

g. II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA  
TEORETYCZNA  
I STOSOWANA

TOM 3 • ZESZYT 2



*Pw*

WARSZAWA 1965

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

## SPIS TREŚCI

Witold WIERZBIŃSKI — Wspomnienie pośmiertne	3
Z. WASIUTYŃSKI, O wyznaczaniu warunków równowagi i równań stanu przez pomiar odkształceń Уравнения равновесия выраженные как соотношения между производными компонентов деформации Equilibrium equations as relations between derivatives of strain components	9
Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, Pomiarы sześciu składowych odkształcenia w ściskanym walcu betonowym Измерение шести составляющих деформации в сжимаемом бетонном цилиндре Measurements of six strain-components in the compressed concrete cylinder	21
E. SOÓS, Tensor Kelvina-Somigliany dla ciała lepkosprężystego Тензор Кельвина-Сомильяна для вязкоупругого тела The Kelvin-Somigliana tensor for a visco-elastic material	31
Z. WASZCZYŹYŃ, Doświadczalne badania nad skończonymi sprężysto-plastycznymi ugięciami belek opartych na nieprzesuwnych podporach Экспериментальные исследования конечных, упруго-пластических прогибов балок, опертых на неподвижных опорах Experimental investigation of finite elastic-plastic deflections of beams on immovable supports	35
J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, Doświadczalne badanie powierzchni plastyczności wstępnie odkształconego mosiądzu Экспериментальное исследование поверхности текучести предварительно деформированной латуни An experimental study of yield surfaces of prestrained brass	55
T. AGORSOWICZ, Niektóre związki wychyleń skrętnych i momentów reakcji wałów drgających jako podstawa metody doświadczalnego wyznaczania zmiennych naprężeń ścinających Некоторые зависимости крутильных колебаний и реактивных моментов валов, как основа метода экспериментального определения переменных касательных напряжений Some relations of torsional vibratory swing and torque as a base of experimental method of determining vibration stresses in shafts	67
J. KASPERKIEWICZ, Czujniki do laboratoryjnych pomiarów stanów naprężeń i odkształceń wewnątrz elementów betonowych Датчики для лабораторных измерений напряженного и деформированного состояния внутри бетонных элементов Gauges to laboratory stress and strain measurements inside concrete elements	91

Biuletyn Informacyjny PTMTS

WYDANO Z ZASIŁKU POLSKIEJ AKADEMII NAUK

№ E. 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 3 • Z E S Z Y T 2

W A R S Z A W A 1965

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

s devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

### R A D A R E D A K C Y J N A

JERZY LITWINISZYN—PRZEWODNICZACY

EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ) · JERZY

MUTERMILCH (WARSZAWA) · ADAM MITZEL

(WROCLAW) · WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

STANISŁAW OCHĘDUSZKO (GLIWICE) · WACŁAW

OLSZAK (WARSZAWA) · MARIAN PIĄTEK

(GDAŃSK) · JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

### K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

ZBIGNIEW OLESIAK — R E D A K T O R

JÓZEF JANICZEK · MAREK SOKOŁOWSKI

W O J C I E C H S Z C Z E P I Ń S K I

### R E D A K C J A

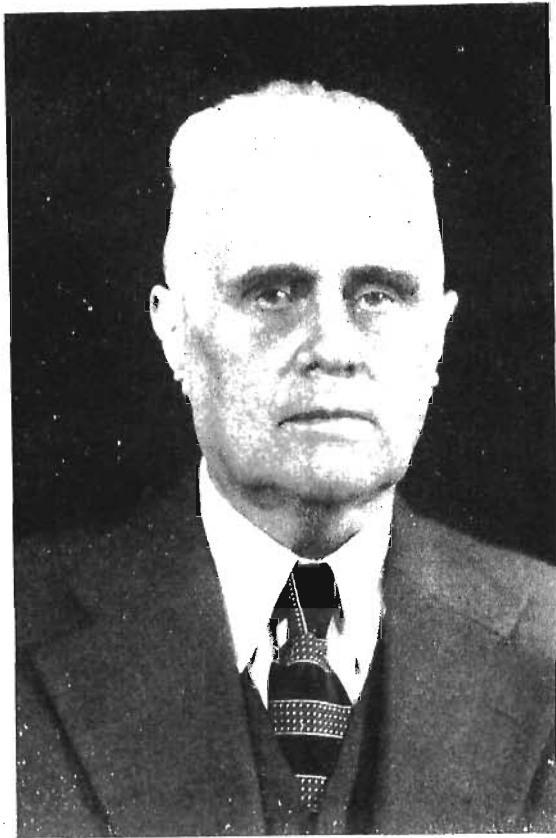
Warszawa, Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

---

Nakład 900 egz. Arkuszy wydawn. 9,75. Arkuszy drukarskich 7,5. Papier druk. sat. III kl., 80 g. Oddano do składania 12.V.65 r., druk ukończono w listopadzie 1965 r. Cena zł 30.—

---

Zam. 718/65 E-78 Druk. im. Rewolucji Październikowej, Warszawa



*Witold Wierzbicki*

## WITOLD WIERZBICKI

Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Mechanika Polska poniosły niepowetowaną stratę.

Dnia 30 stycznia 1965 zmarł przeżywszy lat 75 dr Witold WIERZBICKI, członek rzeczywisty Polskiej Akademii Nauk, doktor honoris causa i zwyczajny profesor emerytowany Politechniki Warszawskiej, członek założyciel i pierwszy Przewodniczący Zarządu Głównego PTMTS, Przewodniczący Rady Redakcyjnej naszego Wydawnictwa.

Profesor Witold WIERZBICKI, którego ponad 40-letnia działalność naukowa w dziedzinie mechaniki budowli stanowi cały rozdział rozwoju tej dyscypliny naukowej w Polsce, przejawiał zainteresowania naukowe już jako student Instytutu Inżynierów Dróg i Komunikacji w Petersburgu otrzymując w r. 1916 wraz z dyplomem nagrodę naukową.

Po pierwszej wojnie światowej i powrocie do kraju obok pracy w charakterze inżyniera komunikacji rozwinął działalność naukową w zakresie mechaniki budowli. Jego pierwsza praca naukowa ukazała się drukiem w r. 1923, w dwa lata później uzyskał stopień doktora nauk technicznych na Wydziale Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej. Habilitował się na tym samym Wydziale w r. 1926. W r. 1929 otrzymał nominację na profesora i kierownika Katedry Inżynierii Leśnej i Geodezji na Wydziale Leśnym Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie. W r. 1932 zostaje członkiem Akademii Nauk Technicznych, a w r. 1936 został powołany na stanowisko kierownika Katedry Statyki Budowli na Wydziale Inżynierii Politechniki Warszawskiej, którą to godność piastował aż do przejścia na emeryturę. Profesor W. WIERZBICKI nie zaprzestał działalności naukowej i dydaktycznej również w latach okupacji hitlerowskiej wykładając w Wyższej Szkole Technicznej. Uwieńczeniem jego działalności w tym czasie było przygotowanie kilku doktorantów, których stopnie zostały zatwierdzone zaraz po uzyskaniu niepodległości. Po wyzwoleniu profesor W. WIERZBICKI był pierwszym dziekanem Wydziału Inżynierii Politechniki Warszawskiej powstającej z gruzów po latach wojny. Oprócz absorbującej funkcji dziekana i działalności dydaktycznej rozwinął szeroką działalność naukową biorąc aktywny udział w organizowaniu szeregu kongresów, zjazdów naukowych, konferencji, publikując oryginalne prace naukowe w kraju i zagranicą.

Z chwilą powstania Polskiej Akademii Nauk profesor WIERZBICKI został powołany na członka rzeczywistego PAN piastując w latach 1952-1957 stanowisko wiceprezesa, był współorganizatorem Wydziału Nauk Technicznych, kierownikiem Pracowni Teorii Konstrukcji w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN, a także przewodniczącym Rady Naukowej tego Instytutu. Z wielu funkcji i zaszczytnych

stanowisk, które zajmował profesor W. WIERZBICKI wymienimy jeszcze stanowisko prezesa Polskiego Związku Inżynierów i Techników Budownictwa (1951–52) oraz prezesa Naczelnej Organizacji Technicznej (1952–57).

W uznaniu wybitnych zasług profesora Wierzbickiego dla organizacji i rozwoju nauk technicznych w naszym kraju władze Polski Ludowej przyznały Mu w r. 1950 Państwową Nagrodę Naukową I stopnia «za całość pracy naukowej, a w szczególności za prace dotyczące obiektywnego określania współczynnika bezpieczeństwa w budownictwie, co pozwala na bardziej ekonomiczną realizację budowy».

W r. 1946 zostaje profesor WIERZBICKI odznaczony Krzyżem Oficerskim Orderu Odrodzenia Polski, zaś w r. 1954 — orderem Sztandaru Pracy I klasy za osiągnięcia w dziedzinie nauki.

W r. 1960 Politechnika Warszawska nadała profesorowi W. WIERZBICKIEMU zaszczytny tytuł doktora honoris causa.

Gdy przed siedmiu laty powstała myśl utworzenia Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, profesor W. WIERZBICKI wziął czynny udział w jego organizacji jako członek założyciel, a następnie jako pierwszy prezes Towarzystwa. W późniejszych latach był jeszcze trzykrotnie wybierany prezesem Towarzystwa, a z chwilą rozpoczęcia wydawania «*MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ*» przewodniczącym Rady Redakcyjnej. Na stanowiskach społecznych w naszym Towarzystwie profesor Wierzbicki nie szczędził trudu ani czasu, by ta tak potrzebna dla rozwoju Polskiej Mechaniki Organizacja rozwijała się jak najszybciej i najowocniej. Jego wielka inwencja i energia wskazywały na to, że jeszcze przez długie lata będziemy mogli korzystać z Jego wskazówek, rad, współpracy i kierownictwa. Tym bardziej bolesną i niespodziewaną jest strata jaką poniosło Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Polska Mechanika.

Z głębokim żalem żegnamy Pierwszego Prezesa naszego Towarzystwa.

*ZARZĄD GŁÓWNY*  
*Polskiego Towarzystwa*  
*Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*  
*RADA REDAKCYJNA i KOMITET REDAKCYJNY*  
*Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*

#### WYKAZ PRAC NAUKOWYCH W. WIERZBICKIEGO

1. *O stateczności pasów ściskanych w mostach otwartych*, Sprawozdanie i prace Warsz. Tow. Polit., Warszawa 1923, s. 20–39.
2. *O wytrzymałości prętów złożonych w mostach żelaznych*, Warszawa 1924, s. 59.
3. *Teoria dźwigarów załamanych w planie*, Warszawa 1926, s. 83.
4. *Sur la calcul des poutres à axe brisé*, Mémoires et compte rendu des travaux de la Société des Ingénieurs Civils de France, 1927, s. 1017.
5. *Metody obliczania słupów złożonych*, Przegl. techn., nr 48, Warszawa 1927, s. 1011–1016.
6. *Rozkład naprężeń w murach szczelnych*, Przegl. techn., nr 7 i nr 8, Warszawa 1928, s. 129–132 i 155–157.
7. *Interpretacja dynamiczna przybliżonej metody wyznaczania odkształceń sprężystych w konstrukcjach budowlanych*, Przegl. techn., nr 32/33, Warszawa 1928, s. 648–652.

8. *Mechanika budowli*, Kom. Wyd. Tow. Bratniej Pomocy Stud. Polit. Warsz., Warszawa 1929, s. XV+603, wyd. 1-sze, 1939, s. XV+656, wyd. 2-gie, 1948, s. XV+656, wyd. 3-cie, Akad. Spółdz. Wyd., Warszawa 1949, s. XV+660 wyd. 4-te, PWN Warszawa 1955, s. XVI+696, wyd. 5-te.
9. *Inżynieria leśna wg wykładów*, Kom. Wyd. Koła Leśników Stud. SGGW, skrypt, Warszawa 1930, s. 304.
10. *Przybliżony sposób obliczania przelotności linii kolejowych leśnych*, Las polski, nr 4, Warszawa 1930, s. 200–212.
11. *Geometryczne uzasadnienie wzoru na przesunięcia węzłów kratownic*, Przegł. techn., nr 13, Warszawa 1930, s. 289–294.
12. *Badania nad wytrzymałością przepustów sklepionych*, Przegł. techn., nr 33/34, Warszawa 1930, s. 581–586.
13. *Obliczenia ramownicy czteroprzęsłowej o końcach przesuwnych*, Przegł. techn., nr 46, Warszawa 1930, s. 889–893.
14. *Zastosowanie różnic skończonych do obliczania dźwigarów załamanych w planie*, Przegł. techn., nr 48, Warszawa 1930, s. 925–932.
15. *Działanie ruchu pociągu na przyczółki i filary mostowe*, Sprawozdania i prace Warsz. Tow. Polit., nr 14, Warszawa 1930, s. 27.
16. *Belki ciągle załamane w planie*, Czas. techn., nr 19, 49, Lwów 1931, s. 313–318.
17. *O właściwościach gospodarczo-ruchowych sieci komunikacyjnych leśnych*, Las polski, nr 3, s. 89–94; nr 4, s. 129–138; nr 5/6, s. 173–176, Warszawa 1931.
18. *Dźwigary załamane w planie o zmiennym kącie załamania*, Przegł. techn., nr 35/36, s. 529–534 i nr 47/48, s. 672–674, Warszawa 1931.
19. *Wielokrotne dźwigary drewniane jako układy hiperstatyczne*, Sprawozdania i prace Warsz. Tow. Polit., Warszawa 1931.
20. *O zastosowaniu teorii kraty do wyprowadzenia równań energii sprężystej*, Księga Pamiątkowa ku uczczeniu prof. Maksymiliana Thulliego, wyd. Wydziału Inżynierii Lądowej i Wodnej Polit. Lwowskiej, Lwów 1932, s. 18.
21. *Próba obliczeń trakcyjnych dla konnych przewozów leśnych*, Las polski, nr 1/2/3, s. 5–20; nr 4, s. 121–132, Warszawa 1932.
22. *W sprawie stopnia dokładności obliczeń statycznych konstrukcji żelbetowych*, Przegł. techn., nr 11/12, Warszawa 1932, s. 109–111.
23. *O powstawaniu zjawiska wyboczenia*, Przegł. techn., nr 31/32, s. 341–345; nr 35/36, s. 387–391, Warszawa 1932.
24. *Przypadek parcia ziemi spoistej i sprężystej na tle badań nad wytrzymałością ziemi*, Przegł. techn., nr 45/46, Warszawa 1932, s. 485–488.
25. *Rozwiązanie ramy wielobocznej przy zastosowaniu równań różniczkowych*, Czas. techn., 50, nr 2, Lwów 1932, s. 17–21.
26. *Wyznaczenie linii izostatycznych*, Czas. techn., 50, nr. 18, s. 269–272; nr 19, 281–285; nr 20, 297–298, Lwów 1932.
27. *Zadania ze statyki belek prostych*, Kom. Wyd. Tow. Bratniej Pomocy Stud. Polit. Warsz., Warszawa 1933, s. X+334, wyd. 1-sze; Akad. Spółdz. Wyd., Warszawa 1949, s. 363, wyd. 2-gie; PWN Warszawa 1959, s. 418, wyd. 3-cie.
28. *Przykłady obliczenia prostych dźwigarów*, Wyd. Zakładu Inżynierii Leśnej i Geodezji SGGW, Warszawa 1933, s. 126.
29. *Kilka uwag w obronie wzoru prof. F. Jasińskiego na ściskanie mimośrodowe*, Przegł. techn., nr 5, Warszawa 1933, s. 125–129.
30. *Próby wyznaczenia geostatycznego parcia ziemi*, Przegł. techn., nr 22, Warszawa 1933, s. 553–560.
31. *Modele zjawiska wyboczenia*, Czas. techn., 51, nr 11, s. 165–170; nr 13, s. 214, Lwów 1933.
32. *Stosunek wyboczenia do ściskania mimośrodowego*, Czas. techn., 51, nr 20, Lwów 1933, s. 311–313.



33. *Zagadnienie zmienności przekrojów o konstrukcjach żelbetowych*, Cement, nr 6, s. 99–102; nr 7, s. 115–118, Warszawa 1933.
34. *W sprawie wyznaczania ugięć wspornika sposobem momentów wtórnych*, Sprawozdania i prace Warsz. Tow. Polit., nr 16, Warszawa 1933, s. 4.
35. *Sprawa wymiarowania drewnianych mostów zastrzałowych dla komunikacji leśnej*, Las polski nr 4, Warszawa 1933, s. 14.
36. *Z dziedziny odkształcenia i stateczności układów prętowych*, Sprawozdania i prace Warsz. Tow. Polit., Warszawa 1933. Praca referowana na posiedzeniu naukowym WTP dn. 28.10.1933.
37. *O sposobach rozumienia terminu wyboczenie*, Prace Akademii Nauk Technicznych, 3, z. 2, Warszawa 1934, s. 12.
38. *Istota wyboczenia prętów prostych*, Przegl. techn., nr 10, Warszawa 1934, s. 300–311.
39. *Możliwe uproszczenia w obliczeniu statycznym łuku*, Przegl. techn., nr 18, Warszawa 1934, s. 561–567.
40. *W sprawie metod obliczenia płyt żelbetowych*, Czas. techn., 52, nr 8, Lwów 1934, s. 121–126.
41. *Parabola sześcienna jako oś łuku*, Czas. techn., 52, nr 23, Lwów 1934, s. 364–367.
42. *W sprawie parcia na mur ziemi w spokoju*, Inżynier Kolejowy, nr 2 (114), Warszawa 1934, s. 31–35.
43. *Obliczenie płyty wspornikowej za pomocą równań różnicowych*, Sprawozdania i prace Warsz. Tow. Polit., Warszawa 1934, s. 6.
44. *Obliczenie układów o węzłach sztywnych*, Wyd. Zakł. Inż. Leśnej i Geodezji SGGW w Warszawie i Zakł. Stat. Bud. Polit. Warsz., Warszawa 1935, s. 143.
45. *Zadania z teorii ram, luków i krat*, Kom. Wyd. Tow. Bratniej Pomocy Stud. Polit. Warsz., Warszawa 1936, s. 399, wyd. 1-sze; Akad. Spółdz. Wyd. Warszawa 1950, s. XII+435, wyd. 2-gie; PWN, Warszawa 1956, s. 440, wyd. 3-cie.
46. *W sprawie pochodzenia podstawowych twierdzeń teorii belek ciągłych*, Czas. techn., 54, nr 15, Lwów 1936, s. 253–256.
47. *Bezpieczeństwo budowli jako zagadnienie prawdopodobieństwa*, Praca referowana na posiedzeniu Wydz. Nauk. Inżyn. Akad. Nauk Techn. 14 11 1936, Przegl. techn., nr 24, Warszawa 1936, s. 690–691.
48. *Coulomb jako pierwszy badacz w dziedzinie statyki budowli*, Przegl. techn., nr 12, Warszawa 1936, s. 336–337.
49. *Zastosowanie rachunku różnicowego w statyce budowlanej*, Publ. Międzyn. Związku Mostów i Konstr., t. 4, Zurich 1936, s. 651.
50. *De l'application des équations simultanées à différences finies en statique des constructions*, Ass. Intern. des Ponts et Charpentes, Mémoires 4, Zurich 1936, s. 639–651.
51. *W sprawie bezpieczeństwa pręta wyciąganego osiowo*, Czas. techn., nr 16, Lwów 1937, s. 273–277.
52. *Wyboczenie jako fakt i jako schemat*, Przegl. techn., nr 21/22, Warszawa 1937, s. 743–746.
53. *Kilka słów o wyboczeniu prętów prostych*, Kolej. Przegl. techn., nr 6/7, Warszawa 1937, s. 1–4.
54. *Schemat obliczenia jednoprzęsłowego mostu wiszącego z belką usztywniającą*, Czas. techn., nr 3, Lwów 1938, s. 34–37.
55. *Application de la méthode des moindres carrés au calcul des arcs*, Ass. Intern. des Ponts et Charpentes, Mémoires, Zurich 1938.
56. *V Międzynarodowy Kongres Mechaniki Stosowanej*, Przegl. techn., nr 3, Warszawa 1939, s. 87–90.
57. *W sprawie bezpieczeństwa belki zginanej*, Przegl. techn., nr 12/13, Warszawa 1939, s. 514–519.
58. *Wstęp do mechaniki budowli*, Księgarnia techn., Warszawa 1943, s. 195, wyd. 1-sze; Trzaska, Evert i Michalski, Warszawa 1946, s. 195, wyd. 2-gie; Trzaska, Evert i Michalski, Warszawa 1951, s. 203; wyd. 3-cie; PWN, Warszawa 1959, s. 203, wyd. 4-te.
59. *Wytrzymałość materialu ze statystycznego punktu widzenia*, Przegl. techn., nr 7/8, s. 7–8; nr 10, s. 7–9; nr 11, s. 2–5, Łódź 1945.

60. *Zadania z teorii naprężeń*, Skrypt. Koło Inż. Łąd. i Wodn. Stud. Polit. Warsz., Warszawa 1946, s. 177.
61. *La sécurité des constructions comme problème de probabilité*, Ann. Acad. Pol. Sci. Techn., 7, Varsovie 1946.
62. *Sposób momentów wtórnych w zastosowaniu do wyznaczania siły krytycznej*, Przegl. techn., nr 9/10, Łódź 1946, s. 1–6.
63. *Przyczynek do zagadnienia stateczności płyty prostokątnej*, Inżyn. Budown., nr 1, Warszawa 1946, s. 13–14.
64. *Przykład zastosowań równań różnicowych dla badania stateczności płyty*, Czas. techn., nr 8/9, Kraków 1946, s. 134–136.
65. *Stateczność zwojnika łuku parabolicznego*, Drogownictwo, nr 6, Warszawa 1946, s. 161–164.
66. *O pewnych przypadkach wybożenia prętów prostych*, Przegl. techn., nr 3, Łódź 1947, s. 42–45.
67. *Wybożenia niesprężyste prętów podpartych w sposób stytycznie niewyznaczalny*, Inżyn. Budown., nr 11, Warszawa 1947, s. 435–437.
68. *Badanie stateczności łuku parabolicznego za pomocą różnic skończonych*, Drogownictwo, nr 1, Warszawa 1947, s. 13–18.
69. *W sprawie pomiaru średnic kopalniaków*, Wiad. PKN, z. 7, Warszawa 1948, s. 289–292.
70. *Wybożenie parabolicznego łuku bezprzegubowego*, Drogownictwo, z. 11, Warszawa 1948, s. 265–268.
71. *Obliczenie drgań własnych belek za pomocą momentów wtórnych*, Inżyn. Budown., nr 5, Warszawa 1948, s. 225–229.
72. *Równowaga quasi-niestateczna w mechanice budowli*, Inżyn. Budown., nr 11/12, Warszawa 1948, s. 519–520.
73. *Arithmétisation des problèmes de flambage*, Arch. Mech. Stos., 1, z. 1, Gdańsk 1949, s. 23–66.
74. *The Quasi-unstable equilibrium in structural mechanics*, Arch. Mech. Stos., 1, z. 3, Gdańsk 1949, s. 229–254.
75. *Détérmination de coefficient de sécurité des cables des ponts suspendus*, Ass. Intern. des Ponts et Charpentes, Mémoires, Zurich 1949.
76. *Statyka i dynamika budowli*, Wyd. Min. Bud. Księga Przedzjazdowa VI Naukowego Zjazdu P.Z.I.T.B. 1–4 grudnia 1949 r. w Gdańsku. Cz. II. Warszawa 1949, s. 97–101.
77. *W sprawie dopuszczalnych naprężeń stycznych w konstrukcjach stalowych*, Inżyn. Budown., nr 1/2, Warszawa 1950, s. 38–44.
78. *Poussée géodynamique et géostatique*, Arch. Mech. Stos., 2, 3, Gdańsk 1950, s. 183–202.
79. *Rola przypadku w zagadnieniach wytrzymałości materiałów*, Księga Jubileuszowa dla uczczenia zasług naukowych prof. dr inż. M. T. Hubera, Gdańsk 1950, s. 18.
80. *Parcie geodynamiczne i geostatyczne*, Sprawozdanie z posiedzeń Wydz. 6 Nauk Techn. W.T.N. z r. 1950, Warszawa 1952, s. 19.
81. *Zadania z teorii naprężeń, wybożenia i drgań*, PWN Warszawa 1953, s. 167, wyd. 1-sze; PWN Warszawa 1958, s. 167, wyd. 2-gie.
82. *Dźwigary zalamane w planie*. Rozpr. Inżyn., nr 11, Warszawa 1954, s. 69.
83. *Methods of determining the index of safety*, Bull. de l'Acad. Pol. des Sci., Cl. 4, 2, nr 2, Varsovie 1954, s. 101–107 (Również wersja rosyjska).
84. *Nowe drogi nauki o bezpieczeństwie budowli*, Inżyn. Budown., nr 1, Warszawa 1954, s. 24.
85. *O powstawaniu wybożeń prętów prostych*, Rozpr. Inżyn., nr 12, Warszawa 1954, s. 65.
86. *Kierunki możliwych usprawnień w obliczeniach łuków*, Rozpr. Inżyn., z. 13, Warszawa 1955, s. 57.
87. *O arytmetyzacji zagadnień stateczności pewnych konstrukcji budowlanych*, Wyd. Chińskiej Akademii Nauk, Pekin 1955, s. 231–240.
88. *O półprobabilistycznej metodzie badania bezpieczeństwa budowli (w języku chińskim)*. Wyd. Chińskiej Akademii Nauk, Pekin 1955, s. 357–368.
89. *O geometrycznych metodach badania konstrukcji prętowych*, PWN Warszawa 1955, s. 61.
90. *Zastosowanie różnic skończonych w przypadkach dwukierunkowych stanów naprężeń w budowlach*, Rozpr. Inżyn., nr 15, Warszawa 1955, s. 47.

91. *Analiza schematów statycznych konstrukcji drewnianych*, Rozpr. Inżyn., 3, nr 3, Warszawa 1955, s. 389-413.
92. *Wkład Feliksa Jasińskiego do nauki światowej*, Arch. Mech. Stos., 8, z. 3, Warszawa 1956, s. 293-317; Kwart. Hist. Nauki i Techniki nr 3, Warszawa 1956, s. 479-499.
93. *O bezpieczeństwie liny nośnej mostu wiszącego*, Rozpr. Inżyn., 4, nr 1, Warszawa 1956, s. 101-117.
94. *Feliks Jasiński*, Actes de VIII-me Congrès Intern. d'Histoire de Sciences, Florencja 1958.
95. *Półprobabilistyczna metoda badania bezpieczeństwa budowli a metoda stanów granicznych*, Inżyn. Budown., 4, nr 4, Warszawa 1956, s. 160-161.
96. *A Comparative study of the semi-probabilistic method determining the safety of structures and the method of limit states*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. 4, 1, Varsovie 1956.
97. *Wstęp do dynamiki budowli*, PWN Warszawa 1956, s. 73.
98. *Dopuszczalne naprężenie styczne z punktu widzenia półprobabilistycznej metody badania bezpieczeństwa budowli*, Inżyn. Budown., nr 10, Warszawa 1957, s. 355-357.
99. *Próba wyznaczania naprężeń dopuszczalnych na podstawie metody półprobabilistycznej*, Inżyn. Budown., nr 9, Warszawa 1957, s. 301-303.
100. *Probabilistic and semi-probabilistic method for the investigation of structure safety*, Arch. Mech. Stos., 9, 6, Warsaw 1957, s. 685-694.
101. *Systèmes hyperstatique a rigidite variable*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. 4, 5, 1, Varsovie 1957, s. 59-65.
102. *Probabilistyczny model sopła lodu*, Rozpr. Inżyn., 6, nr 4, Warszawa 1957, s. 571-577.
103. *Rozprawy z mechaniki budowli*, PWN Warszawa 1958, s. 509.
104. *Application du calcul des probabilités à la détermination des contraintes admissibles dans les constructions d'acier*, Moskwa 1958. Prace sympozjum poświęcone obliczaniu konstrukcji, zorganizowanego przez Akademię Budownictwa i Architektury ZSRR na zlecenie Conseil Internationale du bâtiment.
105. *Aplikace statistických metod w technice*, Aplikace Matematiky, Svazek 4 (1959).
106. *La méthode semi-probabiliste appliquée à l'investigation de la sécurité des constructions en béton armé*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sec. Techn., 7, z. 10, Varsovie 1959.
107. *La méthode semi-probabiliste appliquée à l'investigation de la sécurité des constructions en béton armé*, Biuletyn PAN, serie, IV, 7 (1959), str. 609.
108. *Dynamical interpretation of the Ritz-Timoshenko method*, Arch. Mech. Stos., 12 (1960), str. 523-530.
109. *O możliwości zastosowania metody półprobabilistycznej do badania stateczności murów podporowych*, Inżyn. Budown., 19 (1962) str. 121.
110. *Le problème de la normalization internationale des méthodes objectives d'estimation de la sécurité des constructions civiles*, Biuletyn PAN, seria IV, 11 (1963), str. 21.
111. *Próba probabilistycznej oceny bezpieczeństwa mostów stalowych*, Rozpr. Inżyn., 11 (1963) str. 377.
112. *Bezpieczeństwo statycznie niewyznaczalnych konstrukcji żelbetowych w ujęciu probabilistycznym*, Inżyn. Budown., 20 (1963), str. 181.
113. *Katastrofa budowlana jako przypadek unormowany*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 2 (1964), z. 3.
114. *Parcie geostatyczne na tle doświadczeń*, Rozpr. Inżyn., 12 (1964), str. 115.

## O WYZNACZANIU WARUNKÓW RÓWNOWAGI I RÓWNAŃ STANU PRZEZ POMIAR ODKSZTAŁCEŃ<sup>1</sup>

ZBIGNIEW W A S I U T Y Ń S K I (WARSZAWA)

### 1. Cel i tezy

Opracowanie to ma na celu przedstawienie drogi wyznaczania stanów deformacji, to jest stanów odkształcenia i naprężenia z pominięciem zwykle przyjmowanych modeli hipotetycznych zależności odkształceń od naprężeń. Droga ta jest możliwa w odniesieniu do ośrodków takich jak beton i grunty, do których można wprowadzać przyrządy pomiarowe. Tym swoim celem praca przeciwstawia się omijaniu w badaniach ośrodków ciągłych najbardziej istotnego zadania, jakim jest poznanie rzeczywistego mechanizmu wytwarzania pól odkształceń i naprężeń. Przeciwstawia się ona wypaczeniu właściwej drogi badawczej przez zastępowanie dowolnymi schematami tego, co ma być poznane. Jest ona oparta na następujących stwierdzeniach.

1. W ośrodkach ciągłych jesteśmy w stanie mierzyć bezpośrednio tylko odkształcenia, a nie naprężenia.

2. Warunki równowagi mogą być wyrażone przez zależności między odkształceniami bez względu na rodzaj związku między naprężeniami i odkształceniami.

3. Zależności między odkształceniami wyrażającymi warunki równowagi w sposób właściwy różnym rodzajom ośrodków i kształtów mogą być wyznaczone z pomiarów odkształceń z pominięciem modeli odkształcalności i hipotetycznych zależności między odkształceniami i naprężeniami.

4. Równania stanu wskazujące zależności naprężeń od odkształceń mogą być wyznaczone przez zestawienie równań równowagi, wyrażonych przez naprężenia, z równaniami równowagi, wyrażonymi przez odkształcenia.

### 2. Uwagi wstępne

Oddziaływania zewnętrzne na konstrukcje lub ich elementy są określane przez trzy rodzaje mierników:

- 1) siły powierzchniowe i masowe, termiczne lub magnetyczne,
- 2) przemieszczenia,
- 3) odkształcenia.

Mierniki te są funkcjami współrzędnych miejsca i czasu.

---

<sup>1</sup> Komitet Redakcyjny *MECH. TEORET. I STOS.* uważając za jeden z celów czasopisma pobudzenie dyskusji naukowej przedstawia niniejszy artykuł zawierający szereg nowych koncepcji.

Stany deformacji konstrukcyj są określane również przez trzy rodzaje mierników:

- 1) naprężenia,
- 2) przemieszczenia,
- 3) odkształcenia w funkcji od współrzędnych miejsca i czasu.

W zależnościach między stanem deformacji i oddziaływaniami występują współczynniki materiałowe. Mogą być one zależne od wieku materiału, temperatury, współrzędnych miejsca i czasu.

Zarówno w określaniu oddziaływań zewnętrznych jak i stanów deformacji istnieje możliwość wyboru mierników. Można posługiwać się albo siłami powierzchniowymi czy też naprężeniami, albo przemieszczeniami, albo odkształceniami, albo częściowo jednym z tych mierników, a częściowo innymi.

Między oddziaływaniami zewnętrznymi i stanami deformacji istnieje zależność jednoznaczna. Poddanie konstrukcji lub elementu danym oddziaływaniom zewnętrznym wywołuje stan deformacji określony jednoznacznie. Wypowiadając to stwierdzenie mamy na myśli wynik doświadczenia, a nie rozumowania wykonanego w jakimkolwiek układzie pojęć i założeń.

Do przewidywania stanu deformacji, to jest układu odkształceń i naprężeń wywołanego przez dane oddziaływanie zewnętrzne, nie stwierdzonego uprzednio przez doświadczenia, konieczna jest znajomość zależności zmiennych, określających ten stan od oddziaływań zewnętrznych.

Droga postępowania przyjęta powszechnie w wyznaczaniu tej funkcji obejmuje następujące działania:

- wybór mechanizmu zwanego «modelem», o którym suponujemy, że daje odkształcenia zmienne wraz z naprężeniami i czasem tak samo, jak odkształcenia występujące w rozpatrywanym ośrodku w stanie jednowymiarowego naprężenia;
- ułożenie równania stanu deformacji jednowymiarowej według obranego modelu;
- uogólnienie tego równania na deformację trójwymiarową analogicznie do uogólnienia prawa Hooke'a.

Działania te formułują hipotezy. Pierwsze i drugie zakłada, że przebieg odkształceń w jednowymiarowym stanie deformacji ośrodka jest taki sam, jak przebieg wzajemnych przemieszczeń dwóch punktów na końcowych ogniach mechanizmu modelu. Trzecie działanie zakłada, że równanie stanu deformacji trójwymiarowej może być otrzymane z równania stanu deformacji jednowymiarowej przez przekształcenie jego związków za pomocą operatorów różniczkowych.

Postępowanie takie może budzić zastrzeżenia nawet w razie przydatności niektórych jego wyników, bowiem wybór modelu jest mniej lub więcej dowolny tak samo, jak i uogólnienie jednowymiarowego równania stanu na trzy wymiary. Postępowanie to jest tym mniej słuszne w odniesieniu do betonów i gruntów, że za jego pomocą nie zdołano dotychczas wyznaczyć zależności umożliwiających dostatecznie dokładne przewidywanie stanu odkształcenia i naprężenia na podstawie

danych oddziaływań zewnętrznych. Przyczyną tego jest zapewne przyzwyczajenie do zastępowania doświadczalnego badania rzeczywistych ośrodków przez zgadywanie ich modeli.

### 3. Cel badań nad odkształcalnością betonów

Naprężenia nie są mierzalne bezpośrednio. Przez pomiar bezpośredni nazywamy pomiar, w którym wyliczenie wielkości mierzonej z wielkości odczytywanej nie jest oparte na zależności hipotetycznej. Stwierdzenie to wynika ze sposobu mierzenia deformacji. Wszelkie tensometry służą do pomiaru wielkości geometrycznych. Pomiar polega na porównywaniu długości odcinków przy zastosowaniu przekładni mechanicznych lub hydraulicznych albo też — na porównywaniu wielkości proporcjonalnych do długości, takich jak na przykład opór elektryczny lub pojemność elektryczna. Tak samo pomiary elastooptyczne polegają na obserwacji zmian świetlnych wywołanych zmianami w budowie materiału modelu i proporcjonalnych do zmian odległości.

Naprężenia wyznaczamy nie przez pomiar, lecz przez przeliczenie składowych odkształceń na składowe naprężeń za pomocą zależności zwanych równaniami stanu, te zaś są oparte na hipotezach.

Do ogniwoń ustrojów wykonanych z niektórych tworzyw, na przykład z betonu lub ciał sypkich można wyprowadzić przyrządy do wyznaczania wszystkich składowych odkształceń w okolicach dowolnych punktów. Przyrządy te umożliwiają pomiar zmienności odkształceń w zależności od następujących argumentów:

- wielkości i kierunków oddziaływań zewnętrznych, czasów ich występowania i punktów przyłożenia;
- współrzędnych punktów pomiaru odkształceń i czasów pomiaru;
- kształtów i wymiarów ogniwoń;
- własności fizykalnych tworzywa i jego wieku.

Na podstawie pomiarów wykonanych za pomocą takich przyrządów można wyznaczać funkcje wyrażające zmienność składowych odkształceń w zależności od każdej z tych grup argumentów. Od tych funkcji można przejść do funkcji wyrażających zmienność odkształceń we wszystkich punktach badanego ogniwa a także funkcji wyrażających zmienność dowolnych pochodnych składowych odkształceń.

Istnieje przeto możliwość wyznaczania przez pomiar wartości liczbowych wszelkich funkcji określających stan odkształceń i jego zmienność w takim zakresie, w jakim pozwala na to dokładność przyrządów i w jakim zachodzi tego potrzeba. Pomiar taki określa jednoznacznie stan deformacji. Nie można natomiast mierzyć bezpośrednio naprężeń i stanu naprężenia ani też przemieszczeń dowolnych punktów nie leżących na zewnętrznej powierzchni ogniwa. Spośród trzech wymienionych poprzednio grup mierników: naprężeń, przemieszczeń i odkształceń tylko te ostatnie mogą służyć do pomiaru stanu deformacji.

#### 4. Stwierdzenie możności wyrażania warunków równowagi przez zależności między odkształceniami

Stwierdzenie to wynika z zestawienia warunków równowagi z równaniem stanu uzależniającym naprężenia od odkształceń.

Równania równowagi wyrażone przez naprężenia mają postać

$$(4.1) \quad \sigma_{i,j} + \rho X_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

W ośrodku izotropowym zależności naprężeń od odkształceń według hipotezy Hooke'a są dane przez wzory

$$(4.2) \quad \sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad e = \varepsilon_{kk}.$$

Równania równowagi wyrażone przez odkształcenia mają przeto postać

$$(4.3) \quad \lambda e_{,i} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} + \rho X_i = 0.$$

Wyrazy tych równań mają ten sam wymiar fizyczny. Równania te mogą być przeto wypisane w postaci zależności między wielkościami bezwymiarowymi i interpretowane jako zależności między stosunkami wielkości geometrycznych.

Równania (4.1) wyrażają warunki równowagi bez względu na rodzaj zależności naprężeń od odkształceń. Równania (4.3) wyrażają warunki równowagi tylko w przypadku, gdy zależność naprężeń od odkształceń może być wyrażona przez prawo Hooke'a.

Z zestawienia składników zawierających jednoimienne naprężenia i odkształcenia w równaniach (4.1) i (4.3) wynikają równania stanu wyrażone przez prawo Hooke'a, mamy bowiem na podstawie (4.1) i (4.3)

$$\sigma_{i,j} + \rho X_i = \lambda e_{,j} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} + \rho X_i, \quad i, j = 1, 2, 3;$$

równania te są spełnione przez zależności (4.2), przyjęte za równania stanu. W tym znaczeniu równania (4.1) i (4.3) są wzajemnie równoważne, o ile hipoteza Hooke'a jest prawdziwa. Sprawdzenie tej hipotezy wymaga pomiaru odkształceń. Istotnie, z pomiaru można wyznaczyć współczynniki przy pochodnych odkształceń i wyrazy wolne w równaniach (4.3), a następnie zestawiając wyrazy zawierające pochodne składowych naprężeń w równaniach (4.1) z wyrazami zawierającymi jednoimienne pochodne odkształceń w równaniach (4.3) — wyznaczyć równania (4.2) analogicznie do powyższego przekształcenia. Z tych zależności i równań wynikają następujące wnioski.

*Wniosek 1.* W przypadkach słuszności hipotezy Hooke'a warunki równowagi mogą być wyrażone zależnościami między odkształceniami. W przypadku jakiegokolwiek innej zależności odkształceń od naprężeń, różnej od hipotezy Hooke'a, równania równowagi mogą być również wyrażone, po analogicznym podstawieniu, przez zależności między odkształceniami, a więc ogólnie — bez względu na rodzaj znanej lub nieznannej zależności odkształceń od naprężeń równania równowagi mogą być wyrażone przez związki między odkształceniami. Napisanie tych równań wymaga uprzedniego pomiaru własności odkształceniowych ośrodka.

*Wniosek 2.* Zamiast obierania mniej lub więcej dowolnych modeli odkształcalności dla rzekomego uzasadnienia równań stanu w rodzaju zależności (4.2) jedynie słuszną drogą poznawania stanów deformacji jest wyznaczanie przez pomiar odkształceń

zależności wyrażających równowagę przez związki między odkształceniami. Do zależności tych wchodziłyby odkształcenia występujące w równaniach (4.3) powiązane ze sobą w sposób właściwy odkształcalności materiału i kształtowi elementu, na ogół różny od sposobu występowania odkształceń w równaniach (4.3).

Uwagi te wyczerpują wyjaśnienia poprzedzające wyprowadzenie zależności wyrażających warunki równowagi przez związki między odkształceniami, a umożliwiającą wyznaczenie równań stanu bez obierania hipotetycznych modeli odkształcalności.

##### 5. Wyprowadzenie warunków równowagi w postaci zależności między pochodnymi składowych odkształceń

**5.1. Przypadek, gdy wszystkie składowe odkształceń wpływają na każdą ze składowych sił wewnętrznych.** Równania równowagi elementu prostopadłościennego oznaczają, że sumy sił masowych i przyrostów sił działających na przeciwległych ścianach tego elementu, skierowanych wzdłuż trzech osi — mają wartości zerowe.

Przyrosty sił masowych wzdłuż osi  $r$  wyrażamy w postaci

$$\rho X_r dV, \quad dV = dx_1 dx_2 dx_3,$$

a reakcje ośrodka otaczającego prostopadłościan w postaci

$$(5.1) \quad \delta_r(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}) \frac{dV}{dx_r}$$

lub

$$\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}) dx_r \left( \frac{dV}{dx_r} \right).$$

Według tej zależności wszystkie składowe odkształcenia  $\varepsilon_{kl}$  wpływają na każdą ze składowych sił  $i, j$ , o ile  $a_{ijkl} \neq 0$ .

W tych wyrażeniach wskaźniki  $i, j$  odnoszą się do składowych sił, wskaźniki  $k, l$  odnoszą się do składowych odkształceń, wskaźnik  $r$  do osi, wzdłuż której występuje przyrost siły. Współczynniki  $a_{ijkl}$  są współczynnikami proporcjonalności sił do odkształceń w danym punkcie i czasie odkształcenia; współczynniki te mają wymiar naprężeń, wielkości ich są skończone i w ogniwie o danym kształcie i tworzywie, jak to wskazują pomiary doświadczalne, są funkcjami współrzędnych punktu  $x_i$  czasów obciążenia i pomiaru  $t_h$  oraz oddziaływań zewnętrznych  $p_i$

$$a_{ijkl}(x_i, t_h, X_i, p_i).$$

Odształcenia ogniwa o danym kształcie i tworzywie są również funkcjami tych zmiennych:

$$\varepsilon_{kl}(x_i, t_h, X_i, p_i).$$

Wyrażenie (5.1) jest oparte na następujących założeniach:

$a_{ijkl}$  i  $\varepsilon_{kl}$  są funkcjami ciągłymi współrzędnych  $x_i$ ,  
składowe odkształcenia są liczbami małymi wobec 1,



przyrosty oddziaływań ośrodka otaczającego prostopadłościan mogą być wyrażone przez przyrosty proporcjonalne funkcji  $a_{ijkl}, \varepsilon_{kl}$ .

Równania równowagi elementu różniczkowego wynikają z przyrównania do zera sum rzutów sił (5.1) i sił bezwładności na trzy osie współrzędnych. Równania te mają postać

$$(5.2) \quad (a_{ijkl} \varepsilon_{kl})_{,j} + \rho X_i = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

lub po rozwinięciu — postać

$$\begin{aligned} (a_{11kl} \varepsilon_{kl})_{,1} + (a_{12kl} \varepsilon_{kl})_{,2} + (a_{13kl} \varepsilon_{kl})_{,3} + \rho X_1 &= 0, \\ (a_{21kl} \varepsilon_{kl})_{,1} + (a_{22kl} \varepsilon_{kl})_{,2} + (a_{23kl} \varepsilon_{kl})_{,3} + \rho X_2 &= 0, \\ (a_{31kl} \varepsilon_{kl})_{,1} + (a_{32kl} \varepsilon_{kl})_{,2} + (a_{33kl} \varepsilon_{kl})_{,3} + \rho X_3 &= 0, \\ k, l &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Są to równania równowagi wyrażone przez pochodne odkształceń. W wyprowadzeniu ich nie występują naprężenia.

Każda z par wskaźników  $i, j$  oraz  $k, l$  może być zestawiona w dziewięciu permutacjach z powtórzeniami: 11, 22, 33, 12, 13, 21, 23, 31, 32. Równania (5.2) zawierają przeto 81 różnie oznaczonych współczynników  $a_{ijkl}$  w danym punkcie  $x_i, t_h, X_i, p_i$ . Niektóre jednak z tych współczynników są równe między sobą. Istnieje bowiem równość

$$(a_{ijkl} \varepsilon_{kl})_{,j} = (a_{jikl} \varepsilon_{lk})_{,j} \quad \text{przy} \quad i \neq j, k \neq l.$$

Istotnie, warunek zerowości momentów sił stycznych działających na dwóch parach ścian przeciwnych

$$a_{ijkl} \varepsilon_{kl} dV = a_{jikl} \varepsilon_{kl} dV$$

daje

$$a_{ijkl} = a_{jikl},$$

a więc wskaźniki  $i, j$  mogą być w tych współczynnikach przestawiane. To samo dotyczy wskaźników  $k, l$  wobec równości  $\varepsilon_{lk} = \varepsilon_{kl}$

$$a_{ijlk} = a_{ijkl}$$

stąd

$$(a_{ijlk} \varepsilon_{lk})_{,j} = (a_{ijkl} \varepsilon_{kl})_{,j}.$$

Aby wyznaczyć różne współczynniki  $a_{ijkl}$  wystarcza obrać tylko 6 permutacji z powtórzeniami każdej z par wskaźników  $i, j$  oraz  $k, l$ : 11, 22, 33, 12 = 21, 23 = 32, 31 = 13. Różnych współczynników  $a_{ijkl}$  może być przeto co najwyżej 36, o ile niektóre z nich nie są zerami lub też nie mają wartości równych wskutek szczególnych własności odkształceniowych występujących w pewnych punktach, obszarach lub w całym ogniwie.

Równanie rzutów sił na oś 1 zawiera następujące wyrazy z pochodnymi odkształceń kątowych przy  $i \neq j$ :

$$\begin{aligned} (a_{1212} \varepsilon_{12})_{,2} \quad (a_{1223} \varepsilon_{23})_{,2} \quad (a_{1231} \varepsilon_{31})_{,2} \quad (a_{1312} \varepsilon_{12})_{,3} \quad (a_{1323} \varepsilon_{23})_{,3} \quad (a_{1331} \varepsilon_{31})_{,3}, \\ (a_{1221} \varepsilon_{21})_{,2} \quad (a_{1232} \varepsilon_{32})_{,2} \quad (a_{1213} \varepsilon_{13})_{,2} \quad (a_{1321} \varepsilon_{21})_{,3} \quad (a_{1332} \varepsilon_{32})_{,3} \quad (a_{1313} \varepsilon_{13})_{,3}. \end{aligned}$$

Ponieważ wyrazy w pierwszym wierszu są równe wyrazom w drugim wierszu, przeto wyrazy zawierające odkształcenia kątowe mogą być wypisane w tym równaniu w postaci podwójnego pierwszego wiersza

$$2(a_{1212} \varepsilon_{12}),_2 \quad 2(a_{1223} \varepsilon_{23}),_2 \quad 2(a_{1231} \varepsilon_{31}),_2 \quad 2(a_{1312} \varepsilon_{12}),_3 \quad 2(a_{1323} \varepsilon_{23}),_3 \quad 2(a_{1331} \varepsilon_{31}),_3.$$

Analogicznie występują odkształcenia kątowe w dwóch pozostałych równaniach równowagi.

W przypadku, gdy współczynniki  $a_{ijkl}$  mają wartości stałe, niezależne od  $x_i$ ,  $t_h$ ,  $X_i$ ,  $p_i$  równania (5.2) mają postać

$$a_{ijkl} \varepsilon_{kl,j} + \rho X_i = 0.$$

Do wyznaczenia wartości  $a_{ijkl}$  z równań (5.2) należy zmierzyć doświadczalnie 18 pochodnych odkształceń  $\varepsilon_{kl,j}$  co najmniej w 12 różnych stanach odkształcenia. Podstawienie tych wartości do trzech równań (5.2) daje 36 równań liniowych względem 36 niewiadomych współczynników  $a_{ijkl}$ . Współczynniki te mogą być z tych równań wyznaczone. Jeżeli pochodne  $\varepsilon_{kl,j}$  są zmierzone w liczbie stanów odkształcenia większej od 12, to do wyznaczenia niewiadomych  $a_{ijkl}$  może być zastosowany rachunek wyrównawczy.

W przypadku, gdy współczynniki  $a_{ijkl}$  są zmienne wraz z  $x_i$ ,  $t_h$ ,  $X_i$ ,  $p_i$ , należy zmienność ich wyrazić przez funkcje o współczynnikach nieoznaczonych, a następnie wyznaczać te współczynniki tak, jak współczynniki  $a_{ijkl}$  w poprzednim przypadku. Dla zmierzenia odkształceń  $\varepsilon_{kl}$  i ich pochodnych  $\varepsilon_{kl,j}$  w danym punkcie  $x_i^0$ ,  $t_h^0$ ,  $X_i^0$ ,  $p_i^0$  należy doprowadzić wartości  $x_i$ ,  $t_h$ ,  $X_i$ ,  $p_i$  do tego punktu, a następnie dawać kolejno każdej z nich odpowiednią liczbę przyrostów wywołujących różne stany równowagi, aby móc wypisać równania w liczbie wystarczającej do wyznaczenia  $a_{ijkl}$  oraz  $a_{ijkl,j}$ .

Wraz z liczbą współczynników nieoznaczonych wzrasta liczba równań do ich obliczenia. Dla uproszczenia rachunku jest przeto rzeczą istotną sprawdzenie, czy wszystkie współczynniki  $a_{ijkl}$  wprowadzone do równań (5.2) mają wartości różne od zera.

**5.2. Przypadek, gdy na oddziaływania ośrodka na element różniczkowy wpływają tylko te odkształcenia  $\varepsilon_{kl}$ , które dają odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  równego rzędu wzdłuż składowych sił.** Z poprzednich założeń: małych i ciągłych odkształceń skończonych i ciągłych współczynników  $a_{ijkl}$ , proporcjonalności oddziaływań ośrodka do przyrostów  $a_{ijkl}$  i  $\varepsilon_{ij}$  wynika, że przyrosty odkształceń i oddziaływań występujące wzdłuż krawędzi prostopadłościannu różniczkowego są małe wobec wartości tych odkształceń i oddziaływań. Stąd w równaniach równowagi (5.2) główne znaczenie mają te współczynniki  $a_{ijkl}$ , które wyrażają zależność odkształceń  $\varepsilon_{ij}$  od odkształceń  $\varepsilon_{kl}$ . Natomiast te współczynniki  $a_{ijkl}$ , które wyrażają zależność przyrostów odkształceń  $\varepsilon_{ij}$  wzdłuż osi elementu różniczkowego od przyrostów odkształceń  $\varepsilon_{kl}$  względem tych osi — mają drugorzędne znaczenie. Stwierdzenie to przyjęto za pierwsze kryterium wyboru tych współczynników.

Jako drugie kryterium wyboru przyjęto równość rzędu wielkości odkształceń  $\varepsilon_{ij}$  występujących pod wpływem odkształceń  $\varepsilon_{kl}$  przyjmując za równe zeru te współ-

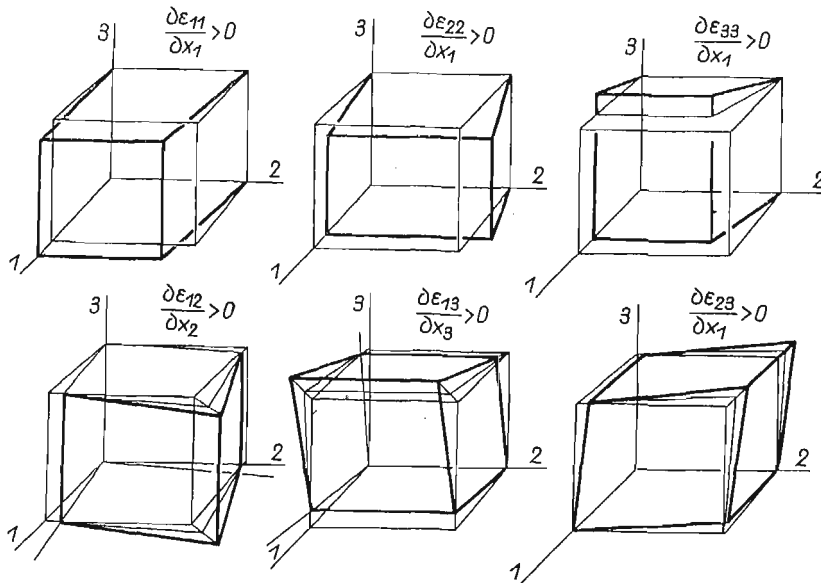
czynniki  $a_{ijkl}$ , które dają odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  mniejszego rzędu od rzędu odkształceń  $\varepsilon_{kl}$ <sup>1</sup>.

W przyjętych założeniach odkształcenia prostopadłościanu mogą być opisane przez przesunięcia i pochylenia jego ścian z zachowaniem ich płaskości tak, jak to przedstawiono na rysunku. Z założeń tych wynika też możliwość sumowania jednoczesnych i dostatecznie małych przyrostów odkształceń  $\varepsilon_{ij}$  oraz sumowania oddziaływań  $a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$  przez superpozycję.

Pierwsze równanie równowagi zawiera następujące współczynniki:

$$\begin{aligned} & a_{1111}, a_{1122}, a_{1133}, a_{1112}, a_{1123}, a_{1131}, \\ & a_{1211}, a_{1222}, a_{1233}, a_{1212}, a_{1223}, a_{1231}, \\ & a_{1311}, a_{1322}, a_{1333}, a_{1312}, a_{1323}, a_{1331}. \end{aligned}$$

Trzy współczynniki  $a_{1111}$ ,  $a_{1122}$ ,  $a_{1133}$  są różne od zera, gdyż zgodnie z doświadczeniem odkształcenia  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  wywołują odkształcenia  $\varepsilon_{11}$  tego samego rzędu.



Rys. 1

Dwa współczynniki  $a_{1212}$ ,  $a_{1331}$  są różne od zera, gdyż odkształcenie  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{12}$  wywołuje równe mu odkształcenie  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{12}$  tak samo, jak odkształcenie  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{31}$  daje równe mu odkształcenie  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{13}$ .

Zgodnie z kryteriami eliminacji założono, że dziewięć współczynników  $a_{1112}$ ,  $a_{1123}$ ,  $a_{1131}$ ,  $a_{1211}$ ,  $a_{1222}$ ,  $a_{1233}$ ,  $a_{1311}$ ,  $a_{1322}$ ,  $a_{1333}$  jest równych zeru, gdyż odkształcenia kątowe  $\varepsilon_{kl}$  wywołują odkształcenia liniowe  $\varepsilon_{ij}$  równe małym drugiego rzędu, a odkształcenia liniowe  $\varepsilon_{kl}$  nie wywołują odkształceń kątowych  $\varepsilon_{ij}$ . Jedynie przyrosty wzdłuż krawędzi prostopadłościanu jednych z tych odkształceń  $\varepsilon_{kl}$  mogą wywołać równego rzędu przyrosty odkształceń  $\varepsilon_{ij}$  wzdłuż tych krawędzi.

<sup>1</sup> Oba te kryteria mają na celu uproszczenie rachunków przy opracowywaniu wyników doświadczeń, a nie sugerowanie założeń do zagadnień teoretycznych. Celowość ich wprowadzenia może być uzasadniona tylko przez doświadczenie.

Zgodnie z pierwszym kryterium założono, że cztery współczynniki  $a_{1223}$ ,  $a_{1231}$ ,  $a_{1312}$ ,  $a_{1323}$  są równe zeru, bowiem odkształcenia kątowe  $\varepsilon_{kl}$  nie wywołują innych odkształceń kątowych  $\varepsilon_{ij}$ ; jedynie przyrosty odkształceń  $\varepsilon_{kl}$  wzdłuż krawędzi prostopadłościąnu mogą wywołać przyrosty odkształceń  $\varepsilon_{ij}$ .

W pierwszym równaniu równowagi występuje przeto 5 głównych współczynników  $a_{ijkl}$ :  $a_{1111}$ ,  $a_{1122}$ ,  $a_{1133}$ ,  $a_{1212}$ ,  $a_{1331}$ , a równanie to ma postać

$$(5.3) \quad (a_{1111} \varepsilon_{11})_{,1} + (a_{1122} \varepsilon_{22})_{,1} + (a_{1133} \varepsilon_{33})_{,1} + 2(a_{1212} \varepsilon_{12})_{,2} + 2(a_{1331} \varepsilon_{31})_{,3} + \rho X_1 = 0;$$

pozostałe dwa równania mają postać:

$$(a_{2211} \varepsilon_{11})_{,2} + (a_{2222} \varepsilon_{22})_{,2} + (a_{2233} \varepsilon_{33})_{,2} + 2(a_{2323} \varepsilon_{23})_{,3} + 2(a_{2121} \varepsilon_{21})_{,1} + \rho X_2 = 0,$$

$$(a_{3311} \varepsilon_{11})_{,3} + (a_{3322} \varepsilon_{22})_{,3} + (a_{3333} \varepsilon_{33})_{,3} + 2(a_{3131} \varepsilon_{31})_{,1} + 2(a_{3223} \varepsilon_{23})_{,2} + \rho X_3 = 0.$$

W równaniach tych, odniesionych do danego punktu i czasu, występuje 15 niewiadomych współczynników  $a_{ijkl}$ , z których 6 jest parami równych i tyleż niewiadomych ich pochodnych.

Jeżeli współczynniki  $a_{ijkl}$  są niezależne od współrzędnych  $x_i$ , to równania te przyjmują postać znaną z teorii sprężystości ciał anizotropowych ortogonalnych (ortotropowych).

## 6. Wyprowadzenie równań stanu

6.1. Przypadek, gdy wszystkie składowe odkształceń wpływają na każdą ze składowych sił wewnętrznych. Z zestawienia równań (4.1) z równaniami (5.2) w założeniu, że  $\sigma_{ij} = 0$ , jeżeli  $\varepsilon_{kl} = 0$  wynikają równości

$$(6.1) \quad \sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

to jest równości

$$\sigma_{11} = a_{11k1} \varepsilon_{kl}, \quad \sigma_{12} = a_{12k1} \varepsilon_{kl},$$

$$\sigma_{22} = a_{22k1} \varepsilon_{kl}, \quad \sigma_{23} = a_{23k1} \varepsilon_{kl},$$

$$\sigma_{33} = a_{33k1} \varepsilon_{kl}, \quad \sigma_{31} = a_{31k1} \varepsilon_{kl}.$$

Są to równania stanu określające zależność naprężeń od odkształceń. Naprężenia  $\sigma_{ij}$  mogą być wyznaczone jedynie przez obliczenie ze wzorów (6.1), wymaga to uprzedniego pomiaru odkształceń i wyznaczenia współczynników  $a_{ijkl}$  jako funkcji  $x_i$ ,  $t_h$ ,  $X_i$ ,  $p_i$ .

6.2. Przypadek, gdy na oddziaływania ośrodka na element różniczkowy wpływają tylko te odkształcenia  $\varepsilon_{kl}$ , które dają odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  równego rzędu wzdłuż składowych sił. Z zestawienia równań (4.1) z równaniami (5.3) w założeniu że  $\sigma_{ij} = 0$ , jeżeli  $\varepsilon_{kl} = 0$ , wynikają równania stanu o następującej postaci:

$$\sigma_{11} = a_{1111} \varepsilon_{11} + a_{1122} \varepsilon_{22} + a_{1133} \varepsilon_{33},$$

$$\sigma_{22} = a_{2211} \varepsilon_{11} + a_{2222} \varepsilon_{22} + a_{2233} \varepsilon_{33},$$

$$\sigma_{33} = a_{3311} \varepsilon_{11} + a_{3322} \varepsilon_{22} + a_{3333} \varepsilon_{33},$$

$$\sigma_{12} = 2a_{1212} \varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2a_{2323} \varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 2a_{3131} \varepsilon_{31}.$$

## 7. Wnioski

1. Warunki równowagi mogą być wyrażone przez zależności między pochodnymi odkształceń.

2. Równania stanu mogą być wyznaczone przez pomiar odkształceń.

3. Zagadnienia sprężystości i plastyczności, polegające na wyznaczaniu pól naprężeń i odkształceń, mogą być rozwiązywane z pominięciem modeli odkształcalności i hipotetycznych równań stanu. Modele i hipotezy odkształcalności są niepotrzebne.

4. Teoria odkształcalności może być rozwinięta z pominięciem pojęcia naprężeń, to jest — pola odkształceń mogą być wyznaczane z pominięciem tego pojęcia.

5. Nie ma podstaw do zakładania z góry stałości współczynników odkształcalności takich, jak moduł Younga, liczba Poissona, współczynniki Lamego, w skończonych przedziałach zmienności odkształceń. Doświadczenie wskazuje, że współczynniki te są zmienne wraz ze współrzędnymi punktów, czasami obciążeń siłami masowymi, oddziaływaniami zewnętrznymi, kształtem ośrodka.

6. Zamiast odróżniać odkształcenia w sposób werbalny za pomocą pojęć pełzania, skurczu, odkształceń powolnych, odwracalnych, trwałych, sprężystych, plastycznych — słuszniej jest odróżniać je według form współczynników  $a_{ijkl}$  jako funkcji  $x_i, t_h, X_i, p_i$ .

7. Rozwój teorii odkształcalności wymaga usunięcia z niej modeli i hipotez odkształcalności, a w szczególności założeń o niezależności współczynników odkształcalności od współrzędnych punktów, od czasów obciążeń i występowania odkształceń, sił masowych i oddziaływań zewnętrznych oraz od kształtów ośrodków.

## Резюме

## УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ВЫРАЖЕННЫЕ КАК СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПРОИЗВОДНЫМИ КОМПОНЕНТОВ ДЕФОРМАЦИИ

Целью работы является представление метода определения деформированного и напряженного состояний с пренебрежением принимаемых обычно гипотетических моделей зависимости деформаций от напряжений. Этот метод применим по отношению к таким средам, как бетон и грунты, в которые можно вводить измерительные приборы. Предлагая настоящий метод мы высказываемся против пренебрежения в исследованиях непрерывных сред наиболее существенной проблемы, какой является познание действительного механизма выступления полей деформаций и напряжений и отказываемся замещать предмет исследований произвольными схемами.

На основании полученных результатов автор выводит следующие заключения:

1. Условия равновесия могут быть выражены зависимостями между производными деформаций, коэффициенты которых могут быть определены путем измерения компонентов деформаций и их производных.

2. Зависимости между компонентами напряжения и деформации получаются путем сопоставления уравнений равновесия в производных напряжений с уравнениями равновесия в производных деформаций.

3. Проблемы упругости и пластичности, заключающиеся в определении полей напряжения и деформации, могут быть решены с пренебрежением моделей деформации и гипотетических уравнений состояния. Единственно справедливой моделью деформации тела является только это тело.

4. Теорию деформаций можно развить с пренебрежением понятия напряжения.
5. Нет оснований заранее предполагать неизменяемости коэффициентов деформации таких, как модель Юнга, число Пуассона, коэффициенты Ламэ в конечных интервалах. Результаты экспериментальных измерений показывают, что эти коэффициенты могут изменяться в зависимости от координат точек, времени нагрузки и объемных сил от внешних воздействий и формы элемента.
6. Классификация деформаций может быть обоснована на форме функций, представленных коэффициентами деформации, зависящих от вышеуказанных переменных.
7. Развитие теории деформации требует устранения из нее моделей и гипотез деформаций, а также необоснованных предположений о неизменяемости коэффициентов деформации.

### Summary

#### EQUILIBRIUM EQUATIONS AS RELATIONS BETWEEN DERIVATIVES OF STRAIN COMPONENTS

The aim of the present communication is to propose a method for determining the states of strain and stress without introducing the usually assumed models of hypothetical stress—strain relations. This can be done for bodies such as concrete and soils, into which measuring gauges can be introduced.

Thus, the method advanced opposes the eluding in investigations of continuous media the most essential point of scientific research—the cognition of the real mechanism of the dependence between strain and stress fields. It opposes the eluding the proper way of proceeding, i.e., the replacing by hypothetical “models” the real objects to be studied.

The consideration presented in the paper lead to the following conclusions.

1. The equilibrium equations can be expressed by relations between the derivatives of deformation components, as the result of deformation measurements.
2. The stress-strain equations can be determined by deformation measurements.
3. The problems of elasticity and plasticity, consisting in the determination of strains and stresses fields can be solved without considering deformation models and without introducing hypotheses about dependences between stresses and strains. The only true model of a deformable body is the body itself.
4. The theory of deformability can be developed by neglecting the notion of stress. It means that the fields of deformation can be determined without this notion.
5. There are no grounds to advance the assumption that the coefficients of deformability, such as Young's modulus, Poisson's ratio, and the coefficients of Lamé are constant in finite intervals. Experiments show that these coefficients vary with the point coordinates, time of loading or external influences, time of deformation, volume forces and shape of element.
6. It is more adequate to classify deformation coefficients  $a_{ijkl}$  by the forms of their dependence on  $x_i, t, X_i, p_i$ , than to use verbal distinctions such as slow deformation, creep, shrinkage, reversible and irreversible, elastic and plastic deformations.
7. The development of the theory of deformability requires the neglecting of deformability models and of the hypotheses, even those which assume the independence of deformability coefficients of the point coordinates, time of loading or external influences, time of deformation, volume forces, and shapes of elements.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1965 r.*



## POMIARY SZEŚCIU SKŁADOWYCH ODKSZTAŁCENIA W ŚCISKANYM<sup>1</sup> WALCU BETONOWYM

ZBIGNIEW W ASIUTYŃSKI, ANDRZEJ BRANDT (WARSZAWA)

**1. Uwagi wstępne** Wyznaczenie pól odkształceń w elementach betonowych przyjęto dotychczas opierać na rozwiązaniach teorii sprężystości i na uproszczonych wzorach wytrzymałościowych, wynikających z tych rozwiązań. Ten sposób postępowania zawiera supozycje oparte na obserwacji szczególnych przypadków, rozciągnięte następnie na inne stany deformacji bez sprawdzenia doświadczalnego. Do tych supozycji należą: założenie o zachowaniu płaskości przekrojów po odkształceniu i założenie o niezależności współczynników odkształcalności od wielkości obciążeń, współrzędnych punktów, wieku materiału, kształtów i wymiarów elementów.

Założeń tych dotychczas nie sprawdzono doświadczalnie w sposób szczegółowy, to jest przez pomiar wszystkich składowych deformacji, lecz zadowalano się sprawdzeniami przez pomiar skróceń, wydłużeń, ugięć, pochyleń oraz odkształceń jednostkowych na powierzchniach badanych elementów. W niektórych przypadkach mierzone poszczególne składowe odkształcenia wewnątrz elementów. Nie sprawdzono jednak przez pomiar doświadczalny wielkości wszystkich składowych odkształceń w sposób umożliwiający wyczerpujące stwierdzenie przydatności stosowanych wzorów.

W pracy tej pomiar pola odkształceń ograniczono do przedziału odkształceń dozwolonych podczas użytkowania konstrukcji. W odniesieniu do betonów przedział ten obejmuje, oprócz odkształceń sprężystych, odkształcenie natychmiastowe i powolne, odwracalne i trwałe. Odkształcenia te bowiem wskazują najlepiej stan bezpieczeństwa i są łatwiejsze do zbadania od odkształceń wykraczających poza ten przedział, którym towarzyszą zjawiska bardziej złożone, jak na przykład powstawanie dużych rys, utrata przyczepności uzbrojenia, tarcie wewnętrzne i dezagregacja betonu.

Pomiary odkształceń wewnątrz elementów betonowych były tematem niewielu prac zawierających głównie dane technologiczne odnośnie przygotowania i przeprowadzenia badań (kilka ważniejszych pozycji wymieniono na końcu pracy).

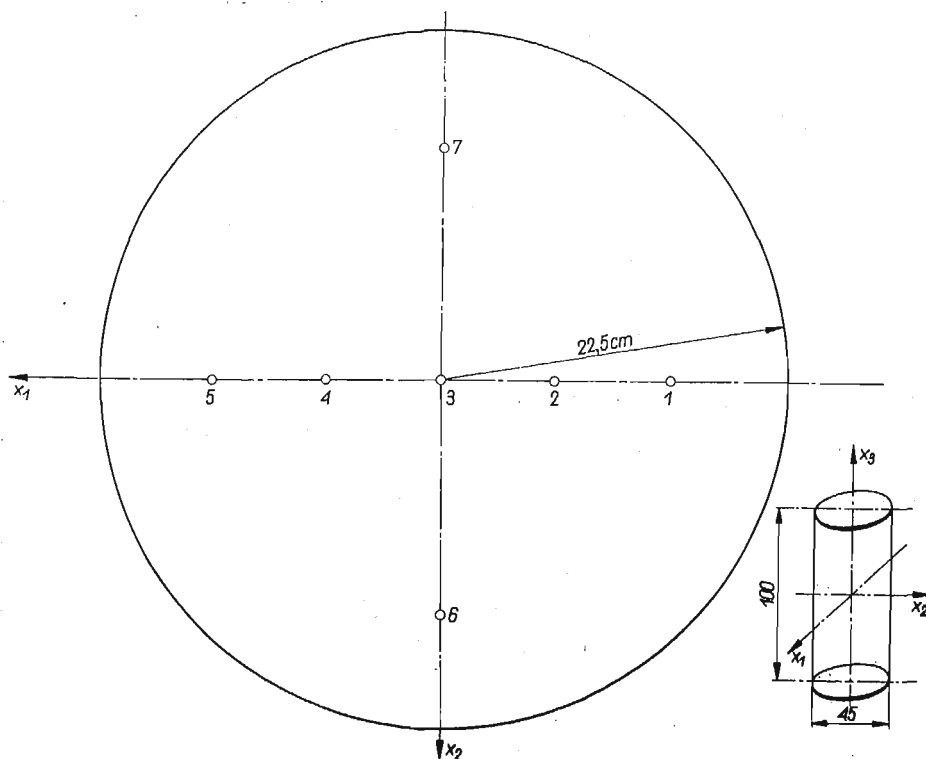
**2. Cel i przedmiot pomiarów.** Celem pomiarów było wyznaczenie wszystkich składowych tensora odkształcenia betonu wewnątrz walca ściskanego. Składowe te zmie-

<sup>1</sup> Praca niniejsza została nagrodzona na konkursie Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej w 1964 r.



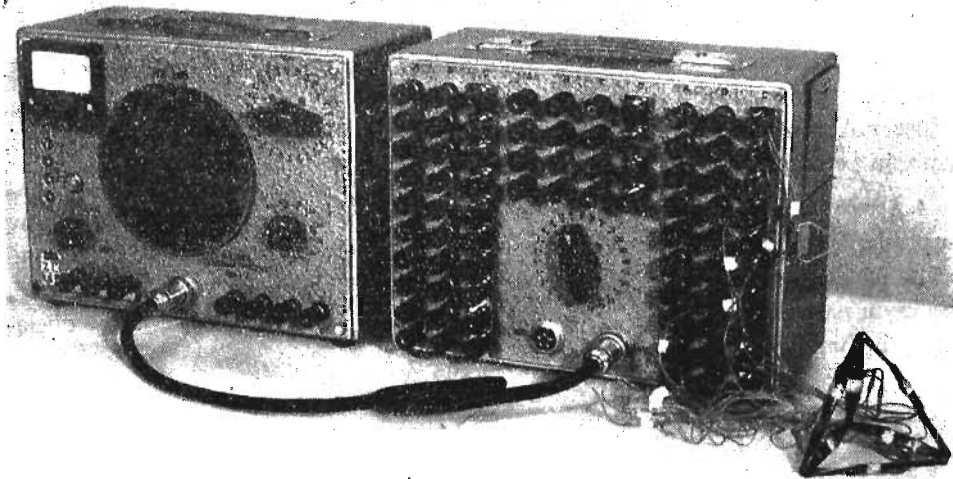
rzono w siedmiu punktach rozmieszczonych w przekroju poprzecznym w połowie wysokości walca w funkcji obciążenia pionowego.

Wymiary walca oraz układ osi obrany do oznaczania odkształceń pokazano na rys. 1. Walec wykonano z betonu z kruszywa bazaltowego o największym wymiarze ziaren nie przekraczającym 20 mm. Wytrzymałość betonu na ściskanie po 28 dniach wynosiła około 600 kG/cm<sup>2</sup>.

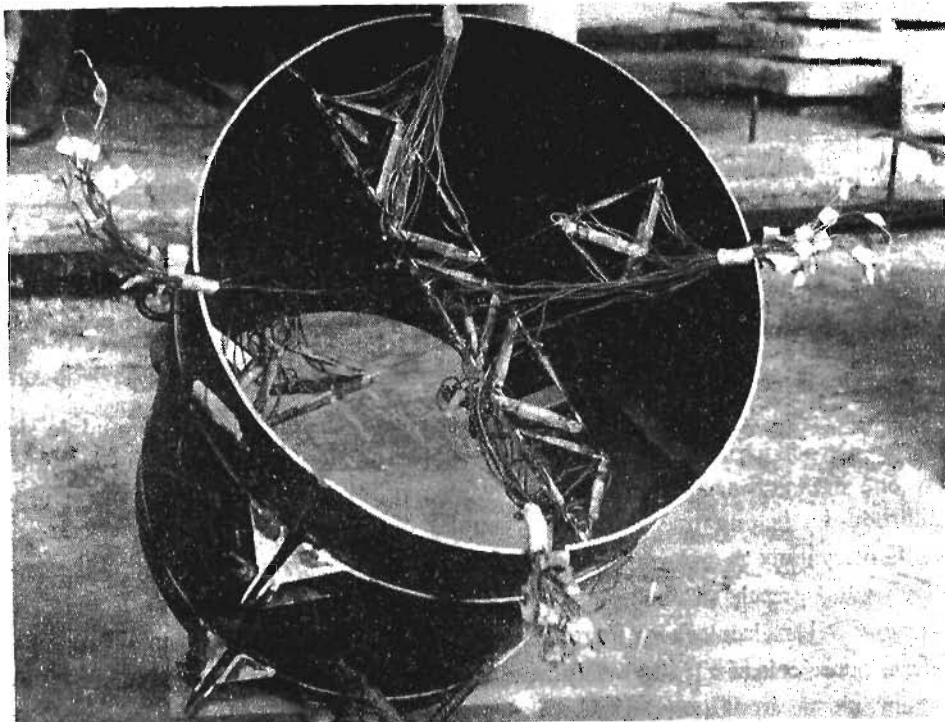


1. Wymiary próbki walcowej, przyjęty układ osi współrzędnych oraz rozmieszczenie sond w przekroju poprzecznym

**3. Opis urządzeń pomiarowych.** Pomiaru składowych stanu odkształcenia przeprowadzone zostały za pomocą siedmiu sond, z których jedna pokazana jest na rys. 2. Sonda jest zbudowana z pasków blachy miedzianej o grubości 0,2 mm, ułożonych wzdłuż krawędzi czworoboku o narożu prostokątnym. Długość krawędzi przyprostokątnych wynosi 7 cm, a przeciwprostokątnych 10 cm. Na każdej krawędzi z obu stron paska blachy naklejono dwa tensometry oporowe. Odkształcenia betonu powodują odkształcenia pasków blachy i zmieniają oporność tensometrów, mierzoną za pomocą mostka Wheatstone'a. W ten sposób tensometry umożliwiają pomiar średnich odkształceń betonu wzdłuż krawędzi sondy, co pozwala na uniknięcie wpływów niejednorodności betonu. Cechy tensometrów były następujące: typ RL, długość pomiarowa 15 mm, oporność 120Ω, współczynnik  $K = 2,10$ , rzeczywista dokładność pomiaru  $5 \cdot 10^{-6}$ . Rozmieszczenie sond w przekroju jest pokazane na rys. 1 i 3.



Rys. 2. Widok sondy do pomiaru sześciu składowych stanu deformacji w betonie

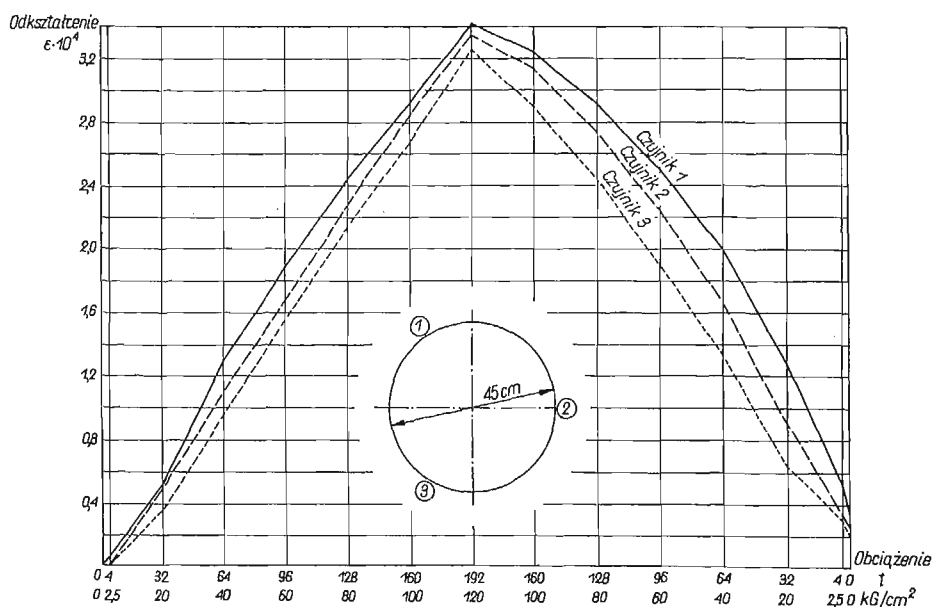


3. Widok części formy do betonowania badanych walców wraz z przygotowanym układem sond

Wskazania sondy dają bezpośrednio odkształcenia liniowe  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$ , odkształcenia zaś kątowe  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{23}$  i  $\varepsilon_{31}$  mogą być łatwo obliczone.

Drugi wałek, wykonany równocześnie z pierwszym, zawierał sondy z tensometrami kompensacyjnymi, a następnie posłużył do powtórzenia pomiarów. Oba walce pokazane są na rys. 5; były one identyczne co do rozmieszczenia sond, rodzaju betonu i sposobu przechowywania.

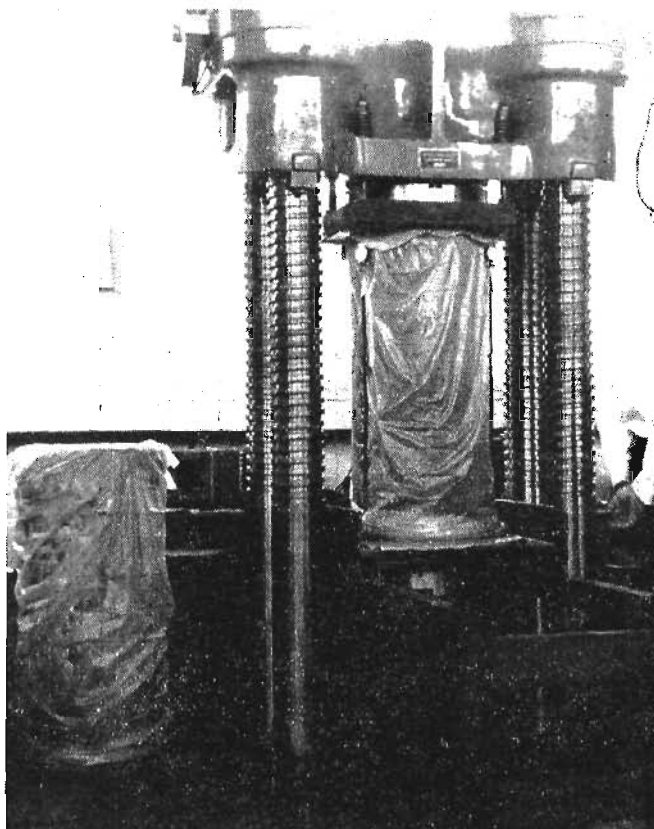
4. Sposób obciążenia i przeprowadzenia pomiarów. Badany wałek obciążono siłą osiową w prasie 500-tonowej. Obciążenie wprowadzono kolejnymi przyrostami po  $20 \text{ kg/cm}^2$  aż do uzyskania naprężenia średniego w przekroju próbki, wynoszącego  $120 \text{ kg/cm}^2$ , po czym następowało odciążenie. Zachowano przy tym równe czasy cykli obciążenia i pomiarów, wynoszące 15 min.



Rys. 4. Wykres odkształceń średnich, mierzonych przez czujniki zegarowe wzdłuż tworzących walca

Osiowość obciążenia walca uzyskano drogą kolejnych prób, jednak nie udało się uniknąć niewielkich mimośrodów i wygięć próbki pod obciążeniem. Spowodowane były one ograniczoną dokładnością ustawienia próbki w prasie oraz zmianą niejednorodności betonu przy wzroście i spadku obciążenia. Ilustruje to wykres na rys. 4, otrzymany ze wskazań czujników zegarowych mierzących średnie odkształcenia wzdłuż trzech tworzących walca. Przy największym obciążeniu  $P = 192 \text{ t}$  różnice w odkształceniach nie przekraczały  $16 \cdot 10^{-6}$ , zaś przy obciążeniu  $P = 64 \text{ t}$  podczas odciążenia różnica ta była przeszło 4-rorotnie większa i wynosiła  $67 \cdot 10^{-6}$ . Przesuwanie się środka ciężkości przekrojów ściskanych jest widoczne i uniemożliwia osiowe obciążenie badanych elementów.

Badanie walca wykonano po upływie 11 tygodni od betonowania, przechowując walce w powietrzu o wilgotności względnej 100% i o temperaturze zmiennej w granicach 18–20 °C. Warunki te zachowane były również podczas pomiarów.



Rys. 5. Widok walców badanego i kompensacyjnego podczas badania

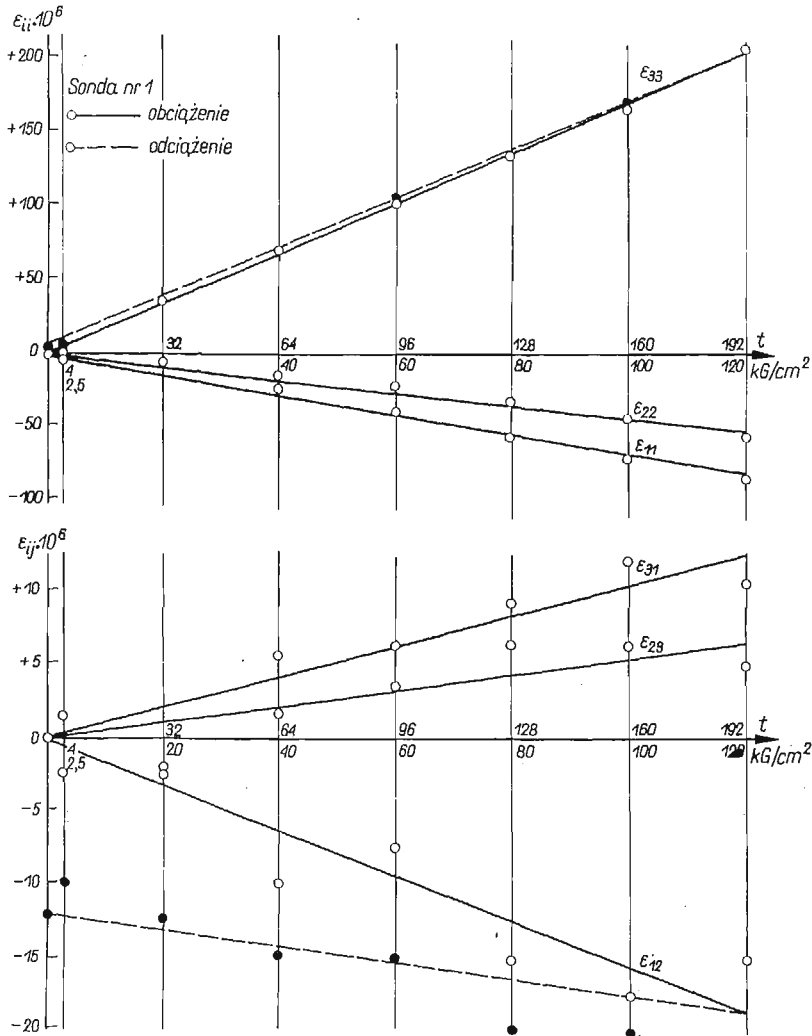
**5. Wyniki badań.** W celu oszczędności miejsca na rys. 6 przedstawiono wykresy składowych stanu odkształcenia, zmierzonych za pomocą tylko jednej z sond użytych w czasie badań. Wskazania tej sondy, oznaczonej numerem 1 na rys. 1, zostały porównane ze wskazaniami innych i stwierdzono zbliżony kształt otrzymanych wykresów.

Rozmieszczenie pionowych odkształceń  $\epsilon_{33}$  w przekroju poprzecznym walca pokazano na rys. 7. Wykres ten jest oparty na wskazaniach wszystkich sond.

Na rysunkach 8 i 9 widać części wykresów pochodnych  $\partial\epsilon_{33}/\partial r$  i  $\partial\epsilon_{33}/\partial s$  w funkcji współrzędnych biegunowych. Wykreślono je tylko przy dwóch wielkościach promienia  $r$ , ponieważ przedstawienie pełnych wykresów przestrzennych nastęrczało trudności techniczne. Wykresy te wskazują na możliwość doświadczalnego wyznaczenia pochodnych składowych odkształceń względem parametrów, występujących w badanych zjawiskach.

Traktując wykresy odkształceń przedstawione na rys. 6 i 7 jako dobrze charakteryzujące stan odkształcenia w środkowym przekroju poprzecznym badanego walca ściskanego, można sformułować na podstawie ich przebiegu następujące uwagi:

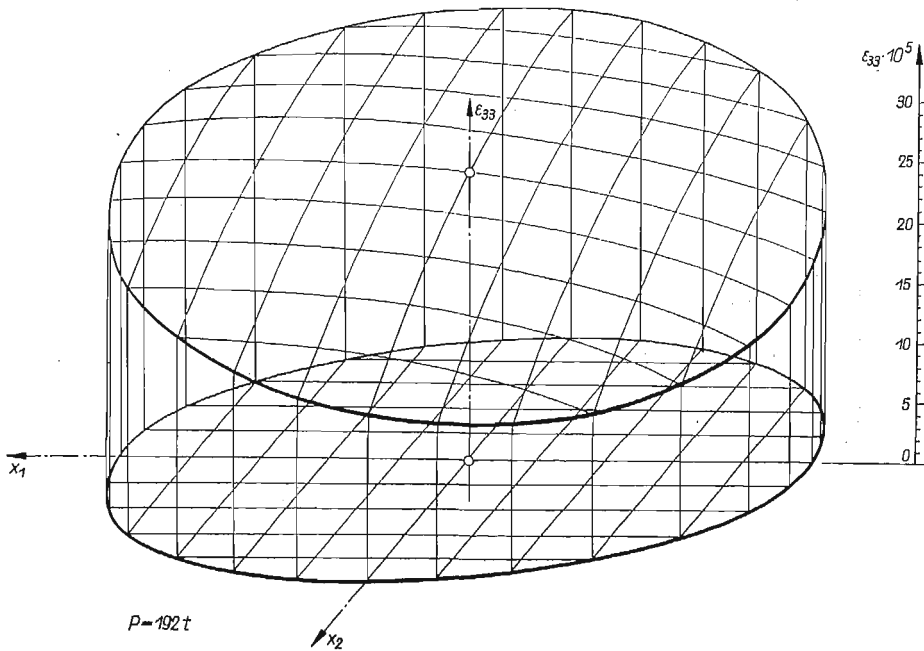
1. W zakresie stosowanych naprężeń składowe odkształceń liniowych zmieniają się proporcjonalnie do obciążeń z błędami nie przekraczającymi dokładności pomiaru. Proporcjonalność potwierdza istnienie między tymi składowymi zależnościami liniowych o postaci niezależnej od obciążenia.



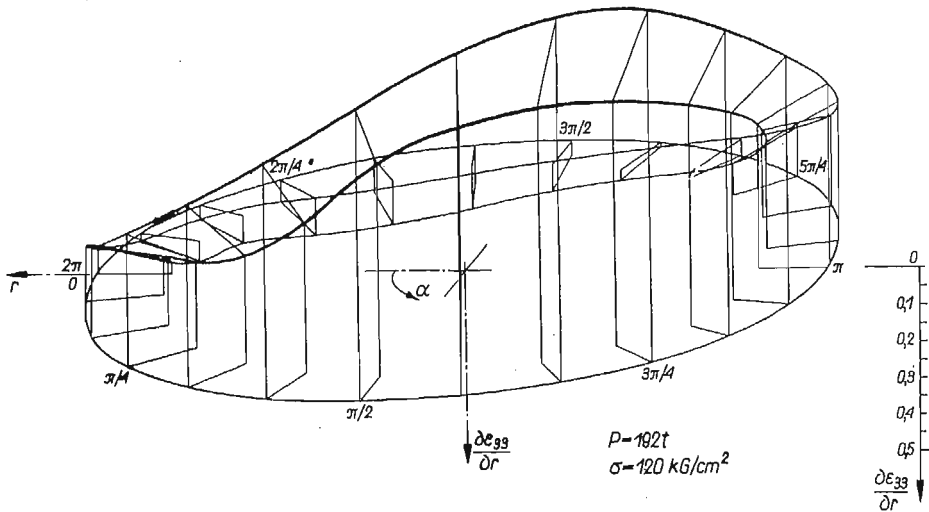
Rys. 6. Wykresy składowych odkształceń, pomierzonych za pomocą sondy

Na pierwszym wykresie pokazano odkształcenia liniowe w funkcji obciążenia:  $\epsilon_{33}$  — odkształcenia pionowe,  $\epsilon_{22}$  — odkształcenia poziome skierowane wzdłuż promienia,  $\epsilon_{11}$  — odkształcenia poziome, skierowane prostopadłe do promienia.

Na drugim wykresie pokazano odkształcenia kątowe:  $\epsilon_{31}$  — zmiana kąta pomiędzy osiami 1 i 3,  $\epsilon_{23}$  — zmiana kąta pomiędzy osiami 1 i 2,  $\epsilon_{12}$  — zmiana kąta pomiędzy osiami 2 i 3



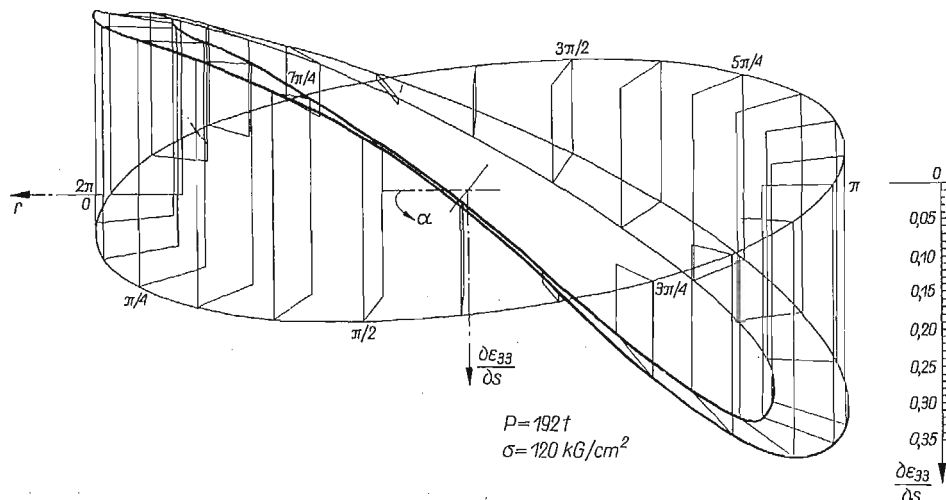
Rys. 7. Wykres odkształceń pionowych  $\epsilon_{33}$  w przekroju poprzecznym walca pod obciążeniem  $120 \text{ kG/cm}^2$



Rys. 8. Wykres pochodnych  $\frac{\partial \epsilon_{33}}{\partial r}$  odkształceń pionowych  $\epsilon_{33}$  względem promienia  $r$

2. Odkształcenia  $\epsilon_{11}$  wzdłuż promienia przekroju walca są wydłużeniami, stosunek  $\epsilon_{11}/\epsilon_{33}$  jest równy około  $-0,43$ .
3. Odkształcenia  $\epsilon_{22}$  wzdłuż stycznej do okręgu, przechodzącego przez punkt oznaczający położenie sondy nr 1, są wydłużeniami, stosunek  $\epsilon_{22}/\epsilon_{33}$  jest równy około  $-0,28$ .

4. Różnice wielkości odkształceń  $\varepsilon_{11}$  i  $\varepsilon_{22}$ , zaobserwowane zarówno w punkcie I jak i w niektórych pozostałych punktach pomiarowych, wskazują na zależność wielkości odkształceń od ich kierunku w płaszczyźnie prostopadłej do działania obciążenia. Różnice te występują w zakresie proporcjonalności składowych odkształceń do obciążeń i nie mogły być przewidziane teoretycznie.



Rys. 9. Wykres pochodnych  $\partial\varepsilon_{33}/\partial s$  odkształceń pionowych  $\varepsilon_{33}$  względem łuku  $s$

5. Różne od zera wielkości  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{23}$ ,  $\varepsilon_{31}$  wskazują na istnienie tych składowych tensora odkształcenia w przypadkach ściskania elementów betonowych obciążeniem ustawionym osiowo z techniczną dokładnością. Składowe  $\varepsilon_{ij}(i \neq j)$  były dotychczas całkowicie pomijane w znanych przykładach analizy odkształcalności i wytrzymałości elementów betonowych. Biorąc pod uwagę mniejsze wartości bezwzględne odkształceń  $\varepsilon_{ij}(i \neq j)$  niż  $\varepsilon_{ii}$  i związane z tym większe względne błędy pomiarów, można składowe  $\varepsilon_{ij}(i \neq j)$  traktować również jako funkcje liniowe obciążeń.

6. Większe odkształcenia kątowe  $\varepsilon_{31}$  niż  $\varepsilon_{23}$  odpowiadają odkształceniom liniowym  $\varepsilon_{11}$  większym co do bezwzględnych wartości niż odkształcenia  $\varepsilon_{22}$ .

7. Wykres zmienności składowej  $\varepsilon_{33}$  w polu przekroju walca przedstawiony na rys. 7 wskazuje, że odkształcenia te nie są zmienne liniowo wraz ze współrzędnymi, a więc że założenie zachowania płaskich przekrojów po odkształceniu nie jest spełnione. Beton ulega większym odkształceniom w pobliżu środka przekroju walca, a mniejszym na obwodzie.

8. Przy odciążeniu wykres składowej  $\varepsilon_{33}$  jest niemal identyczny z wykresem przy obciążeniu, a odkształcenie trwale jest bardzo małe. Natomiast w przypadku składowej  $\varepsilon_{12}$  odkształcenie trwale po odciążeniu jest bliskie połowie odkształcenia przy największym obciążeniu.

Przedstawione wyniki wskazują na przydatność zastosowanej metody pomiarowej do analizy stanu odkształcenia rzeczywistych elementów przez pomiar wszystkich składowych stanu odkształcenia. Daje ona nowe informacje o rozmieszczeniu

складовых одкшталеца вевнэтрэ валца шцисканого з бетону и о пропорцах помидэу тими складовыми. Информэце те в дэлшых бадэних могоэ позволит на докэднеише вышэние зэховэния сие элементов бетонowych под обциэением и служитэ зэ подстэвэ до коректы подстэвовых зэлеэности. Прэз помiar вшэсткких складовых стэну одкшталеца уникэмы гипотетичных модели одкшталецэности и выникэющих з них зэлоэений о зэлеэности нэпрэжений од одкшталецэ.

#### Литерэтурэ цитовэна в текэциэ

1. Y. C. LOH, *Internal stress gauges for cementitious materials*, Proc. Soc. Experim. Stress Analysis, Cambridge Mass., 2, 11 (1954), 13-28.
2. G. MORAVIA, *Misure estensimetriche all'interno di getti di calcestruzzo*, La Ricerca Scientifica, 8, 25 (1955).
3. G. HONDROS, *The protection and manipulation of electrical strain gauges of the bounded wire type for use in concrete, particularly for internal stress measurements*, Mag. Concr. Research, London, 27, 9 (1957), 173-180.
4. K. E. C. NIELSEN, *Internal stress in concrete*, Bull. RILEM nr 1, Paris 1959, 11-20.
5. В. М. СЕМЕНИСТЫЙ, *Объемные розетки датчиков*, Доклады Львовского Политехнического Института, 1, 5 (1962), 40-45.
6. И. Л. ПИМЕНОВ, *Опыт применения гидроизолированных глубинных датчиков сопротивления для измерения напряжений в бетоне*, Изв. Выс. Учебных Зав., Строительство и Архитектура, № 2, Новосибирск 1963, 146-151.
7. Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *Sondy do wyznaczania odkształceń w betonie i w gruntach*, Wybrane Materiały III Krajowej Konferencji Wytrzymałościowej SIMP-WAT, Warszawa 1963, 125-130.
8. I. MAJCHROWICZ, I. WESELI, *Przystosowanie tensometrycznych czujników do pomiarów wewnętrznych*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Budownictwo, z. 14, Gliwice 1964, 137-139.
9. Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *Measurements of six components of the strain tensor in a compressed concrete cylinder*, Bull. Acad. Polon. Sci., 12, 12 (1964).
10. A. BRANDT, *Études préliminaires des déformations internes du béton*, Ass. Fr. Ponts et Charp., Bull. 85, 1965, 36-40.

#### Резюме

#### ИЗМЕРЕНИЕ ШЕСТИ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДЕФОРМАЦИИ В СЖИМАЕМОМ БЕТОННОМ ЦИЛИНДРЕ

В работе обсуждаются результаты измерений шести составляющих деформированного состояния внутри бетонного цилиндра, подверженного сжатию. Измерения проводились с помощью пространственной системы электрических датчиков омического сопротивления, забетонированных вблизи срединного поперечного сечения цилиндра. В результате исследований получены диаграммы изменения всех составляющих деформации в функции нагрузки. В выводах отмечены расхождения существующие между измеренным деформированным состоянием и состоянием определяемым на основании обще принятых гипотез. Это касается появления угловых деформаций при сжатии осевой нагрузкой расположенной с технической точностью, а также изменчивости в плоскости исследуемого поперечного сечения, линейных деформаций, параллельных и перпендикулярных направлению действия нагрузки.



## S u m m a r y

MEASUREMENTS OF SIX STRAIN-COMPONENTS  
IN THE COMPRESSED CONCRETE CYLINDER

The paper deals with measurements of the six strain-components inside a concrete cylinder loaded by axial compression. The measurements have been performed by means of a spatial system of electrical strain-gauges, located in the vicinity of the mid-length cross-section of the cylinder. As a result of investigation, the diagrams of all strain-components as a function of applied load are obtained. In conclusion, attention is drawn to the fact that the existing state of strain differs from that obtained on the basis of usual hypothesis. This fact concerns the shearing strains which appeared during the axial compression arranged with technical accuracy, and the variability in the investigated cross-section of longitudinal strains parallel and perpendicular to the direction of loading.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 11 stycznia 1965 r.*

---

TENSOR KELVINA-SOMIGLIANY DLA CIAŁA LEPKOSPĘŻYSTEGO

EUGEN SOÓ S (BUKARESZT)

GURTIN i STERNBERG [1] uogólnili rozwiązanie Papkowicza-Neubera [2, 3] na przypadek materiału lepkospężystego w zakresie quasi-statycznym. STERNBERG i KHOZAE [4] wyznaczyli, stosując pewien proces graniczny, stan naprężenia i odkształcenia wywołany działaniem siły skupionej na nieograniczone ciało lepkospężyste, uogólniając w ten sposób pojęcie tensora Kelvina-Somigliany [5-7]. Ten sam problem w zakresie dynamicznym został rozwiązany przez NOWACKIEGO [8].

Dla powtórnego wyprowadzenia wyników podanych w pracy [4] posłużymy się metodą zastosowaną przez SANDRU [9, 10] do wyznaczenia tensora Kelvina-Somigliany dla ciała sprężystego. W tym celu posłużymy się własnościami funkcji Diraca.

Niech

$$(1) \quad \theta(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \varphi(\mathbf{r}, t-\tau) d\psi(\mathbf{r}, \tau)$$

będzie splotem Riemanna-Stjeltiesa funkcji  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  i  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , co możemy także zapisać w postaci

$$(2) \quad \theta = \varphi \times d\psi.$$

Przy spełnieniu warunków twierdzenia 1.2 pracy [1] mamy

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi \times d\psi &= \psi \times d\varphi, & \varphi \times d(\psi \times d\theta) &= (\varphi \times d\psi) = \varphi \times d\psi \times d\theta, \\ \varphi \times d(\psi + \theta) &= \varphi \times d\psi + \varphi \times d\theta, & \varphi \times dH &= \varphi, & \varphi \times d\varphi^{-1} &= H, \end{aligned}$$

przy czym  $H(t)$  oznacza funkcję Heaviside'a [11], a  $\varphi^{-1}$  jest przekształceniem odwrotnym Stjeltiesa funkcji  $\varphi$  [1].

Pełny układ równań dla nieograniczonego ciała lepkospężystego ma postać

$$(4) \quad 2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}.$$

Równanie równowagi

$$(5) \quad \sigma_{ij,j} + F_i = 0.$$

Równania stanu typu relaksacyjnego

$$(6) \quad s_{ij} = e_{ij} \times dG_1, \quad \sigma_{kk} = \varepsilon_{kk} \times dG_2;$$

$$(7) \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}.$$

Warunki brzegowe

$$(8) \quad \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

W powyższych równaniach  $u_i$  są składowymi wektora przemieszczenia  $\mathbf{u}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  i  $\sigma_{ij}$  oznaczają zaś składowe tensorów odkształcenia i naprężenia.  $F_i$  są składowymi siły masowej  $\mathbf{F}$  w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x_1, x_2, x_3)$ , a  $G_1(t)$  oraz  $G_2(t)$  są funkcjami relaksacji dla ścinania i ściskania izotropowego. Zakładamy, że  $G_i(t) > 0$ .

Zgodnie z twierdzeniem 9.4 pracy [1] wektor

$$(9) \quad \mathbf{u} = \nabla(\varphi + \mathbf{r}\psi) \times d(G_1 + 2G_2) - 4\psi \times d(2G_1 + G_2)$$

jest rozwiązaniem układu równań (4-7), jeśli

$$(10) \quad \Delta\varphi = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}, \quad \Delta\psi = \frac{1}{2}\mathbf{f}, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{f} = \mathbf{F} \times dG_1^{-1} \times d(2G_1 + G_2)^{-1}.$$

Dla otrzymania tensora Kelvina-Somigliany przedstawiamy siłę skupioną  $\mathbf{F}$  w postaci

$$(11) \quad \mathbf{F} = F\delta(\mathbf{r})H(t)\mathbf{i}_k,$$

gdzie  $\mathbf{i}_k$  jest wektorem jednostkowym osi  $Ox_k$ , a  $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$  jest uogólnioną funkcją Diraca [11].

Posługując się związkiem podanym w pracy [11]

$$(12) \quad \mathbf{r}\delta(\mathbf{r}) = 0$$

i równaniami (3), (11) tejsze pracy otrzymujemy

$$(13) \quad \Delta\varphi = 0, \quad \Delta\psi = \frac{1}{2}F\delta(\mathbf{r})G_1^{-1} \times d(2G_1 + G_2)^{-1}\mathbf{i}_k.$$

Na podstawie (8) i (13) wynika stąd, że  $\varphi \equiv 0$ .

W oparciu o związek (por. [11])

$$(14) \quad \Delta \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

otrzymujemy ze związków (13)

$$(15) \quad \psi = -\frac{F}{8\pi|\mathbf{r}|} G_1^{-1} \times d(2G_1 + G_2)^{-1}.$$

Równania (12) i (14) należy oczywiście rozpatrywać z uwzględnieniem sensu funkcji uogólnionych [11].

Z równań (3), (9) i (15) dochodzimy do następujących wyrażeń na składowe tensora Kelvina-Somigliany

$$(16) \quad u_i^{(k)}(\mathbf{r}, t) = \frac{F}{8\pi|\mathbf{r}|} \left\{ 3J_1(t) \left[ \delta_{ki} + \frac{x_k x_i}{|\mathbf{r}|^2} \right] + 3Q_1(t) \left[ \delta_{ki} - \frac{x_k x_i}{|\mathbf{r}|^2} \right] \right\},$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(17) \quad J_1(t) = G_1^{-1}(t), \quad Q_1(t) = (2G_1 + G_2)^{-1}.$$

W ciele sprężystym  $G_1 = 2\mu H(t)$ ,  $G_2 = 3kH(t)$  i równania (16) i (17) prowadzą do znanych wzorów na składowe tensora Kelvina-Somigliany.

#### Literatura cytowana w tekście

1. M. E. GURTIN, E. STERNBERG, *On the linear theory of visco-elasticity*, Arch. Rat. Mech. and Anal., 4, **11** (1962).
2. Л. Ф. ПАПКОВИЧ, *Теория упругости*, Оборонгиз, 1939.
3. H. NEUBER, *Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie*, Z.A.M.M., 4, **15** (1934).
4. E. STERNBERG, A. KHOZAJE, *On Green's functions and Saint-Venant's principle in the linear visco-elasticity*, Arch. Rat. Mech. and Anal., 2, **15** (1964).
5. W. THOMSON, *Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid*, Cambridge and Dublin Math. Journal, 3 (1884).
6. LORD KELVIN, P. G. TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, Cambridge 1923.
7. C. SOMIGLIANA, *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo*, Il Nuovo Cimento, Ser. 3, 1885.
8. W. NOWACKI, *Stress propagation in an infinite visco-elastic body produced by a time variable point force*, Arch. Mech. Stos., 6, **11** (1959).
9. N. SANDRU, *Asupra actiunii unei forte concentrate in spatiul elastic nemarginit*, Com. Acad. R.P.R., 12, **12** (1963).
10. N. SANDRU, *О действии переменных во времени сосредоточенных сил в неограниченном упругом пространстве*, Бюл. Польской Акад. Наук, Сер. тех. наук, I, 2(1964).
11. И. М. ГЕЛЬФАНД, Г. Е. ШИЛОВ, *Обобщенные функции*, вып. I, Москва 1958.

#### Резюме

#### ТЕНЗОР КЕЛЬВИНА-СОМИЛЬЯНА ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА

Используя обобщенное решение Папковича-Нейбера (9) и (10) и свойства обобщенной функции Дирака (12) и (14) определяется тензор Кельвина-Сомильяна (17) для вязко-упругого тела в линейной и квазистатической областях.

#### Summary

#### THE KELVIN-SOMIGLIANA TENSOR FOR A VISCO-ELASTIC MATERIAL

Using the generalised Papkovitch-Neuber solution (9), (10) and the properties of the generalised function of Dirac (12), (14) we determine the Kelvin-Somigliana tensor (17) for a visco-elastic material in the linear quasi-static theory.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 12 grudnia 1964 r.*



DOŚWIADCZALNE BADANIA NAD SKOŃCZONYMI, SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYMI  
UGIĘCIAMI BELEK OPARTYCH NA NIEPRZESUWNYCH PODPORACH

ZENON W A S Z C Z Y S Z Y N (KRAKÓW)

1. Wstęp

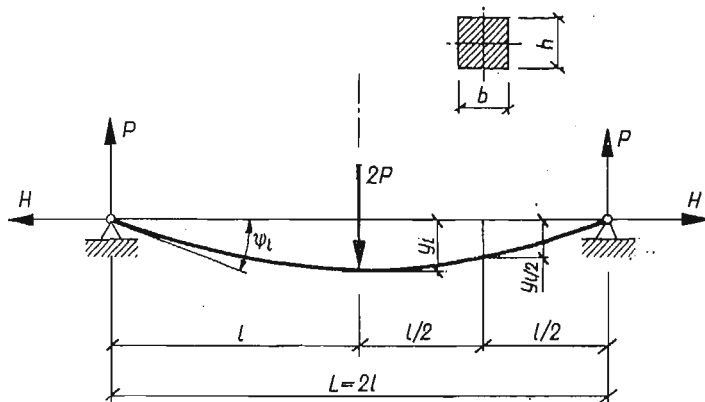
Obliczanie skończonych, sprężysto-plastycznych ugięć belek opartych na podporach ze skrupowaną przesuwnością napotyka znaczne trudności. W przypadku ciała idealnie sprężysto-plastycznego (model typu Prandtla) w belce powstaną obszary o różnym typie rozkładu naprężeń (rozkład sprężysty, jednostronne i dwustronne uplastycznienie), co pociąga za sobą konieczność rozwiązywania różnego typu równań. Otrzymane przez S. D. LEJTESA [3, 4] rozwiązania oparte na teorii małych ugięć czy też ściśle rozwiązania otrzymane przez autora i M. ŻYCZKOWSKIEGO [5], oparte na teorii ugięć skończonych belki o osi rozciągliwej, mają bardzo skomplikowaną postać, a «zszywanie» ich poprzez odpowiednie warunki brzegowe napotyka duże trudności. Stosowanie innych, bardziej skomplikowanych modeli o ciągłej charakterystyce  $\sigma-\epsilon$  prowadzi do jeszcze bardziej skomplikowanych równań nieliniowych; jak dotąd, podano w literaturze rozwiązanie dla czystego zginania, lecz w naszym przypadku nie możemy pominąć wpływu siły podłużnej.

Wspomniane trudności «zszywania» poszczególnych obszarów ominięte zostały przez zastosowanie metody przybliżonej, mianowicie metody kolokacji (por. [7, 8]). Metoda ta polega na przyjęciu a priori postaci ugiętej osi belki jako funkcji z pewną liczbą wolnych parametrów wyznaczanych z odpowiednich warunków kolokacji. Otrzymano w ten sposób przybliżone rozwiązanie, którego poprawność — wobec braku ścisłego rozwiązania — sprawdzono w obecnej pracy na drodze doświadczalnej.

We wspomnianych pracach [7, 8] analizowano przypadek skrupowanego sprężystego podparcia, tj. przypadek, gdy reakcje belki są liniowymi funkcjami przemieszczeń podpór. Doświadczalnie zweryfikowano rozwiązanie przybliżone, otrzymane dla granicznego przypadku, gdy podpory są nieprzesuwne. Sprawdzono również dobrze znany z elementarnej teorii małych ugięć przypadek doskonale przesuwnych podpór. Otrzymana dobra zgodność dla obydwu granicznych przypadków, a w szczególności dla nieprzesuwne podparcia, pozwala wyciągnąć wniosek, że również dla pośrednich przypadków zgodność teorii z doświadczeniem będzie dobra. Taki wniosek ma duże znaczenie dla obliczania sprężysto-plastycznych ugięć belek, gdyż w rzeczywistości podpory będą wykazywały pewną skrupowaną przesuwność.

Doświadczenia wykonano na modelu belki o przekroju prostokątnym, wolno podpartej, wykonanej z miękkiej stali węglowej. Ze względu na łatwość realizacji obciążenia zbadano belkę obciążoną siłą skupioną ustawioną symetrycznie (rys. 1).

Model belki (w dalszym ciągu będziemy go nazywali beleczką) był badany w specjalnie skonstruowanym przyrządzie. Dla wykonania beleczek i przyrządu wykorzystano materiał i możliwości technologiczne laboratorium Katedry Statyki Budowli i Wytrzymałości Materiałów; w mniejszym stopniu korzystano również z pomocy



Rys. 1

innych Katedr Politechniki Krakowskiej. To samo dotyczy przyrządów pomiarowych takich jak siłomierze, czujniki, mostek tensometryczny. Jak już wspomnieliśmy, wykonane doświadczenia zostały potraktowane jedynie jako weryfikujące dociekania teoretyczne, dlatego też zbadano tylko krótkie serie beleczek (nie bez znaczenia był również fakt skromnych środków budżetowych).

Otrzymane wyniki należy więc traktować jako szacunkowe również ze względu na wpływ wielu parametrów nie dających się wyeliminować przy wykonywaniu doświadczeń. Z drugiej strony w rozważaniach teoretycznych nie ujęto wielu parametrów bądź w wyniku przyjętych założeń (np. wprowadzony model ciała idealnie sprężysto-plastycznego lub ze wzmocnieniem liniowym), bądź też z powodu trudności czysto rachunkowych (np. wpływ ociążenia). Otrzymane w tych warunkach niewielkie rozbieżności między wynikami doświadczeń a obliczeniami teoretycznymi dobrze świadczą zarówno o proponowanej metodzie, jak i dokładności wykonanych doświadczeń.

W obecnej pracy na początku podamy krótki szkic obliczenia ugięć belki opartej na nieprzesuwanych podporach, następnie szczegółowo opiszemy przeprowadzone doświadczenia oraz podamy porównanie i analizę wyników otrzymanych na podstawie przeprowadzonych doświadczeń i obliczeń teoretycznych.

## 2. Szkic obliczania ugięć sprężysto-plastycznych rozpatrywanej belki metodą kollokacji

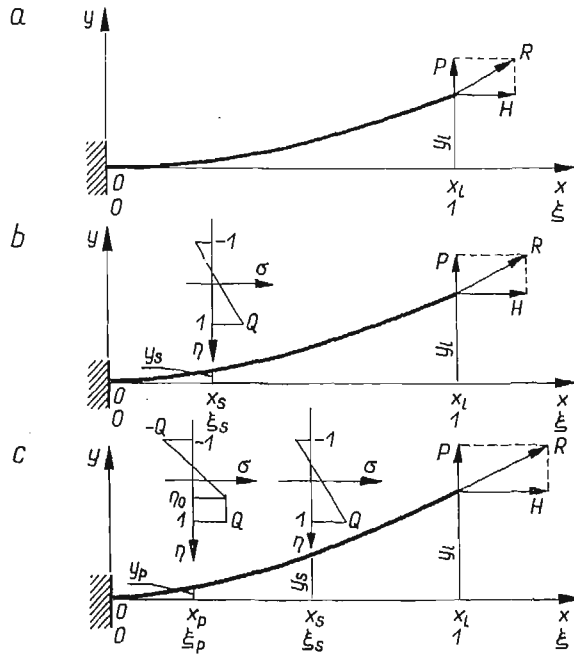
Zastosowanie metody kollokacji do obliczania sprężysto-plastycznych ugięć belek ze skrupowaną przesuwnością podpór zostało podane w pracach [7, 8]. Obecnie przypominamy w skrócie jedynie rozwiązanie dla belki opartej na nieprzesuwanych podporach i dodatkowo uwzględnimy w rozwiązaniu wstępny naciąg.

Wstępny naciąg  $H_w$  przykładaliśmy do belki w celu zlikwidowania luzów, a wobec nieobowiązywania zasady superpozycji musimy go uwzględnić w wyjściowym równaniu nieprzesuwności

$$(2.1) \quad \frac{x_l}{l} = 1 + \frac{H_w}{EF},$$

gdzie  $x_l$  jest współrzędną końca ugiętej belki.

W belce wykonanej z materiału idealnie sprężysto-plastycznego o jednakowej granicy plastyczności na ściskanie i rozciąganie  $Q_r = |Q_c| = Q$  w miarę zwiększania obciążenia zewnętrznego obok obszaru sprężystego pojawi się kolejno obszar jednostronnego a następnie dwustronnego uplastycznienia. Na rysunku 2 pokazano połowę badanej belki, gdyż ze względu na symetrię zamiast belki wolnopodpartej z rys. 1 możemy rozpatrywać dwie belki wspornikowe.



Rys. 2

Przy uproszczeniu zagadnienia do zadania jednowymiarowego oraz wprowadzenia bezwymiarowej cechy identyczności  $\xi$  jako zmiennej niezależnej możemy współrzędne końców ugiętej belki zapisać w postaci

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{x_l}{l} &= \int_0^{\xi_p} \frac{s'}{l} \cos \psi d\xi + \int_{\xi_p}^{\xi_s} \frac{s'}{l} \cos \psi d\xi + \int_{\xi_s}^1 \frac{s'}{l} \cos \psi d\xi, \\ \frac{y_l}{l} &= \int_0^{\xi_p} \frac{s'}{l} \sin \psi d\xi + \int_{\xi_p}^{\xi_s} \frac{s'}{l} \sin \psi d\xi + \int_{\xi_s}^1 \frac{s'}{l} \sin \psi d\xi. \end{aligned}$$



Wartości pochodnych  $s'$  oraz krzywizn  $\psi'$  obowiązujących w poszczególnych obszarach (przy założeniu stałej siły podłużnej  $N \equiv H$  na długości całej belki) przyjmują postać wyprowadzoną w pracy [5] (dotyczącej obliczania ugięć skończonych belek prostokątnych o rozciągliwej osi); otrzymaliśmy tam mianowicie

$$(2.3.1) \quad \begin{aligned} \frac{ds}{l d\xi} &\equiv \frac{s'}{l} = 1 + a^2 r, \\ \frac{d\psi}{d\xi} &\equiv \psi' = \frac{a^2 \lambda}{2\sqrt{3}} m, \end{aligned} \quad \xi_s \leq \xi \leq 1,$$

$$(2.3.2) \quad \begin{aligned} \frac{s'}{l} &= 1 + a^2 + \frac{2\sqrt{3}}{\lambda} \psi' - 2a \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\lambda} (1-r) \psi'} \\ \psi' &= \frac{2a^2 \lambda}{\sqrt{3}} \frac{(1-r)^3}{(3-3r-m)^2}, \end{aligned} \quad \xi_p \leq \xi \leq \xi_s$$

$$(2.3.3) \quad \begin{aligned} \frac{s'}{l} &= 1 + \frac{2\sqrt{3}}{\lambda} r \psi', \\ \psi' &= \frac{a^2 \lambda}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3-3r^2-2m}}, \end{aligned} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_p,$$

gdzie wprowadzono bezwymiarowe oznaczenia

$$a^2 = \frac{Q}{E}, \quad \lambda = \frac{2l}{i}, \quad m = \frac{M}{QW}, \quad r = \frac{H}{QF}.$$

Jak już wspomnieliśmy we wstępie, rozwiązanie ściśle jest bardzo skomplikowane i występuje zasadnicza trudność «zszycia» poszczególnych obszarów (wyznaczenia wartości  $\xi_p$  i  $\xi_s$ ). Z tego powodu zastosowano metodę kolokacji.

Metoda kolokacji, zaproponowana przez R. A. FRAZERA, F. P. JONESA i S. W. SKAN [2] polega na przyjęciu jednej funkcji wspólnej dla całego obszaru. Funkcję przyjmuje się z pewną liczbą wolnych parametrów, które dobiera się tak, aby były spełnione warunki brzegowe i warunki kolokacji, tj. zgodności ze ściśłym rozwiązaniem funkcji lub jej pochodnych w pewnej liczbie punktów, czyli tzw. węzłach kolokacji; będzie to wtedy kolokacja wewnętrzna z pochodnymi (wg klasyfikacji podanej przez L. COLLATZA [1]).

W przypadku naszej belki spośród wielu możliwych funkcji wybrano funkcję wymierną—funkcję rozkładu kąta ugięcia

$$(2.4) \quad \psi = A\bar{\psi} \equiv A \frac{\xi + C\xi^2}{1 - B + B\xi},$$

która przy

$$(2.5) \quad C = -\frac{1-B}{2-B}$$

spełnia warunki brzegowe

$$(2.6.1) \quad \xi = 0, \quad \psi = 0.$$

$$(2.6.2) \quad \xi = 1, \quad \psi' = 0.$$

Dobór takiej funkcji umożliwi przy  $B \rightarrow 0$  przejście do elementarnego rozwiązania znanego z wytrzymałości materiałów, natomiast przy  $B \rightarrow 1$  przejście do ciągną.

Stałe  $A$  i  $B$  wyznaczmy z warunków kolokacji. Pierwszym warunkiem kolokacji będzie zgodność krzywizny przy utwierdzeniu wspornika z rys. 2 (dla  $\xi = 0$ ) obliczonej wg ścisłych równań (2.3) z krzywizną obliczoną dla funkcji kolokowanej (2.4). Jako drugi warunek kolokacji przyjęto zgodność  $\psi''$  na końcu belki (dla  $\xi = 1$ ). Warunki te zapiszemy w skróconej postaci

$$(2.7.1) \quad \psi'_0 = A\bar{\psi}'_0,$$

$$(2.7.2) \quad \psi'_1 = A\bar{\psi}'_1.$$

Gdy zrezygnujemy ze spełnienia drugiego warunku kolokacji (ustalamy wartość stałej  $B$ ), to będziemy mieli kolokację jednopunktową; kolokację nazwiemy dwupunktową, gdy spełnione są obydwa warunki (2.7).

Warunek (2.7.2.) będzie miał zawsze jednakową postać, gdyż w punkcie  $\xi = 1$  zawsze będzie występował obszar sprężysty. Warunek ten można zapisać w następującej przybliżonej postaci

$$(2.8) \quad A\bar{\psi}'_1 \approx \frac{a^2 \lambda^2}{4} (r \sin \psi_1 - p \cos \psi_1)$$

(będzie to wtedy warunek sumy rzutów sił na normalną do odkształconej osi przy podporze). Natomiast pierwszy warunek kolokacji (2.7.1) przyjmie różną postać zależnie od typu rozkładu naprężeń występujących w środku rozpiętości belki; np. dla dwustronnego uplastycznienia otrzymamy warunek w postaci

$$(2.9) \quad A\bar{\psi}'_0 = \frac{a^2 \lambda}{2\sqrt{3}} \left[ 3 - 3r^2 - 3\lambda \left( p \frac{x_1}{l} - r \frac{y_1}{l} \right) \right]^{-1/2}.$$

Znaczne uproszczenie równań można otrzymać przez zachowanie tylko jednego, dominującego obszaru w równaniach (2.2). Ta uproszczona metoda podana w pracy [8], w przypadku wystąpienia np. dwustronnego uplastycznienia jako obszaru dominującego, prowadzi do następującego równania dla wyznaczenia stałej  $A_\lambda$ :

$$(2.10) \quad \frac{J_{21}}{4\bar{\psi}_1} \left( \bar{\psi}_1 - J_{11} + \frac{J_{21}}{4\bar{\psi}_1} \right) A_\lambda^4 - \frac{4\sqrt{3}}{a_\lambda^2} A_\lambda^3 + \left[ \frac{\Delta}{2\bar{\psi}_1} \left( \bar{\psi}_1 - J_{11} + \frac{J_{21}}{2\bar{\psi}_1} \right) - 3 \right] A_\lambda^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta^2}{\bar{\psi}_1^2} + \frac{a_\lambda^2}{3\bar{\psi}_0^2} \right) = 0,$$

gdzie

$$J_{j1} = \int_0^1 \bar{\psi}^j d\xi, \quad A_\lambda = A\lambda, \quad a_\lambda = a\lambda, \quad \Delta = \frac{H_w}{EF} \lambda^2.$$

$j = 1, 2$

Równanie (2.10) powstało na drodze eliminacji z układu trzech równań (2.1), (2.8) i (2.9).

Przy obliczeniach numerycznych zastosowano metodę odwrotną. Ustalano mianowicie wielkość stałej  $B$  i wyliczano  $\bar{\psi}_1$ , całki  $J_{11}$ , pochodne  $\bar{\psi}'_0$ ,  $\bar{\psi}''_1$  (w pracach [7, 8] podano tablicę tych funkcji obliczoną dla różnych wartości  $B$ ). Przy ustalonym wstępnym naciągu  $\Delta$  z równania (2.10) można wyliczyć wielkość stałej  $A_\lambda$ , następnie z równania nieprzesuwności (2.1) wielkość reakcji poziomej  $r$

$$(2.11) \quad r = \frac{J_{21}}{4\sqrt{3}\bar{\psi}_1} A_\lambda + \frac{\Delta}{2\sqrt{3}\bar{\psi}_1 A_\lambda},$$

z drugiego warunku kolokacji (2.8) wielkość siły obciążającej  $p_\lambda$

$$(2.12) \quad p_\lambda = \left( r\bar{\psi}_1 - \frac{4\bar{\psi}''_1}{a_\lambda^2} \right) A_\lambda,$$

a z równania (2.2)<sub>2</sub> przybliżoną wielkość strzałki ugięcia  $f$ :

$$(2.13) \quad \frac{y_1}{l} \lambda \equiv f_\lambda \approx J_{11} A_\lambda.$$

Możemy w ten sposób otrzymać poszczególne punkty wykresów odpowiadające ustalonym wartościom stałej  $B$ .

W przypadku granicznym, gdy  $B = 1$ , belka przechodzi w ciągnio (teoretyczne obciążenie, przy którym to nastąpi, nazwano w pracy [8] nośnością II). W tym przypadku równanie (2.10) można rozwinąć ze względu na  $A_\lambda$ ; otrzymamy

$$(2.14) \quad A_\lambda = 2 \sqrt{6 - \frac{\Delta}{2} + 6 \sqrt{1 - \frac{\Delta}{6}}}.$$

W pracy [8] rozpatrzono również inny przypadek graniczny, gdy wystąpi pełne uplastycznienie w środku rozpiętości. Przypadek ten (odpowiednie obciążenie nazwano w pracy [8] nośnością I) nie może być objęty funkcją kolokowaną (2.4.). Dla wyliczenia nośności I zastosowano metodę kolokacji jednopunktowej i przyjęto do obliczeń funkcję

$$(2.15) \quad \psi = A \left( \sqrt{\xi} - \frac{\xi^4}{8} \right).$$

Dla przypadku belki ze wstępnym naciągiem, opartej na nieprzesuwanych podporach, nośność I będzie wynosiła

$$(2.16) \quad p_\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1 + 0,07256\Delta}{1 + 0,9796 \frac{\Delta^2}{a_\lambda^2}} \left[ 1 + \sqrt{\frac{0,009875a_\lambda^4 + 0,009673\Delta^2}{(1 + 0,07256\Delta^2)}} \right].$$

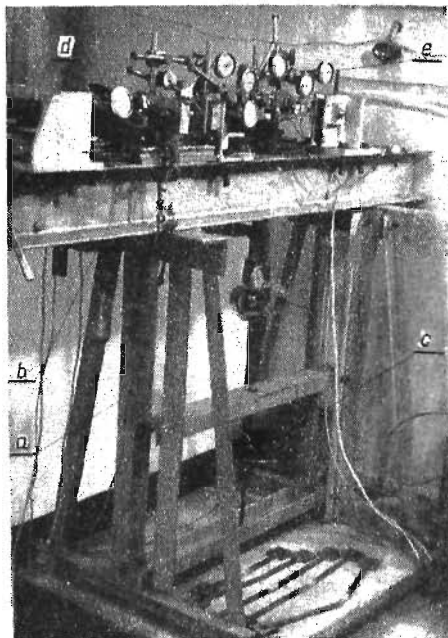
Dla wyznaczenia pozostałych wartości otrzymamy następujące równania: dla obliczenia stałej  $A_\lambda$

$$(2.17) \quad A_\lambda = \frac{a_\lambda^2}{\sqrt{3\sqrt{3}p_\lambda}} = 0,4387 \frac{a_\lambda^2}{\sqrt{p_\lambda}},$$



Spełnienie tego ostatniego warunku okazało się najtrudniejsze. Problem rozwiązano w ten sposób, że przy niewielkim wzroście obciążenia najpierw zezwolono na przesuw jednej z podpór (w dalszym ciągu będziemy ją nazywali podporą ruchomą), a następnie przez powiększanie siły poziomej (siły napinającej) likwidowano ten przesuw. Dzięki małemu skokowi siły obciążającej wyniki otrzymane drogą takiej superpozycji są bardzo zbliżone do rzeczywistych, odpowiadających z góry założonym podporom doskonale nieprzesuwnym.

Cały przyrząd, pokazany na rys. 3, składa się z pięciu zasadniczych części, mianowicie: a) stojaka, b) podstawy, c) urządzenia obciążającego, d) urządzenia napinającego, e) przyrządów pomiarowych.



Rys. 3

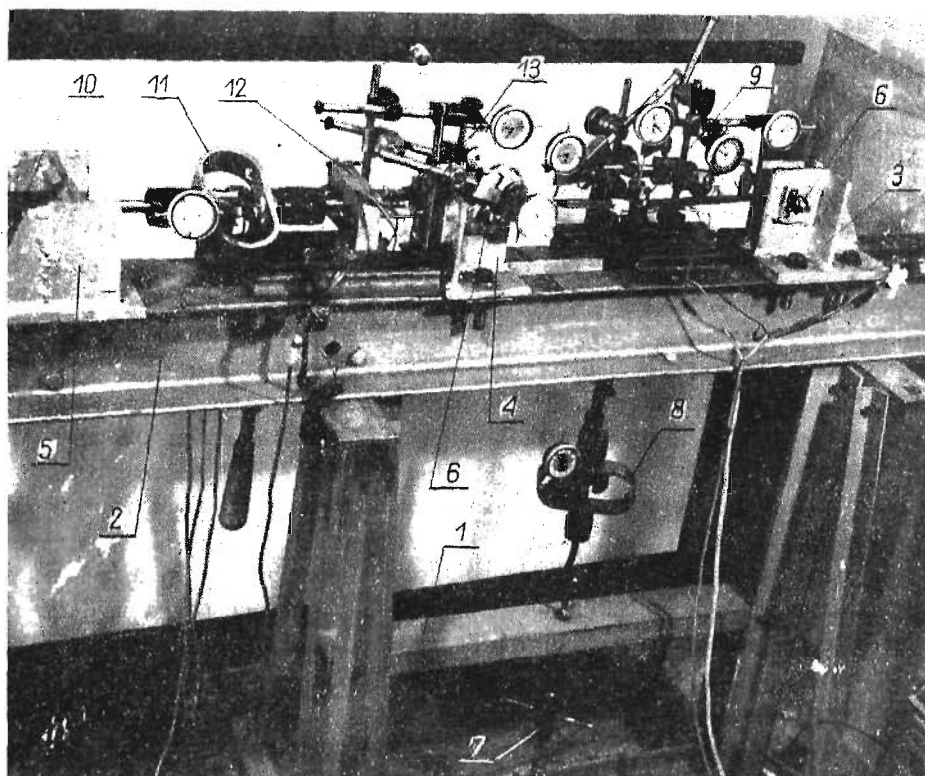
Teraz podamy krótki opis każdej części, zwracając przy tym uwagę na rozwiązania wynikające ze specyfiki badanego modelu.

a) *Stojak* został zbudowany ze stalowych kształtowników połączonych ze sobą śrubami, przy czym w podłużnicach 1 wykonano otwory (por. rys. 4) dla umieszczenia urządzenia napinającego.

b) *Podstawa* stanowi zasadniczą część przyrządu. Składa się ona z podłużnicy głównej 2, do której przyśrubowano wsporniki podporowe 3 i 4 oraz wspornik oporowy 5.

W podłużnicy głównej (skręcone na stałe ][ 140) wywiercono otwory do przykręcania wsporników. Dzięki stałemu rozstawowi otworów, równemu 100 mm, można było przesuwac wspornik 3 i badać beleczki o różnej rozpiętości (od 300 do 700 mm).

Wsporniki zostały wykonane jako sztywne, spawane konstrukcje. We wsporniku 3 wywiercono poziomy otwór  $\varnothing 20$  w którym umieszczono sworznię podporową 6, przy czym dano dodatkowe blaszki oporowe (widoczne na rys. 4) uniemożliwiające obrót sworzni. Wspornik 4 spełniał rolę podstawy dla podpory przesuwnej, dlatego też w jego górnej części skonstruowano prowadnice (gładkie powierzchnie z bocz-



Rys. 4

nymi oporami) umożliwiające przesuw sworzni podporowego. We wsporniku 4 oraz we wsporniku oporowym 5 zrobiono podłużne otwory dla założenia urządzenia napinającego.

c) *Urządzenie obciążające* pozwoliło, dzięki dokręcaniu śruby rzymskiej 7, na realizację obciążenia siłą skupioną. Siła obciążająca była przekazywana poprzez siłomierz 8 oraz sworznię 9 opartą na badanej beleczce.

d) *Urządzenie napinające* zostało skonstruowane podobnie jak urządzenie obciążające. Dzięki dokręcaniu klucza napinającego 10, poprzez siłomierz 11, płytkę łączącą 12 oraz śruby specjalne 13, można było realizować potrzebną siłę rozciągającą i przekazywać ją na beleczkę. Kwadratowe przekroje śrub specjalnych oraz końcówek siłomierza, wchodzące w otwory podłużne wsporników, zapobiegały przy tym skręcaniu się całego urządzenia.

e) *Przyrządy pomiarowe.* Przyrządy pomiarowe użyte przy badaniach, to wspomniane już wcześniej siłomierze 8 i 11, czujniki mechaniczne oraz urządzenie tensometryczne.

Do badań użyto siłomierzy pałkowych Typ WK 19/0,5 i Typ WK 19/1. Pierwszy z wymienionych, użyty w urządzeniu obciążającym, można obciążać maksymalną siłą równą 500 kG; drugi siłomierz, zastosowany w urządzeniu napinającym, pozwolił na odczytywanie sił do 1500 kG. Wielkość przykładanej siły można wyliczyć z ugięcia się pałków, odczytanego na dołączonych czujnikach  $10\mu$ . W przyrządzie zastosowano te siłomierze ze względu na szereg zalet, takich jak duża czułość (błędy rzędu  $\pm 0,3\%$ ), mała odkształcalność, niewielkie wymiary i mały ciężar.

Do mierzenia przemieszczeń użyto czujników mechanicznych. Wielkość przesuwu podpór mierzono czujnikami niemieckimi Keilport Suhl o czułości równej  $1/1000 \text{ mm} = 1\mu$  (w dalszym ciągu będziemy je nazywali czujnikami  $1\mu$ ), natomiast ugięcia i kąty obrotu przekrojów przypodporowych zmierzono czujnikami polskimi MNZa—A o czułości  $1/100 \text{ mm} = 10\mu$ . Czujniki rozmieszczono w punktach widocznych na rys. 4, a mianowicie: czujniki  $1\mu$  umieszczono poziomo, tak aby ich końcówki dotykały gładkich powierzchni końcówek sworzni podporowych 6, natomiast rozmieszczenie czujników  $10\mu$  pozwalało na zmierzenie ugięcia w środku i  $1/4$  rozpiętości beleczki oraz dzięki dodatkowym wskazówkom przymocowanym do beleczki umożliwiało zmierzenie kątów obrotu przekrojów przypodporowych.

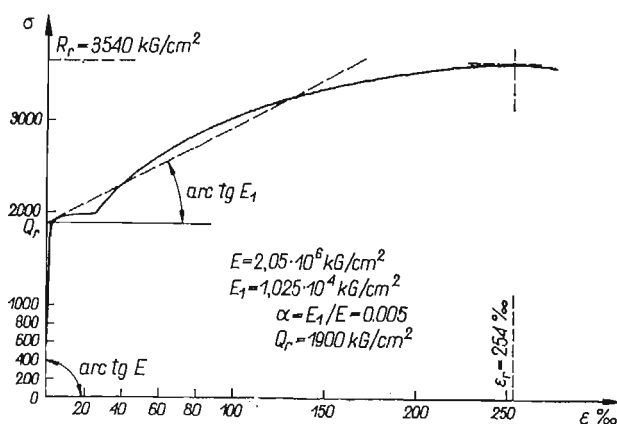
Dla dodatkowego sprawdzenia wielkości realizowanego naciągu i osiowości przekazywanej siły, na śrubach specjalnych 13 naklejono tensometry oporowe typu K/10 o bazie równej 10 mm. Taki sam tensometr naklejony na spodzie beleczki pozwalał zmierzyć wydłużenia dolnych włókien (do  $14\%$ ) pod siłą skupioną. Odczyty zmian oporności tensometrów były prowadzone na mostku tensometrycznym CWU «Libella» Typ SDT-1.

**3.2. Beleczki.** Badania przeprowadzono na trzech typach beleczek o tym samym przekroju kwadratowym  $10 \times 10 \text{ mm}$  (dokładne wymiary podano w tablicy 1) i długościach 300, 400 i 500 mm.

Beleczki były wycinane z płaskownika  $\square 60 \times 10$ , wykonanego ze stali X. W trakcie wstępnego badania wytrzymałościowego okazało się, że stal ma dosyć wysoką granicę plastyczności ( $Q_r \approx 2500 \text{ kG/cm}^2$ ), toteż poddano ją wyżarzaniu. Mianowicie pocięty na odpowiednie kawałki płaskownik poddano przez 20 min. działaniu temperatury  $500^\circ\text{C}$ , a następnie pozostawiono go przez 24 godziny w celu ostygnięcia razem z piecem. Dzięki temu otrzymano znaczne obniżenie granicy plastyczności i wydłużenie się platformy plastycznej.

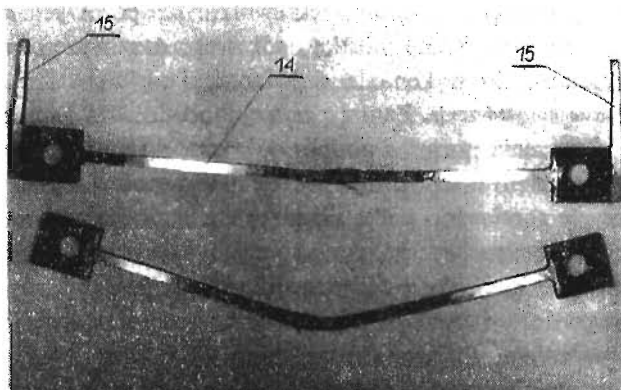
Na rysunku 5 podano uśredniony wynik próby rozciągania próbek o przekroju  $18 \times 10 \text{ mm}$  wyciętych z tych samych kawałków płaskownika, z których zrobiono następnie beleczki. Próby rozciągania wykonano na maszynie wytrzymałościowej WPM (produkcji NRD), przy czym wydłużenie zbadano przystosowanymi czujnikami typu Somet (czeskosłowackie). Uśredniony wykres  $\sigma - \epsilon$  naniesiony na rys. 5 aproksymowano, dla wykonania przeliczeń, dwiema liniami prostymi. Do obliczeń przyjęto moduł Younga  $E = 2,05 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$ , granicę plastyczności  $Q_r = 1900 \text{ kG/cm}^2$  oraz współczynnik wzmocnienia  $\alpha = E_1/E = 0,005$ .

Kształt beleczki 14 widoczny jest na rys. 6 (pokazano beleczki o długości 500 mm już po wykonaniu badań). Właściwy przekrój jest utrzymany na części środkowej, natomiast rozszerzenia na końcach umożliwiły wykonanie otworów  $\varnothing 20$  dla umieszczenia sworzni podporowych. Część środkowa została wycięta z płaskownika frezem tarczowym i następnie była oszlifowana. Taki sposób obróbki rzutował



Rys. 5

na przyjęcie minimalnego przekroju beleczek wynoszącego  $10 \times 10$  mm ze względu na ich wiotkość (szczególnie przy długości 500 mm) przy frezowaniu. Otwory dla sworzni zostały wykonane z pasowaniem obrotowym (pasowanie  $\varnothing 20$  H7/f6). Przy trasowaniu środek otworów umieszczano na osi podłużnej beleczki w rozstawie



Rys. 6

2l odpowiadającym żądanej rozpiętości, symetrycznie względem środka (przewidywanego punktu przyłożenia siły obciążającej).

Do obydwu końców beleczki przykręcano wskazówki 15 dla zmierzenia kąta ugięcia przekrojów przypodporowych. Długość wskazówki mierzona między środkiem otworu  $\varnothing 20$  i punktem przyłożenia końcówki czujnika wynosiła 100 mm.



#### 4. Opis przeprowadzonych doświadczeń

**4.1. Przygotowanie beleczek i przyrządu do badań.** Zanim przystąpiono do wykonania doświadczenia należało każdorazowo przygotować zarówno model, jak też przyrząd do badań.

Do beleczki przeznaczonej do badania przykręcano wskazówki, jak pokazano na rys. 6. Następnie trasowano beleczkę przez narysowanie poprzecznych kresiek dzielących rozpiętość  $L = 2l$  (odmierzaną między środkami otworów  $\varnothing 20$ ) na cztery równe odcinki. W środku rozpiętości po stronie włókien dolnych (w dalszym ciągu górnymi włóknami będziemy nazywali włókna po stronie wskazówek) naklejano tensometr oporowy.

W przyrządzie, w zależności od rozpiętości beleczki, przesuwano wspornik podporowy 4. Przed założeniem beleczki wszystkie powierzchnie elementów ruchowych (sworzni podporowy, otwory i prowadnicę) nacierano dwusiarczkiem molibdenu ( $\text{MoS}_2$ ), a po zmontowaniu posmarowano niewielką ilością oleju. Dzięki temu można było znacznie zmniejszyć tarcie.

Po założeniu beleczki i zmontowaniu urządzenia napinającego przesuwano całą podstawę tak, aby środek beleczki znalazł się pionowo nad środkiem otworu w podłużnicy 1. Dzięki temu można było zmontować urządzenie obciążające we właściwym położeniu.

Na koniec za pomocą typowych wsporników, przykręconych do podłużnicy głównej, umieszczano czujniki w punktach widocznych na rys. 4. Czujniki  $10\mu$  mierzące ugięcia w  $1/4 L$  umieszczano nad kreskami zrobionymi na beleczce, natomiast czujnik mierzący ugięcie w środku rozpiętości umieszczano tak, aby jego końcówka dotykała gładkiej powierzchni, zrobionej w górnej części sworzni 9. Czujniki  $1\mu$  mierzące poziome przesunięcia podpór umieszczono tak, aby końcówki czujników dotykały powierzchni końcówek sworzni podporowych 6.

Po podłączeniu tensometrów do mostka oporowego oraz wyzerowaniu czujników można było przystąpić do wykonania doświadczenia.

**4.2. Przeprowadzenie doświadczenia.** Zanim przystąpiono do właściwego doświadczenia zmierzono przemieszczenia poziome podpór. W tym celu po kilkakrotnym napięciu siłą ok. 1000 kG (usunięto w ten sposób drobne nierówności powierzchni otworów i sworzni) ponownie rozciągano belkę urządzeniem napinającym, zapisując kolejno przemieszczenia podpór: ruchomej i nieruchomej. Postępowano tak aż do osiągnięcia maksymalnej, możliwej do zrealizowania siły napinającej równej 1500 kG. Po odjęciu łatwego do wyliczenia wydłużenia sprężystego beleczki i kilkakrotnym (3-krotnym) powtórzeniu obciążenia otrzymano tabelę poprawek, które należało uwzględnić przy właściwym doświadczeniu. Poprawki te pozwoliły uwzględnić przemieszczenia podpór spowodowane odkształceniami zarówno otworów i sworzni (np. w wyniku działania naprężeń stykowych), zginaniem wsporników, jak i innymi wpływami, których nie można było ująć obliczeniowo. Wielkość otrzymanych poprawek przy sile napinającej równej 1500 kG wynosiła średnio  $120\mu$  dla podpory nieruchomej i  $300\mu$  dla podpory ruchomej. Poprawki obliczano osobno dla każdej z badanych beleczek, gdyż nawet niewielkie odchyłki, nieuniknione ze względów technologicznych, znacznie zmieniały podane wyżej wielkości przesuwów.

Po takim przygotowaniu można było wykonać właściwe doświadczenie. Aby uniknąć zniekształcenia odczytów przy małych siłach obciążających, powstałych na skutek istnienia luzów oraz opadania urządzenia napinającego, przykładano do beleczki niewielki wstępny naciąg (40–120 kG) przez dokręcanie klucza napinającego 10. Następnie dzięki dokręcaniu śruby rzymskiej 7 realizowano siłę skupioną, przy czym drobnozwojowy gwint pozwalał na dokładne dozowanie siły; w naszym przypadku przyjęto skok siły równy 20–25 kG.

Przyjęto następującą kolejność działania. Przez dokręcenie śruby rzymskiej zwiększono obciążenie o 18–20 kG. Towarzyszyło temu, obok ugięcia się belki, również pewne przesunięcie się podpór ku środkowi belki (przesunięcie takie będziemy nazywali ujemnym). Następnie poprzez dokręcenie klucza napinającego zwiększono siłę poziomą aż do otrzymania przesunięcia dodatniego podpory ruchomej o wielkość zgodną z tabelą poprawek. Okazało się przy tym, że kluczem napinającym nie można było z potrzebną dokładnością wywołać przesunięcia, dlatego też dodatkowo dokręcano nakrętki przy płycie łączącej 12. Oczywiście, takiemu dodatniemu przesunięciu będzie towarzyszył wzrost reakcji poziomej zmniejszający ugięcia, a więc wskutek zastosowanego urządzenia obciążającego zwiększający siłę skupioną (z tego powodu zwiększono siłę o 18–20 kG, a więc nieco mniej od przyjętego średniego skoku, równego 22 kG). Po odczytaniu wskazań czujników i mostka tensometrycznego można było przystąpić do kolejnego zwiększania siły skupionej.

Wymienione czynności od chwili pojawienia się odkształceń plastycznych powinny być wykonywane w bardzo krótkim czasie, toteż starano się, aby je prowadziły co najmniej dwie osoby. Płynięcie materiału nie pozwoliło na dokładną realizację skoku 22 kG w obciążeniu; w tablicy 1 podającej wyniki pomiarów skok ten jest różny i odpowiada wzrostowi obciążenia po wykonaniu przesuwu zgodnego z tabelą poprawek (odczytu na siłomierzu 8 dokonywano na końcu).

Realizacja obciążenia poprzez śrubę rzymską okazała się bardzo wygodna, gdyż obciążenie bezpośrednie np. przez wieszanie odważników, wobec konieczności przykładania sił rzędu 200 kG, okazuje się w praktyce bardzo uciążliwe i trudne do zrealizowania pod względem technicznym. Natomiast obciążenie bezpośrednie (siła rzędu 70 kG) zastosowano przy badaniu ugięcia belki opartej na podporach przesuwnych.

Podana przez nas konstrukcja przyrządu, badanych beleczek oraz podany sposób postępowania pozwoliły zbadać model belki na podporach nieprzesuwnych lub też z jedną podporą przesuwą. W przypadku podpór nieprzesuwnych mogliśmy zwiększać obciążenie do takiej wielkości, aby reakcja pozioma (siła napinająca) nie przekroczyła 1500 kG (dokładniej 1550 kG) odpowiadającej zakresowi siłomierza 11.

Tensometr<sup>7</sup>oporowy naklejony w środku rozpiętości beleczki pozwolił zmierzyć maksymalne<sup>7</sup>odkształcenie włókien (do 14‰), a dzięki wykresowi  $\sigma-\epsilon$  podanemu na rys. 5 można było się zorientować w wielkości występujących naprężeń.

Do wymienionego sposobu postępowania doszliśmy poprzez zbadanie trzech próbnych beleczek o różnych długościach. Mogliśmy dzięki temu prowadzić również pewne drobne poprawki konstrukcyjne w samym przyrządzie.

Tablica 1

Typ I  
 $2l = 300 \text{ mm}; h = 10,2 \text{ mm}; b = 9,5 \text{ mm};$   
 $F = 0,96 \text{ cm}^2; \lambda = 102; a_\lambda = 3,105.$

$P$ w kG	$\hat{H}$ w kG		$\hat{y}_l \times 10^2$ w mm		$\hat{y}_{l/2} \times 10^2$ w mm		$\hat{\psi}_l \times 10^4$	
0 0	40	40	0	0	0	0	0	0
12 11	120	65	67	62	58	43	72	61
21 22	203	133	132	130	108	90	153	129
33 30	382	336	236	208	145	139	206	201
44 45	695	680	324	481	188	272	265	388
53 55	827	945	419	562	234	306	312	427
66 66	1035	1120	463	636	252	388	337	469
76 77	1140	1270	548	705	295	369	391	512
90 88	1350	1380	647	755	334	388	443	532
99 99	1410	1440	676	802	347	411	457	557
108 108	1510	1550	743	864	336	443	475	594

Typ II  
 $2l = 400 \text{ mm}, h = 10,2 \text{ mm}, b = 9,5 \text{ mm}$   
 $F = 0,96 \text{ cm}^2, \lambda = 136, a_\lambda = 4,140$

$P$ w kG	$\hat{H}$ w kG		$\hat{y}_l \times 10^2$ w mm		$\hat{y}_{l/2} \times 10^2$ w mm		$\hat{\psi}_l \times 10^4$	
0 0	80	80	0	0	0	0	0	0
10 11	170	134	126	158	85	104	93	117
23 21	515	382	248	284	167	198	194	214
33 33	762	570	353	497	212	292	226	330
45 43	1080	840	513	607	297	335	338	374
55 56	1200	990	591	718	332	382	370	424
66 66	1300	1130	685	794	375	416	415	455
78 77	1410	1230	789	908	426	455	466	499
88 87	1480	1390	865	955	461	478	501	511
98 99	1540	1460	962	1050	503	516	544	558

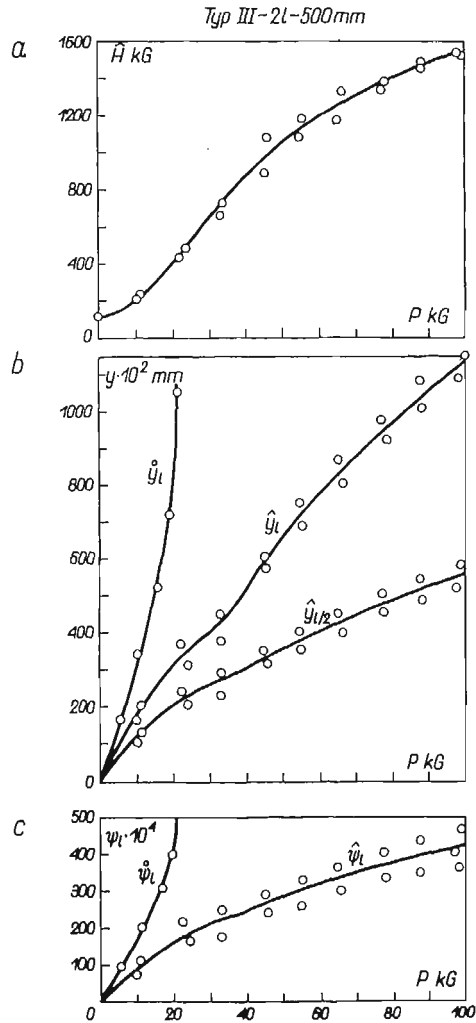
Typ III  
 $2l = 500 \text{ mm}, h = 10,2 \text{ mm}, b = 9,8 \text{ mm}$   
 $F = 1,00 \text{ cm}^2, \lambda = 170, a_\lambda = 5,175$

$P$ w kG	$\hat{H}$ w kG		$\hat{y}_l \times 10^2$ w mm		$\hat{y}_{l/2} \times 10^2$ w mm		$\hat{\psi}_l \times 10^4$	
0 0	120	120	0	0	0	0	0	0
11 10	227	203	202	161	135	103	113	78
22 24	438	485	371	314	246	203	215	168
33 33	665	730	457	378	292	230	251	179
45 46	860	1080	610	581	356	320	296	246
55 55	1080	1180	752	692	413	355	330	261
65 66	1180	1330	867	804	453	408	363	299
77 78	1340	1390	978	927	504	458	405	337
88 88	1460	1490	1086	1012	549	485	434	344
99 98	1530	1540	1178	1097	589	522	462	366

## 5. Wyniki doświadczeń

Zbadano trzy typy beleczek różniące się między sobą tylko długością (dokładną charakterystykę ponad w tabelicy 1). W ramach każdego z typów zbadano dwie beleczki z nieprzesuwnymi podporami i jedną opartą na przesuwanych podporach.

W tabelicy 1 zebrano wyniki doświadczeń dla belki z nieprzesuwnymi podporami<sup>1</sup>. Podano tam wielkości sił i przemieszczeń zaznaczonych na rys. 1 (np. w typie I przy sile obciążającej  $P = 22 \text{ kG}$  otrzymano dla drugiej próbki  $\hat{H} = 133 \text{ kG}$ ,  $\hat{y}_l = 1,30 \text{ mm}$ ,  $\hat{y}_{l/2} = 0,90 \text{ mm}$ ,  $\hat{\psi}_l = 0,0129$ ).



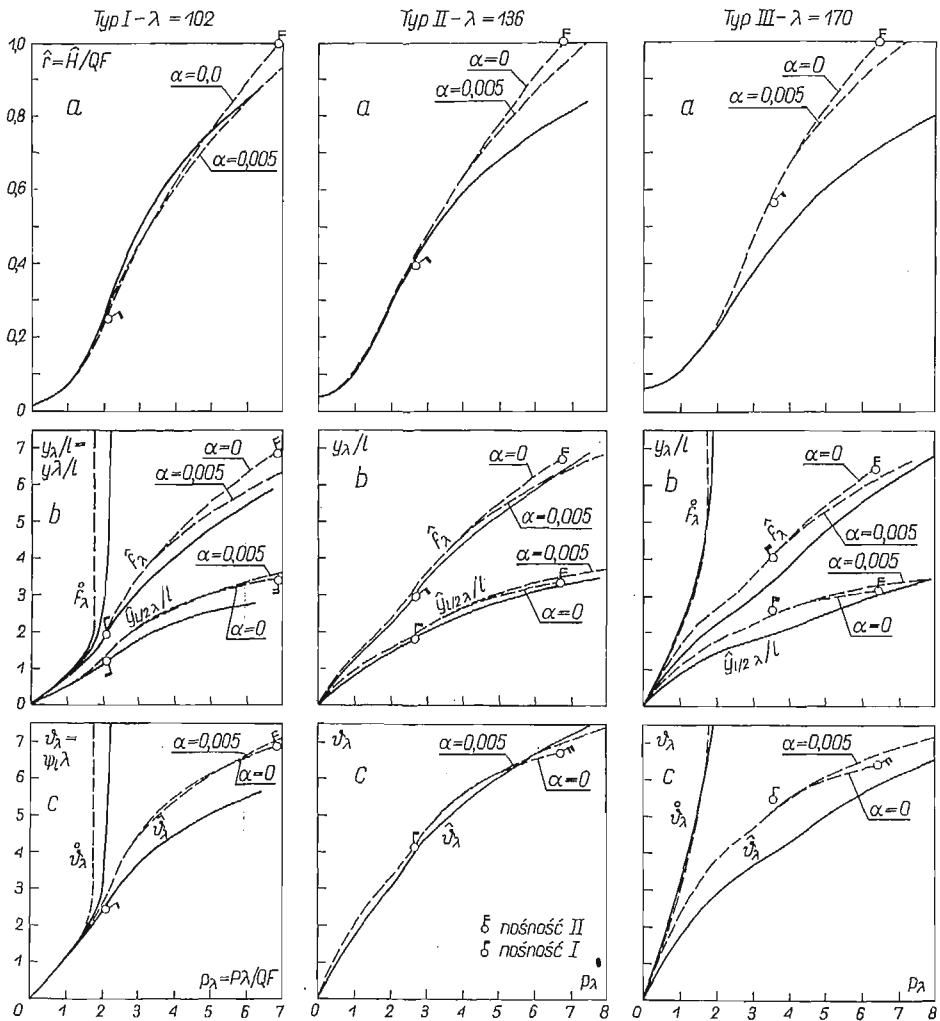
Rys. 7

<sup>1</sup> Nad wartościami odnoszącymi się do podpór nieprzesuwnych dano ibdeks  $\hat{\ };$  przy przesuwanych podporach dano indeks  $o$ .

Otrzymane i zestawione w tablicy 1 wielkości nanoszono punktami na wykresach, a następnie wykreślano uśrednione krzywe doświadczalnie. Na rys. 7 pokazano przykładowo krzywe dla najdłuższej beleczki typu III. Dla porównania powyżej krzywych  $\hat{y}_i(P)$  i  $\hat{\psi}_i(P)$  naniesiono krzywe  $\check{y}_i(P)$  i  $\check{\psi}_i(P)$  odpowiadające podporom przesuwnym.

## 6. Analiza otrzymanych wyników

6.1. Porównanie wyników doświadczeń z obliczeniami teoretycznymi. Podane w punkcie 2 teoretyczne rozwiązanie dla belki ze wstępnym nacięciem pozwala sporządzić wykresy interesujących nas funkcji. Odpowiednie krzywe, które dalej będziemy nazywali seoretycznymi, porównano z uśrednionymi krzywymi doświadczalnymi. Na rysunku 8 pokazano linią ciągłą krzywe doświadczalne w bezwymiarowym układzie



Rys. 8

współrzędnych, natomiast krzywe teoretyczne zaznaczono linią przerywaną. Przy tych ostatnich przez  $\alpha = 0$  oznaczono krzywe otrzymane przy braku wzmocnienia, a więc dla modelu ciała idealnie plastycznego, natomiast  $\alpha = 0,005$  odpowiada założeniu wzmocnienia liniowego o takim właśnie współczynniku wzmocnienia  $\alpha = E_1/E = 0,005$  przyjętym na podstawie próby rozciągania materiału beleczek (rys. 5). Przy sporządzaniu wykresów jako zmienną niezależną przyjęto każdorazowo obciążenie zewnętrzne  $p = P/QF$ .

Krzywe teoretyczne sporządzono na podstawie rozwiązania podanego w poprzednim punkcie, przy czym poszczególne punkty wykresu naniesiono dzięki metodzie odwrotnej przy założeniu funkcji kollokowanej (2.4).

Przechodząc do bardziej szczegółowej dyskusji otrzymanych wyników należy zwrócić uwagę na rozbieżności natury jakościowej i ilościowej.

Pod pierwszym względem, jakościowym, na podstawie wykresów podanych na rys. 8 możemy stwierdzić, że krzywe doświadczalne i krzywe teoretyczne mają jednakowy charakter. I tak, w przypadku przebiegu reakcji  $r$  pokazanej na rys. 8 występuje początkowo silny przyrost reakcji (krzywa zbliża się do paraboli drugiego stopnia), po czym następuje zmniejszenie pochodnej; charakter ten jest zachowany zarówno dla krzywych  $\alpha = 0$ , jak i  $\alpha = 0,005$ . Podobnie w przypadku przemieszczeń, zarówno przy ugięciach, jak i kątach ugięć, krzywe mają jednakowy kształt, przy czym lepsza zgodność występuje dla  $\alpha = 0,005$ . Charakterystyczne przy tym jest «wglębień» związane z szybkim przyrostem odkształceń plastycznych.

Pod względem ilościowym charakterystyczna jest dobra zgodność przemieszczeń (zwłaszcza dla typu II) i coraz większa rozbieżność w reakcjach (szczególnie dla typu III). Uwzględnienie wzmocnienia zmniejsza różnice, przy czym obszar wyraźnego wpływu wzmocnienia jest coraz większy w miarę skracania się belek. Maksymalna różnica (reakcja  $\hat{r}$  i kąt ugięcia  $\hat{\psi}_\lambda$  dla typu III) wynosi ok. 30%, z tym że średnie różnice wynoszą ok. 10%.

Przy typach I i III pokazano również krzywe dla belek opartych na podporach przesuwnych; pokazano mianowicie ugięcie, strzałkę ugięcia  $f_\lambda$  i maksymalny kąt ugięcia  $\hat{\psi}_\lambda = \hat{\psi}_1 \lambda$ . Z porównania wynika, że w typie I zaznacza się silniej wpływ wzmocnienia (krzywe teoretyczne obliczone wg teorii małych ugięć dla  $\alpha = 0$ ). Jak było do przewidzenia, występuje duża różnica między ugięciami beleczek z podporami przesuwными i beleczek opartych na nieprzesuwnych podporach; przy beleczkach bardziej smukłych (typ III) wyraźne różnice występują nawet przy niewielkich siłach.

Na rysunku 8 zaznaczono punktami również wielkości odpowiadające nośności I obliczonej przy założeniu funkcji kolokowanej (2.15). Odpowiednie punkty tylko nieznacznie odbiegają od krzywych teoretycznych obliczonych dla funkcji kolokowanej (2.4) i występują zawsze w pobliżu «wglębień», a więc punktów krzywych, w których zaczynają szybko przyrastać przemieszczenia.

**6.2. Przyczyny powstałych rozbieżności.** Źródła powstałych rozbieżności należy szukać zarówno w rozwiązaniu teoretycznym, jak i w przeprowadzonym doświadczeniu.

Przy opracowaniu części teoretycznej z konieczności musieliśmy oprzeć się na pewnych założeniach i niektóre z nich mogą wywołać dość duże błędy w porówna-

niu z rzeczywistością. Do takich założeń należą: przyjęcie materiału idealnie sprężysto-plastycznego lub o wzmocnieniu liniowym, pominięcie wpływu sił poprzecznych i rozpatrywanie jednoosiowego stanu naprężenia oraz nieuwzględnienie wpływu odciążenia poszczególnych przekrojów belki.

Przyjęcie modelu ciała ze wzmocnieniem liniowym lepiej przybliży rzeczywisty wykres  $\sigma-\varepsilon$  niż model ciała idealnie sprężysto-plastycznego. Jednak przy większych odkształceniach we włóknach skrajnych mogą powstać większe naprężenia niż obliczone przy założeniu wzmocnienia liniowego, co będzie miało pewien wpływ zarówno na wielkość momentu gnącego, jak i siły podłużnej w niektórych przekrojach belki.

Również przyjęcie jednoosiowego stanu naprężenia poprzez pominięcie wpływu naprężeń stycznych od sił poprzecznych i naprężeń stykowych od sił skupionych wywoła dodatkowe błędy, większe po pojawieniu się odkształceń plastycznych (wskutek zmniejszenia naprężeń gnących poprzez warunek plastyczności).

Dodatkowe błędy może wywołać stosowanie uproszczonej metody kolokacji. Szczególnie ważny problem doboru funkcji kolokowanej został dość pomyślnie rozwiązany, jak o tym świadczy podobieństwo krzywych teoretycznych i doświadczalnych.

Uproszczenie polegające na przyjęciu równań linii ugięcia obszaru dominującego jako obowiązujących w całej belce jak również pominięcie wpływu odciążenia może mieć także pewien wpływ przede wszystkim na stwierdzone rozbieżności ilościowe.

Przy wykonywaniu doświadczeń nastąpiły też pewne odstępstwa od modelu belki z rys. 1. Wiąże się to zarówno z konstrukcją badanych beleczek i przyrządu, jak i z samym sposobem przeprowadzania doświadczeń.

Badana beleczka (pokazana na rys. 5) ze względów konstrukcyjnych i wytrzymałościowych została poszerzona na końcach, wskutek czego nie został zachowany stały przekrój na całej długości. Rozszerzenie to ma wpływ na wydłużalność osi belki, a więc przede wszystkim na siły podłużne (reakcje poziome). Znaczne naprężenia stykowe zmusiły nas do zastosowania dość dużych średnic sworzni podporowych, co także może w pewnym stopniu zniekształcać wyniki.

Przy konstruowaniu przyrządu starano się zmniejszyć do minimum tarcie przez stosowanie gładkich powierzchni i zastosowanie dwusiarczku molibdenu. Pewne tarcie będzie jednak występowało i to zarówno między sworzniami i otworami, jak i między śrubami specjalnymi i otworami podłużnymi we wsporniku 4. To ostatnie będzie miało pewien wpływ na odczytywaną wielkość reakcji poziomej.

Niewielkie nierówności otworów w beleczce likwidowaliśmy przez przyłożenie dużej siły osiowej przed właściwym doświadczeniem. W rzeczywistości wobec uniemożliwienia obrotów sworzni, z chwilą wystąpienia ugięcia, w otworach występowały nierówności w innych miejscach.

W czasie przeprowadzenia doświadczeń zwiększaliśmy początkowo siłę obciążającą, a potem siłę poziomą. Pomimo stosowania niedużych przyrostów sił postępowanie takie, wobec nieobowiązywania zasady superpozycji, mogło wywołać dodatkowe błędy.

Również efekty reologiczne występujące w materiale pomimo dość szybkiego odczytywania wyników mogły mieć dodatkowy wpływ na powstałe rozbieżności.

Wiele z wymienionych niekorzystnych parametrów dałoby się wyeliminować lub można by jaśniej przedstawić ich wpływ, gdyby wykonano doświadczenia na większych seriach w ramach przyjętych typów beleczek. Jednak, zgodnie z założeniami wymienionymi na wstępie, naszym celem była jedynie weryfikacja doświadczalna otrzymanych teoretycznych rozwiązań. Przyjęcie zaledwie dwóch beleczek w ramach każdego z typów mogło pozwolić tylko na pewne przybliżenie właściwych krzywych doświadczalnych.

### 7. Zakończenie

Podsumowując otrzymane wyniki można stwierdzić, że:

1) metoda kollokacji daje dobre wyniki (średnie różnice między wielkościami teoretycznymi i doświadczalnymi wynoszą ok. 10%);

2) przyjęty model ciała idealnie sprężysto-plastycznego daje dobre przybliżenie rzeczywistości nawet przy bardzo dużych odkształceniach; wpływ wzmocnienia zaznacza się silniej przy belkach krępych niż smukłych;

3) wpływ nieprzesuwności (a więc i skrępowanej przesuwności) zaznacza się silniej w belkach smukłych niż krępych.

Zweryfikowaliśmy przypadek, w którym skrępowana przesuwność zaznacza się najsilniej (nieprzesuwne przegubowe podpory i obciążenie symetrycznie ustawioną siłą skupioną), w dodatku przypadek szczególnie, gdy podparcia są przyłożone na wysokości osi belki.

Ten ostatni problem może mieć duże znaczenie ze względu na możliwość pojawienia się nowych zjawisk (np. przy podparciu poniżej osi reakcja pozioma może zmieniać znak i pojawi się statecznościowy problem «przeskoku»). Niestety w tym ostatnim przypadku brak jakichkolwiek rozwiązań teoretycznych w zakresie sprężysto-plastycznym (przybliżone rozwiązanie dla materiału sprężystego podano w pracy [6]) i tutaj znowu może się okazać niezbędna pomoc doświadczenia jako weryfikatora otrzymanych przybliżonych rozwiązań.

Na koniec autor pragnie podziękować Panu Prof. dr inż. M. Życzkowskiemu za pomoc otrzymaną przy teoretycznym opracowaniu i przy wykonaniu doświadczeń.

### Literatura cytowana w tekście

1. L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, tłum. polskie: PWN, Warszawa 1960.

2. R. A. FRAZER, W. P. JONES, S. W. SKAN, *Approximations to Functions and to the Solutions of Differential Equations*, Report and Memoranda No 1799/2913, Aeronautical Research Committee, 1937.

3. С. Д. ЛЕЙТЕС, *Цилиндрический изгиб стальных пластинок с закрепленными кромками*, Материалы по Стальным Конструкциям, 3, Проектстальконструкция, Москва 1958, 112-146.

4. С. Д. ЛЕЙТЕС, *Упругий и упруго-пластический изгиб длинных прямоугольных пластинок с закрепленными кромками*, Расчет Пространственных Конструкций, 8, Москва 1962.

5. Z. WASZCZYSZYN, M. ŻYCHKOWSKI, *Finite deflections of elastic-plastic beams, the stretchability of their axes being taken into account*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 10, 11 (1963), 347-358.



6. Z. WASZCZYSZYN, *Obliczanie belki na podporach nieprzesuwnych jako ramy portalowej o niskich słupach*, Arch. Inżyn. Ładow., 4, 8 (1962), 395–416.

7. Z. WASZCZYSZYN, *Zastosowanie metody kollokacji do obliczania sprężysto-plastycznych ugięć belek o skrepowanej przesuwności podpór*, Rozpr. Inżyn., 2, 13 (1965).

8. Z. WASZCZYSZYN, *Uprozczone obliczenie sprężysto-plastycznych ugięć belek ze skrepowaną przesuwnością podpór*, Arch. Inżyn. Ładow., w druku.

#### Резюме

#### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ, УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОГИБОВ БАЛОК, ОПЕРТЫХ НА НЕПЕРЕДВИЖНЫХ ОПОРАХ

Упрощенный расчет упруго-пластических прогибов балок со стесненной передвижностью опор, приведенный в работе [8] — проверен экспериментально. Расчет производится на основе метода коллокации, состоящего в принятии функции, удовлетворяющей уравнениям линии прогиба лишь для одной доминирующей области распределения напряжений (для идеально упруго-пластической модели или модели с линейным упрочнением).

Эксперименты проводились на трех типах стальных балочек прямоугольного сечения  $10 \times 10$  мм и длиной 300, 400 и 500 мм. Опоры балочек были шарнирные, при чем их неподвижность осуществлялась в специально сконструированном приборе, показанном на фотоснимках. Загружение сосредоточенной силой реализовалось путем завинчивания римского винта. Измерения величин сил осуществлялись с помощью дугового динамометра, а величины перемещений с помощью механических датчиков.

Сравнение экспериментальных кривых с теоретическими показывает хорошее качественное согласие, а количественные отличия составляют в среднем 10% (максимальные ок. 30%).

Эксперименты проводились в Лаборатории кафедры статики сооружений Краковского политехнического института.

#### Summary

#### EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF FINITE ELASTIC-PLASTIC DEFLECTIONS OF BEAMS ON IMMOVABLE SUPPORTS

The simplified method of determining the elastic-plastic deflections of beams on immovable supports given in [8] has been experimentally verified. The calculations are performed with the aid of the collocation method: a function satisfying the deflection equations of only one, predominating region of the stress distribution is assumed (a perfectly elastic-plastic body or the model with linear strain-hardening being assumed).

Three types of steel beams with rectangular cross-section  $10 \times 10$  mm and lengths 300, 400 and 500 mm were used in the experiments: The supports were hinged, and to make them immovable the special device shown in photographs was used. A concentrated force was introduced by means of an adjusting screw. The forces were measured by ring dynamometers, and the displacements — by mechanical gauges.

The comparison of theoretical and experimental results yields a good qualitative agreement, the average quantitative discrepancy is 10% (with maximum of 30%).

The experiments were performed in the Laboratory of the Structural Static Department of the Cracow Technical University.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 stycznia 1965 r.

DOŚWIADCZALNE BADANIE POWIERZCHNI PLASTYCZNOŚCI WSTĘPNIE  
ODKSZTAŁCONEGO MOSIĄDZU

J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Warunkiem plastyczności dla metali w stanie wyżarzonym znajdującym bardzo dobre potwierdzenie doświadczalne jest warunek Hubera-Misesa

$$(1.1) \quad s_{ij}s_{ij} = K^2,$$

gdzie  $s_{ij}$  jest dewiatorem naprężenia, a  $K$  — stałą materiału. Dla rzeczywistych metali, wykazujących wzmocnienie, warunek ten przestaje obowiązywać natychmiast po pojawieniu się w procesie obciążenia nawet małych odkształceń plastycznych. Zjawisko wzmocnienia wskazuje na rozszerzanie się początkowej powierzchni plastyczności opisanej równaniem (1.1) w przestrzeni naprężeń. Jednocześnie efekt Bauschingera powoduje, że rozszerzanie to nie może być symetryczne.

Pewną próbę matematycznego ujęcia tych złożonych zjawisk stanowi teoria J. I. KADASZEWICZA i W. W. NOWOŻYŁOWA [1], podająca następującą postać warunku plastyczności materiału odkształconego plastycznie

$$(1.2) \quad (s_{ij} - 2ge_{ij}^p)(s_{ij} - 2ge_{ij}^p) = C,$$

gdzie  $g$  jest pewną funkcją niezmienników tensora odkształcenia plastycznego  $e_{ij}^p$ , zaś  $C$  — funkcją niezmiennika

$$\lambda = \int (s_{ij} - 2ge_{ij}^p) de_{ij}^p.$$

Powierzchnia plastyczności w przestrzeni naprężeń opisana zależnością (1.2) ulega w czasie procesu odkształcania plastycznego równomiernemu rozszerzeniu, z zachowaniem podobieństwa geometrycznego, oraz jednoczesnemu przesunięciu bez obrotu. Zbliżoną w ujęciu teorię przedstawił również T. LEHMAN [2].

Wcześniejszą od powyższej koncepcji próbę podjął A. J. ISZLIŃSKI [3], proponując warunek plastyczności w postaci

$$(1.3) \quad (s_{ij} - He_{ij}^p)(s_{ij} - He_{ij}^p) = K^2,$$

gdzie  $H$  jest stałą. Analogiczny warunek plastyczności został podany przez R. SHIELDA i H. ZIEGLERA [4] w oparciu o koncepcje W. PRAGERA [5]. Stałość wielkości  $K$  wskazuje, że powierzchnia plastyczności nie zmienia swych wymiarów, a jedynie przesuwana się bez obrotu w przestrzeni naprężeń.

Najstarsza koncepcja wzmocnienia zakłada jedynie równomierne rozszerzenie początkowej powierzchni plastyczności, co odpowiada uzależnieniu stałej  $K$  w zależności (1.1) od pracy wykonanej na odkształceniach plastycznych

$$K = K\left(\int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p\right).$$

Doświadczalna weryfikacja różnych koncepcji teoretycznego ujęcia bardzo złożonego zjawiska wzmocnienia przeprowadzana jest niemal wyłącznie w płaskim stanie naprężenia, jaki daje się zrealizować w cienkościennych rurkowych próbkach, obciążonych różnymi kombinacjami siły osiowej, momentu skręcającego i ciśnienia wewnętrznego. Wobec tego, że metale odkształcone plastycznie wykazują przy odciążaniu lub powtórnym obciążaniu bardzo łagodne przejście od odkształceń sprężystych do plastycznych, zachodzi konieczność jednoznacznej definicji powierzchni plastyczności. W pracach doświadczalnych J. I. JAGNA i O.A. SZYSZMARIĘWA [6] oraz W. SZCZEPIŃSKIEGO [7] wykazano, że definicja taka ma zasadniczy wpływ na kształt powierzchni. Powierzchnie odpowiadające nawet bardzo małej intensywności plastycznych odkształceń postaciowych przy powtórnym obciążeniu ( $\epsilon_f^p = 0.01\%$ ) znacznie różnią się od powierzchni, odpowiadającej granicy proporcjonalności. Dla  $\epsilon_f^p = 0,1\%$  powierzchnie te różnią się w sposób zasadniczy. Utożsamianie powierzchni plastyczności z powierzchnią proporcjonalności, jak to przyjęto w pracach [8 i 9], nie może opisać rzeczywistych własności plastycznych wstępnie odkształconego metalu, gdyż na powierzchni tej odkształcenia plastyczne są pomijalnie małe w porównaniu ze sprężystymi. Wzajemny stosunek plastycznej i sprężystej części odkształcenia szczegółowo zbadano w ramach niniejszej pracy, stwierdzając, że jest on równy w przybliżeniu jedności dla powierzchni określonej wielkością  $\epsilon_{ij}^p = 0,01\%$ . Dla  $\epsilon_f^p = 0,02\%$  część plastyczna odkształcenia jest już kilkakrotnie większa od sprężystej.

Mimo, że we wspomnianych wyżej pracach doświadczalnych droga wstępnego obciążenia powyżej początkowej granicy plastyczności była bardzo prosta (jednoosiowe rozciąganie lub czyste skręcanie), to wykazały one bardzo złożony charakter zmiany kształtu powierzchni plastyczności, nie dający się opisać żadną z wyżej podanych zależności teoretycznych. W niniejszej pracy zastosowano złożoną drogę obciążania stwierdzając, że oprócz zmiany kształtu i przesunięcia powierzchnia odpowiadająca granicy proporcjonalności może doznawać obrotu, czego również nie uwzględniają powyższe hipotezy.

## 2. Próbkki i aparatura

Próbki rurkowe wykonane zostały z ciągnionej rury z mosiądzu M63 z zawartością 37% cynku. Średnica wewnętrzna rury wynosiła 30 mm, a grubość ścianki 1 mm. Z rury tej odcinano odcinki o długości 180 mm, których końce rozłaczano stożkowym trzpieniem o kącie wierchołkowym  $90^\circ$  w celu utworzenia kołnierzy służących do zamocowania w urządzeniu badawczym. Dla wyeliminowania wpływu poprzedniej historii odkształcenia związanej z procesem ciągnięcia rury w hucie, wszystkie próbki zostały wyżarzone w temperaturze  $650^\circ\text{C}$  w ciągu 2 godzin. Stu-

dzenie odbywało się wraz z piecem do temperatury 200°C w ciągu 20 godzin. Następnie próbki wyjmowano z pieca i dalsze ochładzanie do temperatury otoczenia odbywało się na powietrzu. Do badań wybrano drogą selekcji tylko te próbki, które miały prawidłowy przekrój kołowy oraz możliwie równomierny rozkład grubości ścianki zarówno wzdłuż tworzących, jak i po obwodzie. Pomiary grubości przeprowadzono na specjalnym przyrządzie z wbudowanym czujnikiem zegarowym o dokładności odczytu 0,001 mm. W wybranych próbkach największa różnica w grubości ścianki nie przekraczała 3% jej wartości średniej.

Stanowisko badawcze wyposażono w dwa niezależne hydrauliczne układy obciążające. Jeden z nich wywoływał w próbce osiowe naprężenie rozciągające za pomocą trzpienia zakończonego tłokiem. Dolny koniec próbki zamocowany był w obudowie przyrządu, a górny sztywno uchwycony wraz z trzpieniem. Przegub kulisty pomiędzy trzpieniem a tłokiem zapobiegał powstawaniu momentu zginającego w próbce. Drugi układ obciążający doprowadzał olej pod ciśnieniem do wnętrza próbki wywołując w niej naprężenia obwodowe. Niezależność obydwu układów obciążających pozwala realizować dowolną drogę obciążania na płaszczyźnie: naprężenie obwodowe  $\sigma_t$  — naprężenie osiowe  $\sigma_z$ .

Odkształcenia mierzono za pomocą elektrycznych tensometrów oporowych o długości pomiarowej 15 mm naklejanych na zewnętrzną powierzchnię próbek w środku ich długości. Dla wyeliminowania wpływu ewentualnej małej mimośrodowości obciążenia tensometry naklejano po dwa symetrycznie po przeciwnych stronach próbki w obu głównych kierunkach osiowym i obwodowym. Wielkość odkształcenia wyznaczano jako średnią ze wskazań obu tensometrów jednakowo skierowanych. Odczytów dokonywano na mostku tensometrycznym o podziale skali odpowiadającej odkształceniu  $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$ .

### 3. Sposób obciążania i metoda opracowania wyników

Ogółem zbadano 28 próbek w czterech seriach po siedem sztuk każda. Próbki pierwszej serii nie były wstępnie odkształcane i zostały przeznaczone do zbadania kształtu początkowej powierzchni plastyczności materiału. Pozostałe trzy serie poświęcono zbadaniu zmiany kształtu powierzchni plastyczności, wywołanej uprzednim odkształceniem plastycznym. Zarówno zastosowane drogi obciążania, jak i uzyskane wyniki zostaną przedstawione w pierwszej ćwiartce płaszczyzny naprężeń  $\sigma_z, \sigma_t$ , gdzie  $\sigma_z$  oznacza naprężenie w kierunku osiowym, a  $\sigma_t$  — naprężenie w kierunku obwodowym próbki. Dla każdej próbki w czasie obciążania rejestrowano odkształcenia osiowe  $\varepsilon_z$  i obwodowe  $\varepsilon_t$ , odpowiadające określonym naprężeniom osiowym i obwodowym. Po przyłożeniu odpowiednio małego przyrostu obciążenia utrzymywano jego stałą wartość przez okres 5 minut i dopiero wtedy odczytywano wskazania tensometrów, natychmiast bowiem po wzroście obciążenia materiał wykazywał znaczny ciągły przyrost odkształceń przy stałej wartości naprężeń. Odkształcenia te ustalały się nie wykazując dalszego wzrostu dopiero po okresie około 2—4 minut w zależności od poziomu naprężeń. Dla ujednoczenia wszystkich pomiarów odczytywano wielkość odkształceń po 5-cio minutowym okresie wyczekiwania.

Każda z próbek jednej serii była inaczej obciążana wzdłuż drogi proporcjonalnego obciążania, odpowiadającej jednej z linii prostych poprowadzonych na płaszczyźnie naprężeń z początku układu 0. Założone drogi obciążania zaznaczono cienkimi liniami na rysunkach 4 ÷ 8. Ze względów technicznych rzeczywiste drogi obciążania odbiegały nieco od teoretycznych prostych proporcjonalnego obciążania. Kolejno zwiększano mianowicie małymi skokami wielkość siły osiowej i ciśnienia wewnętrznego, przy czym przy wzroście siły osiowej utrzymywano stałą wartość ciśnienia wewnętrznego i odwrotnie. Jednakże największe odchylenie od prostej proporcjonalnego obciążania nie przekroczyło wielkości 0,3 kG/mm<sup>2</sup>.

Z otrzymanych wielkości przyrostów odkształceń  $\Delta \varepsilon_t$  i  $\Delta \varepsilon_z$ , odpowiadających kolejno przebytnym odcinkom na drodze obciążania, określonym przyrostami naprężeń  $\Delta \sigma_t$  i  $\Delta \sigma_z$  obliczano następnie przyrost intensywności odkształceń postaciowych

$$\Delta \varepsilon_i = \sqrt{\frac{1}{6} [(\Delta \varepsilon_t - \Delta \varepsilon_z)^2 + (\Delta \varepsilon_z - \Delta \varepsilon_h)^2 + (\Delta \varepsilon_h - \Delta \varepsilon_t)^2]}$$

gdzie  $\Delta \varepsilon_h$  oznacza przyrost odkształcenia po grubości ścianki próbki. Wobec wielkich trudności jakie przedstawia pomiar zmiany grubości ścianki w czasie procesu obciążania, wielkości  $\Delta \varepsilon_h$  nie mierzono, ale obliczano ją przyjmując warunek nieściśliwości materiału

$$\Delta \varepsilon_z + \Delta \varepsilon_t + \Delta \varepsilon_h = 0.$$

Następnie obliczano intensywność odkształceń postaciowych  $\varepsilon_i$  w poszczególnych momentach procesu obciążania, sumując przyrosty  $\Delta \varepsilon_i$  od początku obciążania.

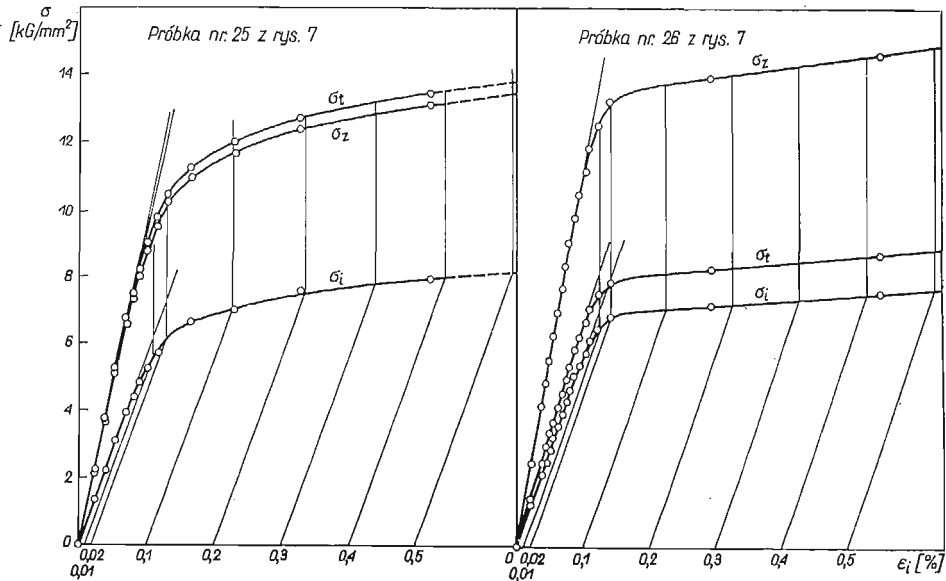
Z kolei obliczano intensywność naprężeń stycznych

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_h)^2 + (\sigma_h - \sigma_t)^2]}$$

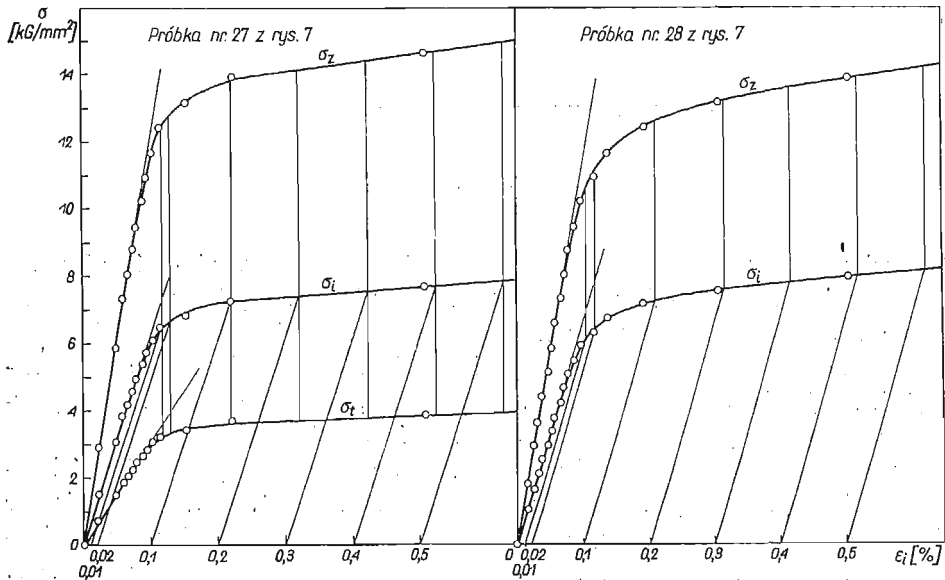
gdzie  $\sigma_h$  oznacza naprężenie ściskające, skierowane po grubości ścianki i wywołane ciśnieniem oleju  $p$  działającym wewnątrz próbki. Wielkość tego naprężenia nie jest stała wzdłuż grubości ścianki i zmienia się od wartości  $\sigma_h = -p$  na promieniu wewnętrznym do  $\sigma_h = 0$  na promieniu zewnętrznym. W obliczeniach przyjęto średnią wartość tego naprężenia  $\sigma_h = -p/2$ .

Po obliczeniu wielkości  $\sigma_i$  i  $\varepsilon_i$  sporządzano dla każdej próbki wykres  $\sigma_i(\varepsilon_i)$ : Dla przykładu na rys. 1 i 2 pokazano takie krzywe, otrzymane dla kilku próbek z czwartej serii, dla której ostateczne wyniki przedstawiono dalej na rys. 7. Obok krzywych  $\sigma_i(\varepsilon_i)$  naniesiono na tych samych rysunkach krzywe  $\sigma_t(\varepsilon_i)$  i  $\sigma_z(\varepsilon_i)$ . Z punktów na osi  $\varepsilon_i$ , odpowiadających wartościom  $\varepsilon_i^p = 0,01; 0,02; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$  i 0,5% poprowadzono proste równoległe do początkowego prostoliniowego odcinka krzywej  $\sigma_i(\varepsilon_i)$ . Punkty przecięcia tych prostych z krzywą  $\sigma_i$  przeniesiono następnie na krzywe  $\sigma_t$  i  $\sigma_z$  znajdując w ten sposób naprężenia, które wywołały w próbce określoną intensywność trwałych (plastycznych) odkształceń postaciowych  $\varepsilon_i^p$ . Tak otrzymane wielkości naprężeń naniesiono na płaszczyźnie  $\sigma_t, \sigma_z$  (rys. 4, 5, 7) w postaci szeregu punktów położonych na wspólnej prostej, przedstawiającej drogę

obciążania danej próbki. Przez punkty należące do różnych próbek, ale odpowiadające tej samej wartości  $\epsilon_i^p$ , poprowadzono następnie krzywą oznaczając ją symbolem  $\sigma$  z dolnym indeksem określającym stałą dla niej wielkość  $\epsilon_i^p$ . Ponadto na płaszczyźnie naprężeń wyznaczano jeszcze krzywą  $\sigma_{prop}$ , odpowiadającą początkowi zakrzywiania się prostoliniowej wstępnej części wykresów  $\sigma_t$  i  $\sigma_z$  (por. rys. 1 i 2).



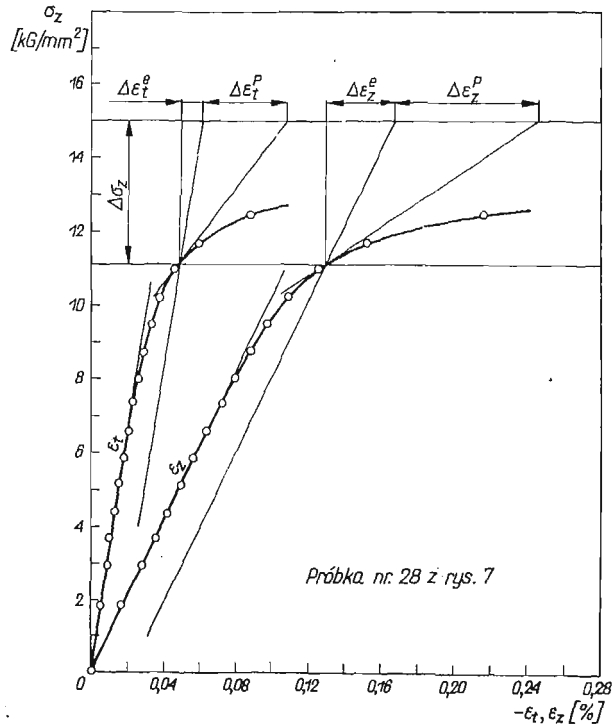
Rys. 1



Rys. 2

Należy tu jednak podkreślić, że ocena wielkości granicy proporcjonalności w dużej mierze zależy od dokładności i czułości urządzenia rejestrującego odkształcenia oraz od subiektywnej oceny prowadzącego doświadczenie.

Dla krzywych  $\sigma_{prop}$ ,  $\sigma_{0,01}$  i  $\sigma_{0,02}$  wyznaczano kierunki przyrostów odkształcenia sprężystego i plastycznego. Przyrosty te pokazano na rys. 4, 5 i 7 na płaszczyźnie  $\sigma_t, \sigma_z$  w postaci wektorów, a sposób ich wyznaczania przedstawiono na rys. 3 na przykładzie próbki nr 28 z rys. 7. Podstawę do wyznaczenia tych przyrostów stanowią wykresy obydwu odkształceń  $\varepsilon_t$  i  $\varepsilon_z$  w funkcji jednego z naprężeń  $\sigma_z$  lub  $\sigma_t$ .



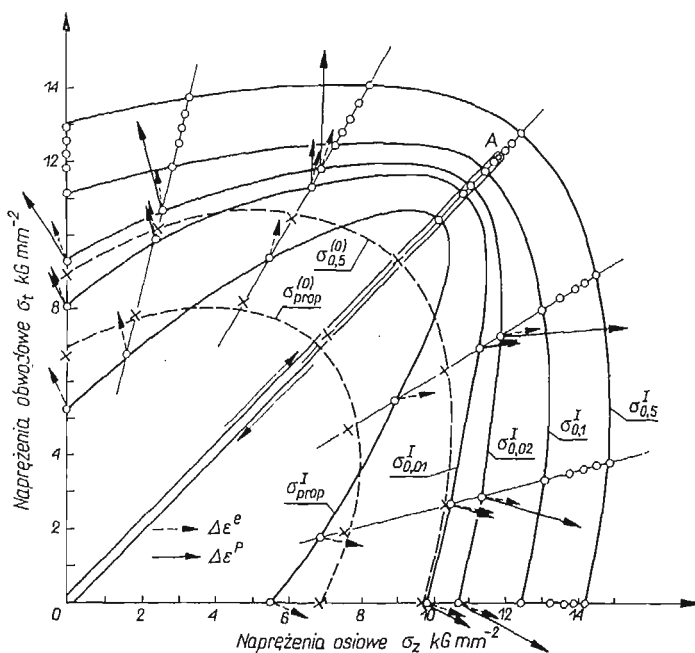
Rys. 3

Na wykresach tych w punktach, odpowiadających rozpatrywanej właśnie krzywej plastyczności (na rys. 3 podana konstrukcja dotyczy krzywej  $\sigma_{0,02}$ ), prowadzimy trzy proste, mianowicie jedną w kierunku stycznym do krzywej, drugą równoległą do początkowego prostoliniowego odcinka krzywej, a trzecią równoległą do osi naprężeń. Przyjmując dowolny przyrost naprężenia  $\Delta\sigma_z$  względnie  $\Delta\sigma_t$  (na rys. 3 przyrost ten narysowany został w innej skali niż oś naprężeń) znajdujemy w sposób pokazany na rysunku odpowiadające mu składowe przyrosty sprężystej części odkształcenia  $\Delta\varepsilon_t^e$ ,  $\Delta\varepsilon_z^e$  i plastycznej części odkształcenia  $\Delta\varepsilon_t^p$ ,  $\Delta\varepsilon_z^p$ . Odkładając te składowe na płaszczyźnie naprężeń odpowiednio w kierunkach osi  $\sigma_t$  i  $\sigma_z$  znajdujemy kierunki wektorów przyrostów odkształcenia sprężystego i plastycznego. We wszystkich przypadkach przyjęto ten sam moduł wektora przyrostu odkształ-

cenia sprężystego. Moduł wektora przyrostu odkształcenia plastycznego jest określony jednoznacznie przez porównanie wielkości składowych obu wektorów w sposób pokazany na rys. 3.

#### 4. Wyniki pomiarów

Na rysunku 4 liniami przerywanymi pokazano krzywą odpowiadającą granicy proporcjonalności  $\sigma_{prop}^{(0)}$  i granicy  $\sigma_{0,5}^{(0)}$  otrzymaną jako wynik badania próbek bez uprzedniego odkształcenia plastycznego. Obydwie krzywe tylko nieznacznie odbiegają od teoretycznych elips Hubera-Misesa. Zaznaczone krzyżykami punkty doświadczalne wskazują, że różnice własności poszczególnych próbek są niewielkie, oraz że materiał ich można uważać za izotropowy.



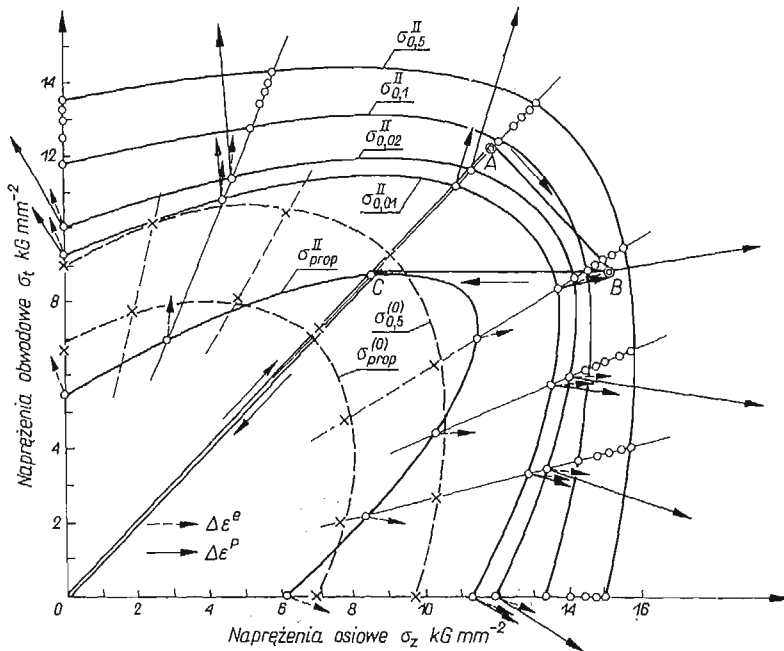
Rys. 4

Wszystkie próbki drugiej serii zostały wstępnie jednakowo odkształcone plastycznie wzdłuż drogi  $OA$  zaznaczonej na rys. 4, a następnie odciążone wzdłuż tej samej drogi od punktu  $A$  do  $O$ . Z kolei na każdej próbce naklejano tensometry i następnego dnia badano kształt powierzchni plastyczności tak odkształconego materiału. Wyniki podano na rys. 4 liniami ciągłymi. Widać zasadniczą różnicę kształtu krzywych  $\sigma_{prop}^I$ ,  $\sigma_{0,01}^I$  i  $\sigma_{0,02}^I$  w stosunku do odpowiednich krzywych dla materiału nieodkształconego. Jednakże dalsze krzywe  $\sigma_{0,1}^I$ ,  $\sigma_{0,2}^I \dots$  niezbyt wiele odbiegają od elips otrzymanych przez równomierne rozszerzenie początkowych elips Hubera-Misesa. Wektory przyrostów odkształcenia plastycznego narysowane linią ciągłą na ogół są skierowane normalnie do odpowiednich powierzchni plastyczności, ale w niektórych miejscach są one dość wyraźnie odchyłone od kierunku normalnego.



Wektory przyrostów odkształcenia sprężystego pokazane linią przerywaną mają z założenia jednakową długość i pozwalają porównać wielkości plastycznej i sprężystej części odkształcenia w różnych fazach procesu odkształcania próbki. Dla krzywej  $\sigma_{prop}$  część plastyczna odkształcenia nie istnieje. Na krzywej  $\sigma_{0,01}$  obydwa wektory, sprężysty i plastyczny, są w przybliżeniu jednakowe, a dopiero na krzywej  $\sigma_{0,02}$  stwierdzamy, że odkształcenie plastyczne wyraźnie przewyższa odkształcenie sprężyste. Dla krzywej  $\sigma_{0,1}$  nie pokazano już wektorów przyrostu odkształcenia, gdyż część plastyczna wielokrotnie przewyższa tu sprężystą część odkształcenia.

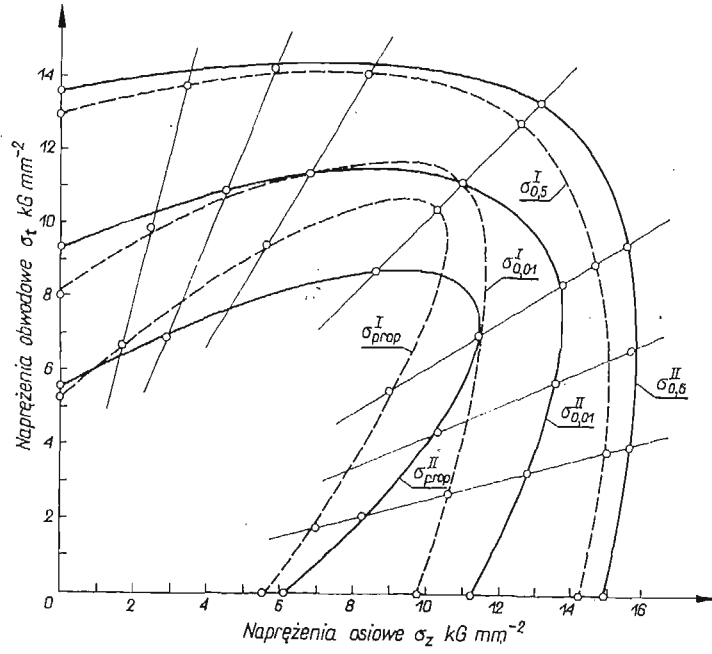
Droga wstępnego odkształcenia plastycznego wszystkich próbek trzeciej serii pokazana została na rys. 5 w postaci linii łamanej OAB, przy czym punkt *A* ma takie samo położenie jak na rys. 4. Odciążanie następowało wzdłuż łamanej BCO. Linie



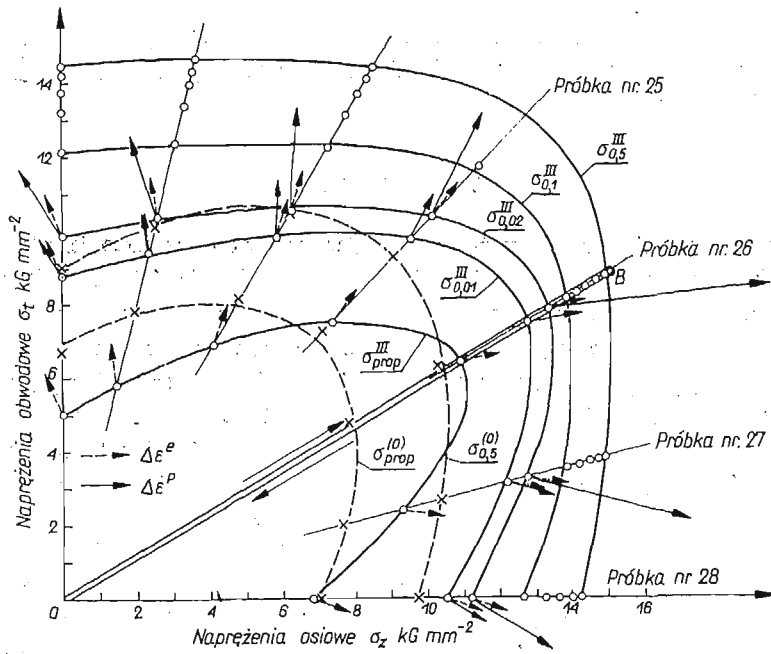
Rys. 5

ciągłe pokazują kolejne krzywe  $\sigma_{prop}^{II}$ , ...  $\sigma_{0,5}^{II}$ , otrzymane dla tak uprzednio odkształconego materiału. Rysunek 6 pozwala porównać niektóre krzywe otrzymane w drugiej i trzeciej serii. Wyraźnie widać, że dodatkowy odcinek *AB* drogi wstępnego obciążania wywołał obrót krzywej  $\sigma_{prop}$  bez wyraźnej zmiany jej kształtu. Krzywe  $\sigma_{0,01}$ , znacznie różnią się kształtem i położeniem, natomiast różnice pomiędzy krzywymi  $\sigma_{0,5}$  są niewielkie.

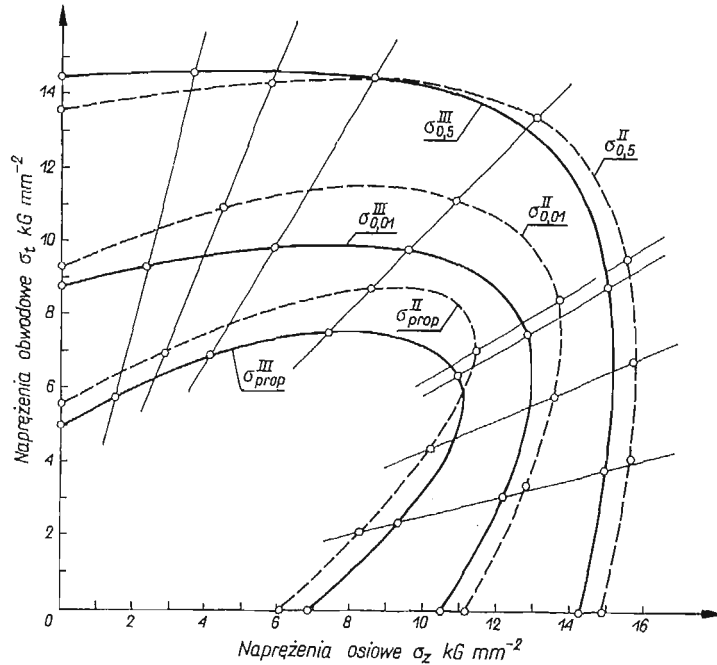
W czwartej serii wszystkie próbki zostały wstępnie odkształcone wzdłuż prosto-liniowej drogi *OB* (rys. 7), a następnie odciążone od *B* do *O*. Punkt *B* jest tak samo położony jak na rys. 5. Otrzymane krzywe pokazane na rys. 7 wykazują podobne cechy jak w obu poprzednich seriach. Ich porównanie z wynikami trzeciej serii (rys. 5)



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

przeprowadzono na rys. 8. Krzywa  $\sigma_{prop}^{III}$  (linia ciągła) jest obrócona względem krzywej  $\sigma_{prop}^{II}$  (linia przerywana), mimo tego że końcowy punkt  $B$  dróg wstępnego obciążania był w obu przypadkach ten sam. Materiał wykazuje więc pamięć drogi, wzdłuż jakiej został osiągnięty końcowy punkt  $B$ . Różnice między krzywymi  $\sigma_{0,5}^{II}$  i  $\sigma_{0,5}^{III}$  są bardzo nieznaczne.

### 5. Wnioski końcowe

Otrzymane wyniki pokazują złożony charakter wpływu odkształcenia plastycznego na kształt powierzchni plastyczności. Granica proporcjonalności wstępnie odkształconego materiału wykazuje silną anizotropię. Anizotropia ta w miarę wzrastania wtórnych odkształceń plastycznych maleje. Stwierdzona znaczna zmiana kształtu powierzchni  $\sigma_{prop}$ ,  $\sigma_{0,01}$  i  $\sigma_{0,02}$ , a w szczególności obrót powierzchni  $\sigma_{prop}$  pokazują, że próby opisu wzmocnienia oparte na koncepcji sztywnego przesuwania i równomiernego rozszerzania początkowej powierzchni plastyczności, jak to wynika z warunków (1.2) i (1.3), nie mogą oddać rzeczywistych własności materiału. Jednak dane doświadczalne, jakimi dysponujemy, są jeszcze daleko niewystarczające dla proponowania nowych zależności. Sporne jest również zagadnienie, którą z powierzchni należy utożsamiać z powierzchnią plastyczności. Chociaż bowiem pierwsze odkształcenia plastyczne zaczynają występować po przekroczeniu już powierzchni  $\sigma_{prop}$ , to jednak osiągają one wielkości równe odkształceniom sprężystym dopiero na powierzchni  $\sigma_{0,01}$ , a są wyraźnie od nich większe dla  $\sigma_{0,02}$ .

Векторы прыростов одkształcenia plastycznego są na ogół normalne do odpowiednich powierzchni, ale w kilku przypadkach stwierdzono dość znaczne ich odchylenia od kierunku normalnego. Należy jednak pamiętać, że każda z powierzchni została otrzymana w wyniku pomiaru kilku próbek, które mogły mieć nieco różne własności. Mogło to wpłynąć na kształt powierzchni. Kształt powierzchni w otoczeniu osi  $\sigma_t$  jest zakłócony przez wpływ trzeciego naprężenia głównego działającego wzdłuż grubości ścianki próbki.

Z przeprowadzonych badań wynika również pewien wniosek praktyczny, dotyczący projektowania rurociągów i zbiorników ciśnieniowych. Z rysunków 4, 5 i 7 widać, że odkształcony wstępnie materiał jest najsilniejszy w kierunku drogi wstępnego obciążenia. Jeżeli przewiduje się wzmocnienie materiału przez przeciążenie to powinno się ono odbywać przy takim samym rodzaju obciążenia przy jakim rurociąg lub zbiornik później pracuje.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Ю. И. Кадашевич, В. В. Новожилов, *Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения*, Прикл. Мат. Мех., I, 22(1958), 78.
2. T. LEHMAN, *Ein neuer Ansatz für plastische Formänderungen mit Kaltverfestigung*, Zeitschr. Ang. Math. Mech., Heft 7/8, 38 (1958).
3. А. Ю. Ишлинский, *Общая теория пластичности с линейным упрочнением*, Укр. Матем. Ж., 3, 1954, 314.
4. R. SHELDT and H. ZIEGLER, *On Prager's hardening rule*, ZAMP, 19a (1958), 260.
5. W. PRAGER, *The theory of plasticity; a survey of recent achievements*, Proc. Inst. Mech. Engrs., 169 (1955), 41.
6. Ю. И. Ягн, О. А. Шишмарев, *Некоторые результаты исследования упругого состояния пластически растянутых образцов никеля*, ДАН СССР, 119(1958), 46.
7. W. SZCZERŃSKI, *On the effect of plastic deformation on yield condition*, Arch. Mech. Stos., 15 (1963), 275.
8. P. M. NAGHDI, F. ESSENBURG and W. KOFF, *An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity*, J. Appl. Mech., 25 (1958), 201.
9. H. J. IVEY, *Plastic stress-strain relations and yield surfaces for aluminium alloys*, J. Mech. Eng. Sc., 3 (1961), 15.

#### Резюме

#### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННОЙ ЛАТУНИ

Приводятся результаты экспериментального исследования влияния пластической деформации на форму поверхности текучести латуни М 63. Исследования проводились на 28-ми трубко-образных образцах, подверженных, одновременно, нагружению осевой силой и внутренним давлением. Определяются поверхности текучести для различных определений предела текучести. Для проверки условия нормальности определяются также, в пространстве напряжений, векторы приращений деформации. Кроме того для разных моментов процесса нагрузки сравниваются величины векторов упругой и пластической частей деформации.

## S u m m a r y

## AN EXPERIMENTAL STUDY OF YIELD SURFACES OF PRESTRAINED BRASS

Experimental results for twenty-eight tubular specimens of a M63 brass, subjected to combined biaxial tension are presented in the study of the effect of prestraining on the shape of the yield surface. Yield surfaces are found for various definitions of the yield locus. The strain increments are also shown in the stress plane in order to compare their orientation with the normality criterion. Moreover, the lengths of elastic and plastic strain increment vectors are compared at different moments of loading.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 stycznia 1965 r.*

---

NIKTÓRE ZWIĄZKI WYCHYLEŃ SKRĘTNYCH I MOMENTÓW REAKCJI WAŁÓW  
DRGAJĄCYCH JAKO PODSTAWA METODY DOŚWIADCZALNEGO WYZNACZANIA  
ZMIENNYCH NAPRĘŻEŃ ŚCINAJĄCYCH

TADEUSZ A G O P S O W I C Z (GDAŃSK)

1. Wstęp

Spośród wielu szkodliwych objawów wymuszonych drgań skrętnych różnego rodzaju zespołów maszynowych (okrętowe zespoły napędowe, zespoły prądotwórcze, sprężarkowe itd.) na szczególną uwagę zasługują, jak wiadomo, zmienne naprężenia ścinające w wałach tych zespołów. Określenie wielkości tych naprężeń na drodze czysto teoretycznej jest zwykle bardzo uciążliwe, a wyniki obarczone są nieraz dużymi błędami. Wynika to zarówno ze skomplikowanej natury samych układów, jak i braku wystarczająco dokładnych danych ilościowych o niektórych ich parametrach.

Źródłem szczególnych trudności obliczeniowych jest zagadnienie tłumienia omawianych drgań. Pomijając nawet przypadki, w których nie znajdują zastosowania do celów technicznych modele teoretyczne z tłumieniem liniowym, można stwierdzić, że stosując konkretne wartości współczynników tłumienia musimy być przygotowani niejednokrotnie na obciążenie wyników nawet bardzo poważnymi błędami.

Badania doświadczalne dodatkowych naprężeń ścinających w wałach układów rzeczywistych stwarzają na ogół lepszą podstawę do uzyskania wystarczająco dokładnych wyników, a osiągnięcie tego celu uzależnione jest zarówno od stosowanej metody pomiarowej jak i sposobu przeprowadzenia obliczeń w oparciu o dane pomiarowe.

Najbardziej rozpowszechniona metoda doświadczalnego wyznaczania omawianych naprężeń polega na pomiarze wychyleń skrętnych w jednym lub kilku przekrojach wału i na wykorzystaniu związków zachodzących między tymi wychyleniami (lub ich amplitudami) a momentami reakcji wału (lub ich amplitudami).

Za najbardziej celowe należy uznać stosowanie takich związków, które nie stwarzają konieczności wykonywania nadmiernie pracowitych obliczeń oraz zawierają możliwie najmniej parametrów mogących obciążyć wyniki poważnym błędem. Do parametrów takich w większości omawianych układów zaliczyć należy przede wszystkim wspomniane wyżej współczynniki tłumienia drgań.

W artykule niniejszym przedstawiono próbę wyprowadzenia takich związków w oparciu o określony model układu ciągłego oraz wykazania ich przydatności w zastosowaniu do układów rzeczywistych, w szczególności do okrętowych zespołów napędowych z silnikami tłokowymi.

Przytoczone w zakończeniu przykłady liczbowe uzasadniają i ilustrują przydatność praktyczną tych związków.

## 2. Podstawy teoretyczne

Rozpatrzmy układ (rys. 1) składający się z dwu mas o momentach bezwładności  $J_1$  i  $J_2$ , połączonych wałem o przekroju kołowym o długości  $L$  i o ciągłym rozmieszczeniu momentu bezwładności masy względem osi wału  $O-x$ , przy czym moment bezwładności masy jednostki długości wału względem jego osi wynosi  $j_1$ . Obie masy poddane są działaniu momentów tłumiących drgania o wielkości odpowiednio  $T_1$  i  $T_2$ , proporcjonalnych do prędkości kątowych ruchu drgającego:

$$T_1 = -\varrho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \quad T_2 = -\varrho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t},$$

gdzie przez  $\varrho_1 > 0$  oraz  $\varrho_2 > 0$  oznaczono współczynniki tłumienia, przez  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  kąty skrętnego wychylenia mas o momentach bezwładności odpowiednio  $J_1$  i  $J_2$ , a przez  $t$  — czas.

Wymuszenie drgań skrętnych układu pochodzi od harmonicznego w czasie momentu  $T_f = T_0 \exp(i\omega t)$  działającego na masę o momencie bezwładności  $J_2$ .

Drgania skrętne opisanego wyżej układu określa równanie różniczkowe

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$(2.2) \quad \begin{aligned} GJ_0 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{(0,t)} &= J_1 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{(0,t)} + \varrho_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{(0,t)}, \\ -GJ_0 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{(L,t)} &= J_2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{(L,t)} + \varrho_2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{(L,t)} - T_0 e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

gdzie  $\varepsilon^2 = GJ_0/j_1$ , przy czym  $G$  jest modułem sprężystości wału na skręcanie, a  $J_0$  biegunowym momentem bezwładności powierzchni przekroju poprzecznego wału.

Rozwiązanie równania (2.1) z warunkami brzegowymi (2.2) przedstawić można dla ruchu ustalonego w postaci

$$(2.3) \quad \varphi_{1,2}(x, t) = \frac{T_0}{\omega} \left[ \left( \frac{ac+bd}{a^2+b^2} \cos \omega t - \frac{ad-bc}{a^2+b^2} \sin \omega t \right) + \right. \\ \left. + i \left( \frac{ad-bc}{a^2+b^2} \cos \omega t + \frac{ac+bd}{a^2+b^2} \sin \omega t \right) \right],$$

gdzie

$$\begin{aligned} a &= \frac{\omega}{\varepsilon} GJ_0(J_1+J_2) \cos \frac{\omega L}{\varepsilon} - \left[ J_1 J_2 \omega^2 - \left( \frac{GJ_0}{\varepsilon} \right)^2 - \varrho_1 \varrho_2 \right] \sin \frac{\omega L}{\varepsilon}, \\ b &= \frac{GJ_0}{\varepsilon} (\varrho_1 + \varrho_2) \cos \frac{\omega L}{\varepsilon} - \omega (J_1 \varrho_2 + J_2 \varrho_1) \sin \frac{\omega L}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

$$c = \frac{GJ_0}{\varepsilon} \cos \frac{\omega}{\varepsilon} x - J_1 \omega \sin \frac{\omega}{\varepsilon} x,$$

$$d = \varrho_1 \sin \frac{\omega}{\varepsilon} x.$$

Amplitudę wychyleń w postaci bezwymiarowej przedstawia zależność

$$(2.4) \quad \frac{\Phi}{\Phi_{st}} = \frac{a}{\Omega} \frac{\cos \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}}{\cos \frac{\Omega}{a}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\left( \frac{\gamma}{\gamma_1} - \Omega \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L} \right)^2 + \nu_1^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}}{\left[ \frac{\Omega^2}{\beta^2} - \left( \Omega^2 \frac{\beta_1}{\beta} - \frac{\gamma}{\gamma_1} - \frac{\beta}{\beta_1} \nu_1 \nu_2 \right) \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \right]^2 + \left[ \left( \nu_1 + \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} \nu_2 \right) - \frac{\beta_1}{\beta} (\nu_1 + \nu_2) \Omega \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \right]^2}},$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{p^2} = \frac{\omega^2}{K} \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}, \quad \Phi_{st} = \frac{T_0}{K},$$

$$a^2 = \frac{p_s^2}{p^2} = \frac{J_1 J_2}{J_s (J_1 + J_2)}, \quad \nu_1 = \frac{\varrho_1}{J_1 p}, \quad \nu_2 = \frac{\varrho_2}{J_2 p},$$

$$\beta^2 = \frac{p_2^2}{p^2} = \frac{J_1}{J_1 + J_2}, \quad \beta_1^2 = \frac{p_s^2}{p_2^2} = \frac{J_2}{J_s},$$

$$\gamma^2 = \frac{p_1^2}{p^2} = \frac{J_2}{J_1 + J_2}, \quad \gamma_1^2 = \frac{p_s^2}{p_1^2} = \frac{J_1}{J_s}.$$

W oznaczeniach tych przyjęto ponadto

$$p^2 = \frac{K(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}, \quad p_s^2 = K/J_s,$$

$$p_1^2 = K/J_1, \quad p_2^2 = K/J_2,$$

$$K = GJ_0/L, \quad J_s = j_1 L.$$

Wielkość momentu reakcji sprężystej wału drgającego  $\mathcal{T}_R$  wyznaczamy z zależności (2.3); ponieważ wiadomo, że

$$\mathcal{T}_R = GJ_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

więc

$$(2.5) \quad \mathcal{T}_{R1,2} = \frac{GJ_0 T_0}{\omega} \left[ \left( \frac{c_1}{a^2 + b^2} \cos \omega t - \frac{d_1}{a^2 + b^2} \sin \omega t \right) + i \left( \frac{d_1}{a^2 + b^2} \cos \omega t + \frac{c_1}{a^2 + b^2} \sin \omega t \right) \right],$$



gdzie

$$c_1 = \frac{\partial}{\partial x}(ac+bd), \quad d_1 = \frac{\partial}{\partial x}(ad-bc).$$

Amplitudę momentu reakcji w postaci bezwymiarowej przedstawia, zgodnie z oznaczeniami wzoru (2.4), wyrażenie

$$(2.6) \quad \frac{T_R}{T_0} = \frac{\cos \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}}{\cos \frac{\Omega}{a}} \times \sqrt{\frac{\left(\Omega + \frac{\gamma}{\gamma_1} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}\right)^2 + v_1^2}{\left[\frac{\Omega^2}{\beta^2} - \left(\Omega^2 \frac{\beta_1}{\beta} - \frac{\gamma}{\gamma_1} - \frac{\beta}{\beta_1} v_1 v_2\right) \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a}\right]^2 + \left[\left(v_1 + \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} v_2\right) - \frac{\beta_1}{\beta} (v_1 + v_2) \Omega \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a}\right]^2}}$$

Aby przedstawić amplitudę momentu reakcji  $T_R$  jako funkcję amplitudy wychyleń  $\Phi$ , dzielimy stronami zależności (2.4) i (2.6) otrzymując po przekształceniach

$$(2.7) \quad \frac{T_R}{T_0} = \frac{\Phi \Omega}{\Phi_{st} a} \sqrt{\frac{\left(\Omega + \frac{\gamma}{\gamma_1} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}\right)^2 + v_1^2}{\left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - \Omega \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}\right)^2 + v_1^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}}}$$

Warto zwrócić uwagę, że wyrażenie to jest niezależne od współczynnika tłumienia  $v_2$ , a łatwo można wykazać, że jest ono niezależne również od współczynnika  $v_1$ , jeżeli spełnione jest równanie

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - \Omega \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}\right)^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L} \left(\Omega + \frac{\gamma}{\gamma_1} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}\right)^2 = 0,$$

o pierwiastkach rzeczywistych

$$(2.8) \quad \left(\frac{x}{L}\right)_k = \frac{\gamma \gamma_1}{\Omega} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\frac{\gamma_1}{\gamma} \Omega \pm \sqrt{1 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \Omega^2}\right).$$

Interpretację fizyczną mają jednak tylko takie pierwiastki o wskaźniku  $i$ , które spełniają warunek

$$(2.9) \quad 0 \leq \left(\frac{x}{L}\right)_i \leq 1.$$

Jeżeli więc wartość amplitudy wychYLENIA  $\Phi$  występująca we wzorze (2.7) określona została w przekroju wału o współrzędnej  $x_i$ , to wartość pierwiastka w tym wzorze jest niezależna od współczynnika tłumienia  $v_1$ . Wobec tego można wybrać

taką wartość  $\nu_1$ , która spowoduje sprowadzenie wzoru (2.7) do możliwie najprostszej postaci. Przyjmijmy więc  $\nu_1 = 0$ , a wzór (2.7) przyjmie postać

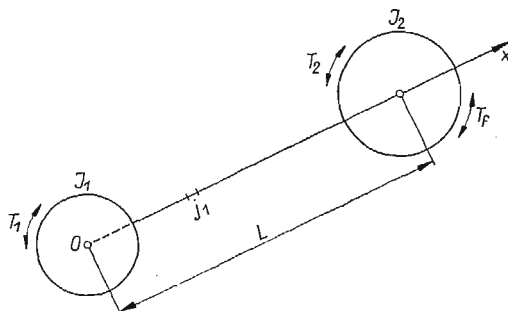
$$(2.10) \quad \frac{T_R}{T_0} = \frac{\Phi_i}{\Phi_{st}} \frac{\Omega}{\gamma\gamma_1} \frac{\Omega + \frac{\gamma}{\gamma_1} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \left(\frac{x}{L}\right)_i}{\frac{\gamma}{\gamma_1} - \Omega \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \left(\frac{x}{L}\right)_i}$$

Wzór (2.10) przedstawia więc związek między względną amplitudą momentu reakcji wału i amplitudą wychyleń określonych przekrojów wału, a cechą charakterystyczną tego związku jest jego bezpośrednia niezależność od współczynników tłumienia  $\nu_1$  i  $\nu_2$ , a więc i od  $q_1$  i  $q_2$ .

Jeżeli we wzorze (2.10) uwzględnimy wyrażenie (2.8), to dochodzimy po przekształceniach do prostej zależności

$$(2.11) \quad T_R = \Phi \frac{K}{\gamma_1^2 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\Omega^2 \gamma_1^2} - 1}}$$

W zależności tej uwzględniono jedynie rozwiązania (2.8) z dodatnią wartością pierwiastka, ponieważ rozwiązania z ujemną wartością tego pierwiastka nie mają przeważnie określonej interpretacji fizycznej.



Rys. 1

Z szeregu badań teoretycznych i doświadczalnych wynika, że istnieje pokaźna grupa układów rzeczywistych, które reprezentowane być mogą przez model przedstawiony na rys. 1 z pominięciem jednak wpływu masy wału na takie parametry jego drgań, jak amplitudy wychyleń czy amplitudy momentów reakcji. Dla takich układów spełniony jest warunek  $J_s \ll J_1$ ,  $J_s \ll J_2$ , co prowadzi do możliwości przyjęcia we wzorze (2.7) przybliżonej równości

$$\operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L} \approx \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}$$

Wynika to z faktu, że współczynnik  $a$  jest znacznie większy zarówno od stosunku  $x/L$  jak i od wartości  $\Omega$ , która w interesującym nas najbardziej zakresie rezonansowym jest bliska jedności.

Przyjmując więc przytoczone wyżej uproszczenia wzór (2.7) przekształcić można do prostej postaci<sup>1</sup>

$$(2.12) \quad T_R = \Phi_x \Omega K \sqrt{\frac{\Omega^2 + \nu_1^2}{\left(\gamma^2 - \Omega^2 \frac{x}{L}\right)^2 + \nu_1^2 \left(\Omega \frac{x}{L}\right)^2}}$$

Stosując obecnie warunek niezależności wartości pierwiastka we wzorze (2.12) od współczynnika tłumienia  $\nu_1$  otrzymamy warunek

$$(2.13) \quad \frac{x_0}{L} = \frac{\gamma^2}{2\Omega^2}$$

Jeżeli warunek (2.13) zostanie spełniony, to współczynnik  $\nu_1$  może przyjąć dowolną wartość rzeczywistą, a więc również wartość zera i z zależności (2.12) otrzymamy prosty wzór

$$(2.14) \quad T_R = \frac{2\Phi_0 K \Omega^2}{\gamma^2},$$

niezależny od współczynników tłumienia  $\nu_1$  i  $\nu_2$ .

Dla warunków rezonansowych przyjąć wolno w przybliżeniu  $\Omega \approx 1$  i wzór (2.14) przyjmie jeszcze prostszą postać

$$(2.15) \quad T_{Rr} = \frac{2\Phi_0 K}{\gamma^2},$$

przy czym

$$(2.16) \quad \left(\frac{x_0}{L}\right)_r = \frac{\gamma^2}{2}.$$

Innego typu związek amplitudy momentu reakcji i amplitudy wychyleń skrętnych, ale również niezależny bezpośrednio od współczynników tłumienia, można wyprowadzić z zależności (2.12) dla przypadków, w których znane są wartości amplitud  $\Phi_{x_1}$  i  $\Phi_{x_2}$  w dwu przekrojach wału o różnych współrzędnych  $x_1$  i  $x_2$ . Wstawiając bowiem wartość  $x_1$  i odpowiadającą jej  $\Phi_{x_1}$  do zależności (2.12) otrzymujemy współczynnik tłumienia<sup>2</sup>

$$(2.17) \quad \nu_1^2 = \frac{\Phi_{x_1}^2 K^2 \Omega^4 - T_R^2 \left(\gamma^2 - \Omega^2 \frac{x_1}{L}\right)^2}{T_R^2 \Omega^2 \frac{x_1^2}{L^2} - \Phi_{x_1}^2 K^2 \Omega^2}$$

<sup>1</sup> Wzór ten można wyprowadzić również w oparciu o równanie ruchu zwykłego układu dwumasyowego.

<sup>2</sup> Zależność (2.17) może stanowić podstawę doświadczalnego badania współczynnika tłumienia śrubowego  $\nu_1$ .

Stosując następnie to wyrażenie w zależności (2.12), ale odniesionej do wartości  $x_2$  i odpowiadającej jej wartości  $\Phi_{x_2}$ , otrzymujemy

$$(2.18) \quad T_R = K \sqrt{\frac{\Phi_{x_1}^2 \left( \gamma^2 - 2\Omega^2 \frac{x_2}{L} \right) - \Phi_{x_2}^2 \left( \gamma^2 - 2\Omega^2 \frac{x_1}{L} \right)}{\frac{x_1^2}{L^2} \left( \gamma^2 - 2\Omega^2 \frac{x_2}{L} \right) - \frac{x_2^2}{L^2} \left( \gamma^2 - 2\Omega^2 \frac{x_1}{L} \right)}}$$

Przystosowanie wzoru (2.18) do warunków rezonansowych następuje przez przyjęcie w nim przybliżonej wartości  $\Omega = 1$ .

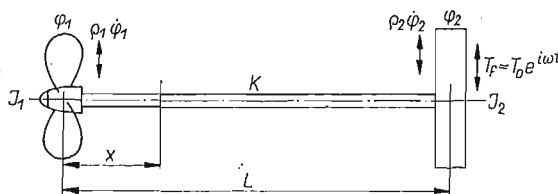
### 3. Zastosowanie do analizy wyników pomiarów wykonanych przyrządami typu sejsmicznego

Wyprowadzone w poprzednim punkcie zależności znaleźć mogą zastosowanie do badania amplitud naprężeń zmiennych, wywołanych drganiami skrętnymi wałów układów rzeczywistych. Zastosowania takie dotyczyć tu będą okrętowych zespołów napędowych, chociaż rozszerzyć je można łatwo na inne zespoły maszynowe poddane oddziaływaniu wymuszonych drgań skrętnych.

Przyjmujemy następujące założenia:

- 1) silnik napędowy reprezentowany jest przez jedną zastępczą masę skupioną,
- 2) pomija się wpływ masy wału na parametry drgań układu,
- 3) wymuszenie drgań jest harmoniczne w czasie i działa jedynie na masę zastępczą silnika; jest to jedna z głównych harmonicznym momentu wymuszającego o stałej amplitudzie,
- 4) tłumienie śrubowe jest proporcjonalne do prędkości ruchu drgającego,
- 5) tłumienie silnikowe można uważać jako równoważny moment proporcjonalny do prędkości ruchu drgającego.

Założenia wyżej wymienione są powszechnie stosowane w obliczeniach takich parametrów drgań skrętnych, jak częstość swobodnych drgań jednowęzłowych okrętowych zespołów napędowych, amplitudy wychyleń i momentów reakcji linii wałów okrętowych, a liczne doświadczenia potwierdzają wystarczającą w praktyce dokładność otrzymanych wyników [1–7 i 9].



Rys. 2

Model układu drgającego reprezentującego okrętowy zespół napędowy z uwzględnieniem poczynionych wyżej założeń przedstawia rys. 2

Symbole użyte do opisu modelu oznaczają:

- $K$  sztywność skrętną linii wału,
- $J$  momenty bezwładności mas,
- $L$  długość zredukowaną wału o sztywności  $K$ ,

- $p$  częstość drgań swobodnych,  
 $T_f$  harmoniczny w czasie moment o amplitudzie  $T_0$  wymuszający drgania,  
 $T_R$  amplitudę harmonicznego w czasie momentu reakcji wału,  
 $\varphi$  wychylenia skrętne harmoniczne w czasie,  
 $\Phi$  amplitudę wychyleń skrętnych harmonicznych w czasie,  
 $\varrho_1$  współczynnik tłumienia śrubowego,  
 $\varrho_2$  współczynnik tłumienia silnikowego,  
 $\omega$  częstość kątową drgań wymuszonych,  
 $x$  odległość przekroju wału od masy śruby napędowej,  
 $t$  czas.

Powszechnie stosowana metoda doświadczalnego wyznaczania amplitud zmiennych momentów reakcji wału, a więc i dodatkowych zmiennych naprężeń ścinających, opiera się na pomiarze amplitud wychyleń skrętnych wału w dowolnym przekroju o współrzędnej  $x$  przeważnie za pomocą torsjografów typu sejsmicznego (Geiger, Sperry-M.I.T., Snubury itp.). Wykorzystując następnie związki zachodzące między amplitudami wychyleń a amplitudami momentów reakcji wyznacza się wartości tych ostatnich. W stosowanych wzorach reprezentujących te związki pojawia się często wpływ tłumienia śrubowego i silnikowego albo używa się współczynników tłumienia, których określenie z wymaganą dokładnością jest zwykle bardzo utrudnione [3, 7, 8, 10]. W obu przypadkach ostateczne wyniki obarczone bywają nieraz bardzo poważnym błędem. Zagadnienie to zostało szczególnie dokładnie naświetlone w artykule S. ARCHERA [4].

Optymalnym rozwiązaniem tego zawilego problemu byłoby zastosowanie takich zależności amplitud momentów reakcji od amplitud wychyleń, które byłyby niezależne bezpośrednio od współczynników tłumienia, a podlegały pomiarom jedynie przez amplitudy wychyleń.

Takie właśnie zależności wyprowadzono w poprzednim rozdziale; do określenia amplitud momentów reakcji wału (stałych na całej długości wału) używamy:

a) prostego wzoru (2.14) lub w warunkach rezonansu wzoru (2.15) z tym jednak, że amplitudy wychyleń wału muszą być mierzone w miejscu o współrzędnej  $x_0$  określonej wzorem (2.13) lub (2.16);

b) wzoru (2.18), jeżeli są do dyspozycji wyniki pomiarów amplitud wychyleń  $\Phi_{x_1}$  i  $\Phi_{x_2}$  w dwu dowolnych miejscach linii wału oraz oczywiście współrzędnych tych punktów pomiarowych  $x_1$  i  $x_2$ .

Istotną rzeczą z punktu widzenia przydatności praktycznej tych zależności jest znajomość błędu wynikającego z pominięcia wpływu masy wału oraz z użycia wartości amplitud wychyleń pomierzonych nieściśle w odległości  $x_0$  od masy śruby napędowej (przypadek a), a w odległości

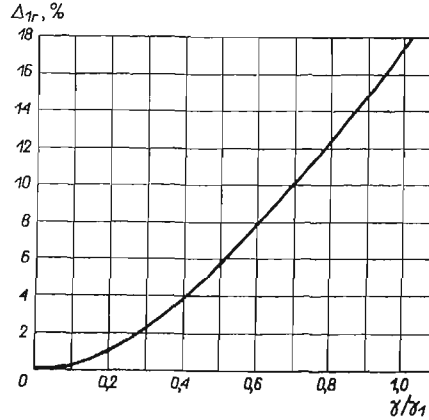
$$(3.1) \quad x_1 = x_0(1 + \delta),$$

gdzie  $\delta$  spełniająca nierówność

$$-1 \leq \delta \leq \frac{2\Omega^2}{\gamma^2} - 1$$

jest wskaźnikiem błędu ustawienia przyrządu pomiarowego.

Wykres na rys. 3 ilustruje wpływ momentu bezwładności masy wału na błąd bezwzględny w określeniu amplitudy momentu reakcji wału w przekroju o współrzędnej  $x_0$  i w warunkach rezonansu ( $\Omega \approx 1$ ), czyli błąd wynikający z zastosowania wzoru (2.14) zamiast (2.11).

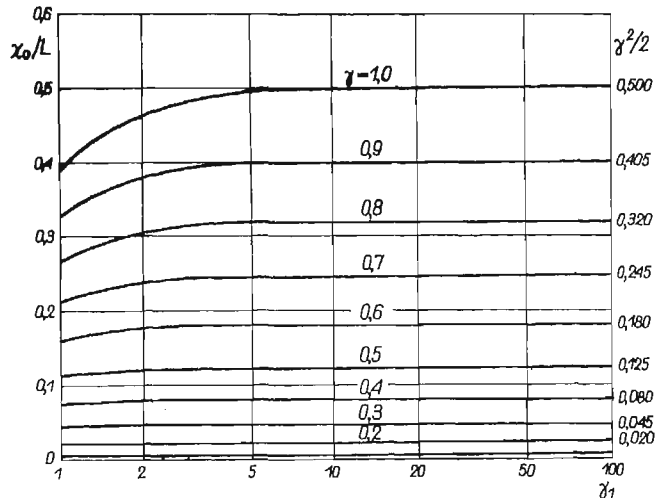


Rys. 3

Wielkość tego błędu wyraża się zależnością

$$(3.2) \quad \Delta_1 = \left[ \frac{2\Omega}{\gamma^2/\gamma_1^2} \left( \sqrt{\Omega^2 + \frac{\gamma^2}{\gamma_1^2}} - \Omega \right) - 1 \right] 100 \%$$

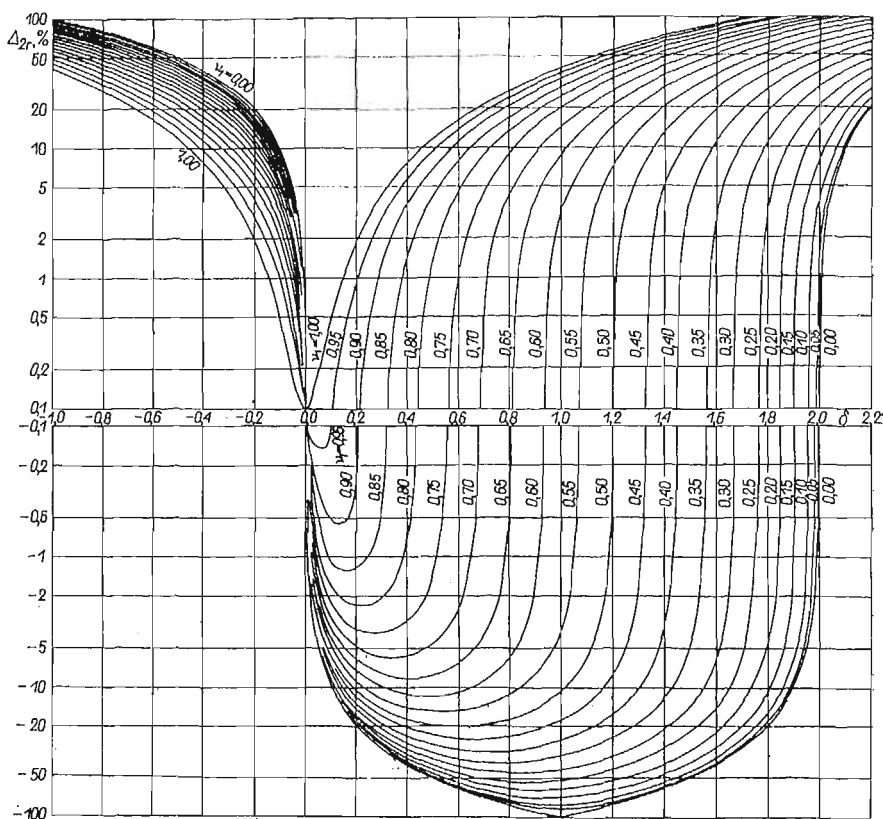
Łatwo się można przekonać dysponując odpowiednimi wartościami parametrów układów rzeczywistych, że błąd ten w odniesieniu do większości omawianych układów jest znikomy. I tak na przykład dla  $\gamma/\gamma_1 < 0,2$  mamy  $\Delta_{1r} < 1\%$ .



Rys. 4

Wielkość momentu bezwładności masy wału może mieć również wpływ na wartość współrzędnej  $x_0$ . Wpływ ten obrazuje wykres na rys. 4 i odnosi się do warunków

rezonansu ( $\Omega = 1$ ), a oparty jest na wzorze wywodzącym się z zależności (2.8). I w tym przypadku, jak wynika ze wspomnianego wykresu, zastosowanie prostego wzoru (2.16) zamiast (2.8) (przy  $\Omega = 1$ ) do omawianych tu układów jest w pełni dopuszczalne.



Rys. 5

Nieco inaczej przedstawia się sprawa wielkości błędu określenia amplitudy momentu reakcji wału w zależności od błędności ustawienia przyrządu pomiarowego  $\delta$ . Wykres na rys. 5 ilustruje właśnie tę zależność, dla warunków rezonansowych  $\Omega = 1$ , i ma postać

$$(3.3) \quad \Delta_2 = \left[ \sqrt{\frac{(1-\delta)^2 \Omega^2 + (1+\delta)^2 \nu_1^2}{\Omega^2 + \nu_1^2}} - 1 \right] 100 \%.$$

Warto zwrócić uwagę, że w przypadku gdy  $\nu_1 \ll 1$  (co jest bardzo często spełnione w omawianych tu układach rzeczywistych) i wartość  $\nu_1^2$  można pominąć wobec jedności, wyrażenie (3.3) (dla  $\Omega = 1$ ) przedstawić można w prostej postaci przybliżonej, bardzo użytecznej w zastosowaniu praktycznym

$$(3.4) \quad \Delta_{2r} = -100\delta \ \%.$$

Jest to więc zależność liniowa, która w praktyce wymaga niekiedy względnie dużej dokładności wyznaczenia miejsca pomiaru amplitud wychyleń skrętnych.

Wykresami na rys. 5 [lub wzorem (3.3)] można się również posługiwać przy określaniu amplitudy momentu reakcji wału w przypadku, gdy pomiar amplitud wychyleń został wykonany w dowolnym miejscu wału o współrzędnej  $x_1$ , a więc gdy  $x_1 \neq x_0$ . Wymagana jest jednak wówczas znajomość współczynnika tłumienia  $\nu_1$ .

Jak wynika z przytoczonej wyżej analizy, posługiwanie się w praktyce obliczeniowej wzorem (2.14) lub (2.15) jest jedynie wówczas w pełni efektywne, jeżeli warunek przeprowadzenia pomiaru w miejscu określonym wzorem (2.13) lub (2.16) może być spełniony z dużą dokładnością. Dla innych przypadków z grupy (a) pozostawałaby alternatywa określania amplitud momentów reakcji drogą uprzedniego wyznaczenia współczynnika tłumienia śrubowego  $\nu_1$  albo wykonywania pomiarów w dwóch różnych miejscach wału (wzór 2.18), gdyby nie specjalna właściwość zależności (2.12) i (2.13). Przypuśćmy bowiem, że pomiar amplitud wychyleń skrętnych wykonany został nie w miejscu o współrzędnej  $x_0$ , ale o współrzędnej  $x_1 \neq x_0$ , określonej wyrażeniem (3.1). Przypuśćmy następnie, że wartości  $x_1$  i  $x_0$  nie różnią się znacznie, co pozwala na przyjęcie, że pierwiastek we wzorze (2.12) jest niezależny od współczynnika tłumienia  $\nu_1$ .

Zakładając więc na przykład  $\nu_1 = 0$  oraz używając wielkości  $x_1$  jako współrzędnej miejsca rzeczywiście wykonanego pomiaru otrzymujemy ze wzoru (2.12)

$$(3.5) \quad T_R = \frac{\Phi_x K}{\frac{\gamma^2}{\Omega^2} - \frac{x_1}{L}}.$$

Okazuje się, że metoda oparta na wzorze (3.5) dopuszcza znacznie szerszy zakres tolerancji współrzędnej miejsca pomiaru  $x_0$ . Wielkość tego zakresu uwarunkowana jest wielkością błędu wynikającego z zastosowania wzoru (3.5) zamiast wzoru (2.12).

Przyjmując, że  $x_1 = f(\delta)$  zgodnie z zależnością (3.1), wspomniany wyżej błąd bezwzględny określa wzór

$$(3.6) \quad \Delta_3 = \left[ \sqrt{\frac{\Omega^2 + \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^2 \nu_1^2}{\Omega^2 + \nu_1^2}} - 1 \right] 100 \ %.$$

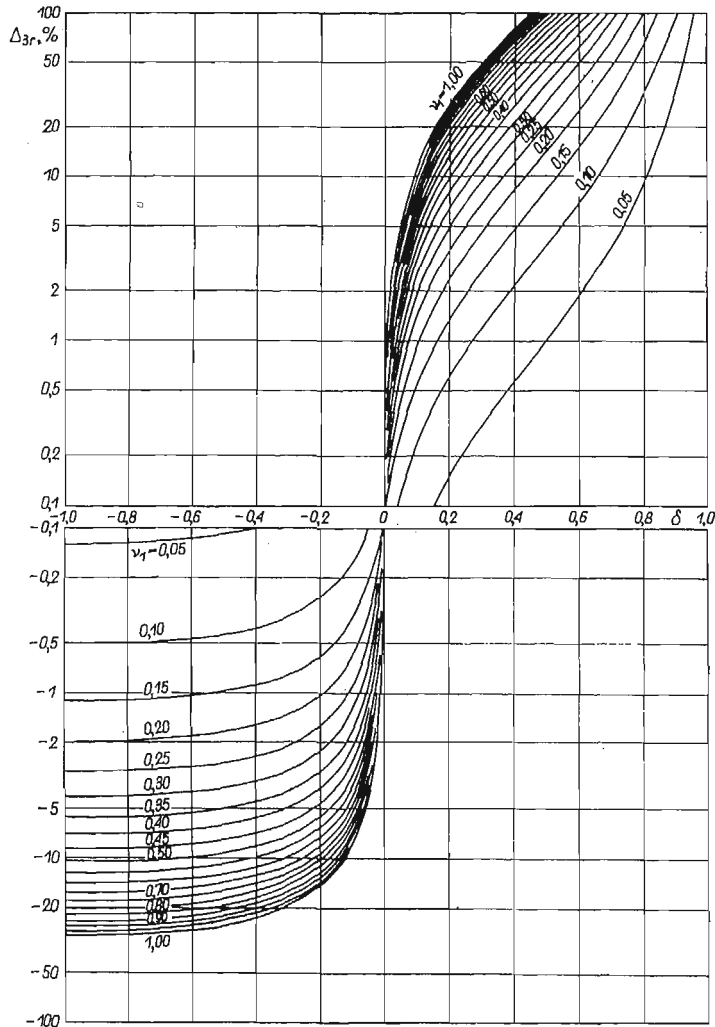
Wykres na rys. 6 ilustruje zależność (3.6) przy  $\Omega = 1$ . Z analizy tej zależności wynika wniosek o dużym znaczeniu praktycznym dla układów, w których współczynnik tłumienia śrubowego jest mały, to znaczy przy  $\nu_1 \ll 1$ ; warunek ten — jak już wspomniano — jest z reguły spełniony w zespołach okrętowych. Wniosek ten jest następujący: jeżeli pomiar amplitud wychyleń skrętnych wału wykonany został w miejscu, którego współrzędna spełnia warunek  $0 \leq x_1 \leq x_0$ , to wynik obliczenia amplitud momentu reakcji wału przy zastosowaniu wzoru (3.5) przy  $\Omega = 1$  obciążony jest znikomym błędem. I tak na przykład dla układów, w których  $\nu_1 \leq 0,20$ , otrzymamy  $\Delta_{3r} < 2 \ %$ .

Dokładność wyników obliczeń, w których posługiwano się wzorem (2.18), nie wymaga pomiarów w ściśle określonym miejscu linii wału; postępowanie takie



nie komplikuje więc metod stosowanych dotąd dla doświadczalnego określenia dodatkowych naprężeń ścinających w wałach zespołów maszynowych.

Warto ponadto zwrócić uwagę na przydatność wzoru (2.18) do badania amplitud momentu reakcji w zakresie pozarezonansowym bez konieczności wyznaczania



Rys. 6

ani wartości współczynnika tłumienia, ani też współrzędnych położenia przyrządów pomiarowych dla różnych częstości drgań. Znajomość tych amplitud jest często wymagana, a zwłaszcza dla warunków nominalnych pracy zespołów maszynowych.

#### 4. Przykłady liczbowe

*Przykład I.* Temat do przykładu liczbowego zaczerpnięto z pracy [4] w wersji podanej w [1]. Wybór tego właśnie przykładu uzasadniony jest faktem, że przy-

tacza ono w nim wielkości pomierzonych amplitud wychyleń skrętnych w dwu miejscach wału oraz obliczono wartość amplitudy momentu reakcji w wale za pomocą własnej, szeroko uzasadnionej metody. Wielkości pomiarowe mogą więc służyć do obliczenia poszukiwanych wartości za pomocą wzorów wyprowadzonych w naszej pracy oraz do porównania wyników z wynikami uzyskanymi w [1].

Treść tematu w ujęciu pracy [1] jest następująca (oznaczenia przyjęto zgodnie ze stosowanymi w niniejszej pracy oraz podano wartości w układzie metrycznym): okrętowy zespół napędowy z silnikiem napędowym sześciocyndrowym, czterosuwowym, jednostronnego działania osiąga krytyczną liczbę obrotów trzeciego rzędu drgań jednowęzłowych przy  $N_3 = 49$  obr/min. Pomiary drgań wykonano przy użyciu torsjografów Geigera w dwóch miejscach  $A$  i  $F$  na wale pośrednim. Należy określić naprężenia ścinające w wale pośrednim i śrubowym.

**D a n e:** Moment bezwładności mas silnika  $J_2 = 444\,500$  kG cmsek.<sup>2</sup> ( $J_2$  otrzymano z obliczeń metodą Holzera jako sumę iloczynów momentów bezwładności mas silnika przez odpowiadające im kwadraty amplitud wychyleń względnych). Moment bezwładności masy śrubowej napędowej  $J_1 = 115\,250$  kG cm sek.<sup>2</sup> (łącznie z masą wody towarzyszącej). Częstość drgań swobodnych  $f_1 = 147$  obr/min. (wartość pomierzona). Współczynnik sztywności wału  $K = p_1^2 : (1/J_1 + 1/J_2) = 21,65 \cdot 10^6$  kGcm/rad., gdzie  $p_1 = \frac{2\pi f_1}{60} = 15,4$  rad./sek. Współczynnik tłumienia śrubowego

$e_1 = 236\,700$  kG cm sek./rad., lub  $\nu_1 = \frac{e_1}{I_1 p_1} = 0,1334$ ). Moment wymuszający

trzeciego rzędu  $T_0 = T_3(\sum \vec{\lambda})_3 = 2,025 \cdot 10^6$  kGcm. Średnica wału pośredniego  $D_e = 312$  mm. Średnica wału śrubowego  $D_s = 349$  mm.

Torsjografy przystosowano do pomiarów przez zastąpienie ich normalnych bębnow (średnicy  $D_T = 148$  mm) większymi aluminiowymi bębnami o średnicy  $D_{T'}$  = 220 mm. Pomiary wykonano przy przełożeniu statycznym zapisu  $m_s = 3$  i przy dynamicznym przełożeniu  $m_d = 1$ . Podwójne amplitudy zarejestrowane na taśmach wynosiły  $h_F = 18,5$  mm na przyrządzie w położeniu  $F$  (bliżej silnika) i  $h_A = 36,0$  mm na przyrządzie w położeniu  $A$  (bliżej śruby napędowej).

I.1. A m p l i t u d y w y c h y l e ń w a ł u w m i e j s c a c h p o m i a r u. Wielkość amplitud wychyleń może być określona za pomocą wzoru (1) w pracy [7] (str. 595), z którego wynika

$$\Phi = \frac{h}{D_e m_d m_s \cdot (D_T/D_{T'})} = 1,59 \cdot 10^{-3} h \text{ rad.}$$

Stosunek  $D_T/D_{T'}$ , uwzględnia fakt, że bęben napędowy torsjografu posiadał średnicę  $D_{T'}$ , różną od średnicy normalnej  $D_T$ .

Ostatecznie amplitudy wychyleń wału w obu miejscach pomiarowych są następujące:

$$\Phi_F = \pm 1,59 \cdot 10^{-3} \cdot 18,5 = 0,0294 \text{ rad.}$$

$$\Phi_A = \pm 1,59 \cdot 10^{-3} \cdot 36,0 = 0,0572 \text{ rad.}$$

I.2. Dodatkowe naprężenia ścinające w wale obliczone metodą S. Archera (wyniki obliczeń p. [7], str. 601)

$$T_{sh} = 21,65 \cdot 10^6 \cdot 0,181 = \pm 3,92 \cdot 10^5 \text{ kGcm};$$

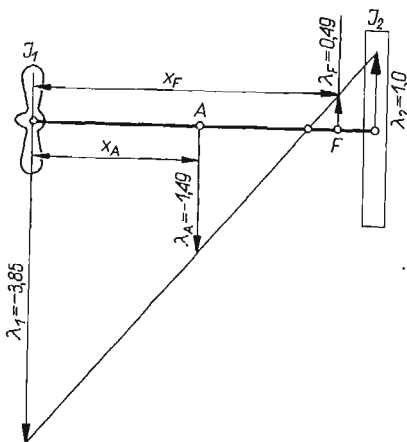
$$\text{wał pośrodkni } \tau'_{D_e} = T_{sh} / \left( \frac{\pi}{16} D_e^3 \right) = \pm 655 \text{ kG/cm}^2;$$

$$\text{wał śrubowy } \tau'_{D_s} = T_{sh} / \left( \frac{\pi}{16} D_s^3 \right) = \pm 473 \text{ kG/cm}^2.$$

I.3. Dodatkowe naprężenia ścinające w wale obliczone za pomocą wzorów wyprowadzonych w niniejszym artykule. Długość wału  $L$  wyznaczać można ze znanego wzoru na długość zredukowaną

$$L = \pi/32 = GD_e^4/K = 3583,0 \text{ cm}.$$

Tutaj przyjęto  $G = 8,3 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$ .



Rys. 7

Wartość  $x_A$  i  $x_F$  (odległości punktów pomiarowych od początku układu, to jest od masy śruby napędowej) wyznaczamy z prostych zależności geometrycznych wynikających z rys. 7:

$$x_A = 1741,0 \text{ cm lub } x_A/L = 0,486,$$

$$x_F = 3230,0 \text{ cm lub } x_F/L = 0,901.$$

Współrzędna miejsca na wale, w którym powinny być przeprowadzone pomiary tak, aby można było zastosować wzór (2.15), obliczamy na podstawie warunku (2.16)

$$x_0/L_r = 0,397 \quad \text{lub} \quad x_{0r} = 1422,0 \text{ cm}.$$

Pomiary zostały więc wykonane w miejscach o współrzędnych różniących się znacznie od  $x_{0r}$ . Wskaźniki błędów ustawienia przyrządów wyznaczone z zależności (3.1) wynoszą  $\delta_A = 0,227$ ;  $\delta_F = 1,270$ .

a. Na podstawie wzoru (2.12) w warunkach rezonansu ( $\Omega = 1$ ) mamy  $T_{RrA} = 3,97 \cdot 10^6 \text{ kGcm}$ ,  $T_{RrF} = 3,98 \cdot 10^6 \text{ kGcm}$ .

Wielkość błędu bezwzględnego, jakim obarczone są te wyniki względem wartości otrzymanej metodą Archera w p. 1.2, wynoszą odpowiednio  $\delta_{r_A}' = 1,3 \%$ ,  $\delta_{r_F}' = 1,6 \%$ . Przyjmując, że  $T_{Rr} = 3,975 \cdot 10^6$  kGcm, obliczamy dodatkowe naprężenia ścinające w wale pośrednim  $\tau_{D_e}' = 666$  kG/cm<sup>2</sup> i w wale śrubowym  $\tau_{D_s}' = 475$  kG/cm<sup>2</sup>.

b. Na podstawie wzoru (2.15)

$$T_{Rr} = \frac{2 \cdot 21,65 \cdot 10^6}{0,794} \Phi = 54,58 \cdot 10^6 \cdot \Phi \text{ kG cm},$$

$$T_{RrA} = 54,58 \cdot 10^6 \cdot 0,0572 = 3,120 \cdot 10^6 \text{ kG cm},$$

$$T_{RrF} = 54,58 \cdot 10^6 \cdot 0,0294 = 1,605 \cdot 10^6 \text{ kG cm}.$$

Posługując się wykresami na rys. 5 określamy wielkości błędu, jakimi obarczone są wyniki względem wartości wynikających ze wzoru (2.12). Dla  $\delta_A = 0,227$   $\Delta_{2rA} = -20 \%$ , a dla  $\delta_F = 1,270$   $\Delta_{2rF} = -59 \%$ .

c. Na podstawie wzoru (3.5) otrzymujemy  $T_{RrA} = 4,02 \cdot 10^6$  kGcm, a  $T_{RrF} = 5,95 \cdot 10^6$  kG cm.

Posługując się wykresami na rys. 6 określamy wielkości błędu, jakimi obarczone są te wyniki względem wartości wynikających ze wzoru (2.12). Dla  $\delta_A = 0,227$   $\Delta_{3rA} = +1,2 \%$ , a dla  $\delta_F = 1,270$   $\Delta_{3rF} = +50 \%^1$ .

d. Na podstawie wzoru (2.18) obliczamy  $T_{RrAF} = 3,98 \cdot 10^6$  kG cm.

Błąd obliczony względem wyniku otrzymanego przy zastosowaniu metody Archera wynosi tu  $\Delta_{rAF} = 0,1 \%$ .

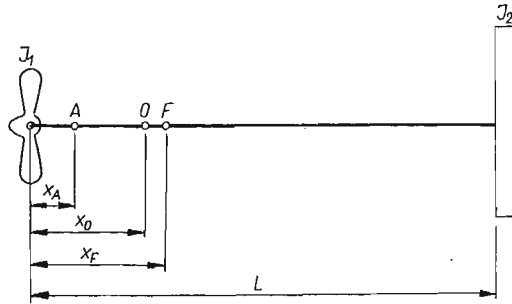
*Przykład II.* Statek drobnicowy 9500 TDW z silnikiem napędowym wysoko-  
prężnym sześciocyndrowym, dwusuwowym, jednostronnego działania, o mocy efektywnej 7200 KM. Krytyczna liczba obrotów drgań skrętnych jednowęzłowych zespołu napędowego  $N_6 \approx 32,5$  obr/min. Pomiary drgań skrętnych wykonano przy użyciu dwu torsjografów Geigera w miejscach *A* i *F* (rys. 8) na wale pośrednim. Należy określić największe dodatkowe naprężenia w wale pośrednim i śrubowym.

*D a n e.* Zastępczy moment bezwładności mas silnika  $J_2 = 2,2035 \cdot 10^6$  kGcmsek<sup>2</sup>. Moment bezwładności masy śruby napędowej  $J_1 = 1,1544 \cdot 10^6$  kGcmsek.<sup>2</sup> (łącznie z masą wody towarzyszącej). Częstość drgań swobodnych  $f_1 = 197,0$  okr/min. (wartość pomierzona). Współczynnik sztywności wału  $K = P_1^2 : (1/J_1 + 1/J_2) = 32,53 \cdot 10^6$  kG cm/rad., gdzie  $p_1 = 2\pi f_1/60 = 20,68$  rad./sek. Współczynnik tłumienia śrubowego  $\varrho_1 = 171\,900$  kGcm sek./rad. (obliczony metodą Archera) lub  $\nu_1 = \varrho_1/J_1 p_1 = 0,0716$ . Średnica wału pośredniego  $D_e = 370$  mm. Średnica wału śrubowego  $D_s = 440$  mm.

Torsjografy przystosowano do pomiarów w ten sposób, aby przełożenie statyczne zapisu wychyleń było  $m_s = 1$ . W tym celu zastąpiono w miejscu pomiarowym *A* normalną dźwignię masy wirującej torsjografu dźwignią dającą przełożenie zapisu trzy razy mniejsze. Natomiast w miejscu *F* zastąpiono normalny bęben przyrządu

<sup>1</sup> Wartość obliczona ze wzoru (3.6).

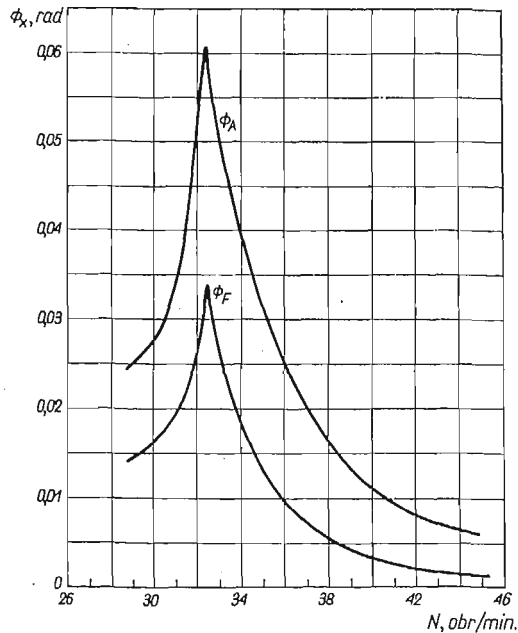
(o średnicy  $D_T = 148$  mm) bębnem o trzykrotnie większej średnicy  $D_{T'} = 444$  mm. Dynamiczne przełożenie zapisu było  $m_d = 1$  (miękkie sprężyny masy wirującej i rysika).



Rys. 8

II.1. Amplitudy wychyleń skrętnych wału w miejscach pomiarów. Wielkości tych amplitud odczytać można z wykresów na rys. 9. Wykresy te wykonano na podstawie wyników 12 pomiarów przeprowadzonych na każdym stanowisku w zakresie

$$29 \text{ obr./min.} \leq N \leq 45 \text{ obr./min.}$$



Rys. 9

Wartości amplitud  $\Phi$  obliczono przy użyciu wzoru

$$\Phi = h/D_e m_s m_d = 2,7 \cdot 10^{-3} \cdot h \text{ rad,}$$

gdzie  $h$  oznacza wielkość w mm zarejestrowanych podwójnych amplitud wychyleń.

Największe amplitudy wychyleń w miejscach pomiarów  $A$  i  $F$  przy  $N = 32,8$  obr./min. odczytane z wykresów wynoszą odpowiednio  $\Phi_{rA} = 0,0605$  rad.,  $\Phi_{rF} = 0,0340$  rad.

II.2. Parametry położenia miejsc pomiarów. Długość wału zredukowana na średnicę wału pośredniego

$$L = \frac{\pi}{32} \frac{GD_e^4}{K} = 4,7 \cdot 10^3 \text{ cm},$$

gdzie  $G$  jest modułem sprężystości na skręcanie materiałów wału (stal); przyjęto  $G = 8,3 \cdot 10^5$  kG/cm<sup>2</sup>.

Współrzedną  $x_F$  (odległość miejsca pomiaru  $F$  od masy śruby napędowej) ustalono na podstawie wzoru (2.16) dla  $x_{0r}$

$$x_{0r} = \frac{220 \ 350 \cdot 4,7 \cdot 10^3}{2(115 \ 440 + 220 \cdot 350)} = 1546 \text{ cm}.$$

Jak łatwo sprawdzić, miejsce na wale określone tą współrzedną znajduje się tuż przy złączeniu dwu odcinków wału pośredniego. Pomiar przeprowadzono więc za złączem w miejscu o współrzednej  $x_F = 1590$  cm lub  $x_F/L = 0,3384$ .

Położenie miejsca pomiaru  $A$  określono w zasadzie w sposób dowolny. Kierowano się jednak chęcią sprawdzenia słuszności tezy wynikającej z dyskusji błędu przy zastosowaniu wzoru (3.5). Przyrząd  $A$  umieszczono więc możliwie blisko masy śruby napędowej, a dogodne warunki techniczne do ustawienia przyrządu istniały w miejscu o współrzednej  $x_A = 436$  cm lub  $x_A/L = 0,0929$ .

Wskaźniki błędu ustawienia przyrządów wyznaczono z zależności (3.1):  $\delta_{rA} = -0,7175$ ,  $\delta_{rF} = 0,0280$ .

II.3. Największe amplitudy momentu reakcji od drgań skrętnych w wale (warunki rezonansowe). a. Na podstawie wzoru (2.15) mamy

$$T_{Rr} = 2\Phi_{x0}K/\gamma^2 = 98,95 \cdot 10^6 \Phi_{x0}.$$

$$T_{RrA} = 98,95 \cdot 10^6 \cdot 0,0605 = 5,990 \cdot 10^6 \text{ kGcm},$$

$$T_{RrF} = 98,95 \cdot 10^6 \cdot 0,0340 = 3,364 \cdot 10^6 \text{ kGcm}.$$

Wielkość błędu, jakim obarczona jest wartość  $T_{RrF}$ , obliczyć można ze wzoru (3.4) wiedząc, że współczynnik tłumienia jest wielkością bardzo małą ( $\nu_1 \ll 1$ ),

$$\Delta_{2rF} = -100\delta_F = -2,8\%,$$

co można stwierdzić również na wykresie rys. 5. Wobec tego skorygowana wartość amplitudy momentu reakcji wału wynosi  $T_{Rr} = 3,460 \cdot 10^6$  kGcm.

Błąd bezwzględny tkwiący w obliczonej wartości  $T_{RrA}$  (przyjmując  $T_{Rr}$  jako wartość ścisłą) wynosi  $\Delta_{2rA} = 73,1\%$ .

b. Na podstawie wzoru (2.12) w warunkach rezonansu ( $\Omega = 1$ ) (używając współczynnika tłumienia  $\nu_1$  obliczonego metodą Archera) mamy

$$T_{RrA} = 0,0605 \cdot 32,53 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{1+0,0716^2}{(0,6575-0,0929)^2+(0,0716 \cdot 0,0929)^2}} = 3,490 \cdot 10^6 \text{ kGcm},$$

$$T_{RrF} = 0,0340 \cdot 32,53 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{1+0,0716^2}{(0,6575-0,3384)^2+(0,0716 \cdot 0,3384)^2}} = 3,460 \cdot 10^6 \text{ kGcm}.$$

Błąd bezwzględny, jakim obarczone są te wartości w odniesieniu do wartości  $T_{Rr}$ , obliczonej w punkcie (a) tego przykładu, wynosi  $\Delta_{rA} = 1,0\%$ ,  $\Delta_{rF} = 0,0\%$ .

c. Na podstawie wzoru (3.5) otrzymujemy

$$T_{RrA} = \frac{0,0605 \cdot 32,53 \cdot 10^6}{0,6575-0,0929} = 3,485 \cdot 10^6 \text{ kGcm},$$

$$T_{RrF} = \frac{0,0340 \cdot 32,53 \cdot 10^6}{0,6575-0,3384} = 3,463 \cdot 10^6 \text{ kGcm}.$$

Wielkości błędów, jakimi obarczone są te wyniki w odniesieniu do wartości  $T_{Rr}$ , obliczonej w p. (a) tego przykładu wynoszą

$$\Delta_{rA} = 0,8\%, \quad \Delta_{rF} = 0,1\%.$$

d. Na podstawie wzoru (2.18) dla warunków rezonansowych  $T_{RrAF} = 3,460 \cdot 10^6$  kGcm, tak więc wielkość błędów względem wartości  $T_{Rr}$  obliczonej w p. (a) wynosi  $\Delta_{rAF} = 0,0\%$ .

e. Wartość dodatkowych naprężeń ścinających w wale pośrednim i śrubowym obliczamy na podstawie wzoru

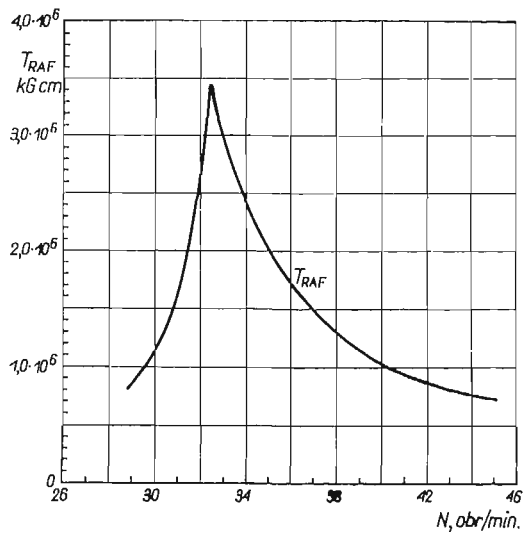
$$\tau' = T_{Rr}/W,$$

gdzie  $T_{Rr}$  oznacza wartości amplitud momentu reakcji wyznaczone w p. (a)–(d) tego przykładu, a  $W$  — wskaźnik przekroju na skręcanie wału pośredniego względnie śrubowego.

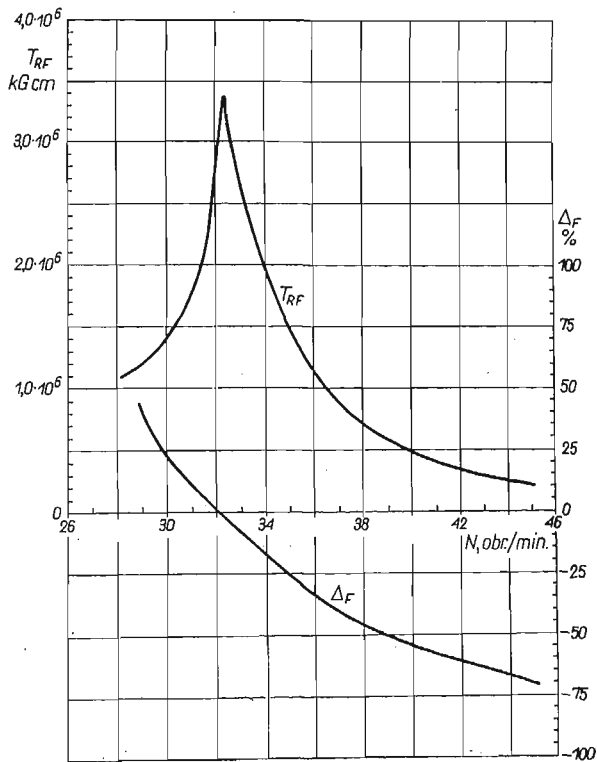
II. 4. Amplitudy momentu reakcji w całym badanym zakresie ilości obrotów (29 obr./min.  $\leq N \leq 45$  obr./min.).

a. Rzędne wykresu na rys. 10, przedstawiające wartości amplitud momentu reakcji w podanym wyżej zakresie, obliczono za pomocą wzoru (2.18). Należy tu podkreślić, że wartości te nie są obciążone błędami ani pochodzącymi od współczynników tłumienia, ani od nieprawidłowego ustawienia przyrządów [rozumianego w sensie wyrażenia (3.1)], a jedynie błędami pomiarowymi (łącznie z analizą zapisów na taśmach pomiarowych). Nie bierzemy tu pod uwagę błędów wynikających z zastosowania uproszczonego modelu układu drgającego.

b. Wykresy na rys. 11 i 12 ilustrujące wartości amplitud momentu reakcji w badanym zakresie liczb obrotów obliczono odpowiednio według wzorów (2.14) i (3.5) oraz wielkości błędów bezwzględnych, jakim obarczone są te wartości. Wartości amplitud przedstawione na wykresie na rys. 10 przyjęto za ściśle.



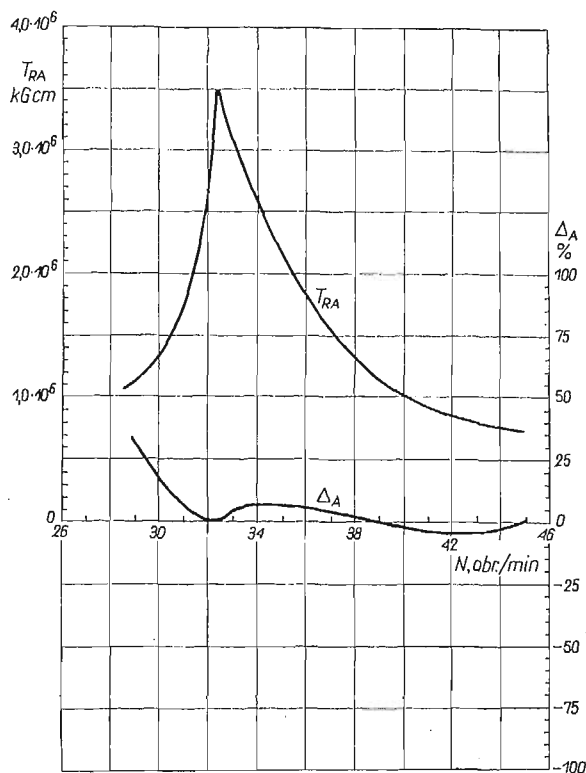
Rys. 10



Rys. 11



Interpretacja omawianych wykresów nie nastęrcza większych trudności, warto jednak zwrócić uwagę na potwierdzenie przytoczonego w p. 2.2 wniosku o przydatności praktycznej stosowania metody opartej na wzorze (3.5) głównie ze względu na dopuszczalność względnie dużej tolerancji w określaniu położenia przyrządu



Rys. 12

pomiarowego. Natomiast metoda oparta na wzorze (2.14) wymaga w znacznie większym stopniu przestrzegania warunku (2.12), co w praktyce sprowadza się do zmiany usytuowania przyrządu pomiarowego oraz zmiany częstości drgań.

### Wnioski

Wychodząc z równania różniczkowego drgań skrętnych wału jako układu ciągłego oraz z warunków brzegowych określających obciążenie obu jego końców wyprowadzono związek, zachodzący między amplitudą momentu reakcji a amplitudą wychyleń skrętnych w dowolnym przekroju wału. Związek ten charakteryzuje się głównie niezależnością od współczynnika tłumienia drgań jednej z mas, a w przekrojach wału o określonych współrzędnych jest on niezależny również od współczynnika tłumienia drgań drugiej masy.

Wyprowadzone zależności wolne od współczynników tłumienia otrzymują bardzo prostą i szczególnie dogodną w praktycznym zastosowaniu postać dla przy-

padków, w których możliwe jest pominięcie wpływu masy wału. W każdym takim przypadku istnieje wprawdzie jeden tylko przekrój wału, w którym amplitudy momentu reakcji nie są zależne bezpośrednio (a jedynie poprzez amplitudy wychyleń) od współczynników tłumienia drgań obu mas, ale wyznaczenie wartości tych amplitud w jednym przekroju jest wystarczające, ponieważ wiadomo, że są one stałe na całej długości wału. Zakres stosowalności najistotniejszego z wyprowadzonych związków, uproszczonego przez pominięcie wpływu masy wału, wynika z przytoczonej funkcji błędu (przedstawionej również graficznie).

Okazuje się ponadto, że prostą i niezależną bezpośrednio od współczynników tłumienia postaci zależności amplitud momentu reakcji i amplitud wychyleń uzyskać można dla przypadków, w których pomiary amplitud wychyleń wykonano w dwu dowolnych przekrojach wału.

Warto tu wreszcie zwrócić uwagę, że chociaż omawiane związki w postaci uproszczonej dotyczą układu dyskretnego, to najwygodniejsza droga ich wyprowadzenia prowadzi poprzez równania ruchu drgającego układu ciągłego.

Zależności przedstawione w części teoretycznej stanowią podstawę dla dogodnych w praktyce metod doświadczalnego określania wielkości dodatkowych naprężeń ścinających od wymuszonych drgań skrętnych w wałach różnego typu układów rzeczywistych, a w szczególności okrętowych zespołów napędowych, które mogą być przedstawione w postaci dwumasowego modelu układu dyskretnego. Na uwagę zasługują w szczególności trzy grupy przypadków:

a. Znany jest współczynnik tłumienia drgań masy, na którą nie działa moment wymuszający. Zastosowanie znajduje wzór (2.12), przy czym ważne jest, że pomiar amplitud wychyleń wału może być wykonany w dowolnym miejscu wału (w odległości  $x_1$  od masy o momencie bezwładności  $J_1$ ).

b. Nie znane są wartości współczynnika tłumienia (nawet w przybliżeniu);

b') pomiar amplitud wychyleń wału musi być wykonany w określonej wzorem (2.13) odległości od masy o momencie bezwładności  $J_1$ , a do określenia amplitudy momentu reakcji znajduje zastosowanie wzór (2.14);

b'') pomiar amplitud wychyleń musi być wykonany w dwu dowolnych miejscach wału, a amplitudy momentu reakcji określa wówczas wzór (2.18).

c. Wiadomo, że współczynnik tłumienia drgań masy, na którą nie działa moment wymuszający, jest wielkością małą,  $\nu_1 \ll 1$ .

Pomiar amplitud wychyleń wału może być wykonany w dowolnym miejscu, którego współrzędną ogranicza nierówność

$$0 \leq x_1 \leq \frac{L\nu^2}{2\Omega^2},$$

amplitudę momentu reakcji wyznacza wtedy wzór (3.5).

Warto w zakończeniu podkreślić, że istotnym walorem metody stosowanej w przypadkach (b) i (c) jest brak konieczności używania do obliczeń takich współczynników empirycznych jak współczynniki tłumienia drgań. Pomiar amplitud wychyleń wału nabiera wówczas sensu bardziej ogólnego i staje się w pełni uzasadniony.

## Literatura cytowana w tekście

1. T. AGOPSOWICZ, *Analiza teoretyczna i doświadczalna nieliniowych drgań skrętnych wału pośredniego i śrubowego holownika 300 KM m/s „Bogdan”*, Budownictwo Okrętowe.
2. T. AGOPSOWICZ, *Drgania wymuszone pewnych układów sprężystych z tarciem suchym i analiza możliwości zastosowań do badania drgań śruby okrętowej*, Zesz. Nauk. Pol. Gdańskiej, Budown. Okrętowe 5, 1965.
3. S. ARCHER, *Torsional vibration damping coefficients for marine propellers*, Engineering, 13 May 1955, 594–598.
4. S. ARCHER, *Contribution to improved accuracy in the calculation and measurement of torsional vibration stresses in marine propeller shafting*, Proc. Inst. Mech. Engrs., 164, London 1951.
5. S. ARCHER, *Screwshaft casualties. The influence of torsional vibration and propeller immersion*, Trans. Instn. Nev. Arch., 91 (1949).
6. R. W. S. MITCHELL, *The design office problem in the estimation of the resonance characteristics of small marine*, Propulsion Units, Proc. Inst. Mech. Engrs, 149, London.
7. E. J. NESTORIDES, *A Handbook on Torsional Vibration*, Cambridge 1958.
8. J. NALESZKIEWICZ, *Drgania kadłubów okrętowych*, Wydawnictwa Morskie, Gdańsk 1951.
9. В. П. ТИЕРСКИХ, *Расчеты крутильных колебаний силовых установок*, Машгиз, 1954.
10. S. TIMOSHENKO, *Vibration Problems in Engineering*, Second Edition, N. York 1947.

## Резюме

## НЕКОТОРЫЕ ЗАВИСИМОСТИ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ И РЕАКТИВНЫХ МОМЕНТОВ ВАЛОВ КАК ОСНОВА МЕТОДА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

После критической оценки применяемых методов экспериментального определения величин переменных касательных напряжений в валах различного рода силовых установок (судовые силовые установки, электрические, компрессорные и насосные агрегаты и т.п.), на которые действуют вынужденные крутильные колебания, выводятся зависимости амплитуд крутильных отклонений и амплитуд реактивных моментов в вале определенной модели упругой системы (вал с распределенной массой, закончен двумя сосредоточенными массами, с учетом вязкого сопротивления обеих масс и с гармоническим возбуждением, действующим на одну из них).

Эти зависимости характерны так своей простой формой, как и непосредственной независимостью от коэффициентов демпфирования колебаний, что специально существенно в практических применениях.

Анализ возможности применений выведенных зависимостей для экспериментального определения переменных касательных напряжений в валах производится для судовых силовых установок с поршневыми двигателями, обращая внимание на возможность избежания серьезных ошибок, связанных с применением методов, в которых необходимо пользоваться коэффициентами демпфирования колебаний.

В заключительной части приводятся два численных примера из практики, один из которых основан на результатах измерений, опубликованных в английской технической литературе, второй же происходит из собственных испытаний, произведенных на одном из судов польского торгового флота.

## S u m m a r y

## SOME RELATIONS OF TORSIONAL VIBRATORY SWING AND TORQUE AS A BASE OF EXPERIMENTAL METHOD OF DETERMINING VIBRATION STRESSES IN SHAFTS

The author presents a critical review of the methods of experimental determination of the torsional vibration stresses in shafting of diverse types of engine systems (marine propeller shafting systems, engines coupled to generators, compressors or pumps, etc.) subjected to forced torsional vibration. Relations have been established for torsional vibration amplitudes and amplitudes of vibration torque in shaft of the definite model of elastic system (a continuous shaft with two concentrated masses at its tips, consideration being given to viscous damping, both of the masses and a harmonic exciting torque acting on one of them). These relations are characterized by a simple form and direct independence of the vibration damping coefficients; therefore, they are very useful in practical application.

An analysis of the possibilities of applying these relations in practice has been performed on marine propeller shafting systems with piston engine installations; it has been pointed out that the possibility exists of avoiding serious errors resulting from the application of methods which require the use of vibration damping coefficients.

The concluding part of the paper gives two numerical examples: one of them is based on the results of experiments published in British technical periodical, the other one on the tests carried out on one of the Polish merchant ships.

KATEDRA KONSTRUKCJI OKRĘTÓW  
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1965 r.*



CZUJNIKI DO LABORATORYJNYCH POMIARÓW STANÓW NAPRĘŻEŃ  
I ODKSZTAŁCEŃ WEWNĄTRZ ELEMENTÓW BETONOWYCH

JANUSZ KASPERKIEWICZ (WARSZAWA)

1. Uwagi ogólne

Zastosowanie dobrego czujnika w pomiarach stanów naprężenia i stanów odkształcenia wewnątrz elementów betonowych pozwoli na doświadczalne rozwiązanie szeregu zagadnień dotyczących betonu i żelbetu lub przynajmniej na poparcie teorii wynikami doświadczeń. Zapewne ze względu na to w ostatnich dwudziestu latach wzrosło zainteresowanie takimi czujnikami. W niniejszej pracy przedstawiono niektóre stosowane typy czujników — przeważnie do pomiaru odkształceń wewnątrz elementów. Stosunkowo prostsze i lepiej znane urządzenia do pomiaru odkształceń na powierzchni zewnętrznej w zasadzie nie będą tu opisywane. W artykule przyjęto punkt widzenia laboratorium wytrzymałościowego, a więc użytkownika aparatury pomiarowej.

W tytule celowo wprowadzono rozróżnienie czujników mierzących odkształcenia i naprężenia. Pomimo że większość czujników zaprojektowana była do pomiaru odkształceń, istnieją jednak i takie, którymi w sposób pośredni mierzyć można właśnie naprężenia. Będą to bądź czujniki hydrauliczne jak np. Glöttzla, bądź czujniki oparte na pomiarze zmian odległości, np. Loha czy Carlsona i Pirtza.

Stosowanie czujników do pomiaru odkształceń należy uznać za znacznie bardziej celowe. Mierzona jest wówczas rzeczywista wielkość fizyczna — odległość, a nie wielkość wtórna i wynikająca z rozumowania, jaką jest naprężenie — granica stosunku siły do powierzchni.

Na wstępie należy rozpatrzyć zagadnienie odkształcalności elementu, wewnątrz którego znajduje się czujnik z innego materiału. Materiał idealnego czujnika powinien łączyć się w sposób ciągły z tworzywem badanym, mieć identyczne współczynniki sprężystości, Poissona i rozszerzalności cieplnej we wszystkich kierunkach oraz cechy wytrzymałościowe takie same jak i tworzywo. Na ogół jednak materiał, którym może być miedź, stal czy plastik, różni się znacznie od tworzywa badanego. Zwłaszcza właśnie w przypadku betonu, który ma cechy fizyczne zmienne z czasem i obciążeniem, idealne dobranie materiału czujnika nie jest możliwe. Stosując czujnik, którego wymiary nie są dostatecznie małe, a współczynnik sprężystości znacznie większy od współczynnika sprężystości betonu, trzeba liczyć się z możliwością uzbrojenia elementu badanego. Przy podobnym czujniku o bardzo małym współczynniku sprężystości może nastąpić osłabienie przekroju betonu,

skupienie naprężeń, a zatem również zakłócenie badanego stanu. Zjawiska te występują właśnie w tych punktach, w których odkształcenia są mierzone.

Rozwiązaniem, jakie nasuwa praktyka, jest stosowanie czujników o przekroju poprzecznym niewielkim w stosunku do przekroju poprzecznego elementu badanego i o niewielkim zastępczym współczynniku sprężystości. Graniczne wymiary czujników i wielkości ich zastępczych współczynników sprężystości będą zależą od jakości betonu. Istnieje jednak obawa, że ustalenie tych wielkości na drodze innej niż doświadczalna nie byłoby możliwe. Wracając do powyżej opisanego rozwiązania należy podkreślić, że na ogół posługują się nim nawet ci z producentów urządzeń pomiarowych, którzy starają się dopasować cechy sprężyste tworzywa i czujnika. Na przykład na dobranej bazie o cechach sprężystych zbliżonych do betonu umieszczają tensometr elektrooporowy mający znikome wymiary i  $E_{zast} \approx 0$ , a zatem nie mający wpływu na odkształcenie bazy. Jest to podobny schemat myślowy, przy czym dochodzi jeden stopień pośrednictwa przy przekazywaniu wielkości odkształceń.

Do badanego elementu należy wprowadzić urządzenie pomiarowe odpowiadające w takim stopniu powyższym warunkom, aby zakłócenie stanu odkształcenia było mniejszego rzędu niż dokładność pomiaru. Stosowanie czujników o znikomych wymiarach pozwoliłoby na zrezygnowanie z obliczania poprawek wynikających z wprowadzenia obcego ciała do betonu. Obliczenie takie, proponowane np. przez Y. C. Loha [5], opiera się na wielu założeniach i nie jest do przyjęcia, jeżeli przedmiotem badań jest właśnie poszukiwanie praw odkształcalności materiału i elementu.

Większość stosowanych czujników służy do pomiaru stanu odkształcenia, chociaż, jak już wspomniano poprzednio, można napotkać również i czujniki do pomiaru naprężeń. Przy zmiennym współczynniku sprężystości, co zachodzi w betonie, idealnym byłby czujnik pozwalający na pomiar naprężeń i odkształceń jednocześnie. Czujnik taki nie został dotychczas skonstruowany, a znane czujniki naprężeń posiadają zasadnicze wady. Stąd nasuwa się wniosek, że przy rozpatrywaniu tworzywa poddanego działaniu sił lub innych oddziaływań trzeba opierać się na pomiarach odkształceń a nie naprężeń.

Na podstawie własnych doświadczeń i opinii publikowanych w wielu pracach zamieszczono poniżej zestawienie cech użytkowych, które powinien posiadać dobry czujnik uniwersalny.

Wymagania te mają różne znaczenie w zależności od charakteru prac, do jakich przeznaczone są czujniki. Z tego względu pożądane cechy dominujące należy określić każdorazowo programując badania.

## 2. Wymagania stawiane czujnikom

Dobry czujnik powinien

- 1) być długowieczny; nawet w przypadku badań stanów doraźnych obciążenia czujnik musi gwarantować przynajmniej okres jednego roku bezbłędnego działania; cecha ta w odniesieniu do tensometrów elektrooporowych w środowisku takim jak beton wiąże się w sposób zasadniczy z odpornością na działanie wilgoci;

- 2) być uniwersalny (na rozciąganie, ściskanie, stany statyczne i dynamiczne);
- 3) mieć cechy mechaniczne dobrane w uzasadniony sposób;
- 4) mieć wymiary zewnętrzne umożliwiające pomiar w punkcie; w przypadku betonu istnieje jednak ograniczenie polegające na tym, że długość czujnika do pomiaru odkształceń powinna być nie mniejsza niż trzykrotna średnica największego ziarna kruszywa; w przypadku czujnika naprężeń ograniczenie dotyczy minimalnej powierzchni przekroju poprzecznego;
- 5) być odporny mechanicznie;
- 6) mieć właściwą czułość i odpowiedni zakres; w przypadku stosowania polskich tensometrów i mostków T-2 dokładność pomiaru jest rzędu  $5 \times 10^{-6}$ , a zakres wystarcza dla badania wszystkich stanów występujących w betonie aż do zniszczenia;
- 7) odznaczać się prostotą konstrukcji; ma to szczególne znaczenie przy samodzielnym wykonywaniu czujnika w laboratorium nie przystosowanym specjalnie do tego typu prac.

### 3. Zestawienie czujników spotykanych w literaturze bądź w praktyce

**3.1. Klasyfikacja czujników.** Poniżej zestawiono niektóre wiadomości o różnych typach czujników do pomiaru stanów deformacji wewnątrz betonu. Wiadomości te zebrano na podstawie dostępnych publikacji i informacji bezpośrednich o urządzeniach jeszcze nie opisanych w literaturze technicznej. Niewątpliwie zebrane tu dane nie obejmują wszystkich istniejących rozwiązań, są jednak charakterystyczne dla aktualnych kierunków prac. Podane nazwy czujników określono wg źródeł, z jakich zaczerpnięto informacje i na ogół nazwy te nie są ogólnie rozpowszechnione.

Czujniki podzielono na zasadnicze grupy według ich konstrukcji. Przed dokładniejszym opisem przedstawiono zastosowany sposób klasyfikacji poszczególnych czujników do różnych grup:

- A. Czujniki wykonane w oparciu o tensometri elektrooporowe (p. 3.2)
  - a) — Czujniki wykonane na szkielecie metalowym (p. 3.2.1)
    - czujnik Y. C. LOHA,
    - czujnik do pomiaru sześciu składowych odkształcenia — IPPT,
    - czujnik G. HONDROSA,
    - czujnik wykonany na Politechnice Śląskiej.
  - b) — Czujniki wykonane przy zastosowaniu materiałów wiążących (p. 3.2.2)
    - czujnik G. MORAVII,
    - czujnik PIMIENOWA,
    - czujnik THOMA i SCHNEEBELIEGO,
    - czujnik MAJCHROWICZA i WESELIĘGO.
  - c) — Inne sposoby wykorzystania tensometri elektrooporowej (p. 3.2.3)
    - czujnik naprężeń CARLSONA i PIRTZA,
    - czujnik powierzchniowy, umieszczany w czasie betonowania
- B. — Czujniki rezonansowe (p. 3.3)
  - czujnik firmy Télémac (Francja),
  - czujnik firmy Galileo (Włochy).

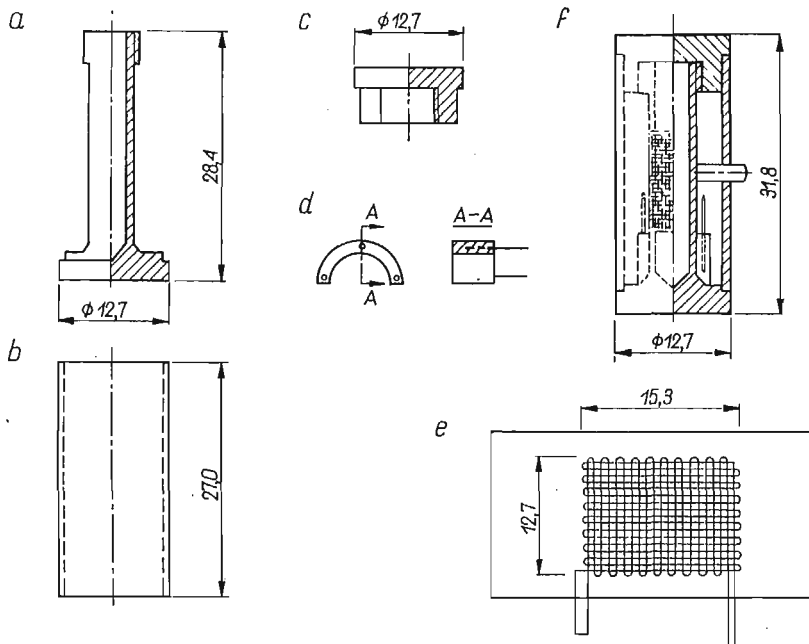


- czujnik firmy Maihak (Niemcy),
  - czujniki wykonywane w innych krajach (CSR, Polska).
- C. — Czujniki hydrauliczne (p. 3.4)
- czujnik GLÖTZLA.

W artykule najwięcej uwagi poświęcono czujnikom wykonanym na zasadzie tensometrii elektrooporowej, a to ze względu na fakt, że są one w warunkach krajowych łatwiej dostępne i mają szereg cech kwalifikujących je do stosowania w badaniach laboratoryjnych.

### 3.2. Czujniki wykonane w oparciu o tensometry elektrooporowe

3.2.1. Czujniki wykonane na szkielecie metalowym. Czujnik Loha. Czujnik ten [5], wykonany w 1951 r. przez Y. C. LOHA, ma budowę stosunkowo skomplikowaną. Wykonany jest ze stali o wysokiej wytrzymałości i składa się z elementów pokazanych na rys. 1. Zasadniczymi częściami są tu: część wewnętrzna — szkielet, rys. 1a, skorupa zewnętrzna — 1b oraz nakrętka — 1c. Na część środkową naklejono wykonany we własnym laboratorium tensometr o układzie drutów przedstawionym na rys. 1e. Taki tenso-



Rys. 1. Czujnik opracowany przez Y. C. LOHA [5]

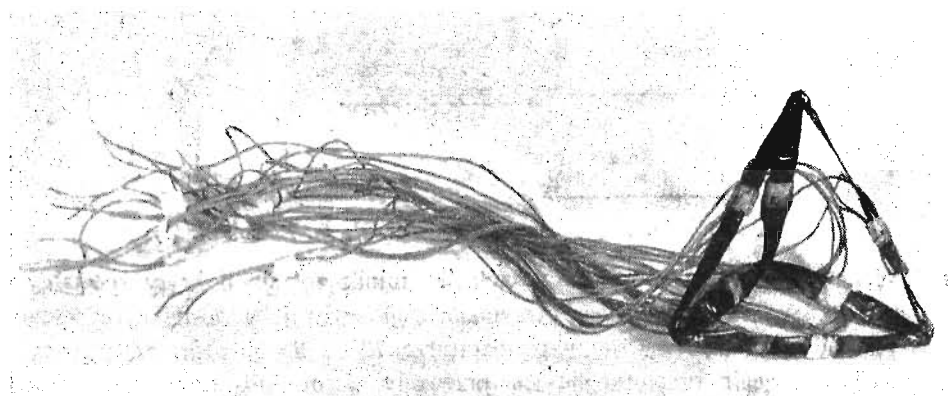
metr pozwala na kompensowanie układu mostka tensometrycznego bez konieczności stosowania drugiego czujnika. W przypadku pokazanym na rysunku druty biegnące pionowo są oporami czynnymi, a biegnące poziomo — kompensacyjnymi. Po naklejeniu tensometru i przymocowaniu drutów do końcówki (1d) nasadzona zostaje skorupa i nakręcona nakrętka. Przez silne dokręcenie tej ostat-

niej osiąga się pewien stan sprężenia stali co zapewnia współpracę części wewnętrznej i zewnętrznej. Zabezpieczenie przeciw wilgoci stanowi warstwa wosku mineralnego.

Opisany czujnik po wykonaniu poddano kolejnym cyklom obciążania i odciążania w celu *wcześniejszego wywołania wszystkich zmian, które mogłyby wystąpić w czasie użytkowania czujnika*. Następnie urządzenie zostało wyskalowane w sposób umożliwiający odczytywanie wielkości działających nań naprężeń. Materiał i przekroje poprzeczne dobrano tak, aby współczynniki sprężystości betonu i czujnika były możliwie równe.

Przeprowadzono szereg badań takiego czujnika umieszczonego w elementach betonowych. Próby wykazały, że czujnik wskazuje prawidłowo składowe naprężeń ściskających przy obciążeniach statycznych i dynamicznych a nieco gorzej stany naprężeń rozciągających. Pomiary można prowadzić w zakresie od  $-70$  do  $+635$   $\text{kG/cm}^2$ , a czułość wynosi  $\pm 3,5$   $\text{kG/cm}^2$ . Czujnik jest praktycznie odporny na działanie wody. Niewielkie wymiary opisanego modelu czujnika ( $1,3 \times 3,2$  cm) powodują, że można go stosować jedynie w przypadku betonów z bardzo drobnym kruszywem.

Czujnik do pomiaru sześciu składowych odkształcenia — IPPT. Urządzenie to, nazywane sondą do betonu [15], zostało zaprojektowane i wykonane w Zakładzie Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Warszawie. Na szkielet z blachy miedzianej, wykonany z prętów o długościach 7 i 10 cm,

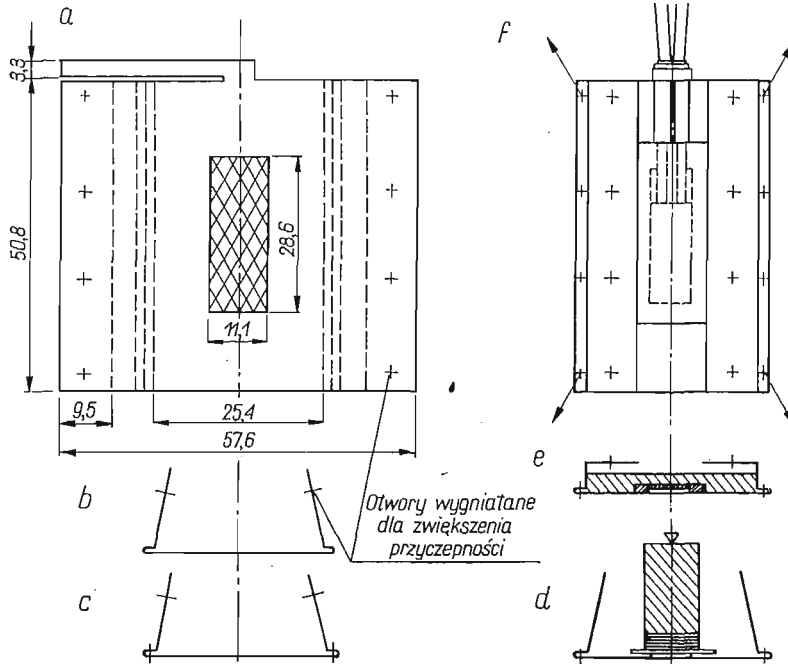


Rys. 2. Sonda do betonów opracowana w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN

połączonych w formie ostrosłupa, naklejono 6 par tensometrów elektrooporowych. Tensometry te następnie zabezpieczono przed wilgocią przez pokrycie specjalną pastą, oblutowanie folią itd. Sam sposób uszczelnienia jest zbliżony do zastosowanego w opisanym poniżej czujniku HONDROSA. Istotną cechą urządzenia jest układ czujników umożliwiający pomiar wszystkich sześciu składowych tensora odkształceń. Gotowa sonda pokazana jest na rys. 2. Zabetonowanie szeregu sond i przeprowadzenie badań wykazało przydatność urządzenia i możliwość uzyskania interesujących rezultatów.

Czujnik G. Hondrosa. Do wykonania czujnika odkształceń wewnątrz betonu G. Hondros [3] wykorzystał folię miedzianą 0,0508 mm, budując w celu

zwiększenia sztywności czujnik o przekroju skrzynkowym. Konstrukcja czujnika jest bardzo prosta, a poszczególne fazy przygotowania pokazano na rys. 3. Po wycięciu odpowiedniego kawałka folii pole zakreskowane (a) zostaje przygotowane pod naklejenie tensometru przez starcie powierzchni papierem ściernym. Powierzchnię tę czyści się następnie za pomocą roztworów amoniaku i alkoholu oraz suszy w promieniach podczerwonych. Po sprawdzeniu i dodatkowym wysuszeniu samego tensometru zostaje on naklejony przy użyciu kleju celuloidowego. Następnie po



Rys. 3. Kolejne fazy wykonania czujnika w/g G. HONDROSA [3]

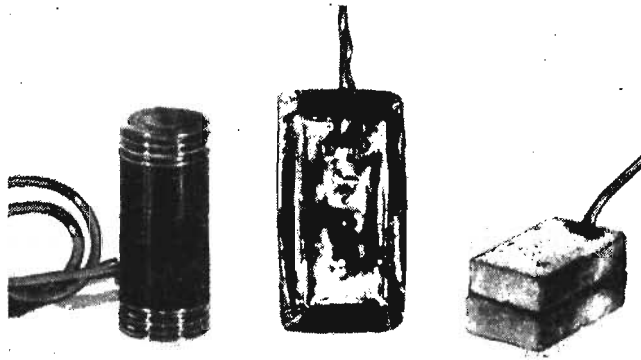
sprawdzeniu połączenia i oporności izolacji czujnik zostaje pokryty specjalnym lakierem określonym jako żywica otrzymana z gliceryny i bezwodnika ftalowego. Pokrycie lakierem odbywa się w temperaturze 70°C. Po powtórnym nałożeniu lakieru i wysuszeniu przylutowuje się przewody w otulinie plastikowej, przy czym zwracano uwagę na zabezpieczenie izolacji złącza, które otrzymuje specjalną warstwę przy ponownym pokrywaniu lakierem. W tej fazie wygniecione zostają w folii okrągłe otwory, których nierówne brzegi zwiększają przyczepność czujnika do betonu. Po wysuszeniu warstwa roztopionego wosku pokrywa zabezpieczenie lakierem do grubości łącznej 4 mm. Następnie folię zgina się, po czym gotowy czujnik może być już umieszczony w formie.

Powyższe stosunkowo dokładne omówienie procesu wykonania zamieszczono dla podkreślenia wagi właściwego zabezpieczenia przeciwwilgociowego.

Izolacyjne właściwości opisywanego pokrycia ochronnego uległy w okresie 1 roku nawet polepszeniu — z  $1 \cdot 10^3$  do  $5 \cdot 10^3$  megomów. G. HONDROS podał również opisy pomyślnych prób czujnika w betonie rozciągany metodą brazylijską i w zginanym elemencie żelbetowym.

Umieszczanie tensometrów elektrooporowych na szkielecie metalowym wiąże się ze stosunkowo nieskomplikowanymi czynnościami. Ten typ czujnika jest często spotykany; zajmowano się nim m. in. na Politechnice Śląskiej (rys. 4), w Instytucie Techniki Budowlanej [12] i w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie.

3.2.2. Czujniki wykonane przy zastosowaniu materiałów wiążących. Czujnik G. Moravii. Czujnik wykonany przez G. MORAVIA w roku 1955 [7] stanowi przykład czujnika wykonywanego z materiałów wiążących. Jako materiał do wykonania czujnika wybrano araldit, a to ze względu na znaczną stałość wymiarów i dobre własności wiążące. Araldit nie zmienia poza tym własności tensometru. Bryła z tego materiału mechanicznie obrobiona w kształcie równoległociąanu lub cylindra została następnie przecięta wzdłuż płaszczyzny



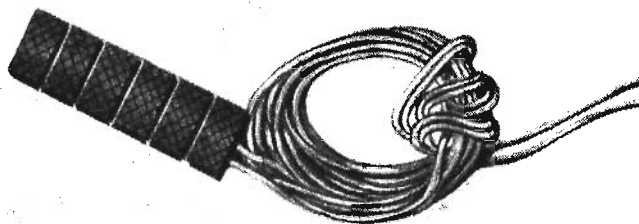
Rys. 4. Czujniki wykonane na Politechnice Śląskiej. Czujnik kapsułkowy, foliowy i betonowy (Katedra Budowy Mostów Politechniki Śląskiej — J. GŁOMB)

środkowej. Na powstałej w ten sposób powierzchni naklejono tensometr i po przylutowaniu przewodów sklejkono obie części bryły jeszcze nie spolimeryzowaną masą aralditu. Następnie na zewnątrz wykonano dodatkowo nacięcia zwiększające przyczepność do betonu. Do umocowania czujnika w formie w czasie betonowania zastosowano żyłkę nylonową.

W celu sprawdzenia tak wykonanego czujnika umieszczono go wewnątrz próbki betonowej i po okresie dojrzewania poddano ścisłaniu, dokonując jednocześnie na zewnętrznej powierzchni kontrolnego pomiaru tensometrami mechanicznymi Huggenbergera. Wyniki pomiarów modułu sprężystości były zbieżne. Próbki obciążano również dynamicznie, a także umieszczano czujnik w ścisłanym i rozciągającym obszarze zginanej belki żelbetowej otrzymując wyniki, wskazujące na właściwe funkcjonowanie urządzenia.

Czujnik Pimiienowa. Materiałem do wykonania czujnika jest [9] karbinolowo-cementowa pasta izolacyjna. Oprócz zabezpieczenia przed wilgocią chroni ona również czujnik przed uszkodzeniami mechanicznymi. Poziomo ustawiona forma, składająca się z rusztu i podstawy, wypełniana jest polimerem do po-

łowy wysokości rusztu. Po stwardnieniu masy na jej powierzchnię naklejone zostają tensometry elektrooporowe. Po przylutowaniu przewodów i upływie jednej doby forma zostaje wypełniona masą do wierzchu rusztu. Twardnienie trwa trzy doby, po czym ostrożnie wyjęte z otworów rusztu czujniki są gotowe do użytku. W celu zwiększenia przyczepności wykonywane są na powierzchni bocznej nacięcia o głębokości 0,5–1,0 mm. Czujniki mogą pracować na ściskanie lub rozciąganie, a w razie potrzeby można je łączyć w płaskie lub przestrzenne rozety do pomiarów bardziej złożonych stanów odkształcenia.



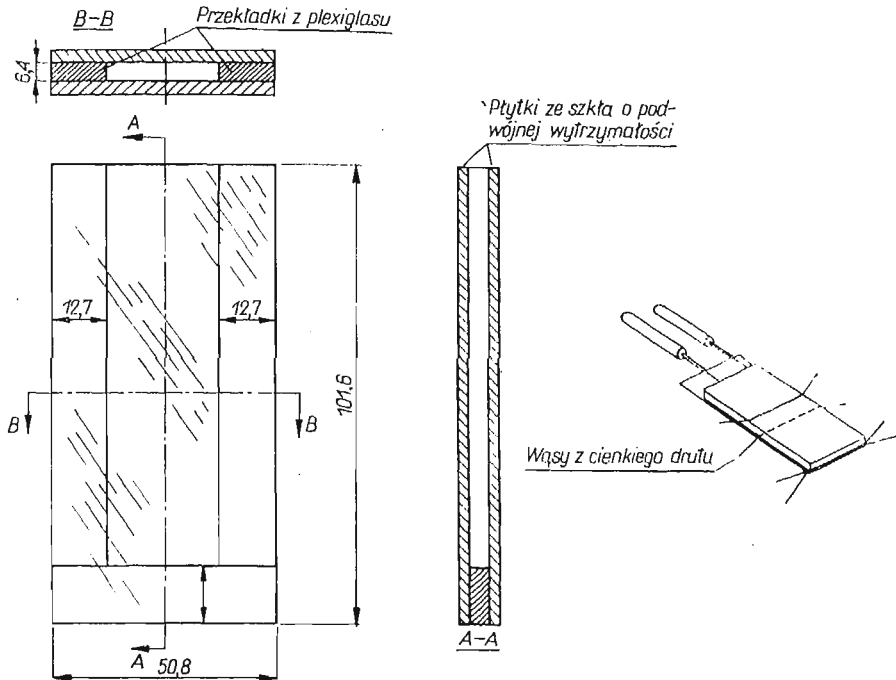
Rys. 5. Czujnik PRMIENOWA. Widoczne są nacięcia mające zwiększyć przyczepność betonu do zewnętrznej powierzchni czujnika [9].

Ważną zaletą przy takim postępowaniu jest możliwość produkowania równocześnie całej serii czujników wykonanych w jednakowych warunkach. W opisywanych badaniach czujniki sprawdzano betonując je w niewielkich próbkach. Następnie sprawdzano rozkład naprężeń w górnej warstwie fundamentu betonowego pod słupem stalowym, przy czym okazało się, że czujniki pracują zadowalająco. Gotowy czujnik pokazany jest na rys. 5.

**Czujnik Thomy i Schneebelięgo.** O czujniku THOMY i SCHNEEBELIEGO [14] należy wspomnieć ze względu na pewne różnice w procesie wykonania. Do tensometru po przycięciu papierowej podkładki przyklejone zostają wąsy z cienkiego drutu. Po przylutowaniu przewodów o ostatecznej długości tensometr zostaje zawieszony na wspomnianych wążach wewnątrz formy pokazanej na rys. 6. Forma ta zbudowana jest z płytek ze szkła o podwyższonej wytrzymałości oraz z przekładek z plexiglasu. Tak przygotowana forma zostaje podgrzana a następnie wypełniona polimerem o nazwie handlowej Kriston. Kriston posiada dobre własności izolujące i współczynnik sprężystości  $E$  równy w przybliżeniu  $35\,000\text{ kG/cm}^2$ . W krótkim czasie po związaniu masy płytki i przekładki zostają odjęte i czujnik dojrzewa dalej w temperaturze pokojowej.

Badania czujników przeprowadzano po umieszczeniu ich w cylindrach z Kristonu, obciążanych przy dodatkowej kontroli odkształcenia mechanicznymi tensometrami Huggenbergera. Do podobnych doświadczeń wykorzystywano również małe elementy z zaprawy i z betonu. Podstawowe badania prowadzone były po umieszczeniu czujników w betonowej płycie drogowej obciążanej ruchem ciężkich

samochodów ciężarowych, przy czym wielkości odkształceń notowane były na urządzeniu oscyloskopowym.



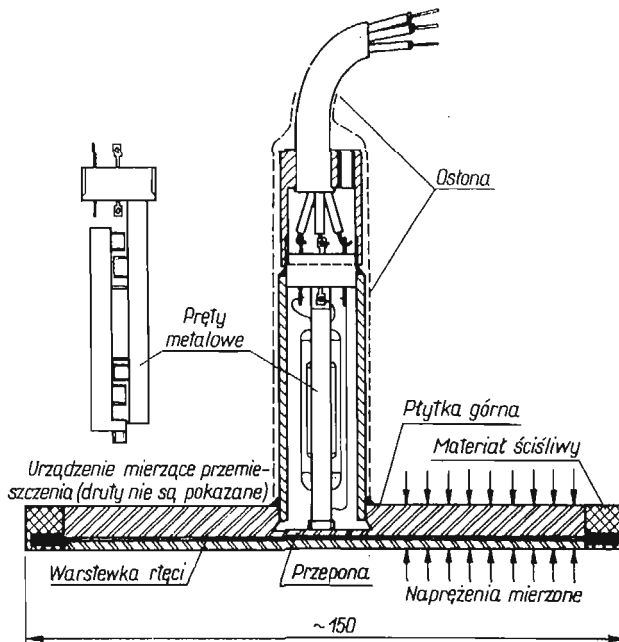
Rys. 6. Forma zastosowana przy wykonaniu czujnika THOMY i SCHNEEBELIEGO. Poniżej tensometr z przyklejonymi wąsami, przygotowany do umieszczenia w formie i zabezpieczenia polimerem [13]

Czujnik Majchrowicza i Weseliego. Istotą sposobu wykonania czujnika jest tu zaimpregnowanie tensometru elektrooporowego tworzywem syntetycznym i po osiągnięciu pewnego usztywnienia — dodatkowe pokrycie go masą plastyczną. Zabezpieczenie takie jest wystarczające do bezpiecznego umieszczenia czujnika w świeżym betonie. Całe postępowanie jest bardzo nieskomplikowane i nie wymaga w zasadzie posiadania laboratorium. Dokładniejsze informacje można znaleźć w artykule streszczonym w publikacji [6].

Inne czujniki. Poza wymienionymi czujnikami z materiałów wiążących robiono próby czujników betonowych. Zajmowali się nimi J. GŁOMB z Politechniki Śląskiej (rys. 4) oraz MILBAUER [9]. W czujnikach tych beton pełnił głównie rolę zabezpieczenia mechanicznego tensometru. Sklejoną z dwóch połówek kostkę betonu (jak na rys. 4) można było umieszczać w badanej masie bez obawy uszkodzenia nawet przy niedogodnych warunkach wykonania.

3.2.3. Inne sposoby wykorzystania tensometrii elektrooporowej. Czujnik naprężeń Carlsona i Pirtza. Czujnik wykonany jest na zasadzie całkiem odmiennej od poprzednio opisywanych, a przedstawiony został przez R. CARLSONA i D. PIRTZA [1] w 1952 r. Zaprojektowano go jako urządzenie do pomiaru naprężeń. Zasadniczym elementem są tu dwie płytki stalowe przedzielone cienką warstwą rtęci i połączone na brzegach, rys. 7. Do

płytek dołączony jest specjalne urządzenie tensometryczne do pomiaru ciśnienia w rtęci. Urządzenie to mierzy przemieszczenia małej przepony, która stanowi część płytki górnej, za pośrednictwem pomiaru wzajemnego przesunięcia dwóch prętów metalowych. Przepona odkształca się pod wpływem działającego na nią ciśnienia rtęci. W urządzeniu istnieje rodzaj przekładni hydraulicznej — niewielkie zmiany ciśnienia powodują stosunkowo znaczne przemieszczenia wspomnianej przepony. Zastępcza ścisłość czujnika jest zbliżona do ścisłości betonu zapewniając w ten sposób wystarczającą dokładność pomiarów. Cały czujnik ma budowę

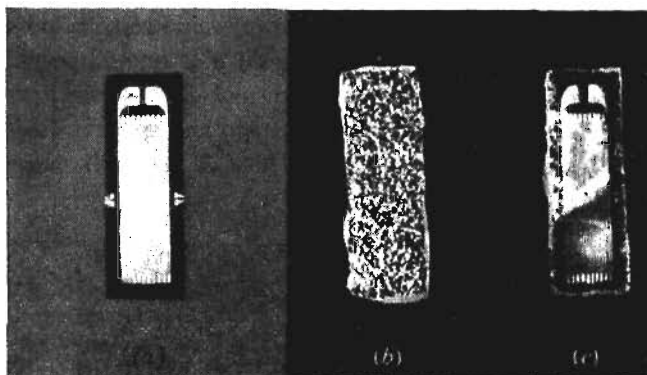


Rys. 7. Czujnik CARLSONA i PIRTZA [1]

na tyle skomplikowaną, że trudno polecać wykonywanie go w laboratoriach wytrzymałościowych. Przedstawiony tu został tylko jako przykład odmiennej konstrukcji. Dokładniejszy opis zarówno uprzednich poszukiwań jak i gotowego czujnika można znaleźć w pracy [1].

Czujnik powierzchniowy umieszczany w czasie betonowania. Dodatkowo należy wspomnieć o szczególnej metodzie wykorzystania tensometrów elektrooporowych. Metoda ta opisana w pracy [8] stanowi jak gdyby etap pośredni pomiędzy naklejaniem czujników na powierzchni zewnętrznej a umieszczaniem ich wewnątrz elementu betonowego. Tensometr elektrooporowy zostaje przygotowany tak jakby naklejono go na cienką warstwę polimeru, chropowatą (posypaną piaskiem) od zewnątrz i gładką od strony tensometru (rys. 8). Czujnik zostaje dalej umieszczony w formie do betonu, przy czym ważne jest, aby przylegał szczelnie do ścianki. Po wypełnieniu formy beton łączy się z chropowatą

powierzchnią polimeru i po wyjęciu elementu na jego ściance znajduje się już przyklejony tensometr. Po przylutowaniu przewodów i zabezpieczeniu tensometru od zewnątrz można dokonywać pomiarów.



Rys. 8. Czujnik powierzchniowy, naklejany metodą od wewnątrz [8]: a—tensometr umieszczony na folii, przygotowany do zabezpieczenia, b—tensometr pokryty żywicą i piaskiem, c—widok z przeciwnej strony przed przymocowaniem do ścianki formy

Podstawową zaletą tego sposobu jest uniknięcie powstania w badanym elemencie miejscowych naprężeń związanych z ogrzewaniem i z osuszaniem betonu przed naklejeniem czujnika (ang. errand stresses), co zawsze występuje przy tradycyjnym umieszczaniu tensometrów na powierzchni zewnętrznej.

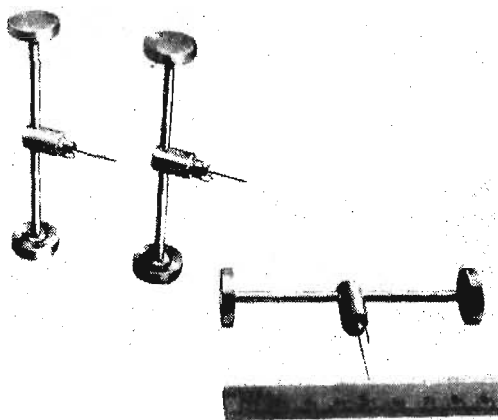
### 3.3. Czujniki rezonansowe

Czujniki rezonansowe produkowane są w wielu krajach i różnice konstrukcyjne w ich budowie są nieznaczne. Jako przykład poniżej omówiony będzie czujnik «Télémac» [13].

Czujniki tego typu produkowane są przez firmę francuską Télésures Acoustiques—Télémac. Zasadą działania urządzenia jest proporcjonalność zmian dwóch wielkości — naprężenia struny i częstotliwość jej drgań własnych. Mierząc częstotliwości drgań własnych strun pomiarowej i kompensacyjnej, obciążonej w sposób znany, można określić stan naprężenia, a co za tym idzie odkształcenia tej pierwszej struny, znajdującej się w elemencie badanym. Pobudzenie struny do drgań i odczytywanie częstotliwości następuje na drodze elektromagnetycznej za pomocą urządzenia umieszczonego wewnątrz czujnika. Firma Télémac podobnie jak i inni producenci czujników rezonansowych wykonuje specjalne mostki pomiarowe, za pomocą których można określić stan odkształcenia struny pomiarowej. Praktyczne nastawienie odczytu polega na dobraniu ekstremalnego natężenia dźwięku w głośniku z ewentualną kontrolą wzrokową na wskaźniku lampowym. Produkowane czujniki odkształceń (istnieją oparte na tej samej zasadzie termometry, manometry itp.) mają w zależności od przeznaczenia rozmaite wymiary — od  $\varnothing 0,4 \times 10$  cm (rys. 9) do  $\varnothing 4,0 \times 30$  cm. Składają się one z metalowej kapsułki, wewnątrz której znajduje się cienka struna stalowa, odizolowana od działania wilgoci. W kapsułce



umieszczono również cewki wzbudzające drgania i połączone przewodami elektrycznymi z mostkiem. Czułość wskazań urządzenia jest rzędu 1 do  $5 \times 10^{-6}$ . Za pomocą czujników rezonansowych można dokonywać pomiarów zarówno statycznych jak i dynamicznych. Są one bardzo odporne na działanie wilgoci i mają tę zasadniczą zaletę, że z ich pomocą można prowadzić porównywalne ze sobą pomiary, oddzielone nawet znacznym odstępem czasu. Nadają się więc one do pomiarów skurczu, pęczania i innych zjawisk długotrwałych jak również do obserwacji stanu odkształcenia tak wolno zmiennego, z jakim się można spotkać np. przy budowie wielkich zapór wodnych. Zasadniczą wadą jest duży koszt i skomplikowana technologia produkcji.



Rys. 9. Przykład czujników typu Télémac [13].

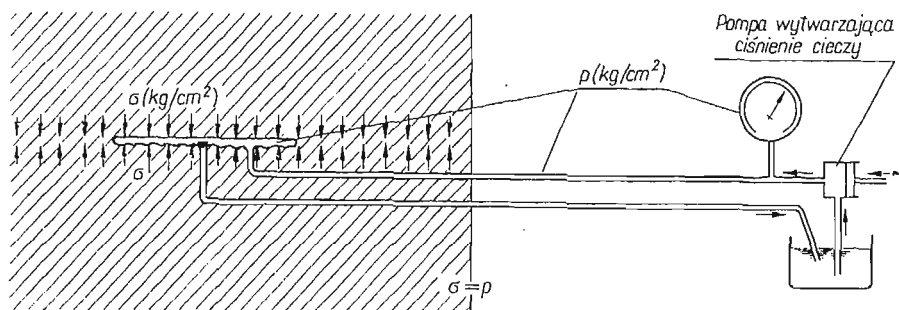
Różnice w poszczególnych rozwiązaniach, wymienionych jako czujniki rezonansowe w p. 3.1., poza technologicznymi polegają na stosowaniu różnych zastępczych współczynników sprężystości. Produkowane są czujniki o współczynniku bądź możliwie bliskim współczynnikowi betonu, bądź możliwie bliskim zeru. Powtarzającą się wadą są znaczne na ogół wymiary urządzeń i, co za tym idzie, trudności prowadzenia dla ograniczonego obszaru pomiarów w różnych kierunkach.

#### 3.4. Czujniki hydrauliczne

Czujniki te służą do pomiaru stanu naprężeń [2]. Do wnętrza betonu wprowadza się elastyczny zbiornik (rys. 10) wypełniany następnie cieczą. Mierzenie zmian ciśnienia w cieczy nie jest skomplikowane, a w efekcie daje pewne informacje o zmianach zachodzących w stanie naprężenia elementu badanego. Odczytane naprężenie jest oczywiście wielkością średnią dla całej powierzchni czujnika. Zasadę działania urządzenia ilustruje rysunek zaczerpnięty z wydawnictwa reklamującego czujniki Glötzla (rys. 10).

Oprócz powyżej opisanych dokonywano prób opracowania urządzeń opierających się na zmianie wraz z odległością takich wielkości, jak oporność indukcyjna czy pojemność. Czujniki tego typu produkowane były z bardzo na ogół wąskim

przeznaczeniem (np. mierzenie nacisku gleby na elementy pług, pomiar niskich ciśnień itp.). Rzadko mogą one znaleźć zastosowanie przy pomiarach wewnątrz elementów z betonu ze względu na koszt produkcji i możliwość tylko jednorazowego wykorzystania.



Rys. 10. Zasada działania hydraulicznego czujnika naprężeń [2].

#### 4. Uwagi o prowadzeniu pomiarów w betonie i wnioski

Najlepszym modelem ciała jest samo ciało. W badaniach praktycznych często nie jest jednak rzeczą możliwą badanie samego ciała. Trzeba posługiwać się systemem analogów — układów mających pewne cechy wspólne z rozważanym. Stąd wynika oczywista konieczność dokonywania badań na próbkach i wyciągania z nich wniosków odnośnie rzeczywistych własności materiału.

Badania na próbkach betonowych dotyczą na ogół zjawisk występujących w sztucznie ustalonych lub przynajmniej ograniczonych warunkach. Wskazane jest ustalenie niezmienności możliwie dużej liczby parametrów doświadczenia. Gdy nie jest to możliwe, należy dokładnie notować przebieg różnych zmian zachodzących w czasie pomiaru, a mogących mieć wpływ na stan deformacji. Przy analizie projektu badań, a zwłaszcza przy rozważaniu układu kompensującego, należy zwrócić uwagę na wszystkie czynniki mogące wpłynąć na zmianę stanu deformacji wewnątrz betonu. Będą to przede wszystkim: struktura betonu, jego wiek, warunki dojrzewania, sposób i wielkość przyłożonego obciążenia, czas i wielokrotność obciążania, temperatura, wilgotność, skurcz i pełzanie. Usiłowania powinny iść w kierunku jak najwłaściwszego wyróżnienia zjawiska badanego.

Brak jest jak dotychczas uniwersalnego czujnika, za pomocą którego można byłoby mierzyć odkształcenia i naprężenia w sposób odpowiadający potrzebom badawczym. Ponieważ odległość jest wielkością, która może być mierzona bezpośrednio, dlatego też do badań należy stosować czujniki odkształceń, a nie usiłować mierzyć naprężenia. Wydaje się, że najsłuszniejszym rozwiązaniem jest stosowanie czujnika odkształceń o możliwie małym współczynniku sprężystości i niewielkich wymiarach poprzecznych. Wymiar podłużny, jak to ogólnie przyjęto, powinien być równy mniej więcej trzykrotnej średnicy największych ziarn kruszywa, które wchodzi w skład badanego betonu.

W materiale tak niejednorodnym jak beton jeden pomiar nie jest ani miarodajny, ani nawet prawdziwy. Wynika stąd konieczność stosowania od razu większej liczby czujników, powtarzania i sprawdzania doświadczeń.

Ponieważ nie zawsze jest możliwe nabycie dobrych czujników produkowanych fabrycznie, a także ponieważ i z innych względów stosowanie ich nie zawsze jest wskazane, zachodzi przeto niejednokrotnie konieczność wykonania czujnika własnymi siłami w laboratorium wytrzymałościowym. Wybór typu czujnika wynika bezpośrednio z charakteru zamierzonych badań i musi być poprzedzony staranną analizą. Przy wykonaniu czujnika z zastosowaniem tensometrów elektrooporowych należy dbać o zachowanie daleko idącej precyzji — zwłaszcza, jeżeli chodzi o zabezpieczenie przeciwwilgociowe. W pracach tego typu nawet drobne niedokładności w wykonaniu mogą bardzo łatwo uniemożliwić kontynuowanie badań.

Przy badaniach betonu, ze względu na zależność wytrzymałości i odkształcalność betonu od wszystkich składowych stanu deformacji, oraz na ich zależności między sobą, wskazane jest prowadzenie jednocześnie pomiaru trzech składowych liniowych i trzech składowych kątowych. Pomijanie niektórych składowych, np. odkształceń poprzecznych w elementach ściskanych czy odkształceń kątowych lub przyjmowanie hipotez, np. założenie płaskich przekrojów, prowadzić może do znacznych błędów i jest niedopuszczalne w badaniach podstawowych. Dlatego też należy albo upewnić się w jakim stopniu na wielkość danej składowej wpływają wielkości pozostałych składowych bądź też bez tej analizy starać się uzyskać obraz wszystkich zmian zachodzących w danym punkcie ciała.

#### Literatura cytowana w tekście

1. R. CARLSON, D. PIRTZ, *Development of a device for the direct measurement of compressive stress*, American Concr. Inst., Detroit, 3, 24 (1952); Proceedings 49.
2. GLÖTZL, *Ventilgeber für den Bauherrn, die Aufsichtsbehörde und den Statiker*, broszura reklamowa.
3. G. HONDROS, *The protection and manipulation of electrical strain gauges of the bounded wire type for use in concrete, particularly for internal stress measurements*, Mag. Concr. Research, London, 27, 9 (1957), 173–180.
4. A. U. HUGGENBERGER, *Talsperren—Meßtechnik*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951.
5. Y. C. LOH, *Internal stress gauges for cementitious materials*, Proc. Soc. Experim. Stress Analysis, Cambridge Mass., 2, 11 (1954), 13–28.
6. J. MAJCHROWICZ, J. WESELI, *Przystosowanie tensometrycznych czujników oporowych do pomiarów wewnętrznych*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Budownictwo z. 14, Gliwice 1964, 137–139.
7. G. MORAVIA, *Misure estensimetriche all'interno di getti di calcestruzzo*, La Ricerca Scientifica, Roma, 8, 25 (1955).
8. K. NEWMAN, L. LACHANCE, R. W. LOVEDAY, *Strain measurements on saturated concrete specimens*, Mag. Concr. Research, London, 45, 15 (1963), 143–150.
9. И. И. ПРИМЕНОВ, *Опыт применения гидроизолированных глубинных датчиков сопротивления для измерения напряжений в бетоне*, Изв. Учебн. Зав., Строительство и Архитектура, нр. 2, Новосибирск 1963, 143–150.

10. Z. ROLIŃSKI, *Zarys elektrycznej tensometrii oporowej*, WNT, Warszawa 1963, 316–319.
11. L. SŁOWAŃSKI, Z. ŚNIADKOWSKI, *O pomiarach naprężeń i sił metodą tensometrii strunowej*, Biul. Inform. Nauk. Techn. ITB, Warszawa, 1/2, 1950, 121–128.
12. Z. ŚNIADKOWSKI, *Measurements of strain and stresses inside cementitious materials*, Proc. Conf. on Experim. Methods of Investigating Stress and Strain in Structures, Praga 1965, 109–117.
13. *Télémessures Acoustiques*, Télémac, dokumentacja ogólna, broszury i prospekty reklamowe.
14. E. C. THOMA, R. E. SCHNEEBELI, *Method for preparing SR-4 strain gauges for embedment in concrete*, J. American Concr. Inst.-Detroit, 4, 24 (1952), Proceedings 49.
15. Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *Sondy do wyznaczania odkształceń w betonie i w gruntach*, Wybrane materiały III Krajowej Konferencji Wytrzymałościowej SIMP—WAT, Wydawnictwo MON, Warszawa 1964.
16. R. ZIMMERMANN, *Pomiry naprężeń i drgań metodami elektrycznymi*, PWN, Warszawa 1959, 447.

### Р е з ю м е

#### ДАТЧИКИ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВНУТРИ БЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В бетоне можно эффективно измерять только лишь деформации. Датчик для измерения деформированного состояния бетона должен удовлетворять многочисленным требованиям, самыми важными из которых являются долговечность и соответствующий подбор механических свойств. Для того, чтобы датчик мог измерять напряженное состояние, вызывая в нем минимальные возмущения — размеры и эквивалентный коэффициент упругости датчика должны быть возможно малыми. С точки зрения лабораторных исследований проводится обзор встречаемых конструкций датчиков для измерения деформаций, включающий также датчики проектированные для измерения напряжений внутри небольших бетонных элементов. Значительная часть конструкций основывается на принципе измерения электрического сопротивления. Рассматриваются датчики изготовленные на металлическом основе а также при использовании связывающих материалов. Обсуждаются примеры других конструкции, между прочим струнные и гидравлические датчики. Кроме того, даются указания, касающиеся проведения самых измерений. Правильно сконструированный датчик при использовании тензометров омического сопротивления является устройством вполне пригодным для измерений мгновенного деформированного состояния в бетонных элементах. В настоящее время такое устройство не пригодно для длительных измерений, в которых пока что можно использовать только лишь струнные датчики.

### Summary

#### GAUGES FOR LABORATORY STRESS AND STRAIN MEASUREMENTS INSIDE CONCRETE ELEMENTS

Investigating the deformation process in concrete block we are able to measure strains only. The gauge destined for measurements of the state of deformation inside a concrete block should satisfy a number of requirements, the most important of which are durability and proper mechanical features. In order to avoid disturbances of measured strains caused by the presence of the gauge, its dimensions and elasticity modulus should be as small as possible. From the point of view of laboratory investigations, given is a review of existing strain gauges including gauges destined for the stress measurements, which can be applied inside small concrete elements. Most

of the gauges is based on the resistance strain-gauges. Described are gauges with metallic skeleton and designed with use of the binding materials. Presented are also examples of other gauges, among them wire-gauges and hydraulic gauges. Given are some remarks concerning checking of gauges and the measuring technique. Well designed gauge with electrical strain-gauges is able to measure the state of strain inside concrete elements. At present such a gauge is inapplicable for long-time measurements for which only wire-gauges can be used.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 stycznia 1965 r.*

---

---

# BIULETYN INFORMACYJNY

## POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

---

### KONWERSATORIUM MASZYN MATEMATYCZNYCH «ZASTOSOWANIE MASZYN MATEMATYCZNYCH WE WSPÓŁCZESNEJ MECHANICE»

W dniach od 8 do 14 lutego 1965 r. odbyło się w Szczyrku Konwersatorium Maszyn Matematycznych pod hasłem «Zastosowanie Maszyn Matematycznych we Współczesnej Mechanice». Konwersatorium zostało zorganizowane przez Oddział Gliwicki PTMTS oraz Zakład Energetyki Jądrowej przy Politechnice Śląskiej. Obowiązki przewodniczącego komitetu organizacyjnego pełnił dr inż. Tadeusz J. ŚWIERZAWSKI. Było to trzecie z kolei spotkanie organizowane przez Oddział Gliwicki PTMTS w ciągu ostatnich trzech lat w okresie przerwy semestralnej na wyższych uczelniach. Można więc przypuszczać, że organizowanie podobnych imprez wejdzie w tradycję Oddziału Gliwickiego.

Celem organizowanego spotkania było omówienie problemów, z jakimi stykają się naukowcy i inżynierowie eksploatujący maszyny matematyczne, zarówno cyfrowe jak i analogowe, w dobie coraz bardziej burzliwego rozwoju techniki obliczeniowej. Około 80 uczestników konwersatorium reprezentowało Akademię Górniczo Hutniczą w Krakowie, Biuro Projektów Syntezy Chemicznej „Prosynchem” w Gliwicach, Centralne Biuro Konstrukcji Maszynowych w Bytomiu, Instytut Badań Jądrowych w Świerku, Instytut Lotnictwa w Warszawie, Instytut Morski w Gdańsku, Politechniki: Warszawską, Wrocławską, Gdańską, Krakowską, Częstochowską i Śląską, Wojskową Akademię Techniczną oraz inne zakłady i instytuty naukowe.

Na konwersatorium wygłoszono 24 referaty, w tym 14 z Politechniki Śląskiej w Gliwicach, 4 z Wojskowej Akademii Technicznej, 2 z Biura Projektów Syntezy Chemicznej w Gliwicach, 1 z Politechniki Krakowskiej, 1 z Instytutu Badań Jądrowych w Świerku, 1 z Instytutu Morskiego w Gdańsku oraz 1 z Centralnego Biura Konstrukcji Maszynowych w Bytomiu. Streszczenia referatów zawarte są częściowo w specjalnym zeszycie wydanym przez Oddział Gliwicki PTMTS i Zakład Energetyki Jądrowej Politechniki Śląskiej, a częściowo w specjalnym zeszycie wydanym przez Wojskową Akademię Techniczną. Referaty podzielono na dwie grupy. Grupa pierwsza obejmowała 11 referatów omawiających zagadnienia cyfrowych maszyn matematycznych. Referaty grupy drugiej w liczbie 10 dotyczyły zagadnień analogowych maszyn matematycznych.

Słowo wstępne wygłosił przewodniczący Oddziału Gliwickiego PTMTS prof. dr inż. Oktawian POPOWICZ, a referat wprowadzający do zagadnień maszyn matematycznych wygłosił dr inż. Tadeusz ŚWIERZAWSKI. Poniżej przedstawione są tytuły referatów wygłoszonych na konwersatorium.

Referaty o tematyce ogólnej: prof. dr inż. O. POPOWICZ (Pol. Śl.) «Słowo o Konwersatorium», dr inż. T. ŚWIERZAWSKI (Pol. Śl.) «Referat wprowadzający do zagadnień maszyn matematycznych», prof. dr inż. O. POPOWICZ «Zamknięcie obrad — podsumowanie korzyści ze spotkania na Konwersatorium».

Referaty dotyczące cyfrowych maszyn matematycznych: mgr inż. R. BEDNARCZYK, mgr inż. M. GALLOS (CBKM-Bytom) «Zastosowanie cyfrowych maszyn matematycznych w pracach konstrukcyjnych i badawczych w dziedzinie maszyn dźwigowych i urządzeń transportowych», mgr inż. T. BRZOSTEK (Inst. Morski) «Zastosowanie maszyn matematycznych w żegludze», dr inż. S. GDULA (Pol. Śl.) «Zastosowanie maszyn cyfrowych do rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła w ciałach stałych», mgr inż. J. KARDASZ (Prosynchem-Gliwice)

«Projektowanie wymienników ciepła za pomocą maszyny cyfrowej ZAM-2», mgr inż. F. KERN (Prosynchem-Gliwice) «Opracowanie danych doświadczalnych i statystycznych za pomocą maszyny cyfrowej do obliczeń cieplnych elementu Fielda z uwzględnieniem promieniowania pomiędzy ściankami elementu», prof. zw. mgr inż. K. KUTARBA, dr inż. J. ROZEWICZ (Pol. Śl.) «Zastosowanie maszyn cyfrowych w obliczeniach konstrukcyjnych turbin ciepłych», mgr inż. A. LESIKIEWICZ, prof. dr inż. R. SZYMANIK (WAT) «Zastosowanie elektronowych maszyn liczących do badania procesów spalania», mgr inż. W. ŁUKASZEK (Pol. Śl.) «Wytyczne zastosowania maszyn cyfrowych do obliczania osłabienia fotonów metodą Monte-Carlo», dr inż. A. NIEDERLIŃSKI (Pol. Śl.) «Programowanie dynamiczne, a optymalne sterowanie procesów przemysłowych», dr inż. T. ŚWIERZAWSKI (Pol. Śl.) «Zastosowanie cyfrowej maszyny matematycznej do badań wnikania ciepła».

Referaty dotyczące maszyn analogowych: mgr inż. M. FERENC (Pol. Śl.), «Zastosowanie maszyn matematycznych do badania dynamiki procesu mieszania metanu z powietrzem», mgr inż. A. GUZIK (Pol. Śl.) «Analogia hydrodynamiczna w zastosowaniu do badań wymiany ciepła w regeneratorach», mgr inż. J. KAPICA (WAT) «Uniwersalna maszyna analogowa ELWAT-1», mgr inż. E. KMIOTEK, mgr inż. M. KULIG, mgr inż. P. RAFALSKI (IBJ) «Zastosowanie maszyny analogowej SPACE-30 w pracach obliczeniowych Zakładu Inżynierii Reaktorowej Instytutu Badań Jądrowych», prof. dr inż. A. LISOWSKI (Pol. Krak.) «Pewne przypadki zastosowań maszyny matematycznej UMC-1 oraz analogów elektrycznych do zagadnień statyki i dynamiki budowli», dr inż. S. MIERZWIŃSKI (Pol. Śl.) «Zastosowanie modelu analogowego do badania charakterystyki ogrzewanego obiektu», dr inż. S. PASZKOWSKI (WAT) «Gradientowa metoda znajdowania ekstremum warunkowego funkcji wielu zmiennych za pomocą maszyn analogowych», dr inż. R. STANISZEWSKI, prof. dr inż. R. SZYMANIK (WAT) «Zastosowanie matematycznych maszyn analogowych do dynamicznych badań silników ciepłych», dr inż. T. ŚWIERZAWSKI, mgr inż. W. GIBAŁKA, mgr inż. J. SOBOLSKI (Pol. Śl.) «Badanie rozkładu temperatury w moderatorze grafitowym reaktora jądrowego przy użyciu hydraulicznego urządzenia analogowego», dr inż. T. ŚWIERZAWSKI, mgr inż. A. PUSZER (Pol. Śl.) «Badanie kinetyki reaktorów jądrowych przy użyciu elektronicznego urządzenia analogowego». Po każdym referacie następowała bardzo żywa i rzeczowa dyskusja w poszczególnych dniach spotkania przez profesorów: S. OCHEŃDUSZKĘ (Pol. Śl.), M. SĄSIADKA (Pol. Wrocław.), S. ANDRZEJEWSKIEGO (Pol. Warsz.), Z. OLESIAKA (Zarząd Główny PTMETS), R. SZYMANIKA (WAT), A. LISOWSKIEGO (Pol. Krak.).

W podsumowaniu spotkania wszyscy mówcy podkreślili celowość organizowania podobnych zebrań. Ze względu na udany charakter tej ostatniej imprezy jak i na bardzo aktualny temat konwersatorium postawiono wniosek, by podtrzymywać tradycję organizowania konwersatoriów przez PTMETS-Gliwice, a za rok lub za dwa lata by znów powrócić do zagadnienia maszyn matematycznych.

*Tadeusz J. Świerzawski*

## II SYMPOZJUM NA TEMAT ELASTOPTYKI I JEJ ZASTOSOWAŃ

W dniach od 24 do 27 marca 1965 r. odbyło się w Warszawie II sympozjum na temat «Elastoptyka i jej zastosowania», zorganizowane przez Oddział Warszawski Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. W przeciwieństwie do I sympozjum na ten temat, które odbyło się w 1962 r., w obecnym sympozjum wzięli również udział zaproszeni goście z Czechosłowacji, NRD i Węgier. Zadaniem sympozjum, oprócz przeglądu stanu badań elastoptycznych w Polsce i wymiany doświadczeń między poszczególnymi ośrodkami krajowymi i niektórymi ośrodkami z krajów socjalistycznych, było również podkreślenie ważności zastosowania metod elastoptycznych do szybkiego i taniego rozwiązywania bardzo nieraz skomplikowanych problemów wytrzymałościowych, jakie napotyka nasze budownictwo i przemysł. Mimo tego bowiem, że ostatnio z zadowoleniem można odnotować coraz częstsza współpracę przemysłu z laboratoriami elastoptycznymi, jednak w dalszym ciągu zakres tej współpracy daleki jest zarówno od wyczerpania możliwości laboratoriów jak i zaspokojenia potrzeb wynikających z praktyki.

Na sympozjum przedstawiono 29 referatów, w tym 7 prac przedstawili goście zagraniczni: z Węgier i CSR po dwa referaty i z NRD trzy referaty. Z pozostałych 22 referatów szesnaście wy-

głosili przedstawiciele ośrodka warszawskiego, trzy — ośrodka krakowskiego, a po jednym referacie przedstawiły ośrodki w Gdańsku, Poznaniu i Katowicach.

Podział tematyczny prac jest dość trudny do przeprowadzenia, ponieważ wiele z nich można zaliczyć jednocześnie do różnych grup. Podział ten dokonany umownie według cech dominujących w pracy przedstawia się następująco: nowymi metodami badania i nowym rozwiązaniem aparatury elastoptycznej poświęcono sześć prac. W dwóch pracach przedstawiono nowe metody obliczeniowe związane z wyznaczaniem naprężeń na podstawie częściowych danych otrzymanych z badań elastoptycznych. W jednej pracy omówiono aparaturę analogową do przeprowadzania takich obliczeń. Badaniu modeli przestrzennych poświęcono zaledwie jedną pracę. Różne zastosowania elastoptyki noszące cechy nowości bądź to w samej metodzie badania, bądź to w temacie były przedmiotem ośmiu referatów. Największa grupa dziewięciu prac obejmowała badanie różnych technicznych problemów metodami klasycznymi elastoptyki na płaskich modelach. W jednej pracy przedstawiono badanie mechanicznych własności materiałów na modele. Treścią jednej z prac były propozycje zmian w polskim nazewnictwie elastoptycznym.

Dość pobieżne z konieczności omówienie wygłoszonych na sympozjum referatów przeprowadzimy w oparciu o powyższy umowny podział tematyczny. Sądzymy, że przegląd ten będzie stanowił pewien obraz osiągnięć i perspektyw rozwoju badań elastoptycznych w Polsce, a także zwróci uwagę na braki, jakie jeszcze istnieją szczególnie w tematyce tych badań.

W grupie prac poświęconych nowym metodom J. BEDNAR (Bratysława) przedstawił zasady rozwiązywania płyt metodami elastoptyki. Podano sposób wyznaczania momentów za pomocą równania Poissona. Opisano stereometryczną metodę badania płyt, aparaturę do pomiaru momentów zginających i skręcających przy użyciu metody zamrażania. Omówiono sposób wykorzystania metody elastoptycznej i metody stereometrycznej do analizy momentów zginających.

W pracy R. DOROSZKIEWICZA (IPPT, Warszawa), poświęconej badaniu modeli zapór wodnych, przedstawiono pewną metodę jednoczesnego obciążenia modelu ciężarem własnym i parciem hydrostatycznym oraz adaptację do tego rodzaju badań metody G. Chesina, polegającej na obciążeniu ciśnieniem hydrostatycznym modelu, w którym uprzednio zostały zamrożone naprężenia od ciężaru własnego.

J. CERNOSEK (Gottwaldowo) przedstawił interferometryczną metodę rozdzielania naprężeń przy trójwymiarowych badaniach elastoptycznych. Metoda ta umożliwia wyznaczenie wszystkich składowych tensora światła. Następnie za pomocą prostych zależności pomiędzy tensorem światła a tensorem naprężenia można wyznaczyć stan naprężenia. Przedstawiono projekt odpowiedniej aparatury doświadczalnej, będącej obecnie w budowie.

W referacie L. KORCZAKA i J. LIETZA (IPPT, Warszawa) opisano zbudowaną przez autorów aparaturę do dynamicznych badań elastoptycznych, opartą na metodzie błyskowej Christiego. Aparatura umożliwia uzyskanie 24 kolejnych zdjęć otrzymanych przez wyzwalanie błysków, z których każdy naświetla błonę w innej kamerze. Błyski uzyskuje się przez wyładowanie kondensatorów.

W oddzielnej pracy L. KORCZAK przedstawił różne możliwości zastosowania układów elektronicznych w badaniach elastoptycznych, ze szczególnym uwzględnieniem dynamicznego obciążania modelu.

Tematem następnego referatu J. LIETZA były różne konstrukcje mechaniczne do obciążania modeli siłami rozłożonymi równomiernie wzdłuż krawędzi i siłami masowymi.

W grupie prac poświęconych metodom obliczeniowym w elastoptyce G. HABERLAND (Berlin) podał metodę uwzględnienia wpływu sił poprzecznych przy wyznaczaniu momentów w modelach płyt, w których metodą elastoptyczną wyznaczono różnice i kierunki głównych momentów zginających.

W następnym referacie z tej grupy W. SZCZEPIŃSKI (IPPT, Warszawa) przedstawił metodę wyznaczenia naprężeń za pomocą równań charakterystyk podstawowego układu równań. Metoda ta pozwala obliczyć wszystkie składowe naprężenia tylko na podstawie obrazu izochrom, również w przypadku obciążenia modelu siłami masowymi.

Tematem referatu K. BRZOSOWSKIEJ (Inst. Automatyki PAN, Warszawa) był opis aparatury do całkowania równania Laplace'a metodą analogii elektrycznej przy zastosowaniu papieru prze-



wodzącego. Uzyskuje się tą metodą wyniki obarczone błędem nie większym niż 5-7%. Drugą aparaturą do całkowania tego równania, przedstawioną w referacie, jest analizator połowy AP-1200 oparty na metodzie siatek elektrycznych. Analizator ten ma 1230 węzłów i daje błąd w granicach 1%.

W jedynej pracy poświęconej badaniu przestrzennych modeli elastooptycznych F. THAMM (Budapeszt) przedstawił wyniki badania ogniwa łańcucha o specjalnym złożonym kształcie. Opisano technikę odlewania modeli z żywicy epoksydowej. Badanie przeprowadzono najczęściej stosowaną metodą zamrażania i cięcia modelu na cienkie płytki.

Przejdziemy teraz do grupy referatów, w których przedstawiono różne nowe zastosowania elastooptyki lub posłużono się mało rozpowszechnionymi metodami badania.

Tematem pracy J. HALAUBRENNER (Polit. Krakowska) było badanie stanu naprężenia w czułym elastooptycznie podłożu pod toczącą się cienkościenną kulą szklaną. Otrzymano obrazy izochrom i izoklin w dwóch płaszczyznach. Kierunek światła był w obu przypadkach prostopadły do wektora prędkości kuli, ale raz był jednocześnie prostopadły do powierzchni podłoża, a drugi raz do niej równoległy.

Podobne zagadnienie było przedmiotem badań P. SUKIENNIKA (Polit. Krakowska). Różnią się one od poprzedniej pracy sposobem przygotowania materiału podłoża dla uzyskania korzystnej dla obserwacji badanego zjawiska struktury oraz tym, że kula przesuwała się trąc o podłoże, gdyż nie miała możliwości obrotu.

J. STUPNICKI (Polit. Warszawska) przedstawił wyniki badania wpływu warstwy oleju na kinostatyczne naprężenia kontaktowe przy toczeniu się walców. Obserwacje przeprowadzono na modelu zbudowanym z dwóch przezroczystych krążków o specjalnej budowie warstwowej. Pomiedzy dociskane do siebie i obracające się jednocześnie krążki wtryskiwano olej badając zmiany w obrazie izochrom. Wyznaczone następnie na podstawie izochrom naprężenia kontaktowe wskazują, że obecność warstwy oleju może zwiększyć nośność o około 20%.

W referacie F. LOGESA (Halle) przedstawiono wyniki badania naprężeń własnych w szkłe. Naprężenia te wywoływano przez sklejenie dwóch segmentów szklanych o różnych współczynnikach rozszerzalności cieplnej i następną chłodzenie. Można w ten sposób uzyskać pęknięcie szkła i następnie ustalić z techniczną dokładnością wytrzymałość szkła. Prowadzono również elastooptyczne obserwacje stanu naprężenia.

J. TRÄGER (Berlin) przedstawił analizę zderzenia Herza metodą elastooptyczną. Jako modeli użyto małych walców kołowych ze szkła. Zjawiska zachodzące w czasie zderzenia krążków rejestrowano metodą szybkiej fotografii. Stwierdzono quasi-statyczny rozkład naprężeń. Umożliwia to modelowanie zagadnień działania ciężaru własnego przebiegiem zderzenia Herza lub odwrotnie.

Tematem pracy B. MICHAŁSKIEGO (IPPT, Warszawa) była analiza wpływu zbrojenia na rozkład naprężeń. Zbrojenie modelowano wklejając druty miedziane w płytki z materiału czułego elastooptycznie. Sposób ten w przeciwieństwie do metody zatapiania drutów przy odlewaniu modelu pozwala uniknąć naprężeń własnych.

R. DOROSZKIEWICZ i J. LIETZ przedstawili wyniki badania rozkładu naprężeń w zębach wirnika generatora elektrycznego dużej mocy. Obciążenie realizowano umieszczając model na ramieniu szybko obracającej się wirówki. Zdjęcia izochrom i izoklin wykonywano przy użyciu błyskowych źródeł światła. Podano opis konstrukcji zbudowanego we własnym zakresie urządzenia badawczego.

To samo urządzenie zostało wykorzystane przy badaniu naprężeń od ciężaru własnego w uproszczonym modelu zapory, przedstawionym w innym referacie R. DOROSZKIEWICZA. Zbadano kilka przypadków różniących się modułem Younga modelu zapory i podłoża. Jako alternatywę zastosowano metodę zamrażania wirującego modelu.

Przejdziemy teraz do referatów, których tematem były zastosowania klasycznej metody elastooptycznej do rozwiązywania różnych problemów technicznych.

S. ПУТКО (AGH, Kraków) w referacie przedstawił wyniki badania stanu naprężenia przy ścisnieniu krążków w obecności sił stycznych na powierzchni styku. W swych referatach S. MACKIEWICZ (Polit. Gdańska) i R. DOROSZKIEWICZ przedstawili badania płaskich modeli zapór wodnych. Tematem wspólnego referatu W. PONIŻA (Polit. Warszawska), Z. ORŁOSIA i Z. DYŁĄGA (WAT, Warszawa) była analiza rozkładu naprężeń w elementach z korbami, w węzłach konstrukcji sta-

lowych, w modelach połączeń spawanych oraz naprężeń kontaktowych w pierścieniu tłokowym. P. JASTRZĘBSKI i Z. STACHURSKA (ITB, Warszawa) przedstawili wyniki badania jedno- i wieloprzesłowych ścian-belek. W pracy L. SŁOWAŃSKIEGO i E. ORŁOWSKIEJ (ITB, Warszawa) podano wyniki elastooptycznego badania ścian usztywniających budynków obciążonych siłami poziomymi. Przedmiotem referatu A. LITEWKI (Polit. Poznańska) była analiza naprężeń w modelach ramownicy. J. HUSAR (Miskolic, Węgry) przedstawił wyniki badania naprężeń w ryglach zamykających kanały z uzwojeniem w wirnikach generatorów elektrycznych dużej mocy. W. SIKORA i J. KWIATEK (Gł. Inst. Górnictwa, Katowice) podjęli próbę zastosowania elastooptyki do badania procesu mechanicznego urabiania węgla.

Jedyną pracę poświęconą badaniu własności materiałów na modele elastooptyczne przedstawili R. DOROSZKIEWICZ i R. WOJNAR.

Żywą polemikę wywołał referat R. DOROSZKIEWICZA i B. MICHAŁSKIEGO wysuwający nowe propozycje dotyczące polskiej terminologii z zakresu elastooptyki.

Na zakończenie należy podkreślić, że zarówno pod względem poziomu zgłoszonych referatów, jak i od strony organizacyjnej obecne sympozjum stanowiło znaczny postęp w stosunku do poprzedniego. Jednakże wyraźnie słabą stroną sympozjum był brak polskich referatów poświęconych badaniu modeli przestrzennych i zastosowaniu pokryw elastooptycznych do badania odkształceń w elementach metalowych. Metody te są obecnie bardzo silnie rozwijane w ośrodkach zagranicznych, oddając wielkie usługi przy rozwiązywaniu nieraz bardzo trudnych problemów praktycznych. Brakiem była również zbyt duża liczba prac, które choć ważne z praktycznego punktu widzenia, nie wносиły nic nowego do rozwoju metod elastooptyki. Z pewnością wzbudziłyby one większe zainteresowanie na specjalistycznym sympozjum poświęconym badaniom zagadnieniom. Wydaje się również, że niektóre prace zyskałyby, gdyby nie dzielono ich na kilka referatów wygłaszanych oddzielnie, czasami nawet w różnych dniach.

Śledzenie obrad sympozjum było znacznie ułatwione dzięki wydaniu materiałów w postaci streszczeń referatów w dwóch wersjach językowych: polskiej i obcojęzycznej dla gości zagranicznych.

*Wojciech Szczepiński (Warszawa)*

## VII ZJAZD DELEGATÓW PTMTS

Doroczny Zjazd Delegatów PTMTS odbył się dnia 8 maja 1965 r. w Warszawie w Pałacu Kultury i Nauki.

Porządek dzienny obejmował następujące punkty:

1. Otwarcie Zjazdu, wybór przewodniczącego, zastępców przewodniczącego i sekretarzy Zjazdu.
2. Przyjęcie protokołu z VI Zjazdu Delegatów PTMTS.
3. Powołanie Komisji Matki i Skrutacyjnej.
4. Złożenie sprawozdania z działalności Towarzystwa w okresie kadencji
5. Złożenie sprawozdania finansowego.
6. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej.
7. Dyskusja nad sprawozdaniami, przyjęcie ich oraz postawienie wniosku o udzielenie absolutorium ustępującemu Zarządowi Głównemu. Głosowanie nad wnioskiem.
8. Wybory
  - a) przewodniczącego PTMTS,
  - b) uzupełniające członków Zarządu Głównego,
  - c) uzupełniające zastępców członków Głównej Komisji Rewizyjnej,
  - d) członków Sądu Konkursowego Z.G.
9. Uchwalenie generalnych wytycznych działalności na następny okres.
10. Sprawy bieżące i wolne wnioski.

Zjazd otworzył zastępca przewodniczącego ZG PTMTS prof. dr Witold NOWACKI.

Na przewodniczącą obrad wybrano prof. R. KAZIMIERCZAKA (Gdańsk), na zastępców przewodniczącego prof. dr J. DIETRZYCHA (Gliwice) i prof. dr M. SĄSIADKA (Wrocław).

Na sekretarzy powołano prof. dr M. ŻYCZKOWSKIEGO (Kraków) i doc. dr J. SUŁOCKIEGO (Szczecin).

Przed przystąpieniem do obrad zebrani uczcili minutą ciszy zmarłych w czasie ostatniej kadencji członków Towarzystwa:

prof. dr W. WJERZBICKIEGO (Warszawa),  
 prof. dr A. KACNERA (Warszawa),  
 prof. dr L. SUWALSKIEGO (Warszawa),  
 doc. H. BUZUNA (Warszawa),  
 dr M. KWIATKOWSKIEGO (Wrocław).

Protokół z poprzedniego VI Zjazdu Delegatów PTMTS (23 maja 1964) przyjęto bez zmian. Komisję Matkę i Skrutacyjną wybrano w następującym składzie:

prof. dr J. LITWINISZYN (Kraków),  
 prof. dr E. KARAŚKIEWICZ (Poznań),  
 dr T. ŚWIERZAWSKI (Gliwice).

Sprawozdanie Zarządu Głównego za okres poprzedniej kadencji złożył prof. dr Z. OLESIAK. W okresie sprawozdawczym Towarzystwo rozwijało swą działalność w oparciu o statut i wytyczne działalności, uchwalone na VI Zjeździe Delegatów. Realizacja tych wytycznych przebiegała następująco.

## 1. Rozwijanie działalności naukowej w dziedzinie mechaniki teoretycznej i stosowanej

1. Wyniki organizacji regularnych zebrań naukowych w Oddziałach PTMTS ilustruje tablica 1

Tablica 1

Oddział	Liczba zebrań					Liczba referatów	Uczestników		Dyskutantów	
	II kw. 1964	III kw. 1964	IV kw. 1964	I kw. 1965	razem		łącznie	przeciętnie na 1 zebrań	łącznie	przeciętnie na 1 zebrań
Gdańsk	1	—	—	2	3	3	32	11	30	6,6
Gliwice	3	—	3	2	8	13	189	23,6	57	7,1
Kraków	1	—	1	1	3	3	42	14	15	5
Łódź	2	—	4	2	8	9	120	15	35	4,5
Poznań	1	—	2	1	4	4	61	15,2	18	4,5
Szczecin	3	—	3	3	9	9	118	13,1	36	4
Warszawa	5	—	4	2	11	11	213	19	45	4
Wrocław	3	—	2	3	8	8	114	14,2	40	5
Razem	19	—	19	16	54	60	889	16,4	266	4,9

2. Organizacja sympozjów i konferencji naukowych dotyczących wybranych działów specjalnych.

W okresie sprawozdawczym odbyły się 4 sympozja naukowe, mianowicie:

a) Oddział w Krakowie zorganizował w dniach 14 i 15 maja 1964 r. sympozjum na temat dynamiki maszyn hutniczych przy współudziale Katedry Maszyn Hutniczych AGH, Katedry Mechaniki Technicznej AGH oraz Stowarzyszenia Inżynierów i Techników Przemysłu Hutniczego. W obradach uczestniczyło 200 osób, w dyskusji zabrało głos 29 osób. Podczas sympozjum wygłoszono 12 referatów i 18 komunikatów.

b) Oddział we Wrocławiu zorganizował w dniach 6 i 7 listopada 1964 r. sympozjum na temat reologii metali, betonów i gruntów. W obradach wzięło udział 100 osób, w dyskusji — 20. Wygłoszono ogółem 20 referatów.

c) Oddział w Gliwicach zorganizował w dniach 8–14 lutego 1965 r. w Szczyrku konwersatorium na temat maszyn matematycznych pod hasłem «Zastosowanie maszyn matematycznych we współczesnej mechanice». W obradach wzięło udział 80 osób. Wygłoszono 24 referaty.

d) Oddział w Warszawie zorganizował w dniach 24–27 marca 1965 r. sympozjum na temat elastooptyki i jej zastosowań. W obradach wzięły udział 144 osoby, w tym 12 uczestników zagranicznych i 73 zamiejscowych. Podczas obrad wygłoszono 28 referatów.

Powyższe sympozja zostały omówione w nr 2/1964 i 1/1965 *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*.

#### Konkursy naukowe

W okresie sprawozdawczym przeprowadzono 2 konkursy naukowe, mianowicie:

a) Zarząd Główny ogłosił doroczny konkurs naukowy na pracę doświadczalną z dziedziny mechaniki. Na konkurs wpłynęło 8 prac.

b) Oddział w Gliwicach ogłosił konkurs naukowy, na który nagrody ufundowane zostały przez Wydział Kultury Miejskiej Rady Narodowej w Gliwicach. Wpłynęło ogółem 6 prac.

Wyniki obu konkursów zostały opublikowane w nr 1(1965) *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*.

## II. Rozpowszechnianie mechaniki teoretycznej i stosowanej

### 1. Kontynuowanie i rozwijanie akcji wydawniczej Towarzystwa

a) Organ PTMTS *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*. W 1964 r. złożono do druku trzy numery wydawnictwa. Tematyka poszczególnych zeszytów zawierała, zgodnie z założeniami programowymi, wiele artykułów przeglądowych z różnych gałęzi mechaniki, prace oryginalne, biuletyn z działalności PTMTS, sprawozdanie z sympozjów naukowych PTMTS, kongresów, konferencji itp. Przygotowano do druku 1 i 2 zeszyt III-go tomu. W zeszycie 3/1964 zamieszczone zostało wspomnienie pośmiertne poświęcone naczelnemu redaktorowi *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*, prof. dr Arturowi KACNEROWI, w drugim zeszycie 1965 r. zostanie zamieszczone wspomnienie pośmiertne poświęcone prof. dr Witoldowi WIERZBICKIEMU.

W związku ze śmiercią Artura KACNERA uległ zmianie dotychczasowy skład Komitetu Redakcyjnego. Redaktorem Naczelnym został prof. dr Zbigniew OLESIAK, członkami Komitetu: prof. dr Marek SOKOŁOWSKI, doc. dr Wojciech SZCZEPŃSKI i mgr Józef JANICZEK. Pewną przeszkodę w pracy wydawnictwa stanowi fakt, iż nie jest ono czasopismem, lecz tzw. wydawnictwem ciągłym. Powoduje to również utrudnienie w sprzedaży wobec zmiennej ceny poszczególnych zeszytów oraz niemożność wprowadzenia prenumeraty. W ciągu całego 1964 r. Towarzystwo czyniło usilne starania zmierzające do przemianowania *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej* na czasopismo. Dnia 26 stycznia 1965 r. Sekretariat Naukowy PAN podjął Uchwałę Nr 7/65 w sprawie przekształcenia *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej* z wydawnictwa ciągłego na kwartalnik (czasopismo). (Obecnie sprawa musi być jeszcze załatwiona przez Biuro Wydawnictw PAN, a następnie PWN).

b) Oddział we Wrocławiu wydał techniką fotooffsetową materiały na sympozjum na temat reologii.

c) Oddział w Gliwicach opublikował materiały konferencyjne (streszczenia referatów) w specjalnych zeszytach wydanych wspólnie z Zakładem Energetyki Jądrowej Politechniki Śląskiej, część referatów znalazła się w specjalnym wydawnictwie Wojskowej Akademii Technicznej.

d) Oddział w Warszawie wydał materiały zgłoszone na sympozjum na temat elastooptyki i jej zastosowań techniką powielaczową w języku polskim i angielskim (dla gości zagranicznych). Były to skróty zgłoszonych na Sympozjum referatów wraz z rysunkami i fotografiami.

2. Popularyzacja wiedzy w postaci organizowania kursó konferencji, kursów, wykładów popularyzujących oraz seminariów.

#### a) Kursy

Oddział w Gdańsku. W II-gim kwartale 1964 r. kontynuowano kurs «Matematyczna Teoria Sprężystości», prowadzony przez doc. dr P. WILDEGO.

W IV-tym kwartale Oddział przeprowadził kurs «Dwuwymiarowe zagadnienia skończonych odkształceń i przemieszczeń». Kurs prowadzili doc. dr P. WILDE i dr E. BIELEWICZ. Kurs ten kontynuowano również w I-szym kwartale 1965 r.

b) *Wykłady.*

Oddział Warszawski PTMETS wspólnie z IPPT zorganizował wykłady prelegentów zagranicznych, mianowicie dnia 22 i 24 września 1964 r. prof. ILUSZNA ze Związku Radzieckiego na temat teorii plastyczności, dnia 24 września 1964 r. prof. GIANGRECO na temat nośności granicznej oraz w dniach 22–25 września 1964 r. prof. L. SOBRERO na temat zastosowania funkcji hiperzespólonych w teorii sprężystości.

c) *Seminaria*

Oddział w Poznaniu. W okresie od 22 października do 17 grudnia 1964 r. zorganizował seminarium prowadzone przez prof. dr E. KARAŚKIEWICZA na temat «Zastosowanie rachunku tensorowego do teorii sprężystości». W ramach seminarium odbyło się 8 posiedzeń.

W I-szym kwartale 1965 r. Oddział Poznański zorganizował drugie seminarium. Na 4 kolejnych posiedzeniach wygłoszono następujące wykłady:

18.01.65 — prof. dr S. ZIEMBA — «Podstawy zagadnień nieliniowych»

22.02.65 — prof. dr S. ZIEMBA — «Podstawy zagadnień nieliniowych»

29.03.65 — prof. dr S. ZIEMBA — «Własności tworzyw konstrukcyjnych stosowanych w budowie maszyn».

18.03.65 — prof. dr E. KARAŚKIEWICZ — «Zastosowanie rachunku tensorowego do teorii sprężystości».

3. Wyniki zabiegów o zwiększenie liczby członków PTMETS ilustruje tablica 2 .

Tablica 2

Oddział	I kw. 1964 r.	II kw. 1964 r.	III kw. 1964 r.	IV kw. 1964 r.	I kw. 1965 r.	Przybyło (lub ubyło) w okresie sprawozd.	
						liczba	%
Gdańsk	41	41	42	42	39	-2	-4,8
Gliwice	45	45	45	45	55	+10	+22,2
Kraków	53	54	54	53	55	+2	+3,7
Łódź	25	25	25	25	25	0	0
Poznań	38	42	42	40	40	+2	+5,2
Szczecin	22	23	23	23	25	+3	+13,6
Warszawa	118	120	119	121	127	+9	+7,6
Wrocław	47	49	48	50	51	+4	+8,5
	389	399	398	399	417	+28	+7,2

4. Szerszy kontakt z przemysłem i jego problematyką

Kontakt ten polegał na zapraszaniu na sympozja i zebrania naukowe organizowane przez PTMETS inżynierów zatrudnionych w przemyśle. Zainteresowanie tematyką imprez Towarzystwa wśród przedstawicieli przemysłu jest b. żywe, o czym świadczy fakt, że na sympozjum na temat elastooptyki i jej zastosowań, zorganizowanym przez Oddział Warszawski PTMETS, stanowili oni większość uczestników.

### III. Różne

1. Statut

Zmiany statutowe opracowane w poprzedniej kadencji, a uchwalone przez ostatni, VI-ty Zjazd Delegatów PTMETS w dniu 23 maja 1964 r., zatwierdzone zostały przez Urząd Spraw Wewn. Prezydium Rady Narodowej w m. st. Warszawie w dniu 6 sierpnia 1964 r. Nr SW.III-3/50/64

## 2. Zebrania organizacyjne

Liczba zebrań organizacyjnych w okresie sprawozdawczym przedstawiała się następująco:

Zjazd Delegatów	1
Zebrania Zarządu Głównego	3
Zebrania Prezydium Zarządu Głównego	2
Zebrania Głównej Komisji Rewizyjnej	1
Walnych Zgromadzeń Oddziałów	8
Zebrań Oddziałowych Komisji Rewizyjnych	8
Zebrań Zarządu Oddziałów	
Gdańsk	5
Gliwice	6
Kraków	4
Łódź	6
Poznań	5
Szczecin	2
Warszawa	5
Wrocław	12
Innych zebrań organizacyjnych	13
Razem zebrań organizacyjnych	<u>81</u>

Liczba ta nie obejmuje zebrań jury konkursów, zebrań Komitetów organizacyjnych Sympozjów, Komitetu Redakcyjnego Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej itp.

3. Sprawozdanie finansowe omówił doc. dr W. SZCZEPŃSKI. W 1964 r. planowany budżet Towarzystwa przedstawiał się następująco:

Dochody		Wydatki	
Składki członkowskie	zł. 26.720.—	Administracja	zł. 137.300.—
Odpłatność za materiały konferencyjne	„ 17.000.—	Popularyzacja wiedzy	„ 89.100.—
Sprzedaż wydawnictwa	„ 60.000.—	Wydawnictwo	„ 275.000.—
Dotacja PAN	„ 350.000.—	Razem	<u>zł. 501.400.—</u>
Razem	<u>zł. 453.720.—</u>		

Wykonanie preliminarza dochodów i wydatków wykazuje w pewnych pozycjach znaczne odchylenie od przewidywań. Ze składek członkowskich zamiast przewidywanych 26.720 zł. wpłynęło 22.560 zł., a więc 84,5%. Sprzedaż wydawnictwa dała w roku 1964 tylko zł. 9.216,36, co stanowi 15% w porównaniu z preliminarzem. Należy jednak mieć na uwadze, że przy ograniczonym zasięgu sprzedaży i przy stosowaniu znacznej zniżki ceny dla członków Towarzystwa, nie można było liczyć na poważniejsze wpływy z tego tytułu.

Za materiały konferencyjne wpłynęło zł. 5.850.— tj. 34,4% sumy preliminowanej. Ponadto wpłynęło zł. 1.314,60 jako dochód (nieplanowany) z sympozjum zorganizowanego przez Oddział Gliwicki w Szczyrku.

Wykonanie planu wydatków przedstawia poniższe zestawienie

Wydatki w poszczególnych zadaniach	Plan	Wykonanie	% wykonania
Administracja	zł. 137.300.—	zł. 128.842,10	93,8
Popularyzacja wiedzy	„ 89.100.—	„ 56.416,71	63,3
Wydawnictwo	„ 275.000.—	„ 150.843,05	54,8
Razem:	<u>zł. 501.400.—</u>	<u>zł. 336.101,86</u>	<u>67,0%</u>

Z liczb zawartych w zestawieniach wynika, iż jedynie fundusze przeznaczone na wydatki administracyjne zostały wykorzystane niemal w pełni. Ze środków na popularyzację wiedzy i wydawnictwo łącznie zł. 364.100.—, pozostało niewykorzystanych zł. 154.000.—

Na osobną uwagę zasługuje wydawnictwo *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*. W 1964 r. wyszły, jak wiadomo, 3 zeszyty, zamiast planowanych 4, o łącznej objętości 26,25 arkuszy wydawniczych. Wydatkowano na ten cel zł. 150.843,05, z czego przypada zł. 64.370,90 na honoraria i prace zle-

cone oraz zł. 86.472,15 na koszty rzeczowe; stosunek taki wydaje się właściwy. Jeden arkusz wydawniczy kosztował zł. 5.747.—, gdy planowano na to zł. 6.875.—

Bilans Towarzystwa został przyjęty przez Centralną Księgowość PAN bez zastrzeżeń.

Przedstawiono również preliminarz budżetowy Towarzystwa na 1965 rok. Składa się on po stronie dochodów i wydatków z następujących pozycji:

<u>D o c h o d y</u>		<u>W y d a t k i</u>	
Składki członkowskie	zł. 22.000.—	Administracja	zł. 127.830.—
Odpłatność uczestnictwa w sympozjach	„ 8.500.—	Popularyzacja wiedzy	„ 148.800.—
Sprzedaż wydawnictwa	„ 15.000.—	Wydawnictwo	„ 180.000.—
Dotacja PAN	„ 355.000.—	Razem	<u>zł. 456.630.—</u>
Razem	<u>zł. 400.500.—</u>		

Z porównania powyższych liczb z liczbami zawartymi w preliminarzu z roku poprzedniego wynika, że w dochodach obniżono wysokość składek członkowskich i wpływów ze sprzedaży wydawnictw do poziomu bardziej realnego, a w rozchodach zredukowano wydatki administracyjne przy jednoczesnym zwiększeniu środków na popularyzację wiedzy, o czym mowa była wyżej.

Z kolei sprawozdanie Komisji Rewizyjnej odczytał z powodu nieobecności członków Komisji Rewizyjnej doc. J. SUŁOCKI. Komisja Rewizyjna dokonała analizy działalności Zarządu Głównego i postawiła wniosek o udzielenie ustępującemu Zarządowi absolutorium.

W dyskusji nad sprawozdaniami zabierali głos profesorowie: M. SĄSIĄDEK, J. MUTERMILCH i J. DIETRYCH oraz dr J. KORJAN.

Wniosek o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium przyjęto jednomyślnie.

#### 4. Wybory

Zgodnie z propozycją Komisji Matki przewodniczącym PTMTS do końca kadencji (tzn. na 1 rok) został wybrany prof. dr J. MUTERMILCH.

Do Zarządu Głównego wybrano profesorów: W. NOWACKIEGO, Z. BRZOSKĘ i docentów R. SOLECKIEGO i B. STANISZEWSKIEGO.

Wybrano dwóch Zastępców Członków Głównej Komisji Rewizyjnej w osobach dr Z. PEŁKI i dr K. GROSSMANA (Łódź).

Również zgodnie z propozycjami Komisji Matki wybrano Sąd Konkursowy Zarządu Głównego, w skład którego weszli:

prof. dr Z. BRZOSKA,	doc. dr Z. MARCINIĄK
prof. dr W. PROSNAK,	doc. dr B. STANISZEWSKI,
prof. dr M. ZAKRZEWSKI,	doc. dr W. SZCZEPIŃSKI.
prof. dr J. LEYKO,	

Generalne wytyczne działalności PTMTS omówił prof. dr Z. OLESIAK. W zasadzie nie różnią się one od zatwierdzonych na poprzednim Zjeździe Delegatów (patrz *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, nr 1, 1964).

Plan sympozjów naukowych w najbliższym okresie przedstawia się następująco:

- 1) Oddział w Krakowie «Dynamika maszyn» 15–17 września 1965,
- 2) Oddział w Poznaniu «Drgania liniowe i nieliniowe», październik 1965,
- 3) Oddział w Gdańsku «Filtracja» 19–20 listopada 1965,
- 4) Oddział w Gliwicach «Technika pomiarowa» luty 1966.

Inne zgłoszone sympozja:

- 1) Oddział we Wrocławiu «Reologia», IV kwartał 1966,
- 2) Oddział we Wrocławiu «Pomiary i automatyka», IV kwartał 1967.

Po dyskusji, w której zabierali głos profesorowie: O. POPOWICZ (dwukrotnie), I. KISIEL (dwukrotnie), W. NOWACKI (dwukrotnie), J. MUTERMILCH, M. SĄSIĄDEK, J. DIETRYCH, E. KARAŚKIEWICZ, Z. OLESIAK (dwukrotnie), doc. dr W. BOGUSZ i dr Z. PEŁKA (dwukrotnie) postanowiono uchwalić wytyczne zgodnie z propozycją Zarządu Głównego.

Prof. dr W. NOWACKI przypomniał, że za trzy lata przypada dziesięciolecie istnienia PTMTS i zaproponował zorganizowanie z tej okazji Walnego Zjazdu Delegatów połączonego z sesją nau-

kową. Prof. W. Nowacki wyraził również pogląd, że w Polsce Komitet Kongresów Międzynarodowych IUTAM powinien być reprezentowany przez PTMTS.

W kolejnym punkcie porządku dziennego, sprawach bieżących, na wniosek prof. dr J. MUTERMILCHA postanowiono na następnym Zjeździe Delegatów podjąć uchwałę o nadaniu Członka Honorowego PTMTS prof. dr W. BURZYŃSKIEMU. Wniosek uzasadniający przygotowuje Oddział Gliwicki PTMTS.

Doc. dr R. SOLECKI zaproponował, aby Towarzystwo zajęło się uczczeniem działalności wybitnych mechaników krakowskich: profesorów ZAREMBY, GOSIEWSKIEGO i innych. W związku z obu powyższymi propozycjami powołano Komisję, która miałaby się zająć realizacją wniosków. Skład Komisji jest następujący: profesorowie J. MUTERMILCH, M. JANUSZ, O. POPOWICZ, M. SĄSIADK. Propozycja ta wywołała dyskusję, w której zabierali głos: prof. dr W. NOWACKI, doc. dr W. BOGUSZ, prof. dr J. LITWINISZYN, prof. dr J. DIETRYCH popierając inicjatywę doc. dr R. SOLECKIEGO. Doc. dr W. BOGUSZ zadeklarował, że Oddział Krakowski chętnie zajmie się tą sprawą.

Doc. dr Z. OSIŃSKI przypomniał, że zmarły niedawno doc. H. BUZUN zajmował się historią mechaniki i pozostawił sporo zebranych materiałów.

Na zakończenie Zjazdu Delegatów na wniosek prof. dr Z. OLESIAKA Zjazd podziękował za wydajną pracę Sekretariatowi Zarządu Głównego, a prof. dr J. MUTERMILCH podziękował prof. dr R. KAZIMIERCZAKOWI za sprawne kierowanie obradami.

#### ZEBRANIE KONSTITUCYJNE ZARZĄDU GŁÓWNEGO

Dnia 8 maja 1965 po Zjeździe Delegatów PTMTS odbyło się zebranie konstytucyjne nowego Zarządu Głównego PTMTS.

W obecnej kadencji Zarząd Główny będzie przedstawiał się, jak następuje:  
przewodniczący Z. G.: prof. dr J. MUTERMILCH, zastępcy przewodniczącego: prof. dr W. NOWACKI i prof. dr Z. BRZOSKA, sekretarz generalny: prof. dr Z. OLESIAK, skarbnik: doc. dr W. SZCZEPIŃSKI, zastępca sekretarza generalnego: doc. dr R. SOLECKI, zastępca skarbnika: doc. dr B. STANISZEWSKI, członek Zarządu Głównego: prof. dr W. OLSZAK, zastępcy członków Zarządu Głównego: prof. J. SIELSKI i dr J. KORJAN

#### NOWE ZARZĄDY ODDZIAŁÓW PTMTS

W wyniku Walnych Zgromadzeń Oddziałów dokonano wyboru nowych Zarządów Oddziałów, które ukonstytuowały się następująco:

##### Gdańsk

Przewodniczący: prof. dr R. KAZIMIERCZAK, zast. przewodniczącego: doc. dr J. WIĘCKOWSKI, sekretarz: doc. dr P. WILDE, członek Zarządu: dr inż. M. WĘGRZYN, Komisja Rewizyjna: dr inż. E. BIELEWICZ, dr inż. E. DEMBICKI.

##### Gliwice

Przewodniczący: prof. dr O. POPOWICZ, zast. przewodniczącego: prof. dr J. SZARGUT, sekretarz: dr inż. T. ŚWIERZAWSKI, skarbnik: dr inż. A. JAKUBOWICZ, członkowie Zarządu: doc. dr J. KOŁAKOWSKI, doc. dr B. SKALMIERSKI, zast. członka Zarządu: doc. dr J. NIEWIADOMSKI, dr inż. SZ. BORKOWSKI, Komisja Rewizyjna: prof. K. KUTARBA (przewodniczący), doc. dr T. OPOLSKI, mgr. inż. Z. WERNICKI.

##### Kraków

Przewodniczący: doc. dr W. BOGUSZ, zast. przewodniczącego: prof. dr R. CIESIELSKI, sekretarz: dr Z. ENGEL, skarbnik: doc. dr S. KORMAN, członkowie: prof. dr M. ŻYCZKOWSKI, doc. dr K. SZPUNAR, doc. dr J. MURZEWSKI, dr Z. BYCHAWSKI, Komisja Rewizyjna: prof. S. CHRZANOWSKI (przewodniczący), prof. dr S. GOŁĄB (zast. przewodniczącego), dr H. FILCEK (członek), dr M. WARSZYŃSKI (zast. członka).

##### Łódź

Przewodniczący: doc. dr Z. PARSZEWSKI, sekretarz: dr inż. K. GROSSMAN, skarbnik: dr inż. J. LIPIŃSKI, Komisja Rewizyjna: prof. dr J. SZMELTER, doc. dr J. ZAKRZEWSKI, dr M. SUCHAR.



## Poznań

Przewodniczący: prof. dr E. KARAŚKIEWICZ, sekretarz: mgr inż. S. JONIAK, skarbnik mgr inż. A. KĘBŁOWSKI, członkowie: doc. dr W. KRĘGLEWSKI, dr W. SZYGUŁA, mgr inż. S. STANISŁAWSKI, Komisja Rewizyjna: dr F. ZEIDLER (przewodniczący), mgr inż. Z. SOB CZYŃSKA, mgr inż. B. CE-GIELSKI (członkowie).

## Szczecin

Przewodniczący: dr inż. J. KORJAN, zast. przewodniczącego: doc. dr inż. L. MARTINI, sekre-tarz: mgr inż. H. PRIEBE, skarbnik: mgr inż. J. DOROCZYŃSKI, Komisja Rewizyjna: mgr inż. Z. PACZKOWSKI, mgr inż. H. OSTAPIUK, mgr inż. Z. ZBOROWSKI.

## Warszawa

Przewodniczący: prof. dr Z. KĄCZKOWSKI, zast. przewodniczącego: prof. dr J. LIPKA, sekretarz: doc. dr Z. OSIŃSKI, skarbnik: doc. dr J. SKOWROŃSKI, zastępca sekretarza: doc. dr Z. MRÓZ, zastępca skarbnika: dr P. JASTRZĘBSKI, członek Zarządu: dr R. DOROSKIEWICZ, zastępca Członka Zarządu: dr K. BORSUK, Komisja Rewizyjna: prof. dr B. STEFANOWSKI (przewodniczący), prof. F. JANIK, prof. dr E. OLSZEWSKI (członkowie), prof. B. MAYZEL, dr J. MUSZYŃSKI (zastępcy człon-ków).

## Wrocław

Przewodniczący: doc. mgr inż. R. MROMLIŃSKI, zastępca przewodniczącego: prof. dr M. SĄSIA-DEK, sekretarz: dr inż. E. GAWRYCH-ŻUKOWSKI, skarbnik: doc. dr A. NEGRUSZ, członkowie: dr inż. S. FULIŃSKI, dr inż. T. KOLENDOWICZ, zastępca członka: dr inż. R. WYSZYŃSKI, Komisja Rewizyjna: doc. dr A. BORCZ, dr inż. Z. KOWAL, dr inż. B. BROŚ.

POSIEDZENIE RADY REDAKCYJNEJ  
„MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ”

Na posiedzeniu Rady Redakcyjnej, które odbyło się dnia 8 maja 1965 r., dokonano wyboru Przewodniczącego Rady Redakcyjnej. Został nim prof. dr Jerzy LITWINISZYN z Oddziału PTMTS w Krakowie, dotychczasowy członek Rady Redakcyjnej. Ponadto do składu Rady Redakcyjnej dokooptowano Przewodniczącego Zarządu Głównego PTMTS prof. dr J. MUTERMILCHA.

Rada Redakcyjna wysłuchała sprawozdania z dotychczasowej działalności Komitetu Redakcyjnego i zamierzeń na najbliższy okres. Sprawozdanie złożył redaktor naczelny prof. dr Z. OLESIAK.

Postanowiono, że w związku z trudnościami, na jakie napotyka wymiana wydawnictwa w War-szawie, wymianą z ośrodkami zagranicznymi zajmie się Oddział Krakowski wspólnie z Instytu-tem Górnictwa.

Po złożeniu sprawozdań wywiązała się obszerna dyskusja, w której członkowie Rady Redakcyjnej wypowiedzieli się w sprawach zamierzeń wydawnictwa, charakteru czasopisma, trudności z przejściem na czasopismo, wymiany zagranicznej, możliwości wprowadzenia dyskusji naukowej na łamach wydawnictwa i wprowadzenia międzynarodowego układu jednostek miar.

KOMUNIKAT

V Międzynarodowe Sympozjum Gazów Rozrzedzonych odbędzie się 4-8 lipca 1966 w Oxfordzie. Plan sympozjów międzynarodowych poświęconych teorii powłok  
(International Association for Shell Structures)

1. Sympozjum poświęcone powłokom w praktyce inżynierskiej (Symposium on Shell Structures in Engineering Practice Tendencies for Simplification of Design and Field-Work) Budapeszt, 31.VIII-3.IX.1965.
2. Sympozjum dotyczące tarczownic (Folded plates) w Indii, Roorkee, luty 1966.
3. Sympozjum poświęcone zagadnieniom zależności między projektowaniem i budową powłok o dużych rozpiętościach w budownictwie przemysłowym i ogólnym (Symposium on problems of interdependence of design and construction of large-space shells for industrial and civic buildings), Leningrad, 6-9.IX.1966.
4. Sympozjum dotyczące wieżowych konstrukcji stalowych i z betonu sprężonego (Symposium on Tower-shaped Steel and Reinforced Concrete Structures), Bratysława (CSRS), 6-9.VI.1966.

## SPIS TREŚCI

### ZESZYT 1/1963

- Z. OSIŃSKI, Przegląd nieliniowych równań różniczkowych drgań układów autonomicznych o jednym stopniu swobody
- A. SAWCZUK, W. OLSZAK, Zagadnienia powłok niesprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Badanie własności mechanicznych niektórych tworzyw sztucznych
- Z. DŻYGADŁO, M. SOKOŁOWSKI, S. ZAHORSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Konferencja Naukowa Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Krynicy. Przegląd referatów
- W. SZCZEPIŃSKI, Sympozjum na temat elastooptyki i jej zastosowań, Warszawa 1962

### ZESZYT 2/1963

- P. PERZYNA, Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności
- Z. NOWAK, M. ŻYCZKOWSKI, Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych
- E. STERNBERG, Naprężenia cieplne w ciałach lepkosprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Zależność « naprężenie-odkształcenie » w przypadku prostego rozciągania tworzyw o łańcuchowej budowie cząsteczek
- H. DZIATLIK, Model elektryczny tensora naprężeń  
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

### ZESZYT 1/1964

- S. KALIŃSKI, Stateczność ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na sprężystym podłożu
- Z. OLESIAK, Przegląd polskich prac dotyczących zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi w teorii sprężystości
- Z. WESOŁOWSKI, Związki fizyczne dla materiału sprężystego z więzami geometryczno-termicznymi
- W. SZCZEPIŃSKI, Wyznaczanie naprężeń na podstawie pomiarów tylko jednej składowej odkształcenia
- R. S. DOROSZKIEWICZ, A. LITEWKA, Doraźne badania własności mechanicznych i elastooptycznych materiałów używanych w elastooptyce  
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

### ZESZYT 2/1964

- R. S. DOROSZKIEWICZ, Fotosprężyste badania przekroju poprzecznego zapory filarowej
- R. S. DOROSZKIEWICZ, Z badań fotosprężystych stanu naprężenia wywołanego ciężarem własnym, z uwzględnieniem wpływu podłoża
- R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, Z badań fotosprężystych wirnika generatora dużej mocy
- A. CZUBAK, Dobór parametrów ruchu przenośników wibracyjnych
- W. PIECHOCKI, Analiza skończonych ugięć słabo wypukłej membrany kulistej obciążonej lokalnie
- Z. THRUN, Metoda przybliżonego obliczania problemów początkowo-brzegowych w zastosowaniu do niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa cieplnego
- K. WILMAŃSKI, Obciążenia dynamiczne belek. Belka Timoshenki  
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

### ZESZYT 3/1964

- ARTUR KACNER — Wspomnienie pośmiertne
- W. WIERZBICKI, Katastrofa budowlana jako przypadek unormowany
- M. JANUSZ, Zasada Bettiego jako podstawa warunków modelowych
- S. ZIEMBA, Rola mechaniki teoretycznej i stosowanej w rozwoju postępu technicznego
- J. MARYNIAK, Oscylacje rakiety lecącej po torze falistym w atmosferze Ziemi  
Biuletyn informacyjny PTMTS:  
Sprawozdanie z Kongresu Mechaniki w Monachium w 1964r.  
Sprawozdanie z konferencji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Zakopanem  
Sympozja naukowe IUTAM

**SPIS TREŚCI**

ZESZYT 1/1965

- S. KALISKI, O pewnym uogólnieniu metody ortogonalizacyjnej
- W. BOGUSZ, J. SKOWROŃSKI, Synteza kinetyczna ogólnego układu mechanicznego
- Z. THRUN, O pewnym sposobie przybliżonego obliczania nieliniowych zagadnień przewodnictwa cieplnego
- W. GUTKOWSKI, Geometria różnicowa przestrzennej siatki punktów
- W. SZCZEPIŃSKI, Wpływ efektów dynamicznych na przebieg procesów ciągnięcia metali
- J. ORKISZ, Problem odciążenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych

Następny zeszyt *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej* zawiera prace

- W. NOWACKI, Dynamiczne zagadnienia termosprężystości
- W. SZCZEPIŃSKI, Przegląd prac dotyczących nośności granicznej
- W. GUTKOWSKI, Powierzchniowe konstrukcje prętowe
- P. SUKIENNIK, O naprężeniach w sprężystym podłożu pod ślizgającą się sztywną kulą
- S. PYTKO, O możliwościach wykorzystania metody elastoptycznej dla badań wyężenia materiału i rozkładu naprężeń w zagadnieniach kontaktowych

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA* jest organem Polskiego Towarzystwa *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej* i ukazuje się na razie jako wydawnictwo ciągle mniej więcej w odstępach kwartalnych. Członkowie PTMTS otrzymują poszczególne zeszyty wydawnictwa ze zniżką 50% w Oddziałach Towarzystwa.

*MECHANIKĘ TEORETYCZNA I STOSOWANA* można nabyć w księgarniach naukowych Domu Książki oraz w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polskiej Akademii Nauk (Pałac Kultury i Nauki)

---