

7.1.720
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

**MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA**

KWARTALNIK

TOM 6 • ZESZYT 4

Pw^A

531

WARSZAWA 1968
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

<p>W. NOWACKI, Rozwój teorii wytrzymałości materiałów w Polsce Прогресс в области теории прочности материалов в Польше Engineering mechanics in Poland</p>	407
<p>M. ZEMBRZUSKI, O nieustalanej dyfuzji tlenu w procesie spalania ziarna węglowego О неустановившейся диффузии кислорода в процессе сгорания угольного зерна On transient diffusion of oxygen in coal grain combustion process</p>	417
<p>M. ZEMBRZUSKI, Podstawy teorii spalania ziarna węglowego przy skończonej wartości współczynnika nadmiaru powietrza Основы теории сжигания угольного зерна при конечном значении коэффициента избытка воздуха Principles of the combustion theory of coal grain with finite coefficient of air excess</p>	437
<p>L. DIETRICH, K. Turski, Nośność graniczna rozciąganych osiowo-symetrycznych prętów osłabionych szeregiem karbów kątowych Предельная несущая способность растягиваемых цилиндрических стержней ослабленных рядом надрезов Load-carrying capacity of tensile axially-symmetric bars weakened by series of V-notches</p>	437
<p>W. BŁAŻEWICZ, Badania możliwości zmniejszenia prędkości propagacji pęknięcia zmęczeniowego w blachach duralowych przy użyciu zgniotu Исследование возможности уменьшения скорости распространения усталостных трещин в дураломиниевых листах при помощи наклепа Investigation on the possibility decreasing the fatigue crack growth rate in aluminium alloy thin sheet material by using plastic deformation</p>	449
<p>J. LIPIŃSKI, J. ZIÓŁKOWSKI, Stan naprężeń i przemieszczeń w tarczy kołowej o stałej grubości wywołany impulsem cieplnym na wycinku tarczy $\Delta\alpha$ Напряженное состояние и перемещения в диске постоянной толщины, вызванные тепловым импульсом приложенным к сектору диска $\Delta\alpha$ State of stress and strain in a circular disc of constant thickness due to thermal nucleus in a sector of the disc $\Delta\alpha$</p>	471
<p>A. MŁOTKOWSKI, Wytrzymałość płyty kołowej jednostronnie uźebrowanej poddanej antysymetrycznemu zginaniu Прочность круговой пластинки усиленной односторонними радиальными ребрами, подверженной антисимметричному изгибу Strength of circular plate with one-sided ribs subjected to antisymmetric bending</p>	481
<p>Biuletyn Informacyjny</p>	502

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 6 • Z E S Z Y T 4

W A R S Z A W A 1968

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A

JERZY LITWINISZYN — PRZEWODNICZĄCY
EDMUND KARĄSKIEWICZ (POZNAŃ) · ADAM
MITZEL (WROCLAW) · JERZY MUTERMILCH
(WARSZAWA) · WITOLD NOWACKI (WARSZA-
WA) · STANISLAW OCHĘDUSZKO (GLIWICE)
WACLAW OLSZAK (WARSZAWA) · MARIAN
PIĄTEK (GDAŃSK) · JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR
CZESLAW EIMER · BARBARA SKARŻYŃSKA
MAREK SOKOŁOWSKI · WOJCIECH SZCZEPIŃSKI

REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (575+125) egz. Arkuszy wydawn. 7,5. Arkuszy drukarskich, 6,25. Papier druk. sat. III kl., 80 g, 70×100. Oddano do składania 15.VII.1968 r., druk ukończono w listopadzie 1968 r. Zam. 1265/68. N-38. Cena zł 30.—

Druk. Im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROZWÓJ TEORII WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW W POLSCE

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

Zanim przystąpię do omówienia rozwoju nauk o wytrzymałości materiałów w Polsce, nakreślić muszę ramy mego opracowania. Ograniczę się do przedstawienia prac i osiągnięć w dziedzinie szeroko pojętej teorii sprężystości omawiając również dziedziny od niej pochodne, takie jak teoria płyt i powłok, a również statyka i dynamika prętów i układów prętowych. Włączę również dziedziny, które stanowią rozbudowę klasycznej teorii sprężystości, takie jak termosprężystość, magnetosprężystość, aerosprężystość, hydrosprężystość itd.

Stwierdzić trzeba, że teoria sprężystości nie ma w Polsce tak pięknych i dawnych tradycji, jak we Francji (gdzie powstała), we Włoszech czy Anglii. Udział polskich uczonych w tej dziedzinie rozpoczął się późno, około 1890 r. Pierwszym poważnym badaczem w dziedzinie mechaniki budowlanej był F. JASIŃSKI [1]. Prace jego dotyczyły głównie stateczności prętów i układów prętowych. Znany jest jako ten, który inżynierom przywrócił wiarę w teorię stateczności prętów Eulera. Z 1903 r. datuje się pierwsza praca M. T. HUBERA, dotycząca obmyślnego przez niego kryterium wytrzymałościowego. Do działalności wymienionych dwu uczonych dorzucić należy kilka prac naszych matematyków, zajmujących się mechaniką teoretyczną raczej na marginesie swej działalności. Wspomnieć należy o pracy S. ZAREMBY, dotyczącej nieliniowych modeli ciał lepkosprężystych i pracy A. ROSENBLATTA z dziedziny sprzężonej termosprężystości, wreszcie o pracy znakomitego fizyka M. SMOLUCHOWSKIEGO o stateczności płyty spoczywającej na cieczy.

Przyczyną słabego rozwoju mechaniki stosowanej w Polsce w tym okresie była przede wszystkim szczupłość ośrodków naukowych, a zwłaszcza ośrodków naukowych technicznych. Wybitniejsi inżynierowie i badacze nie znajdowali w kraju rolniczym, podzielonym przez zaborców, możliwości rozwoju — rozwijali więc swą działalność przeważnie poza granicami kraju.

Znaczna zmiana na lepsze nastąpiła po uzyskaniu niepodległości w 1918 r. Powstała Politechnika Warszawska, działała nadal Politechnika Lwowska, powstało Centrum Badań Lotniczych. Jednak trzeba było dziesięciolecia, aby wychować młodą kadrę naukową. Niesprzyjającymi okolicznościami w rozwoju kadry naukowej było słabe wyposażenie szkół w laboratoria, a co więcej — brak zapotrzebowania na prace naukowe ze strony konserwatywnego i słabo rozwijającego się przemysłu.

W rozwoju mechaniki stosowanej okresu międzywojennego w Polsce wybitne zasługi położył M. T. Huber. Był on nieprzeciętną indywidualnością, uczonym wielkiego formatu.

Naukowo wypowiedział się w wielu dziedzinach mechaniki. Zajmował się mechaniką ogólną, wytrzymałością materiałów, teorią sprężystości i plastyczności, teorią płyt i powłok, teorią konstrukcji lotniczych. Działalnością swą starał się odrobić zaległości dawnych lat. Stworzył polską literaturę naukową w dziedzinie mechaniki ciała odkształcalnego — jako autor podręczników-monografii: *Mechanika techniczna* [2], trzypięciotomowa *Stereomechanika* [3] (to jest wytrzymałość materiałów), dwutomowa *Teoria sprężystości* [4].

Podnieść należy te jego osiągnięcia, które zapewniły mu trwałe miejsce w nauce światowej. Dziedziną, która go najbardziej interesowała, były hipotezy i kryteria wytrzymałościowe. W 1904 r. w długo niezauważonej pracy *Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału* wypowiedział pogląd, że energię odkształcenia postaciowego należy przyjąć za miarę wyężenia materiału. Kryterium to później zaproponowane przez R. v. MISESA (1913) i H. HENCKY'EGO (1924) nosi obecnie nazwę warunku plastyczności Huber-Mises-Hencky.

Największy rozgłos zjednały M. T. Huberowi prace z dziedziny płyt ortogonalnie anizotropowych, zwanych przez niego «płytami ortotropowymi». I choć podstawy tej teorii podane były wcześniej przez GEHRINGA i VOIGTA, zasługą M. T. HUBERA był rozwój jej teorii w odniesieniu do anizotropii makroskopowej. Wykazał on, że elementy takie, tak płyty żelbetowe, płyty uźebrowane, blacha falista itd. mogą być z dostatecznym przybliżeniem traktowane jako płyty o tak zwanej ortotropii konstrukcyjnej. W dziedzinie teorii płyt ortotropowych M. T. Huber obmyślił szereg metod rozwiązania równania różniczkowego opisującego zgięcie płyt, rozwiązał wiele zagadnień dotyczących statyki i stateczności tych płyt. Owocem jego działalności w tej dziedzinie są dwie monografie [5, 6].

Kilka prac poświęcił M. T. Huber wyjaśnieniu problemu wysuniętego przez H. HERTZA, a dotyczącego zagadnienia tak zwanej bezwzględnej miary twardości. Wykazał on, że proponowana przez H. Hertza miara nie jest cechą materiałową i że miara ta zależy od kształtu stykających się ciał.

Zasługą M. T. Hubera jest wykształcenie i przyciągnięcia do prac naukowych szeregu młodych i zdolnych uczniów. Do jego uczniów należał W. BURZYŃSKI, znany ze swych prac nad kryterium wytrzymałościowym dla ciał kruchych i nad podstawami teorii sprężystości, dalej J. NALESZKIEWICZ — pracujący głównie w dziedzinie stateczności konstrukcji lotniczych i teorii drgań.

W okresie międzywojennym rozpoczął swą działalność naukową W. OLSZAK, głównie w dziedzinie płaskich zagadnień teorii sprężystości ciał jednorodnych i niejednorodnych.

Po okresie drugiej wojny światowej i okupacji Polski przez hitlerowskiego najeźdźcę, pociągającej za sobą wyniszczenie części kadry naukowej mechaników, ogromny wysiłek skierowano w latach 1945—1950 na odbudowę zniszczonych przez okupanta warsztatów pracy oraz na tworzenie nowych ośrodków pracy naukowej i dydaktycznej.

Obok odbudowującej się z gruzów Politechniki Warszawskiej powstają nowe ośrodki myśli technicznej — politechniki w Łodzi, Gdańsku, Wrocławiu, Gliwicach, Krakowie oraz wyższe szkoły inżynierskie w Poznaniu i Szczecinie.

Z natury rzeczy główny wysiłek mechaników polskich skierowany był w tym okresie na prace dydaktyczne i organizacyjne. Mimo to, badania w tym pierwszym powojennym okresie były od razu liczne. Wiązały się one przede wszystkim z zagadnieniami odbudowy

kraju. Dotyczyły zagadnień wytrzymałości materiałów, przede wszystkim statyki i dynamiki oraz stateczności konstrukcji stalowych i żelbetowych. Rozwinęły się też w tym okresie prace z dziedziny teorii płyt i powłok. Przywiązywano też w tym okresie wielką wagę do kształcenia i rozwoju młodej kadry naukowej.

Znaczne ożywienie ruchu naukowego przyniosły przygotowania do I Kongresu Nauki Polskiej, który odbył się w 1951 r. W ramach prac licznych sekcji, a szczególnie sekcji budowy maszyn i sekcji budownictwa, wiele uwagi poświęcono zagadnieniom rozwoju mechaniki stosowanej w kraju. Powstał pierwszy, choć jeszcze bardzo ogólny, plan rozwoju mechaniki stosowanej.

Powstanie w 1952 r. Polskiej Akademii Nauk, a w jej ramach Zakładu Mechniki Ośrodków Ciągłych oraz Zakładu Mechaniki Cieczy i Gazów, pozwoliło na pełniejszą realizację postulatów I Kongresu Nauki. Wymienione dwa ośrodki liczą obecnie 140 osób i działają w ramach Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN. Instytut ten w dużej mierze wpływa na rozwój mechaniki w Polsce.

Skupienie w nim znacznej kadry naukowej wpływa na większą koncentrację badań w nowoczesnych kierunkach mechaniki. Instytut wydaje cztery czasopisma poświęcone mechanice — Archiwum Mechaniki Stosowanej, Rozprawy Inżynierskie, Proceedings of Vibration Problems oraz Polską Bibliografię Analityczną Mechaniki, jak i szereg monografii (dotąd 24) z zakresu mechaniki. Coroczne konferencje naukowe mechaniki stosowanej pozwalają na pełniejszą ocenę dorobku naukowego. Znaczną rolę w życiu mechaniki stosowanej odgrywa w kraju Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, działające głównie na terenie ośrodków naukowych pozawarszawskich. Organizuje ono szereg sympozjów specjalistycznych oraz wydaje czasopismo Mechanika Teoretyczna i Stosowana.

Organem koordynującym badania naukowe i wytyczającym kierunki rozwoju mechaniki stosowanej w Polsce jest Komitet Mechaniki Polskiej Akademii Nauk, działający w ramach Wydziału Nauk Technicznych PAN. Stanowi on reprezentację naukową mechaniki, jest najbardziej autorytatywnym organem stymulującym jej rozwój. Obecnie w dziedzinie mechaniki stosowanej w Polsce pracuje 62 samodzielnych pracowników naukowych (profesorów, docentów) oraz liczna kadra młodszych pracowników nauki.

W rozwoju powojennym mechaniki polskiej charakterystyczne jest to, że prace badawcze przez pierwsze dziesięciolecie postępowały w kierunkach tradycyjnych, podczas gdy w drugim dziesięcioleciu ukształtowały się nowe i liczne kierunki. Wynikało to głównie z procesu kształcenia i dojrzewania młodej kadry naukowej.

Osiągnięcia mechaniki polskiej, w zakreślonym przeze mnie na wstępie obszarze, charakteryzować będę w ramach większych kierunków.

Jednym z poważnych i najszybciej po roku 1945 rozwijających się kierunków — to szeroko pojęta *mechanika konstrukcji*, obejmująca statykę i dynamikę oraz stateczność konstrukcji, jak również teorię płyt i powłok.

W statyce wiele uwagi poświęcono od razu metodom rozwiązywania układów statyczne niewyznaczalnych metodą deformacji. Wynikało to głównie z zapotrzebowań praktycznych licznie powstających biur konstrukcyjnych budownictwa i przemysłu maszynowego. Badania postępowały tu w dwu kierunkach — w kierunku rozszerzenia metody Crossa na układy przesuwne oraz w kierunku przystosowania obmyślonego przez BANACHIEWICZA rachunku krakowianów (odmiana algebry macierzowej) do zadań statyki

konstrukcji. W pierwszej grupie badań nad rozszerzeniem metody iteracyjnej Crossa wymienić należy liczne prace St. BŁASZKOWIAKA i Z. KĄCZKOWSKIEGO, zebrane później w monografii [7], w drugiej liczne prace Z. DOWGIRDA i R. DOWGIRDA [8, 9]. Wiele uwagi poświęcono w tym okresie statyce przestrzennych układów ramowych i statyce rusztów płaskich oraz dźwigarom załamanym w planie (St. BŁASZKOWIAK, Z. KĄCZKOWSKI, W. NOWACKI).

Rozwinęły się badania dotyczące statyki prętów cienkościennych (J. RUTECKI, J. BRZOSKA), ujęte później w opracowaniach monograficznych [12, 13]. Obok znanego podręcznika mechaniki budowli W. WIERZBICKIEGO [10] pojawiła się nowa monografia tej dziedziny [11].

Interesujące wyniki uzyskano w zapoczątkowanym w latach przedwojennych przez Z. WASIUTYŃSKIEGO kierunku kształtowania wytrzymałościowego opartego na kryterium potencjału sprężystego [14]. Kierunek ten rozszerzono na zagadnienia kształtowania wytrzymałościowego prętów i płyt wstępnie sprężonych (Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, W. DZIENISZEWSKI).

Znaczne osiągnięcia uzyskano w dziedzinie stateczności prętów zwykłych i cienkościennych. W tej dziedzinie zanotować trzeba monografię J. NALESZKIEWICZA [15]. Rozwinęły się badania nad bezpieczeństwem budowli i konstrukcji budowlanych (W. Wierzbicki i jego uczniowie), rozwijane na drodze probabilistycznej.

W dziedzinie *dynamiki budowli* opracowano szereg zagadnień odnoszących się do drgań liniowych i nieliniowych belek, wałów, układów prętowych i ramowych itp., dalej szereg zagadnień odnoszących się do uderzeń poprzecznych oraz poprzeczno-podłużnych (np. problem udarowej stateczności pręta), szereg zagadnień dynamiki układów ramowych, rusztów ciągłych, kratownic. Szereg wyników bardzo interesujących uzyskano przy użyciu metody różnic skończonych również i dla układów złożonych, dyskretno-ciągłych. Rozwiązano wreszcie szereg zadań drgań parametrycznych podłużno-giętnych, giętno-skrętnych (S. KALISKI, Z. KĄCZKOWSKI, Z. MAZURKIEWICZ, J. NALESZKIEWICZ, W. NOWACKI, K. PISZCZEK, W. WIERZBICKI i inni). Ukazały się ostatnio dwie monografie z dziedziny dynamiki budowli [16, 17].

Istniejące w Polsce tradycje naukowe przyczyniły się w okresie powojennym do wielkiego rozwoju *teorii płyt*. W pierwszym dwudziestoleciu tematyka prac dotyczyła głównie zagadnienia statyki płyt anizotropowych, przede wszystkim ortotropowych. Uzyskano szereg rozwiązań osobliwych w postaci zamkniętej, pozwalających na wyznaczenie powierzchni wpływowych dla płyt anizotropowych o rozmaitych kształtach i sposobach podparcia (Z. CYWIŃSKA, J. MOSSAKOWSKI, W. NOWACKI). Obmyślono oryginalną metodę rozwiązania zagadnień płytowych przez tak zwane nakładanie ugięć fałdowych (Z. KĄCZKOWSKI). Rozwiązano szereg zagadnień dotyczących płyt wielobocznych i trapezoidalnych (Z. KĄCZKOWSKI, Z. RAJPERT). Rozwinęto szeroko metodę transformacji całkowych i transformacji skończonych do zagadnień płytowych (W. NOWACKI, P. WILDE). Szeroko wykorzystano metodę szeregów trygonometrycznych Fouriera do rozwiązania płyt o różnych sposobach podparcia (dla innych warunków brzegowych niż Naviera), dla płyt o mieszanych warunkach brzegowych (A. KACNER, Z. KĄCZKOWSKI, W. NOWACKI).

Szereg prac poświęcono zagadnieniom stateczności płyt przy użyciu metody równań całkowych Fredholma, drugiego rodzaju (A. KACNER, W. NOWACKI, Z. MAZURKIEWICZ).

Szczególną uwagę poświęcono zagadnieniu mieszanych warunków brzegowych w teorii płyt, rozwiązując je kilkoma metodami. Pierwsza z nich, obmyślona przez W. NOWACKIEGO, polegała na doprowadzeniu zagadnienia do rozwiązania układu równań całkowych pierwszego rodzaju (A. KACNER, S. KALISKI, W. NOWACKI, Z. OLESIAK).

Druga, to zastosowanie do płyt o brzegach liniowych (pasma i półpasma płytowe) metody Wienera-Hopfa (M. SOKOŁOWSKI, M. MATCZYŃSKI).

Trzecia droga rozwiązania, to odmiana metody pierwszej, sprowadzająca zagadnienie do rozwiązania równań całkowych osobliwych, względnie do rozwiązania zagadnienia Hilberta. Metody rozwinięte w dziedzinie mieszanych warunków brzegowych statyki płyt zostały następnie przeniesione do zagadnień stateczności i dynamiki płyt (Z. KĄCZKOWSKI, S. KALISKI, W. NOWACKI), a potem uogólnione na zagadnienia przestrzenne teorii sprężystości (W. Nowacki). Na uwagę zasługują wreszcie badania dotyczące płyt złożonych (*sandwich plates*). Badania te dotyczyły zagadnień statyki, stateczności i dynamiki tych układów (R. GANOWICZ, H. MIKOŁAJCZAK, P. WILDE).

W teorii powłok badania nie były tak liczne, jak w teorii płyt, doznały jednak znacznego nasilenia i zróżnicowania w drugiej dekadzie powojennej. Pierwsze dziesięciolecie skupiało się na badaniach raczej tradycyjnych, odnoszących się do statyki, stateczności i dynamiki powłok walcowych i kulistych, głównie powłok ortotropowych i wzmocnionych żebrami. Z biegiem lat wachlarz prac wzbogacał się o elementy nowe. Ukazały się prace dotyczące drgań samowzбудnych powłoki w oplywie naddźwiękowym, stateczności powłok wirujących, drgań magnetosprężystych w silnym pierwotnym polu magnetycznym. Rozpatrzono szereg zagadnień powłokowych o mieszanych warunkach brzegowych, zagadnień związanych z błędami montażowymi, naprężeniami wstępnymi, wpływem temperatury (Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, J. LEYKO, B. ŁAWRUK, W. NOWACKI).

W ostatnich latach zajęto się wyprowadzeniem ściślejszych równań dynamicznej teorii powłok, wychodząc z równań teorii sprężystości, przy odejściu od hipotezy KIRCHHOFFA (J. MOSSAKOWSKI).

Odrębną grupę prac stanowią prace nad teorią powłok siatkowych. W pracach tych wyprowadzono geometrię powierzchni opisanych zbiorami regularnych punktów, podano wzory na odkształcenia takiej powierzchni oraz wykazano, że otrzymane wyrażenia różniczkowe w granicznym przypadku przechodzą w znane związki różniczkowe dla powierzchni riemanowskiej (W. GUTKOWSKI, H. FRĄCKIEWICZ). Wreszcie interesujące wyniki uzyskano w analizie geometrii odkształceń skończonych powłok i w zagadnieniach dotyczących beznaprężeniowego odkształcenia powłok cienkich w polu temperatury (P. WILDE, Cz. WOŹNIAK).

Bliska omawianym zagadnieniom jest grupa prac z zakresu *aerosprężystości*. W dziedzinie tej wykonano szereg prac odnoszących się do samowzбудnych drgań powłok. Zbadano drgania samowzбудne nieskończonej, zamkniętej i otwartej powłoki walcowej oraz pasma płytowego w oplywie naddźwiękowym przy uwzględnieniu oplywu i zastosowaniu pełnej zlinearyzowanej teorii oplywu (Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI). Szereg prac poświęcono flutterowi wirujących i nie obracających się raket, rozpatrzono flutter powłoki walcowej i stożkowej o skończonej długości (Z. DŻYGADŁO, J. KACPRZYŃSKI, S. KALISKI, L. SOLARZ).

Zbadano naddźwiękowy przepływ wewnętrzny przez kanał obrotowy o drgających ściankach oraz flutter takiego kanału (Z. DŻYGADŁO, W. FISZDON, J. NIESYTTO). Wreszcie opracowano problem drgań parametryczno-samowzbudnych aerosprężystości (Z. Dżygadło, S. Kaliski). Uzyskano szereg interesujących wyników w dziedzinie magneto-flatteru (S. Kaliski, L. Solarz).

W dziedzinie *hydrosprężystości*, kierunku, który rozwija się od kilku lat, odnotować należy grupę prac dotyczącą przepływu cieczy przez rurociągi (hydro-flatter) oraz grupę prac związaną z zagadnieniem drgań ciał częściowo lub zupełnie zanurzonych w cieczy (A. BOBESZKO, R. SOLECKI, J. WIĘCKOWSKI).

W okresie powojennym wielkiego rozwoju doznały badania w dziedzinie teorii sprężystości i jej działów pokrewnych (termosprężystość, magnetosprężystość i inne).

W zagadnieniach statycznych główny nurt badań dzielił się na dwa kierunki — na teorię sprężystości ciał anizotropowych oraz na teorię sprężystości ciał niejednorodnych. Teoria sprężystości ciał izotropowych i jednorodnych nie była uprawiana szeroko. Do ważniejszych osiągnięć w tej dziedzinie należy obmyślenie metody rozwiązania zagadnień o mieszanych warunkach brzegowych przez doprowadzenie rozwiązania do układu równań całkowitych pierwszego rodzaju (W. Nowacki). Tą oraz innymi metodami rozwiązano szereg zagadnień dwuwymiarowych i przestrzennych, takich jak stan naprężenia w prostopadłości sprężystym, w walcu skończonym, w prętach podlegających skręcaniu (S. KALISKI, J. KURLANDZKI). Rozwiązano też szereg zagadnień kontaktowych (Z. OLESIAK).

W dziedzinie elastostatyki *ciał anizotropowych* poszukiwania szły w kierunku uzyskania funkcji przemieszczeniowych (analogicznych do wektora Galerkina w ciele izotropowym) dla ośrodka ortotropowego oraz ośrodka cechującego się izotropią poprzeczną (W. NOWACKI, Z. MOSSAKOWSKA). Uzyskano też szereg rozwiązań fundamentalnych dla przestrzeni i półprzestrzeni sprężystej (Z. Mossakowska), wreszcie uzyskano szereg rozwiązań dwuwymiarowych zagadnień w ciele anizotropowym głównie przy zastosowaniu metody funkcji zmiennej zespolonej (J. MOSSAKOWSKI, M. SUCHAR).

Szereg nowych rezultatów osiągnięto w dziedzinie *elastostatyki ciał niejednorodnych*. Uzyskano tu szereg wyników ogólnych, opracowano metody energetyczne i wariacyjne służące do rozwiązania tych złożonych zagadnień (J. NOWIŃSKI, St. TURSki, S. KALISKI). Rozwiązano szereg konkretnych zadań odnoszących się do deformacji grubościennych walców i kul wydrążonych. Opracowano wreszcie teorię sprężystości ciał fizykalnie nieliniowych (J. NOWIŃSKI, W. OLSZAK, M. ŻYCZKOWSKI).

Niemniej szeroko rozwijały się prace w dziedzinie *elastokinetyki*. W dziedzinie propagacji i dyfrakcji fal sprężystych uzyskano szereg interesujących wyników. Opracowano tak zwaną metodę obszarów skończonych, za pomocą której można uzyskać efektywne rozwiązanie dla propagacji zaburzeń w dowolnym sprężystym ośrodku izotropowym i anizotropowym.

Metoda ta pozwala na uzyskiwanie analogicznych wyników dla problemów brzegowych półprzestrzeni sprężystej (S. Kaliski). Została ona zastosowana do rozwiązania problemu dyfrakcyjnego na klinie sprężystym (J. KURLANDZKI). Problem ten został rozwiązany również inną metodą (metoda Johna) rozkładu na fale kuliste (J. TEISSEYRE). Rozwiązano również szereg problemów dyfrakcyjnych dla dysku płaskiego (L. FILIPCZYŃSKI).

W zakresie dynamicznych zagadnień brzegowych uzyskano szereg oryginalnych rezultatów. Zaliczamy tu metodę redukcji zagadnień brzegowych elastokinytyki do równań całkowych pierwszego rodzaju (S. Kaliski, W. Nowacki). Przy użyciu tej metody uzyskano rozwiązania dla podstawowych problemów brzegowych prostopadłościanu i walca sprężystego. Równania całkowe pierwszego rodzaju rozwiązano przez sprowadzenie ich do nieskończonego układu równań algebraicznych, dla którego wykazano regularność rozwiązania (S. Kaliski). Zagadnienie to zostało powtórnie rozwiązane przez redukcję zagadnienia do równań całkowych drugiego rodzaju (J. Kurlandzki). Podano rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla słabo zbieżnego (rozwiązanie ścisłe) i dla dowolnego stożka (przybliżoną metodę dyskretno-ciągłą) (J. KACPRZYŃSKI, Cz. RYMARZ).

Rozpatrzono szereg problemów granicznych dla półprzestrzeni, jak np. zagadnienie fal Rayleigha dla ośrodka niejednorodnego i anizotropowego (J. IGNACZAK, S. KALISKI).

W dziedzinie szeroko pojętej elastokinytyki odnotować należy dwie obszerne monografie [18, 19].

Od 1955 r. rozwinęły się prace badawcze w dziedzinie *termosprężystości* pojętej najpierw jako teoria naprężeń cieplnych, później wzbogaconej o teorię ogólniejszą, sprzęgającą pole deformacji i pole temperatury (sprężona termosprężystość), a bazującej na termodynamice procesów nieodwracalnych.

W teorii naprężeń cieplnych uzyskano rozwiązania szeregu zagadnień quasi-statycznych, związanych z działaniem źródeł ciepła w ciałach sprężystych rozmaitego kształtu oraz z działaniem nieustalonego pola temperatury na powierzchnię ciała.

Rozwiązania odnosiły się zarówno do ciał sprężystych tak izotropowych, jak również i anizotropowych, oraz do ciał wykazujących cechy lepkosprężyste (W. DERSKI, I. IGNACZAK, J. MOSSAKOWSKI, W. NOWACKI). Opracowano również szereg zagadnień dynamicznych teorii naprężeń odnoszących się do tak zwanych «szoków termicznych», nagłego ogrzania czy oziębienia ciała (J. Ignaczak, W. Nowacki).

W termosprężystości sprzężonej, która stanowi obecnie syntezę teorii sprężystości i przewodnictwa cieplnego, uzyskano szereg wyników związanych głównie z propagacją fal termosprężystych w ciałach izotropowych różnych kształtów. Uzyskano też szereg twierdzeń ogólnych i metod rozwiązywania. Dorobek w dziedzinie teorii naprężeń cieplnych i termosprężystości został zebrany w trzech monografiach [20, 21, 22].

Ostatnio zagadnienia termosprężystości zostały rozszerzone na bardziej złożone ośrodki sprężyste (ośrodek Cosseratów i ogólny ośrodek o asymetrycznej sprężystości) (W. NOWACKI, Cz. WOŹNIAK). Stworzono wreszcie podstawy magneto-termosprężystości, w której wiąże się w ciele sprężystym pole elektromagnetyczne z polem deformacji i temperatury. W silnym stałym polu magnetycznym uderzenie mechaniczne, czy też szok termiczny, powoduje powstanie zaburzeń elektromagnetycznych (S. Kaliski, W. Nowacki).

Przebadano wreszcie działanie temperatury na pole elektryczne i pole deformacji w piezoelektrykach (S. Kaliski, W. Nowacki).

Nowym i oryginalnym kierunkiem, szeroko w ostatnich latach rozwijanym w Polsce, jest magneto-sprężystość (S. Kaliski i współpracownicy). W silnym, stałym, pierwotnym polu magnetycznym zmienne w czasie obciążenia wywołują nie tylko deformację ciała, ale i pole elektromagnetyczne. W rozwiązaniach elektrodynamiki wolnoporuszających się ośrodków pojawiają się człony związane z przemieszczeniem ciała, w równaniach prze-

mieszczeniowych ciała sprężystego — siły Lorentza. W dziedzinie magneto-sprężystości uzyskano szereg interesujących propagacji fal sprężystych i elektromagnetycznych w przewodnikach i dielektrykach (S. KALISKI, A. ROGULA).

Sformułowano równanie pola ze spinem dla ferromagnetyków. Uzyskano efekty promieniowania Czerenkowa, związane ze sprzężeniem pola deformacji i elektromagnetycznego w dielektrykach i przewodnikach. Wreszcie opracowano zagadnienie drgań samowzbudnych strumieni elektronowych poruszających się nad przewodnikiem sprężystym, znajdującym się w stałym polu magnetycznym. Badania te, równolegle prowadzone na drodze doświadczalnej, znajdują zastosowanie w niektórych zagadnieniach geofizyki i generacji fal akustycznych (S. Kaliski i współpracownicy).

W ostatnim dziesięcioleciu rozwinęły się badania w dziedzinie *teorii odkształceń skończonych*. Prace prowadzone są w trzech kierunkach — nieliniowej teorii sprężystości, stateczności i drgań przy dużych odkształceniach oraz w dziedzinie podstaw mechaniki ośrodków ciągłych. W pierwszym z wymienionych kierunków badania skupiały się nad małymi odkształceniami nałożonymi na odkształcenia skończone materiałów, cechujących się ortotropią krzywoliniową oraz nad strukturą ciał izotropowych poddanych dużym odkształceniom sprężystym (W. URBANOWSKI). W ramach drugiego kierunku badano stateczność szeregu ciał: walców grubościennych i kul wydrążonych, izotropowych, sprężystych i lepkosprężystych (Z. WESOŁOWSKI i S. ZAHORSKI).

W ramach trzeciej grupy tematycznej bada się niezmienniki niesymetrycznych tensorów w nieliniowej teorii sprężystości. Dotyczy to zarówno ciał o trzech, jak też i o sześciu stopniach swobody (ośrodek Cosseratów). Opracowano wreszcie na bazie termodynamiki procesów nieodwracalnych teorię ośrodków ciągłych (z zanikającą pamięcią), uwzględniającą oddziaływanie wyższych rzędów między cząsteczkami a mikrostrukturą (Z. Wesołowski, S. Zahorski, Cz. Woźniak).

Ostatnim kierunkiem obecnie żywo rozwijanym jest teoria dyslokacji. Badania w tej dziedzinie rozpoczęto w 1961 r. Zważyć jednak trzeba, że geometrią kontynualnych dyslokacji zaczęto się zajmować zaledwie 10 lat temu.

W początkowym stadium zajmowano się geometryczną statyką dyslokacji w zagadnieniach ciągłych rozkładów dyslokacji w kryształach. W tym okresie rozwiązano zagadnienie zanurzenia kryształu z ciągłym rozkładem dyslokacji (odpowiednikiem którego jest przestrzeń Cartana) w dziewięciowymiarowej przestrzeni euklidesowej. W ten sposób można było wprowadzić pojęcie przemieszczenia między kryształem zdyslokowanym a kryształem idealnym, traktując oba kryształy jako trójwymiarowe podprzestrzenie zanurzone we wspólnej dziewięciowymiarowej przestrzeni euklidesowej (H. ZORSKI, M. ŻÓRAWSKI). W dalszym ciągu rozpoczęto prace nad dynamiczną teorią dyslokacji, którą prowadzono w dwóch kierunkach; jest to dynamiczna teoria defektów dyskretnych w ośrodku sprężystym i dynamiczne zagadnienia defektów rozłożonych w sposób ciągły w ośrodku sprężystym. W obu grupach zagadnień zbudowano równania ruchu defektów, w przypadku defektów dyskretnych bazując na elektrodynamicznej teorii elektronu. Rozwiązano również zagadnienie dyspersji fal na defektach sieci krystalicznej. Opracowano niektóre zagadnienia związane z kwantowaniem pól defektów w ośrodku ciągłym (Z. Mossakowska, H. Zorski, M. Żórawski).

*

W dokonanym tu przeglądzie kierunków i wyników naukowych świadomie punkt ciężkości położono na ostatnie dziesięciolecie. W pierwszej dekadzie powojennej szkolono głównie kadrę. Szczupłość i małe doświadczenie naukowe kadr skłaniało do kontynuowania kierunków tradycyjnych. Jednakże z biegiem lat następowało coraz szybsze zbliżanie się do głównego nurtu rozwoju mechaniki i, co równie ważne, następowało zapoczątkowanie nowych, oryginalnych kierunków. O ewolucji tej świadczy przykładowo stan w dziedzinie teorii sprężystości. W latach 1945-1955 rozwijano głównie teorię dźwigarów powierzchniowych (płyty i powłoki) oraz teorię sprężystości ciał anizotropowych. W latach 1955-1960 na plan pierwszy wysunęły się badania w dziedzinie teorii naprężeń cieplnych i liniowej lepkosprężystości. W ostatnim pięcioleciu dominuje nieliniowa teoria sprężystości, termosprężystość, teoria dyslokacji i teoria pól sprzężonych.

W ostatnich latach obserwuje się w mechanice polskiej dwie tendencje: jedną zmierzającą do coraz ściślejzego opisywania zachowania się ciał rzeczywistych i drugą, zmierzającą do sprzęgania ze sobą różnych, dotąd oddzielnie rozwijanych dziedzin. Ta ostatnia tendencja, prowadząca do ściślejzego wiązania mechaniki z fizyką ma głównie charakter poszukiwawczy. Dąży do opisywania efektów wtórnych i eksponowania ich przy wzroście określonych parametrów do efektów głównych.

Literatura cytowana w tekście

1. F. JASIŃSKI, *Izbrannyje soczinjenje*, Petersburg 1902.
2. M. T. HUBER, *Mechanika ogólna i techniczna*, Warszawa 1951.
3. M. T. HUBER, *Stereomechanika*, Warszawa 1951.
4. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, tom I i II, Warszawa 1948.
5. M. T. HUBER, *Teoria płyt prostokątnie-różnokierunkowych*, Lwów 1921.
6. M. T. HUBER, *Probleme der Statik technisch wichtiger orthotropen Platten*, Gastvorlesungen an der E. T. H. Zürich, Warszawa 1929.
7. St. BŁASZKOWIAK, Z. KAŹKOWSKI, *Metoda Crossa*, Warszawa 1958.
8. Z. DOWGIRD, *Krakowiany*, Warszawa 1956.
9. R. DOWGIRD, Z. DOWGIRD, *Konstrukcje prętowe z zastosowaniem krakowianów*, Warszawa 1964.
10. W. WIERZBICKI, *Mechanika budowli*, Warszawa 1968.
11. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, Warszawa, tom I (1957), tom II (1960), tom III (1966).
12. J. RUTECKI, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, Warszawa 1957.
13. J. BRZOSKA, *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*, Warszawa 1961.
14. Z. WASIUFYŃSKI, *O kształtowaniu wytrzymałościowym*. Część I-III, Warszawa 1939.
15. J. NALESZKIEWICZ, *Zagadnienie stateczności sprężystej*, Warszawa 1958.
16. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Warszawa 1961.
17. R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Dźwigary prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne*, Warszawa 1964.
18. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej termosprężystości i ciał niesprężystych*, Warszawa 1957.
19. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Drgania i fale*, Warszawa 1964.
20. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1960.
21. W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, Oxford 1962.
22. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1966.

Р е з ю м е

ПРОГРЕСС В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ В ПОЛЬШЕ

В работе дан краткий обзор развития в Польше учения о прочности (сопротивлении) материалов в широком смысле этого названия, начиная с девяностых годов минувшего столетия. Обсуждены основные научные достижения и главные направления разработки таких областей, как классическая наука о сопротивлении материалов, строительная механика и теория упругости, а в частности: теория анизотропных тел, теория пластин и оболочек, гидро- и аэроупругость, магнито- и термоупругость, теория конечных деформаций.

Список литературы содержит лишь фундаментальные монографии польских учёных этого периода.

S u m m a r y

ENGINEERING MECHANICS IN POLAND

The paper presents a short survey of main Polish achievements in the domain of engineering mechanics for the past eighty years. The fundamental results and development trends are listed in the field of the classical strength of materials, structural mechanics and elasticity theory, concerning, in particular: the theory of anisotropic bodies, theory of plates and shells, hydro- and aero-elasticity, magneto- and thermoelasticity and the theory of finite deformations. References are made to some of the most important books and monographs published by Polish scientists in the field of applied mechanics.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 kwietnia 1968 r.

O NIEUSTALONEJ DYFUZJI TLENU W PROCESIE SPALANIA ZIARNA WĘGLOWEGO

MIECZYŚLAW ZEMBRZUSKI (WROCLAW)

Ważniejsze oznaczenia

c	stężenie tlenu [kg/cm^3],
c_0	stężenie tlenu w otoczeniu,
c_{r_0}	stężenie tlenu na powierzchni ziarna,
c_{0p}	stężenie tlenu początkowe,
D	współczynnik dyfuzji [cm^2/sek],
F	powierzchnia ziarna [cm^2],
G_t	masa tlenu [kg],
G_w	masa węgla [kg],
k	stała prędkości reakcji [cm/sek],
r	współrzędna w układzie kulistym [cm],
r_0	promień ziarna,
r_{0p}	promień ziarna początkowy,
R	promień przestrzeni spalania,
T	temperatura [$^{\circ}\text{K}$],
α	współczynnik nadmiaru powietrza,
β	współczynnik stechiometryczny,
Λ	stosunek k/D ,
ν_0	stężenie tlenu objętościowe,
ρ_t	gęstość tlenu [kg/cm^3],
ρ_w	gęstość węgla [kg/cm^3],
τ	czas [sek],
τ_{sp}	czas spalania ziarna.

1. Wprowadzenie

Zwykła koncepcja teoretyczna płomienia pyłowego (fizyczny model płomienia) polega na traktowaniu płomienia jako zbioru ziaren spalających się we wspólnej przestrzeni, przy jednoczesnym przyjęciu, że odległości między ziarnami są tak duże, że każde ziarno spala się jak gdyby w przestrzeni nieograniczonej. THRING i ESSENHIGH [1] podali koncepcję odmienną, zgodnie z którą płomień uważany jest za zbiór ziaren spalających się w oddzielnych przestrzeniach ograniczonych. Obydwie koncepcje były przedyskutowane w [2], gdzie wskazano, że w przeciwieństwie do pierwszej — koncepcja Thringa i Essenhigha posiada interpretację doświadczalną, pozwalającą na wyznaczenie sumarycznych stałych kinetycznych, za pomocą prostego doświadczenia. To ostatnie polega na spalaniu ziarna węgla w zamkniętym naczyniu o pojemności odpowiadającej zadanej wartości α [2, 3].

W niniejszej pracy omówiona jest dyfuzja tlenu do ziarna przy spalaniu zachodzącym w przestrzeni ograniczonej (w zamkniętym naczyniu). Celem pracy jest rozstrzygnięcie, czy równania spalania ziarna wyprowadzane w kinetyczno-dyfuzyjnej teorii spalania węgla dla przestrzeni nieograniczonej i oparte na założeniu o dyfuzji ustalonej [4] mogą być stosowane również dla spalania w przestrzeni ograniczonej.

2. Wyściowy układ równań

Spalanie ziarna węglowego, zarówno pojedynczego jak i w płomieniu pyłowym, przyjmowane jest za izotermiczny proces ustalony w przestrzeni nieograniczonej. Przy tym założeniu dopływ tlenu (lub innego gazu czynnego chemicznie) może być traktowany jako molekularna dyfuzja w przestrzeni nieograniczonej [1], opisana równaniem:

$$(2.1) \quad \frac{d^2c}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dc}{dr} = 0,$$

z warunkami

$$(2.2) \quad r = r_0 \quad D \frac{dc}{dr} = kc(r_0),$$

$$(2.3) \quad r = \infty \quad \frac{dc}{dr} = 0.$$

Rozwiązaniem równania (2.1)-(2.3) jest znana zależność między stężeniem tlenu na ścianie ziarna a wielkością ziarna i kinetycznymi charakterystykami paliwa

$$(2.4) \quad c(r_0) = c_{r_0} = \frac{c_0}{1 + r_0 \frac{k}{D}}.$$

Jeżeli spalanie przebiega przy skończonej wartości α , jak to ma np. miejsce w płomieniu pyłowym, to c_0 jest zmiennie w czasie spalania i wyznaczenie funkcji $c_0(\tau)$ lub części jej $c_0(r)$ wymaga dodatkowych założeń określających wymianę masy w płomieniu.

Zarówno analiza modelu płomienia pyłowego według koncepcji Thringa i Essenhigha, jak i spalania ziarna w naczyniu zamkniętym wymaga uwzględnienia dwóch założeń, których nie ma potrzeby brać pod uwagę przy analizie spalania ziarna w przestrzeni nieograniczonej. Uwzględnić mianowicie trzeba, że spalanie ziarna wprowadza w chemicznym składzie otoczenia zmiany zależne od czasu oraz że zewnętrzna granica obszaru uniemożliwia wymianę masy z dalszym otoczeniem. Odpowiadający tym założeniom schemat dyfuzji wyjaśniony jest na rys. 1. Ponieważ przy wynikających ze schematu warunkach brzegowych równanie [1] nie posiada rozwiązania (poza przypadkiem $c = 0$) konieczne jest przyjęcie bardziej ogólnego równania dyfuzji nieustalonej

$$(2.5) \quad D_1 \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) = \frac{\partial c}{\partial \tau},$$

z warunkami brzegowymi

$$(2.6) \quad r = r_0 \quad \frac{\partial c}{\partial r} = \Lambda c(r_0),$$

$$(2.7) \quad r = R \quad \frac{\partial c}{\partial r} = 0$$

oraz warunkiem początkowym

$$(2.8) \quad c(r, 0) = c_{0p}.$$

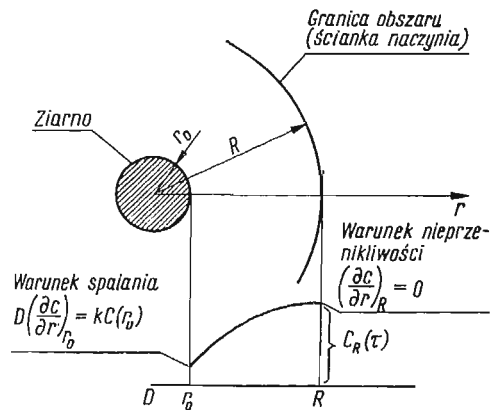
Przyjmując, że przestrzeń spalania jest kulista, jej promień będzie wynosił

$$(2.9) \quad R = r_{0p} \sqrt[3]{\frac{\rho_w \alpha}{\rho_{O_2} \nu_0 \beta}},$$

gdzie przez β oznaczono rzeczywisty, stechiometryczny stosunek dla reakcji $C + O_2 \rightarrow CO_2$. W przyjętym modelu spalania ziarna reakcje wtórne homo- i heterogeniczne oraz pierwotna reakcja $C + \frac{1}{2} O_2 \rightarrow CO$ są pominięte, a odpowiednią korekturę wprowadza się dopiero przy ustalaniu zależności między masowymi wydatkami tlenu i węgla przez przyjęcie, że w równaniu bilansowym

$$(2.10) \quad -\frac{dG_w}{d\tau} = \beta \frac{dG_t}{d\tau}$$

współczynnik β jest sumaryczną wielkością uwzględniającą pominięte uprzednio reakcje [5].



Rys. 1. Schemat dyfuzji tlenu przy spalaniu ziarna w przestrzeni ograniczonej

Równanie (2.5) z warunkami (2.6)-(2.8) jest formalnie identyczne z równaniem przewodnictwa cieplnego z warunkiem brzegowym III rodzaju. Omawiane w dalszym ciągu pracy rozwiązanie zadania (2.5)-(2.8) otrzymano przez podstawienie $cr = z$ i $r = x + r_0$, sprowadzające równanie do postaci jednowymiarowej i następnie zastosowanie metody rozdzielania zmiennych.

3. Stężenie tlenu na powierzchni ziarna

Przy skończonej wartości α , wielkość przestrzeni spalania określona równaniem (2.9) jest również skończona. W tym przypadku rozwiązaniem równania (2.5) z warunkami (2.6)-(2.8) jest szereg

$$(3.1) \quad c(r, \tau) = c_{0p} \frac{2}{r} \sum_{i=1}^{\infty} A_i a_i \exp(-\lambda_i^2 D\tau),$$

gdzie

$$(3.2) \quad A_i = \frac{b}{\lambda_i} \sin \lambda_i (R-r_0) + \cos \lambda_i (R-r_0),$$

$$(3.3) \quad a_i = \frac{(1-bR) \cos \lambda_i (R-r_0) + (R\lambda_i + b/\lambda_i) \sin \lambda_i (R-r_0) + br_0 - 1}{(R-r_0)\lambda_i^2 + (R-r_0^2)(A^2 + 2A/r_0 + 1/r_0^2) + 1/(1+\lambda_i^2 R^2)(R\lambda_i^2 - A - 1/r_0)(RA + R/r_0 - 1)}.$$

W powyższych równaniach oznaczają: $b = A + 1/r_0$, $A = k/D$, a wartości własne $\lambda_i (i = 1, 2, 3 \dots)$ są kolejnymi pierwiastkami równania przestępnego

$$(3.4) \quad \frac{\sin \lambda_i (R-r_0)}{\cos \lambda_i (R-r_0)} - \frac{\lambda_i (Rr_0 A + R-r_0)}{\lambda_i^2 Rr_0 + r_0 A + 1} = 0.$$

Wielkości R , r_0 , k , D są przyjęte jako stałe.

Dla teorii spalania ziarna wartościami ważnymi są: stężenie tlenu na powierzchni ziarna c_{r_0} i na granicy przestrzeni — c_R .

Dla $r = r_0$ otrzymuje się

$$(3.5) \quad A_i^{r_0} = 1;$$

dla $r = R$ otrzymuje się

$$(3.6) \quad A_i^R = \frac{b}{\lambda_i} \sin \lambda_i (R-r_0) + \cos \lambda_i (R-r_0).$$

Wartości a_i pozostają wspólne dla c_{r_0} i c_R .

Uwzględniając równania (3.5) i (3.6) otrzymuje się

$$(3.7) \quad c_{r_0}(\tau) = c_{0p} \frac{2}{r_0} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \exp(-\lambda_i^2 D\tau),$$

$$(3.8) \quad c_R(\tau) = c_{0p} \frac{2}{R} \sum_{i=1}^{\infty} A_i^R a_i \exp(-\lambda_i^2 D\tau).$$

Równanie (3.7) po uwzględnieniu równań (2.6) i (2.10) daje wzór na masową prędkość spalania ziarna

$$(3.9) \quad \frac{dG_w}{d\tau} = \frac{F}{\rho_w} \beta k c_{r_0}(\tau) = \frac{F}{\rho_w} \beta k c_{0p} \frac{2}{r_0} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \exp(-\lambda_i^2 D\tau).$$

Przeprowadzone obliczenia⁽¹⁾ funkcji $c_{r_0}(\tau)$, uwzględniające cztery pierwsze wyrazy szeregu (3.7), których przykłady w postaci wykresów $c_{r_0}(\tau)/c_{0p} = f(\tau)$ przedstawiono na rys. 2, wskazują, że:

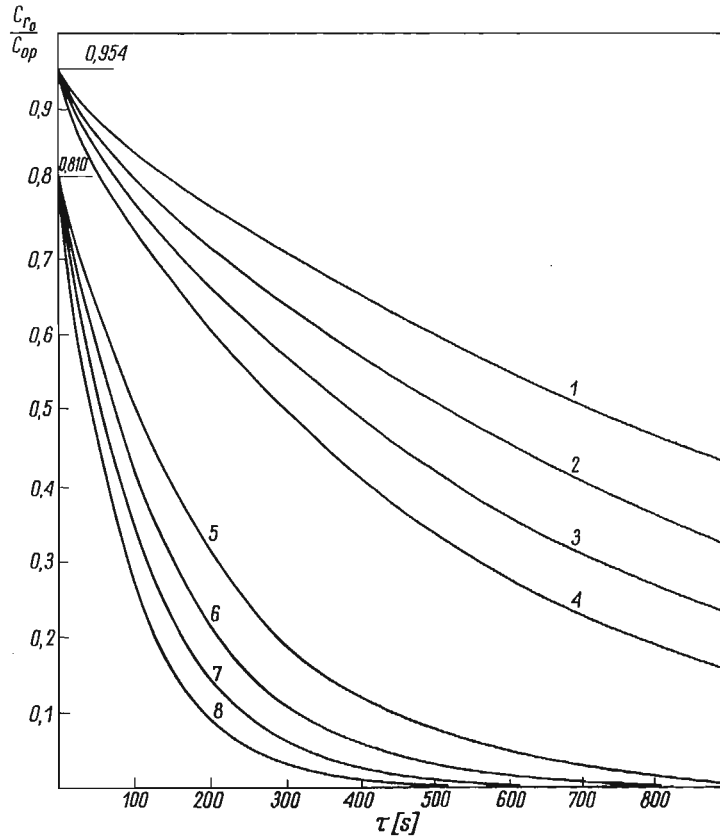
a) w pobliżu punktu $\tau = 0$, szereg (3.7) jest wolno zbieżny; różnica $c_{0p} - c_0(0)$ jest zależna od A i rośnie z jego zwiększeniem,

(¹) Obliczenia numeryczne szeregu c_{r_0} , na które powołujemy się w niniejszym artykule, zostały wykonane na maszynie «Odra 1013» w Zakładzie Obliczeniowym Politechniki Wrocławskiej.

b) nawet dla bardzo małych czasów ($\tau \approx 0$), wyraz drugi i następne są małe w porównaniu z wyrazem pierwszym.

We wszystkich dalszych obliczeniach ograniczono się do wyrazu pierwszego. Dopuszczalność tego uproszczenia można wykazać, biorąc pod uwagę, że w przedziale czasu $(0, \infty)$ przez powierzchnię ziarna musi przepłynąć cała ilość tlenu zawarta w przestrzeni spalania, tzn. musi być

$$(3.10) \quad \frac{4\pi r_0^3 \rho_w \alpha}{3\beta} = 4\pi r_0^2 \Lambda D c_{0p} \frac{2}{r_0} \int_0^\infty a_i \exp(-\lambda_i^2 D \tau) d\tau.$$



Rys. 2. c_{r_0}/c_{0p} w funkcji czasu dla $r_0 = 0,1$ $R/r_0 = 50$

Oznaczenia krzywych: 1 - $\Lambda = 1$, ($D = 3,9$); 2 - $\Lambda = 1$, ($D = 5,4$); 3 - $\Lambda = 1$, ($D = 7,2$); 4 - $\Lambda = 1$, ($D = 9,3$); 5 - $\Lambda = 10$, ($D = 3,9$); 6 - $\Lambda = 10$, ($D = 5,4$); 7 - $\Lambda = 10$, ($D = 7,2$); 8 - $\Lambda = 10$, ($D = 9,3$)

Jeżeli w powyższym równaniu ograniczyć się do pierwszego szeregu, to po scałkowaniu i po prostych przekształceniach otrzymuje się warunek

$$(3.11) \quad \frac{r_0^2}{3} \left(\frac{R}{r_0} \right)^3 = \frac{2\Lambda a_1}{\lambda_1^2}.$$

Obliczenia przeprowadzone dla $r_0 = 0,01 \div 0,1$; $R/r_0 = 5 \div 150$; $A = 1 \div 50$ wykazały, że warunek (3.11), dla uwzględnionego zakresu wartości r_0 , R/r_0 i A , jest spełniony z błędem nie przekraczającym 0,5%, przy wartościach λ_1 wyznaczanych z dokładnością 10^{-6} .

4. Wpływ niestalenia dyfuzji na czas spalania ziarna

Wpływ niestalenia dyfuzji tlenu na przebieg spalania ziarna węglowego określimy stosunkiem

$$(4.1) \quad \varphi = \frac{\tau_{sp}^N}{\tau_{sp}^U}$$

dla ziarna o $r_0 = \text{const}$.

Wyznamy najpierw czas spalania w warunkach dyfuzji niestalanej, wychodząc z równania (3.9). Jeżeli w tym równaniu ograniczyć się do pierwszego wyrazu szeregu, to otrzymuje się równanie (3.9.1)

$$dG_w(\tau) = -8\pi r_0 A D a_1 \frac{c_{0p} \beta}{\rho_w} \exp(-\lambda_1^2 D \tau) d\tau,$$

które po scałkowaniu i uwzględnieniu warunku: $G_w(0) = 0$, daje:

$$(4.2) \quad G_w(\tau) = \frac{8\pi r_0 A D a_1 c_{0p} \beta}{\lambda_1^2 \rho_w} [1 - \exp(-\lambda_1^2 D \tau)].$$

Koniec spalania nastąpi w chwili τ_{sp}^N , gdy

$$(4.3) \quad G_w(\tau_{sp}^N) = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_w.$$

Podstawiając powyższe do (4.2), otrzymuje się ostatecznie

$$(4.4) \quad \tau_{sp}^N = \frac{1}{\lambda_1^2 D} \ln \frac{1}{1 - \frac{\rho_w \lambda_1^2 r_0}{\beta c_{0p} 6 a_1 A}}.$$

Wyznaczenia czasu spalania ziarna w warunkach dyfuzji ustalonej, przy skończonej wartości α , wymaga, jak to wspomniano w punkcie 2, dodatkowych założeń określających sposób, w jaki zmienia się stężenie tlenu w przestrzeni. Aby zachować warunek, że spalanie zachodzi przy tej samej wartości α , przyjmijmy model płomienia monofrakcyjny, o dobrym mieszaniu [2], dla którego, jak wiadomo

$$(4.5) \quad c_0(r) = c_{0p} \frac{r_0^3 (\alpha - 1) + r^3}{r_0^3 \alpha}.$$

Podstawiając (4.5) do (2.4) otrzymuje się

$$(4.6) \quad \frac{dr_0}{d\tau} = -\frac{1}{\rho_w} \beta A D k \frac{1}{1 + r_0 A} \frac{r_0^3 (\alpha - 1) + r^3}{r_0^3 \alpha}.$$

Powyższe równanie określa prędkość spalania ziarna o zmiennym promieniu, podczas gdy równanie (4.4) odnosi się do ziarna o $r_0 = \text{const}$. Z tego względu (4.6) należy prze-

kształcić w ten sposób, aby i ono odnosiło się do ziarna o stałym promieniu. Odpowiednie przekształcenie daje

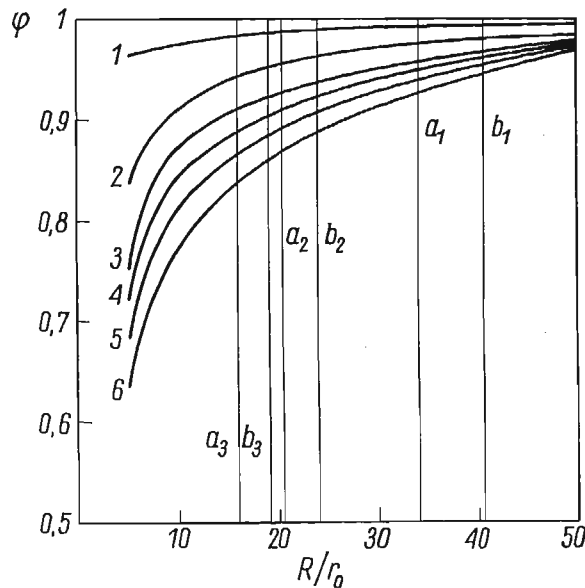
$$(4.7) \quad dG_w(\tau) = -4\pi r_0^2 \Lambda D \frac{1}{1+r_0\Lambda} \frac{c_{0p}\beta}{\varrho_w} \exp\left(-\frac{3c_{0p}}{r_0\varrho_w\alpha} \frac{\Lambda D}{1+r_0\Lambda} \tau\right) d\tau.$$

Całkując je i zachowując warunek $G_w(0) = 0$ otrzymuje się:

$$(4.8) \quad \tau_{sp}^U = \left(\frac{R}{r_0}\right)^3 \frac{r_0(1+r_0\Lambda)}{3\Lambda D} \ln \frac{1}{1 - \frac{\varrho_w}{\beta c_{0p}} \left(\frac{r_0}{R}\right)^3}.$$

Podstawiając równania (4.4) i (4.8) do (4.1) otrzymuje się szukany stosunek

$$(4.9) \quad \varphi = \frac{\frac{1}{\lambda_1^2 D} \ln \left[1 / \left(1 - \frac{\varrho_w}{\beta c_{0p}} \frac{\lambda_1^2 r_0}{6a_i \Lambda} \right) \right]}{\left(\frac{R}{r_0}\right)^3 \frac{r_0(1+r_0\Lambda)}{3\Lambda D} \ln \left[1 / \left(1 - \frac{\varrho_w}{\beta c_{0p}} \frac{r_0^3}{R^3} \right) \right]}.$$



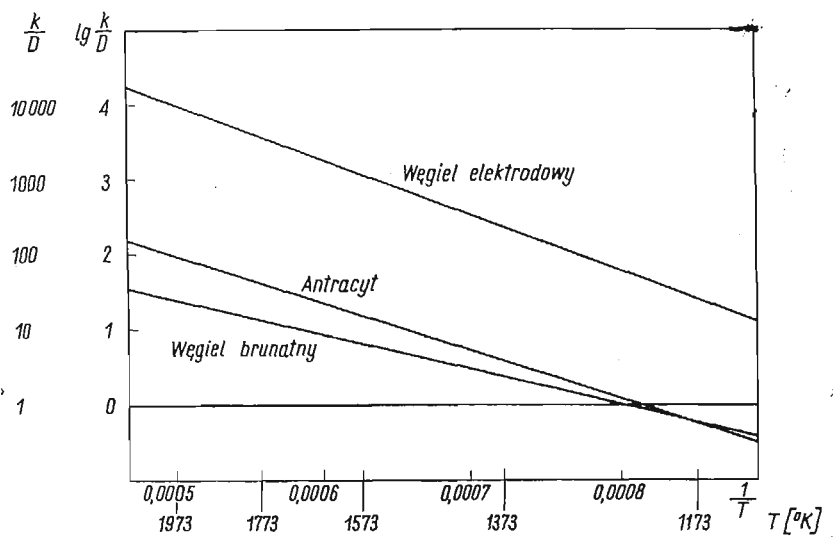
Rys. 3. Wykresy (R/r_0) dla $r_0 = 0,1$ przy różnych Λ
Czynniki kładące: 1— $\Lambda = 1$, 2— $\Lambda = 10$, 3— $\Lambda = 30$, 4— $\Lambda = 50$, 5— $\Lambda = 100$, 6— $\Lambda = 200$

Wobec wykazanej uprzednio równości (3.11) równanie (4.9) przybiera prostą postać

$$(4.9.1) \quad \varphi = \frac{\frac{1}{\lambda_1^2}}{\left(\frac{R}{r_0}\right)^3 \frac{r_0(1+r_0\Lambda)}{3\Lambda}}.$$

Wykresy funkcji $\varphi(R/r_0)$ dla $r_0 = 0,1$ przy kilku wartościach Λ są przedstawione na rys. 3. Ponieważ związek między Λ a T zależy od kinetycznych właściwości paliwa, na

rys. 4 podano wykresy $\Lambda(T)$ dla kilku paliw, przyjmując wartości k wg [6], a wartości D wg [7]. Również związek między α a R/r_0 nie jest jednoznaczny i przy danym r_0 zależy od początkowego stężenia tlenu (wartość ν_0) i od uwzględnionych reakcji chemicznych (wartość β). Na rys. 3 liniami a_1 , b_1 zaznaczono obszar odpowiadający $\alpha = 1$ przy spalaniu w powietrzu ($\nu_0 = 0,21$), w przedziale temperatur 1173–1973°K i uwzględniając tylko reakcję $C + O_2 \rightarrow CO_2$; liniami a_2 , b_2 — to samo dla czystego tlenu ($\nu_0 = 1$); a liniami a_3 , b_3 — również dla czystego tlenu, ale z uwzględnieniem tylko reakcji $C + \frac{1}{2} O_2 \rightarrow CO$. Jak widać na rys. 2, przy stosowanych obecnie wartościach α , c_{0p} , Λ (obszar na prawo od linii a_2), wpływ nieustalenia dyfuzji tlenu na czas spalania ziarna nie przekracza kilku



Rys. 4. Wartości $k/D = \Lambda$ we współrzędnych Arrheniusa dla różnych paliw

procent, nawet dla bardzo dużych ziaren ($r_0 = 1000\mu$). Dla mniejszych ziaren, te różnice są odpowiednio mniejsze. Przykładowo, jeżeli przy $\Lambda = 10$, $R/r_0 = 50$, dla $r_0 = 1000\mu$, $\varphi = 0,965$, to dla $r_0 = 100\mu$, $\varphi = 0,985$ przy tych samych wartościach Λ i R/r_0 . Natomiast przy spalaniu w czystym tlenie (obszar na prawo od linii b_2), zwłaszcza z uwzględnieniem reakcji tworzenia CO (obszar na prawo od linii b_3), błąd w wartościach czasu spalania może przekroczyć 10%, przynajmniej dla dużych ziaren.

5. Wnioski

Z przeprowadzonej analizy wynika, że przy stosowanych obecnie w płomieniu pyłowym wartościach T , α , c_{0p} , r_0 , wpływ nieustalenia dyfuzji tlenu na czas spalania ziarna jest niewielki i może być pominięty. Ewentualne różnice w czasach spalania, nawet dla bardzo dużych ziaren rzędu 1000μ , nie przekraczają kilku procent, co wobec małej dokładności podobnych obliczeń jest wartością całkowicie dopuszczalną. Uwzględnienie dyfuzji nieustalonej będzie natomiast uzasadnione w przypadku bardzo dużych ziaren, stosowania powietrza wzbogaconego tlenem, przy wysokich temperaturach procesu i dużych energiach

акtywacji. W takim przypadku бłąd wynikający z przyjęcia dyfuzji ustalonej może przekroczyć 10%.

Ogólnym wnioskiem z przeprowadzonych rozważań jest, że w analizie spalania ziarna węglowego równanie dyfuzji nieustalonej z warunkiem brzegowym odpowiadającym spalaniu może być zastąpione równaniem dyfuzji ustalonej z tym samym warunkiem i odpowiednimi równaniami bilansowymi, określającymi zmienność w czasie wielkości dyfundującej. Przykładami zadań, do których powyższe uproszczenie się odnosi, są: teoria płomienia pyłowego wg koncepcji Thringa i Essenhigha; wyznaczanie stałych kinetycznych na podstawie spalania ziarna w zamkniętym naczyniu; analiza spalania ziarna przy skończonych wartościach α , uwzględniająca reakcje wtórne.

Literatura cytowana w tekście

1. M. W. THRING, W. W. ESSENHIGH, *Thermodynamics and kinetics of combustion of solid fuel*, Chemistry of Coal Utilization, John Wiley, N. Y., London 1963, 754-772.
2. M. ZEMBRZUSKI, *O stosowaniu kinetyczno-dyfuzyjnej teorii spalania węgla do zagadnień płomienia pyłowego*, II Konferencja Kotłowa, Zeszyty Naukowe Pol. Wrocławskiej, nr 172, Energetyka VII, 23-32.
3. M. ZEMBRZUSKI, *Urządzenie do wyznaczania czasu zapłonu i spalania ziaren pyłu węglowego*, Zgłoszenie patentowe P-119347.
4. L. A. VULIS, *Thermal regimes of combustion*, Mc Graw-Hill, N. Y. London 1961, (przeł. z j. ros.).
5. ХИТРИН Л. И.: Изв. АН СССР. ОТН., 4 (1953), 543-561.
6. D. A. FRANK-KAMENETZKI, *Stoff- u. Wärmeübertragung in der chemischen Kinetik*, Springer-Verlag, Berlin 1959 (przeł. z j. ros.).
7. Канторович Б. В., *Введение в теорию горения и газификации твердого топлива*, Москва 1961.

Резюме

О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ДИФФУЗИИ КИСЛОРОДА В ПРОЦЕССЕ СГОРАНИЯ УГОЛЬНОГО ЗЕРНА

Обсуждается неуставившейся диффузии кислорода в процессе сгорания угля. Доказано, что в ряду являющемся решением этого уравнения, достаточно сохранение только первого члена. Затем, исходя из этого утверждения, доказывается, что влиянием неуставившегося характера диффузии кислорода на процесс сгорания (при тех температурах и концентрациях, какие встречаются в пылевых пламенах) можно пренебречь. Только при очень высоких температурах процесса и при большой концентрации кислорода может оказаться необходимым принятие во внимание неуставившегося характера диффузии. Практическим заключением из проведенного анализа является допустимость уравнений основанных на предположении о том, что диффузия кислорода в зерно имеет установившийся характер. Это справедливо как по отношению к модели пылевого пламени (согласно концепции Тринга и Эссенхига [1], так и при определении суммарных кинематических констант угля на основе времени сгорания зерна в замкнутом сосуде) согласно методу предложенному в работе [2].

S u m m a r y

ON TRANSIENT DIFFUSION OF OXYGEN IN COAL GRAIN COMBUSTION PROCESS

The equation of transient diffusion of oxygen for coal grain combustion process was discussed, and it was proved that in a series, being the solution of that equation, it is sufficient to take the first term only.

Then, basing on the above mentioned statement it was shown that the influence of transient diffusion character of oxygen on combustion process, at the temperature and concentrations which presently appear in dust flames, may be omitted. At very high temperatures of the process and high concentrations only, it may be necessary to take into account the transient character of diffusion. The practical conclusion of the analysis is that, the application of equations based on assumption that diffusion of oxygen into the grain has a steady character, is permissible, with reference both to Thring's and Essenhigh's [1] conceptions, as well as to evaluation of summary coal kinetic constants, based on burning time of the grain in closed vessel (see [2]).

KATEDRA URZĄDZEŃ KOTŁOWYCH
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 lipca 1967 r.

PODSTAWY TEORII SPALANIA ZIARNA WĘGLOWEGO PRZY SKOŃCZONEJ
WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKA NADMIARU POWIETRZA

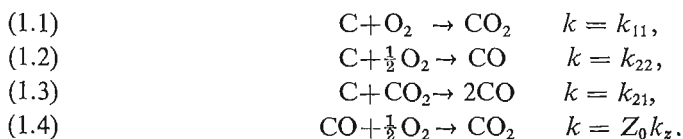
MIECZYSLAW ZEMBRZUSKI (WROCLAW)

Wykaz ważniejszych oznaczeń

D	współczynnik dyfuzji,
k	stałe prędkości reakcji,
r	promień (współrzędna kulista),
r_0	promień ziarna węglowego,
x	stężenie tlenu,
y	stężenie tlenu w CO,
z	stężenie tlenu w CO ₂ ,
α	współczynnik nadmiaru powietrza,
β_{11}	współczynnik stechiometryczny dla reakcji (1.1),
β_{22}	współczynnik stechiometryczny dla reakcji (1.2),
β_{21}	współczynnik stechiometryczny dla reakcji (1.3),
τ	czas,
τ_0	czas spalania ziarna przy $\alpha = \infty$,
τ_{sp}	czas spalania ziarna przy $\alpha =$ wartość skończona,
ξ	część powierzchni ziarna zajęta przez reakcję (1.1),
ρ	promień przestrzeni spalania,
ρ_w	ciężar właściwy węgla,
ω	prędkość wydzielania CO ₂ w reakcji (1.4).

1. Wprowadzenie

W kinetyczno-dyfuzyjnej teorii spalania węgla przyjmuje się [1], że chemiczne zjawiska biorące udział w procesie spalania węgla mogą być ujmowane przez cztery sumaryczne reakcje:



Jakkolwiek wiadomo, że reagowanie węgla z gazami jest bardzo złożonym problemem kinetyki chemicznej⁽¹⁾ i cztery wymienione reakcje stanowią niewątpliwie znaczne uproszczenie rzeczywistego mechanizmu reagowania, w teorii spalania ziarna węglowego uprosz-

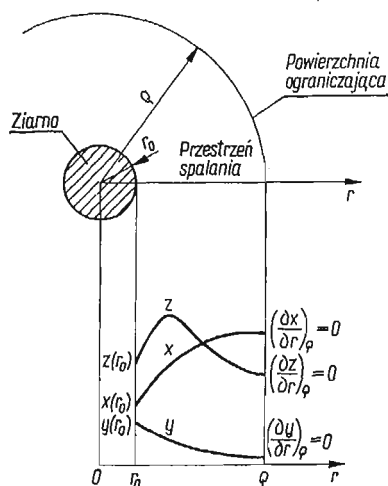
⁽¹⁾ Zagadnienie to jest wyczerpująco omówione w [6].

czenia chemicznej strony procesu spalania idą jeszcze dalej. Mianowicie, przyjmuje się zwykle, że jedyną reakcją jest reakcja (1.1), a wpływ pozostałych jest ewentualnie uwzględniany przy pomocy sumarycznego współczynnika stechiometrycznego β . Współczynnik ten został wprowadzony w pracach [2, 3] na podstawie szczegółowej analizy wpływu reakcji (1.2), (1.3), (1.4) na przebieg spalania ziarna w nieograniczonej przestrzeni i przy niezmiennym składzie chemicznym otoczenia [2, 4].

W naszej poprzedniej pracy [5] wykazano, że wartości stosunku $\phi_3^1 = \tau_{sp}/\tau_0$ obliczonego teoretycznie przy uwzględnieniu tylko reakcji (1.1), nie pokrywają się z wartościami podobnej funkcji ϕ_3^e , wyznaczonymi doświadczalnie, gdy $\alpha < 2$. Ponieważ ten zakres wartości α posiada największe znaczenie praktyczne, wydaje się celowe takie rozwinięcie teorii spalania ziarna węglowego, aby reakcje (1.1)–(1.4) były uwzględnione bez ograniczeń co do chemicznego składu otoczenia, ani co do wielkości obszaru, w którym zachodzi spalanie. W niniejszej pracy przedstawiona jest próba wyprowadzenia podstawowych zależności określających prędkość spalania ziarna węglowego bez powyższych ograniczeń. Wyprowadzone równania mogą więc być stosowane dla obliczania prędkości spalania i czasu spalania ziarna węglowego przy dowolnych wartościach α .

2. Wyjściowy układ równań

Rozpatrywać będziemy spalanie kulistego ziarna węglowego o promieniu r_0 i stałej temperaturze T_z , nie zawierającego części lotnych, umieszczonego w kulistym otoczeniu



Rys. 1. Schemat rozkładu stężeń przy spalaniu ziarna w przestrzeni ograniczonej

(np. w zamkniętym kulistym naczyniu), o promieniu q i stałej temperaturze T_0 . Ponieważ granica obszaru jest nieprzenikliwa (np. ścianka naczynia), między r_0 i q zachodzi zależność wynikająca z wartości współczynnika nadmiaru powietrza α . Rozpatrywany model spalania ziarna jest przedstawiony schematycznie na rys. 1.

Zgodnie z przyjętym modelem, proces spalania ziarna opisany będzie poniższym układem równań dyfuzji nieustalonej:

$$(2.1.1) \quad D \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) - \omega(x, y) = \frac{\partial x}{\partial \tau},$$

$$(2.1.2) \quad D \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial y}{\partial r} \right) - \omega(x, y) = \frac{\partial y}{\partial \tau},$$

$$(2.1.3) \quad D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial z}{\partial r} \right) + 2\omega(x, y) = \frac{\partial z}{\partial \tau},$$

z warunkami brzegowymi:

dla powierzchni ziarna ($r = r_0$); dla granicy obszaru ($r = \rho$)

$$(2.2.1) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)_{r_0} = \frac{k_0}{D} x(r_0); \quad \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)_{\rho} = 0,$$

$$(2.2.2) \quad \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)_{r_0} = \frac{k_{21}}{D} z(r_0) + \frac{k_{22}}{D} x(r_0); \quad \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)_{\rho} = 0,$$

$$(2.2.3) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_{r_0} = -\frac{k_{21}}{D} z(r_0) + \frac{k_{11}}{D} x(r_0); \quad \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_{\rho} = 0,$$

gdzie $k_0 = \xi k_{11} + (1 - \xi) k_{22}$;

i z warunkami początkowymi ($\tau = 0$)

$$(2.2.4) \quad x(r, 0) = x_{0p}; \quad y(r, 0) = y_{0p}; \quad z(r, 0) = z_{0p}.$$

Zasadnicze uproszczenie układu równań (2.1) z warunkami (2.2) można otrzymać powołując się na [7], gdzie wykazano, że spalanie ziarna węglowego przy zwykle stosowanych ciśnieniach, temperaturach i stężeniach może być traktowane jako proces ustalony. To oznacza, że układ równań (2.1) może być zastąpiony układem równań dyfuzji ustalonej, a zamiast warunków (2.2.1)–(2.2.3) dla $r = \rho$, należy uwzględnić, że na granicy obszaru stężenia gazów posiadają pewne założone wartości x_0, y_0, z_0 . Z ograniczeniami więc, o których mowa jest w [7], spalanie ziarna będzie opisane poniższym układem, któremu odpowiada model przedstawiony na rys. 2:

$$(2.3.1) \quad D \left(\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{dx}{dr} \right) - \omega(x, y) = 0,$$

$$(2.3.2) \quad D \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{dy}{dr} \right) - \omega(x, y) = 0,$$

$$(2.3.3) \quad D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{dz}{dr} \right) + 2\omega(x, y) = 0,$$

z warunkami brzegowymi:

dla powierzchni ziarna ($r = r_0$)

$$(2.4.1) \quad \left(\frac{dx}{dr} \right)_{r_0} = \frac{k_0}{D} x(r_0),$$

$$(2.4.2) \quad -\left(\frac{dy}{dr}\right)_{r_0} = \frac{k_{22}}{D} z(r_0) + \frac{k_{22}}{D} x(r_0),$$

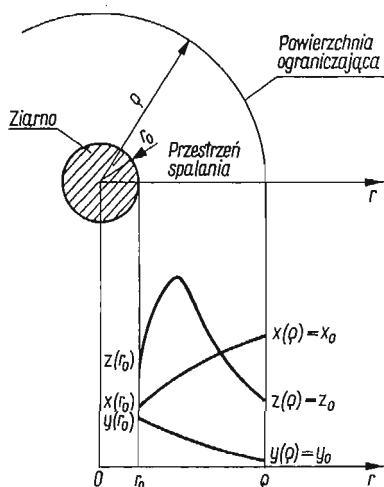
$$(2.4.3) \quad -\left(\frac{dz}{dr}\right)_{r_0} = -\frac{k_{21}}{D} z(r_0) + \frac{k_{11}}{D} x(r_0),$$

dla granicy obszaru ($r = \rho$)

$$(2.5.1) \quad x(\rho) = x_0$$

$$(2.5.2) \quad y(\rho) = y_0,$$

$$(2.5.3) \quad z(\rho) = z_0.$$



Rys. 2. Uprozczone warunki brzegowe dla spalania w przestrzeni ograniczonej

Zasadniczym problemem jest postać funkcji $\omega(x, y)$. Z pracy [8], gdzie problem ten jest obszernie omawiany, wiadomo, że mimo dużych różnic co do szczegółowych wartości, funkcja $\omega(x, y)$ może być opisana równaniem typu

$$(2.6) \quad \omega(x, y) = \frac{dz}{dt} = Z_0 k_z(T) x^\nu y \quad (\nu < 1),$$

przy czym wartość ν zawiera się w granicach 0,5–0,25. Jeżeli więc założyć, że wartość x w przedziale r_0, ρ zmienia się mało, możliwe jest zastąpienie równania (2.6) uproszczonym wyrażeniem

$$(2.7) \quad \omega(x, y) = \kappa y \quad (\kappa = \text{const}),$$

nadającym równaniu (2.3) postać liniową.

3. Rozwiązanie układu równań (2.3)–(2.5)

Przy podstawieniu równania (2.6) do równań (2.3), rozwiązanie układu (2.3)–(2.5) przestaje być wprawdzie jakimkolwiek problemem matematycznym, ale przypuszczamy, że najprostszym sposobem otrzymania rozwiązania jest zastosowanie metody przekształceń Laplace'a, mianowicie wariantu podanego w [9].

Jeżeli oznaczymy:

$$A_0 = \frac{k_0}{D}, \quad A_{11} = \frac{k_{11}}{D}, \quad A_{22} = \frac{k_{22}}{D}, \quad A_{21} = \frac{k_{21}}{D},$$

oraz

$$\varepsilon = (\varkappa/D)^{1/2}, \quad \lambda_0 = 1/r_0 + A_0, \quad \lambda_{21} = 1/r_0 + A_{21},$$

a następnie zastosujemy podstawienie

$$u = xr; \quad v = yr; \quad w = zr; \quad R = r - r_0,$$

otrzymamy przekształcone równania

$$(3.1.1) \quad \bar{X}(p) = \varepsilon^2 v(0) \frac{1}{p^2(p^2 - \varepsilon^2)} + \varepsilon^2 v'(0) \frac{1}{p^2(p^2 - \varepsilon^2)} + u(0) \frac{1}{p} + u'(0) \frac{1}{p^2},$$

$$(3.1.2) \quad \bar{Y}(p) = v(0) \frac{p}{p^2 - \varepsilon^2} + v'(0) \frac{1}{p^2 - \varepsilon^2},$$

$$(3.1.3) \quad \bar{Z}(p) = -2\varepsilon^2 v(0) \frac{1}{p(p^2 - \varepsilon^2)} - 2\varepsilon^2 v'(0) \frac{1}{p^2(p^2 - \varepsilon^2)} + w(0) \frac{1}{p} + w'(0) \frac{1}{p^2},$$

oraz warunki brzegowe dla $R = 0$

$$(3.2.1) \quad u'(0) = \lambda_0 A,$$

$$(3.2.2) \quad v'(0) = -A_{22}A + \frac{1}{r_0}B - A_{21}C,$$

$$(3.2.3) \quad w'(0) = -A_{11}A + \lambda_{21}C,$$

gdzie przez A, B, C oznaczono nie znane na razie wartości stężeń na powierzchni ziarna odpowiednio gazów O_2, CO, CO_2 .

Podstawiając warunki (3.2) do równań (3.1) i znajdując odwrotne przekształcenie otrzymujemy jako końcowy wynik równania opisujące rozkład stężeń poszczególnych gazów w obszarze, w którym zachodzi spalanie ziarna

$$(3.3.1) \quad xr = A(1 + \lambda_0 \Delta - A_{22}b) + B(a + b/r_0) + C(-A_{21}b),$$

$$(3.3.2) \quad yr = A(-A_{22}n) + B(m + n/r_0) + C(-A_{21}n),$$

$$(3.3.3) \quad zr = A(2A_{22}b - A_{11}\Delta) + B(-2a - 2b/r_0) + C(1 + 2A_{21}b + \lambda_{21}\Delta),$$

gdzie oznaczają:

$$a = (\cosh \varepsilon \Delta) - 1, \quad b = [(\sinh \varepsilon \Delta - 1)/\varepsilon], \quad m = \cosh \varepsilon \Delta, \quad n = (L)/\varepsilon \sinh \varepsilon \Delta, \quad \Delta = r - r_0.$$

Jeżeli w równaniach (3.3) wartości wyrażeń w nawiasach dla $r = \varrho$ oznaczymy przez γ_{ij} to otrzymamy układ równań:

$$(3.4.1) \quad x_0 \varrho = A\gamma_{11} + B\gamma_{12} + C\gamma_{13},$$

$$(3.4.2) \quad y_0 \varrho = A\gamma_{21} + B\gamma_{22} + C\gamma_{23},$$

$$(3.4.3) \quad z_0 \varrho = A\gamma_{31} + B\gamma_{32} + C\gamma_{33},$$

z których można obliczyć wartości A, B, C , co zapiszemy w postaci wyznaczników

$$(3.5) \quad A = \mathcal{D}_A / \mathcal{D}, \quad B = \mathcal{D}_B / \mathcal{D}, \quad C = \mathcal{D}_C / \mathcal{D}.$$

Dla $r = r_0$ równania (3.3) upraszczają się i uwzględniając równania (3.5) otrzymujemy następujące proste wyrażenia określające stężenia gazów na powierzchni ziarna:

$$(3.6) \quad \text{stężenie } O_2 \quad x(r_0) = \mathcal{D}_A/r_0\mathcal{D},$$

$$(3.7) \quad \text{stężenie CO} \quad y(r_0) = \mathcal{D}_B/r_0\mathcal{D},$$

$$(3.8) \quad \text{stężenie CO}_2 \quad z(r_0) = \mathcal{D}_C/r_0\mathcal{D}.$$

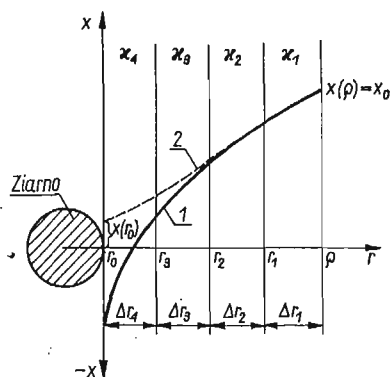
Ponieważ założyliśmy trzy reakcje heterogeniczne (1.1), (1.2), (1.3), więc uwzględniając równania (3.6) i (3.8), wyrażenie na prędkość spalania ziarna można napisać w postaci

$$(3.9) \quad -\varrho_w \frac{dr_0}{d\tau} = \frac{1}{r_0\mathcal{D}} \{ \mathcal{D}_A [\xi k_{11}\beta_{11} + (1-\xi)k_{22}\beta_{22}] + \mathcal{D}_C k_{21}\beta_{21} \}.$$

Dla otrzymania całkowitego czasu spalania ziarna τ_{sp} równanie (3.9) należy całkować w granicach $r_0 = r_{0p}$, $r_0 = 0$, gdzie r_{0p} jest początkowym promieniem ziarna. Niezbędne jest przy tym założenie związku między wartościami x_0 , y_0 , z_0 a bieżącym promieniem ziarna. Przed omówieniem tego ważnego zagadnienia konieczne jest uprzednie omówienie ograniczeń, jakim podlegają równania (3.3) ze względu na przyjętą w równaniach (2.3) postać funkcji $\omega(x, y)$.

Przypomnijmy, że linearyzując równania (2.3) za pomocą funkcji (2.7) ograniczyliśmy rozwiązanie tego układu w ten sposób, że tylko gdy zmiana wartości x wzdłuż osi r jest mała, równania (3.3) określają prawidłowo profile stężeń gazów w całym przedziale r_0, ϱ . Jeżeli spadek wartości x wzdłuż osi r jest znaczny (np. przy wysokich temperaturach), równania (3.3) mogą dawać ujemne wartości x (rys. 3, krzywa 1). Występowanie wartości $x < 0$ wynika stąd, że z jednej strony musi być zachowana równość

$$(3.10) \quad x + y + z = x_0 + y_0 + z_0 = \text{const},$$



Rys. 3. Schemat rozkładu stężeń tlenu gdy $x(r_0) < 0$

z drugiej natomiast, zgodnie z równaniem (2.7), wydzielanie CO_2 w obszarze spalania jest zależne tylko od występowania CO , i może zachodzić nawet wówczas, gdy w obszarze nie ma w ogóle tlenu. Gdy założenie o małej zmienności x nie jest spełnione, równania (3.3) nie mogą być wprowadzone stosowane do całego przedziału r_0, ϱ , ale zachowują ważność dla małego przedziału, np. r_1, ϱ , w którym spadek x jest mały. Trzeba więc przyjąć w ta-

kim przypadku, że obliczone z równania (2.6) $\kappa = Z_0 k_z x_0^y$ jest wartością κ_1 , odnoszącą się tylko do małego przedziału Δr_1 (rys. 3) i obliczyć wartości $x(r_1)$, $y(r_1)$, $z(r_1)$. Do wyznaczenia profili stężeń w następnym przedziale Δr_2 należy wziąć wartość κ_2 obliczoną dla $x(r_1)$. Powtarzając takie postępowanie odpowiednią ilość razy można wyznaczyć profile stężeń w całym przedziale r_0, ϱ i obliczyć wartości stężeń na powierzchni ziarna (rys. 3 krzywa 2). Dopiero te ostatnie, podstawione do równania (3.9) dają prawidłową wartość prędkości spalania przy danych wartościach x_0, y_0, z_0 .

4. Spalanie ziarna węglowego przy skończonej wartości α

Jak wyżej wspomniano, wyznaczenie czasu spalania ziarna przez scałkowanie równania (3.9) wymaga określenia związków między stężeniami gazów na granicy obszaru a bieżącym promieniem ziarna, czyli podania funkcji

$$(4.1) \quad x_0 = f_1(x_{0p}, \alpha, r_0), \quad y_0 = f_2(y_{0p}, \alpha, r_0), \quad z_0 = f_3(z_{0p}, \alpha, r_0),$$

gdzie indeksem op oznaczono wartości początkowe.

W przypadku spalania ziarna w przestrzeni ograniczonej (w zamkniętym naczyniu) dokładne określenie funkcji (4.1) jest wprawdzie możliwe, ale znacznie prostsze wyrażenia otrzymuje się, jeżeli przyjąć dającą mały błąd równość

$$\frac{1}{v} \int [c] dv = [c]_0 \quad ([c] = x, y, z),$$

gdzie v oznacza objętość obszaru spalania.

Dla przypadku spalania w powietrzu ($y_{0p} = z_{0p} = 0$) przy $\alpha > 1$ można wówczas przyjąć:

$$(4.2.1) \quad x_0 = x(\varrho) = x_{0p} \frac{r_{0p}^3(\alpha-1) + r_0^3}{r_{0p}^3 \alpha},$$

$$(4.2.2) \quad y_0 = y(\varrho) = 0,$$

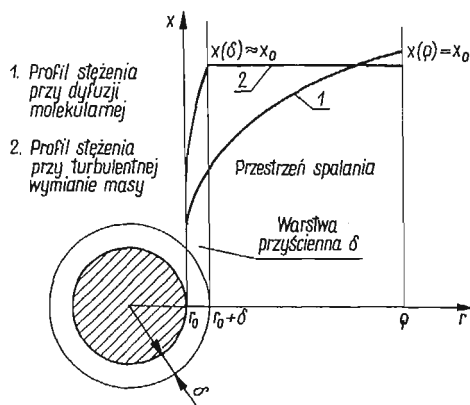
$$(4.2.3) \quad z_0 = z(\varrho) = x_{0p} \frac{r_{0p}^3 - r_0^3}{r_{0p}^3 \alpha}.$$

Równania (3.3) i (3.4) uzupełnione równaniami (4.2) dają wyczerpującą teorię izotermicznego spalania ziarna węglowego w przypadku gdy w całym obszarze spalania dyfuzja ma charakter czysto molekularny⁽¹⁾.

Przypuśćmy teraz, że w przestrzeni spalania występuje turbulентne mieszanie, które praktycznie wyrównuje stężenia w całej przestrzeni, poza cieką warstwą przyścienną o grubości δ , jak to pokazano schematycznie na rys. 4. W tym przypadku wartości x_0, y_0, z_0 praktycznie nie ulegną zmianie i będą nadal wyrażone wzorami (4.2), ale cały proces dyfuzji molekularnej ograniczy się do warstwy przyściennej. W równaniach (3.3) i następ-

⁽¹⁾ W przypadku wysokich temperatur oraz przy $\alpha \leq 1$ równania bilansowe dla x_0, y_0, z_0 muszą uwzględniać warunki równowagi chemicznej.

nych wielkość Δ musi więc być zastąpiona przez δ . Analiza równań (3.3) wykazuje, że prędkość spalania ziarna określona równaniem (3.9) ulega w tym przypadku zwiększeniu, ale wzrost prędkości jest znaczny jedynie wtedy, gdy wartości δ są małe. Ponieważ turbulentna wymiana masy w otoczeniu ziarna jest możliwa również wtedy, gdy nie ma różnicy między prędkością ziarna i prędkością strumienia (uśrednioną), jest widoczne, że



Rys. 4. Schemat rozkładu stężeń w przypadku turbulentnego mieszania

w strumieniu turbulentnym proces spalania może przebiegać szybciej niż w laminarnym. Jakkolwiek szczegółowe omawianie wpływu turbulencji na proces spalania ziarna wykracza poza ramy niniejszego artykułu, wydaje się, że wyprowadzone zależności (3.3) i (3.4) mogą być pomocne również w analizie tego zagadnienia.

5. Wnioski końcowe

Uwzględniając sposób postępowania, gdy zmiana wartości x wzdłuż współrzędnej r jest znaczna, równania (3.3) są ogólne w tym znaczeniu, że określają profile stężeń w każdym przypadku, gdy znane są wartości stężeń w odległości ρ . O ile jednak w przypadku ziarna spalającego się w ograniczonej przestrzeni możliwe jest ustalenie wystarczająco dokładnych zależności (4.2), to w przypadku płomienia pyłowego (w którym spalanie zachodzi również przy skończonej wartości α) ustalenie funkcjonalnych zależności typu (4.2) opierać się musi, jak dotychczas, na bardzo uproszczonych założeniach, znacznie odbiegających od poglądów na wymianę masy w strumieniu turbulentnym. Z tego względu, jakkolwiek pewna analiza turbulencji na proces spalania ziarna w oparciu o równania (3.3) jest możliwa, spalanie ziarna węglowego w przestrzeni ograniczonej jest prawdopodobnie jedynym przypadkiem spalania ziarna przy skończonej wartości α , który może być zrealizowany doświadczalnie i dla którego można podać zadowalającą teorię.

Literatura cytowana w tekście

1. З. Ф. Чуханов, Изв. А.Н. СССР, ОТН, 4 (1953), 562-599.
2. Л. Н. Хитрин, Изв. А.Н. СССР, ОТН, 4 (1953), 543-561.
3. Л. Н. Хитрин, *Физика горения и взрыва*, изд. Московского Университета, Москва 1957.

4. А. С. Предводителев, Л. Н. Хитрин, О. А. Цуханова, Х. И. Колодцев, М. К. Гродзовский, *Горение углерода*, изд. АН СССР, Москва-Ленинград 1949.
5. M. ZEMBRZUSKI, *Chemia Stosowana* XII, 2A (1968), 249—258.
6. P. L. WALKER, F. RUSINKO, L. G. AUSTIN, *Advances in Catalysis*, 9 (1959), 133.
7. M. ZEMBRZUSKI, *O niustalanej dyfuzji tlenu w procesie spalania ziarna węglowego*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowania*, 4, 6 (1968).
8. Е. С. Щетинков, *Физика горения газов*, изд. Наука, Москва 1965.
9. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.

Р е з ю м е

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЖИГАНИЯ УГОЛЬНОГО ЗЕРНА ПРИ КОНЕЧНОМ ЗНАЧЕНИИ
КОЭФФИЦИЕНТА ИЗБЫТКА ВОЗДУХА

В работе обсуждаются основные зависимости определяющие скорость сжигания угольного зерна при конечном значении коэффициента избытка воздуха. В качестве основной модели принято изотермическое сжигание сферического зерна без летучих частей, помещённого в ограниченном пространстве. Решение уравнений, описывающих процесс сжигания, получено на основе доказанного раньше [7], утверждения о том, что процесс сжигания угольного зерна при нормальных режимах можно считать установившимся.

S u m m a r y

PRINCIPLES OF THE COMBUSTION THEORY OF COAL GRAIN WITH FINITE
COEFFICIENT OF AIR EXCESS

In this paper, basic relations determining the rate of coal particle combustion with the finite value of the coefficient of air excess are given. As a basic model, an isothermic combustion of a spherical particle without volatile parts, placed within the limited space has been assumed. Solution of equations, describing the combustion process is obtained, use being made of the statement (proved previously [7]) that under normal conditions the combustion of a coal particle may be regarded as a steady-state process.

KATEDRA URZĄDZEŃ KOTŁOWYCH
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 grudnia 1967 r.

NOŚNOŚĆ GRANICZNA ROZCIĄGANYCH OSIOWO-SYMETRYCZNYCH PRĘTÓW OSŁABIONYCH SZEREGIEM KARBÓW KĄTOWYCH

LECH DIETRICH, KAROL TURSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Jak wykazał HILL [1], przy założeniu warunku plastyczności Hubera-Misesa otrzymuje się dla osiowo-symetrycznego zagadnienia niehiperboliczny układ równań, którego nie udaje się rozwiązać.

Natomiast SHIELD [2] uzyskał efektywne rozwiązanie dla przypadku walcowego stempla wciskanego w półprzestrzeń przy założeniu warunku plastyczności Treski. W pracy [4] stwierdzono, że rozwiązanie to odpowiada liczbowo z przeciwnym znakiem przypadkowi rozciągania.

Następnie przy tych samych założeniach, jakie poczynił Shield, opublikowano [5] rozwiązania dla rozciąganych prętów osłabionych wycięciami o różnych kształtach zajmując się głównie oceną nośności granicznej.

W niniejszej pracy w oparciu o warunek Treski i stowarzyszone prawo płynięcia podano kompletne graficzne rozwiązanie dla osiowo-symetrycznego rozciąganego pręta osłabionego kątowym wycięciem oraz sposób oszacowania nośności granicznej dla pręta z wieloma kątowymi karami przy różnych odległościach między nimi i przeprowadzono doświadczalną weryfikację uzyskanych rozwiązań.

2. Zasadnicze równania

Rozwiązanie problemu osiowej symetrii jest określone przez cztery składowe tensora naprężenia i dwie składowe prędkości płynięcia. Przez wprowadzenie postulatu pełnej plastyczności Haara-Kármána, warunku plastyczności Treski i stowarzyszonego z nim prawa płynięcia dla materiału izotropowego i idealnie plastycznego można najpierw rozwiązać układ czterech równań określających naprężenia, a następnie z warunku izotropii i warunku nieściśliwości określić dwie składowe prędkości płynięcia.

W przypadku rozciągania, stan naprężenia będzie więc odpowiadał punktom leżącym na krawędzi pryzmy odwzorowującej warunek plastyczności Treski w przestrzeni naprężeń głównych, dla której prędkości odkształceń będą spełniały następujące nierówności:

$$(2.1) \quad \dot{\epsilon}_1 \geq 0, \quad \dot{\epsilon}_2 \leq 0, \quad \dot{\epsilon}_3 \leq 0.$$

Przy założeniu $\sigma_1 > \sigma_2$ stan naprężenia będzie spełniał zależności:

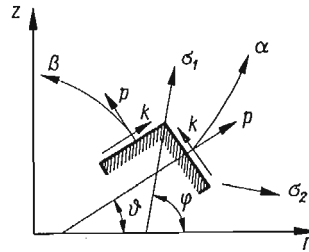
$$(2.2) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2k, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0.$$

Wprowadzając dwa parametry p, ϑ , których znaczenie podane jest na rys. 1 otrzymuje się podane przez SHIELDA [2] równania charakterystyk i zależności, które muszą być wzdłuż nich spełnione

$$(2.3) \quad \frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \vartheta \quad dp - 2kd\vartheta - \frac{k}{r} (\sin \vartheta - \cos \vartheta) ds_\alpha = 0 \quad \text{dla rodziny } \alpha$$

$$\frac{dz}{dr} = -\operatorname{ctg} \vartheta \quad dp + 2kd\vartheta + \frac{k}{r} (-\sin \vartheta + \cos \vartheta) ds_\beta = 0 \quad \text{dla rodziny } \beta.$$

Po przekształceniu równań dla prędkości, można w prosty sposób wykazać, że ich linie charakterystyczne pokrywają się z charakterystykami dla naprężeń.



Rys. 1

Oznaczamy przez w prędkość w kierunku osi z , przez u prędkość w kierunku r , przez U i W oznaczmy odpowiednio prędkości wzdłuż linii α i β .

Wówczas zależności między tymi prędkościami będą następujące

$$(2.4) \quad U = u \cos \vartheta + w \sin \vartheta; \quad W = w \cos \vartheta - u \sin \vartheta$$

i zależności odwrotne:

$$(2.5) \quad u = U \cos \vartheta - W \sin \vartheta; \quad w = U \sin \vartheta + W \cos \vartheta.$$

Analogicznie jak dla naprężeń uzyskuje się również związki dla prędkości wzdłuż charakterystyk

$$(2.6) \quad dU - Wd\vartheta = -\frac{u}{2r} ds_\alpha \quad \text{dla rodziny } \alpha,$$

$$dW + Ud\vartheta = -\frac{u}{2r} ds_\beta \quad \text{dla rodziny } \beta.$$

Układy równań różniczkowych dla naprężeń i prędkości [2.3]; [2.6] można rozwiązać przy konkretnych problemach brzegowych na drodze numerycznej.

W niniejszej pracy w obszarze płynięcia obliczenia wykonano za pomocą arytmetru elektrycznego, natomiast przedłużenie w obszar sztywny oraz hodograf wykonano metodą graficzną zaproponowaną przez MROZA [6].

pręta poza karbem zbudowano przedłużenie pola naprężeń, które spełnia równania równowagi, warunki brzegowe i nie przekracza warunku plastyczności.

Na linii α - BC mamy dane wartości p i ϑ , natomiast z warunku symetrii mamy określony kąt $\vartheta = \pi/4$ na osi z . Dane te pozwalają określić pole naprężeń w całym obszarze $BCEG$. W pobliżu osi symetrii zależności wzdłuż charakterystyk (2.3) po rozwinięciu upraszczają się do postaci:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} dp - 4k d\vartheta &= 0 && \text{dla rodziny } \alpha, \\ dp + 4k d\vartheta &= 0 && \text{dla rodziny } \beta. \end{aligned}$$

Punkt G jest początkiem linii nieciągłości naprężeń i jest określony przez przecięcie się dwóch charakterystyk wychodzących z punktów B oraz 3 . Mając dane wartości p i ϑ na linii BG oraz warunek, że na swobodnej powierzchni panuje stan jednoosiowego rozciągania, a więc $p = k$, możemy określić położenie linii BF . Wychodząc z punktu F , w którym styczna do linii BF jest równoległa do osi z , ograniczamy przedłużenie pola naprężeń powierzchnią nieciągłości FE budowaną w ten sposób, że ponad nią panuje stan jednoosiowego rozciągania lub ściskania. Wartości tych jednoosiowych naprężeń są podane na rys. 2 jako wielokrotności stałej materiałowej k . Linie nieciągłości są oznaczone liniami przerywanymi.

Na podstawie tak określonego pola naprężeń możemy wyznaczyć wartość współczynnika zwiększenia nośności granicznej, który jest zdefiniowany jako stosunek

$$(3.2) \quad f = \frac{1}{kR^2} \int_0^R \sigma_z r dr,$$

gdzie R jest promieniem najmniejszego przekroju.

Dla pręta z karbem o kącie wycięcia $2\omega = 90^\circ$ współczynnik ten wynosi $f_{45^\circ} = 1,953$.

Obliczając wypadkowe siły w największym przekroju karbu oraz powierzchni nieciągłości EF możemy ocenić dokładność numerycznego określenia pola charakterystyk. W omawianym przypadku wielkość tych sił różniła się o 2%. W rozwiązaniach podanych przez SHIELDA [2] oraz EASONA i SHIELDA [3] wykonanych na maszynie liczącej analogiczna różnica wynosiła odpowiednio 1% i 3,5%.

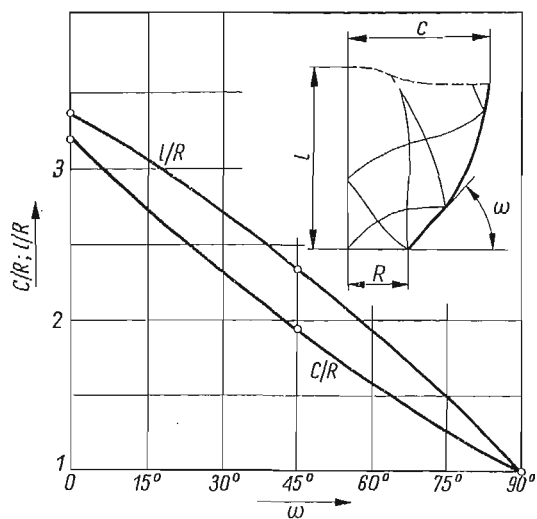
Na podstawie przedłużenia w obszar sztywny możemy określić minimalną wielkość dwu parametrów geometrycznych, niezbędną do realizacji rozwiązania ograniczonego charakterystyką $B34C$.

Są to:

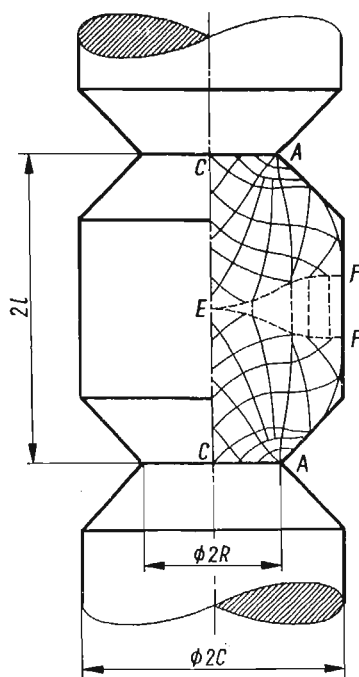
- średnica części cylindrycznej pręta,
- długość CE .

Dla obliczonego przypadku parametry te odniesione do promienia R wynoszą: $(C/R)_{45^\circ} = 1,95$; $(l/R)_{45^\circ} = 2,34$. Wykorzystując wyniki uzyskane w pracy SHIELDA [2] dla karbu szczelinowego ($\omega = 0$), możemy zbudować wykres zależności C/R oraz l/R w funkcji kąta ω (rys. 3). Rzędne wykresu C/R są większe od analogicznego wykresu uzyskanego w sposób przybliżony w pracy [7]. Największa różnica występuje dla $\omega = 0^\circ$ i wynosi 8,1%.

Mając rozwiązanie dla pręta osłabionego pojedynczym wycięciem możemy łatwo określić takie najmniejsze wymiary pręta z szeregiem analogicznych wycięć, żeby jego



Rys. 3



Rys. 4

nośność graniczna nie była mniejsza od nośności granicznej pręta z pojedynczym karbem. Zestawiając mianowicie dwa symetryczne rozwiązania (rys. 4) otrzymuje się tę niezbędną najmniejszą odległość między dwoma wycięciami. Między liniami nieciągłości EF panuje stan jednoosiowego rozciągania lub ściskania.

4. Rozwiązanie dla prędkości

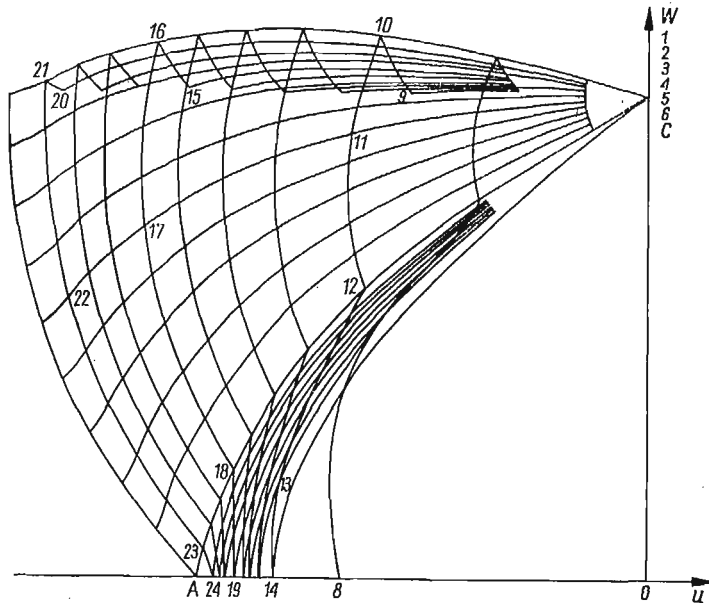
Przyjmujemy, że płynięcie materiału odbywa się w polu ograniczonym liniami $AC43B$ (rys. 2). Punktem wyjścia do określenia prędkości płynięcia są warunki brzegowe, jakie muszą być spełnione w otoczeniu punktu C . Zagadnienie to było szczegółowo dyskutowane przez SHIELDA [2].

Przyjmijmy, że część sztywna nad linią $B34C$ porusza się z prędkością o składowych równych $u = 0$, $w = 1$. Wykorzystując warunek ciągłości jaki musi być spełniony na linii $B34C$ otrzymujemy z równania (2.4), że prędkość normalna do tej linii będzie równa $W = \cos\vartheta$. Wstawiając to do związku (2.6), który musi być spełniony wzdłuż linii oraz wykorzystując (2.5) i zależność $ds_\alpha = dr/\cos\vartheta$ otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$(4.1) \quad \frac{d(U - \sin\vartheta)}{U - \sin\vartheta} = -\frac{dr}{2r},$$

którego rozwiązaniem jest

$$(4.2) \quad U - \sin\vartheta = \frac{A}{\sqrt{r}}.$$



Rys. 5

Ażeby prędkość U była skończona dla $r = 0$ stała A musi być równa zero. Wzdłuż linii $B34C$ otrzymujemy więc:

$$(4.3) \quad U = \sin\vartheta, \quad W = \cos\vartheta.$$

W pobliżu osi symetrii charakterystyki nachylone są pod kątem 45° , a więc panują tam warunki podobne jak w przypadku rozciąganego gładkiego pręta, dla którego istnieje

rozwiązanie w postaci zamkniętej [2]. Korzystając z tych zależności otrzymujemy dla punktu 8 prędkości:

$$u = 2/\pi, \quad w = 0.$$

Mając wartości prędkości na linii *B34C* możemy wykreślić metodą hodografu [6] wyznaczyć prędkości w całym polu płynięcia.

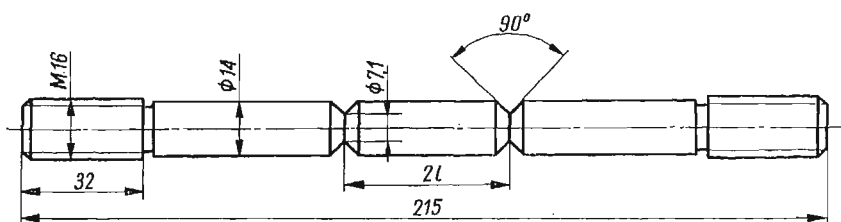
Prędkości danego punktu siatki linii poślizgu są odwzorowane na rys. 5 przez wektory łączące biegun 0 z odpowiednim punktem hodografu. Mając określone pole prędkości możemy obliczyć prędkości odkształcenia wzdłuż kierunków głównych i sprawdzić nierówności (2.1). Stwierdzono, że nierówności te są spełnione w całym obszarze.

Z prędkości odkształceń i naprężeń głównych obliczono ze wzoru $D = \sigma_i \varepsilon_i$ ($i = 1, 2, 3$) moc dysypacji dla kilku punktów pola płynięcia i stwierdzono, że jest wszędzie dodatnia. Miejsca te, zakreśkowane na rys. 2, tak wybrano, aby dokonać sprawdzenia w każdym, jakościowo różnym obszarze pola płynięcia.

5. Wyniki doświadczeń

Doświadczenia miały na celu weryfikację podanych rozwiązań i oszacowań nośności granicznej dla prętów z dwoma kątowymi wycięciami o zmiennej odległości między nimi. Zbadano 17 próbek podzielonych na dwie serie⁽¹⁾, wykonanych ze stopu aluminium (PA6 w stanie półtwardym). Na rys. 6 przedstawiono zasadnicze wymiary próbek w milimetrach. Dla wszystkich prętów średnica dna karbu była stała, stosunek *C/R* wahał się w granicach 1,95-1,97.

Próbki mocowano za pomocą przegubów kulowych na uniwersalnej hydraulicznej maszynie wytrzymałościowej. Do pomiaru odkształceń użyto mechanicznego ekstensometru typu AMSLER o najmniejszej podziałce 0,01 mm i mocowanego do próbki na bazie pomiarowej 120 mm.



Rys. 6

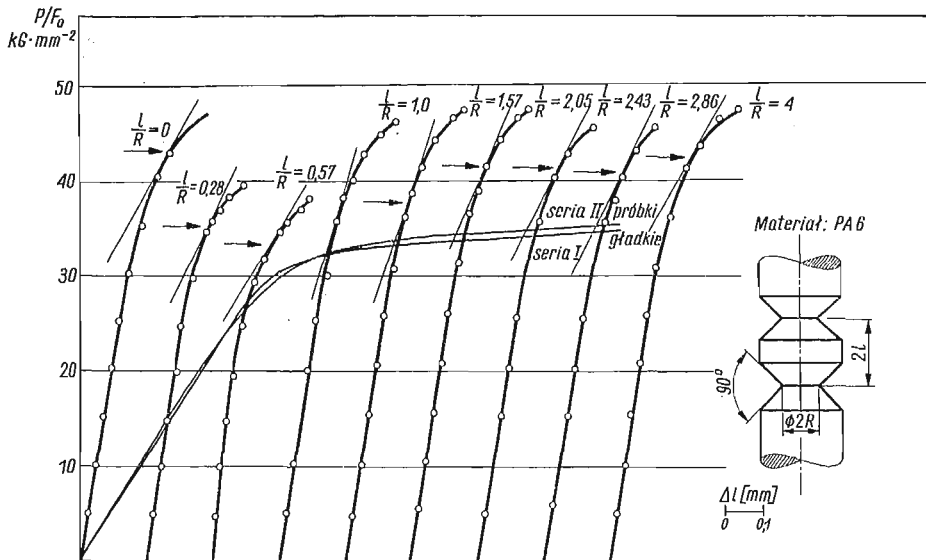
Na wykresie (rys. 7) podano przykładowo początkowe części krzywych rozciągania dla jednej serii próbek. Strzałkami oznaczono wartość naprężeń gdzie tangens nachylenia stycznej do krzywej rozciągania wynosi 0,275⁽²⁾ wartości tangensa pochylenia krzywej

⁽¹⁾ Poszczególne serie wykonane były z innych prętów, których własności mechaniczne różniły się nieznacznie (rys. 7).

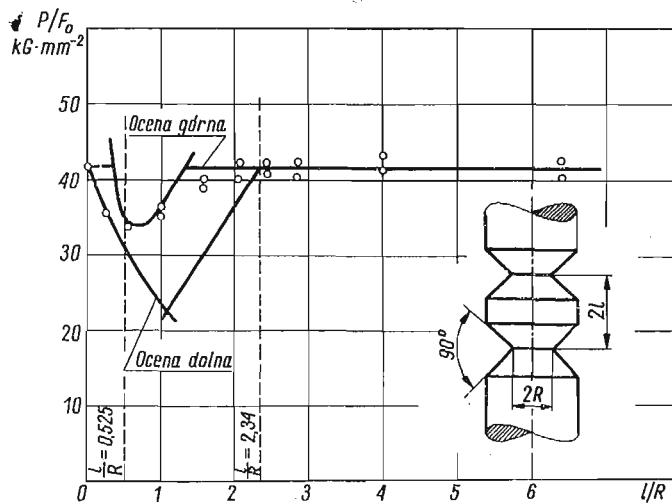
⁽²⁾ Jako kryterium wyboru wartości 0,275 przyjęto najlepszą zgodność wyników dla obu serii.

w zakresie sprężystym. Wielkości tych naprężeń naniesiono, jako małe kółeczka na rys. 8 w funkcji stosunku l/R .

Przy zmniejszeniu odległości $2l$ po przekroczeniu wartości teoretycznej $l/R = 2,34$ zaznacza się wyraźny spadek nośności granicznej próbek. Przy dalszym natomiast zmniejs-



Rys. 7



Rys. 8

zeniu wymiaru $2l$ dla wartości $l/R < \sim 0,5$ następuje zwiększenie nośności granicznej. Zauważono przy tym zmianę mechanizmu zniszczenia. Dla próbek $l/R > 1$ zniszczenie następowało przez rozdzielenie wzdłuż najmniejszej średnicy jednego z wycięć, a dla

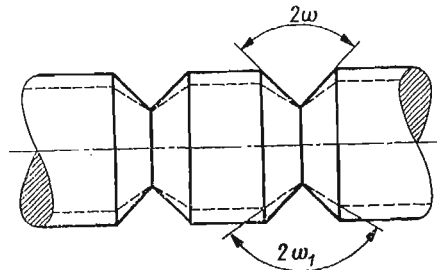
próbek o stosunku $0 < l/R < 1$ przez rozdzielenie na powierzchni stożkowej leżącej między karbami.

Na rys. 8 liniami ciągłymi określono wartości teoretycznych oszacowań nośności granicznej uzyskanych w tej pracy.

6. Ocena nośności granicznej

Posługując się otrzymanym rozwiązaniem dla karbu pojedynczego można uzyskać kompletne rozwiązanie dla pręta z szeregiem kątowych wycięć, o ile stosunek l/R i C/R nie jest mniejszy od pewnej wielkości zależnej od kąta wycięcia ω . Wpływ wielkości C/R na nośność graniczną dla pręta z pojedynczym kątowym wycięciem był badany w pracach [5, 7] gdzie podano sposób oszacowania nośności granicznej. Wnioski wysnute tam są oczywiście prawdziwe również dla pręta z szeregiem wycięć w przypadku zbyt małych wartości C/R .

Obecnie zajmiemy się określeniem górnej i dolnej oceny nośności granicznej prętów z kilkoma wycięciami o kącie 90° umieszczonymi blisko siebie ($0 < l/R < 2,34$) przy założeniu, że wartość C/R jest wystarczająca. Oceny te odnoszono do nośności próbki z pojedynczym karbem (na rys. 7 krzywa $l/R = 0$). Dla danej wartości l/R w granicach $1,1 < l/R < 2,34$ jako dolną ocenę nośności granicznej dla pręta z wycięciami o kącie 2ω przyjęto nośność graniczną pręta z wycięciami o takim największym możliwym kącie $2\omega_1$, dla którego udaje się jeszcze zbudować kompletne rozwiązanie (rys. 9).



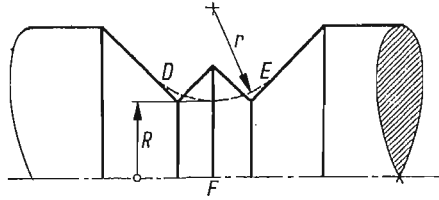
Rys. 9

Gdy odległość między karbami jest bardzo mała, można uzyskać dolną ocenę nośności granicznej przez wpisanie między zewnętrzne tworzące wycięcia takiego najmniejszego promienia r , żeby łuk DE obejmował łuk wpływu dla punktu F (rys. 10, 11). W tym przypadku nośność graniczna dla pręta z pojedynczym kołowym wycięciem o promieniu r będzie dolną oceną nośności granicznej dla pręta z dwoma blisko umieszczonymi karbami kątowymi.

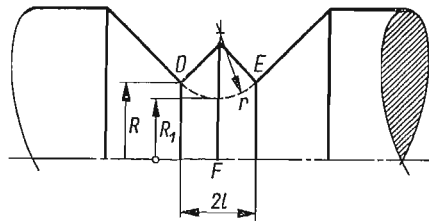
Uzyskano praktycznie jednakowe dolne oceny otrzymane w oparciu o rysunki 10 i 11, przy czym w tym ostatnim przypadku współczynnik zwiększenia nośności granicznej f odnoszono do średnicy $2R$ dla karbu kąтового.

Za pomocą wykresu z rys. 12 możemy łatwo określić zarówno promień r spełniający podany wyżej warunek, jak i współczynnik f zwiększenia nośności granicznej dla pręta z kołowym wytoczeniem.

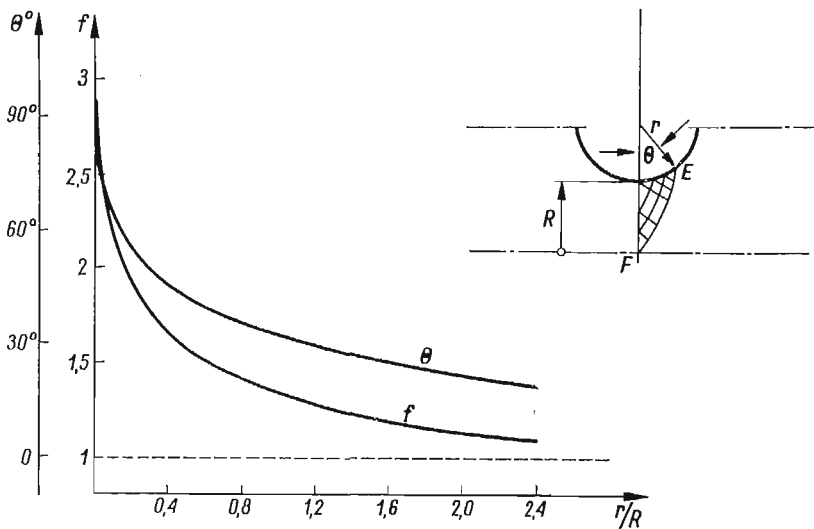
Górną ocenę nośności granicznej dla zbyt małych wartości l/R można uzyskać z rozwiązania ograniczonego linią $B34C$ (rys. 2), które jest przecież kinematycznie dopuszczalne o ile stosunek l/R nie jest mniejszy od 0,525, kiedy to rozwiązanie dla jednego wycięcia nakłada się na rozwiązanie dla wycięcia sąsiedniego. Dla wartości $0,35 < l/R < 1,3$



Rys. 10

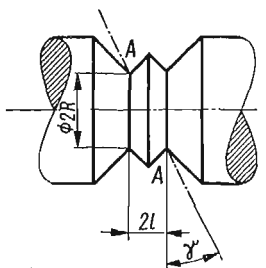


Rys. 11



Rys. 12

lepsze górne graniczne obciążenie można otrzymać zakładając, że zniszczenie pręta nastąpi przez poślizg w płaszczyźnie $A-A$ (rys. 13), której kąt nachylenia do osi r jest określony jako $\gamma = \text{arctg } l/R$.



Rys. 13

Dla $0 < l/R < 0,35$ jako górną ocenę przyjęto rozwiązanie dla karbu z pojedynczym wycięciem o takim samym kącie ω . Wartości uzyskane z tego rozwiązania są w tym zakresie na pewno większe od rozwiązania ścisłego dla pręta osłabionego dwoma karbami.

7. Wnioski

Przeprowadzone w ramach niniejszej pracy badania dla prętów z karbami kątowymi wykazały, że proponowane rozwiązania teoretycznie odpowiadają pod względem jakościowym i ilościowym wynikom doświadczalnym.

Podane wykresy parametrów geometrycznych C/R oraz l/R (rys. 3) wraz z wykresem współczynnika f charakteryzującym nośność pręta [7] pozwalają na szybką ocenę optymalnych wymiarów konstrukcji tego typu.

Dla określenia nośności granicznej w zakresie $0 < l/R < (l/R)_{\min}$ (gdzie $(l/R)_{\min}$ oznacza wartość z rys. 3) należy znaleźć podanymi tu metodami ocenę górną i dolną.

Zastosowany w niniejszej pracy sposób postępowania może być wykorzystany przy określaniu nośności granicznej pręta z wieloma jednakowymi wycięciami o dowolnym kształcie. Praca pozwoliła stwierdzić, w porównaniu do analogicznego zadania wykonywanego za pomocą maszyn liczących [2,3], przydatność i wystarczającą dokładność metody wykreślnej [6].

Autorzy dziękują doc. dr W. SZCZEPIŃSKIEMU za zasugerowanie tematu i dyskusje w toku pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1950.
2. R. T. SHIELD, *On the plastic flow of metals under conditions of axial-symmetry*, Proc. Roy. Soc., 233A, No 1193 (1955), 267-287.
3. G. EASON, R. T. SHIELD, *The plastic indentation of a semi-infinite solid by a perfectly rough circular punch*, ZAMP **11** (1960), 33-43.
4. F. A. MCCLINTOCK, *On notch sensitivity*, Welding Journal Research Supplement, May 1961.
5. L. DIETRICH, W. SZCZEPIŃSKI, *Plastic yielding of axially-symmetric bars with non-symmetric v-notch*, Acta Mechanica, **4** (1967), 230-240.
6. Z. MRÓZ, *Grafical solution of axially symmetric problems of plastic flow*, ZAMP, **18** (1967), 219-236.
7. W. SZCZEPIŃSKI, L. DIETRICH, E. DRESCHER, J. MIASKOWSKI, *Plastic flow of axially-symmetric notched bars pulled in tension*, Int. J. Solid, Struct., **2** (1966), 525-541.

Р е з ю м е

ПРЕДЕЛЬНАЯ НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ РАСТЯГИВАЕМЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
СТЕРЖНЕЙ ОСЛАБЛЕННЫХ РЯДОМ НАДРЕЗОВ

Дается полное решение задачи о растяжении цилиндрического стержня ослабленного рядом угловых надрезов. Путем продолжения линий скольжения в жёсткую зону найдено оптимальное расстояние между надрезами. Для расстояний меньших чем оптимальные даны нижняя и верхняя оценки несущей способности. Произведена экспериментальная проверка влияния расстояния между надрезами на несущую способность стержня.

S u m m a r y

LOAD-CARRYING CAPACITY OF TENSILE AXIALLY-SYMMETRIC BARS
WEAKENED BY SERIES OF V-NOTCHES

A complete solution of axially-symmetric bar with the series of V-notches subjected to tension is presented. The optimum distance between notches has been obtained by means of extension of slip lines into the rigid region. For shorter distances than the extreme ones the upper and lower bound of the load carrying capacity is determined.

The influence of distance between two equal notches on the load-carrying capacity has been verified experimentally.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW
TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 grudnia 1967 r.

BADANIA MOŻLIWOŚCI ZMNIEJSZENIA PRĘDKOŚCI PROPAGACJI PĘKNIECIA ZMĘCZENIOWEGO W BLACHACH DURALOWYCH PRZY UŻYCIU ZGNIOTU

WITOLD B Ł A Ż E W I C Z (WARSZAWA)

1. Wstęp

Zastosowanie do oceny trwałości zmęczeniowej konstrukcji samolotów koncepcji dozorowanej trwałości zmęczeniowej (w literaturze angielskiej *fail safe*) stało się przyczyną powodującą badania propagacji pęknięcia zmęczeniowego. Wystąpienie widocznych pęknięć zmęczeniowych w materiale konstrukcji wykorzystywane jest przy określaniu rezerw samolotów metodą dozorowanej trwałości zmęczeniowej jako wskaźnik wyczerpania przez konstrukcję reprezentowanej przez nią trwałości zmęczeniowej [1, 2, 3, 4, 5].

Wyniki badań propagacji pęknięcia zmęczeniowego dla różnych materiałów przy rozciągających naprężeniach powtarzalnych o stałej amplitudzie podaje szereg publikacji [5 ÷ 14]. Przeprowadzone przez różne ośrodki badania nie zawsze dają zbliżony obraz własności propagacji, często badania nie są porównywalne ze sobą ze względu na różne kształty próbek i sposoby przykładania obciążeń. Badania propagacji przy obciążeniach o zmiennej amplitudzie [15, 16] doprowadziły do stwierdzenia, że dla okresu propagacji pęknięcia w stopach Al hipoteza liniowej kumulacji zmęczenia PALMGRENA-MINERA [17] daje wyniki zawsze po stronie bezpiecznej. Przeprowadzone badania propagacji pęknięcia zmęczeniowego w różnych typach cienkościennych konstrukcji z usztywnieniami wykazały istotny wpływ sposobów łączenia elementów usztywniających z blachą konstrukcji na własności propagacji [18, 19].

Uzyskanie zmniejszenia prędkości propagacji, to jest zmniejszenia przyrostu długości pęknięcia przy określonej liczbie cykli obciążenia, pozwala na zastosowanie w metodzie dozorowanej trwałości zmęczeniowej albo dłuższych okresów międzyprzeglądowych, albo na zmniejszenie prawdopodobieństwa zmęczeniowego zniszczenia rozpatrywanej konstrukcji. Dotychczasowe badania propagacji pęknięcia zmęczeniowego określały parametry propagacji dla poszczególnych materiałów albo konstrukcji nie zajmując się możliwościami zmniejszenia prędkości propagacji.

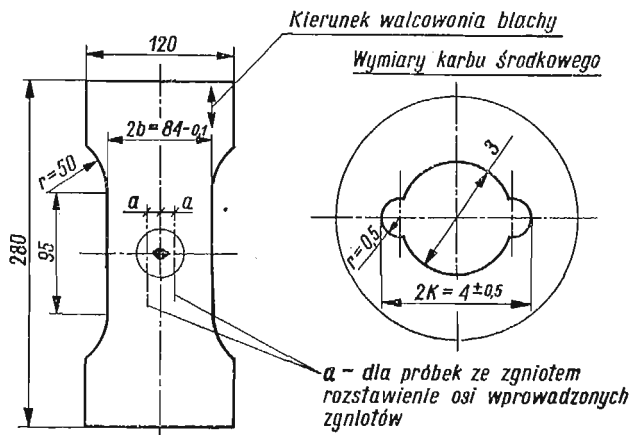
Wpływ zgniotu na całkowitą trwałość zmęczeniową jest ogólnie znany — w konstrukcjach z karbem geometrycznym zgniot zwykle zwiększa trwałość lub pozwala zastosować wyższe poziomy naprężeń. Przyczyny tego polepszenia własności zmęczeniowych upatruje się głównie w korzystnym wpływie naprężeń własnych ściskających wywołanych odkształceniem plastycznym materiału. Nie jest natomiast jednoznacznie ustalony wpływ umocnienia plastycznego — wydaje się on być zależny od rodzaju obciążeń wywołujących zgniot materiału. Po uformowaniu się pęknięcia powoduje ono koncentrację naprężeń w strefie

przesuwającego się w głąb materiału czoła pęknięcia — działa więc w tym względzie w sposób zbliżony do karbu geometrycznego. Umieszczony na drodze propagującego pęknięcia zmęczeniowego zgniot winien zatem zmniejszyć prędkość propagacji pęknięcia. Korzystny wpływ wprowadzonych zgniotem zmian może być znacznie zmniejszony, bo działanie zgniotu zaczyna się po przyłożeniu pewnej liczby cykli obciążeń koniecznych do wywołania pęknięcia i osiągnięcia przez nie obszaru o zmienionych zgniotem własnościach, a rozkłady naprężeń własnych ulegają zmianom w trakcie obciążeń zmęczeniowych [20]. Na podstawie aktualnego stanu wiedzy o zmęczeniu i propagacji pęknięcia zmęczeniowego nie można uzyskać jednoznacznej odpowiedzi na pytanie, czy zgniot wpływa korzystnie na własności propagacji.

Postawiono sobie za cel doświadczeń zbadanie możliwości zmniejszenia prędkości propagacji przy użyciu zgniotu i towarzyszących mu naprężeń własnych. Biorąc pod uwagę brak w tym zakresie jakichkolwiek dostępnych w literaturze wyników badań oraz brak prostych metod określania wprowadzanych w materiał naprężeń własnych i intensywności zgniotu, zdecydowano przeprowadzić badania w oparciu o zewnętrzne parametry zgniotu. Wyniki badań własności propagacji dla próbek ze zgniotem należało porównać z własnościami propagacji dla próbek bez zgniotu, co spowodowało, wobec braku możliwości takiego porównania na podstawie danych z literatury, konieczność przeprowadzenia badań własnych również dla próbek bez zgniotu. Badania wpływu różnego typu zgniotów na własności propagacji prowadzone były przy stałych poziomach naprężeń. Dla wybranego typu zgniotu przeprowadzono próby dla różnych amplitud naprężeń.

2. Zastosowana metoda badań

2.1. Przyjęta do badań konstrukcja próbki. Wymiary próbki podano na rys. 1. Do wykonania próbek użyto blachy platerowanej z duralu PA6-T. Dural PA6 odznacza się większym wydłużeniem plastycznym niż równorzędnie używany w konstrukcjach płatowców PA7. Zastosowano materiał bardziej plastyczny ze względu na spodziewany wyraźniejszy wpływ zgniotu dla takiego materiału na propagację pęknięcia. Grubość użytej na próbki blachy wynosiła 2 mm. (Grubość ta jest najczęściej stosowana do prób propagacji pęknięcia)



Rys. 1. Próbka użyta do badania propagacji pęknięcia zmęczeniowego

Próbki wykonywano z dwóch arkuszy blach frezując je w pakietach po około 15 sztuk. Powierzchnię blachy dla próbek bez zgniotów pozostawiono bez zmian nie stosując żadnych dodatkowych zabiegów. Karb środkowy (w osi symetrii próbki) wykonywano w specjalnym przyrządzie wiertniczym z wymiennymi tulejkami.

Dla przyjętej próbki (bez karbu środkowego) wytrzymałość doraźna wynosiła 41,11 kG/mm², a granica proporcjonalności 25,07 kG/mm². Są to wartości średnie z przebadanych 6 próbek, po 3 z arkusza.

Próbki przeznaczone do badań propagacji oznaczano literą *C* i kolejnym numerem. Od numeru *C-1* do *C-42* próbki wykonano z pierwszego arkusza blachy, pozostałe z drugiego. Dla każdej próbki mierzono rzeczywistą grubość, która służyła do obliczenia przekroju pomiarowego próbki. Naprężenia określano dla przekroju netto części pomiarowej próbki, to jest po odliczeniu ubytku powierzchni spowodowanym karbem. Ze względu na stosunkowo małe rozrzuty etapu propagacji pęknięcia, otrzymywane w doświadczeniach opublikowanych w literaturze, do badań przy stałych parametrach przeznaczano serię trzech próbek.

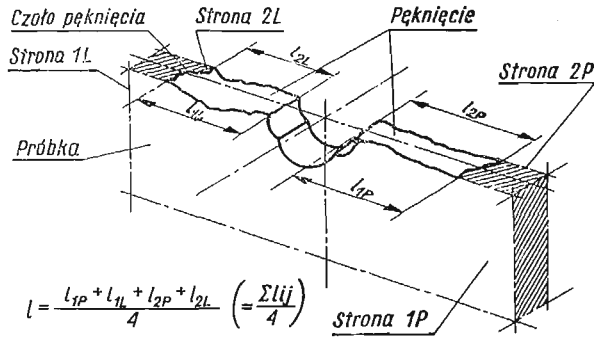
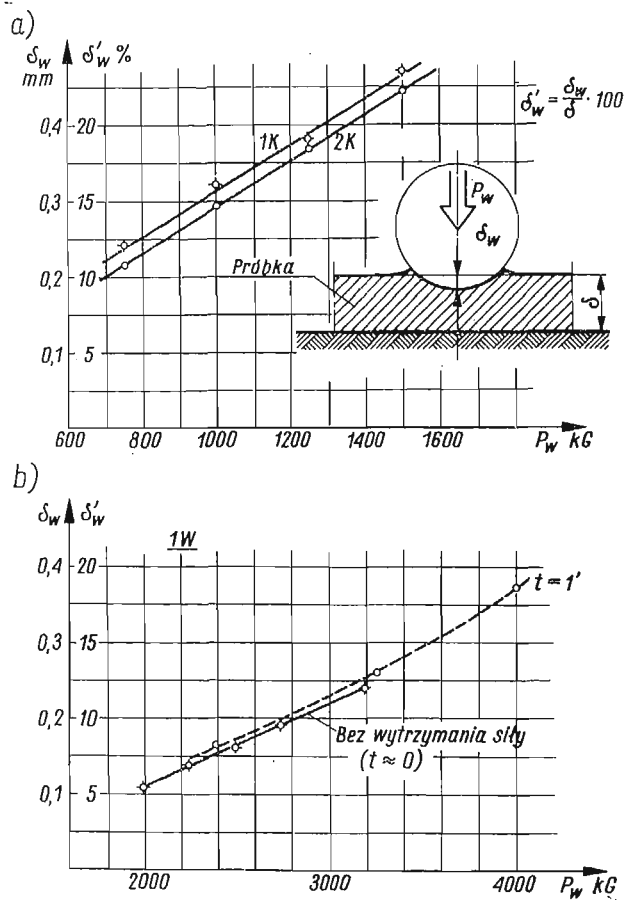
2.2. Zastosowany do badań zgniot. Pierwowzorem zastosowanej metody wykonywania zgniotu stał się odcisk pozostawiany przez końcówkę przyrządu mierzącego twardość materiału. Zwiększając wymiary końcówki w stosunku do grubości blachy można wywołać w blasze znaczny zgniot lokalny, którego wielkość zapewni przyłożona do wciskanego narzędzia siła. Uzyskiwany przy tej metodzie trójwymiarowy stan naprężeń pod działającym na materiał narzędziem umożliwia osiągnięcie dużych lokalnych zgniotów.

Dobór różnych parametrów zgniotu do przeprowadzanych prób został wykonany jedynie w oparciu o jakościowe przesłanki ich wpływu na prędkość propagacji. Zgniot wprowadzano w materiał próbek symetrycznie z obu stron karbu, tak aby pozioma płaszczyzna symetrii narzędzia pokrywała się z poziomą osią karbu.

Pierwszym parametrem wprowadzanego zgniotu jest liczba i kształt narzędzi wciskanych w materiał, zwanych dalej stemplami. Zastosowano dwa kształty stempli — wałeczek o średnicy 3 mm i długości 20 mm oraz kulkę o średnicy 9,5 mm. Stempel wciskano w materiał próbki leżącej albo na płaskim podłożu, albo na drugim identycznym stemple. Uzyskano w ten sposób cztery rodzaje kształtu zgniotu, które dalej oznaczane będą w następujący sposób: *1W* — zgniot wywołany przez jeden wałeczek, *2W* — zgniot wywołany przez dwa wałeczki, *1K* — zgniot wywołany przez jedną kulkę, *2K* — zgniot wywołany przez dwie kulki.

Ośią zgniotu nazwano pionową płaszczyznę symetrii odcisku równoznaczną z płaszczyzną symetrii stempla. Przyjęcie jako stempli tak różnych kształtów, jak wałeczek i kulka o różnych średnicach zostało spowodowane chęcią zaobserwowania wpływu różnych rozkładów zgniotu i naprężeń własnych na własności propagacji. Kształty *2W* i *1K* wprowadzono jako porównawcze do głównych badanych kształtów zgniotu *1W* i *2K*.

Następnym parametrem zgniotu podawanym przy poszczególnych seriach próbek jest siła wciskająca stempel. Jest to dla badanego zakresu sił parametr zastępczy z głębokością odcisku dla poszczególnych kształtów zgniotu. Wpływ poszczególnych kształtów zgniotu badano przy stałej głębokości pojedynczego odcisku δ_w . Z pewnym przybliżeniem można przyjąć, że δ_w/δ , lub $2\delta_w/\delta$ jest miarą maksymalnej intensywności zgniotu (δ oznacza tu grubość blachy próbki). Wyznaczone z pomiarów zależności siły wywołującej

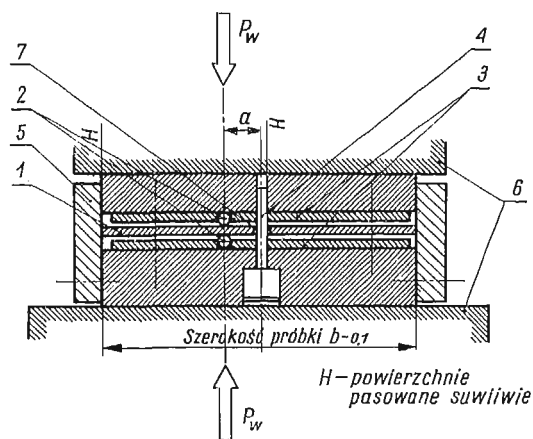
Rys. 2. Sposób pomiaru długości pęknięcia l Rys. 3. Głębokość odcisku w zależności od siły P_w

zgniot $P_w = f(\delta_w)$ podano na wykresach na rys. 3. Podane na wykresach punkty pomiarowe są wartością średnią z pomiarów minimum 6 odcisków. Dla kształtu zgniotu 1K i 2K nie znaleziono zależności głębokości odcisku od czasu działania siły. Kształt zgniotu 2W dawał takie same wartości średnie jak 1W przy większych rozrzutach dla poszczególnych

pomiarów. Pomiary wykonywano przy użyciu przystosowanego do tego celu czujnika warsztatowego. Dokładność odczytu była równa $\pm 0,005$ mm. Dla oznaczenia omawianego parametru zgniotu dla poszczególnych serii próbek podawano wartość siły P_w w kilogramach.

Trzecim parametrem wprowadzanego w materiał próbki zgniotu jest odległość osi zgniotu od osi pionowej próbki określana według oznaczenia na rys. 1 jako a .

W trakcie wykonywania prób spotkano się z dużym wpływem czasu wytrzymywania pod obciążeniem stempla na własności propagacji. Dlatego wprowadzono do oznaczania zgniotu czas wytrzymywania. Nie przeprowadzono szczegółowych badań tego parametru — przybiera on tylko dwie wartości; 0 i 1, gdzie 0 oznacza czas wytrzymywania mniejszy niż 10 sek., a 1 — czas równy 1 min. ± 5 sek. Przy wykonywaniu zgniotów stosowano możliwie stałą szybkość wzrostu siły P_w — około 1000 kG/minutę.



Rys. 4. Przyrząd do wykonywania zgniotów 1 — próbka, 2 — stemple wykonujące zgniot, 3 — płytka ustalająca stemple, 4 — kolek ustalający próbkę i płytke 3, 5 — zabezpieczenie 1 i 3 przed obrotem, 6 — płyty maszyny realizującej obciążenie, 7 — karb środkowy próbki

Tak więc pełnym oznaczeniem rodzaju zgniotu będzie: kształt zgniotu; wartość P_w w kG; a w mm; 0 lub 1.

Zgniot wprowadzano w materiał próbki za pomocą hydraulicznej maszyny wytrzymałościowej używając specjalnego przyrządu, którego zasadę działania podaje rys. 4. Przyrząd umożliwiał poprzez wymianę płytek 3 wykonywanie wszystkich badanych rodzajów zgniotu. Zgniot wykonywano najpierw z jednej strony karbu, potem po wyjęciu i obróceniu próbki w przyrządzie z drugiej strony karbu. Zastosowanie takiej metody było spowodowane chęcią uzyskania możliwie małych odchyłek zarówno dla odległości osi zgniotu od osi karbu, jak i siły wywołującej zgniot. Różnice w odległości osi zgniotu od osi karbu dla poszczególnych egzemplarzy próbek wahały się w granicach $\pm 0,05$ mm od wartości nominalnej. W czasie wytrzymywania siły P_w wartość jej utrzymywano w granicach $\pm 0,5\%$ wartości nominalnej.

2.3. Metoda pomiaru długości pęknięcia. Do pomiarów długości pęknięcia posłużono się zdjęciami fotograficznymi. Długość pęknięcia odczytywano z negatywu obejmującego

część pomiarową próbki naświetlanego przy określonej liczbie cykli obciążenia. Stosując powiększenia 10 razy w stosunku do obszaru rzeczywistego (około 12 razy w stosunku do negatywu) określano czoło pęknięcia z dokładnością $\pm 0,05$ mm, którą warunkuje niezbyt ostro zarysowane dla blachy platerowanej czoło pęknięcia. Dla uzyskania żadanego powiększenia na próbce zamocowana była skala z podziałką milimetrową. Negatyw ustawiano do pomiaru długości pęknięcia tak, aby uzyskać wzdłuż całej sfotografowanej podziałki zgodność liniową powiększenia z linijką, którą mierzono pęknięcie.

Zdjęcia wykonywano dwoma aparatami z obu stron próbki. Zastosowano aparaty «Exacta Varex II» z teleobiektywem o ogniskowej 180 mm. Zastosowanie teleobiektywów podyktowane było koniecznością odsunięcia aparatów od próbki, aby umożliwić jej obserwację w czasie próby przy jednoczesnym zachowaniu niezwiększonego obszaru obrazu na negatywie. Zdjęcia naświetlano za pomocą lamp elektronowych o czasie błysku krótszym od 1/400 sek., co dawało, przy częstości przykładania obciążenia 1000 cykli/minutę maksymalny czas naświetlania około 0,04 cykla. Pozwalało to na wykonywanie zdjęć w czasie pracy maszyny zmęczeniowej.

Wyzwolenie migawki i zwarcie obwodu lamp elektronowych następowało przez jednoczesne uruchomienie umieszczonych przy obu aparatach elektromagnesów na sygnał z licznika liczby cykli następujący raz na 1000 cykli. Istniała możliwość odłączenia roboczego obwodu elektromagnesów, zdjęcia wykonywano zatem z wymaganą przez aktualną prędkość propagacji wielokrotnością 1000 cykli.

Dodatnią cechą zastosowanej metody jest możliwość dokonywania pomiaru (wykonywanie zdjęć) w czasie trwania obciążania próbki oraz możliwość wielokrotnego sprawdzania (po zerwaniu próbki) prawidłowości odczytu. Wadą jest stosunkowo żmudny sposób otrzymywania wyników.

2.4. Przebieg prób. Próby przeprowadzono na mimośrodowej maszynie zmęczeniowej skonstruowanej w Katedrze Budowy Samolotów. Maszyna ma zakres obciążania od 3000 do 300 kG siły rozciągającej, przy częstościach przykładania obciążeń 750, 1000 i 1500 cykli/minutę. Do prób zastosowano częstość 1000 cykli/min.

Maszyna do przeprowadzanych prób wyposażona była w dynamometr tensometryczny. Zastosowany mostek tensometryczny zapewniał dokładność ustawienia obciążeń $\pm 1,5\%$ użytego zakresu $\Delta R/R$.

Próbkę obciążano każdorazowo od początku procesu zmęczenia takimi naprężeniami, przy jakich po powstaniu pęknięcia mierzono jego propagację. Po uruchomieniu maszyny obserwowano krawędzie karbu próbki przy użyciu lupy dziesięciokrotnej i od momentu wystąpienia widocznego pęknięcia wykonywano zdjęcia rejestrujące jego długość, zapisując w karcie pomiarowej próbki ilość kilocykli, przy której wykonano zdjęcie.

Spadek siły obciążającej, spowodowany zwiększaniem się podatności próbki ze wzrostem pęknięcia, dla badanej długości pęknięcia był niedostrzegalny. Tak więc można przyjąć, że próby były prowadzone przy niezmiennych wartościach sił obciążających próbkę.

2.5. Metody opracowania wyników prób. Pomiar propagacji pęknięcia zmęczeniowego są bardzo żmudne, a materiał doświadczalny z prób bardzo obszerny. Wyniki przeprowadzonych badań zawierają przeciętnie po 100 odczytów długości pęknięcia dla jednej próbki. Sposób pomiaru długości pęknięcia i określania średniej wartości tej długości l dla danej ilości cykli obciążenia podaje rys. 2.

Dla tak określonych l wykonywano dla poszczególnych próbek wykresy liczby cykli wywołujących długość l ; $N = f(l)$. Następnie dla serii próbek obliczano z powyższych wykresów średnią (arytmetyczną) liczby cykli potrzebną do osiągnięcia przez pęknięcie długości l .

Z otrzymanych w ten sposób dla poszczególnych serii próbek zależności $N = f(l)$ obliczano wartości $\Delta l/\Delta N$ dla przedziałów $\Delta l = 0,5 \div 1$ mm. Tak otrzymana wartość $\Delta l/\Delta N \approx dl/dN$ [mm/kilocykl] wyznacza prędkość propagacji pęknięcia zmęczeniowego. Metoda przyjęta do jej określania jest zbliżona do zastosowanej w pracy [13].

Dla każdej próbki rejestrowano liczbę cykli N_c od początku trwania próby do zniszczenia próbki. Po określeniu zależności $N = f(l)$ dzielono całkowitą trwałość zmęczeniową próbki N_c na etap N_1 — od początku trwania próby do wywołania pęknięcia o długości $l = l_0 = 1$ mm, oraz na etap N_2 — od powstania $l = l_0$ do zniszczenia. Przy obserwacji próbki często zdarzało się, że nie dostrzegano małych pęknięć i rozpoczynało wykonywanie zdjęć przy długości l około 0,8 mm. Aby uniknąć ekstrapolacji uzyskanego z pomiarów wykresu $N = f(l)$ do określenia podziału trwałości całkowitej na odpowiednie etapy przyjęto $l_0 = 1$ mm, co z reguły zapewnia wykonanie przynajmniej jednego zdjęcia dla $l < l_0$.

Wartości N_1 , N_2 i $N_c = N_1 + N_2$ dla każdej serii próbek obliczano również jako średnią arytmetyczną z wyników poszczególnych próbek w serii. Wyjątek stanowi seria nr 5 dla próbek bez zgniotu $\sigma_{sr} = 10$ kG/mm², $\sigma_a = 2$ kG/mm². Dla tej serii najpierw obliczono wartość $(N_2)_{sr}$ z uzyskanych wyników propagacji (dwie próbki fotografowane). Następnie dla pięciu próbek przebadanych określono średnią wartość $\log N$ (średnia geometryczna) dla etapu N_1 . Dla tak określonych N_1 i N_2 podano wartość $N_c = N_1 + N_2$.

Obliczanie całkowitej trwałości zmęczeniowej N_c jako średniej arytmetycznej z uzyskanych dla poszczególnych próbek wyników jest sprzeczne ze stwierdzonym przez badaczy spełnianiem rozkładu normalnego przez $\log N$, a nie przez N (średnia geometryczna, a nie arytmetyczna). Z wyjątkiem jednak serii bez zgniotu nr 5, dla której sposób obliczenia średniej podano poprzednio, rozrzuty otrzymanych wartości N_c dla poszczególnych próbek są niewielkie, co sprawia, że obliczenia wartości średnich N , w stosunku do $\log N$, nie dają dla obliczanych wartości N_c różnic większych niż 0,5%.

3. Wyniki badań

3.1. Próbki bez zgniotu. Dla porównania z wynikami badań wpływu zgniotu wykonano 5 serii próbek bez zgniotu. Przyjęto naprężenia średnie $\sigma_{sr} = 10$ kG/mm²; dla poszczególnych serii zmieniano amplitudę naprężeń. Wyniki badań poszczególnych próbek z rozbićciem na etapy N_1 i N_2 podaje tablica 1, wartości średnie dla poszczególnych serii — tablica 2. Zależność ilości cykli, potrzebnych do wywołania określonej długości pęknięcia (od długości $l_0 = 1$ mm) od amplitudy naprężeń podaje wykres na rys. 5.

Próbki pękały od karbu środkowego. Pęknięcie propagowało się równomiernie w lewą i prawą stronę próbki. Największe różnice dla poszczególnych l_{ij} (według rys. 2) nie przekraczały jednego milimetra na początku etapu propagacji i dwóch milimetrów na ostatnich wykonywanych zdjęciach próbki. Różnice te były największe dla małych amplitud naprężeń.

Tablica 1. Wynik badań próbek bez zgniotu

Nr serii	σ_{sr}	σ_a	Numer próbki	N_1	N_2	N_c	Uwagi
—	kG/mm ²	kG/mm ²	—	k cykli	k cykli	k cykli	
1	10	8	C-23	10,00	11,70	21,70	
			C-32	9,93	10,65	20,58	
			C-39	13,16	11,45	24,61	
2		6	C-1	34,85	23,80	58,65	
			C-4	38,15	27,55	65,70	
			C-5	36,75	27,15	63,90	
3		4,2	C-29	75,13	69,00	145,13	
			C-35	87,40	68,15	155,55	
			C-38	105,35	68,00	173,35	
4		2,8	C-43	374,0	191,7	575,7	
	C-56		337,8	208,2	546,0		
	C-62		314,5	191,7	506,2		
5	2	C-64	6 533,6	632,0	7165,6	Nie wykonano zdjęć	
		C-71			1804,0		
		C-78	1 090,3	598,9	1689,2		
		C-90	10 000,0	bez zapoczątkowania pęknięcia			
		C-89	10 000,0	bez zapoczątkowania pęknięcia			
6	12	4	C-57	105,6	71,95	177,55	
			C-44	113,5	68,30	181,8	
			C-48	111,5	70,80	182,3	
7	8,8	4	C-69	119,0	88,0	199,9	
			C-75	157,9	90,8	248,7	
			C-82	129,6	84,7	214,3	

Nie stwierdzono żadnych przerw i nieciągłości w etapie propagacji. Od momentu powstania pęknięcia propagowało ono w sposób ciągły, zmniejszając jedynie lub zwiększając prędkość propagacji dla poszczególnych odczytów l_{ij} , bez widocznej nieciągłości zależności $N = f(l)$ dla poszczególnych próbek. Wyraźniejsze czoło pęknięcia występowało dla większych amplitud naprężeń.

Złom zmęczeniowy miał ten sam charakter jak w badaniach podawanych w literaturze. Przejście ze złomu prostopadłego do powierzchni próbki na złom o kącie około 45° nie powodowało żadnych dostrzegalnych różnic w prędkości propagacji. Długość złomu zmęczeniowego prostopadłego była większa dla mniejszych amplitud naprężeń.

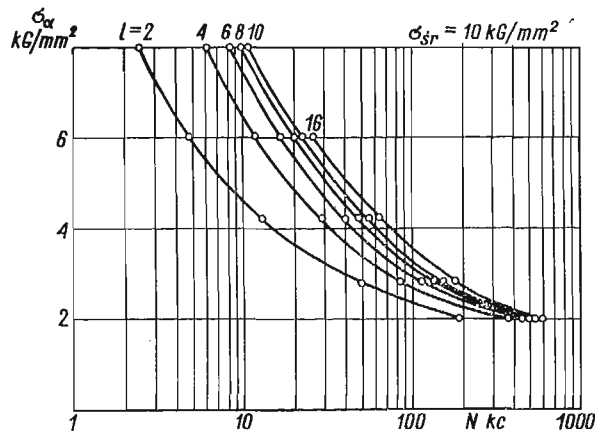
3.2. Próbkę ze zgniotem. Badania wpływu różnych parametrów zgniotu przeprowadzono przy stałych naprężeniach średnich i stałej amplitudzie naprężeń $\sigma_{sr} = 10 \text{ kG/mm}^2$ $\sigma_a = 6 \text{ kG/mm}^2$. Ze względu na dużą liczbę zmiennych parametrów przeprowadzono jedynie badania charakteru ich wpływu, rezygnując w czasie omawianych badań z wyznaczania zależności funkcyjnych dla poszczególnych parametrów. Dla zgniotu 1W/3260/7/1 przeprowadzono badania przy pięciu amplitudach naprężeń.

Tablica 2. Wartości średnie dla serii bez zgniotu

Nr serii	σ_{sr}	σ_a	N_1	N_2	N_c	R_1	R_2	R_c	$\Delta\sigma$
	kG/mm ²	kG/mm ²	K_c	K_c	K_c	%	%	%	kG/mm ²
1	10	8	11,03	11,27	22,30	29,3	9,3	18,1	±0,4
2		6	36,6	26,2	62,8	9,0	14,3	10,7	
3		4,2	89,3	68,4	157,7	30,8	1,5	18,5	
4		2,8	342,1	197,2	539,3	17,4	8,4	11,0	
5		2	>3854,4	615,4	>4469,8	—	—	—	±0,2 Obliczenie N_1 w/g uwag w rozdz. 4
6	12	4	110,2	70,4	180,6	7,2	5,2	2,6	
7	8,8		133,1	87,8	220,9	34,6	7,0	22,1	

$$R_i = \frac{(N_i)_{max} - (N_i)_{min}}{(N_i)_{sr}} 100\%$$

Otrzymane wartości etapów N_1 , N_2 i N_c podaje dla przebadanych próbek tablica 3 i tablica 6, wartości średnie dla poszczególnych serii — tablice 4 i 7. W tablicach wartości średnich podano wartości pola rozrzutu wyników dla poszczególnych serii. Tablica 5 podaje stosunek wartości odpowiedniego etapu poszczególnych serii ze zgniotem do tego samego etapu serii nr 2 bez zgniotu.



Rys. 5. Liczba cykli σ_a do osiągnięcia długości pęknięcia l od wartości $l_0 = 1$ mm (bez zgniotu)

Z wyników badań widać duże możliwości przedłużania etapu propagacji i wpływania na wartości prędkości propagacji dla różnych długości pęknięcia przy użyciu zgniotu. Pęknięcie rozpoczynało się tak jak w próbkach bez zgniotu od karbu środkowego. Nie stwierdzono większej niż dla próbek bez zgniotu niesymetrii propagacji przy $l < 1$ mm. Po osiągnięciu obszaru odcisków, pęknięcie dla większości typów zgniotów nie propagało symetrycznie.

Tablica 3. Wyniki badań próbek ze zgięciem dla stałego poziomu naprężeń; $\sigma_{sr} = 10 \text{ kG/mm}^2$; $\sigma_n = 6 \text{ kG/mm}^2$

Nr serii	Parametry zgięciu	Nr próbki	Dób leżak.	N_1	N_2	N_c	Uwagi
				KC	KC	KC	
1	1W/3260/7/0	C-22	1	28,15	194,25	222,40	
		C-36	23	28,65	223,40	252,05	
		C-40	24	31,1	173,5	204,60	
2	1K/800/7/0	C-9	27	20,45	73,75	94,20	
		C-14	28	17,25	60,40	77,65	
		C-11	28	19,12	77,50	96,62	
3	2K/870/7/0	C-10	29 ÷ 30	24,55	278,10	302,65	
		C-13	35	18,40	388,55	406,95	
		C-20	36	27,93	358,00	385,93	
4	1W/3260/7/1	C-45	21 ÷ 22	30,2	468,5	498,7	
		C-47	23 ÷ 24	34,9	481,1	516,0	
		C-49	25 ÷ 27	38,2	421,1	459,3	
5	2K/870/7/1	C-3	30 ÷ 31	31,9	815,1	847,0	2)
		C-18	32	21,9	541,8	563,7	
		C-41	35 ÷ 38	25,2	766,3	791,5	3)
6	2W/3260/7/1	C-46	77 ÷ 78	30,8	275,70	306,50	
		C-72	79	34,8	337,80	372,60	
		C-79	80	43,1	294,35	337,45	
7	2K/1200/7/1	C-12	8 ÷ 10	23,35	656,05	679,4	1)
		C-15	11 ÷ 14	24,40	863,30	887,7	2)
		C-16	15 ÷ 16	24,70	618,60	643,3	
8	1W/2400/7/1	C-65	28	39,20	93,80	133,00	
		C-68	28	37,10	90,85	127,90	
		C-76	29	44,70	97,65	142,35	
9	1W/4000/7/1	C-52	30	30,8	293,5	324,3	
		C-53	31	34,4	318,5	352,9	
		C-55	32	37,5	425,8	463,3	
10	2K/870/10/1	C-27	17	21,40	57,65	79,05	
		C-34	17	19,85	61,85	81,70	przed N_1 obciążona statycznie $\sim 2 \sigma_{max}$
		C-37	28	37,58	43,20	80,78	
11	2K/870/16/1	C-24	29	30,30	31,95	62,25	
		C-28	29	30,05	30,75	60,80	
		C-31	30	35,65	31,45	67,10	
12	1W/3260/6/1	C-59	34 ÷ 42	39,70	695,50	735,20	
		C-64	43 ÷ 44	39,65	524,50	564,15	
		C-67	44 ÷ 45	39,90	655,80	695,70	
13	1W/3260/8/1	C-70	45	40,0	233,6	273,6	
		C-74	47	35,3	227,3	262,6	
		C-83	48	40,4	237,9	278,3	

Zniszczenie próbek spowodowane pęknięciem poza częścią pomiarową:

- 1) przez karb zewnętrzny ($r = 50 \text{ mm}$),
 - 2) przez zamocowanie w szczękach,
 - 3) przez wadę materiałową (wtrącenie niemetaliczne).
- Oznaczenia zgięciu podano w podrozdziale 2.2.

Tablica 4. Wartości średnie dla serii ze zgniotem (wg tabl. 3). $\sigma_{sr} = 10 \text{ kG/mm}^2$; $\sigma_a = 6 \text{ kG/mm}^2$

Nr serii	Parametry zgniotu	N_1	N_2	N_c	R_1	R_2	R_c	Uwagi
1	1W/3260/7/0	29,30	197,10	226,40	10,0	25,8	21,0	
2	1K/800/7/0	18,94	70,55	89,49	16,9	24,3	21,2	
3	2K/870/7/0	23,65	341,55	365,20	40,3	32,4	28,6	
4	1W/3260/7/1	34,40	456,90	491,30	23,3	13,1	11,5	
5	2K/870/7/1	26,33	707,74	734,07	38,0	38,6	38,05	Różne miejsca zniszcz. próbek
6	2W/3260/7/1	36,33	202,62	338,85	34,0	20,5	19,5	
7	2K/1200/7/1	24,15	712,65	736,80	5,6	35,2	33,2	Różne miejsca zniszcz. próbek
8	1W/2400/7/1	40,33	94,08	134,41	18,9	7,3	10,8	
9	1W/4000/7/1	34,23	345,93	380,16	19,6	38,3	36,9	
10	2K/870/10/1	26,28	54,23	80,51	67,5	31,2	3,3	Różne warunki próby
11	2K/870/16/1	32,00	31,38	63,38	17,5	3,8	9,9	
12	1W/3260/6/1	39,75	625,27	665,02	0,6	27,4	25,7	
13	1W/3260/8/1	38,57	232,93	271,50	13,2	4,6	5,8	

R_1 — oznaczenie wg tablicy 2.

Tablica 5. Porównanie serii ze zgniotem (wg tabl. 4) z serią bez zgniotu (seria nr 2) $\sigma_{sr} = 10 \text{ kG/mm}^2$; $\sigma_a = 6 \text{ kG/mm}^2$

Nr serii ze zgniotem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\frac{N_{1z}}{N_{10}}$	0,8	0,5	0,6	0,9	0,7	1,0	0,7	1,1	0,9	0,7	0,9	1,1	1,1
$\frac{N_{2z}}{N_{20}}$	7,5	2,9	13,0	17,4	27,0	11,6	27,3	3,6	13,2	2,1	1,2	23,9	8,9
$\frac{N_{cz}}{N_{ca}}$	3,6	1,4	5,8	7,8	11,7	5,4	11,7	2,1	6,1	1,3	1,0	10,6	4,3

N_{10} ; N_{20} ; N_{c0} — wartości dla serii bez zgniotu
 N_{1z} ; N_{2z} ; N_{cz} — wartości dla serii ze zgniotem.

Wpływ czasu wytrzymywania siły wykonującej zgniot okazał się bardzo znaczny zarówno na wartość etapu N_2 , jak i na przebieg propagacji. Wykazują to serie 3, 5 i serie 1, 4. Dla obu par porównywanych serii widać wyraźny wzrost etapu N_2 ze wzrostem czasu wytrzymywania siły P_w . Dla serii 4 wzrost czasu wytrzymywania siły spowodował zmianę w charakterze propagacji; seria 1 miała symetryczny przebieg propagacji — zgodny z obserwacjami dla próbek bez zgniotu, a seria 4 wyraźnie większą prędkość propagacji od

Tablica 6. Wyniki badań próbek ze zgniotem 1W/3260/7/1 dla różnych σ_a przy $\sigma_{sr} = 10$ kG/mm²

Nr serii	σ_a	Nr próbki	Dób leżak.	N_1	N_2	N_c	Uwagi
	kG/mm ²			k_c	k_c	k_c	
14	8	C-60	33	17,60	87,40	105,00	
		63	34	14,20	72,30	86,55	
		77	34	16,15	82,00	98,15	
15	4	C-81	22÷24	110,1	1023,4	1133,5	
		84	26÷28	105,9	1154,5	1260,4	
		87	28÷31	119,9	1226,1	1346,0	
16	2,8	C-58	83÷86	290,5	2821,9	3112,4	
		80	86÷91	327,7	3149,0	3476,7	
		61	99÷102	359,6	2526,5	2886,1	
17	2	C-66	36÷48	1732,5	> 8627,5	> 10 000,0	} bez zniszczenia
		73	48÷58	1692,0	> 8308,0		
		85	112÷119	1060,7	> 3941,7		

Tablica 7. Wartości średnie dla serii ze zgniotem 1W/3260/7/1 (wg tab. 6) dla różnych σ_a

Nr serii	σ_a	N_1	N_2	N_c	R_1	R_2	R_c	Uwagi
	kG/mm ²	k_c	k_c	k_c	%	%	%	
14	8	15,98	80,57	96,55	21,3	18,7	19,2	
4	6	34,40	456,90	491,30	23,3	13,1	11,5	powtórzenie z tab. 7
15	4	112,0	1134,6	1246,6	12,5	17,9	17,1	
16	2,8	325,9	2832,5	3158,4	21,2	22,0	18,7	
17	2	1495,0	> 8505	> 10 000	45	—	—	

R_1 — oznaczenie wg tablicy 2.

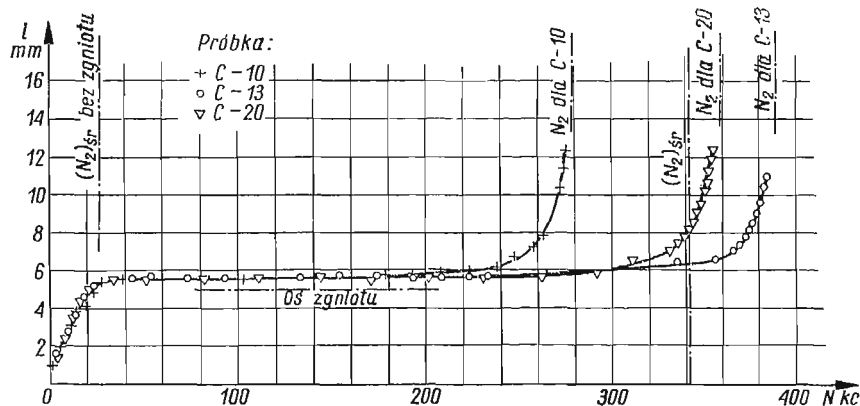
strony prawej karbu środkowego (zgniot wykonany w pierwszej kolejności). Różnica $l_p - l_i$ dla $l = 15$ mm osiągała średnio wartość 5 mm. Przyczyną zmniejszającego wpływu czasu wytrzymywania siły na prędkość propagacji wydaje się być zwiększenie wartości i obszaru zgniotu przez lokalne pełzanie materiału pod stałym obciążeniem o bardzo dużej wartości.

Wpływ kształtu zgniotu na własności propagacji (przy przyjętej metodzie porównywania kształtów) wskazuje na możliwość uzyskania zupełnie różnych przebiegów propagacji.

Dla kształtów 2K i 1K widać wyraźnie lokalny wpływ wprowadzonych zmian. Dla wszystkich serii dla tych kształtów zgniotu, przy różnych pozostałych parametrach, średnia prędkość propagacji dla długości pęknięcia w zakresie 1÷5 mm jest zbliżona do średniej wartości dla próbek bez zgniotu. Zmiana prędkości propagacji następuje dopiero po osiągnięciu przez pęknięcie odcisku stempla w materiale próbki. Lokalny wpływ tych

kształtów zgniotu tłumaczyć można małym obszarem wprowadzanych w materiał dużych naprężeń własnych ściskających i małym obszarem zgniotu. Stwierdzenie małego obszaru zalegania naprężeń własnych ściskających nie jest podważone przy rozważaniu wpływu kształtów zgniotu $2K$ i $1K$ na etap N_2 . Znaczny spadek (do 50%) tego etapu w porównaniu do próbki bez zgniotu świadczy o wprowadzeniu na krawędzi karbu rozciągających naprężeń własnych. Naprężenia własne rozciągające mogą zalegać dla tak wprowadzonych zgniotów w bardzo dużym obszarze materiału, równoważąc małe pole dużych naprężeń ściskających.

Dla próbek $2K/870/7/0$ (seria 3, rys. 6) po okresie «postoju» pęknięcia przez około 250 kilocykli obciążenia następował dalszy wzrost długości pęknięcia z prawej lub lewej



Rys. 6. $N = f(l)$ dla zgniotu $2K/870/7/0$; seria nr 3 ($\sigma_{sr} = 10 \text{ kG/mm}^2$; $\sigma_a = 6 \text{ k/Gmm}^2$)

strony próbki doprowadzając do zniszczenia próbki przy nieznacznym wzroście pęknięcia z przeciwnej strony. Przepuszczalnie następowało to w wyniku różnic we wprowadzanych do próbek zgniotach.

Próbki $2K/870/7/1$ (seria 5) miały duży rozrzut wartości etapu N_2 , podobnie jak $2K/1200/7/1$ (seria 7). Zniszczenie próbek tych serii następowało najczęściej poza przestrzenią pomiarową. Część próbek po około 500 kilocyklach obciążenia postoju pęknięcia zaczynała dalej pękać w podobny sposób jak próbki serii 3. Obserwacje pęknięcia w czasie jego propagacji i analiza wykonanych zdjęć doprowadziły do stwierdzenia, że propagujące z obszaru odcisku pęknięcie nie łączyło się w początkowym okresie swojej propagacji z czołem pęknięcia, które doszło do odcisku od krawędzi karbu. Obserwacje te wywołują przypuszczenie, że propagujące po okresie postoju pęknięcie nie jest przedłużeniem pęknięcia zatrzymanego w obszarze zgniotu, lecz powstaje niezależnie na skutek działania krawędzi odcisku jako karbu przy istniejącym pęknięciu. Przypuszczenie to potwierdzają obserwacje złomu zmęczeniowego tego typu próbek.

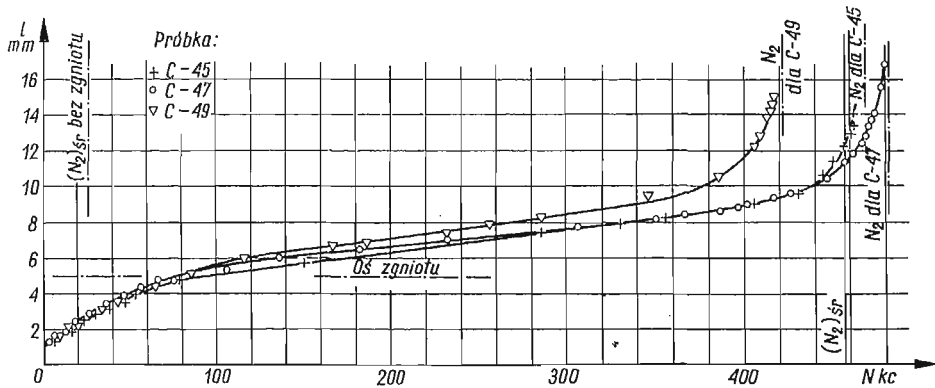
Przyczyną długiego okresu postoju pęknięcia w pobliżu osi zgniotu, oprócz wpływu ujemnych naprężeń własnych i umocnienia plastycznego, może być również wpływ zwiększającego się przekroju materiału na drodze pęknięcia po przekroczeniu przez czoło pęknięcia osi zgniotu. Sugerowany wpływ zmian w przekroju materiału można wyraźnie dostrzec dla próbek typu $2K/870/10/1$ (seria 10), gdzie zachodziło przyspieszenie pęknię-

cia przed osią zgniotu i opóźnienie po przekroczeniu osi. Przebieg kierunku propagacji pęknięcia dla kształtu zgniotu 2K potwierdza również wpływ zmian przekroju materiału na prędkość propagacji. Pęknięcie z reguły dochodziło stycznie do kołowej krawędzi odcisku, a po przejściu krawędzi zmieniało kierunek propagacji zmierzając do osi odcisku zgodnie ze zmniejszającym się przekrojem materiału.

Kształt zgniotu 1K (seria 2) różnił się od 2K wyraźnie wolniejszą propagacją pęknięcia po stronie z odciskiem w stosunku do strony gładkiej oraz bardzo krótkim okresem postoju pęknięcia, zaznaczonym praktycznie tylko od strony odcisku. Zostało to spowodowane dwukrotnie mniejszą intensywnością wprowadzonego zgniotu (dla 1K; δ_w/δ , dla 2K; $2\delta_w/\delta$).

Wpływ kształtu zgniotu 1W (serie 1, 4, 8, 9, 12 i 13) wyraźnie różnił się od skutków wywołanych kształtem 2K czy 1K. Dla przykładu podano na rys. 7 zależność $N = f(l)$ dla zgniotu 1W/3260/7/1 (seria 4).

Wpływ wprowadzonych zmian zaznaczał się tutaj od długości $l = 1 \div 1,5$ mm. Pęknięcie zachowywało zbliżony do liniowego przebieg propagacji do obszaru wykonanego



Rys. 7. $N = f(l)$ dla zgniotu 1W/3260/7/1; seria nr 4 ($\sigma_{sr} = 10 \text{ kG/mm}^2$; $\sigma_a = 6 \text{ kG/mm}^2$)

odcisku. Następnie występowało dość szybkie (ale ciągłe) zmniejszenie prędkości propagacji i od obszaru osi zgniotu pęknięcie propagowało znowu ze stałą (ale znacznie mniejszą od poprzedniej) prędkością do długości przekraczającej położenie osi zgniotu o około 3 mm. Przyczyną tego jest zapewne rozleglejsze pole naprężeń własnych ściskających wprowadzone większym niż dla 2K stemplem. Utrzymywanie się tutaj stałej prędkości propagacji przy wzrastającej długości pęknięcia sugeruje «odciążający» wpływ istniejących w już pękniętym materiale własnych naprężeń ściskających na naprężenia na czole pęknięcia. Przepuszczenie to potwierdzają obserwacje plastycznych odkształceń plateru w pobliżu czola pęknięcia. Po przekroczeniu przez pęknięcie obszaru odcisku, przy stałej jeszcze prędkości propagacji, obszar zmatowiałego plateru nie wyprzedzał czola pęknięcia, a powstawał z obu stron istniejącego pęknięcia.

Występujący dla próbek typu 1W niesymetryczny przebieg propagacji zdradza pewną prawidłowość. Pęknięcie propagujące z większą prędkością (ma to miejsce w obszarze od osi zgniotu do zniszczenia próbki) występuje zawsze po stronie próbki, gdzie zgniot był wykonywany jako pierwszy. Wykonane pomiary wykazały, że głębokość odcisku δ_w , wykonywanego na próbce jako pierwszy jest zawsze nieco większa od δ_w drugiego od-

cisku. Średnia wartość różnicy wynosi około 6% δ_w . Dowodzi to istnienia dla kształtu 1W wpływu pierwszego wykonywanego zgniotu na obszar, w który wprowadza się zgniot drugi. Stanowi to wadę metody przyjętej do wprowadzania w materiał zgniotów. Należy sądzić, że dla tego kształtu zgniotu niesymetrię w przebiegu propagacji można by zmniejszyć stosując do wykonywania zgniotów przyrząd umożliwiający wprowadzanie odkształceń plastycznych równocześnie z obu stron karbu.

Porównując dla kształtu zgniotu 1W pomiary czoła pęknięcia po stronie gładkiej i po stronie zawierającej odcisk widać, że czoło pęknięcia po stronie gładkiej wyprzedza średnio o około 1 mm czoło pęknięcia po stronie z odciskiem, osiągając największe różnice już po wyjściu pęknięcia z obszaru odcisku.

Etap do powstania pęknięcia N_1 nie różnił się dla kształtów zgniotu 1W i 2W od tego etapu dla próbek bez zgniotu (tablica 5).

Wyniki badań wpływu kształtu zgniotu 2W (seria 6) wykazały jeszcze dobitniej wpływ kolejności wykonywania zgniotów. Jest to zrozumiałe ze względu na dwukrotnie większą intensywność wprowadzonego zgniotu ($2 \times \delta_w$). Zgniot wykonywany jako pierwszy dawał prawie stałą prędkość propagacji dla zakresu pomiarowego długości pęknięcia, zgniotowi drugiemu odpowiadał rozkład prędkości propagacji zbliżony do uzyskiwanego dla kształtu 2K. Powodowało to bardzo dużą niesymetrię propagacji pęknięcia; przy $l \approx 13$ mm $l_p - l_1 \approx 10$ mm.

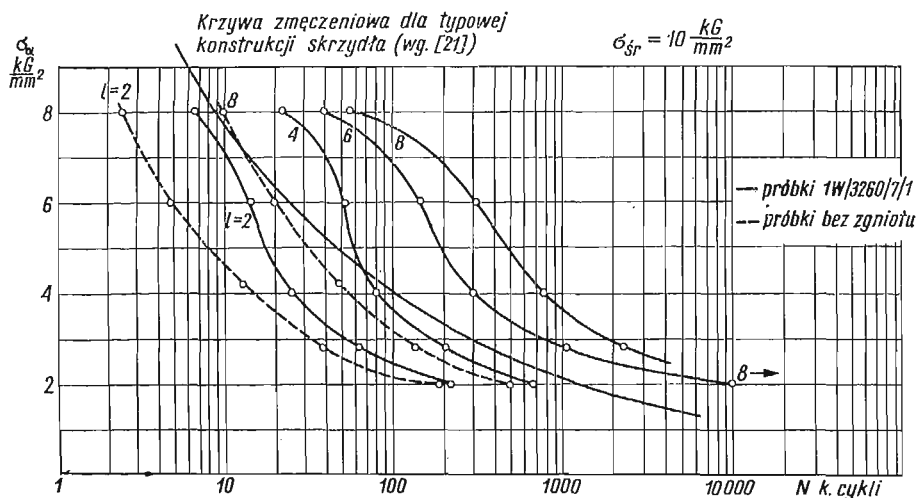
Wpływ wartości siły wciskającej stempel w materiał próbki badano dla dwóch kształtów zgniotu: 2K i 1W (serie 5, 7 i 4, 8, 9). Wyniki badań tego parametru dla kształtu 2K nie pozwoliły wyciągnąć nowych wniosków ze względu na opisane już sposoby zniszczenia próbek poza przekrojem pomiarowym. Dla kształtu 1W badano próbki przy trzech wartościach siły P_w . Uzyskano największą wartość etapu N_2 dla pośredniej wartości siły P_w . Udowodnia to istnienie maksimum wpływu dokonywanego tą metodą zgniotu na własności propagacji.

Spadek własności propagacji dla większych wartości siły P_w wytłumaczyć można wprowadzeniem bardzo dużych zgniotów dających w efekcie przekroczenie dostrzeżonego już wcześniej dla badań zmęczeniowych tzw. zgniotu granicznego. Wniosek ten znajduje potwierdzenie w porównaniu kształtów 2W i 1W: etap N_2 dla 2W (seria 6) jest ponad 2 razy mniejszy od N_2 dla 1W (seria 4) przy około dwukrotnie większej intensywności zgniotu dla 2W. Spostrzeżenie to wydaje się być o tyle cenne, że i w zakresie wpływu samego umocnienia plastycznego zbliża własności etapu propagacji pęknięcia do poznanych lepiej własności całkowitego procesu zmęczenia materiałów.

Wpływ odległości wprowadzanego zgniotu od miejsca rozpoczęcia się pęknięcia zmęczeniowego (parametr a) na własności propagacji zbadano dla dwóch kształtów zgniotu: 2K i 1W (serie 5, 10, 11 i 4, 12, 13 odpowiednio). Dla obu grup serii zwiększanie rozstawienia osi zgniotów powodowało szybki spadek wartości etapu N_2 , aż do wartości odpowiadającej próbkom bez zgniotu (seria 11). Oprócz zmniejszającego efekt zgniotu wpływu coraz to większych naprężeń na czole pęknięcia w miarę oddalania miejsca zgniotu od początku pęknięcia, zjawisko to można dodatkowo dla kształtu 1W uzasadnić zmianami w rozkładzie, a może i wielkości własnych naprężeń ściskających w miarę zmniejszania się wpływu jednego zgniotu na drugi przy wzroście odległości. Dla większych parametrów a (8 dla 1W; 10, 16 dla 2K) pęknięcie propagowało symetrycznie.

W czasie przeprowadzonych prób nie badano wpływu zjawiska relaksacji naprężeń własnych wprowadzonych zgniotem. Nie ma w literaturze publikacji traktujących wyczerpująco o przebiegu tych zjawisk w stopach lekkich.

W czasie prób starano się, aby po wykonaniu zgniotu próbki leżały ponad 20 dób, co w świetle posiadanych na ten temat informacji winno zapewnić uwolnienie próbki od zanikającej stosunkowo szybko części naprężeń własnych. W tablicach 3 i 6 podano okres leżakowania dla każdej badanej próbki od czasu wykonania zgniotu do próby. W przypadku, gdy badania próbki trwały ponad 1 dobę podano w tablicach czas leżakowania do rozpoczęcia i do zakończenia próby. Nieliczne próbki wykonywane dla poszczególnych badanych serii z czasem krótszym od przyjętego jako podstawowy nie wykazały żadnych wyraźnych różnic w etapie propagacji.



Wydaje się prawdopodobne, że wpływ liczby obciążeń przeniesionych przez próbki zanim pęknięcie osiągnie obszar ściskających naprężeń własnych na wartości tych naprężeń może być, zgodnie z sugestiami w [20], tak duży, że zmienny okres relaksacji nie odgrywa w tym przypadku większej roli.

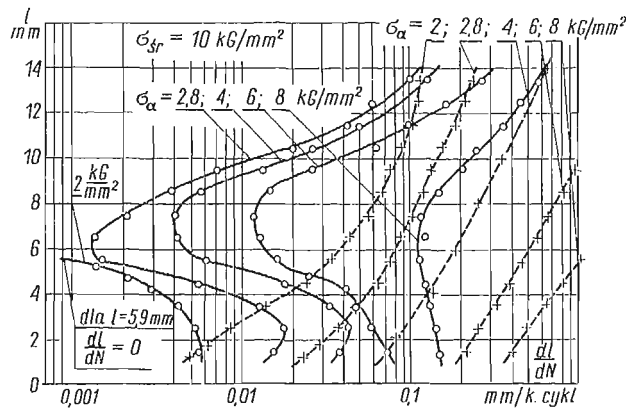
Dla próbek ze zgniotem 1W/3260/7/1 wykonano badania przy różnych amplitudach naprężeń. Próby te przeprowadzono w celu określenia skuteczności wprowadzanego zgniotu dla różnych amplitud naprężeń po porównaniu z wynikami badań dla próbek bez zgniotu. Do prób tych przyjęto kształt zgniotu 1W, który dawał bardziej interesujący autorowi wpływ na własności propagacji niż 2K. Umożliwił poza tym prowadzenie badań bez obawy występowania pęknięć zmęczeniowych poza przestrzenią pomiarową próbki. Na tę część badań składają się serie: 4, 14÷17 (tablice 6 i 7).

Zależność liczby cykli potrzebnej do wywołania określonej długości pęknięcia l (od długości $l_0 = 1$ mm) od amplitudy naprężeń podaje wykres na rys. 8. Na wykresie naniesiono linie $l = \text{const}$ dla $l = 2, 4, 6, 8$ mm dla próbek ze zgniotem i linie $l = 2, 8$ mm dla próbek bez zgniotu. Dla porównania podano wartość średnią krzywej zmęczeniowej dla typowych konstrukcji skrzydeł i usterzeń samolotów projektowanych w latach 1941-

-1943, według danych z [21]. Z porównania widać, że próbki ze zgniotem mają sam etap propagacji pęknięcia znacznie większy niż całkowita trwałość zmęczeniowa konstrukcji lotniczych z lat czterdziestych.

Porównując liczbę cykli potrzebną do wywołania danej długości pęknięcia dla próbek bez zgniotu i ze zgniotem przy różnych wartościach amplitudy naprężeń, można stwierdzić nieliniowy wpływ zmian wprowadzonych zgniotem na zmniejszenie prędkości propagacji (rys. 8). Jest to przypuszczalnie wynikiem zmiennych wpływów naprężeń własnych i umocnienia plastycznego w funkcji amplitudy naprężeń — prób rozdziału tych parametrów i badań z tym związanych nie przeprowadzono.

Na rys. 9 podano zależności $dl/dN = f(l)$ przy $\sigma_a = \text{const}$. Z wykresów widać duży spadek prędkości propagacji dla próbek ze zgniotem w stosunku do próbek bez zgniotu. Charakter zależności dla próbek ze zgniotem jest zupełnie inny niż dla próbek bez zgniotu.

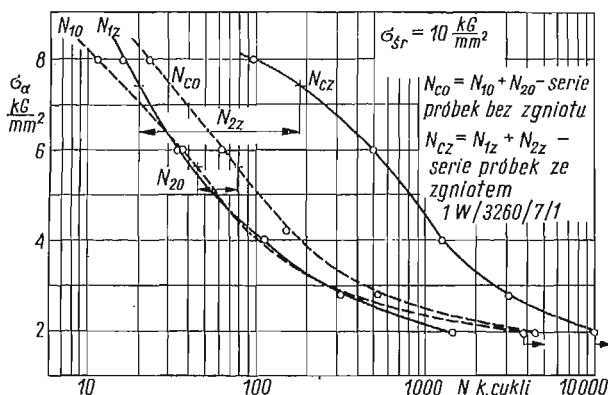


Rys. 9. $dl/dN = f(l)$ dla $\sigma_a = \text{const}$, linie ciągłe — dla próbek ze zgniotem 1W/3260/7/1, linie przerywane — dla próbek bez zgniotu

Dla próbek ze zgniotem w przedziale amplitudy naprężeń od 6 do 2,8 kG/mm² przy wzroście długości pęknięcia do około 5 mm następuje spadek prędkości propagacji. W przedziale $l = 5 \div 8$ mm prędkość propagacji osiąga minimum. Dla $\sigma_a = 2$ kG/mm² przy $l = 5,8$ mm pęknięcie zostało zatrzymane aż do wartości $N_c = 10^7$ cykli przyjętej w badaniach jako trwałość nieograniczona. Dla długości pęknięcia 1 mm prędkość propagacji przy $\sigma_a = 2$ kG/mm² jest zbliżona do prędkości dla próbek bez zgniotu. Ze wzrostem amplitudy naprężeń stosunek wartości prędkości propagacji dla próbek bez zgniotu do wartości prędkości propagacji dla próbek ze zgniotem wzrasta, osiągając przy $\sigma_a = 8$ kG/mm² wartość około 3.

Porównanie etapu N_1 i N_c dla próbek ze zgniotem i bez zgniotu podano na rys. 10. W zakresie $\sigma_a = 8 \div 2,8$ kG/mm² etap N_1 nie wykazuje istotnych różnic dla obu typów próbek. Dla naprężeń $\sigma_a = 2$ kG/mm² widać wyraźnie większą wartość etapu N_1 dla próbek bez zgniotu. Etap ten dla próbek ze zgniotem miał znacznie mniejsze rozrzuty i jego wartości dla poszczególnych próbek zawarte są w polu rozrzutu etapu N_1 dla próbek bez zgniotu. Na zmianę wartości etapu N_1 próbek ze zgniotem w stosunku do próbek bez zgniotu mogą wpływać dwa czynniki; różnice w prędkości propagacji do $l_0 = 1$ mm i wpływ

naprężeń własnych w materiale przy krawędzi karbu na powstanie pęknięcia. W przypadku gdy dla próbek ze zgniotem prędkość propagacji do l_0 jest mniejsza niż dla próbek bez zgniotu (ma to miejsce w zakresie $\sigma_a = 8 \div 2,8$ kG/mm²) i istnieją przy krawędzi karbu naprężenia własne rozciągające — są to dwa czynniki o przeciwnym kierunku działania na etap N_1 . Z uzyskanych wyników można sądzić, że przy krawędzi karbu istnieją niewielkie rozciągające naprężenia własne, których wpływ zaczyna się uwidaczniać dla $\sigma_a = 2$ kG/mm², gdzie prędkości propagacji próbek bez zgniotu i ze zgniotem przy l_0 są sobie równe.



Rys. 10. Porównanie próbek bez zgniotu z próbkami ze zgniotem 1W/3260/7/1 (serie nr 4, 14–17)

Dla badanego zgniotu niesymetria w propagacji pęknięcia była mniejsza dla większych amplitud naprężeń. Dla $\sigma_a = 2$ kG/mm² pęknięcie zatrzymywało się z obu stron próbki symetrycznie. Istniała jedynie różnica o wartości około 1 mm między położeniem czoła pęknięcia zatrzymanego po stronie gładkiej i po stronie z odciskiem stempla.

Przy niskich amplitudach naprężeń (2 i 2,8 kG/mm²) obserwacja pęknięcia na wykonywanych zdjęciach była bardzo utrudniona ze względu na bardzo mały wymiar poprzeczny propagującego pęknięcia i wymagała od prowadzącego obserwacje dużej wprawy w określaniu położenia czoła pęknięcia.

Obserwacje złomu zmęczeniowego nie wykazały żadnych nowych zjawisk; pęknięcie prostopadłe do płaszczyzny próbki było dłuższe dla mniejszych amplitud naprężeń zgodnie z wynikami dla próbek bez zgniotu.

4. Ogólne wnioski z przeprowadzonych badań

Przeprowadzone badania udowadniają możliwość znacznej poprawy własności propagacji pęknięcia zmęczeniowego przez zgniot wprowadzony na drodze propagującego pęknięcia.

Wywołane w materiale odkształcenia plastyczne i stowarzyszone z nimi naprężenia własne mogą spowodować dwa jakościowo odmienne skutki:

a. Zmniejszyć prędkość propagacji zmieniając jednocześnie jej zależność od długości pęknięcia.

b. Zatrzymać propagację pęknięcia zmęczeniowego o makroskopowej długości w konstrukcjach poddanych działaniu znacznych naprężeń powtarzalnych.

W pracy przebadano dokładniej skutek a., co doprowadziło do stwierdzenia, że i tu istnieje możliwość zatrzymania propagacji pęknięcia, ale przy znacznie mniejszych naprężeniach.

Stwierdzono znaczną zależność charakteru zmian prędkości propagacji od kształtu zgniotu, siły wykonującej zgniot i czasu jej działania na narzędzie, oraz odległości wprowadzanego zgniotu od początku pęknięcia.

Zwiększenie siły wykonującej zgniot powyżej określonej wartości może spowodować zmniejszenie korzystnego wpływu wprowadzanych zmian.

W badanym zakresie odległości zgniotu od początku pęknięcia stwierdzono szybki spadek korzystnego wpływu wprowadzanych zmian wraz ze zwiększaniem tej odległości.

Zmiana przekroju materiału (lokalne zmniejszenie się grubości blachy spowodowane głębokością wykonanego odcisku) wydaje się również wpływać na prędkość propagacji; prędkość zwiększa się, gdy pęknięcie propaguje się w kierunku zmniejszania się przekroju materiału, zmniejsza się natomiast w przypadku propagowania pęknięcia od środka do krawędzi odcisku.

Przeprowadzone badania stanowią jedynie pierwszy krok na drodze «sterowania» własnościami propagacji, udowadniając istnienie takiej możliwości i wskazując kierunki dalszych badań.

Literatura cytowana w tekście

1. B. LUNDBERG, *Notes on the level of safety and the repair rate with regard to fatigue in civil aircraft structures*, FFA, Mem. PE-15, 1962.
2. B. LUNDBERG, *Fatigue life of airplane structures*, FFA, Report 60.
3. B. LUNDBERG, *A statistical method for fail safe design with respect to aircraft fatigue*, International Council of the Aeronautical Sciences, Second Intern. Congress, Zürich 1960.
4. R. R. SCHAW, *The level of safety achieved by periodic inspection for fatigue cracks*, JRAS, 1954, October.
5. W. WEIBULL, *The propagation of fatigue cracks in light — alloy plates*, SAAB TN 25, 1954 (fragmenty w/g H. Hertel), Leichtbau Flugzeuge und andere Leichtbauwerke, Springer Verlag, 1960.
6. W. WEIBULL, *Effect of crack length and stress amplitude on growth of fatigue cracks*, FFA, Rep. 65.
7. W. WEIBULL, *Size effects on fatigue crack initiation and propagation in aluminium sheet specimens subjected to stresses of nearly constant amplitude*, FFA, Rep. 86, 1960.
8. N. E. FROST, D. S. DUGDALE, *The propagation of fatigue cracks in sheet specimens*, Journ. of the Mech. and Phys. of Solids, 6 (1958).
9. N. E. FROST, *Propagation of fatigue cracks in various sheet materials*, The Journ. of Mech. Eng. Sciences, 1 (1959).
10. N. E. FROST i in., *Experimental studies into the behaviour of fatigue cracks*, Conference on Dimensioning and Strength Calculation, Budapeszt 1961.
11. J. SCHIJVE, *Fatigue crack propagation in light alloy sheet material and structures*, Advances in Aeronautical Sciences, Proc. of Second Int. Congress, Zürich 1960.
12. J. SCHIJVE, F. A. JACOBS, *Fatigue crack propagation in unnotched and notched aluminium alloy specimens*, NLR, TRM, 2128, 1964.
13. D. BROEK, J. SCHIJVE, *The influence of the mean stress on the propagation of fatigue cracks in aluminium alloy sheet*, NLR, TRM, 2111, 1963.

14. D. BROEK, J. SCHIJVE, *The effect of sheet thickness on the fatigue crack propagation in 2024-T3 alclad sheet material*, NLR, TRM, 2129, 1963.
15. J. SCHIJVE, D. BROEK, *Crack Propagation*, Aircraft Engineering, 1962, November.
16. S. H. SMITH, *Fatigue crack growth under axial narrow and broad random loading*, Acoustical Fatigue in Aerospace Structures, Proc. of the Second Int. Conference, Dayton 1964.
17. MINER, *Cumulative damage in fatigue*, Journal of Applied Mech., 1945, September.
18. H. F. HARDRATH i in., *Fatigue crack propagation in aluminium — alloy box beams*, NACA, TN-3856e.
19. N. F. HARPUR, *Fail safe structural design*, JRAS, 1958, May.
20. G. FORREST, *Internal or residual stresses in wrought aluminium alloys and their structural significance*, JRAS, April, 1954.
21. Data Sheets, Fatigue, RAS, 1958.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ УМЕНЬШЕНИЯ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН В ДУРАЛЮМИНИЕВЫХ ЛИСТАХ ПРИ ПОМОЩИ НАКЛЕПА

Целью излагаемых исследований было опытное определение возможностей уменьшения скорости распространения трещин в конструкции самолета с определенным усталостным ресурсом, при наличии в этой конструкции трещин уловимой длины.

Испытания проводились на образцах из плакированного листового дуралюминия PA6-T толщиной 2 мм, путем приложения растягивающих напряжений. Длина трещины измерялась с обеих сторон образца, причем мерное поле образца фотографировалось при определенном числе циклов нагрузки. Наклеп материала образцов производился путем вдавливания штампов различной формы с обеих сторон центрального выреза образца. Опыты выполнены для 13 различных типов наклепа, при одинаковых средних нагрузках и одинаковом уровне амплитуды нагрузок. Для выбранного на основе этих опытов типа наклепа производились исследования распространения трещины при различных уровнях амплитуд нагрузки (с постоянными средними нагрузками). С целью сравнения процесса распространения трещин в образцах с наклепом с их распространением в материале без наклепа изучался процесс развития трещин в образцах без наклепа.

Результаты испытаний указывают на возможности значительного увеличения при помощи наклепа долговечности конструкций с наличием трещин. Можно задержать распространение трещин уловимой величины, появляющихся в конструкциях самолетов, или уменьшить скорость их распространения до весьма малого постоянного значения в широком диапазоне длин трещин

Summary

INVESTIGATIONS ON THE POSSIBILITY OF DECREASING THE FATIGUE CRACK GROWTH RATE IN ALUMINIUM ALLOY THIN SHEET MATERIAL BY USING LOCAL PLASTIC DEFORMATION

The experimental studies of the possibility of the decreasing of crack growth rate at the detectable crack length in aircraft structure which was designed with the use of «fail safe» concept were the aim of the investigations described in this paper. The material of specimens used for the investigations was aluminium alloy PA6-T, alclad. The thickness of each specimen was 2 mm. Tests were carried out under tension stresses. Crack length was measured on both sides of the specimen from photograph of cracked area exposed at the determined number of loading cycles. Plastic deformations were effected in the material of the specimen from both sides of the central notch with the help of the punches with different shapes. Tests were made for specimens with 13 different kinds of plastic deformations under constant mean load and

one level of alternating load. Specimens with one kind of plastic deformation selected from previous tests resulting were tested under different alternating load (under constant mean load). For comparison of crack propagation in the specimens with plastic deformation with propagation without plastic deformation, tests were made for specimens without plastic deformation.

Test results indicate the possibility of considerable increase in the fatigue life of cracked structures by the use of plastic deformations. It is possible to stop crack propagation at the crack length of detectable value in aircraft structures, or to decrease the rate of growth at the large extent of crack length to a very small constant value.

KATEDRA BUDOWY SAMOLOTÓW
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

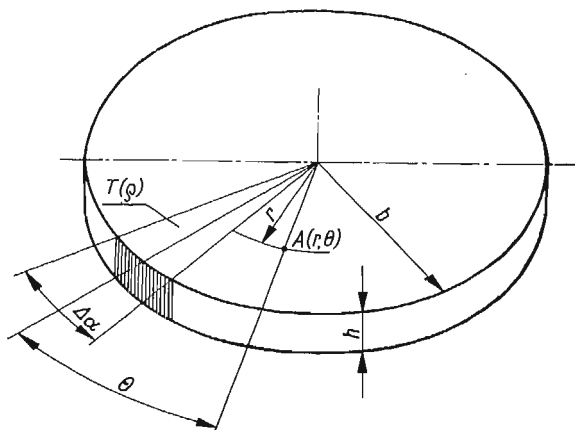
Praca została złożona w Redakcji dnia 5 stycznia 1968 r.

STAN NAPRĘŻEŃ I PRZEMIESZCZEŃ W TARCZY KOŁOWEJ O STAŁEJ GRUBOŚCI,
WYWOŁANY IMPULSEM CIEPLNYM NA WYCINKU TARCZY $\Delta\alpha$

JANUSZ LIPIŃSKI, JANUSZ ZIÓŁKOWSKI (ŁÓDŹ)

1. Podstawowe równania

Rozpatruje się tarczę kołową o stałej grubości, podlegającą płaskiemu stanowi naprężeń osiowo-niesymetrycznych, który wywołany został przyłożeniem niejednorodnego pola temperatury $T(\varrho, \Theta)$ na płaszczyznach bocznych tarczy. W tym przypadku napręż-



Rys. 1

nia promieniowe, obwodowe i styczne w tarczy można określić następującymi zależnościami

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left[\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \nu \frac{u}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \Theta} \right] - \frac{1}{1-\nu} \lambda E T(\varrho, \Theta), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left[\frac{u}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \Theta} + \nu \frac{\partial u}{\partial \varrho} \right] - \frac{1}{1-\nu} \lambda E T(\varrho, \Theta), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{E}{2(1+\nu)b} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho} \right), \end{aligned}$$

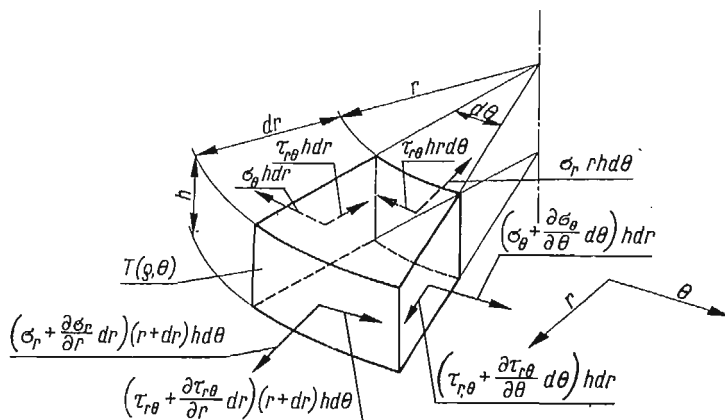
gdzie b — promień zewnętrzny tarczy,

ϱ — bezwymiarowa współrzędna biegunowa promienia $\varrho = r/b$,

Θ — współrzędna biegunowa kąta,

- u — przemieszczenie promieniowe,
 v — przemieszczenie obwodowe,
 E — moduł Younga,
 ν — współczynnik Poissona,
 λ — współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej.

Przyjmuje się, że dla rozważanego zakresu temperatury współczynniki E , ν , λ są stałe.



Rys. 2

Równania równowagi wewnętrznej tarczy mają postać (rys. 2)

$$(1.2) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \rho} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{\rho} = 0.$$

Podstawiając do równań równowagi (1.2) zależności (1.1) otrzymano dla postawionego zagadnienia układ równań różniczkowych drugiego rzędu, o pochodnych cząstkowych, wyrażony w przemieszczeniach

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} = (1+\nu)b\lambda \frac{\partial T(\rho, \theta)}{\partial \rho},$$

$$\frac{1-\nu}{2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho^2} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} = (1+\nu)b\lambda \frac{1}{\rho} \frac{\partial T(\rho, \theta)}{\partial \theta}.$$

2. Równania różniczkowe dla danego zagadnienia i ich rozwiązanie

Temperaturę $T(\rho)$ przyłożoną na wycinku tarczy $\Delta\alpha$ (rys. 1) rozłożono w szereg trygonometryczny

$$(2.1) \quad T(\rho, \theta) = \frac{\Delta\alpha}{2\pi} T(\rho) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n\Delta\alpha}{2}}{n\Delta\alpha} \cos(n\theta) \right].$$

Przy założeniu, że temperaturę $T(\varrho)$ można przedstawić w postaci wielomianu potęgowego

$$(2.2) \quad T(\varrho) = \sum_{k=0}^N T_k \varrho^{\eta k}, \quad \text{gdzie} \quad \eta k \neq m, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$m = 1, 2, 3, \dots,$$

po podstawieniu (2.2) do (2.1) otrzymano następujący rozkład temperatury w tarczy

$$(2.3) \quad T(\varrho, \Theta) = \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \sum_{k=0}^N T_k \varrho^{\eta k} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n\Delta\alpha}{2}}{n\Delta\alpha} \cos(n\Theta) \right].$$

Po zróżniczkowaniu wyrażenia (2.3), raz względem ϱ i raz względem Θ i podstawieniu do równań (1.3), otrzymano dla rozpatrywanego zagadnienia układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{u}{\varrho^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho \partial \Theta} - \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \Theta} = \\ = \beta \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n\Delta\alpha}{2}}{n\Delta\alpha} \cos(n\Theta) \right] \sum_{k=0}^N \eta k T_k \varrho^{\eta k-1}, \end{aligned}$$

(2.4)

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho^2} \right] + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2} + \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho \partial \Theta} = \\ = -2\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n\Delta\alpha}{2}}{\Delta\alpha} \sin(n\Theta) \sum_{k=0}^N T_k \varrho^{\eta k-1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\beta = \frac{(1+\nu)\lambda b \Delta\alpha}{2\pi}.$$

Rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych (2.4) przewiduje się w następującej postaci

$$(2.5) \quad u(\varrho, \Theta) = u_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\varrho) \frac{2 \sin \frac{n\Delta\alpha}{2}}{n\Delta\alpha} \cos(n\Theta),$$

$$v(\varrho, \Theta) = v_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\varrho) \frac{2 \sin \frac{n\Delta\alpha}{2}}{n\Delta\alpha} \sin(n\Theta).$$

Podstawiając przewidywane rozwiązania ogólne wyrażone równaniami (2.5) do układu równań różniczkowych (2.4) otrzymano

a) dla zagadnienia osiowo-symetrycznego — układ równań różniczkowych

$$\frac{d^2 u_0}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{du_0}{d\varrho} - \frac{u_0}{\varrho^2} = \beta \eta \sum_{k=1}^N k T_k \varrho^{\eta k - 1},$$

(2.6)

$$\frac{d^2 v_0}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dv_0}{d\varrho} - \frac{v_0}{\varrho^2} = 0,$$

którego rozwiązania ogólne mają postać

$$u_0(\varrho) = \frac{C_1}{\varrho} + C_2 \varrho + \beta \sum_{k=1}^N \frac{1}{\eta k + 2} T_k \varrho^{\eta k + 1},$$

(2.7)

$$v_0(\varrho) = \frac{C_3}{\varrho} + C_4 \varrho,$$

gdzie C_1, C_2, C_3, C_4 — stałe znajdujące z warunków brzegowych zagadnienia;

b) dla zagadnienia osiowo-niesymetrycznego — układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d^2 u_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{du_n}{d\varrho} - \left(1 + \frac{1-\nu}{2} n^2\right) \frac{u_n}{\varrho^2} + \frac{1+\nu}{2} n \frac{1}{\varrho} \frac{dv_n}{d\varrho} - \frac{3-\nu}{2} n \frac{v_n}{\varrho^2} = 2\beta n \sum_{k=0}^N k T_k \varrho^{\eta k - 1},$$

(2.8)

$$\frac{1-\nu}{2} \left[\frac{d^2 v_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dv_n}{d\varrho} - \frac{v_n}{\varrho^2} \right] - n^2 \frac{v_n}{\varrho^2} - \frac{3-\nu}{2} n \frac{u_n}{\varrho^2} - \frac{1+\nu}{2} n \frac{1}{\varrho} \frac{du_n}{d\varrho} = -2\beta n \sum_{k=0}^N T_k \varrho^{\eta k - 1}.$$

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (2.8) składa się z rozwiązania ogólnego układu równań jednorodnych oraz rozwiązania szczególnego układu pełnego.

Dla układu równań jednorodnych

$$\frac{d^2 u_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{du_n}{d\varrho} - \left(1 + \frac{1-\nu}{2} n^2\right) \frac{u_n}{\varrho^2} + \frac{1+\nu}{2} n \frac{1}{\varrho} \frac{dv_n}{d\varrho} - \frac{3-\nu}{2} n \frac{v_n}{\varrho^2} = 0,$$

(2.9)

$$\frac{1-\nu}{2} \left[\frac{d^2 v_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dv_n}{d\varrho} - \frac{v_n}{\varrho^2} \right] - n^2 \frac{v_n}{\varrho^2} - \frac{3-\nu}{2} n \frac{u_n}{\varrho^2} - \frac{1+\nu}{2} n \frac{1}{\varrho} \frac{du_n}{d\varrho} = 0,$$

rozwiązanie ma postać

$$\bar{u}_n = \sum_{l=1}^4 B_{ln} \varrho^{t_{ln}},$$

(2.10)

$$\bar{v}_n = \sum_{l=1}^4 \alpha_{ln} B_{ln} \varrho^{t_{ln}},$$

gdzie B_{ln} — stałe znajdujące z warunków brzegowych zagadnienia.

Wykładnik potęgi przy ϱ określony jest zależnością

$$(2.11) \quad t_{ln} = (-1)^{l-1} - (l^2 - 5l + 5)n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, l = 1, 2, 3, 4,$$

a współczynnik

$$(2.12) \quad \alpha_{ln} = -\frac{3-\nu+(1+\nu)[(-1)^{l-1}-(l^2-5l+5)n]}{2(1-\nu)(-1)^{l-1}(l^2-5l+5)+(1+\nu)n}.$$

Rozwiązania szczególne układu równań różniczkowych (2.8) znalezione w następującej postaci

a) dla $k = 1, 2, 3, \dots, N$ oraz $k = 0$ i $n \neq 2$

$$(2.13) \quad \begin{aligned} u_{kn}^x &= D_{kn} \varrho^{\eta k+1}, \\ v_{kn}^x &= \bar{D}_{kn} \varrho^{\eta k+1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.14) \quad \begin{aligned} D_{kn} &= \frac{2(\eta k+2)}{n^2-(\eta k+2)^2} \beta T_k, \\ \bar{D}_{kn} &= \frac{2n}{n^2-(\eta k+2)^2} \beta T_k; \end{aligned}$$

b) dla $k = 0$ i $n = 2$

$$(2.15) \quad \begin{aligned} u_{02}^x &= \left(\frac{1}{4} - \ln \varrho \right) \varrho \beta T_0, \\ v_{02}^x &= \left(\frac{1}{4} + \ln \varrho \right) \varrho \beta T_0. \end{aligned}$$

Otrzymano ostatecznie rozwiązanie ogólne układu (2.4), które jest rozwiązaniem w przemieszczeniach rozpatrywanego zagadnienia.

$$(2.16) \quad \begin{aligned} u(\varrho, \Theta) &= u_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^4 B_{ln} \varrho^{l'n} + \sum_{k=0}^N u_{kn}^x(\varrho) \right] \cos(n\Theta), \\ v(\varrho, \Theta) &= v_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^4 \alpha_{ln} B_{ln} \varrho^{l'n} + \sum_{k=0}^N v_{kn}^x(\varrho) \right] \sin(n\Theta). \end{aligned}$$

3. Naprężenia w tarczy kołowej, warunki brzegowe zagadnienia

Podstawiając do (1.1) rozwiązania w przemieszczeniach zagadnienia osiowo-symetrycznego (2.7) oraz osiowo-niesymetrycznego (2.10) i (2.13) lub (2.15) otrzymano następujące wyrażenia dla naprężeń promieniowych, obwodowych i stycznych w tarczy

$$\begin{aligned} \sigma_r(\varrho, \Theta) &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left\{ (-1+\nu) \frac{C_1}{\varrho^2} + (1+\nu) C_2 + \beta \sum_{k=1}^N \frac{\eta k+1+\nu}{\eta k+2} T_k \varrho^{\eta k} + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^4 [l'n + \nu(1+n\alpha_{ln})] B_{ln} \varrho^{l'n-1} + \sum_{k=0}^N \left[\frac{du_{kn}^x}{d\varrho} + \nu \left(\frac{u_{kn}^x}{\varrho} + n \frac{v_{kn}^x}{\varrho} \right) - 2\beta T_k \varrho^{\eta k} \right] \right] \cos(n\Theta) \right\}, \end{aligned}$$

$$(3.1) \quad \sigma_\theta(\varrho, \Theta) = \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left\{ (1-\nu) \frac{C_1}{\varrho^2} + (1+\nu) C_2 + \beta \sum_{k=1}^N \frac{\nu(\eta k+1)+1}{\eta k+2} T_k \varrho^{\eta k} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^4 (1+n\alpha_{ln} + \nu t_{ln}) B_{ln} \varrho^{l'n-1} + \sum_{k=0}^N \left(\frac{u_{kn}^x}{\varrho} + n \frac{v_{kn}^x}{\varrho} + \nu \frac{du_{kn}^x}{d\varrho} - 2\beta T_k \varrho^{\eta k} \right) \right] \cos(n\Theta) \right\}, \\ \tau_{r\theta}(\varrho, \Theta) = \frac{E}{2(1+\nu)b} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^4 [\alpha_{ln}(t_{ln}-1) - n] B_{ln} \varrho^{l'n-1} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^N \left(\frac{dv_{kn}^x}{d\varrho} - \frac{v_{kn}^x}{\varrho} - n \frac{u_{kn}^x}{\varrho} \right) \right] \sin(n\Theta).$$

Obliczenia wykonano dla tarczy pełnej pod wpływem przyłożonego impulsu o stałej temperaturze $T(\varrho) = T_0$ (dla $k = 0$). Uwzględniając warunki ciągłości odkształceń w środku tarczy dla $\varrho = 0$, z rozwiązań w przemieszczeniach (2.16) otrzymano $C_1 = 0$, $B_{1n} = 0$, $B_{4n} = 0$.

Warunki brzegowe postawionego zagadnienia mają postać

$$(3.2) \quad [\sigma_r(\varrho, \Theta)]_{\varrho=1} = 0, \\ [\tau_{r\theta}(\varrho, \Theta)]_{\varrho=1} = 0;$$

otrzymano stąd

- a) dla zagadnienia osiowo-symetrycznego — $C_2 = 0$
b) dla zagadnienia osiowo-niesymetrycznego — układ równań

$$(3.3) \quad \sum_{l=2}^3 [t_{ln} + \nu(1+n\alpha_{ln}) B_{ln} + P_{0n}^{(1)}(1)] = 0, \\ \sum_{l=2}^3 [\alpha_{ln}(t_{ln}-1) - n] B_{ln} + P_{0n}^{(3)}(1) = 0;$$

wprowadzono tutaj oznaczenia

$$(3.4) \quad P_{kn}^{(1)}(\varrho) = \frac{du_{kn}^x}{d\varrho} + \nu \left(\frac{u_{kn}^x}{\varrho} + n \frac{v_{kn}^x}{\varrho} \right) - 2\beta T_k \varrho^{\eta k}, \\ P_{kn}^{(2)}(\varrho) = \frac{u_{kn}^x}{\varrho} + n \frac{v_{kn}^x}{\varrho} + \nu \frac{du_{kn}^x}{d\varrho} - 2\beta T_k \varrho^{\eta k}, \\ P_{kn}^{(3)}(\varrho) = \frac{dv_{kn}^x}{d\varrho} - \frac{v_{kn}^x}{\varrho} - n \frac{u_{kn}^x}{\varrho}.$$

Przyjmując $\nu = 0,3$ rozwiązano układ równań (3.3).

Dla $n \neq 2$ otrzymujemy

$$(3.5.1) \quad B_{2n} = \frac{1}{3,5} \frac{(3,5n^2 + 3,5n - 40)n}{(n-1)(n^2-4)}, \\ B_{3n} = \frac{0,8}{3,64} \frac{(1,4 - 1,3n)(3,5n^2 + 3,5n - 33)}{(n+1)(n^2-4)};$$

dla $n = 2$

$$(3.5.2) \quad B_{22} = \frac{10,1}{2,8}, \quad B_{32} = -\frac{4,7}{9,1}.$$

Ostatecznie rozwiązania dla naprężeń mają postać

dla $n \neq 2$

$$\frac{\sigma'_r(\varrho, \Theta)}{E\lambda T} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3,5\pi n(n^2-4)} [n(3,5n^2+3,5n-40)\varrho^{-2+n} - (n-2)(3,5n^2+3,5n-33)\varrho^n - 7n^2+66] \sin\left(\frac{n\Delta\alpha}{2}\right) \cos(n\Theta);$$

dla $n = 2$

$$(3.6) \quad \frac{\sigma''_r(\varrho, \Theta)}{E\lambda T} = -\frac{1}{2\pi} \ln \varrho \sin \Delta\alpha \cos(2\Theta);$$

dla $n \neq 2$

$$\frac{\sigma'_\theta(\varrho, \Theta)}{E\lambda T} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3,5\pi n(n^2-4)} [-n(3,5n^2+3,5n-40)\varrho^{-2+n} + (n+2)(3,5n^2+3,5n-33)\varrho^n + 66] \sin\left(\frac{n\Delta\alpha}{2}\right) \cos(n\Theta);$$

dla $n = 2$

$$\frac{\sigma''_\theta(\varrho, \Theta)}{E\lambda T} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4,7}{0,7} \varrho^2 + \ln \varrho - \frac{4}{0,7} \right) \sin(\Delta\alpha) \cos(2\Theta);$$

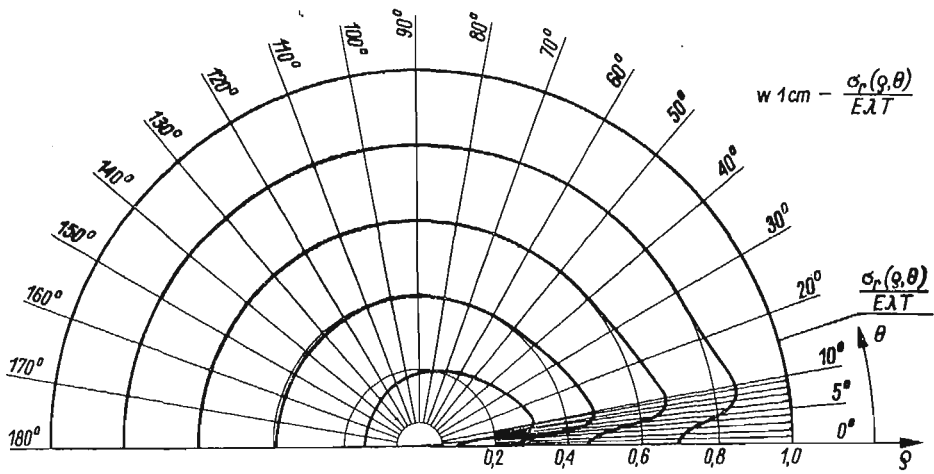
dla $n \neq 2$

$$\frac{\tau'_{r\theta}(\varrho, \Theta)}{E\lambda T} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3,5(n^2-4)} [-(3,5n^2+3,5n-40)\varrho^{-2+n} + (3,5n^2+3,5n-33)\varrho^n - 7] \sin\left(\frac{n\Delta\alpha}{2}\right) \sin(n\Theta);$$

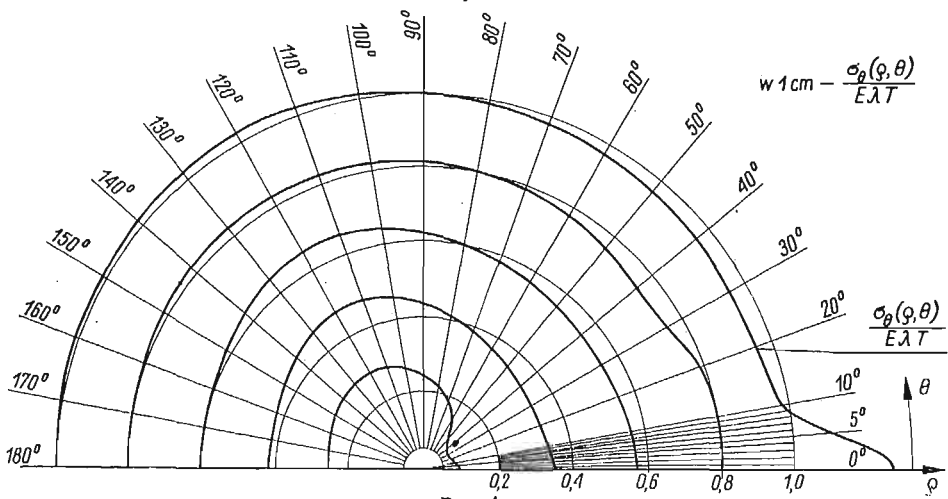
dla $n = 2$

$$\frac{\tau''_{r\theta}(\varrho, \Theta)}{E\lambda T} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{10,1}{2,8} (\varrho^2-1) + \ln \varrho \right] \sin(\Delta\alpha) \sin(2\Theta).$$

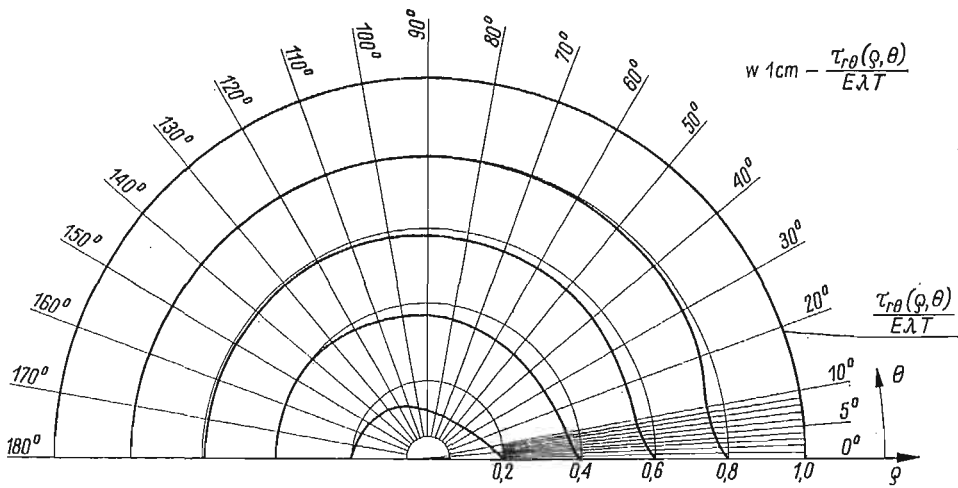
Rozkłady naprężeń w wykonanym przykładzie liczbowym dla wycinka tarczy o kącie wierzchołkowym $\Delta\alpha = \pi/18$ pokazano dla naprężeń promieniowych na rys. 3, obwodowych na rys. 4 i stycznych na rys. 5. Obliczenia przykładu ilustrującego podaną metodę wykonano na elektronicznej maszynie cyfrowej ZAM2.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Literatura cytowana w tekście

1. *Proczność i deformacja w nierównomiernych temperaturnych polach*, MIFI Moskwa, 1962, (praca zbiorowa).
2. B. E. GATEWOOD, *Temperaturnyje naprjażenia*, IIL, Moskwa 1959.
3. B. SHARMA, *Thermal stress in infinites elastic discs*, J. Appl. Mech., 23, (1956), 4, 527.
4. J. WEINER, *An elastoplastic thermal — stress analysis of free plate*, J. Appl. Mech., 23, (1956), 3, 395.
5. D. W., WAJNBURG, O. M. RUBACZ, *Konstruktivno ortotropni krugli plastini*, Izd. A. N. USSR, Kijów 1959.

Резюме

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ДИСКЕ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ, ВЫЗВАННЫЕ ТЕПЛОВЫМ ИМПУЛЬСОМ ПРИЛОЖЕННЫМ К СЕКТОРУ ДИСКА

В работе даются общие дифференциальные уравнения, описывающие перемещения в круговом диске постоянной толщины нагруженном тепловым импульсом $T(\varrho, \Theta)$ приложенным к сектору с углом раствора $\Delta\alpha$.

Решения дифференциальных уравнений для перемещений и, затем, для напряжений получены в виде бесконечных рядов. В решенном численном примере температура сектора принята постоянной $T(\varrho) = \text{const}$.

Summary

STATE OF STRESS AND STRAIN IN A CIRCULAR DISC OF CONSTANT THICKNESS DUE TO THERMAL NUCLEUS IN A SECTOR OF THE DISC

General system of displacement differential equations are given governing the problem of a circular disc of constant thickness, loaded by the nucleus of thermoelastic strain $T(\varrho, \Theta)$, applied on the sector of the disc with the vertex angle $\Delta\alpha$. The solution of the differential equations, the displacements and stresses acting in the disc, are expressed in the form of infinite series. In the numerical example, the temperature of the sector is assumed to be constant $T(\varrho) = \text{const}$.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 stycznia 1968 r.

WYTRZYMAŁOŚĆ PŁYTY KOŁOWEJ JEDNOSTRONNIE UŻEBROWANEJ
PODDANEJ ANTYSYMETRYCZNYM ZGINANIU

ANDRZEJ MŁOTKOWSKI (ŁÓDŹ)

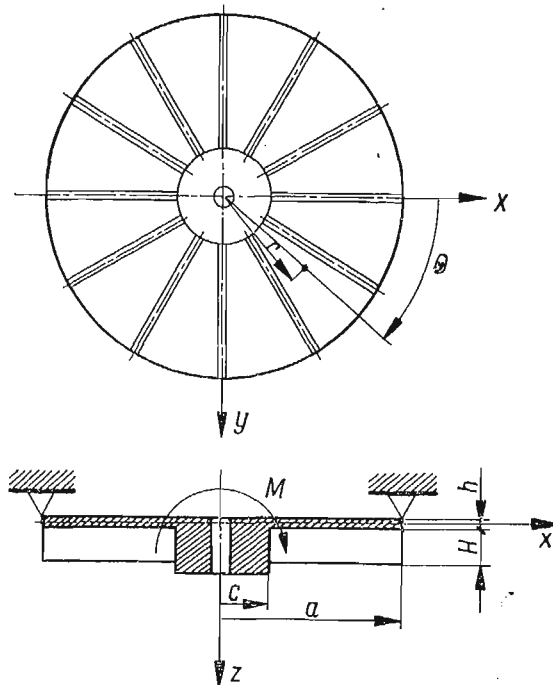
Ważniejsze oznaczenia

- $A_1 \div A_8$ stałe,
 a promień zewnętrzny płyty,
 $B_1 \div B_8$ stałe,
 b grubość żebra,
 b_0 grubość żebra na promieniu zewnętrznym,
 $C_1 \div C_8$ stałe,
 c promień wewnętrzny płyty,
 D_0 sztywność obwodowa płyty,
 D_r sztywność promieniowa płyty,
 E moduł Younga,
 F powierzchnia przekroju poprzecznego żebra przypadająca na jednostkę obwodu płyty,
 F_1 współczynnik,
 G moduł sprężystości postaciowej,
 H_c wysokość żebra na promieniu wewnętrznym,
 h grubość płyty,
 I moment bezwładności przekroju żebra przypadający na jednostkę obwodu płyty,
 M moment obciążający,
 M_r moment gnący promieniowy przypadający na jednostkę obwodu płyty,
 M_θ moment gnący obwodowy przypadający na jednostkę promienia,
 $M_{r\theta}$ moment skręcający,
 N_r siła promieniowa przypadająca na jednostkę obwodu płyty,
 N_θ siła obwodowa przypadająca na jednostkę promienia,
 n liczba żeber,
 Q_r, Q_θ siły tnące — promieniowe i obwodowe,
 r promień biegnący płyty,
 S iloczyn modułu Younga i momentu statycznego żebra względem płaszczyzny środkowej przypadający na jednostkę obwodu płyty,
 T siła styczna (położona w płaszczyźnie środkowej płyty),
 U_0 przemieszczenie promieniowe płaszczyzny środkowej płyty zależne od promienia,
 u przemieszczenie promieniowe,
 u_0 przemieszczenie promieniowe płaszczyzny środkowej płyty,
 V_0 przemieszczenie obwodowe płaszczyzny środkowej płyty zależne od promienia,
 v przemieszczenie obwodowe,
 v_0 przemieszczenie obwodowe płaszczyzny środkowej płyty,
 W ugięcie płyty zależne tylko od promienia,

- w ugięcie płyty,
 z współrzędna określająca odległość rozpatrywanego punktu od płaszczyzny środkowej,
 $\alpha_1 \div \alpha_8$ stałe,
 β współczynnik,
 $\gamma_{r\theta}$ kąt odkształcenia postaciowego,
 ε_r odkształcenie promieniowe,
 ε_θ odkształcenie obwodowe,
 Θ współrzędna kątowa rozpatrywanego punktu,
 ν liczba Poissona,
 $\varrho = r/a$ promień bezwymiarowy,
 σ_r naprężenie promieniowe w płycie,
 $\bar{\sigma}_r$ naprężenie w żebrze,
 σ_θ naprężenie obwodowe w płycie,
 $\tau_{r\theta}$ naprężenie styczne w płycie.

1. Wstęp

Rozpatrywane płyty kołowe wzmocnione żebrami promieniowymi i obciążone w sposób podany na rys. 1 spotykane są w szeregu konstrukcji maszynowych, jak np.: dna bębnow linowych, młynów kulowych czy bębnow suszarek.

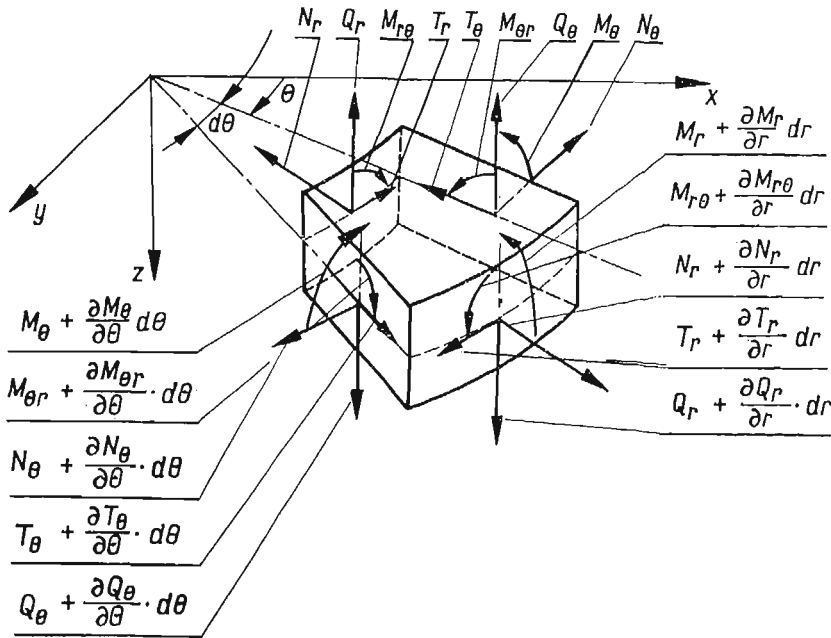


Rys. 1

Jeżeli płyta wzmocniona jest gęsto rozstawionymi żebrami, można traktować ją jako ortotropową (ortotropia konstrukcyjna). Promieniowa sztywność zginania płyty w ogólnym przypadku jest zmienna wzdłuż promienia i znacznie większa niż sztywność w kierunku obwodowym.

Kołowymi płytami uźebrowanymi zajmowało się szereg autorów, między innymi: WAINBERG [1, 2], DOŁGOW [3], RUBAC [4, 5], DUCHOWNYJ [6, 7, 8]. Rozpatrywali oni płyty kołowe z żebrami promieniowymi obciążone symetrycznie. Rozpatrywane w niniejszej pracy obciążenie należy do klasy obciążeń antysymetrycznych. Płyty izotropowe obciążone parą sił przyłożoną, jak na rys. 1, były przedmiotem rozważań KOWALENKI [9] i TIMOSHENKI [10].

W pracy [11] obliczono odkształcenia i naprężenia w płycie uźebrowanej symetrycznie po obu stronach płaszczyzny środkowej.



Rys. 2

Celem niniejszej pracy jest obliczenie naprężeń i odkształceń w płycie kołowej osiowo symetrycznej wzmocnionej żebrami po jednej stronie płaszczyzny środkowej i obciążonej, jak na rys. 1. Przy takim wzmocnieniu powierzchnia środkowa płyty nie jest powierzchnią obojętną. Przyjęto, iż żebro pracuje w jednokierunkowym stanie naprężenia. Jeżeli żebra są wysokie i cienkie, założenie takie jest słuszne, przy czym dodatkowo można pominąć wpływ skręcania żeber. Właściwa płyta znajduje się w dwukierunkowym stanie naprężenia.

2. Podstawowy układ równań różniczkowych

Wydzielmy z uźebrowanej płyty element określony promieniem r i kątem θ (rys. 2) Siły i momenty wewnętrzne działające na ten element sprowadźmy do środkowej powierzchni płyty. Jeśli pominąć sztywność zginania żeber w kierunku obwodowym oraz ich sztywność skręcania, wówczas $T_r = T_\theta = T$, $M_{r\theta} = M_{\theta r}$.

Równania równowagi dla tego elementu przyjmą postać

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2(M,r)}{\partial r^2} - \frac{\partial M_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \Theta^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2(M,r)}{\partial r \partial \Theta} &= 0, \\ \frac{\partial(N,r)}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial \Theta} - N_\theta &= 0, \quad \frac{2T}{r} + \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \Theta} = 0. \end{aligned}$$

Założmy, że proste normalne do powierzchni środkowej płyty po odkształceniu pozostają normalnymi do odkształconej powierzchni środkowej i ulegają jedynie obrotowi i przesunięciu. Ponadto przyjęto, że przemieszczenie w kierunku osi z wszystkich punktów leżących na normalnej do powierzchni środkowej płyty są jednakowe. Stąd przemieszczenia w kierunku promieniowym, obwodowym oraz ugięcia wyrażą się zależnościami

$$(2.2) \quad u = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial r}, \quad v = v_0 - \frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial \Theta}, \quad w = w_0,$$

gdzie u_0 , v_0 , w_0 — przemieszczenie w kierunku promieniowym, obwodowym i ugięcie środkowej powierzchni płyty.

Odształcenia względne wyrażają się w sposób następujący:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u_0}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \Theta} + \frac{u}{r} = \frac{1}{r} \left(u_0 - z \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{z}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial v_0}{\partial \Theta} \right), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta} = 2 \frac{z}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \Theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \Theta} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \Theta} - \frac{v_0}{r} + \frac{\partial v_2}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Zgodnie z uogólnionym prawem Hooke'a dla dwukierunkowego stanu naprężenia zależności między odkształceniami i naprężeniami dla płyty mają postać

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r), \\ \tau_{r\theta} &= G \gamma_{r\theta}; \end{aligned}$$

zaś dla żebra założono jednokierunkowy stan naprężenia

$$(2.5) \quad \bar{\sigma}_r = \varepsilon_r E.$$

Przyjęto przy tym, że płyta i żebra są wykonane z tego samego materiału.

Po podstawieniu (2.3) do (2.4) otrzymano

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{u_0}{r} + \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \Theta} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} \right) \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u_0}{r} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \Theta} - z \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta} = 2Gz \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \Theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \Theta} \right) + G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \Theta} - \frac{v_0}{r} + \frac{\partial v_0}{\partial r} \right),$$

$$\bar{\sigma}_r = E \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right).$$

Momenty gnące i siły występujące w równaniach (2.1) otrzymujemy z zależności

$$(2.7) \quad M_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r z dz + \int_F \bar{\sigma}_r z dF,$$

$$M_\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta z dz,$$

$$M_{r\theta} = - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{r\theta} z dz,$$

$$N_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r dz + \int_F \bar{\sigma}_r dF,$$

$$N_\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta dz,$$

$$T = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{r\theta} dz,$$

gdzie F oznacza powierzchnię przekroju poprzecznego żebra przypadającego na jednostkę długości przekroju $r = \text{const}$. Wyznaczone wyżej siły wewnętrzne i momenty odniesione są do jednostki długości odpowiednich przekrojów płyty.

Po podstawieniu zależności (2.6) do równań (2.7) otrzymano

$$M_r = - \left(D_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{D_0 \nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{D_0 \nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} \right) + S \frac{\partial u_0}{\partial r},$$

$$M_\theta = -D_0 \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} \right),$$

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad M_{r\theta} &= -(1-\nu)D_0 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \Theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \Theta} \right), \\
 N_r &= 2\beta \frac{\nu}{r} \left(u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial \Theta} \right) + F_1 \frac{\partial u_0}{\partial r} - S \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \\
 N_\theta &= 2\beta \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \Theta} \right), \\
 T &= (1-\nu)\beta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \Theta} - \frac{v_0}{r} + \frac{\partial v_0}{\partial r} \right),
 \end{aligned}$$

gdzie D_0 — sztywność płytowa w kierunku obwodowym, D_r — sztywność płytowa w kierunku promieniowym, $S = E \int_F z dF$ — iloczyn modułu Younga i momentu statycznego żebra względem płaszczyzny środkowej odniesionego do jednostki długości przekroju $r = \text{const}$, β , F_1 — współczynniki.

Powyzsze wielkości określone są następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad D_0 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \\
 D_r &= D_0 + EI = D_0 + E \left[\frac{bH^3}{12} + bH \left(\frac{H+h}{2} \right)^2 \right] \frac{n}{2\pi r}, \\
 S &= EbH \left(\frac{H+h}{2} \right) \frac{n}{2\pi r}, \\
 F_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} + EF = \frac{Eh}{1-\nu^2} + EbH \frac{n}{2\pi r}, \\
 \beta &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}.
 \end{aligned}$$

Wprowadzono ponadto oznaczenie na bezwymiarowy promień

$$(2.10) \quad \varrho = \frac{r}{a}.$$

Przemieszczenia w , u_0 , v_0 będące funkcją promienia r i kąta Θ można w rozpatrywanym przypadku obciążenia antysymetrycznego przyjąć w postaci

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad w &= W \cos \Theta, \\
 u_0 &= U_0 \cos \Theta, \\
 v_0 &= V_0 \sin \Theta,
 \end{aligned}$$

przy czym W , U_0 , V_0 są funkcjami tylko zmiennej r .

Po podstawieniu (2.11) do (2.8) otrzymujemy wyrażenia na momenty i siły wewnętrzne w postaci następującej:

$$M_r = -\frac{\cos \Theta}{a^2} \left[D_r \frac{d^2 W}{d\varrho^2} + D_0 \frac{\nu}{\varrho} \frac{dW}{d\varrho} - \frac{\nu D_0}{\varrho^2} W - Sa \frac{dU_0}{d\varrho} \right],$$

$$\begin{aligned}
 M_\theta &= -\frac{D_0 \cos \Theta}{a^2} \left[\nu \frac{d^2 W}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dW}{d\varrho} - \frac{W}{\varrho^2} \right], \\
 M_{r\theta} &= \frac{(1-\nu)D_0 \sin \Theta}{a^2} \left[\frac{W}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{dW}{d\varrho} \right], \\
 N_r &= \frac{\cos \Theta}{a} \left[2\beta\nu \left(\frac{U_0}{\varrho} + \frac{V_0}{\varrho} \right) + F_1 \frac{dU_0}{d\varrho} - \frac{S}{a} \frac{d^2 W}{d\varrho^2} \right], \\
 N_\theta &= 2\beta \frac{\cos \Theta}{a} \left(\frac{U_0}{\varrho} + \nu \frac{dU_0}{d\varrho} + \frac{V_0}{\varrho} \right), \\
 T &= (1-\nu)\beta \frac{\sin \Theta}{a} \left(-\frac{U_0}{\varrho} - \frac{V_0}{\varrho} + \frac{dV_0}{d\varrho} \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Na podstawie wzorów (2.6), (2.11) naprężenia określone są następująco:
naprężenia promieniowe w płycie

$$\sigma_r = \frac{E \cos \Theta}{(1-\nu^2)a} \left[\frac{\nu}{\varrho} (U_0 + V_0) + \frac{dU_0}{d\varrho} - \frac{z}{a} \left(\frac{d^2 W}{d\varrho^2} + \frac{\nu}{\varrho} \frac{dW}{d\varrho} - \frac{\nu}{\varrho^2} W \right) \right],
 \tag{2.13.1}$$

naprężenie w żebrze

$$\sigma_r = E \cos \Theta \left[\frac{1}{a} \frac{dU_0}{d\varrho} - \frac{z}{a^2} \frac{d^2 W}{d\varrho^2} \right],
 \tag{2.13.2}$$

naprężenie obwodowe i styczne w płycie

$$\begin{aligned}
 \sigma_\theta &= \frac{E \cos \Theta}{(1-\nu^2)a} \left[\frac{1}{\varrho} (U_0 + V_0) + \nu \frac{dU_0}{d\varrho} - \frac{z}{a} \left(\nu \frac{d^2 W}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dW}{d\varrho} - \frac{W}{\varrho^2} \right) \right], \\
 \tau_{r\theta} &= \frac{E \sin \Theta}{2(1+\nu)a} \left[-\frac{2z}{a} \frac{W}{\varrho^2} + \frac{2z}{a\varrho} \frac{dW}{d\varrho} - \frac{(U_0 + V_0)}{\varrho} + \frac{dV_0}{d\varrho} \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.13.3}$$

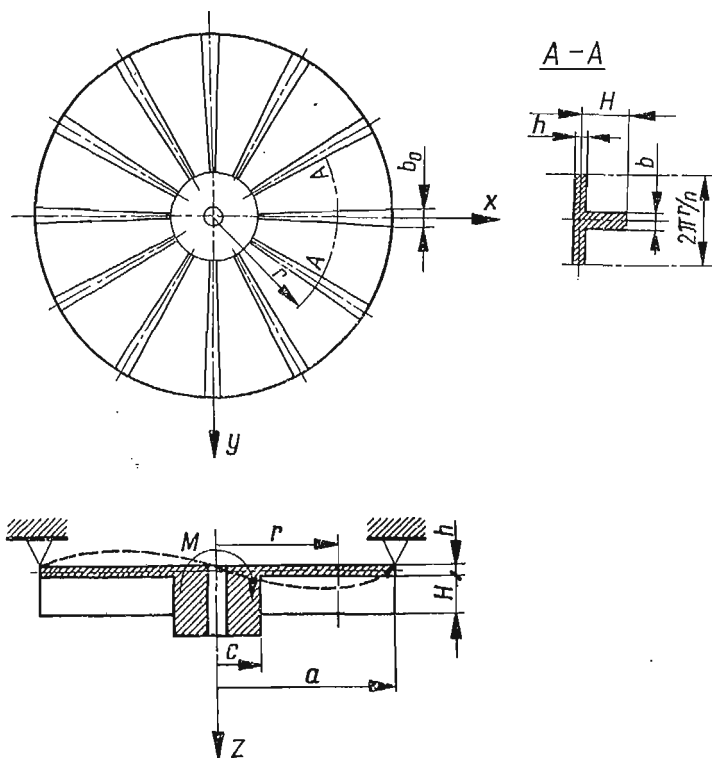
Podstawiając wzory (2.12) do równań równowagi (2.1) otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych dla niewiadomych funkcji W , U_0 , V_0 zmiennej ϱ .

$$\begin{aligned}
 &D_r \varrho^4 \frac{d^4 W}{d\varrho^4} + 2 \left(D_r \varrho^3 + \frac{dD_r}{d\varrho} \varrho^4 \right) \frac{d^3 W}{d\varrho^3} + \left(\frac{d^2 D_r}{d\varrho^2} \varrho^4 + 2\varrho^3 \frac{dD_r}{d\varrho} - 3D_0 \varrho^2 \right) \frac{d^2 W}{d\varrho^2} + \\
 &+ 3D_0 \varrho \frac{dW}{d\varrho} - 3D_0 W - Sa\varrho^4 \frac{d^3 U_0}{d\varrho^3} - 2a \left(S\varrho^3 + \frac{dS}{d\varrho} \varrho^4 \right) \frac{d^2 U_0}{d\varrho^2} - a \left(\frac{d^2 S}{d\varrho^2} \varrho^4 + 2\varrho^3 \frac{dS}{d\varrho} \right) \frac{dU_0}{d\varrho} = 0, \\
 &F_1 \varrho^3 \frac{d^2 U_0}{d\varrho^2} + \left(F_1 \varrho^2 + \varrho^3 \frac{dF_1}{d\varrho} \right) \frac{dU_0}{d\varrho} - (3-\nu)\beta\varrho U_0 + \\
 &+ (1+\nu)\beta\varrho^2 \frac{dV_0}{d\varrho} - (3-\nu)\beta\varrho V_0 - \frac{S}{a} \varrho^3 \frac{d^3 W}{d\varrho^3} - \frac{1}{a} \left(\frac{dS}{d\varrho} \varrho^3 + S\varrho^2 \right) \frac{d^2 W}{d\varrho^2} = 0, \\
 &(1+\nu)\varrho^2 \frac{dU_0}{d\varrho} + (3-\nu)\varrho U_0 - (1-\nu)\varrho^3 \frac{d^2 V_0}{d\varrho^2} - (1-\nu)\varrho^2 \frac{dV_0}{d\varrho} + (3-\nu)\varrho^3 V_0 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Współczynniki występujące w tych równaniach różniczkowych w ogólnym przypadku są pewnymi funkcjami promienia ϱ .

3. Przypadek płyty o stałej sztywności zginania w kierunku promieniowym

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (2.14) jest prostsze jeśli przyjąć płytę wzmocnioną żebrami o specjalnym kształcie takim, by sztywność w kierunku promieniowym D_r oraz wielkości S i F_1 były stałe.



Rys. 3

Rozpatrzmy płytę o stałej grubości h wzmocnioną żebrami o stałej wysokości H i grubości zwiększającej się proporcjonalnie do promienia $r = a\varrho$.

Grubość żebra zmienia się wówczas wg zależności

$$(3.1) \quad b = b_0 \frac{r}{a} = b_0 \varrho.$$

Pole, moment statyczny oraz moment bezwładności przekroju poprzecznego żebra odniesione do jednostki długości obwodu określają następujące wzory:

$$(3.2) \quad F = \frac{bHn}{2\pi r} = \frac{b_0 Hn}{2\pi a} = \text{const},$$

$$S = EF \frac{H+h}{2} = \frac{Eb_0 Hn}{4\pi a} (H+h) = \text{const},$$

$$I = \left[\frac{bH^3}{12} + bH \left(\frac{H+h}{2} \right)^2 \right] \frac{n}{2\pi r} = \frac{b_0 Hn}{8\pi a} \left[\frac{H^2}{3} + (H+h)^2 \right] = \text{const}.$$

Sztywności płytowe w kierunku promieniowym i obwodowym wynoszą

$$(3.3) \quad D_r = D_0 + \frac{Eb_0 H n}{8\pi a} \frac{H^2}{3} + (H+h)^2 = \text{const},$$

Po podstawieniu tych zależności do równań różniczkowych (2.14) otrzymujemy

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & D_r \varrho^4 \frac{d^4 W}{d\varrho^4} + 2D_r \varrho^3 \frac{d^3 W}{d\varrho^3} - 3D_0 \varrho^2 \frac{d^2 W}{d\varrho^2} + 3D_0 \varrho \frac{dW}{d\varrho} - 3D_0 W + \\ & - Sa\varrho^4 \frac{d^3 U_0}{d\varrho^3} - 2Sa\varrho^3 \frac{d^2 U_0}{d\varrho^2} = 0, \\ & - \frac{S}{a} \varrho^3 \frac{d^3 W}{d\varrho^3} - \frac{S}{a} \varrho^2 \frac{d^2 W}{d\varrho^2} + F_1 \varrho^3 \frac{d^2 U_0}{d\varrho^2} + F_1 \varrho^2 \frac{dU_0}{d\varrho} + \\ & - (3-\nu) \beta \varrho U_0 + (1+\nu) \beta \varrho^2 \frac{dV_0}{d\varrho} - (3-\nu) \beta \varrho V_0 = 0, \\ & (1+\nu) \varrho^2 \frac{dU_0}{d\varrho^2} + (3-\nu) \varrho U_0 - (1-\nu) \varrho^3 \frac{d^2 V_0}{d\varrho^2} - (1-\nu) \varrho^2 \frac{dV_0}{d\varrho} - (3-\nu) \varrho V_0 = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.5) \quad F_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} + \frac{Eb_0 H n}{2\pi a}.$$

Rozwiązań powyższych równań różniczkowych będziemy poszukiwali w postaci

$$(3.6) \quad \begin{aligned} W &= A\varrho^{\alpha+1}, \\ U_0 &= B\varrho^\alpha, \\ V_0 &= C\varrho^\alpha, \end{aligned}$$

gdzie A, B, C oraz α oznaczają pewne stałe.

Po wstawieniu tych rozwiązań do równań różniczkowych (3.4) otrzymano:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & [D_r \alpha^2 (\alpha^2 - 1) - 3D_0 \alpha^2] A - Sa\alpha^2 (\alpha - 1) B = 0, \\ & - \frac{S}{a} \alpha^2 (\alpha + 1) A + [(1+\nu)\alpha + (3-\nu)] B + [(1+\nu)\beta\alpha - (3-\nu)\beta] C = 0, \\ & [(1+\nu)\alpha + (3-\nu)] B - [(1-\nu)\alpha^2 - (3-\nu)] C = 0. \end{aligned}$$

Aby powyższe równania miały dla A, B i C rozwiązania niezerowe, wyznacznik charakterystyczny musi równać się zero. Stąd wynika następujące równanie służące do wyznaczenia parametru α

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \alpha^4 \{ (1-\nu)(S^2 - F_1 D_r) \alpha^4 + [(1-\nu)(F_1 D_r + 3D_0 F) + (3-\nu)(1-\nu)\beta D_r + \\ & - (1+\nu)^2 \beta D_r + (3-\nu) F_1 D_r - 2(2-\nu) S^2] \alpha^2 - [(3-\nu)(1-\nu) - (1+\nu)^2] (\beta D_r + \\ & + 3\beta D_0) - (3-\nu)(F_1 D_r + 3F_1 D_0 - S^2) \} = 0. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc równanie ósmego stopnia. Cztery pierwiastki tego równania wynoszą

$$(3.9) \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

zaś pozostałe pierwiastki $\alpha_5 \div \alpha_8$ wynikają z rozwiązania równania dwukwadratowego znajdującego się wewnątrz nawiasu klamrowego w równaniu (3.8). Istnieje zatem pięć różnych rozwiązań typu (3.6). Między stałymi A_i , B_i , C_i istnieją związki wynikające z równań (3.7). Gdy α_i jest równe jednemu z pierwiastków równania (3.8), wówczas związki (3.7) są liniowo zależne.

Podstawiając do pierwszego i trzeciego równania (3.7) $\alpha = \alpha_i$ znajdujemy

$$(3.10) \quad \begin{aligned} B_i &= p_i A_i, \\ C_i &= q_i B_i = p_i q_i A_i. \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.11) \quad \begin{aligned} p_i &= \frac{\alpha_i^2 [D_r (\alpha_i^2 - 1) - 3D_0]}{\alpha_i^2 [Sa (\alpha_i - 1)]}, \\ q_i &= \frac{(1 + \nu)\alpha_i + (3 - \nu)}{(1 - \nu)\alpha_i^2 - (3 - \nu)}. \end{aligned}$$

Drugie równanie układu (3.7) jest spełnione tożsamościowo. Ponieważ dla pierwszego z równań (3.7) $\alpha_i = 0$ jest rozwiązaniem trywialnym, przeto zależności (3.10), (3.11) między stałymi A_i , B_i , C_i dla tego przypadku nie obowiązują.

Dla przypadku, gdy $\alpha_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) przyjęto następujące rozwiązania:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} W &= A_1 \varrho + A_2 \varrho \ln \varrho + A_3 \varrho \ln^2 \varrho + A_4 \varrho \ln^3 \varrho, \\ U_0 &= B_1 + B_2 \ln \varrho + B_3 \varrho + B_4 \ln^2 \varrho, \\ V_0 &= C_1 + C_2 \ln \varrho + C_3 \varrho + C_4 \ln^2 \varrho. \end{aligned}$$

Po podstawieniu powyższych rozwiązań do układu równań (2.4) stwierdzono, że układ spełniony będzie wówczas gdy

$$(3.13) \quad \begin{aligned} B_3 &= C_3 = B_4 = C_4 = 0, \\ C_1 &= -B_1 + \left(\frac{1 + \nu}{3 - \nu} \right) B_2, \\ C_2 &= -B_2. \end{aligned}$$

Stałe B_1 i B_2 zależą od C_1 i C_2 , natomiast są niezależne od stałych A_1 i A_2 . Poczwoórnemu pierwiastkowi $\alpha_i = 0$ równania (3.8) odpowiada więc rozwiązanie, w którym występują cztery niezależne stałe A_1 , A_2 , B_1 , B_2 .

W rozwiązaniu ogólnym (3.6) układu równań różniczkowych (3.4) występuje więc ogółem osiem stałych dowolnych A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , A_5 , A_6 , A_7 , A_8 . Wspomniane rozwiązanie ogólne ma następującą postać:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} W &= A_1 \varrho + A_2 \varrho \ln \varrho + \sum_{i=5}^8 A_i \varrho^{\alpha_i + 1}, \\ U_0 &= B_1 + B_2 \ln \varrho + \sum_{i=5}^8 p_i A_i \varrho^{\alpha_i}, \\ V_0 &= -B_1 - \left(\frac{1 + \nu}{3 - \nu} + \ln \varrho \right) B_2 + \sum_{i=5}^8 p_i q_i A_i \varrho^{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Przemieszczenia poszczególnych punktów powierzchni środkowej płyty obliczamy uwzględniając (2.11), wówczas:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} w &= \left[A_1 \varrho + A_2 \varrho \ln \varrho + \sum_{i=5}^8 A_i \varrho^{\alpha_i+1} \right] \cos \Theta, \\ u_0 &= \left[B_1 + B_2 \ln \varrho + \sum_{i=5}^8 p_i A_i \varrho^{\alpha_i} \right] \cos \Theta, \\ v_0 &= \left[-B_1 - \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} + \ln \varrho \right) B_2 + \sum_{i=5}^8 p_i q_i A_i \varrho^{\alpha_i} \right] \sin \Theta. \end{aligned}$$

Stałe występujące w powyższych wzorach możemy wyznaczyć z warunków brzegowych. Po uwzględnieniu (3.14) wzory (2.12) przyjmą postać

$$(3.16) \quad \begin{aligned} M_r &= -\frac{\cos \Theta}{\varrho a^2} \left\{ (D_r + D_0 \nu) A_2 - S a B_2 + \sum_{i=5}^8 [D_r \alpha_i^2 + (D_r + D_0 \nu - S a p_i) \alpha_i] \varrho^{\alpha_i} A_i \right\}, \\ M_\theta &= -\frac{D_0 \cos \Theta}{\varrho a^2} \left\{ (1 + \nu) A_2 + \sum_{i=5}^8 [\nu \alpha_i^2 + (1 + \nu) \alpha_i] \varrho^{\alpha_i} A_i \right\}, \\ M_{r,\theta} &= \frac{(1 - \nu) D_0}{\varrho a^2} \sin \Theta \left\{ -A_2 - \sum_{i=5}^8 \alpha_i \varrho^{\alpha_i} A_i \right\}, \\ N_r &= \frac{\cos \Theta}{\varrho a} \left\{ -\frac{S}{a} A_2 + \left(F_1 - 2\beta \nu \frac{1 + \nu}{3 - \nu} \right) B_2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=5}^8 \left[2\beta \nu p_i (1 + q_i) + \left(F_1 p_i - \frac{S}{a} (\alpha_i + 1) \right) \alpha_i \right] \varrho^{\alpha_i} A_i \right\}, \\ N_\theta &= \frac{2\beta \cos \Theta}{\varrho a} \left\{ -\frac{(1 - \nu)^2}{3 - \nu} A_2 + \sum_{i=5}^8 p_i (1 + \nu \alpha_i + q_i) \varrho^{\alpha_i} A_i \right\}, \\ T &= \frac{(1 - \nu) \beta}{\varrho a} \sin \Theta \left\{ -\frac{2(1 - \nu)}{3 - \nu} B_2 + \sum_{i=5}^8 p_i [-(1 + q_i) + q_i \alpha_i] \varrho^{\alpha_i} A_i \right\}. \end{aligned}$$

4. Warunki brzegowe dla płyty podpartej przegubowo na obwodzie zewnętrznym i mającej sztywną piastę w środku

Dla płyty podpartej przegubowo na obwodzie zewnętrznym ugięcie, moment gnący promieniowy, siły normalne i styczne dla $r = a$, czyli $\varrho = 1$ muszą równać się zeru. Stąd warunki

$$(4.1.1) \quad (w)_{\varrho=1} = 0,$$

$$(4.1.2) \quad (M_r)_{\varrho=1} = 0,$$

$$(4.1.3) \quad (N_r)_{\varrho=1} = 0,$$

$$(4.1.4) \quad (T)_{\varrho=1} = 0.$$

Z kolei na obwodzie wewnętrznym $\varrho = \varrho_0 = a/c$ przy założeniu, że piasta jest nieodkształcalna, a ugięcia małe

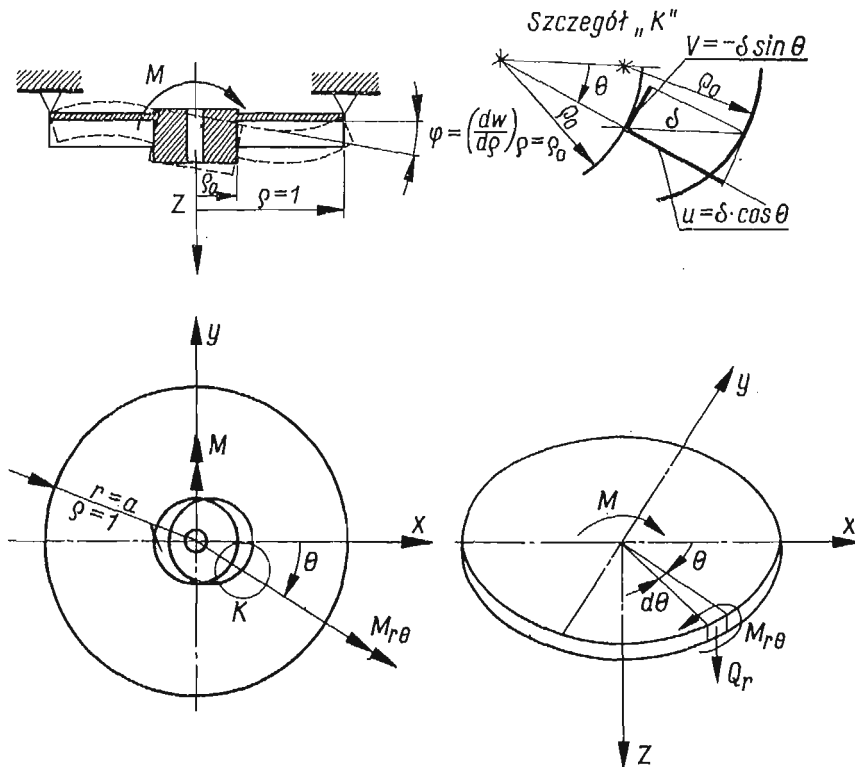
$$(4.1.5) \quad (w)_{\varrho=\varrho_0} = \varrho_0 \left(\frac{dw}{d\varrho} \right)_{\varrho=\varrho_0}.$$

Przy tym samym założeniu punkty położone przy piastie przemieszczają się równoległe do osi x . Z rys. 4 wynika

$$\begin{aligned} (u)_{\varrho=\varrho_0} &= \delta \cos \Theta, \\ (-v)_{\varrho=\varrho_0} &= \delta \sin \Theta; \end{aligned}$$

stąd kolejny warunek

$$(4.1.6) \quad (u)_{\varrho=\varrho_0} \sin \Theta = (-v)_{\varrho=\varrho_0} \cos \Theta.$$



Rys. 4

Oprócz tego suma momentów względem osi y (rys. 4) sił przyłożonych do zewnętrznego brzegu płyty musi równać się danemu momentowi M przyłożonemu w środku płyty.

Stąd otrzymujemy następujący warunek

$$(4.1.7) \quad a \int_{-\pi}^{+\pi} (M_{r\theta})_{\varrho=1} \sin \Theta d\Theta - a^2 \int_{-\pi}^{+\pi} (Q_r)_{\varrho=1} \cos \Theta d\Theta = M,$$

gdzie

$$Q_r = \frac{1}{a\varrho} \left(M_r - M_0 + \varrho \frac{dM_r}{d\varrho} - \frac{dM_{r0}}{d\Theta} \right) \cos \Theta,$$

przy czym siła tnąca została otrzymana z równania sumy momentów sił działających na element przedstawiony na rys. 2, względem osi prostopadłej do promienia r . We wzorze (4.1.8) uwzględniono (2.11).

W równaniach (3.14) stała B_1 określa przemieszczenie płyty jak ciała sztywnego w płaszczyźnie xy . Jeśli przyjąć, że płyta przemieści się o wielkość B_1 [cm] w kierunku osi x wówczas składowe w kierunku promieniowym i obwodowym wynoszą

$$\begin{aligned} u_0 &= B_1 \cos \Theta, \\ v_0 &= -B_1 \sin \Theta. \end{aligned}$$

Powyższe wyrażenia odpowiadają pierwszym członom rozwiązań ogólnych (3.15) dla u_0 i v_0 . Stąd wynika, że stałą B_1 można przyjąć dowolnie, np.

$$(4.1.8) \quad B_1 = 0.$$

Od wartości tej stałej nie zależą wartości ugięcia oraz siły wewnętrzne. Łącznie mamy do dyspozycji osiem warunków brzegowych (4.1).

Po podstawieniu rozwiązań ogólnych (3.15) do warunków brzegowych (4.1) otrzymujemy następujący układ równań liniowych:

$$(4.2.1) \quad A_1 + \sum_{i=5}^8 A_i = 0,$$

$$(4.2.2) \quad D_0 \nu A_1 + (D_0 \nu + D_r) A_2 - S a B_2 + \sum_{i=5}^8 [D_r \alpha_i^2 + (D_r + D_0 \nu - p_i S a) \alpha_i + D_0 \nu] A_i = 0,$$

$$(4.2.3) \quad -\frac{S}{a} A_2 + \left(F_1 - 2\beta \nu \frac{1+\nu}{3-\nu} \right) B_2 + \sum_{i=5}^8 \left\{ 2\beta \nu p_i (1+q_i) + \left[F_1 p_i - \frac{S}{a} (\alpha_i + 1) \right] \alpha_i \right\} A_i = 0,$$

$$(4.2.4) \quad + \frac{2(1-\nu)}{3-\nu} B_2 + \sum_{i=5}^8 p_i [1+q_i(1-\alpha_i)] A_i = 0,$$

$$(4.2.5) \quad A_2 \varrho_0 + \sum_{i=5}^8 \alpha_i \varrho_0^{\alpha_i+1} A_i = 0,$$

$$(4.2.6) \quad -\frac{1+\nu}{3-\nu} B_2 + \sum_{i=5}^8 p_i (1+q_i) \varrho_0^{\alpha_i} A_i = 0,$$

$$(4.2.7) \quad -(3-\nu) D_0 A_1 - (3-\nu) D_0 A_2 +$$

$$(4.2.8) \quad + \sum_{i=5}^8 [D_r \alpha_i^2 (\alpha_i + 1) - (3-\nu) D_0 (\alpha_i + 1) - S a p_i \alpha_i^2] A_i = \frac{M a}{\pi \cos \Theta},$$

$$B_1 = 0.$$

5. Warunki brzegowe dla płyty utwierdzonej na obwodzie zewnętrznym i mającej sztywną piastę w środku

Dla płyty utwierdzonej na obwodzie zewnętrznym ugięcie, kąt ugięcia oraz przemieszczenia w kierunku promieniowym i obwodowym dla $r = a$, czyli $\varrho = 1$, muszą równać się zeru. Stąd warunki

$$(5.1.1) \quad (w)_{\varrho=1} = 0,$$

$$(5.1.2) \quad \left(\frac{dw}{d\varrho}\right)_{\varrho=1} = 0,$$

$$(5.1.3) \quad (u)_{\varrho=1} = 0,$$

$$(5.1.4) \quad (v)_{\varrho=1} = 0.$$

Na obwodzie wewnętrznym muszą zachodzić związki (4.1.5) i (4.1.6), jak w p. 4, a mianowicie

$$(5.1.5) \quad (w)_{\varrho=\varrho_0} = \varrho_0 \left(\frac{dw}{d\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_0},$$

$$(5.1.6) \quad (u)_{\varrho=\varrho_0} \sin \Theta = (-v)_{\varrho=\varrho_0} \cos \Theta.$$

Oprócz powyższych warunków muszą być spełnione równania równowagi dla całej płyty (suma momentów względem osi y i suma rzutów sił na oś x)

$$(5.1.7) \quad a \int_{-\pi}^{+\pi} (M_r)_{\varrho=1} \cos \Theta d\Theta + a \int_{-\pi}^{+\pi} (M_{r0})_{\varrho=1} \sin \Theta d\Theta - a^2 \int_{-\pi}^{+\pi} (Q_r)_{\varrho=1} \cos \Theta d\Theta = M,$$

$$(5.1.8) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} (N_r)_{\varrho=1} \cos \Theta d\Theta - \int_{-\pi}^{+\pi} (T)_{\varrho=1} \sin \Theta d\Theta = 0.$$

Na podstawie tych warunków otrzymujemy następujący układ równań liniowych:

$$(5.2.1) \quad A_1 + \sum_{i=5}^8 A_i = 0,$$

$$(5.2.2) \quad A_1 + A_2 + \sum_{i=1}^8 (\alpha_i + 1) A_i = 0,$$

$$(5.2.3) \quad B_1 + \sum_{i=5}^8 p A_i = 0,$$

$$(5.2.4) \quad -B_1 - \frac{1+\nu}{3-\nu} B_2 + \sum_{i=5}^8 p_i q_i A_i = 0,$$

$$(5.2.5) \quad A_2 \varrho_0 + \sum_{i=5}^8 \alpha_i \varrho_0^{\alpha_i+1} A_i = 0,$$

$$(5.2.6) \quad -\frac{1+\nu}{3-\nu} B_2 + \sum_{i=5}^8 p_i (1+q_i) \varrho_0^{\alpha_i} A_i = 0,$$

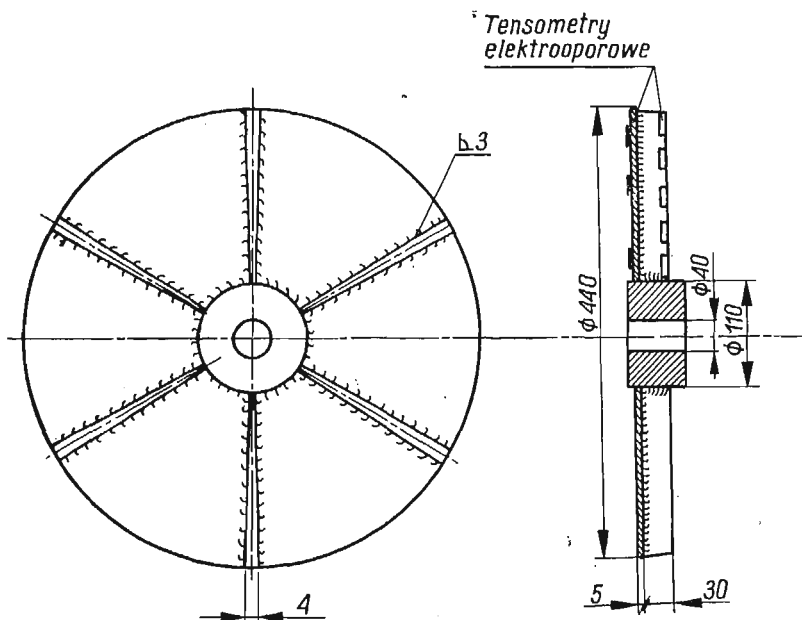
$$(5.2.7) \quad -(D_r + 3D_0) A_2 + SaB_2 = \frac{Ma}{\pi \cos \Theta},$$

$$(5.2.8) \quad -\frac{S}{a} A_2 + (F_1 - 2\nu\beta) B_2 + \sum_{i=5}^8 \left[F_1 \alpha_i p_i - \frac{S}{a} \alpha_i (\alpha_i + 1) + \right. \\ \left. + (3-\nu)\beta(1+q_i) p_i - (1-\nu)\beta p_i q_i \alpha_i \right] A_i = 0.$$

Po wyznaczeniu stałych, odkształcenia można obliczyć ze wzorów (3.15), zaś naprężenia po znalezieniu odpowiednich pochodnych ze wzorów (2.13).

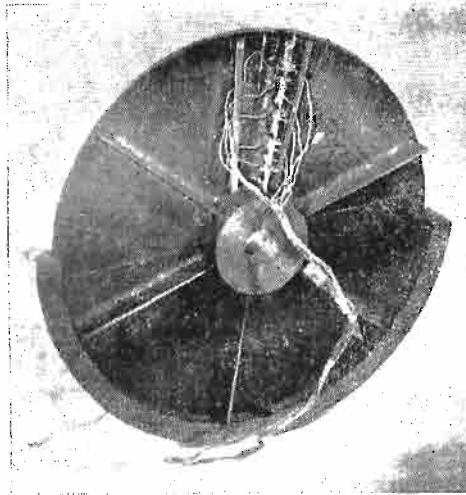
6. Przykład liczbowy obliczenia płyty kołowej o stałej sztywności zginania w kierunku promienia obciążonej parą sił przyłożoną w środku

Obliczono płytę o sztywnej piaście w środku i podpartą przegubowo na obwodzie zewnętrznym (rys. 5). Obliczenia powyższe wykonano na maszynie elektronicznej ZAM-2 Beta, przy czym wyniki obliczeń dotyczą kąta $\Theta = 0^\circ$ (jedynie ν i $\tau_{r\theta}$ obliczono dla $\Theta = \pi/2$).

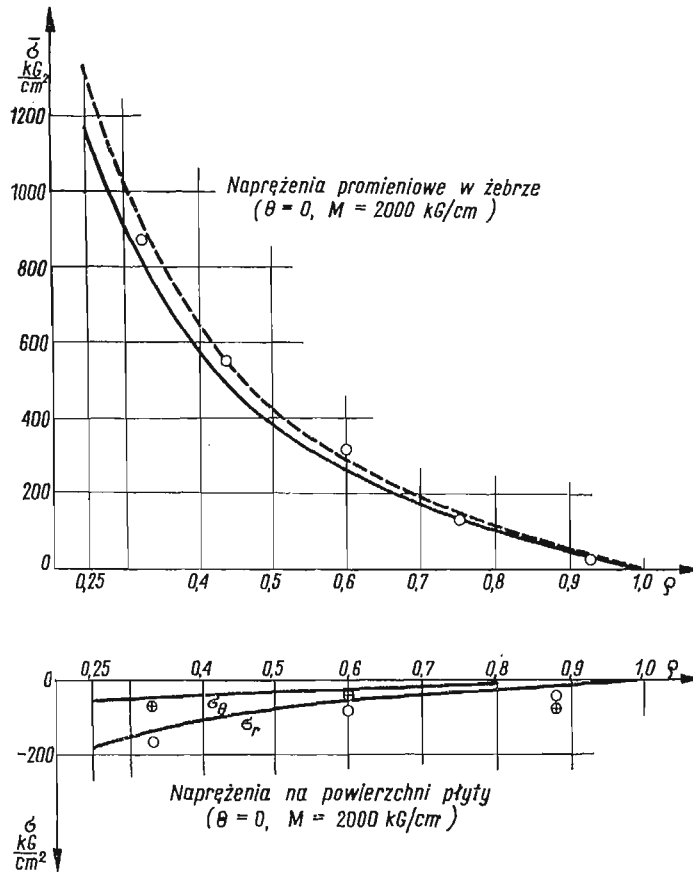


Rys. 5

Wyniki obliczeń przedstawiono w tablicy 1B i 1C oraz na rys. 7. Przeprowadzono pomiary naprężeń w żebrach i płycie za pomocą elektrycznych tensometrów oporowych naklejonych, jak na rys. 5. Płyta umieszczona była w stanowisku badawczym umożli-



Rys. 6



Rys. 7. Naprężenia w płycie wzmocnionej $n = 6$ żebrami podpartej przegubowo na obwodzie zewnętrznym
Naprężenia teoretyczne na zewnętrznej krawędzi żebra — linia przerywana; na wysokości naklejenia tensometrów — linia ciągła
Wyniki pomiarów naprężeń promiennych (○) i obwodowych (⊕)

Tablica 1. Wyniki obliczeń przemieszczeń i naprżeń dla płyty o stałej sztywności zginania podpartej przegubowo na obwodzie zewnętrznym

A) Dane:

$$a = 22,0 \text{ cm}, \quad c = 5,5 \text{ cm}, \quad h = 0,5 \text{ cm}, \quad H = 3,0 \text{ cm}$$

$$b_0 = 0,4 \text{ cm}, \quad \nu = 0,29, \quad n = 6$$

B) Wartości przemieszczeń:

Promień ϱ	Przemieszczenia		
	$\frac{W}{M/E}$ 1/cm ²	$\frac{U_0}{M/E}$ 1/cm ²	$\frac{V_0}{M/E}$ 1/cm ²
+0,25	+3,06997	+0,42047	-0,42047
+0,3	+3,56651	+0,39001	-0,35275
+0,4	+3,99744	+0,33627	-0,25709
+0,5	+3,90140	+0,29416	-0,18594
+0,6	+3,45200	+0,26177	-0,12512
+0,7	+2,76442	+0,23696	-0,06828
+0,8	+1,92095	+0,21813	-0,01202
+0,9	+0,98338	+0,20409	+0,04567
+1,0	+0,00000	+0,19396	+0,10616

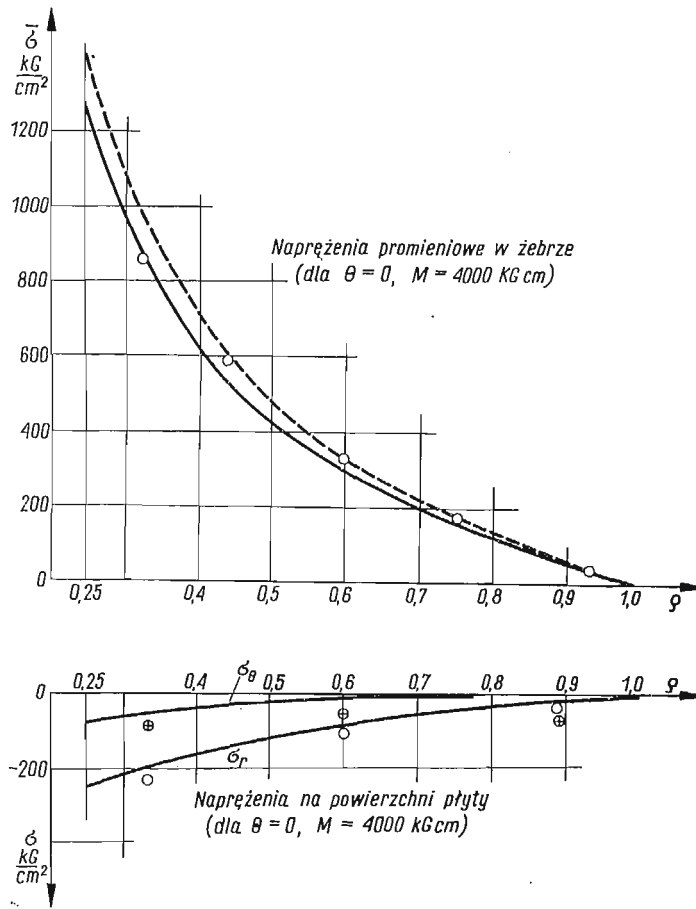
C) Wartości naprężeń:

Promień ϱ	Naprężenia w płycie			Naprężenia w żebrach dla $\Theta = 0^\circ$	
	promien. $\frac{\sigma_r}{M}$ 1/cm ³	obwodowe $\frac{\sigma_\Theta}{M}$ 1/cm ³	styczne $\frac{\tau_{r\Theta}}{M}$ 1/cm ³	na kraw. zewn. $\frac{\sigma_r}{M}$ 1/cm ³	na wysok. śr. tens. $\frac{\sigma'_r}{M}$ 1/cm ³
+0,25	-0,08800	-0,02552	+0,02774	+0,65725	+0,58346
+0,3	-0,07494	-0,02318	+0,02398	+0,50908	+0,45135
+0,4	-0,05360	-0,01775	+0,01927	+0,32615	+0,28869
+0,5	-0,03837	-0,01240	+0,01617	+0,21747	+0,19225
+0,6	-0,02720	-0,00752	+0,01396	+0,14530	+0,12827
+0,7	-0,01868	-0,00311	+0,01234	+0,09376	+0,08261
+0,8	-0,01194	+0,00088	+0,01115	+0,05504	+0,04831
+0,9	-0,00643	+0,00456	+0,01028	+0,02481	+0,02155
+1,0	-0,00183	+0,00798	+0,00964	+0,0052	+0,00005

wiającym realizację warunków brzegowych oraz obciążenia. Na rys. 6 płyta umieszczona jest w jednym z półpłaszczyzn, w którym wykonano rowek obwodowy (podparcie przegubowe).

W ten sam sposób wykonano obliczenia teoretyczne i pomiary dla płyty z liczbą żeber $n = 12$. Wyniki obliczeń i pomiarów przedstawiono na rys. 8.

Moment obciążający M dobierano tak, by największe naprężenia w żebrach nie przekroczyły naprężeń dopuszczalnych dla materiału płyt.



Rys. 8. Naprężenia w płycie wzmocnionej $n = 12$ żebrami, podpartej przegubowo na obwodzie zewnętrznym

Naprężenia teoretyczne na zewnętrznej krawędzi żebra — linia przerywana; na wysokości naklejenia tensometrów — linia ciągła
Wyniki pomiarów naprężeń promieniowych (○) i obwodowych (⊕)

7. Wnioski

Przeprowadzone badania tensometryczne naprężeń w żebrach płyt podpartych przegubowo na obwodzie zewnętrznym wykazują dobrą zgodność z wynikami teoretycznymi. Rozbieżności między naprężeniami obliczonymi teoretycznie a wynikami pomiarów dla powierzchni płyt są procentowo większe niż dla żeber. Naprężenia te są jednak kilkakrotnie mniejsze od naprężeń maksymalnych w żebrach w związku z czym błędy pomiarów mogą być znaczne.

Stwierdzono stosunkowo mały wpływ zmiany liczby żeber z $n = 6$ do $n = 12$ na różnice między obliczeniami teoretycznymi i wynikami badań. Ma to duże znaczenie praktyczne ze względu na stosowane w praktyce płyty (dna bębnow) wzmocnione małą liczbą żeber.

Literatura cytowana w tekście

1. Д. В. Вайнберг, О. М. Рубач, *Круглые конструктивно ортотропные пластины. Напряженное состояние колес прокатных станков и шахтных механизмов*, Изд. АН УССР, 1959.
2. Д. В. Вайнберг, *Методы расчета круглых ребристых пластин. Расчет пространственных конструкций*, Вып. 5.
3. Н. И. Долгов, *О расчете круглых пластин подкрепленных радиальными ребрами. Теория пластин и оболочек*, Изд. АН УССР, 1962.
4. О. М. Рубач, *Изгиб круглых пластин усиленных радиальными ребрами*, Сборник трудов Инст. Строительной Механики, № 20, 1955, Изд. АН УССР.
5. О. М. Рубач, В. М. Агранович, *К вопросу о напряженном состоянии круглых пластин усиленных радиальными ребрами*, Прикладная механика, вып. 1, 1957, Изд. АН УССР.
6. А. Н. Духовный, *Расчет на прочность упругих и кольцевых пластин подкрепленных радиальными ребрами*, Труды ВНИИ Гидромашиностроения, 1961, вып. 29.
7. А. Н. Духовный, *Приближенный метод определения напряжений при изгибе круглых и кольцевых пластин усиленных радиальными ребрами*, Труды ВНИИ Гидромашиностроения, 1962, вып. 30.
8. А. Н. Духовный, *Приближенные решение задачи о прогибе круглых и кольцевых пластин усиленных радиальными ребрами*, Труды ВНИИ Гидромашиностроения, 1962, вып. 30.
9. А. Д. Коваленко, *Круглые пластины переменной толщины*, Москва 1959.
10. S. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, wyd. Arkady, 1962.
11. J. LEYKO, A. MŁOTKOWSKI, *Zginanie osiowo-symetrycznej ortotropowej płyty kołowej o zmiennej sztywności zginania, obciążonej parą sił przyłożoną w środku*, Archiwum Budowy Maszyn nr 3, (1962).

Резюме

ПРОЧНОСТЬ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНКИ УСИЛЕННОЙ ОДНОСТОРОННИМИ РАДИАЛЬНЫМИ РЕБРАМИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ АНТИСИММЕТРИЧНОМУ ИЗГИБУ

В настоящей работе решена задача об определении напряжений и деформаций в круговой пластинке усиленной радиальными ребрами расположенными осесимметрично по одной стороне срединной поверхности. Пластинка подвергнута антисимметрическому изгибу парой сил приложенной в центре. Пластинка рассматривается как конструктивно-ортотропная. Задача решена в перемещениях. Решение имеет вид степенной функции. Рассмотрены случаи опертого и жестко заделанного края пластинки. Для случая пластинок с 6 и 12 ребрами жесткости специальной формы выполнены вычисления и произведены тензометрические измерения.

Summary

STRENGTH OF CIRCULAR PLATE WITH ONE-SIDED RIBS SUBJECTED TO ANTISYMMETRIC BENDING

The paper solves the problem of elastic strain and stress in a circular plate which has radial ribs on one side of the middle surface. The plate is bended skew-symmetrically by a couple acting at the centre. The problem is solved in displacements using the theory of orthotropic plates.

The system of three differential equations with respect to radial circumferential and transversal displacements have been obtained.

The solution has the form of a polynomial. The plate can be simply supported or built in. As a numerical example this paper shows the plate with 6 and 12 ribs of special shape.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Pracę złożono w Redakcji dnia 10 stycznia 1968 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

IV OGÓLNOPÓLSKA KONFERENCJA DOTYCZĄCA DRGAŃ LINIOWYCH, NIELINIOWYCH I STOCHASTYCZNYCH

Poznań, 26 — 27 kwietnia 1968 r.

Na konferencję zgłoszono 35 referatów. Przedstawione prace można podzielić na 5 grup: 1) prace ściśle teoretyczne, 2) prace o zagadnieniach technicznych, 3) prace uwzględniające procesy stochastyczne, 4) zagadnienia syntezy, 5) prace doświadczalne. Należy wszakże zaznaczyć, że pewne prace można zaliczyć do grupy 1) jak i 2).

1) Prace ściśle teoretyczne

Z. ENGEL, *Linearyzacja różniczkowego równania ruchu układu drgającego, wymuszonego dwiema siłami*. Autor podaje metodę linearyzacji według funkcji rozkładu opracowanej przez Kozłowskiego i Pierwoźńskiego.

J. GIERGIEL, *Wpływ efektu Poissona na straty energii w nieruchomych połączeniach*. Autor wykazuje, że strata energii w cyklu — rozciąganie, zdjęcie obciążenia, rozciąganie jest większe niż przy cyklu — ściskanie, zdjęcie obciążenia, ściskanie. Przedstawiono odpowiednie cykle histerezy.

A. MUSZYŃSKA, *O ograniczoności rozwiązań pewnego układu równań różniczkowych zwyczajnych*. Autorka bada układ równań

$$\ddot{x} + A(t)\dot{x} + B(t)x = F(x, A, t),$$

•gdzie: x , A , B i F są macierzami. Znajduje ona warunki przy jakich rozwiązania danego układu, startujące z warunków początkowych są ograniczone.

W. NADOLSKI, *Modelowanie przekładni zębatych jednostopniowych*. W pracy przeprowadza się analizę takich przekładni przy uwzględnieniu masy wału. Przekładnie takie traktujemy jako układy o parametrach rozłożonych w sposób ciągły. Autor znajduje układ zastępczy dyskretny dobierany w taki sposób, aby był on równoważny energetycznie układowi o ciągłych parametrach.

J. OSIĘCKI, *Zagadnienie budowy dyskretnego modelu drgań obiektu rzeczywistego oraz słabych sprzężeń drgań w praktycznej analizie dynamiki maszyn*. Autor rozważa podobny problem jak W. Nadolski. Nadto bada on zagadnienie uproszczenia metody rozwiązań układu równań drgań modelu dyskretnego w oparciu o teorię tzw. słabych sprzężeń Mandelsztama.

Z. OSIŃSKI, *Wpływ tarcia konstrukcyjnego na drgania wymuszone*. Autor rozważał układ drgający o jednym stopniu swobody z uwzględnieniem tarcia konstrukcyjnego, poddany okresowo zmiennej sile wymuszającej. Zbadano charakter krzywej rezonansowej i wpływ tarcia na przebieg krzywej.

S. ZIEMBA, A. RÓŻYCKI, *Układ o dwóch stopniach swobody ze szczególnym przypadkiem liniowego tłumienia jako «dynamiczny izolator» drgań*. Autorzy rozważają drgania belki sprężyste podpartej — o asymetrycznym położeniu środka mas względem punktów podparcia i szukają takiego punktu S , który nie doznaje przemieszczeń. Wykazują oni, że funkcja określająca położenie punktu S przybiera wartości dyskretne, gdy tłumienie działa na środek masy, natomiast bez tłumienia jest to funkcja ciągła. W przypadku układu z tłumieniem położenie punktu nieruchomego S musi być funkcją częstości wymuszenia i czasu, $x_s = x_s(\omega, t)$.

S. ZIEMBA, B. RADZISZEWSKI, *O pewnych szczególnych przypadkach uogólnionych potencjałów Lagrange'a*. W pracy zbadano dla więzów holonomicznych takie szczególne przypadki sił uogólnionych, dla których istnieje potencjał uogólniony spełniający równanie Lagrange'a.

2) Prace o zagadnieniach technicznych

J. ADAMCZYK, *Wpływ zmiennej masy na stateczność pewnego układu mechanicznego*. W pracy przeprowadzono analizę dynamiczną zwijarki blach jako układu o zmiennej masie. Zbadano stateczność takiego układu z podaniem warunków jakie muszą spełniać charakterystyki układu, aby ruch był stateczny w sensie stateczności technicznej.

C. BRONIAREK, Z. TYM, *Stateczność ruchu wirnika o niejednakowych głównych momentach bezwładności podpartego sprężysto*. Przedmiotem rozważań jest analiza ruchu wirnika osadzonego na pionowym wale bez uwzględnienia siły ciężkości i tłumienia. Wyznaczono warunki istnienia statecznych obszarów prędkości kątowej wirnika w zależności od jego parametrów.

Cz. CEMPEL, *Drgania układów prętowych z nieliniowymi warunkami brzegowymi*. W pracy przedstawiono macierzową metodę analizy drgań układów prętowych. Za pomocą równań równowagi wyznaczono krzywą szkieletową, charakterystyki i obszary niestateczności drgań układu. Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym.

A. CZUBAK, *Podstawy projektowania elektromagnetycznych podajników wibracyjnych*. W pracy przedstawiono metody obliczania średniej prędkości i wydajności podajników wibracyjnych, mocy układów napędowych, optymalnego ciężaru rynnny podajnika i zasady rozmieszczenia środków mas, elementów sprężystych i wibratorów w podajnikach oraz sposoby dostrajania układów do pracy w rezonansie.

J. GIERGIEL, A. KLICH, *Dynamiczne problemy kopalnianych układów napędowych urządzeń zabezpieczających*. W pracy omówiono nowe rozwiązanie napędu układu mechanicznego spadochronów naczyń wyciągowych. Przeprowadzono analizę dynamiczną układu wyposażonego w prototypowy silnik piro-techniczny o działaniu jednorazowym, co pozwoliło na określenie przebiegów siły wymuszającej ruch układu i niektórych parametrów kinematycznych, a w szczególności na wyznaczenie działania urządzenia zabezpieczającego. Prawidłowość analizy została sprawdzona na maszynie analogowej dla jednego przypadku szczególnego.

J. OSIŃSKI, *Równania drgań i analiza obciążeń dynamicznych układu napędowego ze sprzęgłami typu Alsthom*. Autor bada drgania układu napędowego lokomotyw elektrycznych ze sprzęgłami typu Alsthom i dla określenia tych drgań dochodzi do układu siedmiu równań różniczkowych. Wnioski wynikające z analizy tego układu podają wskazówki odnośnie konstrukcji sprzęgieł oraz wykazują jak wykorzystać ich własności do kompensacji drgań układu napędowego.

Z. OSIŃSKI, W. SZAFRAŃSKI, *Wpływ nieliniowy charakterystyki sprzęgła na przenoszenie impulsów w układzie napędowym*. W pracy zbadano układ składający się z dwóch mas połączonych sprzęgłem sprężystym. Do analizy teoretycznej przyjęto model składający się z elementu sprężystego nieliniowego oraz z tłumika wiskotycznego liniowego. Układ ten poddano impulsom i zbadano przenoszenie się ich w zależności od czasu działania impulsu i charakterystyki sprzęgła.

J. PIOTROWSKI, *Drgania skrętne układów mechanicznych ze sprężystymi sprzęgłami Cardana*. Autor rozpatruje skrętne działania układów zawierających sprężyste sprzęgła Cardana w postaci tulci gumowych. Sprzęgła takie znajdują zastosowania w układach napędowych lokomotyw. Autor wprowadza pojęcia sztywności skrętnej sprzęgła o załamanych wałach, kąta sprężystego skręcania sprzęgła i położenia dynamicznego. Pojęcia te umożliwiają prostą analizę drgań skrętnych złożonych układów zawierających sprężyste sprzęgła Cardana połączone odkształcalnymi lub sztywnymi na skręcenie wałami. Analiza została poparta przykładem ilustrującym drgania skrętne przestrzennego wału ze sprzęgłami sprężystymi i odkształcalnymi wałami, jako układu o jednym stopniu swobody oraz wykazano istnienie kilku zakresów prędkości obrotowej, w których praca układu jest niestateczna.

T. ROŻNOWSKI, *Niestacjonarne pole temperatury w długim walcu wywołane nieliniowymi warunkami brzegowymi*. W pracy wyznaczono niestacjonarne pole temperatury oraz przeprowadzono analizę funkcji rozwiązującej w przypadku obciążenia brzegu nieciągłym polem temperatury poruszającym się ze stałą prędkością. Rozpatrywano dwa przypadki warunków brzegowych. Zbadano zakres ważności wzorów uproszczonych i podano ocenę błędów. Wykazano, że zmiana pola wewnątrz walca ma charakter dynamiczny i podano jego rolę w zmęczeniu oddziaływaniu na warstwę powierzchniową.

T. SZUCKI, *Drgania masy osadzonej na wirującym wale łożyskowym w łożyskach kulkowych*. Ułożono równanie ruchu masy zamocowanej na wirującym wale z uwzględnieniem nieliniowej charakterystyki sprężystej układu wał—łożysko i przeanalizowano powstanie drgań rezonansowych.

3) Prace uwzględniające procesy stochastyczne

W. BOGUSZ, *Stateczność techniczna układów stochastycznych*. W pracy omówiono różnicę między pojęciem stateczności w sensie Lapunowa i pojęciem stateczności technicznej. W oparciu o znane pojęcia stateczności układów stochastycznych przedstawiono zastosowanie stateczności technicznej do tych układów. Jako definicję stateczności technicznej wzięto prawdopodobieństwo wchodzenia rozwiązań do zadanych obszarów. Dla przykładu rozwiązano zagadnienie stateczności technicznej układu o jednym stopniu swobody.

J. NIZIOŁ, *Wymuszone przypadkowe drgania membran*. W pracy rozpatruje się wymuszone drgania membran prostokątnych i kołowych. Zakłada się, że wymuszenie jest procesem stochastycznym przestrzenno-czasowym stacjonarnym ze względu na zmianę czasową, jak i na zmianę przestrzenną. Funkcje korelacyjną na «wyjściu» przyjęto w trzech postaciach. Dla wszystkich tych postaci i obu membran wyznaczono macierz korelacyjną. Obliczono średni kwadrat ugięcia membrany. Rozwiązania podano w postaci szeregów potwórných, szybko zbieżnych.

T. PUCHAŁKA, K. RUMATOWSKI, *Badania pewnej klasy układów dynamicznych o wymuszeniach stochastycznych*. W pracy zbadano liniowe układy śledzące o działaniu ciągłym. Omówiono podstawowe metody analizy takich układów, a mianowicie metodę wykorzystującą opis dynamiki układu w formie wektorowego równania różniczkowego i metodę opartą na znajomości macierzy przejścia układu. Założono, że proces stochastyczny reprezentowany przez sygnały wejściowe jest mieszaniną addytywną procesu sterującego i zakłócenia. Wyznaczenie impulsowej funkcji przejścia sprowadza się do rozwiązania równania całkowego. Omawiano niektóre efektywne metody znajdowania rozwiązań tego równania.

M. ZABAWA, *O doborze parametrów pewnych układów mechanicznych przy wymuszeniu przypadkowym*. W pracy rozpatruje się układy, których ruch jest opisany przez układ równań różniczkowych zwyczajnych przy założeniu, że wymuszenie jest procesem stochastycznym. Przedstawiono sposób doboru parametrów rozpatrywanych układów tak, aby prawdopodobieństwo przekraczania zadanych wychyleń było mniejsze od z góry zadanej liczby.

4) Zagadnienia syntezy

Cz. CEMPEL, *Pewien przypadek syntezy układów łańcuchowych*. W pracy rozpatrzono możliwości łączenia ogniw o jednej z częstości drgań własnych równej p , w układ łańcuchowy o tej samej częstości drgań. Wykazano, że połączenia takie są możliwe w trzech przypadkach pod warunkiem zachowania postaci drgań ogniw składowych.

R. GUTOWSKI, B. RADZISZEWSKI, *O siłach realizujących z góry dany ruch układu n punktów materialnych*. W pracy przeanalizowano ruch układu n punktów materialnych przy założeniu n więzów holonomicznych, zwanych więzami programowymi. Przez wprowadzenie dodatkowych sił sterujących wyznaczono siły, pod wpływem których ruch układu realizuje ściśle ruch programowy.

J. M. SKOWROŃSKI, *Odwrócona metoda delta w zastosowaniu do syntezy dyskretnych układów nieliniowych*. W pracy podano sposób wyznaczania prawych stron równań ruchu układu o skończonej liczbie stopni swobody, gdy zadana jest trajektoria ruchu. Metodę objaśniono przykładem układu o jednym stopniu swobody.

5) Prace doświadczalne

W. LENKIEWICZ, *Niektóre postacie drgań samowzbudnych powstających w procesach tarcia ślizgania technicznie suchego*. W pracy podano wyniki badań nad wpływem prędkości ślizgania na częstość drgań relaksacyjnych. Omówiono wpływ parametrów tarcia na kształt drgań samowzbudnych prawie harmonicznych. Podano też niektóre sposoby tłumienia i niwelowania drgań samowzbudnych przez tarcie.

T. KOŁACIN, *Stanowisko do badania drgań samowzbudnych tulejek porowatych spiekanych z proszków*. Autor omawia schemat mechaniczny stanowiska do badań drgań oraz sposób pomiaru pozornego współczynnika tarcia. Zarazem podaje on schemat elektryczny, drgań za pomocą którego zapisuje się wywołane tarcie tulejek o czop na taśmie oscylografu. Z pomiaru drgań można otrzymać charakterystykę tarcia.

K. MARCHELEK, *Analiza dynamiczna napędu głównego obrabiarki*. W pracy rozpatrzono drgania skrętne napędu głównego. Badania analityczne zachodzących procesów przeprowadzono na podstawie analitycznej postaci operatora przejścia, który jest stosunkiem wektora sygnału wejściowego do wektora sygnału wyjściowego. Rozpatrzono dynamiczne procesy przejściowe i ustalone oraz stabilność ruchu. Otrzymane wyniki analityczne potwierdzono badaniami doświadczalnymi.

E. Karaśkiewicz, Poznań

Następny zeszyt będzie zawierał prace:

- J. ZIÓŁKOWSKI, Stan naprężeń i odkształceń w kole wirnikowym z małą liczbą bocznych łopatek promieniowych
Напряженное и деформированное состояния в роторе с малым числом боковых радиальных лопаток
State of stress and strain in a rotor with a small number of radial side blades
- Z. SOVCZYŃSKA, Działanie ruchomego, punktowego źródła ciepła w przestrzeni nieograniczonej
Воздействие подвижного точечного теплового источника на неограниченное пространство
Action of a moving concentrated heat source in elastic space
- S. MAZURKIEWICZ, Dynamiczne badania własności mechanicznych poliamidu Tarlon X-A
Динамические исследования механических свойств полиамида Тарлон X—А
Dynamic investigation of mechanical properties of polyamide Tarlon X-A
- H. KORECKI, Stan sprężysto-plastyczny i pełzanie geometrycznie nieliniowej powłoki stożkowej
Упруго-пластическое состояние и ползучесть геометрически нелинейной конической оболочки
Elasto-plastic state and creep of a geometrically non-linear conoidal shell
- J. MARYNIAK, Uproszczona analiza stateczności bocznej szybowca holowanego na linie
Упрощенный анализ боковой устойчивости планера буксируемого на канате
Simplified analysis of lateral stability of towed glider
- J. SAMBORSKI, Drgania grubościennej rury wywołane wewnętrznym i zewnętrznym osiowym przepływem cieczy
Колебания толстостенной трубы обтекаемой внутри и снаружи
Vibrations of a thick-walled tube in internal and external flows of fluids
- J. MIĄSTKOWSKI, Nośność graniczna rozciąganych prętów z karami kątowymi o dowolnych wymiarach części nad karami,
Несущая способность растягиваемых стержней с угловыми надрезами и произвольной шириной вне надрезов
Plastic yielding of tensile V-notched elements with arbitrary intermediate shoulder ratio.

Cena zł 30.—

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
