spisie. Jest on podzielony na pięć działów odpowiadających charakterystyce dorobku. Na końcu spisu umieszczono dział szósty pt. «Konferencje naukowe Teorii Maszyn i Mechanizmów». Są to pozycje zbiorcze 103–106 zawierające również opracowania pochodzące z naszej katedry.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Struktura i kinematyka mechanizmów i maszyn

1. J. ODERFELD, *O klasyfikowaniu mechanizmów*, Archiwum Budowy Maszyn, t. IV, z. 3 (1957).
2. A. MORECKI, *Podstawy klasyfikacji strukturalnej mechanizmów płaskich*, Archiwum Budowy Maszyn, t. IV, z. 2 (1957).
3. A. MORECKI, *Podstawy klasyfikacji strukturalnej mechanizmów*, Archiwum Budowy Maszyn, t. V, z. 2 (1958).
4. J. ODERFELD, *Kilka własności łańcuchów kinematycznych*, Archiwum Budowy Maszyn, t. VII, z. 2 (1960).
5. A. MORECKI, *Zagadnienia zupełności w klasyfikacji strukturalnej ruchomych grup*, Archiwum Budowy Maszyn, t. VII, z. 2 (1960).
6. E. LACHOWSKI, *Przyczynek do struktury mechanizmów z parami kinematycznymi o zmiennych klasach*, Archiwum Budowy Maszyn, t. X, z. 4 (1960).
7. J. ODERFELD, E. PLESZCZYŃSKA, *Pewne zastosowania partycji* Zast. Matemat., t. VI, z. 2 (1962).

8. A. MORECKI, M. DIETRICH, *Mechanizm dźwigniowy o zmiennej strukturze*, Przegląd Mechaniczny, t. XXIV, nr 24, (1965).
9. J. ODERFELD, *O dokładności pewnej wykreślnej metody wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktu*, Archiwum Budowy Maszyn, t. IV, z. 1 (1957).
10. J. ODERFELD, *O pewnym zastosowaniu racluunku wyrównawczego do kinematyki mechanizmów*, Zast. Matemat., t. IV, z. 2 (1958).
11. J. ODERFELD, *Uogólnienie twierdzenia Grashofa*, Archiwum Budowy Maszyn, t. VI, z. 4 (1959).
12. J. ODERFELD, *Kinematyczna analiza czworoboku przegubowego, którego ruch względny jest dany*, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, nr 45, Mechanika 6, (1960).
13. J. UFNALSKI, *O kinematyce przestrzennego mechanizmu maszyny do szycia*, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika nr 7, (1961).
14. J. ODERFELD, *An algorythm for finding instantaneous centres*, Archiwum Budowy Maszyn, t. IX, z. 2 (1962).
Ermittlung von Momentanpolen in ebenen Getrieben, Maschinenbautechnik, t. XII, z. 7 (1963).
15. A. OLĘDZKI, *O pewnym sposobie zamykania kinematycznego mechanizmów krzywkowych*, Archiwum Budowy Maszyn, t. X, z. 2 (1963).
16. A. OLĘDZKI, *Badanie mechanizmów krzywkowych ruchu przerywanego taśmy filmowej o skróconym czasie przesuwu kadru*, Archiwum Budowy Maszyn, tom XI, z. 2 (1964).
17. J. ODERFELD, *Mechaniczny dowód pewnego twierdzenia geometrycznego*, Zeszyty Naukowe PW, Geometria Wykreślna, nr 3 (1964).
18. A. MORECKI, M. DIETRICH, *Zastosowanie metody toru ocechowanego w kinematyce mechanizmów przestrzennych*, Archiwum Budowy Maszyn, t. XII, z. 4 (1965).
Einsatz der Methode einer geeichten Bahn bei der Analyse von Raumgetrieben, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt, Jahrgang VII, Heft 3 (1966).
19. Ян ОДЕРФЕЛЬД, *О точности графических методов в теории машин и механизмов*, Современные проблемы теории машин и механизмов. АН СССР, Москва 1965.
20. Ян ОДЕРФЕЛЬД, *О точности графических методов кинематики*, Сборник „Анализ и синтез механизмов", Москва 1966.

2. Synteza klasyczna i synteza optymalna maszyn

21. Praca zbiorowa, *Precyzyjna maszyna do wyrównoważania statycznego*, Pomiary Automatyka Kontrola, z. 6 (1960).
22. A. MORECKI, W. NARKIEWICZ, W. BAJON, *O konstrukcji automatu do obrotu płyty metalowej*, Archiwum Budowy Maszyn, t. IX, z. 4 (1962).
23. A. OLĘDZKI, *Metoda numeryczna syntezy mechanizmów krzywkowych*, Przegląd Mechaniczny, nr 18 (1962).
24. A. OLĘDZKI, *Synteza mechanizmów krzywkowych wedlug zadanego przebiegu przyspieszenia ślizgu, przy użyciu tablic skoku jednostkowego*, Pomiary Automatyka Kontrola, nr 10 (1964).
25. A. MORECKI, *Über die Konstruktion einer Maschine zur Eichung von Kraftmessern mit programmierter Steuerung*, Die Maschine, H 4 (1968).
Świadectwo autorskie o dokonaniu wynalazku „Maszyna do wzorcowania dynamometrów". Autorzy wynalazku W. BAJON, A. MORECKI, W. NARKIEWICZ. Patent Nr 53627 z dn. 8.IX.1967 r. (Polska, NRD, NRF, Rumunia).
26. J. ODERFELD, *Wytrzymałość elementów maszyn a oszczędność*, Archiwum Budowy Maszyn, t. 1, z. 1 (1954).
27. J. ODERFELD, *Programowanie w budowie maszyn*, Archiwum Budowy Maszyn, t. IX, z. 4 (1962).
28. J. ODERFELD, *Anwendung der nichtlinearen Programmierung auf die Getriebesynthese*, VIII I.K., 4 Teil, T.H. Ilmenau (1964).
A nemlineáris programozás alkamazása hajtómüvek terwezéséhez, XII Kötetéből, Miskolc (1965).
29. J. GOLIŃSKI, Z. K. LEŚNIAK, *Wybór optymalnych wymiarów konstrukcji za pomocą metody Monte Carlo*, Arch. Inż Ląd., t. X, z. 3 (1964).

30. J. GOLIŃSKI, *O zastosowaniu pewnej metody programowania wypukłego do syntezy mechanizmów*, Algorytmy nr 3 (1964).
31. J. ODERFELD, *Statistische Synthese der Maschinen*, Bericht der Internationalen Konferenz ,,Mechanismen und Maschinen", Varna, Band II (1965).
Podstawy statystycznej syntezy maszyn, Materiały Konferencji Dynamiki Maszyn, Kraków (1965).
32. J. GOLIŃSKI, *O optymalnej syntezie maszyn metodami Monte Carlo*, Archiwum Budowy Maszyn, t. XII, z. 3 (1965).
Über eine optimale Maschinensynthese mittels der Monte-Carlo Methode, Internationale Konferenz ,,Mechanismen und Maschinen", Varna, Band 1 (1965).
O optymalnej syntezie maszyn metodami Monte Carlo, Materiały Sympozjum Zastosowania Maszyn Matem. w Technice, Poznań (1965).
33. J. GOLIŃSKI, *O zastosowaniu metod Monte Carlo do syntezy maszyn*, Algorytmy, nr 4 (1965).
34. M. DIETRICH, J. GOLIŃSKI, *Optymalna synteza maszyn*, Przegląd Mechaniczny XXIV, nr 22 (1965).
35. J. ODERFELD, *Synteza optymalna maszyn*, Zeszyt jubileuszowy ,,Katedra Teorii Maszyn i Mechanizmów w latach 1955–1965", PW, Warszawa (1966).
36. J. ODERFELD, *A contribution to the sequential analysis*, Zast. Matemat., t. IX, 1 (1966).
37. J. GOLIŃSKI, *O pewnym procesie błądzenia*. Zeszyt jubileuszowy ,,Katedra Teorii Maszyn i Mechanizmów w latach 1955–1965", PW, Warszawa (1966).
38. M. DIETRICH, J. GOLIŃSKI, *Optymalna synteza przekładni zębatych*, Materiały Konferencji Naukowo-Technicznej ,,Przekładnie zębate", z. 9, Gliwice (1966).
Projektowanie przekładni zębatych, Przegląd Mechaniczny nr 14 (1966).
39. J. GOLIŃSKI, J. ZWOLIŃSKI, *Dobór optymalnych parametrów silnika motocyklowego*, Technika Motoryzacyjna, Nr 9, (1966).
40. M. DIETRICH, J. GOLIŃSKI, *Pewien sposób postępowania przy optymalizacji metodami Monte Carlo*, Archiwum Budowy Maszyn nr 4 (1967).
41. M. DIETRICH, J. GOLIŃSKI, *Optimale Synthese von Kranträgern*, Hebezeuge und Fördermittel, Heft 5 (1967).
42. J. GOLIŃSKI, *Neue Methoden der Maschinensynthese mit Elektronischen Rechenmaschinen*, Feingerätetechnik, Heft 2 (1967).
43. J. GOLIŃSKI, *O zastosowaniu kilku metod programowania nieliniowego do rozwiązywania zadań z zakresu optymalnej syntezy maszyn*, Materiały Sympozjum Zagadnienia Optymizacji w Mechanizmach, Gliwice (1967).
44. Я. ОДЕРФЕЛЬД, *Некоторые методы оптимального синтеза машин*, V Совещание по основным проблемам ТММ, Сухуми 15—20.V.1967.
45. J. ODERFELD, J. GOLIŃSKI, *Pewien przypadek optymizacji konstrukcji*, Zagadnienia Maszyn Przepływowych, PWN, 1968, 589—597.

3. Dynamika maszyn

46. A. MORECKI, *Badanie wpływu hamowania na obciążenia lin maszyn wyciągowych*, Archiwum Budowy Maszyn, t. III, z. 1 (1956).
47. A. MORECKI, *Dynamika hamowania i podstawowe założenia konstrukcji hamulców*, Wydawnictwo z okazji 10-lecia Politechniki Śląskiej (1955). (Pracę powtórzono w r. 1956 w ZNPŚl. Nr 10).
48. A. MORECKI, *Analiza wpływu hamowania na obciążenia lin maszyn wyciągowych przy zastosowaniu hamulca sprężynowego z pneumatycznym sterowaniem*, Archiwum Budowy Maszyn, t. IV, z. 1 (1959).
49. J. ODERFELD, *Sposób wyrównoważania dynamicznego*, Przegląd Mechaniczny, nr 3 (1959).
50. W. PAJĄK, *Uwagi o pracy amortyzatora oleopneumatycznego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika 6, nr 45 (1960).
51. J. ODERFELD, *On the dynamic load in cylindrical gears*, Bull. Inst. Polytechnic DIN IASI, t. IX, z. 1–2 (1963).
52. M. DIETRICH, *Stateczność żurawi wieżowych w przypadku nagłego odpadnięcia ładunku*, Przegląd Mechaniczny, t. XXIV, z. 22 (1963).

53. M. DIETRICH, *Stateczność położenia wysięgników żurawi w przypadku oberwania ładunku*, Archiwum Budowy Maszyn, t. XI, z. 2 (1964).
Dynamik von Kranen bei plötzlichem Lastabfall, Hebezeuge und Fördermittel, Heft 12 (1964).
54. A. OLĘDZKI, T. BOGUMIŁ, *Dynamika samohamownych przekładni ślimakowych w okresie ruchu zanikającego*, Pomiary Automatyka Kontrola, nr 5 (1964).
55. А. Морецкий, Я. Голински, З. Васерштрум, *Исследование колебательных систем с двумя степенями свободы с сопротивлением пропорциональным квадрату скорости методом Монте Карло*, Сборник докладов международной конференции по „Механизмам и Машинам", Т. 1, Варна 1965.
Badanie układów drgających o dwóch stopniach swobody metodą Monte-Carlo, IV Konferencja Dynamiki Maszyn, Kraków, T. IX (1965).
56. А. Морецкий, Я. Голински, З. Васерштрум, *Исследование методом Монте Карло колебательных систем с двумя степенями свободы с сопротивлением пропорциональным квадрату разности скоростей*. Современные проблемы теории машин и механизмов. АН СССР (1965), Москва.
57. M. DIETRICH, *O dynamice hamowania dźwignic*, Archiwum Budowy Maszyn, t. XII, z. 2 (1965).
58. M. DIETRICH, *O rozkładzie prawdopodobieństwa ciężaru ładunku dźwignicy*, Przegląd Mechaniczny Nr 8 (1966).
O pewnym zagadnieniu stochastycznej dynamiki maszyn występującym w suwnicy, zeszyt jubileuszowy «Katedra Teorii Maszyn i Mechanizmów w latach 1955—1965», PW, Warszawa 1966.
59. M. DIETRICH, *Próba probabilistycznego ujęcia niektórych zagadnień dynamiki dźwignic*, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika nr 20 (1967).
60. M. DIETRICH, *O pewnym układzie równań ruchu maszyn. Zagadnienia drgań nieliniowych*, z. 9 (1968).
61. M. DIETRICH, R. DĄBRÓWKA, J. GOLIŃSKI, *Stateczność żurawia budowlanego*, Przegląd Mechaniczny, nr 3 (1968).
62. A. OLĘDZKI, *The problem of rocking of reilroad cars*, Part I: *Analog Simulation*. Archiwum Budowy Maszyn, t. XV, z. 2 (1968).
The problem of rocking of reilroad cars. Part II. *Model Simulation*. Archiwum Budowy Maszyn, t. XVI, z. 3 (1968).
63. A. OLĘDZKI, *Modelowanie dynamiczne układów o zmiennej strukturze wywołanej obecnością luzów*, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika nr 4 (1968).
Dynamics of selflocking systems, Journal of Mechanisms (w druku).

4. Miernictwo parametrów mechanicznych maszyn

64. A. MORECKI, *O przenoszeniu wskazań wirującego tensometrycznego czujnika oporowego za pomocą komutatora rtęciowego*, Pomiary Automatyka Kontrola, z. 1 (1958).
65. A. MORECKI, J. STAHL, T. TOMASZCZYK, *Pomiary przyspieszeń liniowych i kątowych w mechanizmach i maszynach za pomocą przyspieszeniomierzy tensometrycznych*, Pomiary Automatyka Kontrola, z. 7 (1960).
Pomiary prędkości obrotowej, przyspieszenia liniowego i kątowego w ruchu nieustalonym metodami tensometrycznymi, Z. N. Pol. Wrocł. Automatyka, II Kraj. Konferencja, (1961).
66. A. MORECKI, J. STAHL, T. TOMASZCZYK, *Tensometryczny miernik prędkości obrotowej*, Pomiary Automatyka Kontrola, z. 10, (1961). Patent 45186 z dnia 15.VII.1961.
67. А. Олендзки, *Экспериментальное исследование собственных колебаний киноленты*, ТКИТ, № 8 1961.
68. J. ODERFELD, *Pokrewieństwo krzywych empirycznych*, Archiwum Budowy Maszyn, t. VIII, z. 4 (1961).
69. J. ODERFELD, W. OZIMOWSKI, *O doświadczalnym wyznaczaniu współczynnika tarcia ruchowego*, Archiwum Budowy Maszyn, z. 1 (1961).
70. Zespół Katedry TMM, *W sprawie doświadczalnego wyznaczania współczynnika tarcia*, Archiwum Budowy Maszyn, t. VIII, z. 4 (1961).
71. Praca zbiorowa pod redakcją A. MORECKIEGO, *Przekładnia bezstopniowa z łańcuchem rolkowym*, Mechanik, z. 3 (1962).

72. A. MORECKI, *Badanie sprawności mechanicznej i siły wzdłużnej podwójnych przegubów uniwersalnych Cardana*, Przegląd Mechaniczny, z. 21 (1962).
73. A. OLĘDZKI, *Zastosowanie czujników elektrodynamicznych w badaniach mechanizmów krzywkowych silników spalinowych*, Przegląd Mechaniczny, z. 15 (1962).
74. A. OLĘDZKI, *Miernik nierównomierności biegu maszyn*, Pomiary Automatyka Kontrola, z. 10/11 (1963).
75. A. MORECKI, *O badaniu osiągów w sporcie*, Pomiary Automatyka Kontrola, z. 10/11 (1963).
76. M. DIETRICH, A. RÓŻYCKI, Z. WALCZAK, *Przyspieszenia kabin dźwigów w przypadkach awaryjnych*, Przegląd Mechaniczny XXIV, nr 23 (1965).
77. M. DIETRICH, A. RÓŻYCKI, *Statystyczne badania parametrów eksploatacyjnych dźwignic*, Przegląd Mechaniczny nr 24 (1966).
78. M. DIETRICH, *Dobór tłumienia akcelerometru*, Pomiary Automatyka Kontrola, nr 6 (1967).
79. A. MORECKI, K. KĘDZIOR, T. KOPYT, K. NAZARCZUK, *O badaniu osiągów w sporcie*, Pomiary Automatyka Kontrola, z. 9 (1968).
80. J. ODERFELD, M. A. GLIŃSKA, L. ŁUKASZEWSKA, E. PLESZCZYŃSKA, *Estimating maximum strains in turbine blades*, Wydawnictwo Karl-Marx-Stadt, Universität Leipzig (w druku).
Skrót pracy w MTiS, t. 6, z. 2 (1968).
81. H. BOROWSKI, *Czujniki fotooptyczne w zastosowaniu do pomiarów dokładności podziałki kół zębatych*, Pomiary Automatyka Kontrola, z. 12 (1968).
Impulsowo-magnetyczne urządzenie do pomiaru błędu podziałki zębów walcowych kół zębatych, Patent Nr 48960 z dn. 2.X. (1964).
Sposób zagęszczania zapisu magnetycznego. Patent Nr 49297 z dnia 19.XII (1964).

5. Biocybernetyka

82. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *Sterowanie maszyn i żywych organizmów miopotencjalami*, Archiwum Budowy Maszyn, t. XI, z. 1 (1964).
83. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *O sterowaniu mięśniami kończyny górnej poprzez zakodowane miopotencjały*, Wychowanie Fizyczne, z. 11–12 (1964).
84. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *Mechanoelectrical and biomechanical principles of control of the human upper limb muscles*, Archiwum Budowy Maszyn, t. XI, z. 4 (1964).
85. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, K. NAZARCZUK, *Teoretyczne i doświadczalne badanie współdziałania mięśni kończyny górnej w warunkach statycznych i dynamicznych*, Archiwum Budowy Maszyn, t. XIII, z. 3 (1966).
Niektóre zagadnienia biocybernetyki występujące przy współdziałaniu kończyny górnej w żywym organizmie, Zeszyt jubileuszowy «Katedra Teorii Maszyn i mechanizmów w latach 1955—1965», PW, Warszawa 1966.
86. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *Certains problemes biocybernétiques appliqués aux relations des membres supérieurs et d'un élément prothetique*. Proceedings of the IVth International Congress of Cybernetic Medicine, Nice, France (1966).
87. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *The peripheral organisation of externally controlled natural and artificial limbs*. IX Automation and Instrumentation Conference and Exhibition, Milano 19–25/IX (1966).
88. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *Some problems of Controlling a Live Upper Extremity and Bioprothesis by Myopotential*. External Control of Human Extremities, The Proceedings of the International Symposium, Dubrownik (1966), Belgrade 1967.
89. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *Podstawy sterowania maszyn i żywych organizmów miopotencjalami*. III Krajowa Konferencja Automatyki, Gliwice, t. I (1964).
Принципы управления машинами и живыми организмами посредством биопотенциалов мышц, Механика машин АН СССР, Вып. 7—8, Москва 1967.
90. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *Niektóre zagadnienia sterowania kończyn ludzkich*, Prace IV Krajowej Konferencji Automatyki, t. 9, Kraków 20–24.VI.1967.
91. A. MORECKI, K. NAZARCZUK, *Некоторые вопросы биоэлектрического управления*. V Совещание по основным проблемам ТММ, Сухуми 15—20.V.1967.

92. K. KĘDZIOR, *O urządzeniach do pomiarów parametrów mechanicznych kończyny górnej*, Pomiary Automatyka Kontrola, nr 4 1967.
93. K. NAZARCZUK, *Niektóre zagadnienia analizy i syntezy sztucznego mięśnia pneumatycznego*, Archiwum Budowy Maszyn, t. XV, z. 2 (1967). Patent Nr 56410 „Mięsień pneumatyczny" z dn. 21.VIII. 1968, Włochy, NRD.
94. K. NAZARCZUK, *Niektóre zagadnienia proporcjonalnego sterowania wieloczynnościowych protez i manipulatorów miopotencjalami*. Prace IV Krajowej Konferencji Automatyki, t. 9, Kraków 20–24.VI.1967.
95. K. FIDELUS, *Biomechanical principles of muscles cooperation of the upper extremity*, ICSP UNESCO, I International Seminar on Biomechanics, Zurich 21–23.VI.1967.
96. K. FIDELUS, *The activity of two joint muscles of the thigh in locomotion and in a standing posture*, Dundee (Szkocja) 19–23.VI.1967.
97. K. FIDELUS, *Zależność między siłą i długością u mięśni oblych i pierzastych*. Materiały Dorocznej Przeglądowej Sesji AWF (1968).
98. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, K. TEMPIŃSKI, *O badaniu charakterystyki statycznej mięśnia pierzastego*, Wychowanie Fizyczne i Sport, t. XII, z. 2 (1968).
99. А. Морецкий, Ю. Екиель, К. Фиделус, К. Назарчук, *Исследование взаимного участия мышц в движениях верхних конечностей человека*, Биофизика, Т. XIII,№ 2 (1968).
100. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *Some structural and functional problems in grasp and locomotion extremities*. 5 International Congress of Cybernetic Medicine, Naples, Italy 1968.
101. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *Über einige Probleme der Steuerung von lebendigen Organismen und Mechanismen durch Myopotentiale*, Der Mensch als Regler (w druku).
Synthese von biokibernetischen Steuerungsgeräten, Jubiläumstagung für Getriebelehre, Dresden (1966).
102. A. MORECKI, K. NAZARCZUK, *One some problems of bioelectric control on natural and artificial limbs*, Archiwum Budowy Maszyn, t. XVI, z. 1 (1969).

6. Konferencje naukowe Teorii Maszyn i Mechanizmów

103. A. MORECKI, S. TRZASKA, Z. PARSZEWSKI, *Materiały Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej Katedr i Zakładów Teorii Maszyn i Mechanizmów*, Wyd. MSzW (1957).
104. Praca zbiorowa pod redakcją A. MORECKIEGO, *III Ogólnopolska Konferencja Naukowa Katedr i Zakładów TMM*, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej (1961).
105. Praca zbiorowa pod redakcją A. MORECKIEGO i Z. WALCZAKA, *IV Ogólnopolska Konferencja Naukowa Katedr i Zakładów Teorii Maszyn i Mechanizmów*, Warszawa (1963). Wyd. własne Katedry TMM PW.
106. *V Ogólnopolska Konferencja Naukowa Teorii Mechanizmów i Maszyn*. Wyd. Politechniki Łódzkiej (1965).

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 listopada 1968 r.

Następny zeszyt będzie zawierał prace:

J. Bukowski, W. J. Prosnak, Kierunki rozwoju mechaniki płynów w dziesięcioleciu 1958—1967

Направления развития механики жидкостей и газов в минувшем десятилетии 1958–1967

Development trends of mechanics of fluids in 1958—1967

J. Klepaczko, Fizyczne koncepcje równań konstytutywnych i termicznie aktywowane procesy dyslokacyjne w metalach

Физическая концепция определяющих уравнений и термически активированные дислокационные процессы в металлах

Physical concepts in the constitutive equation and thermally activated processes in metals

J. Pietrzak, K. Wrześniowski, Zastosowanie grafów przepływu do pewnych zagadnień mechaniki budowli

Применение графов течения к некоторым вопросам сооружений

Application of flow graphs to some problems of structural mechanics

J. Halaunbrenner, B. Lechowicz, Obszar kontaktu sztywnej kuli z półprzestrzenią lepko-sprężystą

Область контакта жесткого шара с вязко-упругим полупространством

The contact zone between a rigid sphere and a visco-elastic half-space

M. Makowski, Zależność ryzyka awarii od parametrów procesu obciążenia

Зависимость возможности аварии от параметров процесса нагрузки

Dependence of the risk of failure on loading process parameters

B. Olszowski, Kształtowanie dynamiczne elementów konstrukcji

Оптимальный динамический расчет элементов конструкции

Optimum dynamic design of structural elements

A. Gajewski, Statectność niepryzmatycznych prętów w strumieniu płynu

Устойчивость непризматических стержней, обтекаемых потоком жидкости

Stability of nonprismatic bars in fluid flow

A. Drescher, O pewnej metodzie wyznaczania kryterium zniszczenia polimerów

О некотором методе определения критерия разрушения полимеров

On a certain method of determination of a fracture criterion for polymers

J. Miastkowski, W. Szczepiński, Analiza nośności granicznej rozciąganego pasma z otworami

Анализ несущей способности полосы с отверстиями, подвергаемой растяжению

Limit analysis of strip with holes

E. Złatanowa, Zagadnienie osiowo-symetryczne dla obszarów sprężystych nieściśliwych ograniczonych kulistymi powierzchniami

Осесимметрическая задача для несжимаемой упругой области ограниченной сферической поверхностью

Axi-symmetric problem for incompressible elastic regions bounded by spherical surfaces

Biuletyn Informacyjny

Cena zł 30.—

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)

Mech. Teor., T. 7, z. 2, s. 107—231, Warszawa 1969, Indeks 36712