

7. II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

TOM 2 • ZESZYT 2



Pw^a

WARSZAWA 1964

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

R. S. DOROSZKIEWICZ, Fotosprężyste badania przekroju poprzecznego zapory filarowej Исследования методом фотоупругости поперечного сечения контрфорсной плотины Photo-elastic investigation of the cross-section of buttress dam	3
R. S. DOROSZKIEWICZ, Z badań fotosprężystych stanu naprężenia wywołanego ciężarem własnym, z uwzględnieniem wpływu podłoża Исследование методом фотоупругости напряженного состояния, вызванного собственным весом, с учетом влияния основания Photo-elastic investigation of the state of stress produced by own weight in a triangle resting on elastic fundation	15
R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, Z badań fotosprężystych wirnika generatora dużej mocy Исследование методом фотоупругости ротора генератора большой мощности On the photo-elastic investigation of a generator motor	27
A. CZUWAK, Dobór parametrów ruchu przenośników wibracyjnych Подбор параметров вибрационных конвейеров Selection of the motion parameters for vibratory conveyors	35
W. PIĘCZOSKI, Analiza skończonych ugięć słabo wypukłej membrany kulistej obciążonej lokalnie Анализ конечных прогибов пологой локально загруженной сферической мембраны Finite deflections of shallow spherical membrane locally loaded	45
Z. THRUN, Metoda przybliżonego obliczania problemów początkowo-brzegowych w zastosowaniu do niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa cieplnego Метод приближенного решения начально-краевых задач в применении к нестационарно-краевым задачам теплопроводности Method of approximate solution of initial and boundary problems of non-stationary heat conduction	59
K. WILMAŃSKI, Obciążenia dynamiczne belek. Belka Timoshenki Динамическая нагрузка балок. Балка Тимошенко Dynamical loadings of beams. Timoshenko beam	83
Biuletyn informacyjny PTMTS	97

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 2 • Z E S Z Y T 2

W A R S Z A W A 1 9 6 4

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D I A R E D A K C Y J N A
WITOLD WIERZBICKI—PRZEWODNICZĄCY
EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ) · JERZY LIT-
WINISZYN (KRAKÓW) · ADAM MITZEL (WROCLAW)
WITOLD NOWACKI (WARSZAWA) · STANISŁAW
OCHĘDUSZKO (GLIWICE) · WACŁAW OLSZAK
(WARSZAWA) · MARIAN PIĄTEK (GDAŃSK)
JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y
A R T U R K A C N E R — R E D A K T O R
JÓZEF JANICZEK · ZBIGNIEW OLESIAK
M A R E K S O K O Ł O W S K I

REDAKCJA

W a r s z a w a, Świątokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 213

Nakład 900 egz. Arkuszy wydawn. 7,75. Arkuszy drukarskich 6,5. Papier druk. sat. III kl., 80 g. Oddano do składania 14.V-64 r., druk ukończono w grudniu 1964 r. Cena zł 24.—

Zam. 788/64 Z-90 Druk. im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

FOTOSPRĘŻYSTE BADANIA PRZEKROJU POPRZECZNEGO
ZAPORY FILAROWEJ

ROMAN STEFAN DOROSZKIEWICZ (WARSZAWA)

1. Uwagi wstępne

Przy projektowaniu konstrukcji budowli wodnych decydujące znaczenie dla wyboru najbardziej ekonomicznej konstrukcji i najwłaściwszego kształtu ma prawidłowa ocena stanu jej naprężenia. Jednakże do chwili obecnej nie znamy jeszcze takich metod obliczenia naprężeń, które by umożliwiały dostatecznie dokładne i jednocześnie szybkie wyznaczenie ich w konstrukcjach o bardziej skomplikowanych kształtach.

Istotną pomocą przy rozwiązywaniu tego rodzaju zagadnień są doświadczalne, w szczególności modelowe metody analizy naprężeń [1]. Zasadniczo stosuje się dwa rodzaje modeli, które odtwarzają kształt i obciążenie badanej konstrukcji:

1) modele wykonane z materiału o własnościach mechanicznych zbliżonych do materiału wznoszonej konstrukcji; badając te modele doprowadza się je do zniszczenia; ze stosunku obciążenia niszczącego do obciążenia rzeczywistego, które uwzględniono w obliczeniach danej konstrukcji, ustala się jej współczynnik bezpieczeństwa;

2) modele sprężyste, wykonane w niewielkiej skali z materiałów o innych własnościach niż konstrukcja i obciążone w granicach ich odkształceń sprężystych; w tym przypadku współczynnik bezpieczeństwa oblicza się jako stosunek naprężenia niszczącego materiał konstrukcji rzeczywistej do największego naprężenia wyznaczonego dla niej na podstawie badania modelu («miejscowy współczynnik bezpieczeństwa»).

Pierwszy typ modeli stosuje się w celu wyznaczenia wytrzymałości całej konstrukcji. Ten typ daje bardziej prawidłową wartość rzeczywistego współczynnika bezpieczeństwa pod warunkiem, że:

- a) modele mają dostatecznie duże wymiary;
- b) ich materiał jest podobny do materiału obiektu rzeczywistego pod względem jego własności sprężysto-plastycznych i wytrzymałościowych;
- c) przy badaniu takich modeli aż do ich zniszczenia jest możliwe równoczesne odtworzenie obciążeń, podobnych do działających na konstrukcję rzeczywistą. Spełnienie tych warunków jest jednak przeważnie bardzo trudne do zrealizowania.

Modele drugiego typu (sprężyste) są prostsze w wykonaniu i przez rozpatrzenie kilku wariantów kształtu pozwalają projektować konstrukcje najekonomiczniejsze. Jeśli otrzymane naprężenia nie przekraczają wartości dopuszczalnych, to wytrzymałość konstrukcji jest zapewniona. Można przy tym przyjąć niższą wartość współczynnika bezpieczeństwa, gdyż jest dopuszczalne miejscowe przekroczenie granicy sprężystości betonu.

Jeśli założymy, że praca konstrukcji rzeczywistej odbywa się bez przekroczenia granicy liniowej sprężystości, to upraszczają się znacznie prawa podobieństwa modelowego, umożliwiające przejście od modeli do elementów rzeczywistych. W tym przypadku naprężenia można wyznaczać niezależnie dla poszczególnych elementarnych schematów obciążenia (np. ciężar własny i hydrostatyczne parcie wody), co nieraz upraszcza technikę laboratoryjną przeprowadzenia badań¹.

Tego typu modele stosowane są, między innymi, przy badaniach prowadzonych metodami fotosprężystości.

W ostatnich latach fotosprężystość jest stosowana do badania budowli wodnych w wielu krajach i w bardzo szerokim zakresie. Takie badania pozwalają:

1) wyrobić sobie pojęcie o rozkładzie i wartościach naprężeń powstających w budowlach wodnych pod działaniem zasadniczych obciążeń, występujących w rzeczywistych warunkach ich pracy;

2) ustalić najbardziej celowy kształt i wymiary projektowanych konstrukcji (np. przez stopniową obróbkę tego samego modelu); wyznaczyć słabe miejsca (obszary największych spiętrzeń naprężeń) niebezpieczne dla wytrzymałości konstrukcji; ustalić środki zaradcze dla usunięcia zaobserwowanych w konstrukcji wad;

3) wyjaśnić ekonomiczną celowość rozpatrzonych wariantów konstrukcji i wybrać wariant najwłaściwszy; wykryć istnienie zbytecznych zapasów wytrzymałości w jej elementach lub poszczególnych obszarach; określić współczynnik bezpieczeństwa konstrukcji w różnych warunkach jej pracy;

4) ocenić stan naprężenia podłoża budowli i zachowanie się jego pod obciążeniem; wyjaśnić wpływ podatności gruntów podłoża (lub wartości ich współczynników sprężystości E) i niejednorodności ich własności mechanicznych na stan naprężenia konstrukcji;

5) ustalić schemat obliczeniowy i sprawdzić słuszność założeń, przyjmowanych w stosowanych metodach obliczenia konstrukcji;

6) określić stan naprężenia konstrukcji o stosunkowo skomplikowanym kształcie i schemacie obciążenia (dzięki możliwości wykonania modelu bardzo małych wymiarów i obciążenia siłami o nieznaczących wartościach);

7) badać również trójwymiarowe (przestrzenne) stany naprężenia.

Dla oszczędności takie badania stosujemy zwykle dla wyjaśnienia jedynie niektórych z wymienionych wyżej zagadnień, mianowicie tych, które dla danego konkretnego przypadku technicznego są decydujące.

¹ Jednakże w przypadkach, gdy wymagane są wyniki w postaci krzywych charakteryzujących stan naprężenia wewnątrz modelu, to superpozycja obliczeniowa wyników uzyskanych dla dwu i więcej schematów obciążenia staje się ogromnie pracochłonna [4,5].

2. Fotosprężyste badania rozkładu naprężeń w przekroju poprzecznym zapory filarowej

2.1. Cel, zakres i przedmiot badań. Głównym celem omawianego etapu badań zapory filarowej była weryfikacja doświadczalna ustalonych przez projektantów przekrojów poprzecznych sekcji zapory: nieprzelewowej oraz przelewowej. Badania objęły:

a) określenie wartości naprężeń na brzegach odwodnym i odpowietrznym zapory jak również wartości spiętrzeń naprężeń w punktach załamania ścian zapory;

b) sprawdzenie czy w korpusie zapory nie występują naprężenia rozciągające (pod obciążeniem, składającym się z parcia wody i ciężaru własnego naprężenia te w zaporze nie powinny wystąpić);

c) wyznaczenie trajektorii naprężeń głównych oraz trajektorii maksymalnych naprężeń stycznych;

d) określenie punktów słabych, niebezpiecznych dla wytrzymałości zapory oraz obecności ewentualnych zbędnych zapasów wytrzymałości.

W celu uzyskania wyników odpowiadających bardziej trójwymiarowemu stanowi naprężenia występującemu w obiekcie, zamiast traktowania go jako zadanie płaskie, badania tego przekroju przeprowadzono na modelu «półprzestrzennym»². Umożliwiło to prawidłowsze wyznaczenie naprężeń dla interesujących nas szczególnie obszarów płasko-równoległych sekcji zapory. Na podstawie badań tego przekroju określono wartości maksymalnych naprężeń na brzegu odwodnym i odpowietrznym.

2.2. Schematy obciążeń. Rozpatrywany przekrój zbadano dla dwu schematów obciążeń: zbiornik pusty – obciążenie tylko ciężarem własnym oraz zbiornik pełny – obciążenie ciężarem własnym i parciem wody.

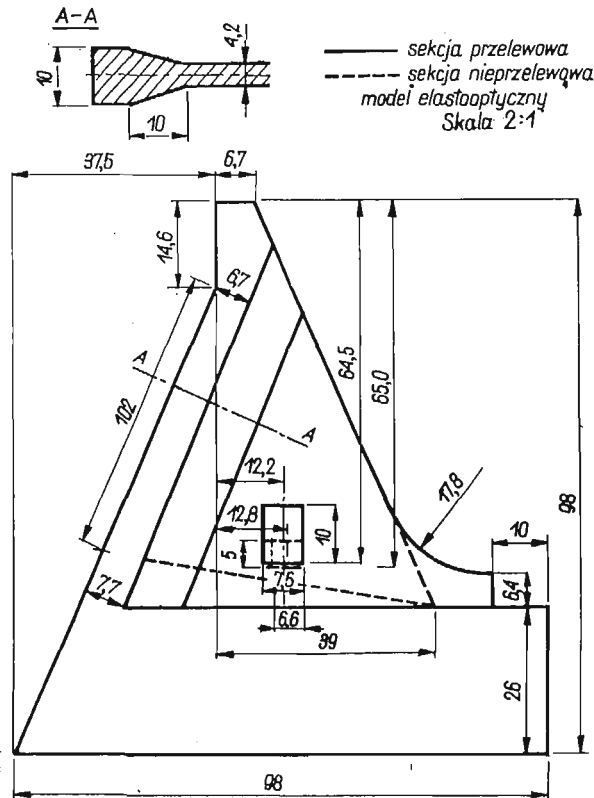
Przyjęto, że korpus zapory jest jednorodny o stałym ciężarze objętościowym $\gamma = 2,4 \text{ t/m}^3$.

2.3. Opis przeprowadzonych badań. W omawianym etapie przeprowadzono trzy serie badań modeli dla kształtu zaproponowanego przez projektantów. W ramach serii pierwszej zbadano model przekroju poprzecznego najwyższej sekcji nieprzelewowej zapory. Seria druga objęła badania sekcji przelewowej. Natomiast badania serii trzeciej (rys. 5) przeprowadzono w celu sprawdzenia prawidłowości działania hydraulicznego urządzenia obciążającego (rys. 10) zastosowanego w serii pierwszej dla realizacji zastępczego parcia hydrostatycznego. W badaniach serii trzeciej korzystano z mechanicznego układu obciążającego (rys. 11).

² Mianem modeli półprzestrzennych określono tu modele płaskie o grubości zmieniającej się podobnie jak odpowiednie obszary konstrukcji modelowanej. Modele te wykonujemy przyjmując mniejszą skalę dla grubości niż dla wymiarów w płaszczyźnie modelu. Dzięki temu otrzymujemy zwiększenie obszaru modeli, który można traktować jako obszar płaski. Można przyjąć, że obszary modeli półprzestrzennych, posiadające stałą grubość i dostatecznie oddalone od stref zmiany grubości, znajdują się w płaskim stanie naprężenia.

Kształty oraz wymiary zbadanych modeli («półprzeźrzennych») pokazano na rys. 1. Modele te wykonano z materiału polimeryzowanego we własnym zakresie w Pracowni Analizy Naprężeń IPPT PAN.

Badania serii pierwszej miały następujący przebieg. Stan naprężenia powstający pod działaniem ciężaru własnego modelowano metodą wirowania z zastosowaniem «zamrażania naprężeń». Izochromy całkowite dla tego przypadku obciążenia przedstawia rys. 2. Ten obraz odpowiada czułości optycznej materiału dla temperatury 100°C.



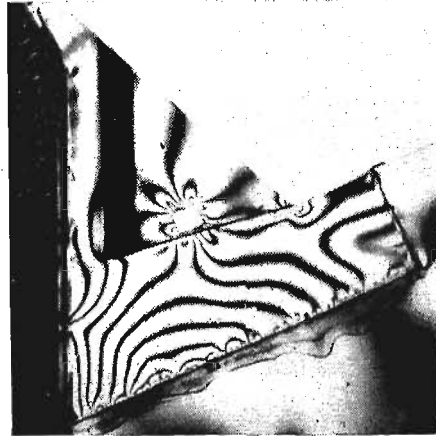
Rys. 1. Kształty oraz wymiary modeli sekcji nieprzelewowej i przelewowej zapory

Następnie do modelu o «zamrożonych naprężeniach» wywołanych działaniem zastępczego ciężaru własnego przyłożono obciążenie trójkątne. W tym przypadku czułość optyczna tego samego modelu jest wielokrotnie niższa, gdyż obciążenie trójkątne przykładamy nie w temperaturze «zamrażania» lecz w pokojowej. W celu więc uzyskania efektu optycznego od zastępczego parcia hydrostatycznego o wartości współmiernej z efektem «zamrożonym» należało obciążenie trójkątne odpowiednio zwiększyć. W ten sposób powstał obraz izochrom dla przypadku jednoczesnego obciążenia ciężarem własnym i parciem hydrostatycznym (rys. 3).

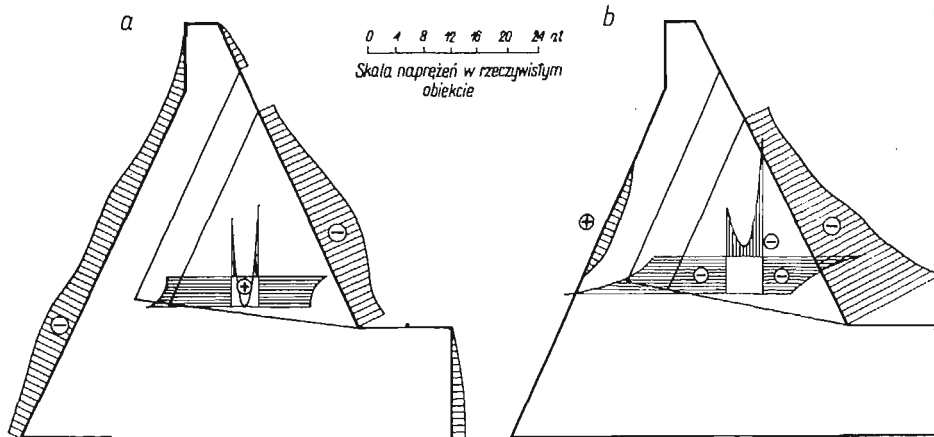
Na podstawie izochrom dla obu schematów obciążenia sporządzono wykresy naprężeń brzegowych (rys. 4). Następnie przeprowadzono badania sprawdzające (serii trzeciej): a) zbadano model obciążony za pomocą układu mechanicznego wywołującego zastępcze parcie hydrostatyczne; b) sporządzono dla tego przy-



Rys. 2. Izochromy całkowite sekcji nieprzelewowej obciążonej ciężarem własnym



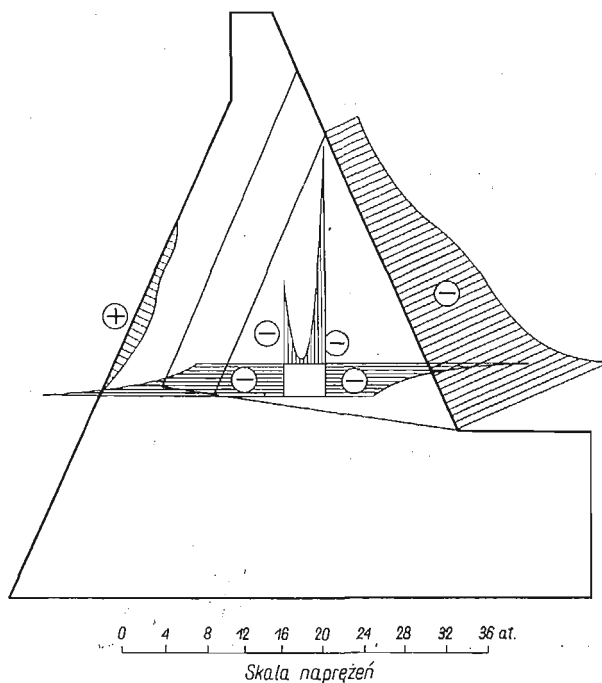
Rys. 3. Izochromy połówkowe sekcji nieprzelewowej od jednoczesnego obciążenia ciężarem własnym i parciem hydrostatycznym



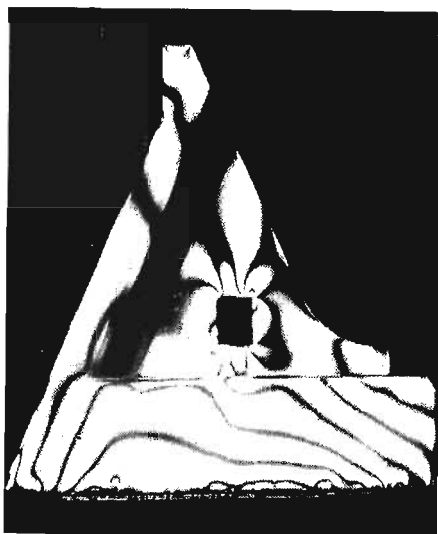
Rys. 4. Wykresy naprężeń brzegów sekcji nieprzelewowej (pierwsza seria badań): a) obciążenie ciężarem własnym; b) jednoczesne obciążenie ciężarem własnym i parciem hydrostatycznym

padku obciążenia wykres naprężeń brzegowych; c) wyznaczono wykres naprężeń brzegowych dla przypadku jednoczesnego działania ciężaru własnego i parcia hydrostatycznego na zasadzie superpozycji (rys. 5).

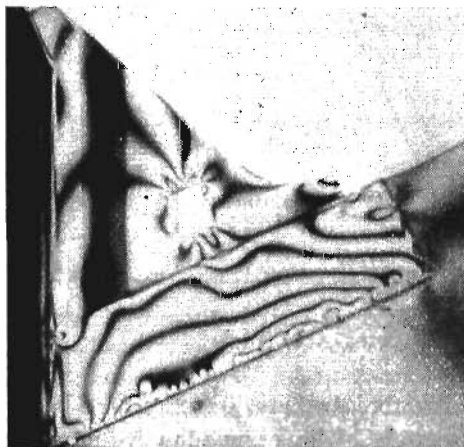
Badanie przekroju sekcji przelewowej zapory (seria druga) przeprowadzono na modelu «półprzestrzennym» w sposób analogiczny do badania przekroju



Rys. 5. Wykres naprężeń brzegowych sekcji nieprzelewowej obciążonej ciężarem własnym i parciem hydrostatycznym, sporządzony na podstawie: a) badań przeprowadzonych z zastosowaniem hydraulicznego urządzenia obciążającego według trójkąta (pierwsza seria badań) — linia przerywana, b) badań sprawdzających (trzecia seria badań) — z użyciem urządzenia mechanicznego — linia ciągła



Rys. 6. Izochromy całkowite sekcji przelewowej obciążonej ciężarem własnym

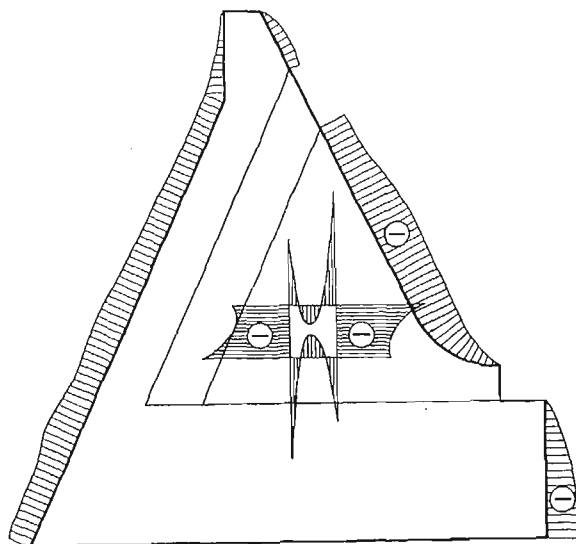


Rys. 7. Izochromy półowkowe sekcji przelewowej od jednoczesnego obciążenia ciężarem własnym i parciem hydrostatycznym

sekcji nieprzelewowej (seria pierwsza). Zdjęcia izochrom i wykres naprężeń brzegowych z tych badań pokazano na rys. 6—8.

2.4. Aparatura specjalna. Podczas omawianych badań zastosowano kilka przyrządów zaprojektowanych i wykonanych specjalnie do tego celu. Niektóre z nich opisano niżej w celu umożliwienia dokładniejszego zaznajomienia się z techniką laboratoryjną badań.

Dla zmodelowania stanu naprężenia powstającego pod działaniem ciężaru własnego korzystać z wirówki wmontowanej wewnątrz komory do wygrzewania plastyków.



0 4 8 12 16 20 24 28 32 at.

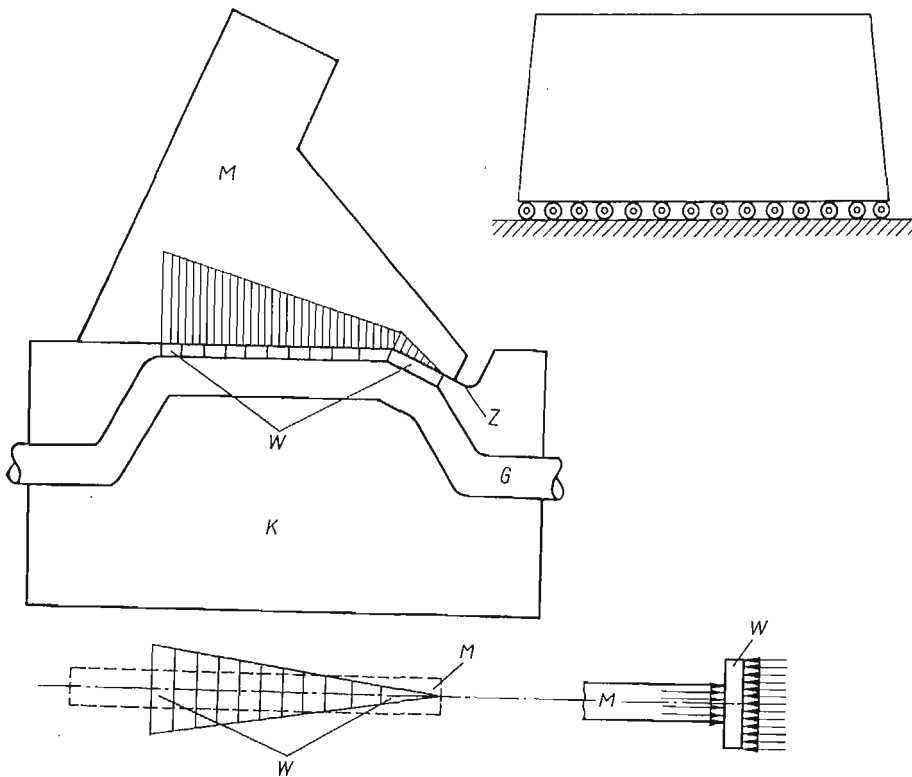
Skala naprężeń w rzeczywistym obiekcie

Rys. 8. Wykres naprężeń brzegowych sekcji przelewowej (druga seria badań) obciążonej ciężarem własnym

Do realizacji zastępczego parcia hydrostatycznego zastosowano nowe, hydrauliczne urządzenie obciążające. Ze względu na zastosowaną technikę badania i wymagane dość znaczne wartości trójkątnego parcia bocznego nie można było oprzeć się na żadnym ze sposobów obciążenia opisanych w literaturze. W związku z tym skonstruowano specjalne hydrauliczne urządzenie obciążające (rys. 9). Urządzenie to umożliwia realizację techniczną liniowo zmiennego obciążenia ciągłego imitującego parcie hydrostatyczne. Wielkość obciążenia jest regulowana w ten sposób, aby można było dobrać «parcie hydrostatyczne» o wartości współmiernej do obciążenia masowego powstającego podczas wirowania z zachowaniem warunków podobieństwa modelowego.

Przyjęto, że maksymalne ciśnienie wywierane na model w miejscu odpowiadającym największej głębokości wody górnej będzie regulowane w zakresie do 200 kG/cm².

Zaprojektowane urządzenie do wywołania parcia hydrostatycznego jest urządzeniem prototypowym o oryginalnym rozwiązaniu konstrukcyjnym, jakiego autor nie spotkał w znanej sobie literaturze z zakresu fotosprężystości. Jest to urządzenie hydrauliczne pośredniego działania, którego praca polega na tym, że ciśnienie hydrauliczne przez gumową membranę G działa na wkładkę W składającą się z szeregu oddzielnych elementów stalowych, które z kolei działają na brzeg modelu M za pośrednictwem wyrównującej podkładki gumowej.



Rys. 9. Widok ogólny hydraulicznego urządzenia obciążającego do realizacji zastępczego parcia hydrostatycznego

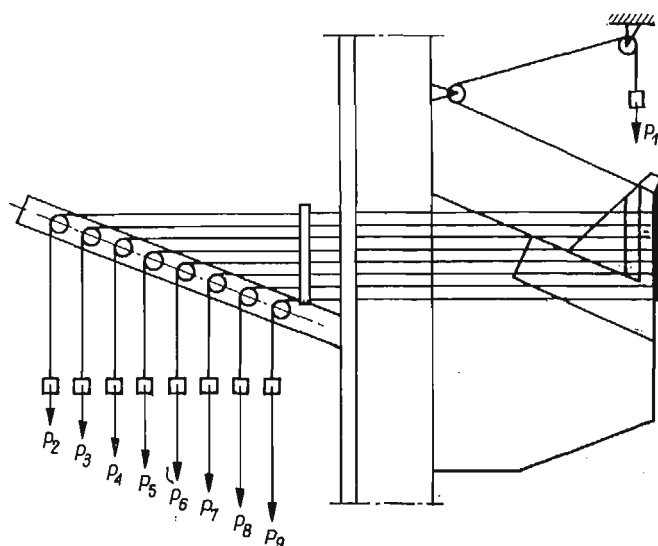
Ogólny zarys kształtu wkładki W jest wykonany wg trójkąta i w ten sposób uzyskać można liniową w przybliżeniu (ze względu na skończoną liczbę elementów wkładki) zmienność obciążenia brzegu. Elementy wkładki umieszczamy w odpowiednim wycięciu korpusu K urządzenia. Wewnątrz korpusu znajduje się gumowy pojemnik poddany ciśnieniu hydraulicznemu, którego wielkość dobieramy stosownie do warunków pomiaru.

Załamanie obciążonego brzegu modelu uwzględniono tu przez odpowiednie załamanie z powierzchni korpusu urządzenia.

Dla sprawdzenia i porównania wyników uzyskanych przy użyciu urządzenia hydraulicznego, przeprowadzono badanie sprawdzające realizując obciążenie

hydrostatyczne w sposób mechaniczny przy pomocy linek, bloczków i ciężarków.

Schemat tego urządzenia obciążającego pokazano na rys. 10. Model przyklejono do odpowiednio ukształtowanej płytki i za jej pośrednictwem przy mocowano go do ramy układu obciążającego. Do brzegu «odwodnego» modelu na odcinku obciążonym parciem hydrostatycznym przyłożono 9 płytek o szerokości 7,5 mm (luzy sumaryczne między płytkami wynosiły 0,5 mm). Każda z płytek objęta została żyłką nylonową, którą po przełożeniu przez bloczek obciążono ciężarkiem odpowiedniej wartości.



Rys. 10. Schemat mechanicznego układu obciążającego modelującego parcie hydrostatyczne

Z uwagi na załamanie brzegu «odwodnego» obciążenie ciężarkiem P_1 przyłożono w nieco odmienny sposób aniżeli obciążenia pozostałe, tj. za pośrednictwem dwóch bloczków. Wartości ciężarków od $P_1 = 5$ kg do $P_9 = 24$ kg obliczono przyjmując liniową zmienność obciążenia wraz z głębokością, z zachowaniem warunków podobieństwa modelowego.

Na rys. 11 pokazano izochromy połówkowe uzyskane przy pomocy opisanego urządzenia obciążającego, zastosowanego w trzeciej serii badań.

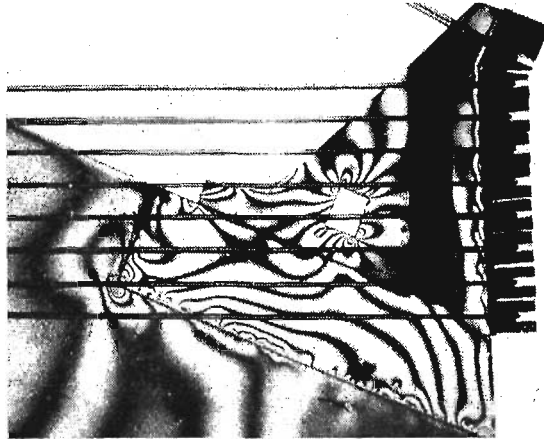
2.5. Wyniki badań. Odnośnie badań nieprzelewowej sekcji zapory (rys. 2-4) pewne wątpliwości budzić może ukształtowanie prostokątnych otworów wewnątrz korpusu zapory. Na brzegach górnym i dolnym tych otworów występują bowiem naprężenia rozciągające o wartości ok. 3 kG/cm^2 .

Badania sekcji przelewowej zapory (rys. 6-8) wykazały, że:

1. W przypadku obciążenia wyłącznie ciężarem własnym rozkład naprężeń na brzegu odwodnym zapory jest zbliżony do równomiernego i wynosi ca 3 at. (w obiekcie). Również rozkład naprężeń wzdłuż odpowiedniego brzegu filara jest zbliżony do równomiernego. Średnia wartość tych naprężeń wynosi ca

6 at. Rozkład naprężeń na brzegu otworu otrzymano zbliżony do rozkładu symetrycznego. Średnia wartość spiętrzenia naprężeń w narożach wynosi ca 10 at, przy czym na dolnych i górnych brzegach otworów występują naprężenia rozciągające o wartości około 3 at.

2. Dla jednoczesnego działania ciężaru własnego oraz parcia hydrostatycznego na brzegu odpowietrznym w dolnej wyokrągłej części występuje spiętrzenie naprężeń o wartości ok. 20 at. Naprężenie to jest większe, aniżeli naprę-



Rys. 11. Izochromy połówkowe uzyskane przy zastosowaniu mechanicznego układu obciążającego

żenie w narożu odpowietrznym sekcji nieprzelewowej. Przypisać to należy wpływowi otworu, który w sekcji przelewowej ma znacznie większe wymiary.

3. Spiętrzenia naprężeń ściskających w narożach otworu osiągają wartości rzędu 20 at, z tym, że na górnym poziomym brzegu otworu powstają naprężenia rozciągające, wynoszące do 4 at.

2.6. Wnioski i zalecenia konstrukcyjne. Założone przez projektodawców kształt i wymiary przekrojów poprzecznych obu badanych sekcji zapory (przelewowej i nieprzelewowej) uznać należy w zasadzie za prawidłowe. W żadnym punkcie brzegu naprężenia nie przekraczają wartości dopuszczalnych dla przyjętych marek betonu. Jednakże w celu polepszenia pracy wytrzymałościowej konstrukcji oraz zwiększenia jej pewności byłoby bardzo wskazane wprowadzenie następujących niewielkich zmian:

a) wyokrąglenia wklęsłego załamania ścian sekcji nieprzelewowej zapory po stronie odpowietrznej lub przynajmniej wprowadzenia dwustopniowego załamania;

b) zamiany prostokątnych przekrojów otworów wewnętrznych w korpusach obu sekcji zapory na otwory eliptyczne; w ostateczności wyokrąglenie wszystkich naroży otworów łukami o promieniu nie mniejszym niż 30 cm;

c) zabrojenia konstrukcyjnego przynajmniej górnej i dolnej powierzchni otworów galerii w płaszczyznach poprzecznych do ich osi.

Powyższe zmiany wpłyną niewątpliwie na obniżenie naprężeń na brzegach otworów oraz brzegu odpowiednim rozpatrywanych przekrojów zapory.

3. Uwagi końcowe

Omówione w pracy badania przekroju poprzecznego zapory filarowej stanowią jeden z fragmentów prac naukowo-badawczych Pracowni Analizy Naprężeń IPPT PAN z zakresu badań zapór³ metodami fotosprężystości.

W Pracowni przeprowadzono również metodami fotosprężystości:

3.1. Badania zapory grawitacyjnej o wysokości całkowitej ok. 76 m. Ze względu na szeroki program tych badań całość prac podzielono na cztery etapy:

I. badanie przekroju poziomego (teowego) sekcji typowej;

II. wyznaczanie stanu naprężenia w przekroju poprzecznym zapory najwyższej sekcji nieprzelewowej;

III. badanie przekroju poprzecznego przez komorę zasuw, sekcji przelewowej;

IV. badanie stanu naprężenia sekcji przy siłowni, w przekroju prostopadłym do dylatacji i osi otworu rurociągu doprowadzającego; w szczególności prace te objęły wyznaczenie spiętrzeń naprężeń wokół otworu rurociągu przy zbiorniku pełnym (obciążenie ciężarem własnym i parciem wody) oraz przy zbiorniku pustym (obciążenie samym tylko ciężarem własnym).

3.2. Badania zapory filarowej o wysokości ok. 30 m. Poza omówionymi w niniejszej pracy przeprowadzono:

a) badania rozkładu naprężeń w przekroju prostopadłym do brzegu odwodnego oraz płaszczyzny dylatacji;

b) badania mające na celu wyznaczenie wpływu niejednakowych współczynników sprężystości podłużnej E materiałów zapory i podłoża na rozkład naprężeń w przekroju poprzecznym zapory.

Zagadnieniami zastosowania fotosprężystych badań w budownictwie wodnym autor zajął się także w pracach [2 i 3]. Część wymienionych wyżej badań zapór grawitacyjnych omówiono w dwu pracach [4 i 5]. Dalsze publikacje z dziedziny badań zapór grawitacyjnych i filarowych są w przygotowaniu.

4. Literatura cytowana w tekście

[1] A. A. БОРОВЕЧ, *Проектирование и строительство больших плотин*, Гос. Энерг. Строит., Москва 1958.

[2] R. S. DOROSZKIEWICZ, *Zastosowanie elastooptycznych badań w budownictwie wodnym*, Gospodarka Wodna, 8, Warszawa 1961.

[3] R. S. DOROSZKIEWICZ, *Uwagi na temat zastosowania elastooptycznych badań w budownictwie wodnym*, Gospodarka Wodna, 2, Warszawa 1962.

³ W badaniach tych brali udział: mgr inż. B. Michalski, mgr inż. J. Lietz, inż. L. Korczak, ob. I. Doroszkiewicz, ob. J. Mosak i inni.

[4] R. S. DOROSZKIEWICZ, *Some methods for determining the state of stress in bodies subjected to simultaneous own weight and hydrostatic pressure*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 12, 10 (1962).

[5] R. S. DOROSZKIEWICZ, *New photoelastic method for determining the state of stress in dams*, Paper No 9. Symposium on Concrete Dam Models. 14-19 październik, Lizbona 1963.

Р е з ю м е

ИССЛЕДОВАНИЯ МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ КОНТРОРСНОЙ ПЛОТИНЫ

Во введении обращается внимание на применение двух основных типов моделей; приводятся области пригодности исследований в поляризованном свете в применении к гидросооружениям.

Дальше, в работе рассматривается пример применения исследования в поляризованном свете к экспериментальной проверке принятых проектировщиками поперечных сечений секций контрфорсной плотины.

“Полупространственная” модель выполненная из твердой эпоксидной смолы испытана в двух схемах нагружения: а) только собственным весом, б) собственным весом и гидростатическим давлением. Напряженное состояние вызванное собственным весом моделируется методом вращения с использованием явления замораживания. Картина напряжений в поляризованном свете при нагрузке по схеме в) получена нагружением модели с “замороженной” картиной напряжений от собственного веса соразмерным гидростатическим давлением; для моделирования гидростатического давления применяется специально спроектированное гидравлическое устройство.

Для иллюстрации приведены рисунки изохром, краевых напряжений, а также применяемой аппаратуры. В конце приводятся результаты испытаний, а также выводы и рекомендации по конструкции. Рассмотренные в статье испытания являются частью научно-исследовательских работ по поляризационно-оптическому исследованию двух плотин: контрфорсной и гравитационной. Работы проводятся Лабораторией Анализа Напряжений.

S u m m a r y

PHOTOELASTIC INVESTIGATION OF THE CROSS-SECTION OF BUTTRESS DAM

First the application of the two basic types of models is described and the range of applicability of the photoelastic methods in investigations of water dams is presented.

An example is given of the application of photoelasticity to experimental verification of the cross-sections of a buttress dam as determined by the designers. A “semi-spatial” model made of hard resin was investigated in two cases: loading only a) by its own weight, b) by its own weight and hydrostatic pressure. The state of stress due to its own weight was modelled by the method of rotation making use of the “frozen-stress” method. The photoelastic picture of stresses due to case b) was obtained by loading the model with the “frozen” state of stress due to the weight of the sample by a hydrostatic pressure; to obtain the latter a hydraulic device was employed which was designed for this experiment.

To illustrate the results the isochromes, boundary stresses and the employed apparatus are presented.

Finally the results of the investigations are given as well as conclusions and suggestions concerning the design. The investigations constitute a part of the work of the Stress Analysis Division on photoelastic investigations on two dams: a buttress and a gravity dam.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 marca 1964.

Z BADAŃ FOTOSPRĘŻYSTYCH STANU NAPRĘŻENIA WYWOŁANEGO
CIĘŻAREM WŁASNYM Z UWZGLĘDNIENIEM WPLYWU PODŁOŻA

ROMAN STEFAN DOROSZKIEWICZ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Fotosprężystość jest jedną z najbardziej znanych i ogólnie stosowanych metod analizy naprężeń. Jednakże, o ile autorowi wiadomo, przeprowadzono dotychczas jedynie nieliczne badania fotosprężyste stanu naprężenia ciał niejednorodnych obciążonych ciężarem własnym pomimo tego, że omawiany problem ma duże znaczenie dla praktyki inżynierskiej. W badaniach tych, dotyczących wyznaczania rozkładu naprężeń w zaporach, wpływ różnych współczynników sprężystości podłużnej E zapory i podłoża, wyznaczano przez zbadanie modelu płaskiego o odpowiednich stosunkach grubości obszarów modelujących zapory i podłoże. Wyznaczony tym sposobem stan naprężenia w punktach dostatecznie odległych od linii kontaktu obu modeli nie budzi zastrzeżeń. Natomiast w bezpośrednim sąsiedztwie połączenia tych modeli wprowadzano trójwymiarowy stan naprężenia, co wyklucza możliwość wyznaczenia wartości naprężeń faktycznie panujących w punktach brzegu kontaktu zapory i podłoża.

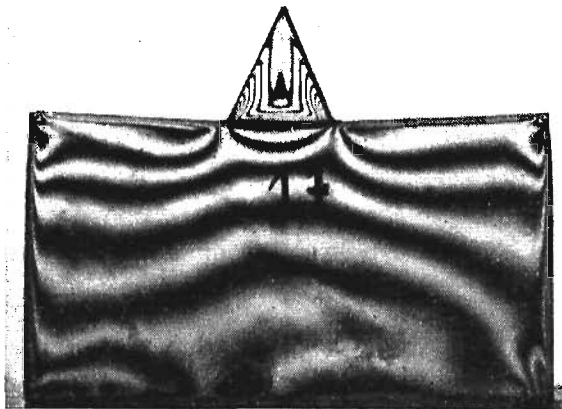
Brak wzmianek w literaturze fachowej o dokładniejszych badaniach fotosprężystych powyższego zagadnienia można wyjaśnić jedynie wielkimi trudnościami laboratoryjnymi, jakie nastęrczają badania tego rodzaju. W pracy niniejszej autor przedstawia swe pierwsze badania mające na celu opracowanie metody fotosprężystości umożliwiającej bardziej dokładne rozwiązanie zadań z zakresu tego problemu.

2. Przeprowadzone badania stanu naprężenia wywołanego
ciężarem własnym z uwzględnieniem wpływu podłoża

2.1. Kilka fotosprężystych metod modelowania stanu naprężenia wywołanych działaniem ciężaru własnego wykorzystuje analogię, jaka zachodzi między wyrażeniami na wartość naprężeń powstałych od obciążenia ciężarem własnym i siłami odśrodkowymi [4]. O ile wykonamy model o dostatecznie małych wymiarach w stosunku do promienia wirowania, to błąd spowodowany niejednorodnością pola sił odśrodkowych możemy sprowadzić do wartości błędów, z jakimi rozwiązujemy przeciętne zadania z zakresu budownictwa.

Podstawowa różnica pomiędzy tymi metodami zachodzi w sposobie utrwalania fotosprężystego obrazu naprężeń. W omawianych badaniach korzystano z dwu takich sposobów.

W pierwszym etapie badań zastosowano wirowanie z wykorzystaniem zjawiska «zamrażania naprężeń». Jak wykazały wyniki tych badań, wpływ «zamrażania» modeli złożonych na ich stan naprężenia jest znaczny szczególnie w strefie połączenia (rys. 1). Współczynniki rozszerzalności termicznej dla materiałów fotosprężystych nie są wartością stałą, lecz są różne dla różnych



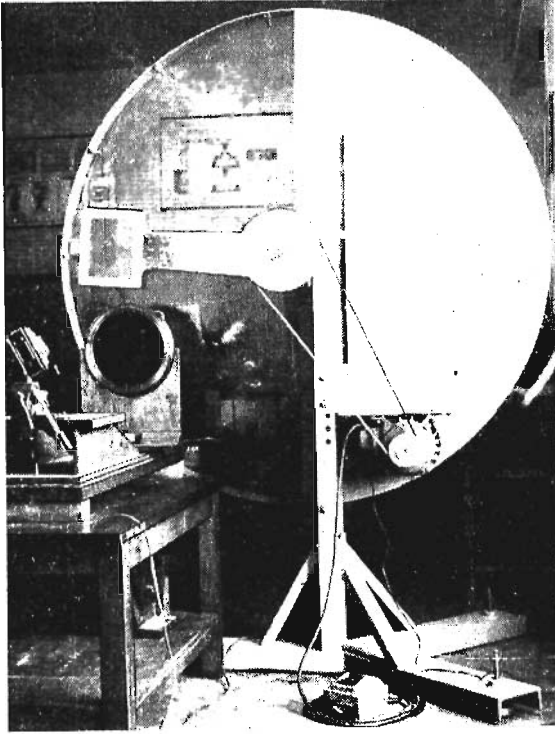
Rys. 1. Izochromy połówkowe modelu 17, wywołane łącznym działaniem naprężeń termicznych oraz metodą wirowania z zamrażaniem

zakresów temperatury. Ponadto nawet dla materiałów fotosprężystych tego samego rodzaju współczynniki rozszerzalności termicznej mogą się zmieniać w zależności od ich składu chemicznego i przyjętej techniki obróbki termicznej. Z tego też względu po przeprowadzeniu wstępnych badań metodą wirowania z zamrażaniem uznano za konieczne poszukanie innych sposobów rozwiązania postawionego zadania.

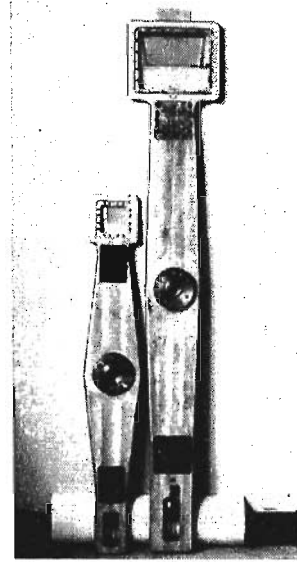
W badaniach etapu drugiego korzystano z lamp błyskowych i tę metodę nazwano «błyskową metodą wirowania». W metodzie tej najpierw analizowano wizualnie obraz naprężeń przy pomocy stroboskopu (można by to nazwać «zamrażaniem optycznym naprężeń»). Na podstawie tych obserwacji stwierdzano, czy gradient naprężeń jest dostatecznie wielki oraz czy obraz naprężeń nie budzi zastrzeżeń odnośnie przebiegu oraz stopnia wyrazistości izochrom i izoklin. Po zanalizowaniu tego obrazu wprowadzano ewentualne poprawki w ustawieniu modelu lub w liczbie obrotów wirówki. Następnie usuwano lampę stroboskopową, a na jej miejsce wprowadzano lampę błyskową emitującą pojedyncze błyski, ale o znacznie większym natężeniu światła. Korzystając z tych błysków sporządzano fotografie obrazów izochrom i izoklin.

2.2. Podstawową aparaturą, umożliwiającą prowadzenie badań «błyskową metodą wirowania» jest specjalnie w tym celu zaprojektowana i wykonana

wirówka wraz z urządzeniem do synchronizacji chwili błysku, położenia modelu oraz chwili ekspozycji negatywu w kamerze fotograficznej, (rys. 2). Wirówka ta posiada dwa wymienne ramiona (rys. 3).



Rys. 2. Wirówka do fotosprężystych badań w temperaturze pokojowej z zastosowaniem techniki błyskowej. Widok od strony analizatora



Rys. 3. Ramiona wirówki

Pierwszy z nich daje znaczne przeciążenie, dochodzące do 2000 g, ale tylko na mniejszym promieniu wirowania nie przekraczającym 55 cm. Ten wirnik jest przeznaczony do badań modeli mniejszych, wykonanych z żywicy twardej o $E = 25\ 000\text{--}40\ 000\ \text{kG/cm}^2$ i $K = 7\text{--}10\ \text{kG/cm}^2$. Drugi wirnik umożliwia wirowanie na dłuższym ramieniu o długości 80 cm modeli o większych wymiarach, wykonanych z wysokoczułych żywicy gumopodobnych o $E = 10\text{--}300\ \text{kG/cm}^2$ oraz $K = 0,3\text{--}1\ \text{kG/cm}^2$ przy przeciążeniach rzędu 200–400 g.

Napęd z silnika na wrzeciono przeniesiony jest przy pomocy wymiennych kół i pasków klinowych. W wirniku znajduje się wycięcie w kształcie prostokątnego okna, w którym umieszczony jest model fotosprężysty pomiędzy dwiema płytkami ze szkła.

Praca przy pomocy wirówki polega na:

- a) badaniu wizualnym obrazu naprężeń w modelu,
- b) dokonywaniu zdjęć izochrom i izoklin za pomocą kamery fotograficznej.

W przypadku a) użyta zostaje lampa stroboskopowa, której błyski sterowane są przez wirnik za pośrednictwem fotokomórki. W przypadku b) do zdjęć wykorzystana zostaje lampa błyskowa na błysk pojedynczy, wyzwalany przez obracający się wirnik; wyzwolenie błysku następuje przez naciśnięcie migawki w aparacie fotograficznym.

2.3. Właściwe badania fotosprężyste przeprowadzone «błyskową metodą wirowania» objęły następujące sześć modeli¹ (tablica 1):

1. Model klejony wzdłuż powierzchni kontaktu i składający się z podłoża, wykonanego z tekstolitu i trójkąta ze zmodyfikowanej żywicy epoksydowej P-81 o niskiej wartości współczynnika sprężystości podłużnej E ; stosunek modułów Younga $E_t : E_p = 0,011$.

2. Model klejony, złożony z dwóch różnych zmodyfikowanych żywic epoksydowych P-81 oraz P-47; $E_t : E_p = 0,36$.

3. Model klejony, wykonany z żywic epoksydowych P-51 i P-47, o zbliżonych właściwościach sprężystych; $E_t : E_p = 0,82$; model ten służył do sprawdzenia wpływu klejenia na rozkład naprężeń w pobliżu krawędzi styku.

4. Model jednolity trójkąta wraz z podłożem, wykonany z żywicy P-51; $E_t : E_p = 1$.

5. Model klejony, złożony z dwóch różnych żywic P-47 i P-81; $E_t : E_p = 2,76$.

6. Model klejony złożony z podłoża wykonanego z żywicy P-81 i trójkąta z tekstolitu; $E_t : E_p = 90$.

Tablica 1. Zestawienie badanych modeli

Nr modelu	Materiał modelu trójkąta/podłoża	E_t/E_p	K kG cm ² ·rz	Uwagi
1	P-81*/Tekstolit	12,2/1100 = 0,011	0,18/—	Rys. 5c**
2	P-81/P-47	12,2/33,7 = 0,36	0,18/0,22	Rys. 6b**
3	P-51*/P-47*	27,7/33,7 = 0,82	0,21/0,22	Rys. 4b, 5b
4	P-51	27,7/27,7 = 1	0,21	Model jednolity. Rys. 4a, 6a, 7, 8
5	P-47/P-81	33,7/12,2 = 2,76	0,22/0,18	Rys. 6c**
6	Tekstolit/P-81	1100/12,2 = 90	—/0,18	Rys. 6d**

* P-47, P-51 oraz P-81 są modyfikowanymi żywicami epoksydowymi polimeryzowanymi we własnym zakresie w Pracowni Analizy Naprężeń IPPT-PAN. Wartość izochromy k wyznaczano metodą «półpłaszczyzny» [5].

** Model złożony (klejony).

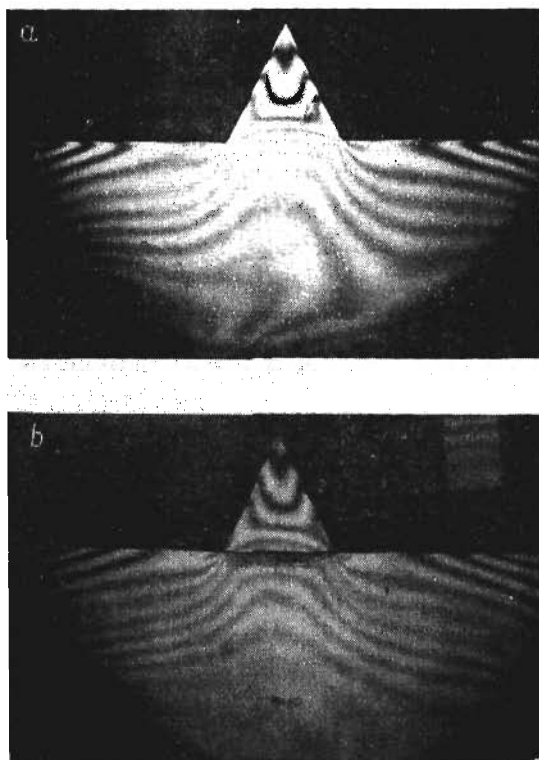
Badania przeprowadzono w płaskim stanie naprężenia². Wielkość elementu podłoża przyjęto dostatecznie dużą w stosunku do trójkąta, tak aby otrzymane

¹ Przyjęto oznaczenia: E_t jest współczynnikiem sprężystości podłużnej materiału modelu trójkąta; E_p modułem Younga materiału modelu półpłaszczyzny.

² Opisane w pracy badania przeprowadzono na terenie Pracowni Analizy Naprężeń IPPT-PAN pod kierunkiem autora.

wyniki badań modelowych można było ewentualnie porównać z wynikami teoretycznymi dla trójkąta, połączonego z półpłaszczyzną.

Modele spoczywały swobodnie w pojemniku wirówki. Pomiedzy bocznymi powierzchniami podłoża, a ściankami pojemnika zachowano luz, umożliwiając swobodne odkształcenie się podłoża.



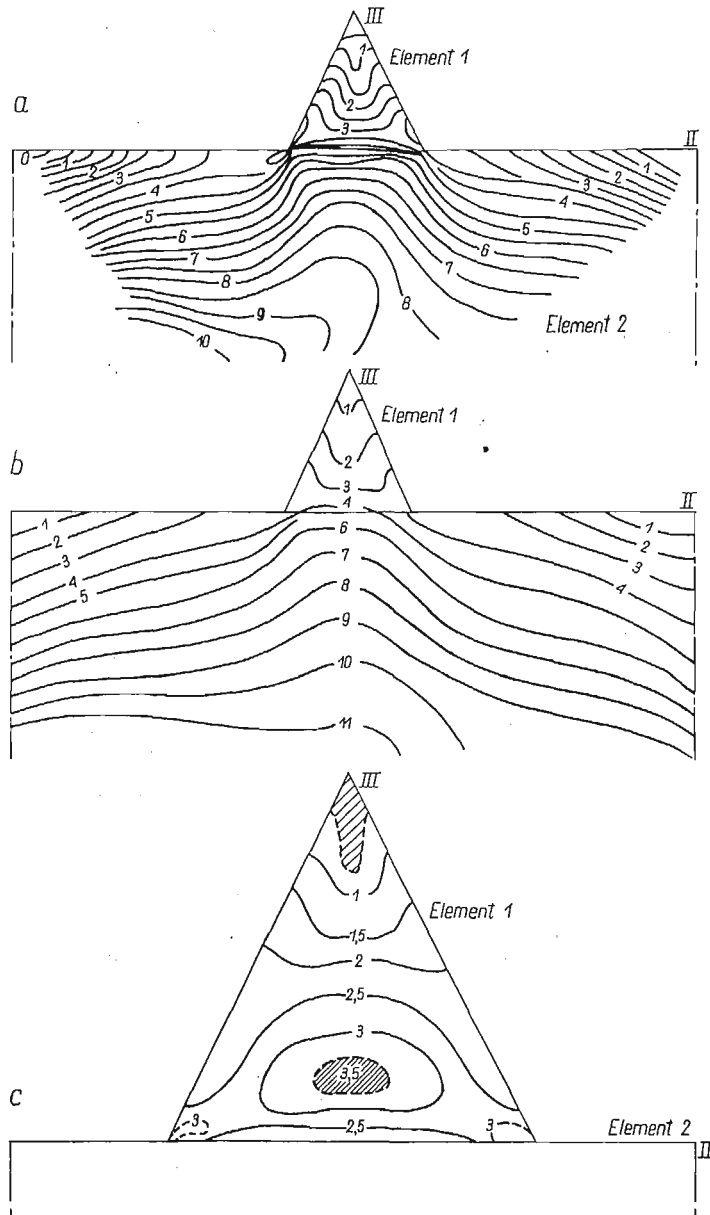
Rys. 4. Obrazy izochrom modeli wirowanych metodą błyskową a) M.4 — jednorodnego z P-51; b) M.3 — złożonego z P-51 oraz P-47; $E_t : E_p = 0,82$

Dla wszystkich wymienionych modeli wykonano zdjęcia izochrom całkowitych i połówkowych oraz zdjęcia izoklin. Na podstawie uzyskanych zdjęć izochrom (rys. 4) sporządzono wykresy izochrom (rys. 5), naprężeń brzegowych (rys. 6) i różnicy naprężeń głównych wzdłuż linii styku trójkąta z półpłaszczyzną.

Dla modelu jednolitego sporządzono zbiorcze wykresy izoklin (rys. 7) oraz wykresy trajektorii naprężeń głównych (rys. 8) i trajektorii maksymalnych naprężeń stycznych. Dla pozostałych modeli trajektorii nie wykreślono, gdyż wykazują one we wszystkich przypadkach przebieg podobny jak w modelu jednolitym.

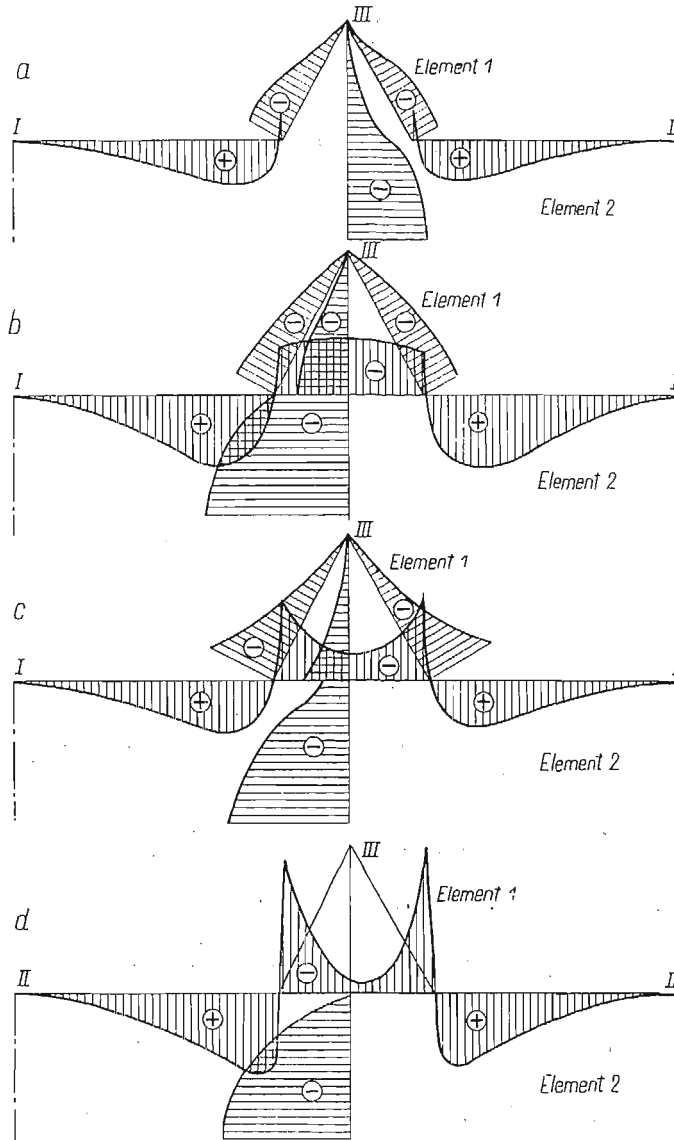
Badania wykazały, że istnieje zasadnicza jakościowa różnica pomiędzy rozkładem naprężeń w trójkącie równoramiennym wykonanym z materiału sprę-

żystego o niskim współczynniku sprężystości E_t , spoczywającym na podłożu sprężystym wykonanym z materiału o wyższym module $E_p = 3E_t$ (rys. 6b), a rozkładem naprężeń w trójkącie sztywnym, spoczywającym na podłożu o niskim E (rys. 6d).



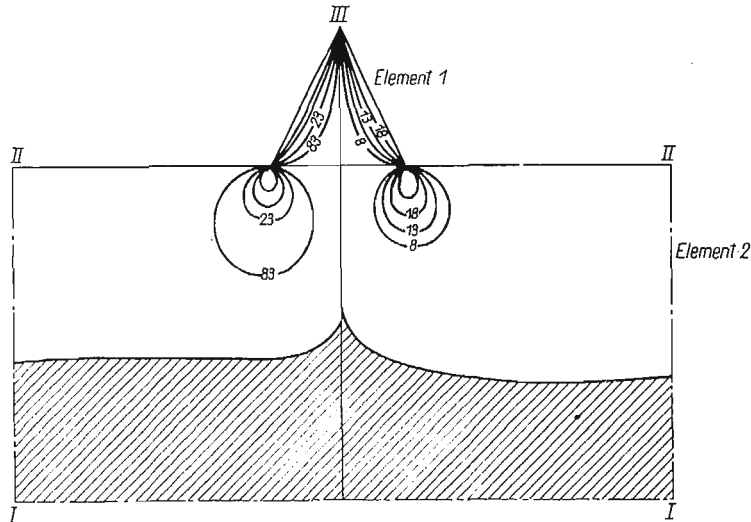
Rys. 5. Wykresy izochrom modelu: a) jednorodnego M.4, b) złożonego M.3 ($E_t : E_p = 0,82$); c) M.1 złożonego z P-81 i tekstolitu ($E_t : E_p = 0,011$)

W pierwszym przypadku obserwujemy maksimum wartości naprężeń w środku długości podstawy trójkąta i brak spiętrzeń naprężeń w narożach. W drugim natomiast przypadku występują wyraźne spiętrzenia naprężeń w narożach podstawy, a minimum ich wartości w środku podstawy.

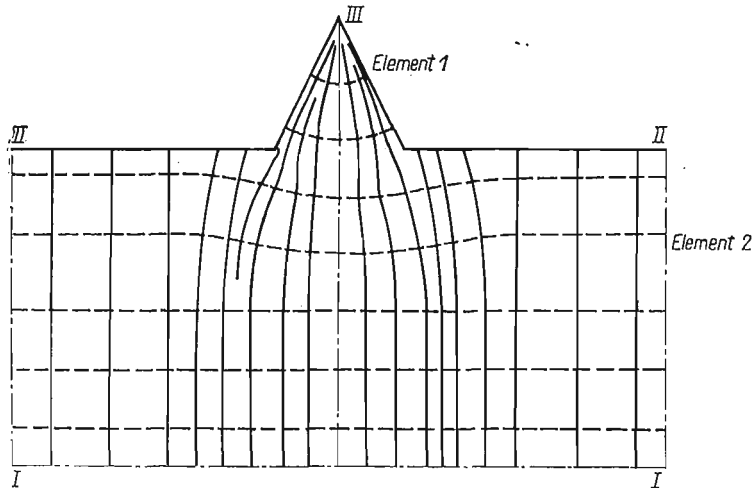


Rys. 6. Naprężenia brzegowe modeli: a) jednorodnego M.4, b) złożonego M.2 ($E_t : E_p = 0,36$); c) złożonego M.5 ($E_t : E_p = 2,76$); d) złożonego M.6 ($E_t : E_p = 90$). Na rys. 6b, 6c, 6d wzdłuż linii styku trójkąta z półpłaszczyzną sporządzono wykres efektu optycznego mierzonego w rzędach izochrom

Jednakże wpływ różnicy współczynników sprężystości E na stan naprężenia trójkąta jest istotny dopiero w przypadkach znacznych różnic obu współczynników sprężystości E . Przy dwu- lub nawet trzykrotnym stosunku współczynników E materiałów podłoża i trójkąta wpływ ten mieści się w granicach błędu



Rys. 7. Izokliny modelu jednorodnego M.4 z P-51

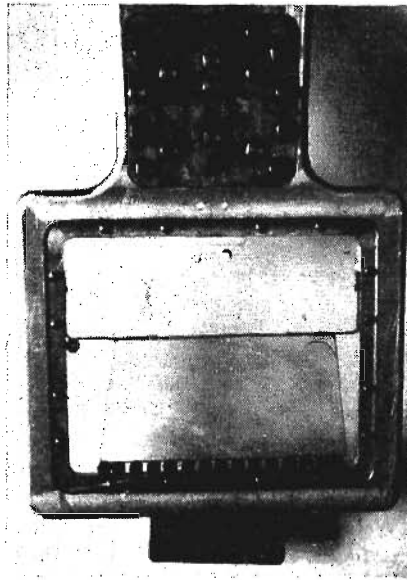


Rys. 8. Trajektorie naprężeń głównych modelu M.4

pomiarowego, występującego przy tego rodzaju badaniach fotosprężystych (tj. w przedziale 10-20%).

W celu określenia wpływu składowych sił odśrodkowych, prostopadłych do osi symetrii modelu, przeprowadzono badania uzupełniające. W wykonanej

przez Pracownię wirówce oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny modelu, co powoduje nierównoległość kierunków działania sił odśrodkowych. Powstałe składowe siły odśrodkowych równoległe do podstawy modelu powodują rozciąganie podłoża w tym kierunku. W celu oceny tego wpływu zbadano trzy różne modele podłoża: a) model prostokątny, swobodnie stojący w pojemniku, b) model trapezowy, również swobodnie stojący oraz c) model trapezowy oparty na waleczkach gumowych, mających na celu wyeliminowanie składowej stycznej działającej na podstawę podłoża (rys. 9). Dla wszystkich badanych modeli podłoża sporządzono zdjęcia izochrom całkowitych i połówkowych oraz wykresy



Rys. 9. Model trapezowy oparty na waleczkach gumowych

izochrom oraz naprężeń brzegowych. Jak wykazały przeprowadzone badania, wpływ sił masowych, prostopadłych do osi symetrii modelu (o szerokości równej ok. $1/4$ promienia wirowania) na rozkład naprężeń w podłożu jest znaczny. W przypadku działania jednorodnego pola sił ciężkości o kierunkach równoległych w elemencie podłoża powinny wystąpić naprężenia pionowe σ_y , zmniejszające się liniowo od zera na górnym swobodnym brzegu do maksymalnej wartości przy podstawie. Naprężenia główne «poziome» (prostopadłe do osi symetrii) powinny być w takim przypadku równe zero. Faktyczny rozkład naprężeń w badanym modelu podłoża odbiega znacznie od tego stanu. Ponieważ jednak przedmiotem prowadzonych badań było jedynie ustalenie wpływu różnych modułów E na rozkład naprężeń, otrzymana zaś niejednorodność naprężeń we wszystkich modelach ma charakter taki sam, to nie powinna ona mieć wpływu w rozpatrywanym przypadku na dokładność otrzymanych wyników badań.

Uwagi końcowe

«Błyskowa metoda wirowania» umożliwia badanie stanu naprężenia modeli złożonych z różnych materiałów. Metodą tą można również modelować stany naprężenia wywołane działaniem ciężaru własnego. W tym przypadku należy dążyć do tego, aby stosunek szerokości modelu do promienia wirowania był jak najmniejszy. W ten sposób ograniczamy do minimum wartość kąta, jaki tworzą między sobą kierunki sił odśrodkowych, działających na skrajne (w kierunku szerokości) punkty modelu. Jednakże w przypadku modelowania grawitacyjnego pola sił bardziej prawidłowy rozkład naprężeń dawałyby siły odśrodkowe o kierunkach równoległych do siebie. Takie właśnie możliwości daje zaproponowana przez autora nowa metoda wirowania. Metoda polega na wprowadzeniu do «błyskowej metody wirowania» dwu zasadniczych zmian: a) wirowania dookoła osi leżącej w płaszczyźnie modelu (zamiast osi prostopadłej do tej płaszczyzny); b) obserwowanie i rejestrowanie obrazów naprężeń w płaszczyźnie wirowania. Jak się okazało, nasuwające się trudności konstrukcyjne są do pokonania. W najbliższym czasie będą prowadzone w Pracowni pierwsze badania tą metodą.

Literatura

- [1] A. U. HÜGGENBERGER, *Talsperren — Messtechnik*, 1951, 101-103.
- [2] M. MILBAUER, *Fotoelasticimetrie a její použití v praxi*, Praha 1953.
- [3] Я. ЯВОРНИЦКИЙ, *Поляризационно-оптические исследования в Чехословацкой Академии Наук*. Труды Конференции: «Поляризационнооптический метод исследования напряжений» 13-21 февраля 1958 года. Издательство Ленинградского Университета 1960.
- [4] R. S. DOROSZKIEWICZ, *New photoelastic method for determining the state of stress in dams*, Symposium on Concrete Dam Models. October 14-19, 1963. Paper No 9. Lisbona.
- [5] R. S. DOROSZKIEWICZ, A. LIŹEWKA, *Doraźne badania własności mechanicznych i elasto-оптычных материалов używanych w elastoоптыке*. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 1, 2 (1964).

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ВЫЗВАННОГО СОБСТВЕННЫМ ВЕСОМ, С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ОСНОВАНИЯ

В работе описываются исследования напряженного состояния треугольника нагруженного собственным весом. Исследовано шесть моделей со следующими отношениями модулей Юнга материалов треугольника и основания: 0,011; 0,36; 0,82; 1; 2,76; 90. Исследования проведены на моделях методом фотоупругости.

В предварительных испытаниях использован метод вращения с применением замораживания, в дальнейшем: «метод вращения со вспышкой». Во втором из перечисленных случаев для производства моделей использованы высокочувствительные, резино-подобные эпоксидные смолы, полимеризованные для испытаний.

Описывается спроектированная и сделанная в Лаборатории Анализа Напряжений ИОПТ, — ПАН специальная аппаратура применяемая в этих исследованиях.

В конце работы проведен краткий анализ результатов.

Приводится идея нового метода, дающего возможность получить более правильное распределение напряжений для случая действия силового поля тяготения на тела состоящие из областей с разными упругими свойствами.

S u m m a r y

PHOTO-ELASTIC INVESTIGATION OF THE STATE OF STRESS PRODUCED BY OWN WEIGHT IN A TRIANGLE RESTING ON ELASTIC FOUNDATION

The problem of stresses in a triangle loaded by own weight is discussed. Six models have been tested with the following ratios of the Young moduli of the triangle and the foundation: 0.011; 0.36; 0.82; 1; 2.76; 90. The introductory experiments were based on the centrifugal method combined with freezing; then the flash light method has been employed. In the latter tests the models were made of high-sensitive rubberlike epoxy resins polymerized in the laboratory of the Institute.

Special equipment designed and built in the Laboratory of Stress Analysis of the IBTP-PAN has been described.

A brief discussion of the obtained results follows, and the idea of a new method is outlined enabling us to obtain a more correct stress distribution in the case when a field of gravitational forces is acting upon a body composed of parts having different elastic properties.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dn. 4 kwietnia 1964 r.

Z BADAŃ FOTOSPRĘŻYSTYCH WIRNIKA GENERATORA DUŻEJ MOCY

R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ (WARSZAWA)

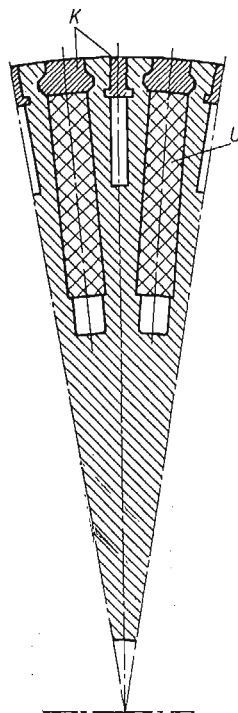
1. Wstęp

Dający się obecnie wyraźnie zanotować postęp w konstrukcji turbogeneratorów dużej mocy, zmierzający do zwiększenia mocy i sprawności maszyny prowadzi do budowy coraz większych jednostek, w których obciążenia mechaniczne i termiczne wirników stają się coraz wyższe. Na obwodowej części wirnika (rys. 1), gdzie w wyfrezowanych żłobkach ułożone są uzwojenia U , zamknięte przy pomocy klinów K , występują w ruchu obrotowym poważne obciążenia siłami bezwładności.

Kształty «zębów» wirnika, podyktowane warunkami konstrukcyjnymi, wydają się z punktu widzenia wytrzymałościowego niezbyt korzystne. W rzeczywistości naprężenia w zębach wirnika w miejscach koncentracji mogą osiągać granicę plastyczności, zwłaszcza w czasie próbnego przeciążenia przy podwyższonych obrotach.

Ten stan rzeczy jest w zasadzie dopuszczalny, tym niemniej znajomość rozkładu naprężeń w zakresie odkształceń liniowo-sprężystych jest cennym materiałem dla konstruktorów maszyn elektrycznych — zwłaszcza, że mechaniczna awaria wirnika turbogeneratora pociąga za sobą katastrofalne następstwa.

Zagadnienie wyznaczania rozkładu naprężeń w wirującym modelu wirnika na drodze fotosprężystości zostało podjęte przez autorów niniejszego artykułu. Przedstawiono tu metodę i technikę badań tego zagadnienia zastosowaną w Pracowni Analizy Naprężeń IPPT PAN.



Rys. 1. Fragment przekroju poprzecznego wirnika generatora

2. Badania

2.1. Ogólne założenia i przyjęta metoda. Ponieważ zarówno przekrój «beczki» wirnika, jak i obciążenie nie zmienia się na dość znacznej długości, spro-

wadzono problem do zagadnienia płaskiego. Poddano badaniu model płaski będący odwzorowaniem przekroju wirnika płaszczyzną prostopadłą do jego osi. Taki model wykonany z materiału fotosprężystego należało obciążyć siłami, jakie powstają przy wirowaniu:

- a) siłami masowymi działającymi na materiał modelu wskutek jego wirowania,
- b) siłami bezwładności, jakie działają na kliny i uzwojenia wypełniające zębki; siły te przenoszone są na zęby wirnika poprzez zaklinowanie i mają charakter sił zewnętrznych.

Przy modelowym badaniu stanu naprężenia, jaki występuje w elementach wirujących, korzystać można z następujących metod:

A. *Metoda statyczna*, w założeniu swoim nieściśła, nadaje się jedynie do badania naprężeń w niektórych miejscach modelu np. w przekroju, gdzie występują spiętrzenia naprężeń. Polega ona na tym, że obciążamy model statycznie siłami równoważnymi siłom bezwładności, pochodzącymi od mas znajdujących się po jednej stronie badanego przekroju i przyłożonymi możliwie z dala od niego. Wymaga to każdorazowo oszacowania błędu, jaki wynika z przyjętego uproszczenia. Sposób ten stosował W. SZCZEPIŃSKI [1].

B. *Zamrażanie naprężeń w wirującym modelu*. Metoda ta jest zastosowaniem ogólnie znanej w fotosprężystości metody «zamrażania naprężeń» do naszego przypadku. Model zostaje umieszczony na wale specjalnej wirówki o możliwie stałej szybkości obrotowej i wiruje w pojemniku termostatu, w którym temperaturę podnosi się do temperatury «zamrażania» (80-150°C w zależności od materiału modelu) i następnie powoli obniża do temperatury pokojowej. Efekt optyczny wywołany naprężeniami występującymi przy wirowaniu zostaje w ten sposób utrwalony i łatwo go po wyjęciu modelu z wirówki sfotografować w świetle spolaryzowanym. Szybkość potrzebna do wirowania modelu jest stosunkowo niewielka ze względu na znaczną czułość optyczną materiału w podwyższonej temperaturze. Kłopoty sprawia tu jednak bardzo niska w wysokiej temperaturze wytrzymałość materiału fotosprężystego na długotrwałe naprężenia rozciągające, jakie zwykle występują w elementach wirujących.

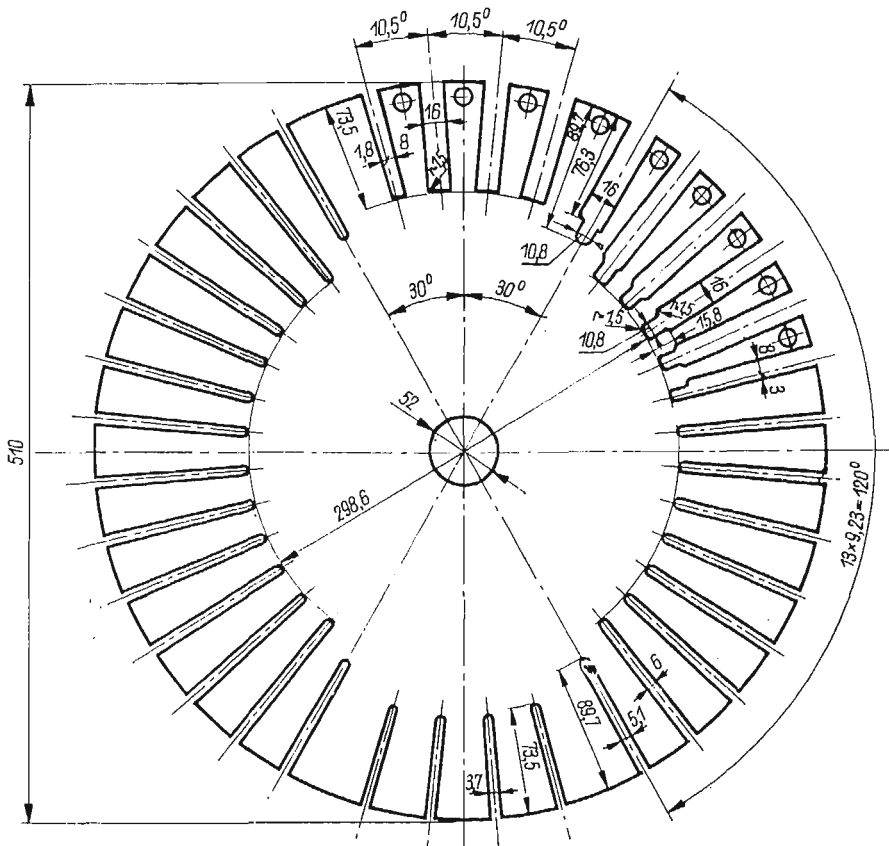
C. *Metoda polegająca na wirowaniu modelu z dużą szybkością w temperaturze pokojowej i dokonywaniu zdjęć w polaryskopie przy pomocy błyskowego źródła światła*. Ta metoda opisana w dalszym ciągu bardziej szczegółowo stanowi punkt wyjścia dla przeprowadzonych badań z tym, że autorzy nie rezygnują z metod A i B traktując je jako uzupełniające. Podobną metodę polegającą na wykorzystaniu lampy stroboskopowej do zdjęć stosowali M. MILBAUER i M. PERLA [2].

2.2. *Opis badań*. Dla przeprowadzenia badań sporządzono dwa modele:

- a) model całego poprzecznego przekroju wirnika (rys. 2),
- b) model pojedynczego typowego zęba (rys. 3).

Materiałem były płyty o grubości 10 mm odlane z żywicy epoksydowej Araldit D utwardzanej na zimno.

Model wirnika a) zaprojektowano w ten sposób, że na około 1/4 jego obwodu (wirnik posiada 2 prostopadłe osie symetrii) odwzorowano dna poszczególnych żłobków. Na zewnętrznym obwodzie zęby zaopatrzono w ciężarki, których działanie zastępowało obciążenie rzeczywistego zęba siłami bezwładności klinów i uzwojeń. Pozostałą część obwodu modelu nie podlegającą badaniu wykonano tak, aby zachowana była głębokość poszczególnych żłobków i aby rozłożenie mas w każdym zębie było statycznie równoważne. Ten model pozwalał określić rozkład naprężeń u podstawy zębów i w masywie wirnika.

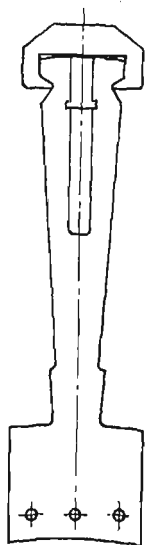


Rys. 2. Rysunek modelu przekroju poprzecznego wirnika

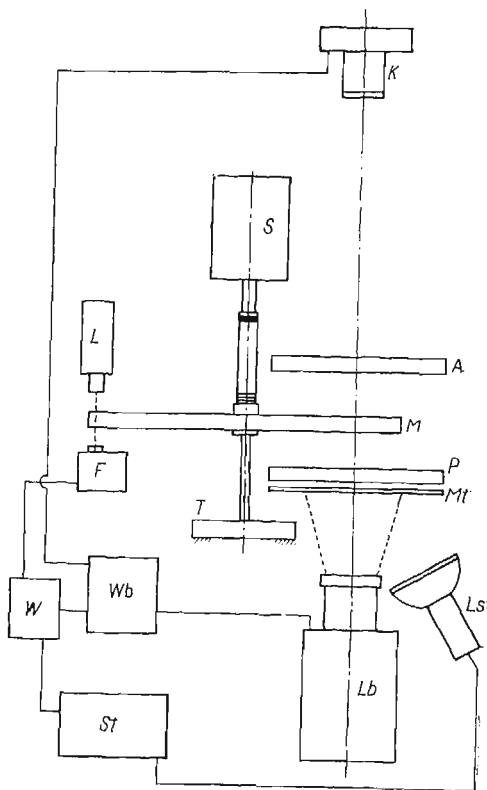
Badanie modelu pojedynczego zęba daje naprężenia w jego trzonie i górnej partii. Nieprawidłowości w stanie naprężenia powstaną jedynie u podstawy modelu. Podczas badań modelu zęba w jego wierzchołku zaczepiono o rowki klinowe bezwładnościowy obciążnik duralowy, który odwzorowywał działanie sił zewnętrznych na ząb.

Badanie modelu wirnika przeprowadzono na stanowisku, którego schemat przedstawia rys. 4, ogólny zaś widok rys. 5. Problem nadania modelowi prędkości obrotowej około 3500 obr/min rozwiązano w ten sposób, że wirnik skła-

dający się z modelu M (rys. 4) umieszczonego na piaście między dwiema tarczami z cienkiego pleksiglasu (dla zmniejszenia oporów powietrza), zawieszony swobodnie na wale silnika S , wiruje w płaszczyźnie poziomej. Ponieważ zawieszenie takiego wirnika jako bąka na elastycznym gumowym wałku jest dynamicznie niestateczne, umieszczono poniżej tłumik olejowy T , który zapewnia stateczność ruchu, tak iż wirnik pracuje zupełnie spokojnie. Wykorzystano tu repulsyjny silnik prądu zmiennego o mocy 0,8 kW z ciągłą regulacją obrotów w szerokim zakresie. W układzie tym oś optyczna polaryskopu musi być oczy-



Rys. 3. Zarys modelu zęba wirnika z obciążnikiem



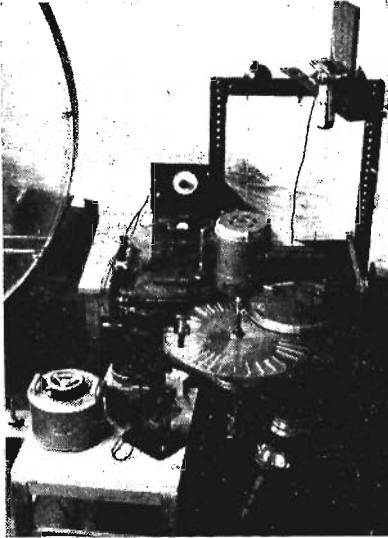
Rys. 4. Schemat stanowiska do fotosprężystego badania modelu wirnika

wicie pionowa. Widzimy więc od dołu kolejno lampę błyskową Lb , matówkę Mt , polaryzator P , analizator A , oraz kamerę fotograficzną K . Jako uboczne źródło światła zastosowano lampę stroboskopową Ls .

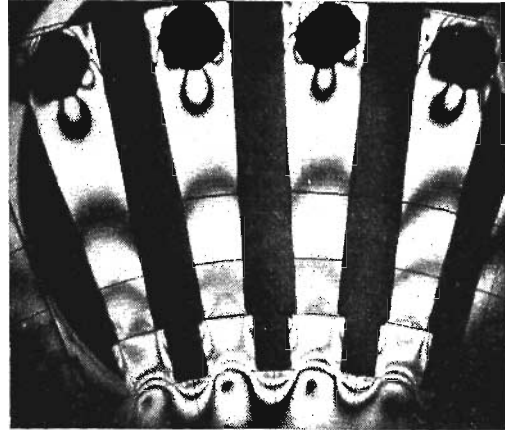
Błyski lampy stroboskopowej ściśle zsynchronizowano z obrotami wirnika. Uzyskano to w ten sposób, że na brzegu pleksiglasowej tarczy wirnika nałożono czarną plamkę, która za każdym obrotem przecina wiązkę światła, jaka z lampki L pada na fotokomórkę F . Powstający w ten sposób impuls elektryczny wzmocniony przez wzmacniacz W steruje aparaturą stroboskopową St dając w efekcie

możliwość wizualnej obserwacji nieruchomego dla oka obrazu naprężeń. Przesuwanie pola widzenia po obwodzie modelu uzyskiwano w łatwy sposób drogą zmiany położenia zespołu fotokomórki z lampką.

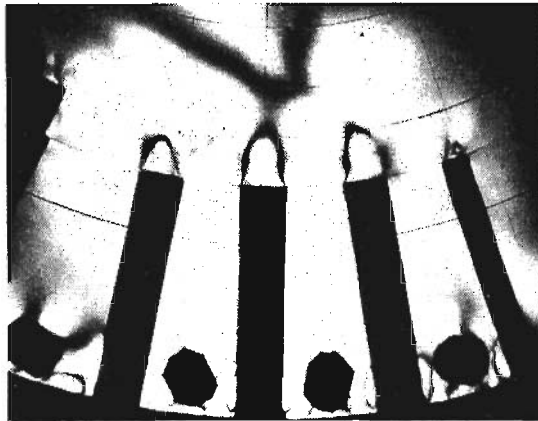
Zdjęć fotograficznych dokonywano przy użyciu typowej lampy błyskowej, w której wyładowanie iskrowe kondensatora $2 \mu\text{F}$ przy napięciu 6 kV daje silny pojedynczy błysk o czasie trwania około 2-2,5 μsek , co umożliwia uzyskanie



Rys. 5. Ogólny widok stanowiska do fotosprężystego badania modelu wirnika



Rys. 6. Zdjęcie zochrom ifragmentu modelu wirnika wykonane metodą błyskową



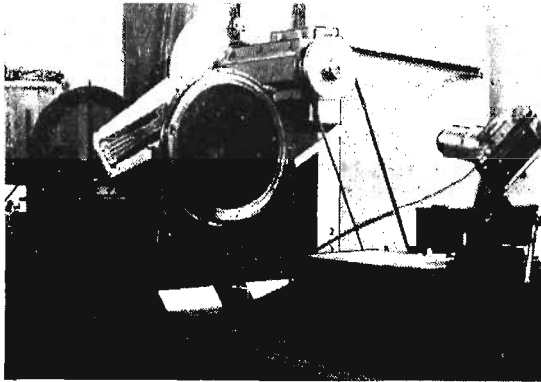
Rys. 7. Zdjęcie izokliny fragmentu modelu wirnika wykonane metodą błyskową

ostrego zdjęcia na filmie o czułości 17/10 DIN. Wyzwolenie błysku pochodzi również od impulsu z fotokomórki z tym, że na drodze od wzmacniacza do lampy umieszczono wyzwalacz błysku *Wb* sprzężony z migawką aparatu fotograficznego. Wyzwalacz błysku, który podobnie jak zespół fotokomórki i wzmac-

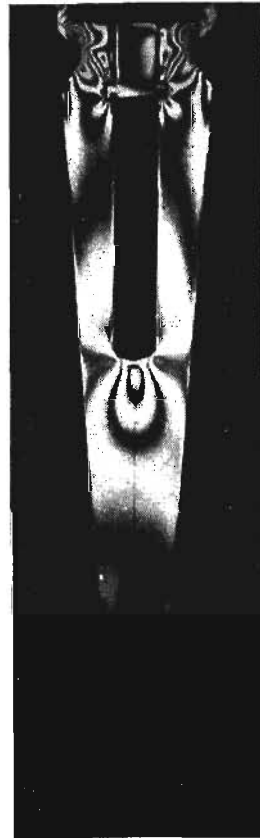
niacz jest urządzeniem wykonanym w Pracowni Analizy Naprężeń, zawiera dodatkowy stopień wzmocnienia oraz obwód tyratronu, który może zapalić się przenosząc pojedynczy impuls na lampę błyskową dopiero po naciśnięciu spustu migawki.

Na rysunku 6 widzimy jedno ze zdjęć izochrom uzyskane przy pomocy opisanego wyżej urządzenia z zastosowaniem monochromatycznego filtra pomarańczowego. Rysunek 7 przedstawia jedno ze zdjęć izoklin.

Badanie modelu pojedynczego zęba przeprowadzono w podobny sposób jak modelu wirnika. Odmienna była tylko część mechaniczna urządzenia. Model przymocowany na obwodzie aluminiowej tarczy i zrównoważony przeciwwagą wirował w płaszczyźnie pionowej na osi wirówki do badań fotosprężystych napędzanej silnikiem asynchronicznym o mocy 2,8 kW. Stosowano szybkości obrotowe od 1000-1700 obr/min. Odległość wierzchołka zęba od osi obrotu wynosiła 45 cm. Oś optyczna polaryskopu była w tym przypadku pozioma, a pozostałe elementy aparatury i ich układ takie same jak w stanowisku opisanym powyżej. Na rysunku 8 widzimy model zęba zamocowany



Rys. 8. Model zęba zamontowany w wirówce do badań fotosprężystych

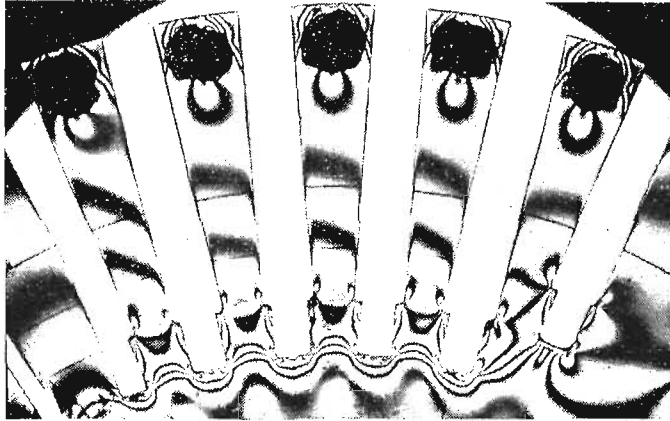


Rys. 9. Zdjęcie izochrom modelu zęba wykonane metodą błyskową

w wirówce «błyskowej», a rys. 9 przedstawia zdjęcie izochrom tego samego modelu, jakie uzyskano przy 1450 obr/min.

Po przeprowadzeniu opisanych badań oba modele posłużyły w następnej fazie do badań metodą zamrażania naprężeń. Model wirnika zamontowano w tym celu na osi wirówki do zamrażania między dwiema okładzinami z blach duralowych i poddano wirowaniu w komorze do wygrzewania plastyków z prędkością około 400 obr/min. Temperaturę w komorze od 110°C obniżano z prędkością około 10° na godzinę. Zdjęcie izochrom wykonane w świetle sodowym przedstawia rys. 10.

Podobnie potraktowano model zęba zakładając go wraz z tarczą i przeciwwagą na wał wirówki z tą różnicą, że badanie oparto na zasadzie superpozycji naprężeń od sił masowych i zewnętrznych. Zastosowano tu metodę superpozycji eksperymentalnej, której technikę laboratoryjną opracował R. S. DOROSZKIEWICZ [3]. W pierwszej fazie uzyskano przy pomocy wirowania zamrożony efekt optyczny wyłącznie od sił masowych (model był bez obciążnika). Następnie



Rys. 10. Zdjęcie «zamrożonego» obrazu izochrom w modelu wirnika w świetle lampy sodowej ten sam model obciążono statycznie, fotografując sumaryczny efekt od sił masowych i zewnętrznych. Ominięto w ten sposób trudność polegającą na tym, że model wirujący w podwyższonej temperaturze wraz z obciążnikiem nie wytrzymałby skoncentrowanych naprężeń rozciągających i uległby zniszczeniu.

3. Uwagi końcowe

Podsumowując doświadczenia uzyskane w toku przeprowadzenia opisanych tu badań można stwierdzić, że metoda zdjęć błyskowych w zastosowaniu do określania stanu naprężenia w elementach wirujących zdała pomyślnie egzamin.

Koszt wyposażenia stanowiska badawczego nie jest nadmiernie wysoki.

Samo przeprowadzenie badania nie zajmuje tak wiele czasu, jak metoda zamrażania, a w każdej chwili można widzieć i kontrolować obraz naprężeń.

Niekorzystną stroną metody jest konieczność stosowania pewnych środków ostrożności i zabezpieczeń przy dużych prędkościach wirujących modeli.

Poza tym, o ile obrazy izoklin są zadowalające, o tyle izochromy wyższych rzędów nie są wyraźne. Wynika to z tego, że lampa błyskowa daje światło zbliżone do białego i przy zastosowaniu filtrów jednobarwnych daje się odczytać około siedmiu rzędów izochrom.

Radykalnej poprawy tego stanu rzeczy oczekiwać można przy zastosowaniu laserowych źródeł światła. Bardzo krótki czas błysku, stosunkowo duża jego energia i ściśle monochromatyczne światło stwarza możliwości doskonalenia metod fotoprężystości zwłaszcza w zakresie badań dynamicznych.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. SZCZEPIŃSKI, *Badanie kształtu rowków wirników generatorów dużej mocy metodą elasto-optyczną*, I Sympozjum z zakresu elastoptyki PTMTS, Warszawa 1962.
- [2] M. MILBAUER, M. PERLA, *Fotoelasticimetrie a příklady jejího použití*, Nakladatelstvíto Československé Akademie Věd, Praga 1961, 116-139.
- [3] R. S. DOROSZKIEWICZ, *New Photoelastic Method for Determining the State of Stress in Dams*, Symposium on Concrete Dam Models, October 14-19 październik 1963, Paper No. 9, Lizbona.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ РОТОРА ГЕНЕРАТОРА БОЛЬШОЙ МОЩНОСТИ

В статье рассматривается вопрос о нахождении распределения напряжений в роторе турбогенератора с помощью оптического метода.

Приводятся общие предпосылки задачи сведенной к плоской проблеме.

Произведен короткий обзор оптических методов применяемых при исследованиях вращающихся деталей, а также описывается примененная авторами техника эксперимента, который состоит в фотографировании в поляризованном свете модели вращающейся с большой скоростью, причем источником освещения является лампа-молния. В описании испытательного стенда обращено внимание на некоторые его усовершенствования, как свободная подвеска вращающейся модели на упругом валу с масляным демпфером и связь между затвором фотоаппарата и фотоэлементом с лампой-молнией.

На основании проведенных исследований доказана пригодность метода к испытаниям такого типа, хотя (как следует из доступной автором литературы) в данный момент этот метод широко не применяется.

Summary

ON THE PHOTO-ELASTIC INVESTIGATION OF A GENERATOR ROTOR

The paper concerns the method of determination of the stress distribution in a turbogenerator rotor by means of photoelastic methods. General formulation of the problem reduced to the plane case is presented.

A short survey of the photoelastic methods is given as applied to the investigation of rotating elements, and the technique used by the authors is described. It consists in making photoelastic photographs of a rapidly rotating model by using flash sources of light. In describing the experimental stand, attention is drawn to certain improvements, e.g. free suspension of the rotating model on an elastic shaft with oil damper and the coupling of the shutter of the camera with the photoelastic cell and flash lamp.

On the basis of the performed experiments it was proved that the method is applicable to this kind of investigations, although (this follows from the available literature) the method has not been widely used.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

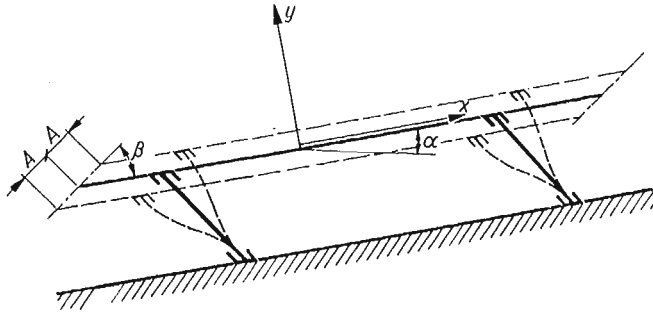
Praca została złożona w Redakcji dnia 12 kwietnia 1964 r.

DOBÓR PARAMETRÓW RUCHU PRZENOŚNIKÓW WIBRACYJNYCH

ANTONI CZUBAK (KRAKÓW)

1. Wstęp

Prędkość przemieszczania nosiwa wzdłuż rynny przenośnika wibracyjnego, a więc i wydajność transportowania, zależy od własności fizycznych nosiwa — takich, jak ciężar nasypowy, stopień rozdrobnienia i współczynnik tarcia, oraz od parametrów związanych z konstrukcją maszyny i jej ustawieniem. Parametrami tymi są: częstotliwość drgań rynny f , amplituda A , kąt β między torem dowolnego punktu rynny i jej powierzchnią (rys. 1) oraz kąt α nachylenia



Rys. 1

powierzchni rynny względem poziomu. Konstruktor projektujący przenośnik wibracyjny musi się liczyć z właściwościami fizycznymi nosiwa, chociaż nie ma na nie żadnego wpływu i nie może ich kształtować. Może natomiast dobrać swobodnie parametry drgań rynny. Zagadnienie sprowadza się do określenia chwili oderwania nosiwa od powierzchni rynny, długości lotu i chwili upadku z powrotem na rynnę. Jest to zależne od współczynnika podrzutu K , który jest stosunkiem normalnej składowej przyspieszenia rynny względem jej powierzchni i normalnej składowej przyspieszenia ziemskiego:

$$K = \frac{4\pi^2 f^2 A \sin \beta}{g \cos \alpha}, \quad (1.1)$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie. K musi być większe od jedności, ażeby nosiwo mogło choć na chwilę oderwać się od rynny, ponadto im K jest większe, tym lot nosiwa jest dłuższy [1-5].

2. Analiza dotychczasowych zaleceń doboru stosunku K

W przesiewaczach [6-9] nosiwo powinno spadać na sito wibracyjne w tym samym okresie ruchu sita, w którym rozpoczęło lot. Jeśli literą m oznaczymy stosunek czasu lotu nosiwa do okresu drgań sita lub rynny, to powyższy warunek będzie spełniony, gdy $0 < m \leq 1$, wtedy $1 < K \leq 3,3$. Pogląd ten jest słuszny, jeśli chodzi o przesiewacze, gdyż tam głównym celem jest przesianie nadawy, zatem liczba zetknięć nosiwa z powierzchnią sita powinna być możliwie największa.

Żuczkow [10] zaleca, żeby czas odpowiadający upadkowi nosiwa na rynnę wynosił $3/4$ okresu drgań rynny przenośnika i wszystkie swoje rozważania oraz obliczenia opiera na tym warunku. Wtedy $K \approx 1,68$.

WEHMEIER [3] zestawił tablicę wartości K , które poleca i przy których można stosować jego wzór na średnią prędkość transportowania [3, 4].

Jeżeli współczynnik podrzutu K mieści się w granicach podanych w tablicy 1, wtedy cykl ruchu nosiwa składa się z czterech faz. W czasie pierwszej fazy

Tablica 1

K	1,00 do 3,30	4,60 do 6,36	7,79 do 9,48	10,94 do 12,61
m	0,00 do 1,00	1,40 do 2,00	2,45 do 3,00	3,466 do 4,00

nosiwo przemieszcza się razem z rynną nie wykonując względem niej żadnych ruchów, w drugiej fazie występuje poślizg nosiwa względem rynny, w trzeciej oderwanie od powierzchni rynny i swobodny lot w powietrzu, w czwartej upadek i wyrównanie prędkości nosiwa i rynny. Gdyby natomiast współczynnik podrzutu K nie mieścił się w podanych granicach, wtedy nosiwo spadając miałyby tendencję do ponownego oderwania od rynny, jednak z prędkością mniejszą od prędkości, z jaką odrywa się od rynny po przejściu pierwszej i drugiej fazy ruchu [1, 3]. W ten sposób następowałyby po sobie długie i krótkie skoki nosiwa. Byłoby to niekorzystne, gdyż krótki skok wybitnie zmniejsza prędkość transportowania i ruch nosiwa jest przy tym nierównomierny. Słuszność swojej tezy dowiódł WEHMEIER doświadczalnie, poza tym potwierdziły ją także doświadczenia SIERGIEJEW [3, 11].

BLECHMAN [12] zaleca stosować K w granicach

$$\sqrt{\pi^2 p^2 + 1} \leq K \leq \sqrt{\pi^2 p^2 + 4}$$

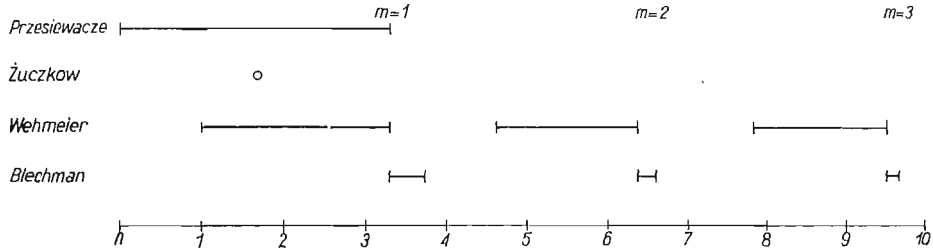
i podaje, że K powinno być średnią wartością obu granic:

$$K = \frac{1}{2} (\sqrt{\pi^2 p^2 + 1} + \sqrt{\pi^2 p^2 + 4}).$$

We wzorach powyższych p jest liczbą naturalną. Dla $p = 1, 2$ i 3 mamy odpowiednio $K = 3,51; 6,48$ i $9,55$.

Łatwo się zorientować, że powyższe wartości K mieszczą się poza granicami przedziałów zalecanymi przez WEHMEIERA. Najlepiej zilustruje to rys. 2.

Okazuje się, że zalecenia odnośnie doboru współczynnika podrzutu K są bardzo rozbieżne. Warto więc zanalizować proces ruchu nosiwa na rynnie przenośnika wibracyjnego i podjąć próbę określenia takich warunków jego pracy, ażeby osiągnąć optymalny efekt transportowania.



Rys. 2

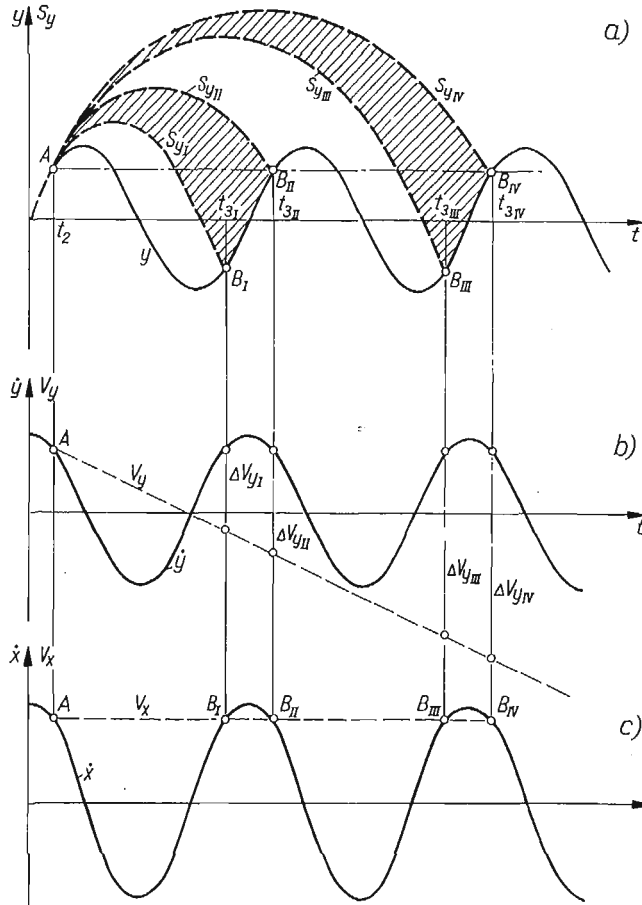
3. Zasada najkorzystniejszego ruchu przenośnika

Z pewnym przybliżeniem można przyjąć, że rynna wykonuje ruch harmoniczny. Na rys. 3 liniami ciągłymi wykreślono: przemieszczenie normalne y (rys. 3a), prędkość normalną rynny \dot{y} (rys. 3b) i prędkość styczną rynny \dot{x} (rys. 3c) jako funkcje czasu t . Przypuśćmy, że nosiwo zostało podrzucone w chwili t_2 w punktach oznaczonych na wykresach literą A . Jeśli pominąć fazę poślizgu, jak to się czyni przy tego rodzaju rozważaniach [2-5], to można przyjąć, że w chwili oderwania się nosiwo ma taką samą prędkość jak rynna. Jeżeli rynna jest pozioma i jeśli pominąć opory powietrza, to w czasie lotu w kierunku stycznym do powierzchni rynny na nosiwo nie działa żadna siła, a więc jego prędkość v_x jest stała (linia przerywana na rys. 3c), natomiast w kierunku normalnym działa tylko siła ciężkości, a więc prędkość nosiwa v_y jest liniową funkcją czasu (linia przerywana na rys. 3b)¹. Funkcja normalnego przemieszczenia nosiwa s_y jest w takich warunkach parabolą drugiego stopnia (linia przerywana na rys. 3a). Biorąc pod uwagę wykresy na rys. 3a oraz 3b łatwo zauważyć, że jeśli nosiwo upadnie w punktach B_I , B_{II} , B_{III} i B_{IV} , to jego prędkość styczna będzie równa w chwili upadku prędkości stycznej rynny. Jeśli nosiwo upadnie między punktami B_I i B_{II} oraz B_{III} i B_{IV} , to prędkość styczna rynny będzie większa od prędkości nosiwa, natomiast przy upadku w każdym innym miejscu mniejsza.

Styczny kierunek ruchu jest jednocześnie kierunkiem transportowania, a więc kiedy prędkość styczna rynny w chwili upadku jest większa od prędkości stycznej nosiwa, to nosiwo przy zetknięciu z rynną jest jak gdyby przez nią popędzane i ruch nosiwa staje się bardziej płynny. Kiedy natomiast przy upadku prędkość styczna rynny jest mniejsza od prędkości stycznej nosiwa lub ma wartość ujemną, wówczas nosiwo po upadku zostaje przyhamowane, co niewątpliwie odbija się na średniej prędkości transportowania. Z rysunku 3b

¹ Ze względu na przejrzystość rys. 3 nie jest ściśły; w rzeczywistości każdemu przypadkowi ruchu powinny odpowiadać różne wykresy y , \dot{y} , \dot{x} , v_y , v_x .

wynika, że w strefach między punktami B_I i B_{II} oraz B_{III} i B_{IV} różnice między normalnymi prędkościami nosiwa i rynny są dość pokaźne, a zatem podczas upadku nastąpi silne uderzenie w kierunku normalnym nosiwa o rynnę i silny docisk nosiwa do rynny, co zapewni nadanie nosiwu prędkości stycznej.



Rys. 3

Z przytoczonej analizy ruchu wynika, że przenośnik wibracyjny będzie pracował najkorzystniej wówczas, gdy przy upadku nosiwa na rynnę prędkość styczna rynny będzie większa od prędkości stycznej nosiwa lub co najmniej jej równa. Oczywiście należy uwzględnić ograniczenie współczynnika podrzutu K wysunięte przez WEHMEIERA.

4. Matematyczne ujęcie przyjętej zasady

Zgodnie z rys. 1 i 3 normalne oraz styczne przemieszczenia rynny opisują następujące funkcje czasu t :

$$(4.1) \quad y = A \sin \beta \sin 2\pi ft,$$

$$(4.2) \quad x = A \cos \beta \sin 2\pi ft.$$

Po zróżniczkowaniu podług czasu otrzymuje się normalną i styczną prędkość rynny

$$(4.3) \quad \dot{y} = 2\pi f A \sin \beta \cos 2\pi ft,$$

$$(4.4) \quad \dot{x} = 2\pi f A \cos \beta \cos 2\pi ft,$$

a po dwukrotnym zróżniczkowaniu przyspieszenie normalne

$$(4.5) \quad \ddot{y} = -4\pi^2 f^2 A \sin \beta \sin 2\pi ft.$$

Przy pominięciu oporu powietrza w czasie lotu na nosiwo działa tylko siła ciężkości, a więc w kierunku normalnym i stycznym składowe przyspieszenia wynoszą

$$(4.6) \quad a_y = -g \cos \alpha,$$

$$(4.7) \quad a_x = -g \sin \alpha.$$

Po dwukrotnym scałkowaniu wyrażenia (4.6) i obliczeniu stałych całkowania z warunku, że w chwili początkowej t_2 prędkość normalna nosiwa wynosi $v_y = \dot{y}(t_2)$, zaś jego położenie $s_y = y(t_2)$, otrzymamy funkcję przemieszczenia nosiwa w kierunku normalnym do powierzchni rynny:

$$(4.8) \quad s_y = -\frac{g \cos \alpha}{2} (t^2 - t_2^2) + g t_2 \cos \alpha (t - t_2) + 2\pi f A \sin \beta \times \\ \times \cos (2\pi f t_2)(t - t_2) + A \sin \beta \sin 2\pi f t_2.$$

Z kolei całkując wyrażenie (4.7) i obliczając stałą całkowania z warunku, że w chwili t_2 prędkość styczna nosiwa wynosi $v_x = \dot{x}(t_2)$, otrzymujemy prędkość styczną nosiwa:

$$(4.9) \quad v_x = -g(t - t_2) \sin \alpha + 2\pi f A \cos \beta \cos 2\pi f t_2.$$

Po okresie lotu nosiwo spada na powierzchnię rynny w czasie t_3 . W tej chwili przemieszczenia normalne rynny i nosiwa są równe:

$$(4.10) \quad s_y(t_3) = y(t_3).$$

Po podstawieniu do równania (4.10) funkcji (4.8) i (4.1), mamy

$$(4.11) \quad -\frac{g \cos \alpha}{2} (t_3^2 - t_2^2) + g t_2 \cos \alpha (t_3 - t_2) + 2\pi f A \sin \beta \cos (2\pi f t_2) \times \\ \times (t_3 - t_2) + A \sin \beta \sin 2\pi f t_2 = A \sin \beta \sin 2\pi f t_3.$$

W chwili upadku prędkość styczna rynny powinna być nie mniejsza od prędkości stycznej nosiwa

$$(4.12) \quad v_x(t_3) \leq \dot{x}(t_3).$$

Podstawiając tu funkcje (4.9) i (4.4) otrzymamy

$$(4.13) \quad -(t_3 - t_2) g \sin \alpha + 2\pi f A \cos \beta \cos 2\pi f t_2 \leq 2\pi f A \cos \beta \cos 2\pi f t_3.$$

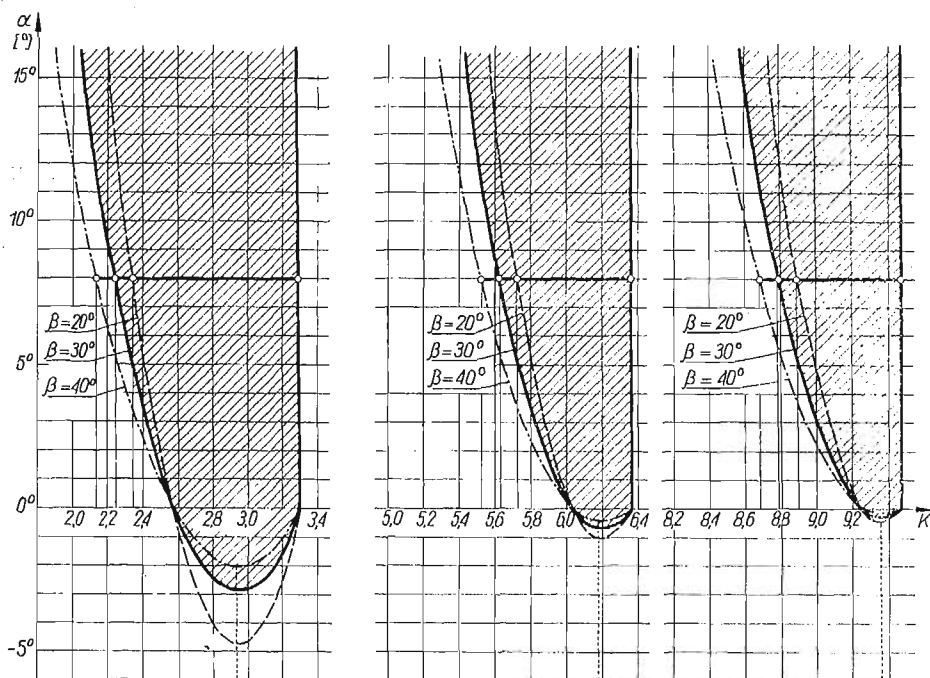
Równanie (4.11) i nierówność (4.13) stanowią układ opisujący zasadę najkorzystniejszego ruchu przenośnika wibracyjnego. Do równań tych należy podstawić wartości czasów t_2 i t_3 .

Czas t_2 można wyliczyć z warunku, że w chwili odrywania docisk nosiwa do powierzchni rynny maleje do zera. Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy:

$$(4.14) \quad \sin 2\pi f t_2 = \frac{1}{K}.$$

Wiadomo także, że m jest stosunkiem czasu lotu nosiwa do okresu drgań rynny:

$$(4.15) \quad m = \frac{t_3 - t_2}{T} = f(t_3 - t_2).$$



Rys. 4

Wprowadzając wyrażenia (4.14) i (4.15) do równania (4.11) otrzymujemy:

$$(4.16) \quad \sqrt{K^2 - 1} = \frac{\cos 2\pi m - 2\pi^2 m^2 - 1}{2\pi m - \sin 2\pi m}.$$

Natomiast po podstawieniu tych wyrażeń do nierówności (4.13) mamy

$$(4.17) \quad -2\pi m \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \leq \sqrt{K^2 - 1} (\cos 2\pi m - 1) - \sin 2\pi m.$$

Dla konkretnych wartości kątów α i β układ (4.16) i (4.17) ma dwie niewiadome K i m . Rozwikłanie jednak układu ze względu na K jest niemożliwe, gdyż zarówno równanie (4.16) jak i nierówność (4.17) są przestępne. Pozostają

więc metody przybliżone, np. metoda iteracji lub metoda graficzna. Stosując tę ostatnią rozwiązano powyższy układ dla szeregu wartości kątów α i β . Na podstawie przeprowadzonych obliczeń skonstruowano nomogram (rys. 4), z którego można dobierać współczynnik podrzutu K w ten sposób, żeby była spełniona zasada najkorzystniejszego ruchu przenośnika wibracyjnego.

5. Nomogram doboru stosunku K

Jeżeli np. rynna przenośnika jest nachylona pod kątem $\alpha = 8^\circ$ (transportowanie odbywa się z dołu pod górę), to można odczytać z nomogramu, że zasada najkorzystniejszego ruchu jest spełniona, gdy:

$$\begin{aligned} K &= 2,13 \text{ do } 3,3, & 5,51 \text{ do } 6,36, & 8,67 \text{ do } 9,48 & \text{ przy } \beta = 40^\circ, \\ K &= 2,24 \text{ do } 3,3, & 5,62 \text{ do } 6,36, & 8,78 \text{ do } 9,48 & \text{ przy } \beta = 30^\circ, \\ K &= 2,34 \text{ do } 3,3, & 5,72 \text{ do } 6,36, & 8,9 \text{ do } 9,48 & \text{ przy } \beta = 20^\circ. \end{aligned}$$

Istnieje więc kilka obszarów, w których przyjęta zasada jest spełniona. Pierwszy obszar odpowiada $m \leq 1$, czyli przypadkowi kiedy czas lotu jest krótszy od okresu drgań rynny. Drugi obszar odpowiada $1 < m \leq 2$, trzeci $2 < m \leq 3$ itd. Nomogram na rys. 4 obejmuje tylko trzy pierwsze obszary. Każdy obszar przy kątach $\alpha > 0$ jest ograniczony z lewej strony krzywą, której współrzędne spełniają układ (4.16) i (4.17), z prawej zaś prostą pionową wynikającą z ograniczeń WEHMEIERA.

Przy kątach $\alpha < 0$ obszary ograniczone są z obu stron krzywymi wynikającymi z zasady najkorzystniejszego ruchu przenośnika. Przy transportowaniu w dół pod dość dużymi kątami ($\alpha < 0$) zasada większości prędkości stycznej rynny od prędkości stycznej nosiwa nie może być spełniona; wtedy należy dobierać stosunek K w ten sposób, żeby chociaż różnice między tymi prędkościami były najmniejsze, a więc $K \approx 2,94, 6,19, 9,36$ itd. (Na rysunku 4 proste pionowe kropkowane).

Chociaż zasada najkorzystniejszego ruchu przenośnika jest spełniona w całym zakreśwanym obszarze (np. dla $\beta = 30^\circ$), to lepiej stosować wartości K odpowiadające lewej gałęzi krzywej. Przy wartościach K stanowiących górną granicę przedziałów WEHMEIERA nosiwo opada na rynnę w takiej fazie ruchu, że ma od razu tendencję do ponownego oderwania się od rynny. Ponieważ jednak musi upłynąć pewien okres czasu, zanim opadną wszystkie ziarna warstwy nosiwa, który to okres powinien się zmieścić między chwilą upadku pierwszych ziarn i chwilą ponownego oderwania się warstwy, więc lepiej jeśli upadek nastąpi wcześniej. W ten sposób nosiwo będzie mogło otrzymać od rynny odpowiednio silny impuls w kierunku stycznym.

Po określeniu i wyborze odpowiedniego stosunku K można na podstawie wzoru (1.1) obliczyć częstotliwość drgań rynny f oraz amplitudę A . Przy określonym K średnia prędkość nosiwa zależy od wielkości amplitudy. Jeżeli np. amplitudę A powiększyć x razy, to żeby K pozostało niezmienione, należy zmniejszyć częstotliwość drgań $1/\sqrt{x}$ razy. W rezultacie średnia prędkość nosiwa

zwiększy się \sqrt{x} razy. Zatem im większa jest amplituda przy stałym K , tym większa średnia prędkość transportowania. Nie można jednak powiększać zbytnio amplitudy, bo wraz z jej wzrostem rośnie różnica prędkości Δv , a więc energia uderzenia. Prócz tego trzeba pamiętać o zjawisku opisanym przez BÖTTCHERA [2] i WEHMEIERA [3]. Okazuje się, że dla każdego rodzaju nosiwa przy odpowiedniej grubości warstwy istnieją wartości amplitudy i częstotliwości, przy których ruch nosiwa wzdłuż rynny ustaje.

6. Wybór kątów β i α

Wybór kąta β między styczną do toru rynny i powierzchnią rynny może także nastroić pewnych trudności.

Żuczkwow [10] wychodząc ze swojej tezy, że $t_3 = 3/4T$, wprowadza warunek zapobiegający poślizgowi nosiwa względem rynny przy upadku i z układu dwóch równań wylicza kąt β oraz amplitudę drgań A lub kąt β i częstotliwość drgań f .

SEIDEL [13] przedstawił specjalny diagram, z którego można dobierać amplitudę, częstotliwość i kąt β .

BLECHMAN [12] podszedł do zagadnienia wyboru kąta β rozważając korzyści, jakie daje zmniejszenie kąta β , a przez to powiększenie prędkości stycznej rynny i związanej z tym prędkości transportowania oraz trudności, które powstaną przy tym na skutek konieczności zwiększenia amplitudy przyspieszeń $4\pi^2 f^2 A$ (żeby utrzymać niezmienną K), co pociąga za sobą wzrost sił bezwładności występujących w maszynie. Na podstawie analizy matematycznej zagadnienia wyliczył, że optymalny kąt nachylenia drgań mieści się w granicach: $24^\circ 30' < \beta_{opt} < 35^\circ 20'$. Pokrywa się to z praktyką, gdyż przeważnie stosuje się kąt $\beta = 30^\circ$. A zatem zalecenia BLECHMANA odnośnie do kąta β powinny stanowić podstawę przy projektowaniu przenośników wibracyjnych.

Kąt nachylenia rynny α powinien być dobrany w zależności od różnicy poziomów i odległości transportowania. Doświadczenia wykazują, że można stosować kąty nachylenia rynny w granicach $-15^\circ < \alpha < 15^\circ$.

W przenośnikach wibracyjnych śrubowych pracujących zawsze przy dodatnich kątach α najlepiej przyjmować $\alpha = 6^\circ$ do 8° .

Literatura cytowana w tekście

- [1] A. CZUBAK, *Przenośniki wibracyjne*, Wydawnictwo «Śląsk», Katowice 1964.
- [2] S. BÖTTCHER, *Beitrag zur Klärung der Gutbewegung auf Schwinggrinnen*, Fördern und Heben, Nr. 3, 4, 5, 1958.
- [3] K. H. WEHMEIER, *Untersuchungen zum Fördervorgang auf Schwinggrinnen*, Fördern und Heben, Nr. 5, 6, 1961.
- [4] A. CZUBAK, *Perspektywy rozwoju badań nad ruchem materiałów sypkich transportowanych przenośnikami wibracyjnymi*, Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie, Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa, Nr 13, w druku.

- [5] A. CZUBAK, *Motion of a granular material on the screw vibratory conveyor and the calculation of efficiency*, Materiały z konferencji «Dynamika stroju», Praga 1963, w druku.
- [6] Л.Б. ЛЕВЕНСОН, *Машины для обогащения*, Москва — Ленинград 1933.
- [7] И.Р. МАЛКИН, *Об инерционных грохотах*, Записки Ленинградского Горного Института, 3, **10** (1937).
- [8] В.А. ОЛЕВСКИЙ, *Кинематика грохотов*, Ленинград 1941.
- [9] J. DĘGTYŚ, *Teoria i budowa drzesiewaczu*, WGH, Katowice 1955.
- [10] А.П. ЖУЧКОВ, *К определению оптимальных параметров вибротранспортирования* Труды Новочеркавского Политехнического Института, **108** (1960).
- [11] П.А. СЕРГЕЕВ, *Исследование поведения насыпных материалов при вибрационной транспортировке*, Известия Академии Наук СССР ОТН, Мех и Маш., 5, 1960.
- [12] И.И. БЛЕХМАН, *О выборе основных параметров вибрационных конвейеров*, Обогащение руд, 2, 1959.
- [13] H. SEIDEL *Die Wurfbewegung von Schüttgut auf der schwingenden Ebene*. Bergbautechnik, Nr. 8, 9, 1958.

Резюме

ПОДБОР ПАРАМЕТРОВ ВИБРАЦИОННЫХ КОНВЕЙЕРОВ

Формулируется принцип самого выгодного движения конвейера и дается построенную согласно ему номограмму, служащую для подбора коэффициента подбрасывания K . Этот коэффициент решает о длине полета транспортируемой среды во время подбрасывания. Приводятся также области применимости углов: между касательной к траектории желоба и поверхностью желоба а также между поверхностью и линией горизонта.

Summary

SELECTION OF THE MOTION PARAMETERS FOR VIBRATORY CONVEYORS

The paper contains the formulation of the principle of the most advantageous motion of the conveyor; on this basis a nomograph for the selection of the toss coefficient K is given. The coefficient is crucial for the flight length of the material tossed. There are also given the applicability ranges of the following angles: between the runner track tangent and its surface and between the surface of the runner and the horizontal plane.

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA W KRAKOWIE

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 stycznia 1964.

ANALIZA SKOŃCZONYCH UGIĘĆ SŁABO WYPUKŁEJ MEMBRANY
KULISTEJ OBCIĄŻONEJ LOKALNIE

WŁADYSŁAW PIECHOCKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Podstawowym zagadnieniem analizy naprężeń w powłokach cienkościennych jest wpływ zamocowania elementu przenoszącego obciążenie na konstrukcję. Obciążenie zewnętrzne może działać na małym elemencie powłoki albo na jej pewnej części. Można np. rozważać zagadnienie obciążeń normalnych lub stycznych działających na sztywny krążek zamocowany w powłoce; średnica krążka jest mała w porównaniu ze średnicą powłoki. Tego rodzaju problemy występują szczególnie w przypadku powłok bardzo wiotkich obciążonych lokalnie. Wiele prac poświęcono zagadnieniom powłok kulistych obciążonych ciśnieniem hydrostatycznym, ale zaledwie kilka zajmowało się analizą efektów spowodowanych siłami skupionymi.

Problem wyboczenia, jak wiadomo, ma duże znaczenie w przypadku powłok o skończonej sztywności zginania. Jednak w praktyce współczesnej coraz częściej występuje potrzeba rozpatrzenia zagadnień dotyczących powłok o prawie zerowej sztywności na zginanie. Typową tego rodzaju powłoką-membraną był sztuczny satelita amerykański ECHO 1, dla którego stosunek promienia do grubości wyrażał się liczbą 10^6 . W związku z konstrukcjami kosmicznymi typu ECHO 1 zachodzi konieczność zanalizowania wpływu obciążeń lokalnych wywołujących duże ugięcia powłok.

W pewnych przypadkach powłoka membranowa może być częściowo usztywniona wskutek ciśnienia wewnętrznego. Okazuje się, że w wielu konstrukcjach powłokowych efekty pochodzące od skończonych ugięć oraz nieliniowość charakteru membranowego odgrywają dominującą rolę. Jeśli uwzględnić np. zmianę grubości ścianki powłoki, to w miarę zmniejszania się grubości maleć będą naprężenia zginające i obciążenie zewnętrzne będzie przenoszone głównie przez siły charakteru membranowego. Należy więc poświęcić więcej uwagi zagadnieniom skończonych ugięć membran obciążonych lokalnie. W dalszych rozważaniach naszej pracy będziemy zakładać, że stosunek ugięcia do grubości powłoki nie musi być mały, chociaż względy natury wytrzymałościowej z konieczności ograniczają wielkość odkształceń, tak że założenie o małych odkształceniach pozostaje w mocy.

Zagadnieniem nieliniowych ugięć płaskiej membrany kolistej obciążonej lokalnie zajmował się po raz pierwszy SCHWERIN [1] w 1929 roku. To samo zagadnienie, ale na innej nieco drodze, ponownie rozpatrzył ALEKSIEJEW [2] w 1951 roku. Niestety, obydwie rozwiązania są słuszne tylko częściowo, mianowicie dla liczb Poissona $\nu < 1/3$; natomiast dla $\nu > 1/3$ tracą one sens. W 1962 roku zagadnieniem tym w związku z potrzebami praktyki zainteresowali się W. NACHBAR i W. PIECHOCKI. W pracy [3] przeprowadzili oni szczegółową analizę rozwiązania równania różniczkowego nieliniowego w zależności od warunków brzegowych jak i liczby Poissona. Podane ściśle rozwiązanie jest słuszne dla każdej wartości liczby Poissona. Otrzymane wyniki teoretyczne są zbieżne z danymi doświadczalnymi, które podają W. E. JAHSMAN, F. E. FREL D i A. M. C. HOLMES [4].

Autorowi nie są znane prace traktujące o membranach kulistych obciążonych lokalnie. Ze względu na duże znaczenie praktyczne tej problematyki w niniejszej pracy podjęto próbę przeprowadzenia analizy podobnej do tej, jaką przeprowadzono dla membrany płaskiej.

Sformułowanie zagadnienia. Będziemy rozważali zagadnienie otwartej membrany kulistej o małej wyniosłości z zamocowanym centralnie sztywnym krążkiem. Promień b krążka jest bardzo mały w stosunku do promienia a membrany (rys. 1). Siłą obciążającą membranę jest siła skupiona P , przyłożona do sztywnego krążka. Zakładamy, że przemieszczenie promieniowe u dla $r = b$ znika. Na brzegu zewnętrznym można przyjąć dowolne warunki wyrażone w przemieszczeniach lub naprężeniach. Symetryczne obciążenie normalne odkształci początkowo kulistą membranę na obrotowo-symetryczną konfigurację pozostającą w równowadze. Przyjmujemy, że membrana jest wykonana z materiału sprężystego, ugięcia oraz obroty elementu liniowego są skończone, odkształcenia są małe w stosunku do jedności oraz że związki fizyczne są liniowe. Analizę rozwiązania podano dla przypadku, gdy kąt ϑ charakteryzujący wypukłość membrany po odkształceniu jest tego samego rzędu co kąt θ , odpowiadający membranę przed odkształceniem. Naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia są funkcjami warunków brzegowych, siły skupionej P , liczby Poissona ν oraz parametru $\varepsilon = b/a$ (rys. 1).

Zależności geometryczne. Wyprowadzimy wzory na wielkości geometryczne dla membrany sferycznej przed i po odkształceniu. Zakładamy, że powierzchnia odkształcona jest również osiowo-symetryczna. Oznaczmy przez \mathbf{R} wektor-promień zaczepiony w początku układu współrzędnych i skierowany do punktu P_0 membrany nieodkształconej. Mamy

$$(1.1) \quad \mathbf{R} = r(\theta) \cdot \mathbf{j}_r + z(\theta) \cdot \mathbf{k}$$

gdzie \mathbf{j}_r , \mathbf{k} są wektorami jednostkowymi odpowiednio wzdłuż osi r i z . Natomiast r i z zależą od kąta θ oraz promienia krzywizny a następująco

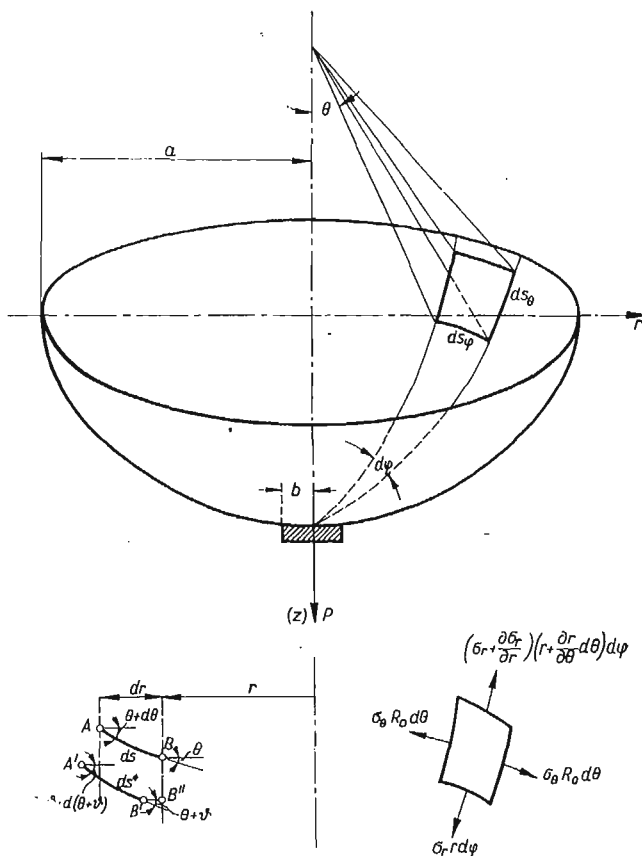
$$(1.2) \quad r = a \sin \theta, \quad z = a(1 - \cos \theta).$$

Obliczając różniczkę wektora \mathbf{R} otrzymamy

$$(1.3) \quad d\mathbf{R} = \alpha \mathbf{j}_\theta d\theta + r \mathbf{j}_\varphi d\varphi,$$

gdzie \mathbf{j}_θ , \mathbf{j}_φ są odpowiednio wektorami jednostkowymi wzdłuż stycznej do południka oraz równoleżnika danej powierzchni. Współczynnik α wyraża się zależnością

$$(1.4) \quad \alpha^2 = r_{,\theta}^2 + z_{,\theta}^2, \quad (r_{,\theta}; z_{,\theta}) = \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right).$$



Rys. 1

Element liniowy ds definiujemy jako

$$(1.5) \quad ds = [d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R}]^{1/2}.$$

Tak więc dla $d\theta = 0$ otrzymamy

$$(1.6) \quad ds_\varphi = r d\varphi$$

i podobnie dla $d\varphi = 0$ mamy

$$(1.7) \quad ds_\theta = \alpha d\theta.$$

Nadając każdemu punktowi P_0 membrany nieodkształconej przemieszczenie symetryczne u w kierunku promienia r oraz w w kierunku osi z otrzymamy powierzchnię obrotowo-symetryczną membrany odkształconej. Wielkości odnoszące się do membrany odkształconej będziemy oznaczali gwiazdką. Tak więc punkt P_2 membrany nieodkształconej przejdzie w punkt P_0^* membrany odkształconej. Transformację tę zapisujemy symbolicznie

$$(1.8) \quad \begin{aligned} z &\rightarrow z+w = z^*, \\ r &\rightarrow r+u = r^*, \\ \theta &\rightarrow \theta+\vartheta = \theta^*. \end{aligned}$$

Zatem powyższa transformacja przenosi punkt materialny P o wektorze-promieniu \mathbf{R} membrany nieodkształconej do punktu P^* membrany odkształconej o wektorze-promieniu \mathbf{R}^* . Ten ostatni zapisujemy w postaci

$$(1.9) \quad \mathbf{R}^* = (r+u)\mathbf{j}_r + (z+w)\mathbf{k}.$$

Postępując analogicznie jak dla wektora \mathbf{R} otrzymamy

$$(1.10) \quad d\mathbf{R}^* = \alpha^* \mathbf{j}_\theta^* d\theta + r^* \mathbf{j}_\varphi^* d\varphi \quad \alpha^2 = r_{,\theta}^{*2} + z_{,\theta}^{*2}.$$

Odkształcone elementy liniowe ds_θ^* i ds_φ^* występują w równaniu (1.10) jako współczynniki skalarowe przy odpowiednich wektorach jednostkowych.

Odkształcenie definiujemy w postaci

$$(1.11) \quad \varepsilon = \frac{ds^* - ds}{ds} \quad \text{lub}^1 \quad (1 + \varepsilon) ds = ds^*.$$

Elementy liniowe ds^* otrzymamy ze wzoru (1.10), natomiast ds — ze wzoru (1.5) dla dowolnego kierunku w punkcie P .

Tak więc otrzymamy

$$(1.12) \quad \varepsilon_r = \left(1 + \frac{du}{dr}\right) - \frac{\cos \theta^*}{\cos \theta}$$

oraz

$$(1.13) \quad \varepsilon_\theta = \frac{r^*}{r} - 1.$$

Podstawiając do równania (1.12) pochodną du/dr obliczoną ze wzoru (1.13), otrzymamy równanie ciągłości w postaci następującej:

$$(1.14) \quad \frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r + \frac{\cos \theta - \cos \theta^*}{\cos \theta} = 0.$$

¹ Definicja ta ma postać definicji dla wydłużeń E_j , wielkości charakterystycznej dla teorii odkształceń skończonych. Zależność między E_j i składową ε_j odkształcenia nieskończonego ma postać $E_j = \sqrt{1 + 2\varepsilon_j} - 1$. Dla małych odkształceń możemy więc przyjąć $E_j \approx \varepsilon_j$. Ponieważ zajmujemy się wyłącznie małymi odkształceniami (ale dużymi ugięciami), zatem E_j możemy zastąpić przez ε_j .

2. Równania równowagi

Dwoma parami przekrojów południkowych i normalnych stożkowych wycinamy element membrany odkształconej. Przyjmujemy, że membrana jest obciążona tylko lokalnie, to znaczy, że działa na nią tylko siła skupiona, przyłożona do sztywnego krążka (rys. 1). Przez σ_r oznaczamy naprężenie normalne w przekrojach $r = \text{const}$, $r + dr = \text{const}$, a przez σ_θ — naprężenie normalne w przekrojach $\varphi = \text{const}$ $\varphi + d\varphi = \text{const}$.

Równanie rzutów sił na oś symetrii z przyjmuje postać

$$(2.1) \quad \frac{d}{d\theta} (R_0 h \sigma_r \sin \theta \sin \theta^*) = 0.$$

Korzystając z zależności $r = R_0 \sin \theta$ możemy przepisać równanie (2.1) następująco:

$$(2.2) \quad \frac{d}{dr} (hr \sigma_r \sin \theta^*) = 0.$$

Całkując równanie (2.2) otrzymamy

$$(2.3) \quad hr \sigma_r \sin \theta^* = \text{const} = C.$$

Aby wyjaśnić znaczenie stałej całkowania rozpatrzmy stan równowagi części środkowej membrany. Jediną siłą zewnętrzną działającą za pośrednictwem sztywnego krążka jest siła P . Jest ona zrównoważona przez wypadkową naprężeń normalnych w przekroju stożkowym. Powyższy warunek wyraża się zależnością

$$(2.4) \quad 2\pi hr \sigma_r \sin \theta_0^* = P.$$

Zatem z (2.3) oraz (2.4) mamy

$$(2.5) \quad C = \frac{P}{2\pi}.$$

Tak więc ostatecznie równanie (2.3) ma postać

$$(2.6) \quad \sigma_r \sin \theta^* = \frac{P}{2\pi hr}.$$

Drugie równanie równowagi otrzymamy rzutując wszystkie działające w przekroju siły na kierunek r . Składową naprężenia promieniowego jest wielkość

$$(2.7) \quad \frac{d}{d\theta} (hR_0 \sigma_r \sin \theta \sin \theta^*),$$

a składową naprężenia σ_θ jest

$$(2.8) \quad -hR_0 \sigma_\theta \cos \theta.$$

Sumując powyższe wielkości otrzymamy drugie równanie równowagi

$$(2.9) \quad \frac{d}{d\theta} (hR_0 \sigma_r \sin \theta \sin \theta^*) - hR_0 \sigma_\theta \cos \theta = 0.$$

Przechodząc do zmiennej niezależnej r możemy napisać

$$(2.10) \quad \frac{d}{dr} (hr\sigma_r \cos \theta^*) - h\sigma_\theta = 0.$$

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że $h = \text{const.}$ Tak więc mamy

$$(2.11) \quad \sigma_r \sin \theta^* = \frac{P}{2\pi hr},$$

$$(2.12) \quad \frac{d}{dr} (r\sigma_r \cos \theta^*) = \sigma_\theta.$$

Jest to podstawowy układ równań opisujący równowagę membrany obciążonej siłą P skierowaną wzdłuż osi symetrii. Równania te wyprowadzono przy założeniu, że ugięcia mogą być dowolne, ale powierzchnia odkształcona pozostaje obrotowo-symetryczna.

3. Sprowadzenie układu równań (2.11), (2.12) oraz (1.14) do jednego równania drugiego rzędu

Obecnie zajmiemy się wyprowadzeniem podstawowego równania nieliniowego opisującego stan równowagi membrany odkształconej. Przejście do wielkości bezwymiarowych uprości nam stronę rachunkową. W tym celu wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$(3.1) \quad S_r = \frac{\sigma_r}{E}, \quad S_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E}, \quad \eta = \frac{P}{2\pi hbE}, \quad \psi = \frac{u}{a\epsilon\eta},$$

$$\epsilon = \frac{b}{a}, \quad \zeta = \frac{r}{a\epsilon\eta}, \quad \chi = \zeta \operatorname{ctg} \theta^*.$$

Zachodzi więc oczywisty związek

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{a\epsilon\eta} \frac{d}{d\zeta}.$$

Tak więc równania (2.11) i (2.12) przyjmują postać

$$(3.2) \quad \zeta S_r \sin \theta^* = 1,$$

$$(3.3) \quad \frac{d}{d\zeta} (\zeta S_r \cos \theta^*) = S_\theta.$$

Z prawa Hooke'a wiemy, że

$$(3.4) \quad S_\theta = \epsilon_\theta + \nu S_r.$$

Podstawiając w miejsce S_r odpowiednią wartość z równania (3.2) oraz wyrażając ϵ_θ przez funkcję ψ otrzymamy zależność

$$(3.5) \quad S_\theta = \frac{\psi}{\zeta} + \frac{\nu}{\zeta} \operatorname{cosec} \theta^*.$$

Podobnie otrzymamy związek

$$(3.6) \quad \varepsilon_r = \frac{1-\nu^2}{\zeta} \operatorname{cosec} \theta^* - \nu \frac{\psi}{\zeta}.$$

Możemy więc napisać

$$(3.7) \quad \frac{d}{d\zeta} (\operatorname{ctg} \theta^*) = \frac{1}{\zeta} (\psi + \nu \operatorname{cosec} \theta^*),$$

skąd

$$(3.8) \quad \psi = \zeta \frac{d}{d\zeta} (\operatorname{ctg} \theta^*) - \nu \operatorname{cosec} \theta^*$$

lub

$$(3.9) \quad \psi = \frac{d\chi}{d\zeta} - \frac{\chi}{\zeta} (1 + \nu \sec \theta^*).$$

Różniczkując powyższe równanie otrzymamy

$$(3.10) \quad \frac{d\psi}{d\zeta} = \frac{d^2\chi}{d\zeta^2} + \frac{\chi}{\zeta^2} (1 + \nu \sec \theta^*) - \frac{1}{\zeta} \frac{d\chi}{d\zeta} (1 + \nu \sec \theta^*) - \nu \frac{\chi}{\zeta} \frac{d(\sec \theta^*)}{d\zeta}.$$

Obecnie wrócimy do równania ciągłości (1.14). Korzystając z zależności (2.6) oraz (2.9) równanie (1.14) można przepisać w postaci

$$(3.11) \quad \frac{d^2\chi}{d\zeta^2} - [1 - \nu(1 - \sec \theta^*)] \frac{1}{\zeta} \frac{d\chi}{d\zeta} + \left[(1 - \nu)(1 + \nu \sec \theta^*) - \frac{\nu}{\zeta} \frac{d(\sec \theta^*)}{d\zeta} \right] \frac{\chi}{\zeta^2} - \frac{1 - \nu^2}{\zeta} \operatorname{cosec} \theta^* + 1 - \frac{\cos \theta^*}{\cos \theta} = 0$$

lub

$$(3.12) \quad \frac{d^2\chi}{d\zeta^2} - [1 - \nu(1 - \sec \theta^*)] \frac{1}{\zeta} \frac{d\chi}{d\zeta} + \left[(1 - \nu)(1 - \sec \theta^*) - \frac{\nu}{\zeta} \frac{d(\sec \theta^*)}{d\zeta} \right] \frac{\chi}{\zeta^2} + 1 - \sec \theta \sec^{-1} \theta^* = 0.$$

Wprowadźmy teraz następującą zmianę zmiennych

$$(3.13) \quad x = \left(\frac{r}{a} \right)^2 = (\varepsilon\eta)^2 \zeta^2, \quad y = 2^{2/3} (\varepsilon\eta)^{4/3} \chi;$$

wówczas mamy

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} = 2(\varepsilon\eta)^2 \frac{d}{dx}, \quad \frac{d^2}{d\zeta^2} = 4(\varepsilon\eta)^2 x \frac{d^2}{dx^2} + 2(\varepsilon\eta)^2 \frac{d}{dx};$$

tak więc równanie (3.12) przyjmie postać

$$(3.14) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} + \nu(1 - \sec \theta^*) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4} \left[(1 - \nu)(1 - \sec \theta^*) - 2(\varepsilon\eta)^2 \nu \frac{d(\sec \theta^*)}{dx} \right] \frac{y}{x} + (4\varepsilon\eta)^{-2/3} (1 - \sec \theta \sec^{-1} \theta^*) = 0.$$

Na podstawie (3.1) mamy

$$(3.15) \quad \sec \theta^* = (1 + \operatorname{ctg}^{-2} \theta^*)^{1/2} = \left[1 + \left(\frac{\zeta}{\chi} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Podstawiając do powyższego wzoru funkcję χ ze związku (3.13) otrzymamy

$$(3.16) \quad \sec \theta^* = \left[1 + (4\varepsilon\eta)^{-2/3} \frac{x}{y^2} \right]^{1/2}.$$

Dotychczas nie zakładaliśmy nic o wielkości ugięć, a zatem równanie (3.14) jest równaniem nieuproszczonym. Ze względu na jego złożoność w dalszych rozważaniach będziemy zajmowali się równaniem uproszczonym. Założymy mianowicie, że kąty θ oraz ϑ są tego samego rzędu. W tym założeniu jest zawarta zasadnicza różnica między zwykłym, klasycznym postawieniem zagadnienia dla małych przemieszczeń, a zagadnieniem dla dużych ugięć, sformułowanym powyżej. Dla małych ugięć można przyjąć, że kąt ϑ obrotu łuku południka jest wielokrotnie mniejszy od kąta θ charakteryzującego wypukłość membrany. Tak więc równanie dla małych przemieszczeń możemy otrzymać z podanych tutaj wzorów przez pominięcie kąta ϑ w porównaniu z θ . W rozważanym przypadku ograniczymy się do takich ugięć, dla których zachodzi następująca nierówność:

$$(3.17) \quad (4\varepsilon\eta)^{2/3} \frac{x}{y^2} \ll 1.$$

Przy tym założeniu równanie (3.14) upraszcza się do postaci

$$(3.18) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y^2} - C \right) = 0,$$

gdzie

$$C = (4\varepsilon\eta)^{-2/3} \left(\frac{a}{R_0} \right)^2.$$

Jeśli krzywizna membrany równa jest zeru, wtedy mamy $C = 0$ i równanie (3.18) przechodzi w równanie dla ugięć skończonych dla membrany płaskiej [3].

4. Warunki brzegowe

Warunki, które nakładamy na funkcję y dla $x = \varepsilon^2$ oraz $x = 1$, formułujemy w zależności od rodzaju zamocowania. Na brzegu wewnętrznym, dla $x = \varepsilon^2$, przyjmujemy przemieszczenie $u = 0$. Na brzegu zewnętrznym natomiast ($x = 1$) możemy mieć dane niezależne od obciążenia zewnętrznego przemieszczenie promieniowe u_0 :

$$(4.1) \quad 2^{1/3} \cdot (\varepsilon\eta)^{2/3} \cdot \sqrt{x} \left[\frac{dy}{dx} - \frac{1 + \nu y}{2x} \right] = \frac{u_0}{a}.$$

2. Jeżeli na brzegu są dane niezależne od obciążenia naprężenia promieniowe $s_r = s_r^0$, to zgodnie z (5.7) otrzymamy

$$(4.2) \quad 2^{1/3} \cdot (\varepsilon\eta)^{2/3} \cdot \frac{y}{2x} = S_r^0.$$

3. Może wystąpić również kombinacja naprężenia promieniowego i odkształcenia ε_θ . Na przykład, jeśli membrana bez wstępnego naprężenia jest połączona na brzegu zewnętrznym ze sprężystym pierścieniem o sztywności k , to otrzymujemy

$$(4.3) \quad hS_r + k\varepsilon_\theta = 0,$$

czyli

$$(4.4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \left(1 + \nu - \frac{h}{k} \right).$$

4. Membrana jest połączona ze sprężystym pierścieniem z naprężeniem wstępnym, które może być wyrażone przez naprężenie początkowe s_r^0 albo przez początkowe przemieszczenia u_0 . Dla $x = 1$ powinno wtedy być

$$(4.5) \quad hS_r + k\varepsilon_\theta = hS_r^0 \quad \text{lub} \quad \varepsilon_\theta + \frac{hS_r}{k} = \frac{u_0}{a}.$$

Korzystając ze wzorów (5.4), (5.7) i (5.8) możemy napisać

$$(4.6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \left(1 + \nu - \frac{h}{k} \right) - \frac{hS_r^0}{k} \cdot 2^{-1/3} \cdot (\varepsilon\eta)^{-2/3}$$

lub

$$(4.7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \left(1 + \nu - \frac{h}{k} \right) - \frac{u_0}{a} \cdot 2^{-1/3} \cdot (\varepsilon\eta)^{-2/3}.$$

Oczywiście możliwe są jeszcze inne warunki brzegowe. W dalszym ciągu zajmijmy się szczegółowo warunkami typu (4.1).

W danym przypadku mamy następujące warunki dla funkcji rozwiązującej

$$(4.8) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{1 + \nu}{2} \frac{y}{x} = \mu \quad \text{dla } x = 1;$$

$$(4.9) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{1 + \nu}{2} \frac{y}{x} = 0 \quad \text{dla } x = \varepsilon^2,$$

gdzie $\mu = 2^{-1/3} (\varepsilon\eta)^{-2/3} \frac{\mu_0}{a}$.

Korzystając z równania (6.6) możemy napisać powyższe zależności w równoważnej postaci

$$(4.10) \quad \sqrt{y_1^{-1} + Cy_1 + C_0} = \mu + \frac{1 + \nu}{2} y_1, \quad y_1 \equiv y(1),$$

$$(4.11) \quad \varepsilon^2 \sqrt{y_\varepsilon^{-1} + Cy_\varepsilon + C_0} = \frac{1 + \nu}{2} y_\varepsilon, \quad y_\varepsilon \equiv y(\varepsilon^2).$$

Stałą całkowania C_0 wyznaczamy z równania przestępnego

$$(4.12) \quad 1 - \varepsilon^2 = \int_{h(\varepsilon, \nu; C_0)}^{g(\mu, \nu; C_0)} [y^{-1}(\xi) + Cy(\xi) + C_0] d\xi \equiv J(C_0),$$

gdzie $J(C_0) > 0$, $g(\varepsilon, \nu; C_0)$ jest pierwiastkiem rzeczywistym dodatnim równania (4.10), a $h(\varepsilon, \nu; C_0)$ — pierwiastkiem rzeczywistym dodatnim równania (4.11). W przypadku warunków brzegowych wyrażonych w naprężeniach należy przyjąć we wzorze (4.13) zamiast $g(\mu, \nu; C_0)$ wielkość s_0^2 ze wzoru (4.12). Dolna granica (4.13) pozostaje niezmienną. Istnienie tylko jednego dodatniego pierwiastka równania (4.10) i odpowiednio (4.11) wykażemy w p. 7.

5. Przesunięcia, odkształcenia i naprężenia wyrażone przez funkcję rozwiązującą F

Korzystamy z liniowego prawa Hooke'a dla ciała izotropowego i jednorodnego

$$(5.1) \quad \varepsilon_r = S_r - \nu S_\theta, \quad \varepsilon_\theta = S_\theta - \nu S_r,$$

gdzie ν jest współczynnikiem Poissona. Stosując zależność

$$(5.2) \quad \varepsilon_\theta = \frac{\psi}{\zeta},$$

otrzymany po podstawieniu w miejsce ψ funkcji χ związek

$$(5.3) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{\zeta} \frac{d\chi}{d\zeta} - \frac{\chi}{\zeta^2} (1 + \nu \sec \theta^*).$$

Wyrażając następnie χ przez funkcję y otrzymamy ostatecznie

$$(5.4) \quad \varepsilon_\theta = 2^{1/3} (\varepsilon\eta)^{2/3} \left\{ \frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} \left[1 + \nu \left(1 + (4\varepsilon\eta)^{2/3} \frac{x}{y^2} \right)^{1/2} \right] \right\}.$$

Postępując podobnie ze wzorem (3.6) otrzymamy

$$(5.5) \quad S_\theta = 2^{1/3} (\varepsilon\eta)^{2/3} \left[\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} \left(1 + (4\varepsilon\eta)^{2/3} \frac{x}{y^2} \right)^{1/2} \right].$$

Analogicznie dla naprężeń mamy zależności

$$(5.6) \quad S_\theta = 2^{1/3} (\varepsilon\eta)^{2/3} \left[\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} \left(1 + (4\varepsilon\eta)^{2/3} \frac{x}{y^2} \right)^{1/2} \right],$$

i

$$(5.7) \quad S_r = 2^{1/3} (\varepsilon\eta)^{2/3} \frac{y}{x} \left(1 + (4\varepsilon\eta)^{2/3} \frac{x}{y^2} \right)^{1/2}$$

Dla przemieszczenia u wyrażonego przez funkcję rozwiązującą y mamy wzór następujący

$$(5.8) \quad u = r\varepsilon_\theta = (a\varepsilon\eta)\psi = 2^{1/3} (\varepsilon\eta)^{2/3} a \sqrt{x} \left\{ \frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} \left[1 + \nu \left(1 + (4\varepsilon\eta)^{2/3} \frac{x}{y^2} \right)^{1/2} \right] \right\}.$$

Kształt membrany jest określony równaniem

$$(5.9) \quad \frac{dw}{dr} = -\operatorname{tg} \theta^*,$$

a na podstawie wzoru (3.1) i (3.13) mamy

$$(5.10) \quad \operatorname{tg} \theta^* = 2^{2/3} (\varepsilon\eta)^{1/3} \frac{x^{1/2}}{y},$$

tak więc

$$(5.11) \quad w(r) = -2^{1/3} (\varepsilon\eta)^{1/2} \int_b^r \frac{\sqrt{x}}{y} dr + w_d,$$

gdzie w_d jest maksymalnym wychyleniem tarczy zamocowanej w membranie. Jeśli w całce (5.11) wprowadzić zmienną x zamiast r , to otrzymamy

$$(5.12) \quad w(x) = -2^{-1/3} (\varepsilon\eta)^{1/3} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{y(\xi)} + w_d \quad \text{dla } x_0 \leq x < 1,$$

gdzie $x_0 = (b/a)^2$.

6. Całkowanie równania równowagi (3.18)

Mnożąc równanie

$$(6.1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y^2} - C \right) = 0$$

przez dy/dx , otrzymamy

$$(6.2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2y^2} \frac{dy}{dx} = \frac{C}{2} \frac{dy}{dx}$$

lub

$$(6.3) \quad \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y} \right) = C \frac{dy}{dx}.$$

Całkując jednokrotnie to ostatnie równanie otrzymamy

$$(6.4) \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{1}{y} = Cy + C_0,$$

gdzie C_0 jest dowolną stałą całkowania, którą wyznaczymy z warunków brzegowych. Otrzymaliśmy więc równanie pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych

$$(6.5) \quad \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{y^{-1} + Cy + C_0}.$$

Wykażemy, że z dwóch znaków przed pierwiastkiem należy uwzględnić tylko znak dodatni. Z fizycznej określoności membrany wynika, że $\sigma_0 \geq 0$,

$\alpha_r \geq 0$, a na podstawie wzorów (5.6) i (5.7) wnioskujemy, że $y(x) > 0$ oraz $dy/dx > 0$ dla $\varepsilon^2 < x < 1$. Pozostaje nam zatem tylko równanie

$$(6.6) \quad \frac{dy}{dx} = +\sqrt{y^{-1} + Cy + C_0}.$$

Biorąc pod uwagę, że naprężenia mogą przyjmować tylko wartości rzeczywiste mamy ponadto nierówność

$$(6.7) \quad y^2 + cy + d > 0 \quad \text{dla} \quad \varepsilon^2 \leq x \leq 1,$$

gdzie $c = C_0/C$, $d = 1/C$. Ze wzorów (5.7) oraz (6.6) wynika, że funkcja $y(x)$ jest monotoniczna rosnąca w przedziale zamkniętym $\varepsilon^2 \leq x \leq 1$. Ponadto na podstawie założenia o małych odkształceniach wiemy, że naprężenia główne nie mogą rosnąć nieograniczenie. Tak więc funkcja $y(x)$ spełnia następującą nierówność:

$$(6.8) \quad 0 < y(x) < \infty \quad \text{dla} \quad \varepsilon^2 < x < 1,$$

$$(6.9) \quad 0 < \frac{dy}{dx} < \infty \quad \text{dla} \quad \varepsilon^2 < x < 1.$$

Znak silnej nierówności po lewej stronie we wzorze (6.8) wynika z warunku $s_r > 0$ dla $\varepsilon^2 < x < 1$. Natomiast słuszność nierówności po lewej stronie w (6.9) wynika z tego, że

$$(6.10) \quad \frac{dy}{dx} \geq \frac{y}{2x} > 0,$$

co jest równoznaczne z żądaniem, aby $s_0 \geq 0$.

Pisząc równanie (6.6) w postaci

$$(6.11) \quad dx = \frac{dy}{(y^{-1} + Cy + C_0)^{1/2}}$$

i następnie całkując je w granicach od ε^2 do x otrzymamy

$$(6.12) \quad x - \varepsilon^2 = \int_{y(\varepsilon^2)}^{y(x)} (\eta^{-1} + C\eta + C_0)^{-1/2} d\eta \quad \text{dla} \quad \varepsilon^2 \leq x \leq 1,$$

gdzie $y(\varepsilon^2) = h(\varepsilon, \nu; C_0)$. Przyjmując $x = 1$ otrzymamy równanie (4.14).

Całka (6.12) jest całką eliptyczną w postaci Legendre'a. Można ją wyrazić przez funkcję eliptyczną $y(x)$, jednak ze względów rachunkowych — napisanie programu dla maszyny cyfrowej nie przedstawia większych trudności w przypadku operatora całkowego — pozostawimy rozwiązanie w postaci (6.12).

7. Jednoznaczność rozwiązania

Niejednoznaczność rozwiązania tkwi w równaniach (4.8) i (4.9). Są to równania trzeciego stopnia i jako takie mogą mieć więcej niż po jednym pierwiastku

rzeczywistym dodatnim. W rozważanym przypadku równanie (4.9) możemy napisać w postaci

$$(7.1) \quad y_\varepsilon^3 - \bar{c}^2 C y_\varepsilon^2 - \bar{c}^2 C_0 y_\varepsilon - \bar{c}^2 = 0,$$

gdzie

$$\bar{c}^2 = \left(\frac{2\varepsilon^2}{1+\nu} \right)^2 > 0.$$

Dowód istnienia tylko jednego rzeczywistego dodatniego pierwiastka równania (1.7) w przedziale $-A \leq C_0 < +\infty$, gdzie

$$A = 2 \left(\frac{\bar{c} \cdot C}{3} \right)^2 + \frac{3}{\bar{c}^2 C},$$

wynika natychmiast z reguły Kartezjusza. Natomiast dla $C_0 < A$ nie istnieje pierwiastek rzeczywisty dodatni.

Literatura cytowana w tekście

- [1] E. SCHWERIN, *Über Spannungen und Formänderung Kreisringformigen Membranen*, Z. Tech Phys., 12, 1929.
- [2] С.А. АЛЕКСЕЕВ *Кольцеобразная упругая мембрана под действием поперечной силы, приложенной к жесткому центрально расположенному диску*, Инженерный Сборник, 10. (1951).
- [3] W. NACHBAR, W. PIECHOCKI, *Analysis of large deflections of a flat circular membrane*, J. Appl. Mech., w druku.
- [4] W. E. JASHMAN, F. E. FIELD, A. M. C. HOLMES, *Finite deformations in a prestressed, centrally loaded, circular elastic membrane*, Technical report: Mathematics, Lockheed, Missiles and Space Division, 1962.
- [5] Р.Г. СУРКИН, *К теории устойчивости и прочности сферических и эллипсоидальных оболочек, днищ и мембран*, Дисс., физ.-техн. ин-т, Казань 1952.

Резюме

АНАЛИЗ КОНЕЧНЫХ ПРОГИБОВ ПОЛОГОЙ ЛОКАЛЬНО ЗАГРУЖЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ МЕМБРАНЫ

В сферической пологой оболочке закреплен жесткий кружок. На наружном краю даются перемещения или напряжения. Сосредоточенные силы, действующие симметрически на жесткий кружок, изменяют форму, деформируют рассматриваемую мембрану с начального сферического, состояния придавая ей вращательно-симметричную конфигурацию. Мембрана изготовлена из изотропного материала. Предполагаются, конечные прогибы и обороты, тогда как физические зависимости являются линейными.

В работе рассматриваются, для умеренных оборотов, прогибы и напряжения как функции краевых значений, центральной нагрузки, числа Пуассона и отношение радиусов мембраны.

FINITE DEFLECTIONS OF SHALLOW SPHERICAL MEMBRANE
LOCALLY LOADED

A shallow spherical annular membrane is attached to a rigid central plug. At the outer edge displacement or stresses are given. Normal load applied symmetrically to the central disc deflects the membrane out of its initial spherical state into a rotationally symmetric equilibrium configuration. A stiff elastic material is assumed, so that finite deflections and finite rotations of linear elements are obtained with small strains and with the linear, isotropic stress-strain relations. The present paper investigates, for moderate rotations, the membrane displacement and stresses as functions of the boundary conditions, the central load, Poisson's ratio, and the radius ratio, and the ratio of the inner to the outer membrane radius.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 stycznia 1964 r.

METODA PRZYBLIŻONEGO OBLICZANIA PROBLEMÓW POZĄTKOWO-BRZEGOWYCH W ZASTOSOWANIU DO NIESTACJONARNYCH ZAGADNIEŃ PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

ZYGMUNT THRUN (GDAŃSK)

1. Uwagi wstępne

Najbardziej wyczerpującym ujęciem ścisłych rozwiązań zagadnień początkowo-brzegowych, związanych z równaniem przewodnictwa cieplnego, rozwiązań zarówno bezpośrednich, jak i uzyskiwanych poprzez stosowanie transformacji Laplace'a lub funkcji Greena, jest monografia CARSLAWA i JAEGERA [1]. Zagadnienia powyższe można jednakże rozwiązywać i na innej drodze. Dane zagadnienie początkowo-brzegowe można na przykład różnymi sposobami sprowadzić do zagadnienia czysto brzegowego. Jednym ze sposobów jest podwyższanie rzędu równania różniczkowego wraz z dołączeniem dalszych warunków brzegowych często dowolnie obranych [6]. Po takim sprowadzeniu można się już posłużyć metodami rozwiniętymi dla zagadnień brzegowych.

Dla wielu jednak bardziej skomplikowanych problemów początkowo-brzegowych trzeba się w praktyce zadowolić rozwiązaniami przybliżonymi. Rozwiązania takie są często pożyteczne i w takich przypadkach, w których rozwiązania ścisłe istnieją, lecz wyrażają się w sposób skomplikowany przez funkcje specjalne, dla których brak wystarczających tablic. Celem niniejszej pracy jest wprowadzenie pewnego sposobu wyznaczania rozwiązań przybliżonych, który nadaje się praktycznie do wszystkich rodzajów zagadnień niestacjonarnego przepływu ciepła w polach źródłowych i bezźródłowych oraz przy dowolnych rozkładach temperatur początkowych. Sposób ten można również z powodzeniem stosować do niestacjonarnych zagadnień w ciałach o niejednorodnych własnościach termicznych. Rozszerzenie tego sposobu na inne zagadnienia początkowo-brzegowe jest proste.

Rozwiązań przybliżonych poszukuje się w postaci szeregu złożonego z iloczynów dwóch rodzajów funkcji: funkcji $a_i(t)$, zmiennej czasowej t oraz funkcji $\varphi_i(x_k)$ współrzędnych przestrzennych. Na początku obliczeń zakłada się funkcje φ_i w ten sposób, ażeby spełniały one dane jednorodne warunki brzegowe, przy czym funkcja pierwsza $\varphi_0(x_k)$ musi spełniać niejednorodne warunki zagadnienia. Nieznane funkcje czasowe $a_i(t)$ wyznacza się z układu równań różniczkowych oraz z warunku początkowego rozkładu temperatury. Układ równań różniczkowych otrzymuje się z warunków orto-

gonalności wszystkich funkcji $\varphi_i(x_k)$ do wyrażenia otrzymanego przez wstawienie przybliżonego rozwiązania do równania przewodnictwa cieplnego. W tym sensie sposób ten można uważać jako rozszerzenie metody Galerkin [3, 5]. Spełnienie danego warunku początkowego sprowadza się do zagadnienia wariacyjnego, tj. do wyznaczenia takiej wartości funkcji $a_i(t=0)$, dla której istnieje minimum całki (po danym obszarze) z kwadratu różnicy między danym początkowym rozkładem temperatury, a rozkładem przybliżonym w chwili $t \rightarrow 0$ [wzór (1.8)].

Omówioną metodę postępowania przedstawimy na przykładzie zagadnień dwuwymiarowych.

Zagadnieniami dwuwymiarowymi będziemy tu nazywali takie zagadnienia, w których temperatura jest zależna od współrzędnej czasowej t i od dwóch współrzędnych przestrzennych x_1, x_2 : $T = T(t, x_1, x_2)$. Przepływ strumienia cieplnego będzie tu zachodził w płaszczyznach równoległych. Jak wiadomo¹, równaniem przewodnictwa cieplnego w takich przypadkach jest

$$(1.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right) - \frac{A}{c\gamma} = 0$$

w obszarze Ω , $0 < x_r < a_r$ ($r = 1, 2$) przy danych warunkach brzegowych

$$(1.2) \quad \frac{\partial T}{\partial x_r} + h_r(T - T_r) = 0$$

wzdłuż obwodu obszaru Ω oraz przy warunku początkowym

$$(1.3) \quad T = f(x_1, x_2) \quad \text{dla } t = 0.$$

Powyżej wprowadzono następujące oznaczenia:

γ ciężar właściwy ośrodka,

c ciepło właściwe,

h współczynnik przejścia ciepła do otoczenia,

K zdolność przewodzenia ciepła,

$\frac{K}{c\gamma} = \kappa$ współczynnik przewodzenia cieplnego,

A ciepło wytwarzane przez jednostkę objętości.

T_r oznacza tu temperaturę otoczenia, do którego odbywa się promieniowanie ciepła lub też, w przypadku $h_r \rightarrow \infty$, oznacza daną temperaturę wzdłuż rozpatrywanego brzegu obszaru. T_r będziemy przyjmowali jako niezależne od czasu. Dla zagadnień, dla których $T_r = T_r(x_s, t)$ oraz $A = A(x_s, t)$, rozwiązanie $T(x_s, t)$ łatwo otrzymamy z rozwiązania $F(x_s, \lambda)$ dla tego samego problemu przy ustalonych wartościach $T_r(x_s, \lambda)$ oraz $A(x_s, \lambda)$ za pomocą znanego² twierdzenia Duhamela:

$$(1.4) \quad T(x_s, t) = f(x_s) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda} F(x_s, \lambda, t - \lambda) d\lambda, \quad s = 1, 2, 3.$$

¹ Por. [2], str. 9, wzór (1.1).

² Por. [1], str. 21.

Przybliżone rozwiązanie zagadnienia (1.1) przy warunkach brzegowych (1.2) i warunku początkowym (1.3) przyjmujemy w postaci:

$$(1.5) \quad T_{(x_1, x_2, t)}^* = \varphi_0(x_1, x_2) + \sum_{i=1,2}^n a_i(t) \varphi_i(x_1, x_2).$$

Funkcję $\varphi_0(x_1, x_2)$ zakładamy tak, ażeby było spełnione równanie

$$(1.6) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \varphi_0(x_1, x_2) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x_r < a_r, \quad r = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_r} + h_r(\varphi_0 - T_r) = 0$$

wzdłuż krawędzi obszaru Ω .

Pozostają do spełnienia równości

$$(1.7) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \right] \sum_i^n a_i \varphi_i - \frac{A(x_1, x_2, t)}{c\gamma} = 0$$

w obszarze Ω oraz

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_r} + h_r \right) \sum_i^n a_i \varphi_i = 0$$

na brzegu obszaru Ω .

Warunek początkowy (1.3) spełniony jest w ten sposób, ażeby

$$(1.8) \quad \delta \iint_{\Omega} \{f(x_1, x_2) - T^*(x_1, x_2, t=0)\}^2 dx_1 dx_2 = 0.$$

W przypadkach stacjonarnego wytwarzania ciepła $A = A(x_1, x_2)$ wyrażenie $A/c\gamma$ z równania (1.7) przejdzie do pierwszego równania (1.6). Jak wynika z (1.6) $\varphi_0(x_s)$ jest rozwiązaniem równania Poissona w przypadkach, gdy $A(x_s)$ jest stacjonarne. Zajmiemy się rozwiązaniem zagadnienia (1.7) i (1.8). Funkcje $\varphi_i(x_s)$ muszą być pierwszymi ($i = 1, 2, \dots, n$) funkcjami układu zupełnego ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) oraz muszą być tak dobrane, aby spełniały jednorodne warunki brzegowe z (1.7). Jeżeli ponadto zażądamy, aby zamiast ścisłego spełnienia równania różniczkowego każda funkcja φ_k z osobna była ortogonalna do wyrażenia stanowiącego lewą stronę równania (1.7), to otrzymamy układ następujących zwyczajnych równań różniczkowych:

$$(1.9) \quad \sum_{i=1}^n \left[\frac{da_i}{dt} A_{ik} + a_i (B_{ik} + C_{ik}) \right] - Z_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie współczynniki oznaczają następujące wyrażenia całkowe:

$$(1.10) \quad A_{ik} = \iint_{\Omega} \varphi_i(x_1, x_2) \varphi_k(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad B_{ik} = - \iint_{\Omega} \kappa \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_1^2} \varphi_k dx_1 dx_2,$$

$$C_{ik} = - \iint_{\Omega} \kappa \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_2^2} \varphi_k dx_1 dx_2, \quad Z_k = \iint_{\Omega} \frac{A}{c\gamma} \varphi_k dx_1 dx_2.$$

Do rozwiązania układu równań różniczkowych (1.9) potrzebne jest n warunków początkowych, które otrzymamy z (1.8) w postaci

$$\frac{\partial}{\partial a_k(t=0)} \int_{\Omega} \int [f(x_1, x_2) - T^*(x_1, x_2, t=0)]^2 dx_1 dx_2 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

czyli:

$$(1.11) \quad \sum_{i=1}^n a_i(t=0) A_{ik} - \int_{\Omega} \int f(x_1, x_2) \varphi_k dx_1 dx_2 + \int_{\Omega} \int \varphi_0 \varphi_k dx_1 dx_2 = 0.$$

Układ równań różniczkowych (1.9) z warunkami początkowymi (1.11) najlepiej sprowadzić do układu równań algebraicznych stosując transformację Laplace'a:

$$\bar{a}_i(p) = \int_0^{\infty} a_i(t) e^{-pt} dt, \quad \bar{Z}_k(p) = \int_0^{\infty} Z_k(t) e^{-pt} dt;$$

otrzymamy w ten sposób

$$(1.12) \quad \sum_{i=1}^n \{\bar{a}_i[pA_{ik} + B_{ik} + C_{ik}] - a_i(t=0)A_{ik}\} - \bar{Z}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Układ tych równań sprowadzi się do n niezależnych równań, jeżeli za funkcje podstawowe $\varphi_i(x_s)$ przyjmiemy takie funkcje ortogonalne, dla których:

$$\begin{aligned} A_{ik} = B_{ik} = C_{ik} = 0 & \quad \text{dla } i \neq k, \\ A_{kk} = \int_{\Omega} \int \varphi_k^2 dx_1 dx_2 & \quad \text{dla } i = k, \end{aligned}$$

$$(1.13) \quad B_{kk} = - \int_{\Omega} \int \kappa \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_1^2} \varphi_k dx_1 dx_2, \quad C_{kk} = - \int_{\Omega} \int \kappa \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_2^2} \varphi_k dx_1 dx_2.$$

Otrzymamy wtedy

$$(1.14) \quad \bar{a}_k(A_{kk}p + B_{kk} + C_{kk}) - a_k(t=0)A_{kk} - \bar{Z}_k = 0$$

oraz po retransformacji:

$$(1.15) \quad a_k = a_k(t=0) e^{-\left(\frac{B_{kk}+C_{kk}}{A_{kk}}\right)t} + \frac{1}{A_{kk}} \int_0^t Z_k(\tau) e^{-\left(\frac{B_{kk}+C_{kk}}{A_{kk}}\right)(t-\tau)} d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Stałe $a_k(t=0)$ wyznaczamy z (1.11):

$$(1.16) \quad a_k(t=0) = \frac{1}{A_{kk}} \int_{\Omega} \int f(x_1, x_2) \varphi_k dx_1 dx_2 - \frac{1}{A_{kk}} \int_{\Omega} \int \varphi_0 \varphi_k dx_1 dx_2, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Zastanówmy się jeszcze nad możliwościami wyboru podstawowych funkcji przybliżeń $\varphi_i(x_s)$. Jak już wspomniano, funkcje te muszą przedstawiać pierwsze kolejne elementy układu zupełnego i muszą być tak dobrane, aby spełniały jednorodne warunki brzegowe dla danego zagadnienia. Jak wyżej wykazaliśmy, szczególnie korzystne jest przyjęcie funkcji ortogonalnych. Warunek ten spełniają w szczególności funkcje trygonometryczne i wielomiany ortogonalne [7]. Dużo wskazówek na temat przyjęcia takich funkcji znajdujemy w literaturze [3, 4]. Jeżeli mamy dane na przykład warunki brzegowe $T = 0$ wzdłuż wypukłego brzegu obszaru opisanego analitycznie kilkoma krzywymi: $\Phi_s(x_i) = 0$ ($s = 1, 2, \dots, l$), to iloczyn tych funkcji $\Psi = \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s$ można przyjąć jako część składową szeregu funkcji przybliżeń:

$$\varphi_1 = \psi, \quad \varphi_2 = \psi x_1, \quad \varphi_3 = \psi x_2, \quad \varphi_4 = \psi x_1^2.$$

Często można przyjąć także różne inne kombinacje wielomianów lub funkcji trygonometrycznych.

2. Przykłady dla zagadnień jednowymiarowych

2.1. Obszar o warunkach brzegowych niejednorodnych, temperatura początkowa $f(x)$.
Dla obszaru $0 < x < a$ równania zagadnienia przyjmują postać:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0 & \text{dla } 0 < x < a; \\ T &= f(x) & \text{dla } t = 0; \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 & \text{dla } x = 0; \\ T &= T_1 & \text{dla } x = a. \end{aligned}$$

Zakładamy przybliżone rozwiązanie (1.5):

$$(2.2) \quad T_{(x,t)}^* = \varphi_0(x) + \sum_1^n a_i(t) \varphi_i(x).$$

Równania (1.6) upraszczają się do

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} &= 0 & \text{dla } 0 < x < a, \\ \frac{d\varphi_0}{dx} &= 0 & \text{dla } x = 0, \\ \varphi_0 &= T_1 & \text{dla } x = a, \end{aligned}$$

czyli $\varphi_0(x) = T_1$ i jest stałe.

Równania (1.7) przybierają postać:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sum_i^n a_i \varphi_i = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x < a, \\ & \frac{\partial}{\partial x} \sum_i a_i \varphi_i = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0, \\ & \sum_i a_i \varphi_i = 0 \quad \text{dla} \quad x = a. \end{aligned}$$

Przyjmijmy jako funkcje przybliżające $\varphi_i(x) = \cos \frac{i\pi x}{2a}$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

Spełniają one powyższe jednorodne warunki brzegowe oraz tworzą układ zupełny. Poza tym są to funkcje ortogonalne, więc zagadnienie sprowadza się do układu niezależnych równań (1.14). Wyznamy współczynniki (1.13) tego układu

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \int_0^a \cos^2 \frac{i\pi x}{2a} dx = \frac{a}{2}, \\ B_{ii} &= -\kappa \int_0^a \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \varphi_i dx = \kappa \frac{a}{2} \left(\frac{i\pi}{2a} \right)^2, \\ C_{ii} &= Z_k = 0. \end{aligned}$$

Z (1.15) otrzymamy

$$a_i = a_i(t=0) e^{-\left(\frac{i\pi}{2a}\right)^2 \kappa t},$$

a z warunku początkowego (1.16)

$$a_i(t=0) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{i\pi x}{2a} dx + (-1)^{\frac{i+1}{2}} \frac{4}{i\pi} T_1.$$

Ostatecznym rozwiązaniem przybliżonym jest

$$T_{(x,t)}^* = T_1 + \frac{2}{a} \sum_{i=1,3,5,\dots}^n e^{-\left(\frac{i\pi}{2a}\right)^2 \kappa t} \cos \frac{i\pi x}{2a} \left[(-1)^{\frac{i+1}{2}} \frac{2a}{\pi i} T_1 + \int_0^a f(x) \cos \frac{i\pi x}{2a} dx \right].$$

Łatwo zauważyć, że dla $n \rightarrow \infty$ jest to wynik ścisły. Dla warunku brzegowego zmiennego w czasie: dla $x = a$, $T = T_1(t)$, rozwiązanie łatwo można otrzymać z powyższego z pomocą twierdzenia Duhamela.

2.2. Obszar, którego brzeg promieniuje ciepło do otoczenia. Równania zagadnienia są takie same jak w przykładzie powyższym, z wyjątkiem warunku brzegowego dla $x = a$, który ma postać

$$\frac{\partial T}{\partial x} + h(T - T_1) = 0.$$

Pierwszą część rozwiązania przybliżonego otrzymamy z równań (1.6)

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} = 0 \quad \text{dla } 0 < x < a, \quad \frac{d\varphi_0}{dx} = 0 \quad \text{dla } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi_0}{dx} + h(\varphi_0 - T_1) = 0 \quad \text{dla } x = a$$

w postaci $\varphi_0 = T_1$.

Trudniej jest dobrać drugą część rozwiązania przybliżonego z równań

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sum_i^n a_i \varphi_i &= 0 \quad \text{dla } 0 < x < a, \\ \frac{\partial}{\partial x} \sum_i^n a_i \varphi_i &= 0 \quad \text{dla } x = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + h \right) \sum_i^n a_i \varphi_i &= 0 \quad \text{dla } x = a. \end{aligned}$$

Jeżeli przyjmiemy

$$\varphi_i(x) = \cos \alpha_i x, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

to takie przyjęcie spełnia warunek brzegowy dla $x = 0$. Dla równoczesnego spełnienia warunku brzegowego przy $x = a$ konieczne jest, ażeby α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) były dodatnimi pierwiastkami równania

$$\operatorname{tg} \alpha_i a = h/\alpha_i. \quad (2.7)$$

Pierwiastki te są stabelaryzowane w literaturze [1].

Funkcje (3.6) są ortogonalne i tworzą n pierwszych funkcji układu zamkniętego. Wyznamy współczynniki (1.10) układu równań (1.9):

$$A_{ii} = \int_0^a \cos^2 \alpha_i x dx = \frac{h + a(h^2 + \alpha_i^2)}{2(h^2 + \alpha_i^2)},$$

$$B_{ii} = \kappa \alpha_i^2 A_{ii}, \quad A_{ik} = B_{ik} = 0, \quad \text{dla } i \neq k;$$

stąd:

$$a_i(t) = a_i(t=0) \exp(-\alpha_i^2 \kappa t). \quad (2.8)$$

Z warunku początkowego (1.16) otrzymamy

$$a_i(t=0) = \frac{2(h^2 + \alpha_i^2)}{[h + a(h^2 + \alpha_i^2)]} \int_0^a [f(x) - T_1] \cos \alpha_i x dx,$$

ostatecznie więc

$$T_{(x,t)}^* = T_1 + 2 \sum_{i=1,2,\dots}^n \frac{(h^2 + \alpha_i^2)}{[h + a(h^2 + \alpha_i^2)]} e^{-\alpha_i^2 \kappa t} \cos \alpha_i x \int_0^a [(f(x) - T_1)] \cos \alpha_i x dx.$$

Dla $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy znowu wynik ścisły. Podobnie łatwo otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie w przypadku, gdy warunki brzegowe są odmienne, na przykład gdy dany jest stały strumień ciepła $Q = K\partial T/\partial x$ wzdłuż brzegu $x = a$.

2.3. Obszar z ciepłem wytwarzanym. Równanie różniczkowe (1.1) wraz z warunkami granicznymi przyjmą postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{A}{c\gamma} &= 0 \quad \text{dla } 0 < x < a, \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \quad \text{dla } x = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} + hT = 0 \quad \text{dla } x = a, \\ T &= 0 \quad \text{dla } t = 0. \end{aligned}$$

Rozważmy najpierw wypadek źródeł ciepła rozłożonych w sposób ciągły, niezmiennych w czasie:

$$A = A_0 = \text{const.}$$

Zakładamy rozwiązanie przybliżone jak uprzednio. Funkcje $\varphi_0(x)$ otrzymamy z równań

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} + \frac{A_0}{K} = 0, \quad \frac{d\varphi_0}{dx} = 0 \quad \text{dla } x = 0, \quad \frac{d\varphi_0}{dx} + h\varphi_0 = 0 \quad \text{dla } x = a.$$

Łatwo znajdujemy

$$\varphi_0(x) = \frac{A_0}{2K} \left(a^2 + \frac{2a}{h} - x^2 \right).$$

Ponieważ szereg $\sum a_i \varphi_i$ ma spełniać równania (2.5), to możemy przyjąć znowu funkcje $\varphi_i(x)$ w postaci wyrażen (2.6), przy czym α_i są znowu pierwiastkami równania (2.7). Wobec tego również wyrażenie (2.8) nadal jest ważne. Stałe $a_i(t=0)$ wyznaczmy z (1.16):

$$a_i(t=0) = \frac{-1}{A_{ii}} \int_0^a \varphi_0 \varphi_k dx = \frac{2A_0(h^2 + \alpha_i^2)}{K\alpha_i^2[h + a(h^2 + \alpha_i^2)]} \left[a \cos \alpha_i a - \sin \alpha_i a \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\alpha_i a}{h} \right) \right].$$

Ostatecznym rozwiązaniem przybliżonym jest

$$(2.9) \quad T_{(x,t)}^* = \frac{A_0}{2K} \left\{ \left(a^2 + \frac{2a}{h} - x^2 \right) - 4h \sum_i \frac{\exp(-\alpha_i^2 \kappa t) \cos \alpha_i x}{\alpha_i^2 [h + a(h^2 + \alpha_i^2)] \cos \alpha_i a} \right\}.$$

Rozważmy teraz przypadek źródeł ciepła zmiennych w czasie:

$$A = A(t).$$

Rozwiązanie dla takiego przypadku możemy otrzymać z rozwiązania poprzedniego korzystając z twierdzenia Duhamela (1.4). Otrzymamy wtedy po prostych przeliczeniach

$$(2.10) \quad T_{(x,t)}^* = \frac{2\kappa h}{K} \sum_{i=1,2}^n \frac{\cos \alpha_i x}{[h + \alpha_i(h^2 + \alpha_i^2)] \cos \alpha_i a} \int_0^t A(\tau) \exp[-\alpha_i^2 \kappa(t - \tau)] d\tau.$$

Rozwiążemy to zadanie jednakże naszym sposobem bez uciekania się do poprzedniego rozwiązania. Zakładamy przybliżenie

$$T_{(x,t)}^* = \sum_i a_i(t) \varphi_i(x).$$

Przyjeliśmy tu $\varphi_0(x) = 0$ ze względu na jednorodne warunki brzegowe zagadnienia. Z powodu zależności od czasu funkcja rozkładu źródeł $A(t)$ wejdzie teraz w skład równań (1.7);

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sum_i^n a_i(t) \varphi_i(x) - \frac{A(t)}{c\gamma} &= 0 \quad \text{dla } 0 < x < a, \\ \frac{\partial}{\partial x} \sum_i^n a_i \varphi_i &= 0 \quad \text{dla } x = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + h \right) \sum_i^n a_i \varphi_i = 0 \quad \text{dla } x = a, \\ \sum_i^n a_i \varphi_i &= 0 \quad \text{dla } t = 0. \end{aligned}$$

Funkcje $\varphi_i(x)$ zakładamy znowu w postaci (2.6). Wyznaczamy współczynniki w wyrażeniach (1.15). Otrzymamy jak poprzednio

$$A_{ii} = \frac{h + a(h^2 + \alpha_i^2)}{2(h^2 + \alpha_i^2)}, \quad \frac{B_{ii}}{A_{ii}} = \kappa \alpha_i^2.$$

Mamy następnie

$$Z_i = \int_0^a \frac{A(t)}{c\gamma} \varphi_i dx = \frac{A(t)}{c\gamma} \frac{\sin \alpha_i a}{\alpha_i}.$$

Ze wzoru (1.15) otrzymamy

$$a_i(t) = a_i(t=0) \exp(-\alpha_i^2 \kappa t) + \frac{2(h + \alpha_i^2) \sin \alpha_i a}{[h + a(h + \alpha_i^2)] c \gamma \alpha_i} \int_0^t A(\tau) \exp[-\alpha_i^2 \kappa(t-\tau)] d\tau$$

oraz z (1.16):

$$a_1(t=0) = 0.$$

W wyniku ostatecznym otrzymamy wyrażenie na $T^*(x, t)$ identyczne z równaniem (2.10), które otrzymaliśmy uprzednio za pomocą twierdzenia Duhamela. Dla $n \rightarrow \infty$ wynik staje się ścisły.

2.4. Jednostkowe, chwilowe źródła ciepła wzdłuż brzegu $x = \xi$ obszaru. Równanie różniczkowe zagadnienia wraz z warunkami brzegowymi ma postać

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \rightarrow 0 < x < a, \quad T = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = a. \end{cases}$$

Dany warunek początkowy $T = 1$ dla $t = 0$, możemy przedstawić za pomocą funkcji Diraca $\delta(x - \xi)$.

Ze względu na jednorodne warunki brzegowe zagadnienia przyjmujemy rozwiązanie przybliżone

$$T_{(x,t)}^* = \sum_1^n a_i(t) \sin \frac{i\pi x}{a}.$$

Wyznaczamy współczynniki (1.10)

$$A_{ii} = \int_0^a \sin^2 \frac{i\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}, \quad B_{ii} = \kappa \left(\frac{i\pi}{a} \right)^2 \int_0^a \sin^2 \frac{i\pi x}{a} dx = \kappa \frac{a}{2} \left(\frac{i\pi}{a} \right)^2.$$

Ze wzoru (1.15) mamy

$$a_k = a_k(t=0) \exp \left[-\kappa \left(\frac{i\pi}{a} \right)^2 t \right],$$

oraz z (1.16)

$$a_k(t=0) = \frac{2}{a} \int_0^a \delta(x - \xi) \sin \frac{i\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \sin \frac{i\pi \xi}{a}.$$

Rozwiązaniem przybliżonym jest

$$T_{(x,t)}^* = \frac{2}{a} \sum_1^n \exp \left[-\left(\frac{i\pi}{a} \right)^2 \kappa t \right] \sin \frac{i\pi \xi}{a} \sin \frac{i\pi x}{a}.$$

Dla $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy wynik ścisły³. Rozwiązania dla zagadnień podobnych lecz o różnych warunkach brzegowych i początkowych możemy równie prosto otrzymać dobierając odpowiednio funkcje $\varphi_i(\kappa)$.

2.5. Cienki pręt o temperaturze początkowej f_0 . Promieniowanie z poboczniccy pręta.

Jeżeli pręt jest bardzo cienki to w jego przekroju poprzecznym możemy przyjąć równomierny rozkład temperatury. Mamy wtedy do czynienia z liniowym przepływem ciepła. Jeżeli nie ma promieniowania na bocznej powierzchni pręta, to wyznaczenie rozkładu temperatury sprowadza się do zagadnień uprzednio rozpatrywanych. Rozpatrzmy tutaj wpływ tej utraty ciepła przez promieniowanie. Równaniem różniczkowym tego zagadnienia jest⁴

$$(2.11) \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \nu T = 0,$$

gdzie $\nu = h0/\gamma c F$; 0 jest obwodem pręta w przekroju poprzecznym, F powierzchnią przekroju pręta, constant.

Przyjęto tu zerową temperaturę otoczenia, do którego ciepło promieniuje z bocznej powierzchni pręta. Przybliżone rozwiązanie możemy tu otrzymać w sposób dwojaki.

³ Por. [1], str. 298, wzór 2.

⁴ Por. [1], str. 111, wzór (2)

1. Podstawić założone rozwiązanie przybliżone do równania (2.11). Ze względu na obecność członu νT układy równań otrzymane z założenia ortogonalności (1.9) i (1.12) należy wtedy uzupełnić. Dalsza droga postępowania jest wtedy analogiczna do uprzednio stosowanych.

2. Droga podstawienia $T = Ue^{-\nu t}$ sprowadzić można równanie (2.11) do postaci:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0.$$

Warunek początkowy: $U = f_0 \rightarrow t = 0$. Jeżeli końce pręta $x = 0$ i $x = a$ mają być utrzymane w temperaturze zerowej, to otrzymamy warunki brzegowe

$$U = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = a.$$

Wyznamy tu rozwiązanie przybliżone drugim sposobem. Przyjmijmy

$$U_{(x,t)}^* = \sum_i^n a_i(t) \varphi_i(x),$$

przy czym założmy funkcje $\varphi_i(x)$ w postaci:

$$(2.12) \quad \varphi_i(x) = (a-x)x^i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Lepsze byłoby tu przyjęcie $\varphi_i = \sin i\pi x/a$.

Łatwo rozwiązać to zadanie i pokazać, że otrzymalibyśmy w wyniku dla $n \rightarrow \infty$ rozwiązanie ściśle

$$(2.13) \quad U = \frac{4f_0}{a\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i} \exp\left[-\kappa \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 t\right] \sin \frac{i\pi x}{a}.$$

Założmy tu jednak dla porównania rozwiązanie w postaci (2.12) i przyjmijmy dwa pierwsze przybliżenia

$$U^* = a_1(t) (a-x)x - a_2(t)(a-x).$$

Obliczamy współczynniki całkowy

$$\begin{aligned} \int_0^a (a-x)^2 x^2 dx &= \frac{a^5}{30}, & A_{12} = A_{21} &= \int_0^a (a-x)^2 x^3 dx = \frac{a^6}{60}, \\ A_{22} = \int_0^a (a-x)^2 x^4 dx &= \frac{a^6}{105}, & B_{11} = 2\kappa \int_0^a (a-x)x dx &= \kappa \frac{a^3}{3}, \\ B_{12} = B_{21} = 2\kappa \int_0^a (a-x)x^2 dx &= \kappa \frac{a^4}{6}, \\ B_{22} = -\kappa \int_0^a (2a-6x)(a-x)x^2 dx &= \kappa \frac{2}{15} a^5. \end{aligned}$$

Jeżeli przyjmiemy $\kappa = 0.15$ (co odpowiada w przybliżeniu przewodnictwu stali stopowej), $a = 1$, to otrzymamy układ równań (1.12) w postaci

$$\bar{a}_1(2p+3) + \bar{a}_2(p+1,5) = 2a_1(t=0) + a_2(t=0),$$

$$\bar{a}_1(p+1,5) + \bar{a}_2\left(\frac{4}{7}p+1,2\right) = a_1(t=0) + \frac{4}{7}a_2(t=0).$$

Po rozwiązaniu i retransformacji otrzymamy

$$a_1(t) = a_1(t=0) \exp(-1,5t) - 0,5 a_2(t=0) [\exp(-6,3t) - \exp(-1,5t)];$$

$$a_2(t) = a_2(t=0) e^{-6,3t}$$

Układ równań napiszemy teraz następująco:

$$A_{11} a_1(t=0) + A_{12} a_2(t=0) = f_0 B_{11}/2\kappa;$$

$$A_{21} a_1(t=0) + A_{22} a_2(t=0) = f_0 B_{12}/2\kappa.$$

Po podstawieniu obliczonych współczynników i rozwiązaniu otrzymamy w wyniku

$$a_1(t=0) = 5f_0, \quad a_2(t=0) = 0.$$

Znaczy to, że również $a_2(t) = 0$, czyli otrzymaliśmy tylko pierwsze przybliżenie. Dla otrzymania następnego należało założyć

$$U^* = a_1(t)(a-x)x + a_2(t)(a-x)x^3.$$

Z pierwszego przybliżenia otrzymujemy więc

$$U^* = 5f_0 x(1-x) e^{-1,5t}.$$

Porównajmy to przybliżenie z pierwszym wyrazem szeregu rozwiązania ścisłego (2.13):

$$U_1 = \frac{4}{\pi} f_0 \sin \pi x e^{-0,15 \pi^2 t}.$$

Dla $x = 0,50$ otrzymamy z obydwóch wyrażeń

$$U^* = 1,25 f_0 e^{-1,5t}, \quad U = 1,274 f_0 e^{-1,48t \cdot 04}.$$

Dla $t = 1$ otrzymamy błąd około 3%, dla czasów t mniejszych błąd jeszcze maleje, dla większych — wzrasta.

Mając rozwiązanie przybliżone $U^*(x, t)$ wyznaczamy przybliżony rozkład temperatury dla rozważanego na początku pręta z zależności:

$$T_{(x,t)}^* = U_{(x,t)}^* e^{-\nu t}.$$

3. Zagadnienie dwuwymiarowe

3.1. Jednostkowe, chwilowe źródło ciepła w prostokącie. Niech w miejscu $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$ obszaru prostokątnego $0 < x_i < a_i$, ($i = 1, 2$), w chwili $t = \lambda$ działa źródło ciepła o wydajności jednostkowej. Równaniem zagadnienia jest (1.1)

w obszarze $0 < x_i < a_i$, ($i = 1, 2$). Niech będą określone jednorodne warunki brzegowe: dla $x_i = 0$ i $x_i = a_i$, ($i = 1, 2$), $T = 0$. Warunek czasowy możemy przedstawić za pomocą funkcji Diraca następująco:

W chwili $t = \lambda$ jest

$$A/c\gamma = \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \delta(t - \lambda).$$

Zakładamy rozwiązanie przybliżone

$$T_{(x_1, x_2, t)}^* = \sum \sum a_{mn}(t) \varphi_{mn}(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s a_{mn}(t) \sin \alpha_m x_1 \sin \alpha_n x_2,$$

gdzie

$$\alpha_m = m\pi/a_1, \quad \alpha_n = n\pi/a_2.$$

Ze względu na jednorodne warunki brzegowe funkcja $\varphi_0(x_1, x_2) = 0$. Przyjęty układ funkcji jest zupełny, ortogonalny i spełnia jednorodne warunki brzegowe zagadnienia. Wyznaczamy współczynniki (1.13):

$$A_{mmmn} = \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \sin^2 \alpha_m x_1 \sin^2 \alpha_n x_2 dx_1 dx_2 = \frac{a_1 a_2}{4},$$

$$B_{mmmn} = \kappa \alpha_m^2 \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \sin^2 \alpha_m x_1 \sin^2 \alpha_n x_2 dx_1 dx_2 = \kappa \alpha_m^2 \frac{a_1 a_2}{4},$$

$$C_{mmmn} = \kappa \alpha_n^2 \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \sin^2 \alpha_m x_1 \sin^2 \alpha_n x_2 dx_1 dx_2 = \kappa \alpha_n^2 \frac{a_1 a_2}{4},$$

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \frac{1}{c\gamma} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} A \sin \alpha_m x_1 \sin \alpha_n x_2 dx_1 dx_2 \\ &= \delta(t - \lambda) \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \sin \alpha_m x_1 \sin \alpha_n x_2 dx_1 dx_2 \\ &= \delta(t - \lambda) \sin \alpha_m \xi_1 \sin \alpha_n \xi_2. \end{aligned}$$

Z zależności (1.15) otrzymamy

$$a_{mn} = a_{mn}(t=0) e^{-(\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \kappa t} + \frac{4}{a_1 a_2} \sin \alpha_m \xi_1 \sin \alpha_n \xi_2 \int_0^t \delta(\tau - \lambda) e^{-\kappa(\alpha_m^2 + \alpha_n^2)(t-\tau)} d\tau.$$

Ponieważ temperatura początkowa dla $t = 0$ w prostokącie jest równa zeru, $f(x_1, x_2) = 0$, więc ze wzoru (1.16) otrzymamy $a_{mn}(t=0) = 0$. Wobec tego jest

$$a_{mn} = 4 \frac{\sin \alpha_m \xi_1 \sin \alpha_n \xi_2}{a_1 a_2} e^{-(\alpha_m^2 + \alpha_n^2)(t-\lambda)\kappa} \quad (3.1)$$

Rozwiązanie ostateczne otrzymamy w postaci:

$$T_{(x_1, x_2, t)}^* = \frac{4}{a_1 a_2} \sum_{m=1}^n \sum_{n=1}^s \sin \frac{m\pi\xi_1}{a_1} \sin \frac{n\pi\xi_2}{a_2} \times \\ \times \exp \left\{ -\kappa\tau^2 \left[\left(\frac{m}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{n}{a_2} \right)^2 \right] (t-\lambda) \right\} \sin \frac{m\pi x_1}{a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{a_2}.$$

Dla $r, s \rightarrow \infty$ otrzymujemy wynik ściśle⁵ (tj. funkcję Greena).

Do tego samego wyniku możemy dojść naszym sposobem na innej drodze. Pokażemy tutaj ten wariant rozwiązania. Rozkład temperatury wywołany jednostkowym źródłem w chwili $t = \lambda$ możemy bowiem uważać za temperaturę początkową $f(x_1, x_2) = \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2)$, przesuując jednocześnie początek rachuby czasu z $t = 0$ do chwili $t = \lambda$. Równanie różniczkowe zagadnienia (1.1) i (1.7) będzie wtedy jednorodne, nie zawiera bowiem wyrażenia $A/c\gamma$. Wobec tego z równania (1.10) otrzymamy $Z_i = 0$. Zakładając te same funkcje aproksymacji $\varphi_{mn}(x_1, x_2)$ otrzymamy z zależności (1.16) nie jak uprzednio $a_{mn}(t = 0) = 0$, lecz

$$a_{mn}(t = 0) = \frac{4}{a_1 a_2} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \sin \alpha_m x_1 \sin \alpha_n x_2 dx_1 dx_2 = \\ = \frac{4}{a_1 a_2} \sin \alpha_m \xi_1 \sin \alpha_n \xi_2.$$

Wobec tego w wyniku ostatecznym otrzymamy znów (4.1).

3.2. Tarcza prostokątna $x = \pm a_i$, ($i = 1, 2$), o różnych warunkach brzegowych. Promieniowanie ciepła z całej powierzchni tarczy do otoczenia. Dla małej grubości D tarczy można przyjąć równomierny rozkład temperatur w przekroju poprzecznym i równanie różniczkowe zagadnienia przyjmie postać⁶

$$(3.2) \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right) + \mu^2 T = 0, \quad -a_i < x_i < a_i, \quad i = 1, 2,$$

gdzie $\mu^2 = 2h/c\gamma D$.

Warunki brzegowe założmy następujące:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 & \text{dla } x_1 = \pm a_1, \\ T = 0 & \text{dla } x_2 = \pm a_2. \end{cases}$$

Temperatura początkowa jest dowolna: $T = f(x_1, x_2)$ dla $t = 0$.

Ze względu na dodatkowy człon $\mu^2 T$ w równaniu (4.2), należy uzupełnić układ równań (1.9) w następujący sposób:

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^n \left[\frac{da_i}{dt} A_{ik} + a_i (B_{ik} + C_{ik} + \mu^2 A_{ik}) \right] - Z_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

⁵ Por. [1], str. 149, wzór (1).

⁶ Por. [1], str. 229, (3).

W zastosowaniu do zagadnienia (3.2) $Z_k = 0$. Ze względu na jednorodne warunki brzegowe założymy tu następujące rozwiązanie przybliżone:

$$T^* = \sum_i^n a_i(t) \varphi_i(x_1, x_2).$$

Ograniczymy się tutaj do pierwszego przybliżenia

$$\varphi_1(x_1, x_2) = (a_2^2 - x_2^2)(x_1^4 - 2a_1^2 x_1^2).$$

Łatwo sprawdzić, że założenie to spełnia dane warunki brzegowe. Wyznaczamy dalej współczynniki równania (3.2) przyjmując dla uproszczenia obliczeń $a_1 = a_2 = 1$

$$A_{11} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x_1^4 - 2x_1^2)^2 (1 - x_2^2)^2 dx_1 dx_2 = \frac{214 \cdot 16}{35 \cdot 135}, \quad \frac{1}{A_{11}} = 1,379965,$$

$$B_{11} = -\kappa \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (12x_1^2 - 4)(1 - x_2^2)^2 (x_1^4 - 2x_1^2) dx_1 dx_2 = \kappa \frac{64 \cdot 64}{35 \cdot 45},$$

$$C_{11} = 2\kappa \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x_1^4 - 2x_1^2)^2 (1 - x_2^2) dx_1 dx_2 = \kappa \frac{16 \cdot 107}{27 \cdot 35},$$

$$\frac{B_{11} + C_{11}}{A_{11}} = \kappa \frac{1303}{214} = 6,0888\kappa.$$

Z transformacji Laplace'a równania (3.2) przy powyższych danych otrzymamy:

$$\bar{a}_1 = \frac{a_1(t=0)}{(p + 6,0888\kappa + \mu^2)}.$$

Retransformacja powyższego wzoru daje $a_1 = a_1(t=0) \exp[-(6,0888\kappa + \mu^2)t]$. Stałą całkowania $a_1(t=0)$ otrzymamy z (1.16)

$$a_1(t=0) = 1,38 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1, x_2) (1 - x_2^2) (x_1^4 - 2x_1^2) dx_1 dx_2.$$

Rozwiązaniem przybliżonym będzie

$$T_{(x_1, x_2, t)}^* = 1,38 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1, x_2) (x_1^4 - 2x_1^2) (1 - x_2^2) dx_1 dx_2 \times \\ \times \exp[-(6,089\kappa + \mu^2)t] (1 - x_2^2) (x_1^4 - 2x_1^2).$$

3.3. Prostopadłościan. Rozważmy prostopadłościan $0 < x_i < a_i$, ($i = 1, 2, 3$) o zerowej temperaturze ścian bocznych, przy czym niech w chwili $t = \lambda$ w punkcie ξ_i , ($i = 1, 2, 3$), działa chwilowe, jednostkowe źródło ciepła. Jeżeli przedstawimy rozkład temperatury wywołany źródłem punktowym za pomocą funkcji Diraca

$$\delta(t - \lambda) \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \delta(x_3 - \xi_3)$$

i załóżmy rozwiązanie w postaci:

$$T_{(x_1, x_2, x_3, t)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} a_{mns}(t) \sin \frac{m\pi x_1}{a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{a_2} \sin \frac{s\pi x_3}{a_3},$$

to po analogicznych działaniach jak dla zagadnienia dwuwymiarowego w p. 3.1. otrzymamy w wyniku ściśle rozwiązanie (funkcję Greena).

4. Zagadnienia w współrzędnych cylindrycznych i sferycznych

Jeżeli rozważamy tylko zagadnienia osiowo-symetryczne, to równaniem przewodnictwa cieplnego we współrzędnych cylindrycznych (r, z) będzie

$$(4.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \frac{A}{c\gamma} = 0$$

w obszarze: $0 < r < a$, $-1 < z < +1$.

Warunki brzegowe:

$$\partial T / \partial r + h_r(T - T_r) = 0 \quad \text{dla} \quad r = a, \quad -l < z < l,$$

$$\partial T / \partial z + h_z[(T - T_z)] = 0 \quad \text{dla} \quad z = \pm l,$$

przy czym h_r i h_z mogą przyjmować wartości zera i ∞ . Warunek początkowy

$$T = f(r, z) \quad \text{dla} \quad t = 0.$$

Przybliżone rozwiązanie przyjmujemy w postaci

$$(4.2) \quad T_{(r,z,t)}^* = \varphi_0(r, z) + \sum_{i=1}^n a_i(t) \varphi_i(r, z).$$

Zakładamy taką funkcję $\varphi_0(r, z)$, ażeby było spełnione równanie

$$(4.3) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_0(r, z) = 0 \quad \text{dla} \quad \begin{cases} 0 < r < a \\ -l < z < l \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + h_r(\varphi_0 - T_r) = 0 \quad \text{dla} \quad r = a,$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + h_z(\varphi_0 - T_z) = 0 \quad \text{dla} \quad z = \pm l.$$

Pozostaje do spełnienia układ

$$(4.4) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \sum_i^n a_i \varphi_i - A/c\gamma = 0 \quad \text{dla} \quad \begin{cases} 0 < r < a, \\ -l < z < l, \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + h_r \right) \sum_i^n a_i \varphi_i = 0 \quad \text{dla} \quad r = a,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + h_z \right) \sum_i^n a_i \varphi_i = 0 \quad \text{dla} \quad z = \pm l.$$

Warunek początkowy spełnimy w ten sposób, ażeby

$$\delta \int_0^a \int_{-l}^l r [f(r, z) - T^*(r, z, t = 0)]^2 dr dz = 0. \quad (4.5)$$

W przypadku stacjonarnego wytwarzania ciepła przez ośrodek $A = A(r, z)$, wyrażenie $A/c\gamma$ zamiast w (4.4) należy umieścić w (4.3). Układ równań (1.9) będzie tu miał tę samą postać, lecz współczynniki przyjmują następujące wartości:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} A_{ik} &= \int_0^a \int_{-l}^l r \varphi_i(r, z) \varphi_k(r, z) dr dz, & B_{ik} &= - \int_0^a \int_{-l}^l \kappa \left(r \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right) \varphi_k dr dz, \\ C_{ik} &= - \int_0^a \int_{-l}^l \kappa r \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} \varphi_k dr dz, & Z_k &= \int_0^a \int_{-l}^l \frac{A}{c\gamma} r \varphi_k dr dz. \end{aligned}$$

Układ równań do wyznaczenia $a_i(t = 0)$ otrzymamy z warunków (4.5):

$$(4.7) \quad \sum_{i=1}^n a_i(t = 0) A_{ik} - \int_0^a \int_{-l}^l r f(r, z) \varphi_k dr dz + \int_0^a \int_{-l}^l r \varphi_0 \varphi_k dr dz = 0.$$

Jeżeli wybierzemy jako funkcje przybliżeń funkcje ortogonalne takie, dla których $A_{ik} = B_{ik} = C_{ik} = 0$ dla $i \neq k$, to znowu otrzymamy układ wzajemnie niezależnych równań (1.9), z których po rozwiązaniu uzyskamy wyrażenia (1.15), a stałe $a_k(t = 0)$ wyznaczymy następująco:

$$(4.8) \quad a_k(t = 0) = \frac{1}{A_{kk}} \int_0^a \int_{-l}^l r f(r, z) \varphi_k dr dz - \frac{1}{A_{kk}} \int_0^a \int_{-l}^l r \varphi_0 \varphi_k dr dz.$$

4.1. Walec nieskończony. Niech równanie różniczkowe, warunki brzegowe i temperatura początkowa dane będą następująco:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < r < a,$$

$$T = T_1 = \text{const} \quad \text{dla} \quad r = a, \quad T = f(r) \quad \text{dla} \quad t = 0.$$

Rozwiązanie przybliżone (4.2) przyjmujemy następująco:

$$T_{(r,t)}^* = \varphi_0(r) + \sum_i^n a_i(t) \varphi_i(r).$$

Funkcja $\varphi_0(r)$ spełniająca (4.3) przy $h_r \rightarrow \infty$, jest równa $\varphi_0 = T_1 = \text{const}$. Równania (4.4) przyjmą postać:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \sum a_i \varphi_i &= 0 \quad \text{dla} \quad 0 < r < a, \\ \sum a_i \varphi_i &= 0 \quad \text{dla} \quad r = a. \end{aligned}$$

Przyjmijmy funkcje przybliżeń w postaci funkcji Bessela zerowego rzędu

$$(4.9) \quad \varphi_i(r) = J_0(\alpha_i r).$$

Spełnienie warunku brzegowego dla $r = a$ wymaga, ażeby

$$(4.10) \quad J_0(\alpha_i a) = 0,$$

czyli α_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) muszą być kolejnymi pierwiastkami równania (4.10). Wiadomo także, że równanie to nie ma pierwiastków podwójnych ani zespolonych. Wyznamy współczynniki (4.6):

$$A_{ii} = \int_0^a r J_0^2(\alpha_i r) dr = \frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha_i a), \quad A_{ik} = B_{ik} = C_{ik} = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq k,$$

$$B_{ii} = -\kappa \int_0^a \left[r \frac{d^2}{dr^2} J_0(\alpha_i r) + \frac{dJ_0}{dr}(\alpha_i r) \right] J_0(\alpha_i r) dr = \kappa \alpha_i^2 A_{ii}, \quad Z_k = 0.$$

Z zależności (1.15) mamy $\bar{a}_i = a_i(t=0) \exp(-\kappa \alpha_i^2 t)$ oraz ze wzoru (4.8)

$$a_i(t=0) = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_i a)} \left[\int_0^a r f(r) J_0(\alpha_i r) dr - T_1 \frac{a}{\alpha_i} J_1(\alpha_i a) \right].$$

Ostatecznie wynikiem przybliżonym jest

$$(4.11) \quad T_{(r,t)}^* = T_1 + \frac{2}{a^2} \sum_{i=1,2,\dots}^n \frac{\exp(-\alpha_i^2 \kappa t)}{J_1^2(\alpha_i a)} J_0(\alpha_i r) \left[\int_0^a r f(r) J_0(\alpha_i r) dr - T_1 \frac{a}{\alpha_i} J_1(\alpha_i a) \right].$$

Dla $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy znowu wynik ścisły⁷. Dla późniejszego porównania powyższego wyniku ścisłego z obliczeniem przybliżonym przejdźmy w (4.11) na współrzędne bezwymiarowe $\kappa t/a^2 = \tau$, $\alpha \alpha_i = \beta_i$ oraz załóżmy $f(r) = 0$. Otrzymamy wtedy z (4.11)

$$(4.12) \quad \frac{T}{T_1} = 1 - 2 \sum_i^\infty \exp(-\beta_i^2 \tau) \frac{J_0(\beta_i r/\alpha)}{\beta_i J_1(\beta_i)}.$$

W szczególności dla $\tau = 0,3$ i $r = 0$ mamy $T/T_1 = 0,72$.

Przyjmijmy teraz dla rozwiązania tego samego problemu funkcje przybliżeń w postaci:

$$(4.13) \quad \varphi_i(r) = \cos i\pi r/2a, \quad i = 1, 3, 5, \dots, n.$$

Rozważmy tylko pierwsze przybliżenie

$$T^* = T_1 + a_1(t) \cos \pi r/2a;$$

po wyznaczeniu współczynników

$$A_{11} = a^2(1/4 - 1/\pi^2), \quad B_{11} = \kappa \pi^2/4(1/4 + 1/\pi^2),$$

⁷ Por. [1] str. 174, wzór (4), dla $T = 0$.

⁸ Por. [1] str. 175, wykres 19.

oraz po analogicznych obliczeniach jak uprzednio otrzymamy w wyniku pierwsze przybliżenie

$$(4.14) \quad T^* = T_1 + \frac{4\pi^2}{a^2(\pi^2-4)} \left[\int_0^a r f(r) \cos \frac{\pi r}{2a} dr - T_1 \frac{a^2}{\pi} \left(2 - \frac{4}{\pi} \right) \right] e^{-\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \left(\frac{\pi^2+4}{\pi^2-4}\right) \pi t} \cos \frac{\pi r}{2a}.$$

Porównajmy wynik powyższy z wynikiem ścisłym otrzymanym poprzednio. W tym celu założmy $f(r) = 0$ oraz przyjmijmy współrzędne bezwymiarowe $\pi t/a^2 = \tau$, $\alpha\alpha_i = \beta_i$, $\tau = 0,3$ oraz $r = 0$; otrzymamy wtedy

$$(4.15) \quad \frac{T^*}{T_1} = 0,738,$$

w odróżnieniu od wyniku ścisłego (4.12). To znaczy, że już z pierwszego przybliżenia z wyrażenia zamkniętego (4.12) w stosunku do wyniku ścisłego z szeregu (4.11) otrzymujemy błąd rzędu tylko 2,5%. Drugie przybliżenie należałoby przyjąć w postaci

$$T^* = T_1 + a_1(t) \cos \frac{\pi r}{2a} + a_2(t) \cos \frac{3\pi r}{2a}.$$

Gdybyśmy do przybliżonego rozwiązania tego samego problemu zamiast (4.9) lub (4.13) przyjęli jako pierwsze przybliżenie

$$T^* = T_1 + a_1(t)(a^2 - r^2),$$

to po analogicznych obliczeniach i przy tych samych danych otrzymamy $T^*/T_1 = 0,623$ zamiast (4.12) i (4.13). Z powyższych wyników wyraźnie widać, jak bardzo od rodzaju wyboru funkcji przybliżeń φ_i zależy zbieżność szeregów kolejnych przybliżeń.

4.2. Walec skończony. Niech zagadnienie będzie określone następującym równaniem różniczkowym i warunkami granicznymi

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{dla} \quad \begin{cases} -l < z < l, \\ 0 < r < a; \end{cases}$$

$$T = 0 \quad \text{dla} \quad t = 0, \quad T = 1 \quad \text{dla} \quad \begin{cases} r = a, \\ z = \pm l. \end{cases}$$

Zakładamy rozwiązanie przybliżone

$$T_{(r,z,t)}^* = 1 + \sum_m \sum_n a_{mn}(t) J_0(\alpha_n r) \cos \frac{m\pi z}{2l},$$

które spełnia warunki brzegowe, jeżeli założymy, że α_n są kolejnymi pierwiastkami równania (4.10) oraz $m = 1, 3, 5, 7, \dots$. Wyznaczamy współczynniki (4.6)

$$A_{nmik} = B_{nmik} = C_{nmik} = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq n, \quad m \neq k,$$

$$A_{nnmm} = \int_0^a \int_{-l}^l r J_0^2(\alpha_n r) \cos^2 \frac{m\pi z}{2l} dr dz = l \frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha_n a),$$

$$B_{nnmm} = \kappa \int_0^a \int_{-l}^l \left[r \frac{d^2 J_0(\alpha_n r)}{dr^2} + \frac{d J_0(\alpha_n r)}{dr} \right] J_0(\alpha_n r) \cos^2 \frac{m\pi z}{2l} dr dz = \kappa \alpha_n^2 A_{nnmm}$$

dla $i = n, k = m$

$$C_{nmik} = \kappa \left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2 A_{nmik}, \quad Z_{ik} = 0.$$

Zależność (1.15) przybiera postać

$$a_{nm} = a_{nm}(t=0) \exp \left\{ -\kappa \left[\alpha_n^2 + \left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2 \right] t \right\},$$

a stałe wyznaczamy ze wzoru (4.8)

$$a_{nm}(t=0) = -8(-1)^{\frac{m-1}{2}} [\kappa \alpha_n J_1(\alpha_n a)]^{-1}.$$

Wynik przybliżony

$$T^* = 1 - \frac{8}{\pi \alpha} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} J_0(\alpha_n r)}{m \alpha_n J_1(\alpha_n a)} \cos \frac{m\pi z}{2l} \exp \left\{ -\kappa t \left[\alpha_n^2 + \left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2 \right] \right\}$$

przybiera wartość ściłą dla $n, m \rightarrow \infty^9$. W analogiczny sposób możemy otrzymać rozwiązania przybliżone dla zagadnień z innymi warunkami brzegowymi, temperaturą początkową, czy też z działaniem źródeł ciepła A .

4.3. Zagadnienia we współrzędnych sferycznych. Jeżeli rozkład temperatur i źródeł ciepła zależy tylko od współrzędnej r i od czasu t , to równaniem przewodnictwa cieplnego będzie jak wiadomo

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{A}{c\gamma} = 0.$$

Dla otrzymania przybliżonych rozwiązań zagadnień związanych z tym równaniem można zbudować wzory we współrzędnych sferycznych analogiczne do uprzednio wyprowadzonych zależności. Wzory całkowite na współczynniki równań (1.9) A_{ik}, B_{ik}, C_{ik} będą teraz zawierały wyrażenie $r^2 dr$ zamiast $r dr$ jak w przypadku współrzędnych cylindrycznych.

Inną drogą rozwiązywania tych zagadnień jest podstawienie $U = Tr$ do równania (4.16), przez co otrzymujemy równanie typu (2.1), które już rozwiążemy sposobem opisanym w p. 2.

⁹ Por. [1], str. 194, wzór (6).

5. Niejednorodność własności termicznych

Własności cieplne ciał mogą się zmieniać z położeniem i temperaturą. W ostatnim przypadku równanie przewodnictwa cieplnego staje się nieliniowe. W dalszym ciągu będziemy rozważali niejednorodność własności termicznych ciał w zależności tylko od współrzędnych przestrzennych $K = K(x_s)$, $c = c(x_s)$. Zamiast równania (1.1) otrzymamy wtedy dla zagadnień dwuwymiarowych równanie przewodnictwa cieplnego w postaci

$$(5.1) \quad \gamma c(x_1, x_2) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[K(x_1, x_2) \frac{\partial T}{\partial x_1} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[K(x_1, x_2) \frac{\partial T}{\partial x_2} \right] - A(x_1, x_2, t) = 0.$$

Warunek początkowy pozostaje w niezmienionej postaci (1.3), a warunki brzegowe (1.2) przyjmą postać

$$(5.2) \quad \frac{\partial T}{\partial x_r} + h_r(x)(T - T_r) = 0.$$

Przyjmujemy rozwiązanie przybliżone (1.5). Funkcję $\varphi_0(x_s)$ należy tak przyjąć, ażeby spełniała ona niejednorodne warunki brzegowe (5.2) oraz równania

$$(5.3) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left[K(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[K(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} \right] = 0 \quad \text{w obszarze } 0 < x_i < a_i$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} + h_i(x_i)(\varphi_0 - T_i) = 0 \quad \text{dla } x_i = 0, a_i, \quad i = 1, 2.$$

Druga część rozwiązania ma spełniać warunki

$$(5.4) \quad \left\{ \gamma c(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[K(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[K(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \right\} \times \\ \times \sum_i^n a_i(t) \varphi_i(x_1, x_2) - A = 0 \quad \text{w obszarze } 0 < x_i < a_i, \\ \left[\frac{\partial}{\partial x_i} + h_i(x_i) \right] \sum_i^n a_i(t) \varphi_i(x_1, x_2) = 0 \quad \text{dla } x_i = 0, a_i$$

oraz warunek początkowy (1.8). W przypadku stacjonarnych źródeł ciepła wyrażenie $A = A(x_s)$ należy zamiast w (5.4) umieścić w (5.3). Układ równań różniczkowych obowiązuje nadal w postaci (1.9), zmienia się jedynie wartość współczynników

$$(5.5) \quad A_{ik} = \iint_{\Omega} \gamma c(x_1, x_2) \varphi_i(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \\ B_{ik} = - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[K(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \right] \varphi_k(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \\ C_{ik} = - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[K(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \right] \varphi_k dx_1 dx_2, \quad Z_k = \iint_{\Omega} A \varphi_k dx_1 dx_2.$$

Dalszy tok rozwiązywania jest identyczny z dotychczasowym postępowaniem i zilustrowany jest poniższym przykładem.

Najprostszymi typami niejednorodności własności termicznych ciał w zagadnieniach jednowymiarowych są: $K = K_0 x^n$, $c = \text{const}$ oraz $K = \text{const}$, $\gamma c = (\gamma c)_0 x^n$. Najważniejszymi przypadkami praktycznie są takie, dla których $0 \leq n \leq 1$. W odróżnieniu od rozwiązań ścisłych¹⁰ możliwości otrzymania rozwiązań przybliżonych niniejszym sposobem nie są ograniczone do najprostszych tylko wyrażen na zmienność własności termicznych. Operacje matematyczne prowadzają się tutaj do wyznaczenia całek [5.5], które w przypadkach skomplikowanych można rozwiązywać numerycznie oraz do rozwiązywania układu równań różniczkowych pierwszego rzędu i to tylko w przypadku, gdy chodzi o większą liczbę przybliżeń.

Przykład. Niech obszar $0 < x < a$ przedstawia ośrodek o niejednorodności własności termicznych według zależności: $K = K_0 x^{1/2}$, $c = \text{const}$. Dane warunki brzegowe, początkowe oraz rozkład źródeł ciepła są zgodne z równaniami

$$\gamma c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[K_0 x^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x} \right] - A(x, t) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x < a$$

$$T = f(x) \quad \text{dla} \quad t = 0, \quad T = T_1 \quad \text{dla} \quad x = 0, \quad T = T_2 \quad \text{dla} \quad x = a.$$

Przyjmijmy pierwsze przybliżenie rozwiązania w postaci.

$$(5.6) \quad T^* = \varphi_0(x) + a_1(t) x(a-x).$$

Funkcję $\varphi_0(x)$ przyjmujemy zgodnie z równaniami (5.3), które wyrażają się tutaj następująco:

$$K_0 \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x} \frac{d\varphi_0}{dx} \right) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x < a$$

$$\varphi_0 = T_1 \quad \text{dla} \quad x = 0, \quad \varphi_0 = T_2 \quad \text{dla} \quad x = a.$$

Otrzymamy stąd $\varphi_0 = (T_2 - T_1) \sqrt{x}/\sqrt{a} + T_1$. Wyznaczmy współczynniki (5.5).

$$A_{11} = \gamma c \int_0^a x^2 (a-x)^2 dx = \gamma c \frac{a^5}{30}, \quad Z_1 = \int_0^a A(x, t) x(a-x) dx,$$

$$B_{11} = - \int_0^a \frac{d}{dx} \left[K_0 \sqrt{x} \frac{d}{dx} (ax - x^2) \right] x(a-x) dx = \frac{22}{105} a^{1/2} K_0, \quad C_{11} = 0.$$

Wzór (1.15) daje:

$$a_1(t) = a_1(t=0) \exp \left(\frac{-44}{7} \frac{K_0}{a^{1/2} \gamma c} t \right) + \frac{30}{\gamma c a^5} \int_0^t Z_1(\tau) e^{\frac{-44}{7} \frac{K_0}{a^{1/2} \gamma c} (t-\tau)} d\tau.$$

¹⁰ Por. (1), str. 332, wzór (10).

Stałą całkowania $a_1(t=0)$ wyznaczamy z zależności (1.16);

$$a_1(t=0) = \frac{30}{a^5 \gamma c} \int_0^a f(x)x(a-x)dx - \frac{1}{\gamma c \sqrt{a^2}} (11T_1 + 24T_2).$$

Podstawiając powyższe wyniki do wyrażenia $a_1(t)$ otrzymujemy rozwiązanie przybliżone z (5.6).

6. Uwagi końcowe

Powyższy sposób przybliżonego obliczania niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa cieplnego może być z powodzeniem rozszerzony na inne problemy początkowo-brzegowe. Dotyczy to w szczególności trudniejszych zagadnień związanych z ośrodkami niejednorodnymi, gdzie ściśle rozwiązania napotyka się na trudności natury matematycznej. Sposób ten może być też stosowany tam, gdzie istnieją co prawda rozwiązania ściśle, lecz wyrażają się one w skomplikowany sposób przez funkcje specjalne, dla których brak wystarczających tablic. Obliczenie powyższym przybliżonym sposobem sprowadza się praktycznie do obliczenia odpowiednich współczynników całkowych (A_{ik} , B_{ik} , C_{ik} , Z) oraz do rozwiązywania układu zwyczajnych równań różniczkowych. W zagadnieniach związanych na przykład z równaniem falowym będą to równania różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu. Dla wyznaczenia tylko pierwszego przybliżenia lub dla większej ilości przybliżeń, lecz przy odpowiednim doborze funkcji przybliżeń, pozostaje od rozwiązania tylko jedno równanie różniczkowe.

Literatura cytowana w tekście

- [1] H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford 1948.
- [2] W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1960.
- [3] Л.Б. КАНТОРОВИЧ, Б.И. КРЫЛОВ, *Приближенные методы высшего анализа*, Москва 1962.
- [4] L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
- [5] W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Warszawa 1961.
- [6] D. N. G. ALLEN, R. T. SEVERN, *The application of relaxation methods to the solution of non-elliptic partial differential equations*, Quart. J. Appl. Math., nr 4, 1951.
- [7] N. N. LEBIEDIEW, *Funkcje specjalne i ich zastosowanie*, Warszawa 1957.
- [8] J. W. GREEN, *An expansion method for parabolic partial differential equations*, J. of Res., Nat. Bureau of Standards, **51** (1953).

Резюме

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
В ПРИМЕНЕНИИ К НЕСТАЦИОНАРНО-КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Дается способ приближенного решения начально-краевых задач теплопроводности. Ищется приближенное решение в форме ряда произведений функций. Этот способ можно использовать для многих вопросов, касающихся нестационарного потока тепла при различных начальных температурах, как и для различных краевых условий, в полях с источником и без источника. Можно, таким способом, получить решения также и для сред, обладающих неоднородными температурными условиями.

Summary

METHOD OF APPROXIMATE SOLUTION OF INITIAL AND BOUNDARY
PROBLEMS OF NON-STATIONARY HEAT CONDUCTION

A method of obtaining approximate solutions for initial and boundary-value problems concerning conduction of heat in solids is considered. The approximate solutions are assumed in form of series of products of functions. The method is applicable to many problems of heat conduction for arbitrary initial temperature distributions and boundary conditions. Problems of nonhomogeneous solids may be treated in the same way.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lutego 1964.

OBCIĄŻENIA DYNAMICZNE BELEK. BELKA TIMOSHENKI

KRZYSZTOF WILMAŃSKI (ŁÓDŹ)

Oznaczenia

- A_i całkowity przekrój belki,
 A_s przekrój sprowadzony dla ścinania,
 J_e moment bezwładności przekroju dla zginania,
 J_i moment bezwładności przekroju dla bezwładności obrotowej,
 $c_1 = \sqrt{\frac{EJ_e}{\rho J_i}}$ szybkość fali podłużnej,
 $c_2 = \sqrt{\frac{GA_s}{\rho A_i}}$ szybkość fali poprzecznej,
 $K = \frac{\rho A_i}{EJ_e}$,
 $r = \sqrt{\frac{J_i}{A_i}}$ promień bezwładności przekroju,
 $a = \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_2^2}$,
 $b = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2c_2^2}$,
 l długość belki,
 $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$,
 w ugięcie całkowite osi obojętnej zginania,
 w_b ugięcie osi obojętnej, spowodowane momentem gnącym,
 w_s ugięcie osi obojętnej, spowodowane siłami tnącymi,
 \bar{w} transformata ugięcia w ,
 x, t współrzędne miejsca i czasu,
 $\xi = \frac{x}{r}$, $\tau = \frac{c_1 t}{r}$ współrzędne bezwymiarowe miejsca i czasu,
 p parametr transformacji,
 M moment gnący,
 M_0 zewnętrzny moment obciążający,
 Q siła poprzeczna
 $q(x)$ zewnętrzne obciążenie ciągłe,
 ω częstotliwość drgań belki,
 ω_{n1}, ω_{n2} częstotliwość drgań belki pierwszego i drugiego rodzaju dla fal harmoniczných,

- $\eta(t)$ funkcja jednostkowa Heaviside'a,
 J_m, I_m funkcje Bessela pierwszego rodzaju rzędu m od argumentu, odpowiednio rzeczywistego i urojonego,
 E, G moduł Younga i moduł odkształcenia postaciowego.

1. Wstęp

Rozwój przemysłu oraz budowa urządzeń szczególnie narażonych na obciążenia dynamiczne wywołały konieczność uściślenia metod obliczeniowych, stosowanych w klasycznej wytrzymałości materiałów. W 1914 r. H. LAMB [34] zwrócił uwagę, że nawet w najprostszym przypadku belki obciążonej udarowo elementarne równanie drgań, podane przez BERNOULLIEGO i EULERA

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

nie jest prawdziwe. W powyższym równaniu EJ oznacza sztywność na zginanie, ρA masę belki na jednostkę długości, w ugięcie, x, t współrzędne odpowiednio miejsca i czasu.

Równanie to prowadzi do wyniku świadczącego, że wpływ nagle przyłożonego obciążenia rozchodzi się z szybkością nieskończoną. W celu wyeliminowania tego błędu nie zrezygnowano z metod wytrzymałościowych i zgodnie z propozycją S. P. TIMOSHENKI [47] wprowadzono do równania Bernoulliego-Eulera poprawki uwzględniające wpływ sił poprzecznych na ugięcie oraz siły bezwładności obrotowej (poprawka Rayleigha). Mimo że teoria równania Timoshenki jest znacznie bardziej skomplikowana od elementarnej, to jednak jest ona znacznie prostsza od rozwiązania trójwymiarowego układu równań liniowych teorii sprężystości.

2. Podstawowy układ równań

Niech $ABCD$ będzie elementem ograniczonym przez dwa przekroje belki pryzmatycznej, prostopadłe do nieodkształconej osi belki Ox , odległe od siebie o dx . Wtedy związki fizyczne (przy założeniu słuszności hipotezy płaskich przekrojów) mają postać:

$$(2.1) \quad M = -EJ_e \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2},$$

$$(2.2) \quad Q = GA_s \frac{\partial w_s}{\partial x},$$

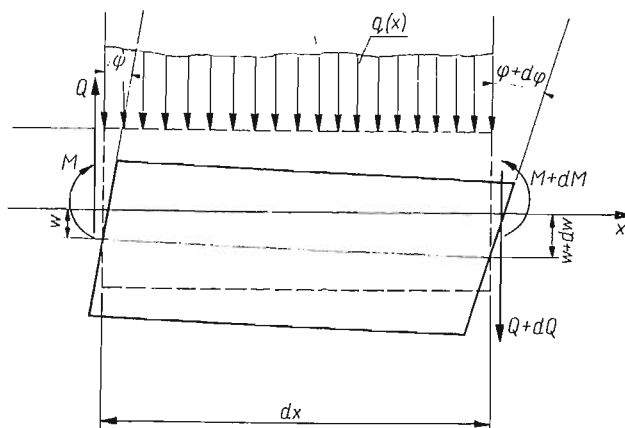
gdzie $w = w_b + w_s$ jest całkowitym ugięciem belki.

Równania równowagi elementu przedstawionego na rys. 1 prowadzą do zależności:

$$(2.3) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \rho A_i \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x),$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial M}{\partial x} = Q - \rho J_i \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2 \partial x}.$$

Układ równań (2.1)–(2.4) stanowi podstawowe wzory teorii Timoshenki. Są one cytowane w różnej postaci, jednak najczęściej spotykane jest równanie opisujące ugięcie w . Po wyeliminowaniu z wyżej przytoczonych równań w_b , w_s , M i Q otrzymujemy (postać jednorodna — $q(x) \equiv 0$) [31], [47]:



Rys. 1

$$(2.5) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{c_1^2 c_2^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + K \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Zastanowimy się obecnie nad sensem fizycznym współczynników c_1^2 i c_2^2 .

3. Dowód fałowości równania Timoshenki

Charakter fizyczny równania (2.5) po raz pierwszy zbadali w 1942 r. J. PRESCOTT [43] i W. FLÜGGE [20]. Poniżej przytoczymy rozważania przeprowadzone przez J. S. UFLJANDA [49] w oparciu o metodę transformacji Laplace'a.

Załóżmy, że:

$$(3.1) \quad \bar{w}(x, p) = \int_0^{\infty} w(x, t) e^{-pt} dt,$$

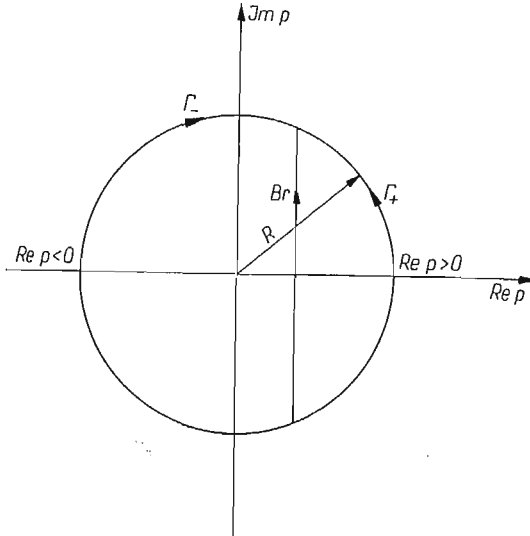
wtedy

$$(3.2) \quad w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \bar{w}(x, p) e^{pt} dp,$$

gdzie symbol (Br) oznacza kontur Bromwicha-Wagnera na płaszczyźnie zmiennej zespolonej p (rys. 2). Prosta określona symbolem (Br) ogranicza obszar wartości p , dla których transformata ugięcia $\bar{w}(x, p)$ jest analityczna. Wszystkie punkty osobliwe $\bar{w}(x, p)$ znajdują się po lewej stronie tej prostej.

Jeśli operację opisaną związkim (3.1) wykonamy nad równaniem (2.5), to otrzymamy:

$$(3.3) \quad \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} - p^2 \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + p^2 \left(\frac{p^2}{c_1^2 c_2^2} + K \right) \bar{w} = 0.$$



Rys. 2

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$(3.4) \quad \bar{w}(x, p) = \sum_{i=1}^4 A_i e^{-n_i x}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie

$$(3.5) \quad n_i = \pm M \sqrt{p} \sqrt{p \pm N \sqrt{p^2 - a}}, \quad A_i \text{ są stałymi całkowania.}$$

Transformatę odwrotną (3.2) określimy dla pręta półnieskończonego $x > 0$. Wtedy (3.4) przechodzi w związek:

$$(3.6) \quad \bar{w}(x, p) = A_1(p) e^{-n_1 x} + A_2(p) e^{-n_2 x},$$

gdzie $\text{Re } n_1 > 0$ i $\text{Re } n_2 > 0$.

Rozwiązaniem równania (2.6) dla tego przypadku jest funkcja:

$$(3.7) \quad w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} [A_1(p) e^{-n_1 x} + A_2(p) e^{-n_2 x}] e^{pt} dp.$$

Z twierdzenia Cauchy'ego i poczynionych powyżej [por. objaśnienie wzoru (3.2)] założeń odnośnie konturu wynika, że całki po prostej (Br) i po łuku Γ_+ są sobie równe. Zgodnie z (3.5) dla dużych $|p|$ mamy zależność:

$$n_1 \sim \frac{p}{c_1}, \quad n_2 \sim \frac{p}{c_2}$$

i dla dostatecznie dużego R można napisać:

$$(3.8) \quad w = w_1 + w_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} A_1(p) \exp p \left(t - \frac{x}{c_1} \right) \exp(\varepsilon_1 x) dp \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} A_2(p) \exp p \left(t - \frac{x}{c_2} \right) \exp(\varepsilon_2 x) dp,$$

gdzie

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon_1 = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon_2 = 0.$$

Gdy $\lim_{|p| \rightarrow \infty} A_1(p) = \lim_{|p| \rightarrow \infty} A_2(p) = 0$, to z twierdzenia Jordana otrzymujemy:

$$w_1 = 0 \quad \text{dla} \quad t < \frac{x}{c_1}, \quad w_2 = 0 \quad \text{dla} \quad t < \frac{x}{c_2}.$$

A więc efekt obciążenia rozprzestrzenia się w pręcie w postaci dwóch fal o szybkościach c_1 i c_2 . Charakter tego ruchu falowego zbadali: w 1947 r. J. L. B. COOPER [9], później H. SCHIRMER [46] oraz B. BUDIANSKY i R. W. LEONARD [7]. Ta ostatnia praca oparta jest na metodzie charakterystyk zastosowanej zarówno do belki nieskończonej, jak i skończonej.

4. Drgania własne belki

Największa liczba prac dotyczy rozwiązania równania Timoshenki dla przypadku drgań własnych. Różnią się one zarówno warunkami brzegowymi, jak i metodami rozwiązań. Pierwsze wyniki dotyczące belek nieskończonych zostały podane przez E. T. KRUSZEWSKIEGO [32] i R. A. ANDERSONA [1]. Prace radzieckie dotyczą głównie pojedynczych fal harmonicznyc [19, 29, 42]. Ocenę wpływu wprowadzonych poprawek na częstotliwość drgań przeprowadził po raz pierwszy TIMOSHENKO we wspomnianej pracy [47]. To samo zagadnienie rozpatrywali R. D. MINDLIN i H. DERESIEWICZ [39], V. PĚTROVSKY [40], T. C. HUANG [26]. Ten ostatni autor wprowadził do analizy drgań własnych metodę Galerkiną i związaną z nią metodę wariacyjną Ritza [27]. Przy pomocy numerycznej metody Myklestada-Thomsona, polegającej na podziale masy belki na n mas skupionych, T. C. HUANG i N. C. WU obliczyli drgania własne belki o zmiennym przekroju [25, 28]. Okazuje się, że wyniki różnią się w tym przypadku o 2-30% od rozwiązań wg teorii klasycznej. Rozbieżność jest tym większa, im wyższy jest numer rozpatrywanej harmoniki.

Wreszcie D. J. WEIDMANN [51] omówił przypadek belki o przekroju cienkościennego dwuteownika z dwoma osiami symetrii. Rozwiązań poszukiwał w postaci rozkładu zaburzeń na pojedyncze fale harmoniczne. Wyniki odbiegają od klasycznych nawet o 40%.

Poniżej przytoczymy analizę częstotliwości drgań w oparciu o rozwiązanie równania Timoshenki w postaci pojedynczej fali harmonicznyc. Dla belki

swobodnie podpartej układ równań (2.1)-(2.4) zapisujemy w następującej formie:

$$(4.1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \right) = c_2^2 K \frac{\partial}{\partial x} (w_b - w).$$

Szukamy rozwiązania w postaci

$$(4.2) \quad \left. \begin{aligned} w &= A \sin \alpha_n x \sin \omega t \\ \frac{\partial w_b}{\partial x} &= B \cos \alpha_n x \sin \omega t \end{aligned} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie l jest długością belki. Po podstawieniu (4.2) do (4.1) otrzymujemy:

$$(4.3) \quad A \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2 \right) + B \alpha_n = 0,$$

$$A \alpha_n c_2^2 K + B \left(-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} - c_2^2 K \right) = 0.$$

Układ równań jednorodnych (4.3) ma rozwiązanie nietrywialne, jeśli

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2 & \alpha_n \\ \alpha_n c_2^2 K & \left(-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} - c_2^2 K \right) \end{vmatrix} = 0,$$

co prowadzi do równania:

$$\frac{\omega^4}{c_1^2 c_2^2} - \left\{ \alpha_n^2 \left[\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right] + K \right\} \omega^2 + \alpha_n^4 = 0.$$

Rozwiązanie otrzymujemy w postaci:

$$(4.4.1) \quad \omega_{n1} = \frac{\alpha_n}{c_1 c_2 \sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{K}{\alpha_n^2} \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{K}{\alpha_n^2} \right)^2 - \frac{4}{c_1^2 c_2^2}}};$$

$$(4.4.2) \quad \omega_{n2} = \frac{\alpha_n}{c_1 c_2 \sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{K}{\alpha_n^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{K}{\alpha_n^2} \right)^2 - \frac{4}{c_1^2 c_2^2}}};$$

łatwo wykazać (por. np. [42]), że częstotliwość ω_{n1} jest zawsze mniejsza od częstotliwości otrzymywanych wg teorii klasycznej. Obniżenie częstotliwości ω_{n1} w stosunku do wyników klasycznych okazuje się tym większe, im krótsze są fale odkształceń. Dla częstotliwości pierwszej fali wynosi ono np. 2%, ale już dla piątej harmoniki sięga 25%. Częstotliwość drugiego rodzaju ω_{n2} jest bardzo znaczna i jest porównywalna z ω_{n1} tylko dla bardzo krótkich fal (w porównaniu z wymiarami przekroju poprzecznego belki).

5. Drgania wymuszone

Wyznaczenie ugięć, kątów obrotów stycznych, sił uogólnionych oraz częstotliwości w przypadku obciążenia belki czynnikami wymuszającymi drgania sprowadza się do rozwiązania pewnego zagadnienia granicznego dla równań Timoshenki. Metody rozwiązań są różne w zależności od typu zadania. Wszystkie rozwiązania ściśle otrzymano dotąd w oparciu o metodę transformacji całkowych. Ze względu na trudności matematyczne większość prac dotyczy belek nieskończonych i półnieskończonych.

Ponieważ w zagadnieniu obok zmiennej miejsca występuje czas t , więc często stosowaną jest transformacja Laplace'a. Omówimy pokrótce przypadek belki półnieskończonej, obciążonej na końcu swobodnie podpartym momentem Heaviside'a $M(0, t) = M_0 \gamma(t)$. Zagadnienie to zostało rozwiązane przez FLÜGGEGO i ZAJACA [21]. Podstawowe równania Timoshenki (2.1)-(2.4) po przetransformowaniu i uwzględnieniu warunków granicznych prowadzą do następujących związków:

$$(5.1) \quad \bar{M}(\xi, p) = \bar{M}_1(\xi, p) + \bar{M}_2(\xi, p),$$

$$(5.2) \quad \bar{M}_1(\xi, p) = \frac{M_0}{2p} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{b^2 p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \exp(-n_1 \xi),$$

$$(5.3) \quad \bar{M}_2(\xi, p) = \frac{M_0}{2p} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{b^2 p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \exp(-n_2 \xi),$$

gdzie

$$(5.4) \quad \bar{M}(\xi, p) = \int_0^\infty M(\xi, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad \xi = \frac{x}{r}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{r},$$

$$n_{1,2} = [ap^2 \mp p(b^2 p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]^{\pm} \quad a = \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_2^2}, \quad b = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2c_2^2}.$$

Można wykazać (por. p. 3), że $M_1(\xi, \tau) = 0$, gdy $\tau < \xi$, oraz $M_2(\xi, \tau) = 0$, gdy $\tau < \xi(c_1/c_2)$. A więc moment gnący rozchodzi się w postaci dwóch fal o różnych szybkościach frontów. Poszukiwanie transformat odwrotnych $\bar{M}_i(\xi, p)$ w pracy [21] przeprowadzono w oparciu o rozkład funkcji w szereg potęgowy.

Przedstawimy $\bar{M}_i(\xi, p)$ w postaci rozkładu w szereg względem $1/b^2 p^2$. Otrzymamy:

$$(5.5) \quad \bar{M}_1\left(\frac{\xi}{b}, bp\right) = e^{-p\xi} \bar{G}_1\left(\frac{1}{bp}\right), \quad \bar{M}_2\left(\frac{\xi}{b}, bp\right) = e^{-p\xi} \bar{G}_2\left(\frac{1}{bp}\right),$$

gdzie

$$\bar{G}_1\left(\frac{1}{bp}\right) = \frac{M_0 b}{2} \left\{ \frac{1}{bp} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{b^2 p^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \exp \left[-\frac{\xi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1^{(n)}(0)}{n!} \left(\frac{1}{bp} \right)^{2n-1} \right] \right\},$$

$$\bar{G}_2\left(\frac{1}{bp}\right) = \frac{M_0 b}{2} \left\{ \frac{1}{bp} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{b^2 p^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \exp \left[-\frac{\xi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_2^{(n)}(0)}{n!} \left(\frac{1}{bp} \right)^{2n-1} \right] \right\},$$

oraz

$$g_i \left(\frac{1}{b^2 p^2} \right) = \left[a \mp b \left(1 - \frac{1}{b^2 p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2.$$

Wykorzystując twierdzenia

- 1) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \overline{F} \left(\frac{\xi}{b}, bp \right) \right\} = \frac{1}{b} F \left(\frac{\xi}{b}, \frac{\tau}{b} \right),$
- 2) $\mathcal{L}^{-1} \{ e^{-pk} \overline{F}(p) \} = F(\tau - k) \eta(\tau - k),$

otrzymujemy

$$M_1(\xi, \tau) = \frac{1}{b} G_1 \left(\frac{\tau - \xi}{b} \right) \eta(\tau - \xi),$$

$$M_2(\xi, \tau) = \frac{1}{b} G_2 \left(\frac{\tau - \xi \frac{c_1}{c_2}}{b} \right) \eta \left(\tau - \xi \frac{c_1}{c_2} \right).$$

Pozostają do określenia transformaty odwrotne \overline{G}_1 i \overline{G}_2 . Zostały one uzyskane przez FLÜGGEGO i ZAJACA na drodze numerycznej. Dla małych czasów t i dla dużych ξ , a więc w otoczeniu frontów fal rozwiązanie można przedstawić w postaci szeregów szybkobieżnych:

$$M(\xi, \tau) = \frac{M_0}{2} \left\{ \eta(\tau_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi/b)^n}{n!} \sum_{m=3n}^{\infty} C_{m,n} \left(\frac{4\tau_1}{\xi} \right)^{\frac{m}{2}} J_m(\sqrt{\xi\tau_1}) \right.$$

$$\left. + \eta(\tau_2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi/b)^n}{n!} \sum_{m=3n+2}^{\infty} D_{m,n} \left(\frac{4\tau_2 \frac{c_1}{c_2}}{\xi} \right)^{\frac{m}{2}} I_m \left(\sqrt{\xi \frac{c_2}{c_1} \tau_2} \right) \right\},$$

gdzie dla $\tau = \text{const } \tau_1$ jest miarą odległości od frontu fali zginającej, a τ_2 od frontu fali poprzecznej.

Inną metodę odwracania transformacji Laplace'a przedstawili B. A. BOLEY i C. G. CHAO [5]. Znaleźli oni rozwiązania dla czterech przypadków obciążeń belki półnieskończonej poprzez obliczenie całek po konturze. Wadą tego rozwiązania jest niedostatecznie szybka zbieżność otrzymanych całek oznaczonych zmiennej rzeczywistej przy obliczaniu numerycznym.

Oprócz transformacji Laplace'a szerokie zastosowanie w zagadnieniu belki Timoshenki znalazła całkowita transformacja Fouriera.

Transformację wykładniczą zastosował do belki nieskończonej R. P. N. JONES [30], oraz FLÜGGE i ZAJAC we wspomnianej powyżej pracy. JONES jako pierwszy wprowadził do omawianego zagadnienia asymptotyczną metodę poszukiwania transformat odwrotnych, nazywaną «metodą okresu stacjonarnego», lub «metodą Kelvina». Wykorzystali ją również FLÜGGE i ZAJAC. Poniżej przytaczamy schemat rozwiązania zagadnienia tym sposobem, oparty na pracy Jonesa.

Rozpatrzymy belkę nieskończoną, obciążoną impulsową siłą skupioną $P\delta(\xi)\eta(\tau)$. Skorzystamy z równań (4.1), na których wykonamy wykładniczą transformację Fouriera. Jeśli przejdziemy do współrzędnych bezwymiarowych za pomocą związków (5.4) to przetransformowane równania przyjmą postać:

$$(5.6) \quad \bar{w}_s = \frac{Pr^3}{EJ_e p^4} [1 + A_1(p) \cos(\omega_1 \tau) + A_2(p) \cos(\omega_2 \tau)],$$

$$(5.7) \quad \bar{w}_b = \frac{\alpha Pr^3}{EJ_e p^4} [1 + B_1(p) \cos(\omega_1 \tau) + B_2(p) \cos(\omega_2 \tau)],$$

gdzie

$$\bar{w}(\xi, p) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi, \tau) e^{ip\tau} d\tau,$$

$$A_1(p) = -\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad B_2(p) = \frac{\alpha \omega_1^2 - p^2}{\alpha(\omega_2^2 - \omega_1^2)},$$

$$B_1(p) = \frac{p^2 - \alpha \omega_2^2}{\alpha(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad A_2(p) = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad \alpha = \frac{c_1^2}{c_2^2};$$

ω_1, ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$) są dodatnimi pierwiastkami równania

$$(5.8) \quad (\alpha \omega^2 - p^2)(\omega^2 - p^2) - \omega^2 = 0.$$

Pozostaje do określenia transformacja odwrotna. Wykorzystamy do tego asymptotyczną metodę okresu stacjonarnego. Dla przykładu wyznaczmy momenty zginające stosując wzór (2.1):

$$(5.9) \quad M = \frac{Pr}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + A_1(p) \cos(\omega_1 \tau) + A_2(p) \cos(\omega_2 \tau)] e^{-ip\xi} \frac{dp}{p^2}.$$

Metoda Kelvina pozwala obliczać całki typu

$$(5.10) \quad \Phi = \int_a^b \varphi(\xi) \exp [if(\xi)] d\xi.$$

Zakłada się, że funkcja trygonometryczna jest funkcją szybko oscylującą w przedziale całkowania, gdy funkcja $\varphi(\xi)$ zmienia się stosunkowo nieznacznie. Prócz tego musi być spełniony warunek:

$$(5.11) \quad \frac{f'''(\xi_0)}{[|f''(\xi_0)|]^2} \ll 1,$$

gdzie ξ_0 jest punktem stacjonarnym.

Zgodnie z dowodem przeprowadzonym przez STOKESA największą część swej wartości całka przyjmuje wtedy w otoczeniu punktów stacjonarnych, tzn. takich, w których $df(\xi)/d\xi = 0$.

Gdy istnieje jeden punkt stacjonarny $\xi = \xi_0$ to:

$$(5.12) \quad \Phi \sim \varphi(\xi_0) \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(\xi_0)|}} \exp i \left\{ f(\xi_0) \pm \frac{\pi}{4} \right\}.$$

W wykładniku bierzemy znak górny, jeśli $f''(\xi_0) > 0$ i dolny, jeśli $f''(\xi_0) < 0$.

Aby określić całkę (5.9) powyższą metodą, rozłożymy całkę na sumę dwu wyrazów o postaci

$$(5.13) \quad M_1 = \frac{Pr}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + A_1(p) \cos(\omega_1 \tau)] e^{-ip\xi} \frac{dp}{p^2},$$

$$(5.14) \quad M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Pr}{2\pi} [A_2(p) \cos(\omega_2 \tau)] e^{-ip\xi} \frac{dp}{p^2},$$

$$(5.15) \quad M = M_1 + M_2.$$

Jeśli we wzorze (5.10) podstawimy $f(\xi) = \omega_1 \tau - p\xi$, to przybliżenie uzyskane wyżej omówioną metodą dla (5.13) i (5.14) będzie miało postać:

$$(5.16) \quad M_1 \sim \frac{Pr}{\sqrt{2\pi\tau}} \left[\frac{A_1(p)}{p^2} \left\{ \left| \frac{d^2\omega_1}{dp^2} \right| \right\}^{-\frac{1}{2}} \cos \left(\omega_1 \tau - p\xi \pm \frac{\pi}{4} \right) \right] \text{ dla } p = p_1,$$

$$(5.17) \quad M_2 \sim \frac{Pr}{\sqrt{2\pi\tau}} \left[\frac{A_2(p)}{p^2} \left\{ \left| \frac{d^2\omega_2}{dp^2} \right| \right\}^{-\frac{1}{2}} \cos \left(\omega_2 \tau - p\xi \pm \frac{\pi}{4} \right) \right] \text{ dla } p = p_2.$$

Związki (5.16)-(5.17) są dostatecznie ścisłe, o ile spełniony jest warunek (5.11), tzn.:

$$(5.18) \quad \left| \frac{d^3\omega_1}{dp^3} \right|_{p=p_1} \ll \sqrt{\tau} \left\{ \left| \frac{d^2\omega_1}{dp^2} \right| \right\}_{p=p_1}^{\frac{3}{2}}.$$

W powyższych wzorach p_1 i p_2 są pierwiastkami równań:

$$(5.19) \quad \frac{d\omega_1}{dp} = \frac{\xi}{\tau}, \quad \frac{d\omega_2}{dp} = \frac{\xi}{\tau}.$$

W pracy [30] JONES przeprowadził szczegółową analizę związków otrzymanych powyższą metodą i wykonał specjalne przybliżenia dla tych zbiorów wartości (ξ, τ) , gdzie ogólna metoda jest zbyt mało dokładna.

Wreszcie sinusowa i kosinusowa transformacja Fouriera została wykorzystana w pracy BOLEYA [4] do belki półnieskończonej obciążonej momentem Heaviside'a.

Omówione metody transformacyjne nie wyczerpują poszukiwanych dróg rozwiązania zagadnienia Timoshenki. B. A. BOLEY zastosował [3] do równania ugięcia metodę analizy energetycznej, tzn. sprowadził zagadnienie do poszukiwania wartości minimalnej pewnej całki.

Na zakończenie należy wspomnieć o pracach A. I. CIEJTLINA [8] i S. H. CRANDALLA [10] dotyczących belek na sprężystym podłożu. Przyjęli oni w równaniach dodatkowy wyraz (kw) określający odpór podłoża Winklera o podatności k na skutek występującego po obciążeniu ugięcia belki. CIEJTLIN otrzymał rozwiązanie za pomocą kosinusowej transformacji Fouriera dla siły $P\delta(t)$ w postaci całek oznaczonych i omówił możliwość uogólnienia rozwiązania na

obciążenia trwające w czasie za pomocą całki Duhamela. CRANDALL zajął się w pierwszym rzędzie określeniem okresów drgań własnych i wymuszonych siłą pulsującą $P e^{i\omega t}$ i ruchomą. Ta ostatnia przesuwa się po belce ze stałą szybkością v . Wyznaczono krytyczne prędkości ruchu siły. Praca zawiera obszerną analizę numeryczną.

Warto tu jeszcze wspomnieć o uogólnieniu metody Timoshenki na zagadnienie zginania dynamicznego płyt. Pierwsza próba należy do UFLJANDA [49]. Następnie zajęli się tym zagadnieniem R. D. MINDLIN [38] i H. ZORSKI [52, 53]. Ten ostatni omówił zagadnienie Cauchy'ego dla bifalowego równania Timoshenki. Jego rozwiązanie otrzymał za pomocą odpowiedniej tożsamości całkowej. Do rozwiązań osobliwych dla obciążeń skupionych zastosował całkową transformację Laplace'a. Zostały również omówione charakterystyki rozpatrywanego równania.

6. Zakończenie

Jak widać z powyższych rozważań, wprowadzone poprawki spowodowały w równaniu drgań belki istotną zmianę jakościową. Udało się uchwycić, potwierdzony doświadczalnie, falowy charakter zjawiska oraz z dostateczną dokładnością można było przedyskutować wyniki w otoczeniu frontów fal.

Jednak w rozważaniach belek obciążonych dynamicznie występuje poważna luka. Nie udało się mianowicie uzyskać dotąd przejrzystej metody rozwiązania dla belki skończonej. Prócz metody charakterystyk, ilustrującej interferencję fal odkształceń wskutek odbicia tych fal od granic ośrodków w belkach skończonych, żaden inny sposób nie doprowadził do efektywnych wyników. Dalsze rozważania teoretyczne powinny być zwrócone chyba przede wszystkim w tym kierunku.

Również zbyt skąpy materiał doświadczalny nie pozwala korygować ilościowych rozważań teoretycznych w zestawieniu ze stanem rzeczywistym. I to byłby drugi, podstawowy kierunek rozwoju tej dziedziny dynamiki ciała stałego.

Literatura cytowana w tekście

- [1] R. A. ANDERSON, *Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory* J. Appl. Mech., Dezember 1953 (vol. 20).
- [2] D. BANCROFT, *The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars*, Physical Review, 59 (1941).
- [3] B. A. BOLEY, *An approximate theory of lateral impact on beams*, J. Appl. Mech., 22 (1955).
- [4] B. A. BOLEY, *On the use of sine transforms in Timoshenko — beam impact problems*, J. Appl. Mech., 24 (1957).
- [5] B. A. BOLEY, C. G. CHAO, *Some solutions of the Timoshenko — beam equations*, J. Appl. Mech., 22 (1955).
- [6] B. A. BOLEY, R. E. HENINGER, V. P. ZIMNOCH, *An energy theory of transverse impact on beams*, ONR Report, Project NR — 064 — 355, January 1952.

- [7] B. BUDIANSKY, R. W. LEONARD, *On traveling waves in beams*, Report 1173, NACA TN 2874, 1953.
- [8] А.И. ЦЕЙТЛИН „О влиянии сдвига и инерции вращения при колебаниях балки на упругом основании”, Изд. АН. СССР, ПИММ, 25 (1961).
- [9] J. L. B. COOPER, *The propagation of elastic waves in a rod*, Phil. Mag. ser 7, 31 (1947).
- [10] S. H. CRANDALL, *The Timoshenko beam on an elastic foundation* J. Engin. Mech. Div., October 1962.
- [11] S. H. CRANDALL, A. YILDIZ, *Random vibration of beams*, J. Appl. Mech. June 1962 (vol. 29).
- [12] DANA YOUNG, R. P. FELGAR, *Tables of characteristic functions representing normal modes of vibration of a beam*, The University of Texas Publ. Nr 4913.
- [13] J. F. DAVIDSON, *Impact buckling of deep beams in pure bending* Quart. J. Mech. Appl. Math., 8 (1955).
- [14] T. DAVIDSON, J. H. MEIER, *Impact a prismatical bars*, Proc. of the SESA, 4 (1946).
- [15] M. A. DENGLE, M. GOLAND, *Transverse impact of long beams, including rotatory inertia and shear effects*, Proc. of the First US National Congress of Applied Mechanics 1951.
- [16] M. A. DENGLE, M. GOLAND, P. D. WIKERSHAM, *Propagation of elastic impact in beams in bending*, J. Appl. Mech., 22 (1955).
- [17] C. L. DOLPH *On the Timoshenko beam vibration*, Quart. of Appl. Math. 12 (1954).
- [18] J. DORR, *Der unendliche, federnd gebettete Balken unter dem Einfluss einer gleichförmig bewegten Last*, Ing. — Archiv, 14 (1943).
- [19] М.Ш. ФЛЕКСЕР, *Об учете влияния инерции вращения и перерезывающих сил на поперечные колебания стержня конечной длины*, Инженерный сборник, 23 (1956).
- [20] W. FLÜGGE *Die Ausbreitung von Biegungswellen in Stäben*, ZAMM, 22 (1942).
- [21] W. FLÜGGE, E. E. ZAJAC, *Bending impact waves in beams*, Ing.-Archiv, 1959.
- [22] G. HERRMANN, *Forced motions of Timoshenko beams*, J. Appl. Mech., 22 (1955).
- [23] G. W. HOUSNER, W. K. TSO, *Dynamic Behavior of Supercritically Loaded Struts*, J. Engin. Mech. Div., October 1962.
- [24] C. HOWE, R. HOWE, L. RAUCH, *Application of the electric differential analyzer to the oscillation of beams, including shear and rotatory inertia*, Ext. Memo. UMM — 79, University of Michigan Research.
- [25] T. C. HUANG, *Application of variational methods to the vibration of plates including rotatory inertia and shear*, Proc. of the Seventh Midwestern Mechanics Conference, September 1961, North-Holland Publishing Company — Amsterdam.
- [26] T. C. HUANG *The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions*, J. Appl. Mech., 28 (1961).
- [27] T. C. HUANG, *Effect of rotatory inertia and shear on the vibration of beams treated by the approximate methods of Ritz and Galerkin*, Proc. of the 3d US National Congress of Applied Mechanics, 1958.
- [28] T. C. HUANG, N. C. WU, *Approximate analysis of flexural vibrations of beams*, Proc. of the Seventh Midwestern Mechanics Conference, September 1961, North-Holland Publishing Company — Amsterdam.
- [29] М.В. ХВИНГИЯ, *Влияние сдвигов и инерции вращения на частоту изгибных колебаний упругих стержней*, Инженерный журнал, 4, 3 (1963).
- [30] R. P. JONES, *Transient flexural stresses in an infinite beam*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1955.
- [31] H. KOLSKY, *Stress waves in solids*, Oxford 1953.
- [32] E. T. KRUSZEWSKI, *Effect of transverse shear and rotary inertia on the natural frequency of a uniform beam*, NACA TN 1909; 1949.
- [33] Е.Л. КУДРЯВЦЕВ, *Об учете сдвигов и инерции вращения на изгибные колебания упругих балок*, Мех. и Машин., 5, 1960.
- [34] H. LAMB; Proc. Roy. Soc. ser. A93 (1917).
- [35] H. L. MASON, *Impact on beams*, J. Appl. Mech., 58 (1936)

- [36] J. MIKLOWITZ, *Flexural wave solutions of coupled equations representing the more exact theory of bending*, J. Appl. Mech., Dezember 1953.
- [37] J. MIKLOWITZ, *On the use of approximate theories of an elastic rod in problems of longitudinal impact*, J. Appl. Mech., 25 (1958).
- [38] R. D. MINDLIN, *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates*, J. Appl. Mech., 18 (1951).
- [39] R. D. MINDLIN, H. DERESIEWICZ, *Timoshenko's shear coefficient for flexural vibrations of beams*, Proc. of the 2nd US National Congress of Applied Mechanics 1954.
- [40] V. PĚTROVSKY, *Vliv smiku a setroačnych momentu na vlastní kmitočet prismatických nosníku*, Stroivenství, nr 6, 1960.
- [41] H. J. PLASS, C. C. STEYER, *Studies on Longitudinal and Bending Waves in long Elastic Rods*, The University of Texas, Report CM-860, 1956.
- [42] С.Д. ПИНОМАРЕВ и другие, *Расчеты на прочность в машиностроении*, Машгиз, т. 3, Москва 1959.
- [43] J. PRESCOTT, *Elastic waves and vibrations of thin rods*, Phil. Mag., ser. 7, 33 (1942).
- [44] A. ROBINSON, *Shock transmission in beams*, Aeronautical Research Council Technical Report N. 2265, Ministry of Supply, London 1950.
- [45] E. A. RIPPERGER, H. N. ABRAMSON, *A Study of the propagation of flexural waves in elastic beams*, J. Appl. Mech., 24 (1957).
- [46] H. SCHIRMER, *Über Biegewellen in Stäben*, Ing.-Archiv, 20 (1952).
- [47] S. P. TIMOSHENKO, *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic Bars*, in Collected Papers, 1922.
- [48] R. W. TRAILL-NASH, A. R. COLLAR, *The effect of shear flexibility and rotary inertia on the bending vibrations of beams*, Quart. J. Mech. Appl., Math., 2, 6 (1953).
- [49] Я.С. УФЛЯНД, *Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин*, Прикл. Мат. Мех., 12 (1948).
- [50] I. VIGNESS, *Transverse waves in beams*, Proc. of the Society for Experimental Stress Analysis, 8 (1951).
- [51] DEENE J. WEIDMAN, *The effects of shear deformations and cross-sectional distortion on the natural frequencies of wide — flanged beams*, Proc. of the Seventh. Midwestern Mechanics Conference, September 1961; North-Holland Publishing Company, — Amsterdam.
- [52] H. ZORSKI, *Zagadnienie Cauchy'ego i drgania nieograniczonej płyty cienkiej*, Cz. I, Biuletyn WAT, 1, 72, 1957.
- [53] H. ZORSKI, *Zagadnienie Cauchy'ego i drgania nieograniczonej płyty cienkiej*, cz. II, Biuletyn WAT, 4, 75, 1957.

Р е з ю м е

ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА БАЛОК. БАЛКА ТИМОШЕНКИ

Работа является обзором решений уравнений Тимошенко, описывающих прогиб балки при динамических нагрузках. В п. 3, основываясь на работе Уфлянда [49] доказывается волновой характер явления, если в уравнение прогиба Бернулли-Эйлера ввести поправку на инерцию вращения и силы сдвига.

В п. 4 представлен обзор работ, касающихся собственными колебаниями в случае когда исходной точкой является уравнение Тимошенко (2.5).

В п. 5 даются схемы решений вопроса вынужденных колебаний с помощью интегральных преобразований. В качестве основных приняты здесь работы Флогге и Заяца [21] и Джонса [30].

В заключение в п. 6 указываются дальнейшие направления развития этого отдела соприкосновения материалов.

S u m m a r y

DYNAMICAL LOADINGS OF BEAMS—TIMOSHENKO BEAM

The paper gives a survey of the solutions of the Timoshenko equations describing dynamic beam deflections. In Section 3 the wave character of the phenomenon has been proved on the basis of Ufland's article [49] if corrections of rotary inertia and shear forces are introduced into Bernoulli-Euler deflection equation. Section 4 gives a survey of the papers dealing with self vibrations in the case when Timoshenko's Eq (2.5) is a point of departure.

Finally, Section 5 contains the solutions of the forced vibration problem by means of the integral transforms. The papers by Flügge and Zajac [21] and Jones [30] have been assumed as fundamental. The trends of the development of this branch of strength of materials are discussed in Section 6.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 marca 1964 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

SYMPOZJA NAUKOWE PTMTS

ODDZIAŁ W GLIWICACH

KONWERSATORIUM TECHNIKI NUKLEARNEJ «SPOTKANIE TECHNIKI KONWENCJONALNEJ Z TECHNIKĄ NUKLEARNĄ»

W dniach od 9 do 14 lutego 1964 r. odbyło się w Szczyrku Konwersatorium Techniki Nuklearnej pod hasłem «Spotkanie techniki konwencjonalnej z techniką nuklearną». Konwersatorium zostało zorganizowane przez Oddział Gliwicki PTMTS. W skład komitetu organizacyjnego wchodził: prof. dr inż. J. DIETRYCH oraz dr inż. T. J. ŚWIERZAWSKI. Celem Konwersatorium było spotkanie osób zainteresowanych problematyką techniki nuklearnej oraz zorganizowanie warunków dla bezpośredniej i żywej wymiany myśli badawczej i inżynierskiej wobec faktu coraz bardziej burzliwego rozwoju tej nowej gałęzi wiedzy. Około 80 uczestników Konwersatorium reprezentowało Instytut Badań Jądrowych, Instytut Fizyki Jądrowej, Centralne Laboratorium Ochrony Radiologicznej, Energopomiar, Wojskową Akademię Techniczną, Akademię Górniczo-Hutniczą, Politechnikę Warszawską, Wrocławską i Śląską oraz inne zakłady i instytuty naukowe.

Na Konwersatorium zgłoszono 20 referatów, w tym 9 z Politechniki Śląskiej w Gliwicach, 6 z Instytutu Badań Jądrowych w Świerku, 3 z Instytutu Fizyki Jądrowej w Krakowie, 1 z Centralnego Laboratorium Ochrony Radiologicznej w Warszawie. Streszczenia wszystkich referatów zawarte są w specjalnym tomie Zeszytów Naukowych Politechniki Śląskiej, Energetyka 12. Referaty obejmowały następujące zagadnienia inżynierii jądrowej: automatyka i bezpieczeństwo pracy, konstrukcje, materiały stosowane w technice nuklearnej.

Słowo wstępne na Konwersatorium wygłosił przewodniczący Oddziału Gliwickiego PTMTS prof. dr inż. J. DIETRYCH. Prof. dr inż. S. OCHĘDUSZKO, który brał udział w organizowaniu studiów dla specjalności «energetyka jądrowa», podał krótki rys rozwoju tej specjalności w Polsce, w szczególności na Wydziale Mechaniczno-Energetycznym Politechniki Śląskiej. Referat wprowadzający do zagadnień energetycznych techniki nuklearnej wygłosił dr inż. T. J. ŚWIERZAWSKI. W rozmowach kularowych omawiano między innymi sprawy dydaktyki oraz nawiązania ściślejszych kontaktów naukowych pomiędzy Uczelniami a Instytutem Badań Jądrowych i Instytutem Fizyki Jądrowej. Już obecnie studenci specjalności «energetyka jądrowa» z Politechniki Warszawskiej i Politechniki Śląskiej odbywają praktyki w IBJ oraz w IFJ i często otrzymują z tych Instytutów tematy prac dyplomowych. Niektóre prace dyplomowe wykonywane są bezpośrednio w IBJ.

W podsumowaniu spotkania zabrali głos: prof. dr inż. J. DIETRYCH (Gliwice), prof. dr Z. OLESIAK (Warszawa), prof. dr inż. M. SĄSIĄDEK (Wrocław) i przedstawiciele IBJ oraz IFJ. Wszyscy mówcy podkreślili celowość organizowania podobnych zebrań, na których pracownicy nauki z wąskiego kręgu specjalistów informują szeroki krąg naukowców i inżynierów o osiągnięciach w nowej dziedzinie wiedzy. Powstaje w ten sposób pomost łączący bogatą w doświadczenia technikę konwencjonalną z nową techniką nuklearną; pomost tym cenniejszy, że technika nuklearna coraz głębiej przenika do wielu konwencjonalnych procesów, a w najbliższej przyszłości energia jądrowa będzie stanowiła główne źródło w energetyce światowej.

Tadeusz J. Świerzawski (Gliwice)

ODDZIAŁ W KRAKOWIE

SYMPOZJUM DYNAMIKI MASZYN HUTNICZYCH

Symposium to odbyło się w dniach 14–15 maja 1964 r. i zostało zorganizowane przez Oddział PTMTS w Krakowie przy współdziałaniu Katedry Maszyn Hutniczych AGH, Katedry Mechaniki Technicznej AGH oraz Stowarzyszenia Inżynierów i Techników Przemysłu Hutniczego.

Wygłoszono następujące referaty:

- 1 Mgr inż. F. Kaim, Podsekretarz Stanu w Ministerstwie Przemysłu Ciężkiego, Znaczenie dynamiki maszyn w przemyśle hutniczym.
- 2 Prof. dr inż. S. Ziemia, Rola obciążeń stochastycznych w dynamice maszyn.
- 3 Ing. H. Neumann, Institut für Kalibrierung, Riesa, NRD, Ein neues Kaltwalzverfahren für Rohre.
- 4 Prof. dr inż. A. Lisowski, inż. J. Michalik, Politechnika Krakowska, Zastosowanie tensometrii oporowej do pomiarów dynamicznych maszyn.
- 5 Mgr inż. W. Udziela, Biprohut, Rozwój produkcji suwnic wsadowych dla pieców martenowskich w Biprohucie.
- 6 Mgr inż. E. Jarosz, Biprohut, Stanowiska remontowe suwnic na wydziałach hutniczych.
- 7 Mgr inż. M. Gruszka, Biprohut, Przystosowanie suwnicy kleszczowej do wygarniania żużłu z pieców wglębnych.
- 8 Mgr inż. J. Folfasiński, Huta im. Lenina, Dynamika procesu hydraulicznego usuwania zgorzeliny z walcowych pasm.
- 9 Mgr inż. J. Stokłosa, Hutnicze Przedsiębiorstwo Remontowe, doc. dr inż. W. Bogusz, AGH, Dynamika przesuwania smukłych obiektów w hutnictwie.
- 10 Prof. J. Anioła, doc. dr inż. W. Zapalowicz, mgr inż. J. Łukawski, AGH, Dynamika ruchu tworzyw w aparacie zasypowym wielkiego pieca nowej konstrukcji.
- 11 Doc. dr inż. W. Zapalowicz, mgr inż. J. Wajda, AGH, Dynamika tłumienia drgań w mostach suwnic skrzynkowych.
- 12 Doc. dr inż. W. Zapalowicz, mgr inż. B. Horakowski, AGH, Siły bezwładności podczas ruchu i hamowania mostu w suwnicach skrzynkowych.

Ponadto wygłoszono 18 komunikatów.

Ze sprawozdania Oddziału PTMTS
w Krakowie

Z. Olesiak

VII JUGOSŁOWIAŃSKI KONGRES MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

Siódmy kolejny Jugosłowiański Kongres Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej tym razem odbył się w dniach 1-6 czerwca 1964 w Vrnjackiej Banji (Serbia) — uzdrowisku położonym w górach ok. 200 km na południe od Belgradu i przypominającym naszą Krynice. Podobnie jak w latach ubiegłych Kongres został zorganizowany przez Jugosłowiańskie Towarzystwo Mechaniki, które jest odpowiednikiem naszego PTMTS.

Obrady Kongresu przewidywały wykłady ogólne oraz referaty w sekcjach. Kongres rozpoczął wykład prof. A. BILIMOWIĆA, seniora mechaników jugosłowiańskich, poświęcony Galileuszowi w związku z 400 rocznicą jego urodzin. Niestety sam autor nie mógł przybyć na Kongres ze względu na stan zdrowia i wykład został odczytany. Kolejnym wykładem ogólnym był referat prof. A. KUHELJA na temat hydrodynamiki turbin parowych. Wydaje się, że ponadto należy wyróżnić wykłady ogólne prof. V. BRČIĆA o doświadczalnych metodach analizy naprężeń oraz doc. R. STOJANOVIĆA o nieliniowej mechanice ośrodków ciągłych. Jeśli chodzi o referaty w sekcjach, to można by je podzielić na kilka grup o różnej tematyce: nieliniowa mechanika ośrodka ciągłego (R. STOJANOVIĆ, S. DJURIĆ i N. NAERLOVIĆ-VELJKOVIĆ), zagadnienia elastoptyki (V. BRČIĆ), zagadnienia związane

z praktyką inżynierską (M. DJURIC, V. BOGUNOVIC, S. MILIC), klasyczna teoria płyt (K. JOJIC), zagadnienia stateczności (S. TURK, M. VUKOBRAVIC), mechanika płynów (LJ. KRSMANOVIC, V. SALJNIKOV), aerodynamika i mechanika lotu (S. PIVKO, V. SISOJEV, D. JURICIC).

W Kongresie uczestniczyło 158 osób, w tym 11 gości zagranicznych; w tej liczbie byli: prof. E. KRÖNER z NRF, prof. A. DE PATER z Delft w Holandii i prof. D. A. EL TURABI, egzotyczny dziekan Inżynierii Lądowej z Politechniki w Chartumie. Polaków obecnych było czterech (z tego jeden oficjalnie): prof. Z. OLESIK, dr K. BORSUK, dr R. HETNARSKI i dr R. KAMIŃSKI, który przebywał na stażu z wytrzymałości materiałów w Politechnice w Sarajewie. Nasi uczestnicy wygłosili łącznie 5 referatów, w tym R. KAMIŃSKI wygłosił 2 referaty (po serbsku).

Jeden wieczór był poświęcony na walne zgromadzenie członków Jugosłowiańskiego Towarzystwa Mechaniki, poza tym odbyła się kilkugodzinna sesja na temat nauczania mechaniki w Szkołach Wyższych. Burmistrz Vrnjackiej Banji wydał kolację dla uczestników Kongresu.

Na marginesie Kongresu warto powiedzieć kilka słów o Jugosłowiańskim Towarzystwie Mechaniki. Zostało ono założone w 1954 r. z inicjatywy profesorów: J. KLITCHIEFFA, A. BILMOVICIA i R. KAŠANINA. W obecnej dwuletniej kadencji funkcję prezesa Towarzystwa będzie pełnił prof. A. KUHELJ, a sekretarza generalnego — doc. R. STOJANOVIC. Jugosłowiańskie Towarzystwo Mechaniki liczy ok. 250 członków (z czego na Belgrad przypada 150 osób) i ma 5 Oddziałów (Belgrad, Lublana, Sarajewo, Skoplje i Zagrzeb). Organizacja podlega i otrzymuje dotacje z Jugosłowiańskiego Stowarzyszenia Inżynierów i Techników. Głównym zadaniem Towarzystwa jest organizowanie co dwa lata kolejnego Kongresu (następny odbędzie się w 1966 r. w Dubrowniku lub Sarajewie) oraz prowadzenie prac związanych z przygotowaniem do druku i opublikowaniem materiałów kongresowych. W innych dziedzinach działalność Jugosłowiańskiego Towarzystwa Mechaniki nie jest tak ożywiona jak naszego PTMTS i w zasadzie ogranicza się do prowadzenia seminariów, które mają na celu rozwijanie poszczególnych gałęzi mechaniki.

Zbigniew Olesiak

KONFERENCJE SZKOLENIOWE PAN W JABLONNIE

Wzorem lat ubiegłych Biuro Kształcenia i Doskonalenia Kadr Naukowych zorganizowało szereg szkoleniowych konferencji naukowych, w tym cztery z dziedziny mechaniki.

I. METODY MACIERZOWE I ZASTOSOWANIA MASZYN ELEKTRONOWYCH W [ANALIZIE KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

Konferencja odbyła się w dniach od 13 do 21.3.1964 r. w Jabłonie. Udział w niej wzięło 40 pracowników naukowych z następujących instytucji: Politechniki Gdańskiej, Krakowskiej, Śląskiej, Szczecińskiej, Warszawskiej, Wrocławskiej, Instytutu Podstawowych Problemów Techniki, Instytutu Techniki Budowlanej, Zjednoczenia Biur Projektów Budownictwa, Biura Studiów i Projektów Komunikacji Miejskiej, Centrum Obliczeniowego PAN. Ponadto w konferencji wzięło udział dwóch uczestników zagranicznych (z Jugosławii i Bułgarii).

Tematem konferencji było zastosowanie algebry macierzy do obliczania budowlanych konstrukcji inżynierskich. W szczególności zanalizowane zostały pewne zagadnienia podstawowe, jak zapisy macierzowe działań na wektorach, ustalenie warunków równowagi, określenie wielkości sił i przemieszczeń w ustrojach kratownicowych, analiza ustrojów statycznie niewyznaczalnych, przekształcanie macierzy odkształcalności.

Omówione zostało obliczanie belek prostych, belek na sprężystych podłożach, belek-słupów, pali pojedynczych oraz grup pali, ustrojów ramowych, łukowych, mostów wiszących.

Rozwiązania stosujące postać zapisu i działanie przy użyciu macierzy cechuje duża przejrzystość, prostota operacji, a co najważniejsze nadają się one i są przystosowane do obliczeń za pomocą maszyn matematycznych. Prowadzi to do znakomitej oszczędności czasu i przyspiesza wielokrotnie uzyskanie wyniku. Znaczenie rachunku macierzowego w zastosowaniu do mechaniki budowli będzie wzrastać w miarę powiększania się liczby placówek projektowych i obliczeniowych, dysponujących maszynami matematycznymi.

Wykładowcą na konferencji był profesor S. O. ASPLUND, kierownik Katedry Mechaniki Technicznej Uniwersytetu w Göteborgu (Chalmers University of Technology). Fragmenty książki prof. Asplunda («Mechanika Techniczna», wyd. Prentice Hall) zostały przetłumaczone na język polski i wydane z okazji konferencji przez Biuro Kształcenia Kadr Naukowych PAN. Materiały te stanowiły cenną pomoc dla uczestników konferencji, zwłaszcza przy omawianiu rozwiązań dla poszczególnych typów konstrukcji.

W czasie konferencji został wyświetlony film przywieziony przez prof. Asplunda, obrazujący konstrukcje mostów wiszących, budowanych w Szwecji w pobliżu zapór wodnych. Mosty te, zaprojektowane na obciążenie naładowaną ciężarówką, służą do transportu materiałów w czasie budowy, a później jako kładki dla pieszych.

Stanisław Kajfasz

II. WSPÓŁCZESNE ZAGADNIENIA TEORII POWŁOK

W ramach konferencji, która odbyła się w dniach 13–25 kwietnia 1964 r., wygłoszone zostały dwa cykle wykładów, każdy po 23 godziny:

- a) «Liniowa teoria cienkich płyt i powłok»;
- b) «Równowaga płyt i powłok przy dużych odkształceniach».

Pierwszy z wymienionych cykli wykładów prowadził prof. dr. A. L. GOLDENWEJZER (Instytut Mechaniki AN ZSRR), jeden z najwybitniejszych specjalistów klasycznej teorii powłok, autor znanej monografii z tej dziedziny. Zasadniczą część tego cyklu wykładów stanowiło omówienie asymptotycznych metod całkowania równań różniczkowych cząstkowych i ich zastosowanie do całkowania równań teorii powłok. Prelegent zaznajomił słuchaczy z wynikami wielu swych prac częściowo jeszcze nieopublikowanych.

Drugi równoległy cykl wykładów prowadził prof. dr. A. S. GRIGORIEW również z Instytutu Mechaniki AN ZSRR. Przedstawił on teorię powłok obrotowych przy dużych przemieszczeniach i odkształceniach ilustrując ją przykładami dla różnych rodzajów powłok izotropowych i ortotropowych.

W konferencji wzięło udział ok. 50 osób z całej Polski.

Zbigniew Olesiak

III. NIELINIOWA TEORIA OŚRODKA CIĄGŁEGO

W dniach 16–26 czerwca 1964 r. odbył się w Jabłonie kurs wykładów pod ogólnym tytułem «Nieliniowa teoria ośrodka ciągłego». Głównym wykładowcą był prof. dr. C. TRUESDELL z Johns Hopkins University (Baltimore, USA), jeden z najwybitniejszych specjalistów w tej dziedzinie na świecie. Wygłosił on dziesięć kolejnych wykładów, w których mówił na następujące tematy:

- a) podstawy teorii nieliniowych równań stanu (ogólna teoria zachowania się materiału),
- b) sprężystość (równania stanu w teorii sprężystości, małe odkształcenia nałożone na duże, fale w nieliniowych ośrodkach sprężystych),
- c) teoria cieczy (wiskometria, ciecze anizotropowe, ogólne równanie stanu).

Prócz prof. Truesdella szereg wykładów wygłosili profesorowie z kraju. Tak więc prof. dr. W. NOWACKI mówił o podstawach termosprężystości, prof. dr. W. OLSZAK o podstawach teorii plastyczności, doc. dr. P. PERZYNA wygłosił wykład o równaniach stanu lepkoplastyczności. Prof. dr. J. BONDER zreferował wyniki swych badań dotyczących czterowymiarowych sformułowań równań dynamiki gazów, a prof. dr. J. LITWINISZYN omówił podstawowe równania i metody stworzonej przez siebie Teorii ośrodków stochastycznych. Wreszcie prof. dr. H. ZORSKI wygłosił wykład dotyczący statystycznych podstaw równań ośrodka ciągłego.

W kursie brało udział 25-30 pracowników naukowych PAN i różnych uczelni z całej Polski

Henryk Zorski

IV. MATEMATYCZNE PROBLEMY MECHANIKI CIECZY I GAZÓW

Konferencja odbyła się w dniach 7–16 października 1964 r. Inicjatorem konferencji był Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN. Stroną organizacyjną konferencji zajmowało się Biuro Kształcenia i Doskonalenia Kadr Naukowych PAN.

Podobnie jak w wielu gałęziach nauk fizycznych tak i w mechanice płynów matematyczna analiza podstawowych równań nastęrczała i dotąd jeszcze nastęrcza wiele trudności. Fizyczne modele i poglądy, które stanowią podstawę dla wyprowadzenia określonego typu równania, są zawsze dyskusyjne i na ogół potrzebny jest dość długi okres czasu, aby jakieś równanie przyjęło się i otrzymało obywatelstwo na terenie nauki. Sprzyja temu oczywiście zgodność wniosków wyprowadzonych z równania z danymi eksperymentu.

Tego typu zgodność, jakkolwiek przemawiająca za modelem, na podstawie którego zostało równanie wyprowadzone, nie jest wystarczającą weryfikacją logiczną proponowanej teorii. Matematyczna analiza równania taką właśnie logiczną weryfikację przeprowadza poprzez stwierdzenie tak istotnych spraw, jak na przykład istnienia i jednoznaczności rozwiązania określonego równania. Szczególnie ważna i istotna jest analiza matematyczna wówczas, gdy nie są znane żadne dokładne rozwiązania przyjętego równania.

Sytuacja tego rodzaju istnieje w mechanice cieczy i gazów, gdzie w istocie znana jest bardzo niewielka liczba rozwiązań szczególnych i to na ogół dla bardzo uproszczonych i fizycznie nie-realnych przypadków. Dobitym przykładem powyższej tezy są równania Naviera-Stokesa dotyczące przepływu płynów lepkich bądź też równania Boltzmanna stosowane głównie dla analizy przepływu gazów rozrzedzonych. W obu tych przypadkach znamy faktycznie zaledwie jedno szczegółowe rozwiązanie. Przyczyną tego jest fakt, że oba wymienione równania, podobnie zresztą jak większość pozostałych równań, którymi operujemy w mechanice płynów, to równania nieliniowe.

W ciągu ostatnich dziesięciu lat sytuacja dotycząca matematycznej analizy równań mechaniki płynów uległa dość istotnej zmianie. Okazało się mianowicie możliwe zastosowanie nowych aparatów matematycznych do równań, którymi się interesujemy, przeniesienie na nie tych metod, które uprzednio okazały się przydatne do analizy prostszych przypadków. Pozwoliło to nie tylko na uzyskanie nowych, nieraz bardzo pięknych rezultatów, ale także na przeprowadzenie uproszczonych dowodów twierdzeń dawniej znanych. Jako przykład warto tu podać twierdzenie zawarte w pracach J. Leray'a, matematyka, którego idee dotyczące analizy równań nieliniowych leżą u podstaw wszelkich dotychczasowych rozważań. Prace Leray'a w omawianym zakresie, zawarte w ogromnych memuarach drukowanych w latach trzydziestych, są niezmiernie trudne i mało komu udało się przez nie przebrnąć.

Stan względnej stagnacji, jaki jeszcze do niedawna miał miejsce w matematycznych problemach mechaniki płynów, spowodował między innymi i to, że nie były nigdzie organizowane konferencje czy sympozja poświęcone omawianej tematyce. Obecnie wydaje się, że sytuacja uległa zmianie i że konieczne staje się rozpowszechnianie w środowisku mechaników i matematyków nowych metod i osiągnięć w zagadnieniach matematycznej analizy równań mechaniki płynów. Konferencja, która odbyła się w Jabłonie, wydaje się potwierdzać wypowiedziane przypuszczenia.

Pośród wielu matematycznych zagadnień organizatorzy wybrali następujące:

1. Problemy istnienia rozwiązań równania Naviera-Stokesa dla cieczy nieściśliwych (dla cieczy ściśliwych nie udało się dotąd otrzymać żadnych istotnych rezultatów)
2. Zagadnienia przepływów ze swobodnymi granicami i problemy kawitacji
3. Zagadnienie istnienia przepływów poddźwiękowych gazu nielepkiego
4. Zagadnienie związane z istnieniem rozwiązań typu fal prostych i związane z tym wykorzystanie metody charakterystyk w przestrzeni trójwymiarowej
5. Zagadnienia związane z równaniem Boltzmanna

Omówienie pierwszego z wymienionych tematów znalazło się w cyklu wykładów prof. OLGY ALEKSANDROWNY ŁADYŻEŃSKIEJ z Leningradu. Przed trzema laty opublikowała ona książkę dotyczącą zagadnień istnienia i jednoznaczności przepływu cieczy lepkiej. W następnym okresie ŁADYŻEŃSKA i jej współpracownicy uzyskali wiele nowych i ważnych rezultatów. Aparat matematyczny stosowany w pracach tej szkoły—to analiza funkcjonalna i metody rozwiązań uogólnionych.

Prof. DAVID GILBARG z Uniwersytetu w Stanford (Kalifornia) omawiał problemy przepływów ze swobodnymi granicami. Mimo że matematyczne problemy związane z tym zagadnieniem były podjęte stosunkowo dawno, bo jeszcze na przełomie XIX i XX wieku, wiele zagadnień czeka do dziś na rozwiązanie. Podstawową metodą pracy były dawniej metody funkcji zmiennej zespolonej. Obecnie dzięki pracy wielu uczonych, w tym także prof. D. GILBARGA i jego szkoły, udało się zanalizować wiele przepływów przestrzennych. Aby to osiągnąć, użyto metod dotyczących równań eliptycznych, na które zostało przeniesione ważne dla tego zakresu twierdzenie ŁAWRENTIEWA o porównaniu funkcji analitycznych. Dzięki zastosowaniu tego twierdzenia uzyskano wiele bardzo interesujących rezultatów.

Przed paroma laty został opublikowany po raz pierwszy dowód twierdzenia, że przy dostatecznie małej liczbie Macha napływającego z nieskończoności strumienia gazu istnieje przepływ poddźwiękowy w całym zakresie przepływu. Mimo że w prawdziwość tego twierdzenia nikt z mechaników nie wątpił, to jego dowód okazał się sprawą bardzo trudną. Zmienioną wersję oryginalnego dowodu przedstawił w cyklu wykładów doc. BOGDAN BOJARSKI z Uniwersytetu Warszawskiego. Dla dowodu wykorzystano metody całek osobliwych i przekształceń quasi-konforemnych. Te ostatnie metody dają się wykorzystać jedynie dla przepływów płaskich. Dla przepływów przestrzennych pełny dowód nie został dotąd nigdzie przeprowadzony. Na jednym z seminariów prof. D. GILBARG podał idee, na podstawie których ma on nadzieję uzyskać dowód w przypadku przestrzennym.

W Polsce pierwszym, który zajmował się przepływami typu fali prostej, był prof. dr J. BONDER. Jego uczniowi w tym zakresie, doc. dr M. BURNATOWI z Zakładu Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT PAN, udało się uzyskać szereg ciekawych nowych twierdzeń. Między innymi stosując metody geometryczne charakteryzował on wszystkie ciała, które mogą być opływane falą prostą. Przeglądowi tych metod i rezultatów badań był poświęcony cykl wykładów doc. M. BURNATA. W ostatniej części cyklu została podana idea metody obliczeniowej pozwalającej wyznaczyć przepływ naddźwiękowy dla bardzo szerokiej klasy zadań.

Organizatorzy konferencji spodziewali się, że ostatni z podanych uprzednio problemów, mianowicie zagadnienie analizy równania Boltzmann'a, będzie referowany przez Prof. POWZNERA z Moskwy. Uzyskał on ostatnio nowe bardzo ważne rezultaty. Niestety prof. Powzner nie przyjechał i ta ważna tematyka nie była na konferencji podjęta.

Poza wymienionymi wykładami zostały wygłoszone przez prof. ŁADYŻEŃSKĄ dwa wykłady dodatkowe, dotyczące analizy równań nieliniowych typu eliptycznego i parabolicznego. ŁADYŻEŃSKA przedstawiła na nich wyniki swoich prac, dotyczące prawidłowości rozszerzenia pojęcia rozwiązania uogólnionego odpowiednich równań.

W ramach konferencji odbyło się wiele seminariów dyskusyjnych, w tym jedno specjalnie poświęcone omówieniu zagadnień matematycznych, występujących w pracach uczestników konferencji. Wśród uczestników konferencji rozprowadzono fotokopie części artykułu przeglądowego D. GILBARGA drukowanego w Handbook of Physics. Organizatorzy dołożą starań, by opublikować materiały konferencji.

W pracach konferencji wzięło udział 56 uczestników, w tym — oprócz już wymienionych dwóch gości z Jugosławii — jeden z Bułgarii i jeden z Rumunii. Większość uczestników konferencji miało wykształcenie inżynierskie, dlatego też okazało się celowe przeprowadzenie dodatkowych zajęć seminaryjnych, na których wyjaśniono niektóre używane w czasie wykładów pojęcia i twierdzenia matematyczne. Organizatorzy są wdzięczni za pomoc w organizowaniu tych seminariów doc. ANDRZEJOWI KRZYWICKIEMU i dr PIOTROWI KUCHARCZYKOWI.

O powodzeniu konferencji decyduje postawa słuchaczy. Wydaje się, że była ona aktywna. Konferencję należy uważać za udaną i pożyteczną.

Ryszard Herczyński

Następny zeszyt Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej zawiera prace:

- M. JANUSZ, Zasada Bettiego jako podstawa warunków modelowych
Принцип Бетти в качестве основы для условий моделирования
Betti's principle as a basis of model conditions
- J. MARYNIAK, Oscylacje rakiety lecącej po torze falistym w atmosferze Ziemi
Осцилляций ракеты движущейся в атмосфере Земли по волнообразной траекторий
Oscillatory motion of a skip rocket in the earth's atmosphere
- W. WIERZYCKI, Katastrofa budowlana jako przypadek unormowany
Строительная катастрофа как нормированное событие
Structure collapse as a normal event.
- Z. ZIEMBA, Rola mechaniki teoretycznej i stosowanej w rozwoju postępu technicznego
Роль теоретической и прикладной механики в развитии технического прогресса
The role of theoretical and applied mechanics in the technological progress.
- Biuletyn informacyjny PTMTS:
Sprawozdanie z Kongresu Mechaniki w Monachium w 1964 r.
Sprawozdanie z konferencji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Zakopanem.

SPIS TREŚCI

ZESZYT 1/1963

- Z. OSIŃSKI, Przegląd nieliniowych równań różniczkowych drgań układów autonomicznych o jednym stopniu swobody
A. SAWCZUK, W. OLSZAK, Zagadnienia powłok niesprężystych
A. WILCZYŃSKI, Badanie własności mechanicznych niektórych tworzyw sztucznych
Z. DŻYGADŁO, M. SOKOŁOWSKI, S. ZAHORSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Konferencja Naukowa Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Krynicy. Przegląd referatów
W. SZCZEPIŃSKI, Sympozjum na temat elastooptyki i jej zastosowań, Warszawa 1962.

ZESZYT 2/1964

- P. PERZYNA, Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności
Z. NOWAK, M. ŻYCZKOWSKI, Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych
E. STERNBERG, Naprężenia cieplne w ciałach lepkosprężystych
A. WILCZYŃSKI, Zależność «naprężenie-odkształcenie» w przypadku prostego rozciągania tworzyw o łańcuchowej budowie cząsteczek
H. DZIATLIK, Model elektryczny tensora naprężeń

Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 1/1964

- S. KALISKI, Stateczność ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na sprężystym podłożu
Z. OLESIAK, Przegląd polskich prac dotyczących zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi w teorii sprężystości
Z. WESOŁOWSKI, Związki fizyczne dla materiału sprężystego z więzami geometryczno-termicznymi
W. SZCZEPIŃSKI, Wyznaczanie naprężeń na podstawie pomiarów tylko jednej składowej odkształcenia
R. S. DOROSZKIEWICZ, A. LITEWKA, Doraźne badania własności mechanicznych i elastooptycznych materiałów używanych w elastooptyce

Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i ukazuje się na razie jako wydawnictwo ciągłe mniej więcej w odstępach kwartalnych.

Członkowie PTMTS otrzymują poszczególne zeszyty wydawnictwa ze zniżką 50% w Oddziałach Towarzystwa

MECHANIKĘ TEORETYCZNA I STOSOWANA można nabyć w księgarniach naukowych, w domu Książki oraz w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polskiej Akademii Nauk (PKiN)

Poprzednie numery MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ można nabyć w Sekretariacie PTMTS, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 23-cie, pokój nr 2305
