

II 720  
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

PL ISSN 0079-3701



# MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 26 • ZESZYT 2

WARSZAWA 1988

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

T-720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 2 6 • Z E S Z Y T 2

W A R S Z A W A 1 9 8 8

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

### RADA REDAKCYJNA

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY  
ZBIGNIEW DŻYGADŁO, JANUSZ ELSNER,  
STANISŁAW JERZY GDULA, [IGOR KISIEL],  
ZENON MRÓZ, BOGDAN SKALMIERSKI, PIOTR WILDE,  
JÓZEF WOJNAROWSKI, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

### KOMITET REDAKCYJNY

REDAKTOR NACZELNY — ZBIGNIEW OLESIAK  
REDAKTORZY — STANISŁAW DUBIEL, JACEK STUPNICKI,  
ANDRZEJ TYLIKOWSKI, CZESŁAW WOŹNIAK,  
SEKRETARZ — EWA KOISAR

### REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 309, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Kwartalnik ukazuje się przy pomocy finansowej PAN

---

Nakład 500. Ark. wydawniczych 15,25 Ark. drukarskich 12,0. Papier druk. sat. kl. III, 70 g. 70 × 100  
Oddano do składania 30.X.1987 r. Druk ukończono w marcu 1989 r. Zam. 5035/11/87. Cena 180 zł.—

---

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

## PROBLEMS IN CONNECTION WITH DESIGN, CALIBRATION AND USE OF PRESSURE CELLS\*

VAGN ASKEGAARD

*Technical University of Denmark*

### 1. Introduction

The pressure cell problem makes a very good example from the Experimental Mechanics field of the complementarity of theory and experiment.

Experimental information is necessary in the process of developing better theories when dealing with particulate media whose properties are not very well known, and the pressure cell is one means of obtaining such information. On the other hand, theoretical considerations are necessary when designing the pressure cell so that its measuring accuracy when used in these not very well known materials can be predicted. These theoretical considerations must be based on simple material models; usually, linear elasticity is assumed.

We therefore see a development where pressure cells designed using very restrictive material characterizations are embedded in materials with more or less unknown material properties in order to obtain a better understanding of these materials' behaviour and thus improved theories.

The pressure cell example also shows how important it is to remember that the assumptions made are approximations to reality, so that both theoretical and experimental results have a certain inaccuracy, making calibration experiments under well known conditions essential.

Pressure cells are used to measure stresses in the fields of soil mechanics, road research, silo research, and structural engineering. The design bases for pressure cells are the same in the different fields, whereas the practical problems of using them may differ, leading to variations in geometry and stiffness.

The first application of pressure cells seems to have been in the silo field a hundred years ago [1], [2]. The development of design bases is of more recent date and has been slow in moving from assumptions of the pressure cell being embedded in a medium in an uniaxial state of stress to the general stress state and general stress-free strain state (shrinkage for instance). The development up to about 1970 is described in [3].

---

\* Praca wygłoszona na XII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa-Jadwisin, 1986

In the following, only work carried out at the Department of Structural Engineering will be described. This work has consisted in developing design bases for wall cells and embedded cells under general stress states, i.e. work of a general nature. The applications described refer to silo research, but the conclusions drawn from it are also valuable in the fields of road research and soil mechanics.

The following 3 headings are used in the presentation:

Interface problem with no relative displacement.

Interface problem with relative displacement.

Embedded cell problem.

## 2. Interface problem with no relative displacement

**2.1. Normal stress.** The first design expressions for pressure cells measuring normal stress seem to have been based on practical experience and not on theoretical arguments, and not until 1956 [4] did a suggestion come based on a theoretical solution, and even then, the measuring error was underestimated. The analytical solution for a fluid-filled, membrane-type cell, assuming linear elasticity, was published at the Department in 1959 [5]. At the same time, the numerical solution for the piston type cell was given. These results, together with the expressions for the plate-type cell with or without fluid behind it, see fig. 1, are discussed in [6]. The error expressions have the form (1) and can be used when errors are small.

$$\frac{\Delta p}{p} = K \cdot \frac{E}{(1-\nu^2) \cdot a} \frac{\Delta w}{p} \quad (1)$$

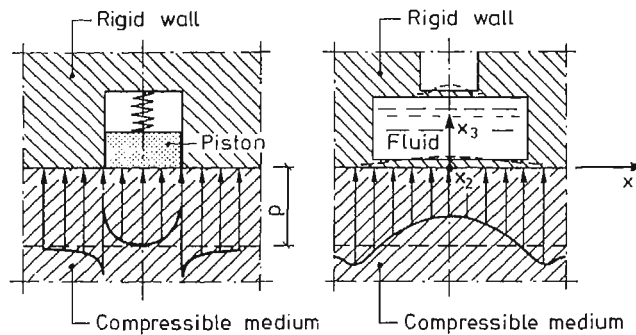


Fig. 1. Measuring principles for stress cells at an interface

Here,  $p$  is the uniform pressure on the undisturbed wall, and  $p - \Delta p$  is the mean pressure transmitted to the pressure cell.  $p - \Delta p$  depends on the displacement  $\Delta w$  of the cell's front surface under the load  $p$ . It also depends on the modulus  $E$ , Poisson's ratio  $\nu$  for the compressible medium, and the radius  $a$  of the pressure cell.  $K$  is a constant depending on the cell type (about 1.9 for the stiff piston and 0.7 for a thin plate with no fluid behind it).

Expression (1) can also be used to evaluate error signals caused by temperature changes when materials with different coefficients of expansion are used in the cell-wall arrangement.

As shown in the following example the requirements to stiffness of the pressure cell are rigorous if small measuring errors are going to be obtained. Underestimation of these requirements still seems to be the major cause of errors in pressure cell work.

**Example.** In the case of a pressure level  $p = 50$  KPa, if  $a = 50$  mm,  $E = 100$  MPa (sand), and  $\nu = 0.3$ , then even such a small displacement of the piston as  $10^{-3}$  mm (for  $p = 50$  KPa) will give a measuring error of about 10% when the pressure cell is of the rigid-piston type.

By making a suitable choice of cell stiffness  $\frac{\Delta w}{p}$ , a small error, say less than 2%, can be obtained for a range of values of  $E$ , indicating that the assumed value of  $E$  need not be very precise. The material need not even be linear elastic, as assumed, if even a reasonably good guess of the stiffness can be made and small errors are aimed at. It is thus justifiable to talk about the measurement of stress.

A typical pressure cell installation in a reinforced concrete wall is shown in fig. 2.

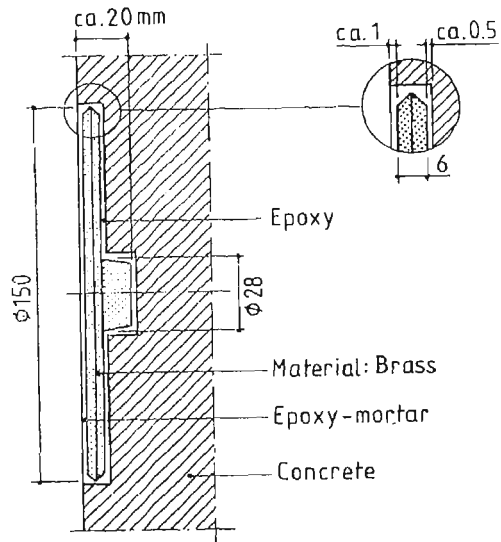


Fig. 2. Installation of normal stress cell in wall

The layers of epoxy and epoxy mortar are kept as thin as possible, and the free surface is given a roughness comparable with that of the surrounding concrete, even though the measuring signal from the cell is almost insensitive to deviations in roughness.

The design basis has been tested with the central bottom cell (no viscous paste layer) in a calibration chamber similar to the one shown in fig. 7. This cell has a front plate thickness of 0.3 mm. A mean deviation of 1% was found between the calculated and the measured sensitivity. The coefficient of variation was 0.02.

Tests with a pressure cell installed in a concrete specimen subjected to a strain state of the order of magnitude that can be expected in full-scale silos has shown only small changes in sensitivity and zero shift when thin front plates (0.3 mm) are used. In the case of thicker front plates, as the one in fig. 2, which are necessary in the case of coarse grains in the particulate medium, non-negligible changes must be expected. Such changes

may also occur when curved front plates are used — in model, small-diameter silos, for instance.

**2.2. Shear stress.** The design basis for a shear cell has been developed by making a limit analysis of the case where an ellipsoidal inclusion is placed in a matrix under external load, as illustrated in fig. 3, [7].

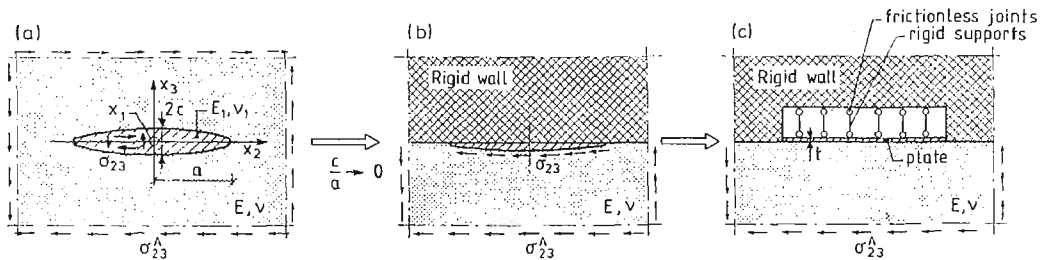


Fig. 3. Transference of ellipsoid in infinite medium into a plate fixed along the edge in an interface

The following expression was obtained for a cell type having a front plate of constant thickness and fixed along the edge:

$$\frac{\sigma_{23}}{\sigma_{23}^A} = \frac{8(1-\nu^2)}{\pi(2-\nu)U + 8(1-\nu^2)}, \quad (2)$$

where:

$$U = \frac{Eu_2}{\sigma_{23}a}. \quad (3)$$

$\sigma_{23}$  is the shear stress on the cell surface,  $\sigma_{23}^A$  is the shear stress in the matrix, which is to be measured,  $E$  and  $\nu$  are the modulus of elasticity and Poisson's ratio, respectively,  $a$  is the cell radius, and  $u_2$  is the displacement in the  $x_2$  direction of the front plate centre caused by  $\sigma_{23}$ .

**Example.** Using the values  $E \sim 100$  MPa (sand),  $\nu \sim 0,3$ ,  $a = 75$  mm, and  $\sigma_{23} \sim 0,1$  MPa, it can be seen that to obtain a measuring error of less than 5%, the displacement  $u_2$  for the stress  $\sigma_{23} \sim 0,1$  MPa should be less than  $5 \cdot 10^{-3}$  mm.

Calibration tests have been carried out with a cell of this type in the calibration set up shown in fig. 4. The shear cell was placed in the interface between a rigid wall and a sand layer of thickness of 150 mm and diameter of 1200 mm. The sand was encapsulated in an 0.3 mm thick rubber membrane and evacuated. The shear load was obtained by 90° rotation from the horizontal, as shown in the figure.

Had the diameter of the sand layer been very large, the shear stress in the interface around the stress cell would have been uniformly distributed and given by the weight of the volume of the column of sand over a unit of surface area.

For practical reasons, the diameter must be of limited size. In the chosen configuration, the shear stress can still be considered uniformly distributed, but a correction of 2% found by finite-element technique must be introduced. Good correspondence between the calculated and measured error of the shear cell was found being 7% and 9%, respectively.

A shear cell type, where the front plate is not fixed along the edge but moves in the

plane as a whole has also been calibrated. The expression (2) seems to give a good idea of expected error in this case, too.

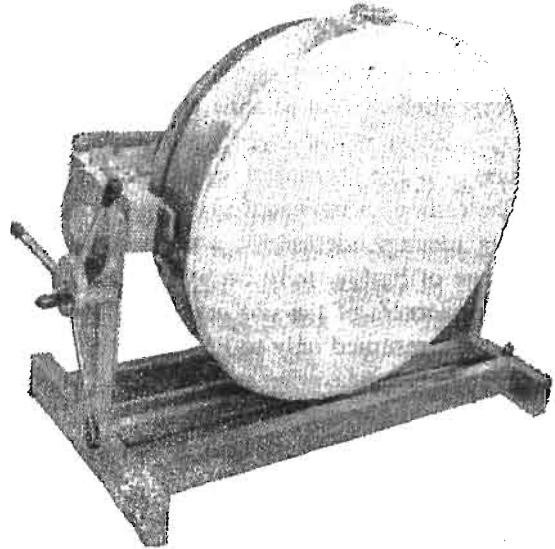


Fig. 4. Calibration equipment with shear cell in an interface

In fig. 5, a cell of that type is shown mounted in a medium scale model silo [8]. By measuring the bottom load and the shear stress distribution on the silo wall and knowing the weight of the silo medium (barley), an equilibrium check could be carried out to evaluate the shear cell behaviour. The correspondence seemed to be good, giving 3% difference between expected and measured shear load during filling at nearly full silo.

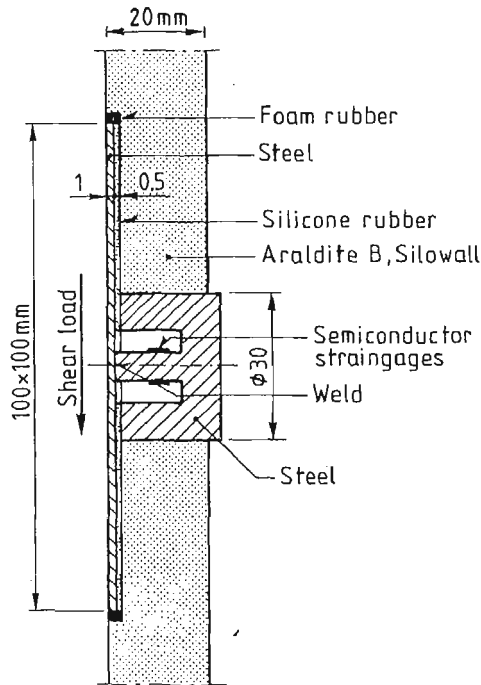


Fig. 5. Operating principle of shear cell



### 3. Interface problem with relative displacements

Large relative displacements between wall and medium occur during emptying in mass flow silos. The requirements to normal pressure cells used under these conditions have been investigated in [9].

Tests showed that serious errors could occur if the cell was not mounted flush with the wall. An angle of  $1^\circ$  between the cell's front surface and the wall surface thus gave a change in the measured stress of about 50%.

The tests also indicated that the relatively rapid variations in pressure about a slowly varying mean value, which are characteristic of pressure cell measurements during the discharge of barley, were caused by local irregularities in the geometry of the wall or in the compactness of the silo medium. These rapid variations in contrast to the more slow were thus presumed only to represent the condition in an area of the wall that is not much larger than the measuring surface of the pressure cell itself and should not normally cause serious bending moments in the silo wall. Measurements carried out in a fly-ash silo [10] have shown that pressure cells, when in contact with powder materials, represent a wall area much bigger than their own.

When measuring shear stresses and when the relative displacements occur in the interface itself, it becomes important to ensure that the coefficient of friction of the pressure cell is the same as that of the surrounding wall. If the relative displacements take place in the medium a few particle diameters from the wall, the only requirement to the coefficient of friction of the cell's surface is that this must be bigger than the internal friction in the silo medium. The equilibrium check carried out with friction cells in a model silo with barley mentioned previously was also done in the discharge situation, where semi-mass flow occurs, leading to large relative displacements near the wall. The deviations in two situations were measured as 6% and 10%.

### 4. Embedded cell problem

If a stress cell is made flat and thin enough, the measuring error can be made arbitrarily small whatever the material properties of the matrix and the cell.

For small errors, therefore, an almost free choice of the material properties is acceptable when establishing a design basis.

A design basis has therefore been formulated [11] [12] based on linear elasticity and on cells with axially symmetrical, ellipsoidal geometry.

$$\sigma_{33} = A\sigma_{33}^A + B(\sigma_{11}^A + \sigma_{22}^A) \quad (4)$$

is found for a normal stress cell and

$$\sigma_{23} = C\sigma_{23}^A \quad (5)$$

for a shear stress cell.

Here  $\sigma_{11}^A$ ,  $\sigma_{22}^A$ ,  $\sigma_{33}^A$  and  $\sigma_{23}^A$  are stress components in the surrounding medium with the shear  $\sigma_{23}^A$  lying in the plane of the flat stress cell and with the normal stress  $\sigma_{33}^A$  perpendicular to this plane.  $\sigma_{23}$  and  $\sigma_{33}$  are the corresponding stress components in the homogeneous ellipsoid.  $A$ ,  $B$  and  $C$  are factors containing Poisson's ratio, the thickness-diameter ratio,

and the ratio between the moduli of elasticity of the homogeneous ellipsoid and the surrounding medium.

By careful design and under certain restrictions, the almost ideal situation, where  $A \sim 1,0$  and  $B \sim 0$ , can be obtained, up to even large deformations.

A load-history-dependent sensitivity will be encountered when stress cells are designed in such a way that  $A$  differs substantially from 1.0.

The approximations made can also be used to get an idea of the behaviour of strain cells. In this case, the ellipsoid is made long and thin, and an expression similar to (4) but with normal strains instead of normal stresses can be developed [12].

For both flat and long ellipsoids, expressions describing the situation where stress-free strain (shrinkage and differences in thermal expansion) occur, are also given in [12].

It is, of course, possible to refine the calculations by using better approximations of geometry and material properties and by using FEM techniques. But very little seems to be achieved by this where small errors are aimed at, nor do these more rigorous approaches render calibration tests superfluous.

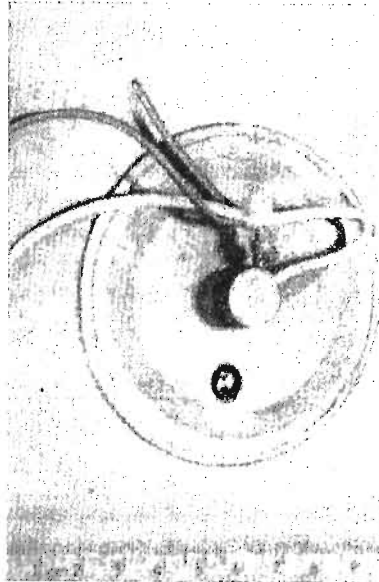


Fig. 6. Electro-hydraulic stress cell

The 75 mm dia. pressure cell shown in fig. 6 has been used in calibration tests described in [13] to get an idea of the overall accuracy that can be expected when using pressure cells.

These tests were performed in the calibration equipment shown in fig. 7 with the pressure cell embedded in wheat and in a similar but more rigid equipment when embedded in sand, which is a stiffer material. Compressibility of the calibration chamber in the vertical direction was obtained by making the cylinder of silicone rubber, while steel reinforcement in the hoop direction made the cylinder stiff in the radial direction.

When evaluating results from the calibration experiments, it is important to have obtained homogeneity in the stress state of the wheat mass. From fig. 8, this appears to be the case with very good accuracy.

In practice, pressure cells are used under load conditions which are only poorly known.

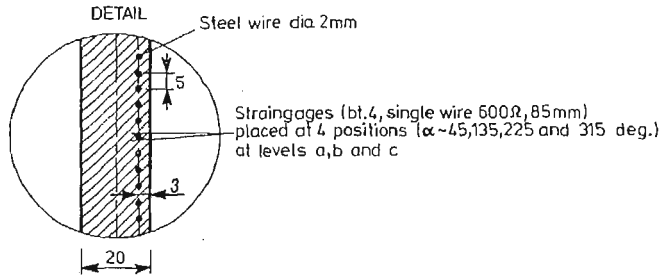
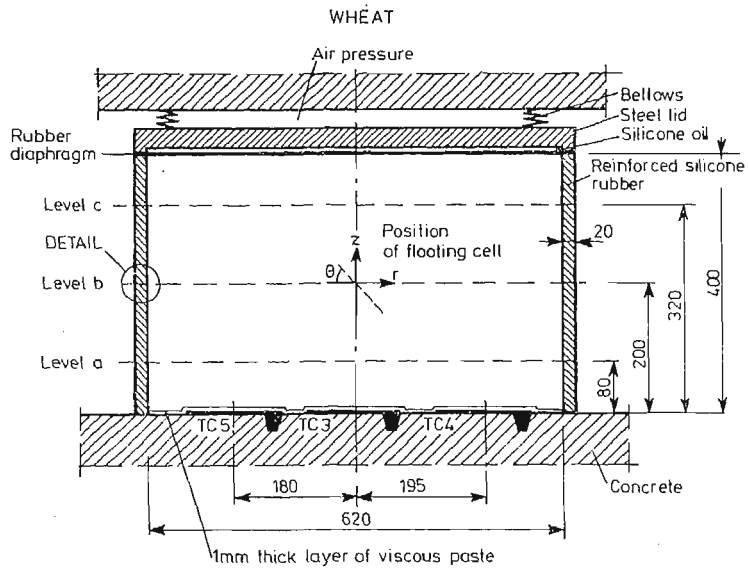


Fig. 7. Calibration chamber used for compressible materials

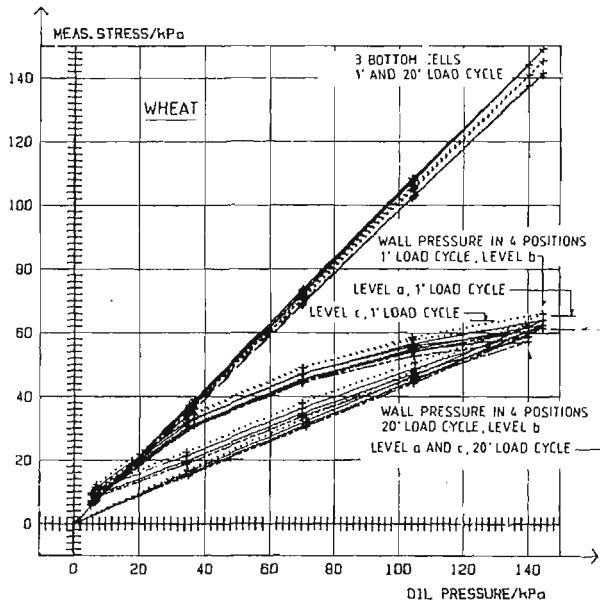


Fig. 8. Stress state in wheat filled calibration chamber

Therefore, to get an idea of the overall accuracy of the pressure cell under such conditions, calibration tests must be performed in such a way as to obtain greatly differing load situations.

In the present case, different load situations were produced by using different tilting angles  $\theta$  ( $0.45^\circ$  and  $90^\circ$ , see fig. 7), whereby the pressure cell worked under different

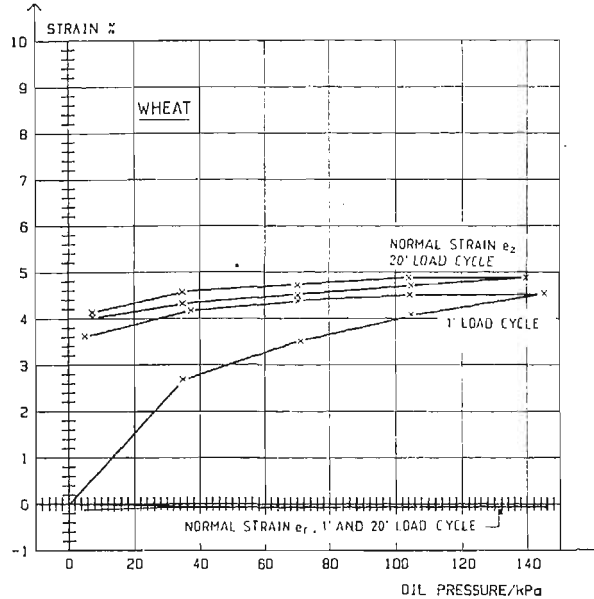


Fig. 9. Strain state in wheat filled calibration chamber

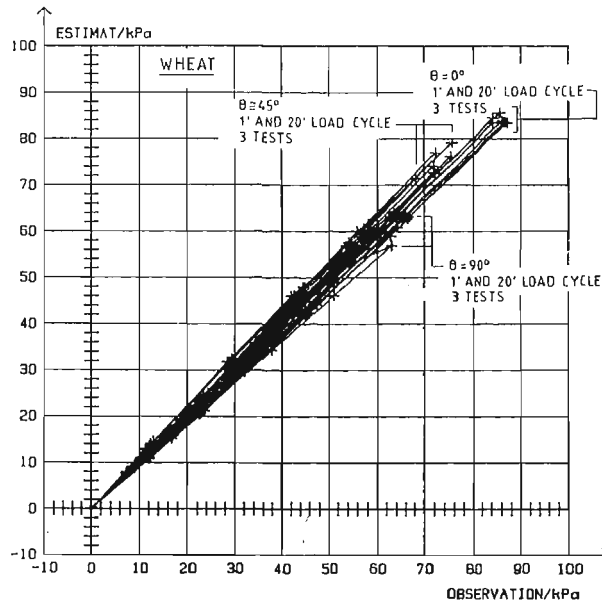


Fig. 10. Observed versus estimated pressure  $q$ . 9 tests in wheat,  $\theta = 0.45$  and  $90$  deg., 1 st and 20th load cycle

principal stress ratios. For  $\theta = 45^\circ$ , also shear stresses will act on the cell surface. The load history involved 20 load cycles, giving changes in material stiffness during tests as shown in fig. 9. All the tests were repeated twice giving a total of 9 tests.

The best estimate of the coefficients  $A$  and  $B$  in equation (4) from all 9 tests gave  $A = 1.06$  and  $B = \div 0.01$ . Using these values on each test leads to fig. 10, indicating that an overall accuracy on the measurement of the normal stress using a pressure cell of this type in wheat corresponds to a coefficient of variation of 0.04.

Similar tests with sand in the calibration chamber led to  $A = 0.93$  and  $B = 0.07$  and a coefficient of variation of 0.05 on the measurement of the normal stress.

In both cases, the theoretically predicted  $A$  and  $B$  values were  $A = 1.00$  and  $B = 0.04$ .

Even though calibration tests are necessary, the theoretical prediction of the coefficients  $A$  and  $B$  seems good, with deviations of 6-7% on  $A$ , which is the more important coefficient.

The materials used in the tests described here were loose materials, making it easy to install the pressure cell in the mass. In the case of more cohesive materials, installation may be more difficult, leading to bigger coefficients of variation on the results.

The behaviour of friction cells can be predicted by means of equation (5). To the author's knowledge, no description or use of such cells has been reported.

## 5. Conclusion

Theoretical considerations can lead to quite an accurate prediction of how a pressure cell will behave in practical use, whether it is embedded or placed in an interface. Such design expressions are given in the paper.

More precise information can, however, only be obtained by experiments, and such experiments are necessary because the assumptions on which the predictions are based may deviate considerably from the actual conditions during field tests.

Calibration tests and model tests with normal stress and shear stress cells in an interface show good agreement between calculated and measured values.

Good agreement is also obtained when embedded cells are tested in a calibration set up under greatly varying stress states.

The experimental results indicate that coefficients of variation of about 0.05 on normal stress measurements can be obtained in field tests with cells embedded in loose materials like sand and wheat, provided the installation conditions of the pressure cells are similar in full scale and calibration tests. Inhomogeneities in the loose materials may, of course, give a scatter in results even from closely spaced pressure cells, but this scatter cannot be attributed to the pressure cell itself.

## References

1. I. ROBERTS, *Determination of the Vertical & Lateral Pressure of Granular Substances*, Proceedings, Royal Society, London, V. 36, 1884, pp. 225-240.
2. G. WALLI, J. SCHWAIGHOFER, *A bibliography on silos (1857 - 1979). Addendum 1899 - 1983*. University of Toronto, Dept. of Civil. Eng. Publication No. 79-05, August 1979.

3. M. J. HVORSLEV, *The Changeable Interaction between Soils and Pressure Cells. Tests and reviews at the Waterways Experiment Station*, Technical Report S-76-7, U.S. Army Engineering Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS 1976.
4. T. KALLSTENIUS, W. BERGAU, *Investigations of soil pressure measuring by means of cells*, Royal Swedish Geotechn. Inst. Proc. Nr. 12, 1956.
5. S. GRAVESEN, *Elastic semi-infinite medium bounded by a rigid plate with a circular hole*, Bygningstatiske Meddelelser nr 3, 1959.
6. V. ASKEGAARD, *Measurement of pressure between a rigid wall and a compressible medium by means of pressure cells*, Acta Polytechnica Scandinavica. Ci. 11, 1961.
7. V. ASKEGAARD, *Design Basis for Cells Measuring Shear Stresses in an Interface*, Geotechnical Testing Journal, vol. 7, No. 2, June 1984, pp. 94 - 98.
8. V. ASKEGAARD, J. MUNCH-ANDERSEN, *Results from Tests with Normal and Shear Stress Cells in Medium-Scale Model Silo*, Powder Technology, vol. 44, No. 2, 1985, pp. 151 - 157.
9. V. ASKEGAARD, M. BERGHOLDT, J. NIELSEN, *Problems in connection with pressure cell measurements in silos*, Bygningstatiske Meddelelser nr. 2, 1971.
10. J. NIELSEN, *Pressure measurements in a full-scale fly ash silo*, Particulate Science and Technology, vol. 2, No. 3, 1984, pp. 237 - 246.
11. V. ASKEGAARD, *Measurement of pressure in solids by means of pressure cells*, Acta Polytechnica Scandinavica. Ci. 17, 1963.
12. V. ASKEGAARD, *Stress and strain measurements in solid materials*, Department of Structural Engineering. Report No, R 92, 1978.
13. V. ASKEGAARD, *Consequence of loading history on the measuring error of embedded stress cells*, Proc. Second Intern. Conf. on Bulk Materials Storage, Handling and Transportation, Wollongong, Australia, July 1986, pp. 138 - 142.

## Р е з ю м е

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ, КАЛИБРОВКА И ПРИМЕНЕНИЯ ДАТЧИКОВ ДАВЛЕНИЯ

Обсуждено работы над развитием датчиков для определения напряжений в сыпучих средах. Описано предположения для постройки датчиков помещенных в стенках силосных сооружений или во внутри сыпучей среды. Обсуждено также проблемы калибровки и точности измерений.

## Streszczenie

## PROBLEMY PROJEKTOWANIA, KALIBRACJI I UŻYTKOWANIA CZUJNIKÓW CIŚNIENIA

W artykule przedstawiono prace nad rozwojem czujników do pomiaru naprężeń w ośrodkach sypkich. Omówiono założenia dla budowy czujników umieszczonych w ścianach silosów lub zatopionych wewnątrz ośrodków. Omówiono problemy skalowania i dokładności pomiarów.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 czerwca 1987 roku.*



## AUTOMATIC DIGITAL IMAGE-PROCESSING IN PHOTOELASTICITY\*

KARL HANS LAERMANN

*Bergische Universität — GH Wuppertal*

### 1. Introduction

Automatic digital image-processing has become very important in the field of remote sensing, in topographic mapping, in quality control, and in medicine, i.e. in the field of pattern recognition. In experimental stress analysis, image-processing has been introduced at first in Moiré techniques and in holographic and speckle interferometry. Application in photoelasticity is not very common as yet, because special problems are still not solved. Image-processing in photoelasticity demands recording, separating and separate evaluation of two different types of fringe pattern, the isochromatic fringes and the isoclinics. Algorithms for filtering, contour mapping, elimination of background intensities and localization of extrema are to be developed for isochromatic fringes, and the varying course of those patterns must be considered. The determination of isoclinics is especially difficult due to the lack of video-cameras in differentiating colors.

Therefore algorithms are derived and procedures are described to improve digital image-processing in photoelasticity.

### 2. Image-preprocessing

In photoelasticity two different fringe patterns (isochromatic fringes and isoclinics) are to be recorded and evaluated separately. The intensity of each pattern is denoted as "image", which will be described by a discrete function of two integer variables, the coordinates of the single pixels of the imaging system. Because of the 8-bit-characteristic of  $A/D$ -converters, the intensity is divided into  $l = 256$  shades of gray

$$I = f(x, y), \quad I \in [1/l], \quad X \in [1/n], \quad Y \in [1/m]. \quad (1)$$

The recorded data of intensity consist of intelligent signals and noise signals. The latter must be divided into i) local-invariant but time-variant, and ii) time-invariant but strongly local-variant noise.

Local-invariant noise which for example might be caused by intensity variation of the

---

\* Praca wygłoszona na XII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego Warszawa-Jadwisin, 1986.



light source and by the video target, the A/D-converter etc. are appreciably reduced by averaging the intensity function recorded over time, an image-storing process:

$$\bar{I}(x, y) = \frac{1}{\vartheta} \sum_{\vartheta} f_{\vartheta}(x, y) \quad (2)$$

with  $\vartheta$ , the number of scanning repetition. The local-variant noise is caused by bubbles, scratches, schlieren in the photoelastic model itself, by inhomogeneity, spots and other defects of the optical filters and the video target. Also the uneven illumination by the light-source must be considered.

As the Fourier-transformation may not be recommended because of limited memory capacity of the considered computer systems, procedures of lowpass-filtering are introduced, i.e. from a mathematical point of view the transformation of a function  $f(x, y)$  onto a new image function  $g(x, y)$ : in a discrete point of the image  $g(x, y)$  depends on the values of  $f(x, y)$  in the neighbourhood  $U$  of the considered point. As local operator of transformation, a balanced matrix  $h(x, y, i, j)$  is introduced with the window  $M = (2k+1) \cdot (2k+1)$  pixels to describe the neighborhood  $U$ .

The relation between this balanced matrix and the local coordinates is difficult to describe; therefore a local-invariant filter, i.e. a homogeneous local operator  $h(i, j)$ , will be used. This convolution process holds (Fig. 1):

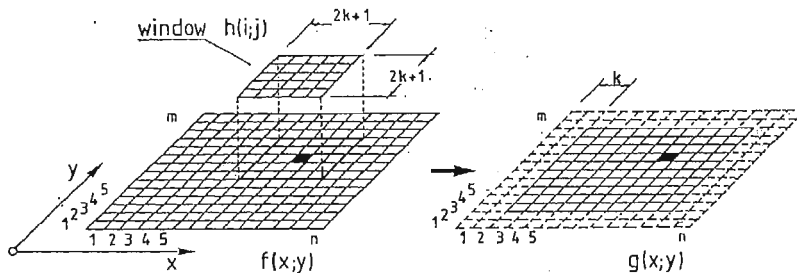


Fig. 1.

$$g(x, y) = \sum_{i=-k}^{+k} \sum_{j=-k}^{+k} f(x+i, y+j) \cdot h(i, j) \hat{=} f * h. \quad (3)$$

In digital image-processing generally a data-reduced binary image is produced from the gray tints-image by determining a threshold value  $I_{Schwell}$  and then allotting the shades of gray for "Low" and "High", if  $I(x, y) < I_{Schwell}$  or  $> I_{Schwell}$  respectively.

But in photoelasticity important informations are lost by such a binary notation as shown for instance in Fig. 2.

It is of utmost importance to obtain exact data of the localization of extrema and to maintain them. Therefore median-, dilatation- and erosion-filtering are not suitable as well. As it has been proved by Perzborn [1], balanced mean valuefiltering yields less dynamic compression as well as faster calculation process and maintains the coordinates of

the extrema of the fringe pattern. The local operator holds:

$$h_{bm}(i, j) = \frac{1}{\sum \psi_{ij}} \begin{bmatrix} \psi_{-k, +k} & \dots & \psi_{0, +k} & \dots & \psi_{+k, +k} \\ \psi_{-k, 0} & \dots & \psi_{0, 0} r_{i, j} & \dots & \psi_{+k, 0} \\ \psi_{-k, -k} & \dots & \psi_{0, -k} & \dots & \psi_{+k, -k} \end{bmatrix} \quad (4)$$

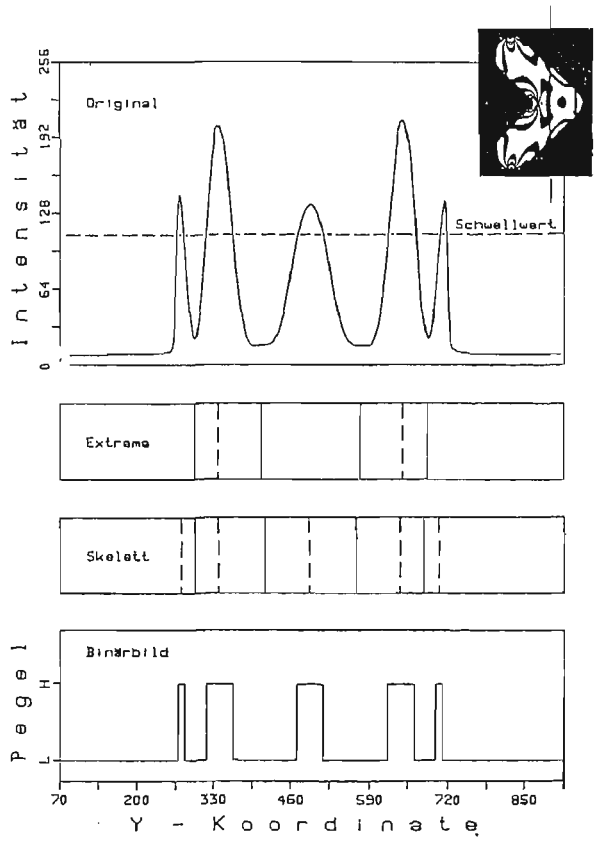


Fig. 2.

The elements of this matrix may be calculated e.g. according to the following formulas:

$$\psi_{i,j} = 0,5 \frac{1}{r_{ij}}; \quad \psi_{i,j} = 0,5 \frac{1}{(r_{i,j})^2}; \quad \psi_{0,0} = 1; \quad (5)$$

with:

$$r_{i,j} = (i^2 + j^2)^{1/2}.$$

Then the transformation yields the discrete function of intensity:

$$\hat{I}(x, y) = \sum_{i=-k}^{+k} \sum_{j=-k}^{+k} \hat{I}(x+i, y+j) \cdot h_{bm}(i; j) \hat{=} (\hat{I} * h_{bm})(x, y). \quad (6)$$

To eliminate the background intensity, recurrent convolution as commonly used is not suitable in photoelasticity (Fig. 3).

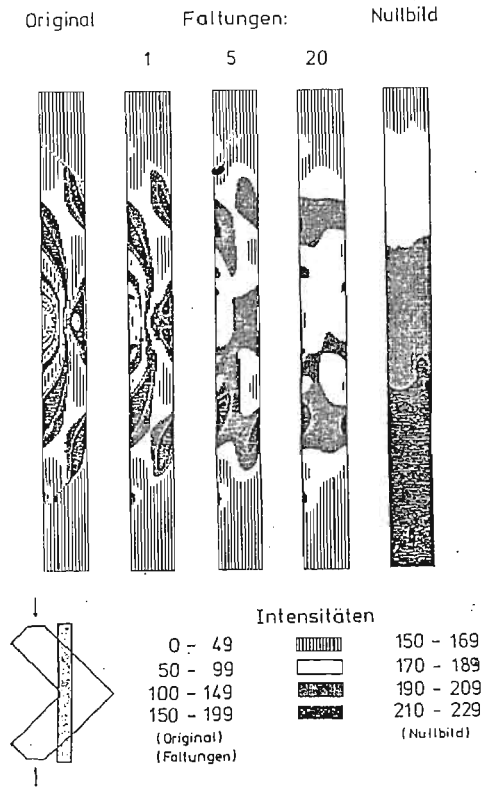


Fig. 3.

Therefore a “zero image” is taken in a circular light-field (in a circular darkfield a background does not exist, but local-variant noise only) and is stored as a zero intensity matrix  $\hat{I}_0$  after filtering, as described before. Contrary to the Moiré technique and holographic interferometry, the background intensity is related multiplicatively with the fringe intensity. But as division of  $\hat{I}(x, y)$  by  $\hat{I}_0(x, y)$  leads towards a high dynamic reduction, the quotient is multiplied with the maximum value  $\hat{I}_{max}$  of the intensity observed on the model and taken by a histogram. Furthermore, there exists a minimum light intensity  $\hat{I}_{min}$  caused for instance by the dark-current-response of the video camera and by scattering light.  $\hat{I}_{min}$  may be estimated regarding the background intensity of the dark field.

The now filtered and corrected intensity function finally holds:

$$I^*(x, y) = \frac{\hat{I}(x, y) - \hat{I}_{min}}{\hat{I}_0(x, y)} \hat{I}_{max}. \quad (7)$$

### 3. Contour mapping

For further evaluation the exact contour lines of the model must be determined. At first, the surface of the model may be powdered to reduce its transparency. Then a threshold value

$$I_c = \frac{1}{2} (I_{max} + I_{min}) \quad (8)$$

will be taken in a circular light field. However, the contour lines are smeared. Therefore they must be intensified by a gradient procedure. For a window  $(2k+1) \times (2k+1)$  the

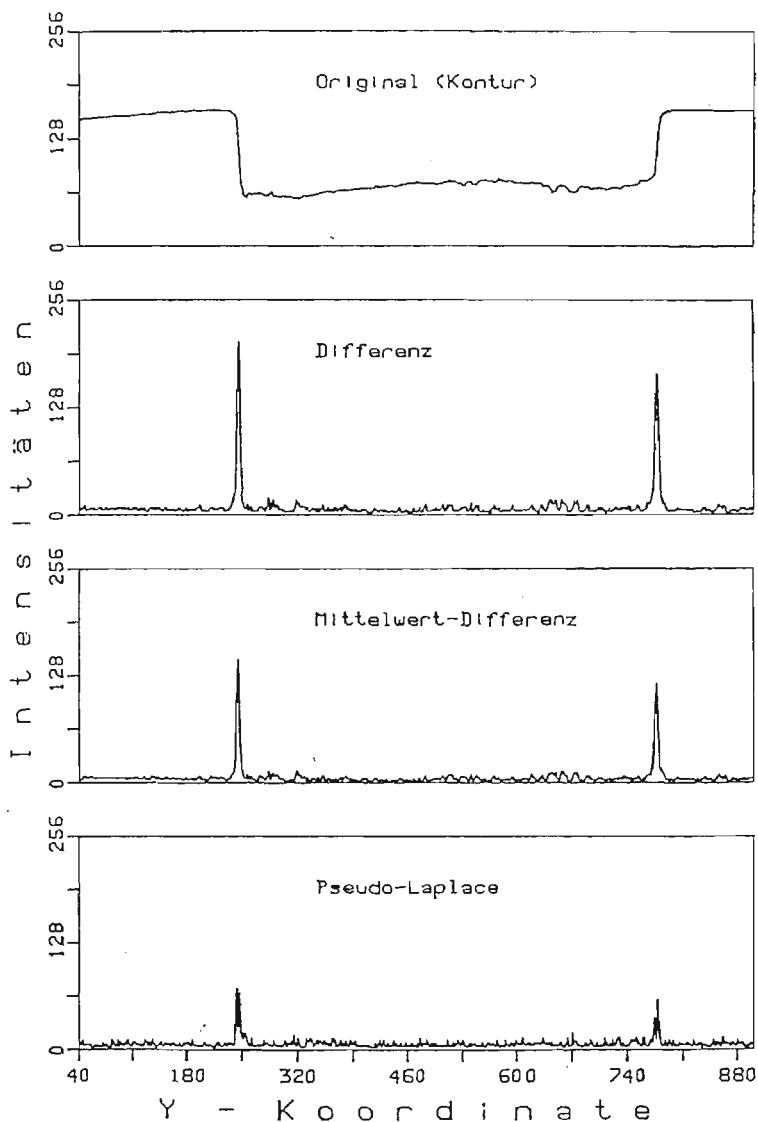


Fig. 4.

maximum of the absolute values of i) the four discrete first derivatives in the direction of the  $x$ -axis, the  $y$ -axis and  $\pm 45^\circ$  to these axes, or ii) the second derivatives (pseudo-Laplace), or iii) the mean value differential calculus will be determined. The maximum of intensity then yields the exact coordinates of the contour. This process of nonlinear transformation is described by:

$$\hat{I}_{Cont}(x, y) = \text{Max}(|\hat{I} * h_{\alpha\beta}|), \quad (9)$$

where:  $\alpha$  denotes one of the processes i) to iii), and  $\beta$  the direction ( $x, y, +45^\circ, -45^\circ$ ) (Fig. 4).

After filtering and contour mapping, the values of intensity of the object only are stored column by column.

#### 4. Positioning of extrema

It is not possible to measure the absolute values of intensity. Otherwise the problem would have been solved already. As mentioned before, filtering of local-invariant and local-variant noise, the background intensity and especially the dynamic compression because of the modulation transmission function are influencing the shades of gray. Therefore the coordinates of extrema are determined only.

**4.1 Isochromatic fringes.** A characteristic value  $k_N$  is assigned to each pixel. Now in the evaluation process these characteristic values are changed in different steps if the pixel

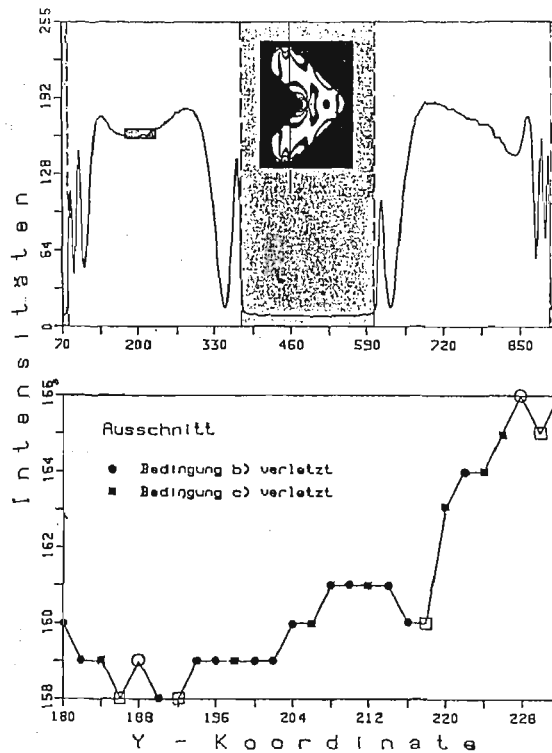


Fig. 5.

is not relevant as loci of extrema. Those points are relevant only the values  $k_N$  of which remain unchanged during the whole process. In a first step  $k_N$  remains unchanged if:

- i) the points are inside the domain  $G$  of the object,  $(x, y) \in G$ ;
- ii) in case of equal intensity in the vicinity, the considered point corresponds to the centre point;
- iii) inside the window the intensity of a pixel is detected as a relative extremum. In a domain, where the interference fringes are very dense, this condition already yields the coordinates of the extrema (Fig. 5).

In a second step a threshold value will be determined for each column by averaging the intensity values of the preliminary extrema. The variation of the threshold value  $I_{Schwell}$  from column to column must be very small. If the difference of the threshold values of successive columns is larger than a given measure  $\Delta I$ , the values will be balanced. The characteristic value  $k_N$  remains unchanged, if:

- i) the intensity of a minimum  $< I_{Schwell}$ ;
- ii) the intensity of maximum  $> I_{Schwell}$  (Fig. 6).

In the third step, expected areas of intensity are determined by comparison of the extreme intensity values in the single columns. Except in areas of high fringe density, the extrema must lay in the expected areas, otherwise  $k_N$  is to change, i.e. the considered point will be eliminated as loci of extremum (Fig. 7). The intensity of an extremum can be figured out of the intensity of the successive preliminary extrema of the other kind and the threshold value, regarding a range of variation  $I_\Delta$ :

$$I_{min}(k; j) \leq 2I_{Schwell} - \frac{1}{2} [I_{max}(l; j) + I_{max}(l+1; j)] + I_\Delta, \quad (10)$$

$$I_{max}(l; j) \geq 2I_{Schwell} - \frac{1}{2} [I_{min}(k; j) + I_{min}(k+1; j)] - I_\Delta.$$

The observance of these conditions can be demanded for the whole domain  $G$  of the object.  $k_N$  is changed for those pixels, in which the conditions according to eq. (10) are not satisfied (Fig. 8).

Comparing the loci of extrema column by column, shiftings may be observed. These shiftings are to be eliminated by a correction algorithm. Limiting values of intensity and of the coordinates of extrema are given.

Then the final loci of extremum within the window is determined as the central point within the limiting values of intensity, if the coordinates within the respective limiting values.

In photoelasticity, the interference fringes are sometimes parallel or almost parallel to the direction of scanning, and as the data are stored sequentially, the direction of evaluation coincides with the direction of scanning, and in consequence, dislocations of the extrema from column to column may appear. To correct the errors, the complete matrix of the image is transformed:  $I^*(x, y) \rightarrow I^*(y, x)$ . Then the same process of localizing the extrema is applied as before. The coordinates of the extrema given by the evaluation in two orthogonal directions are compared and balanced in case of differences.

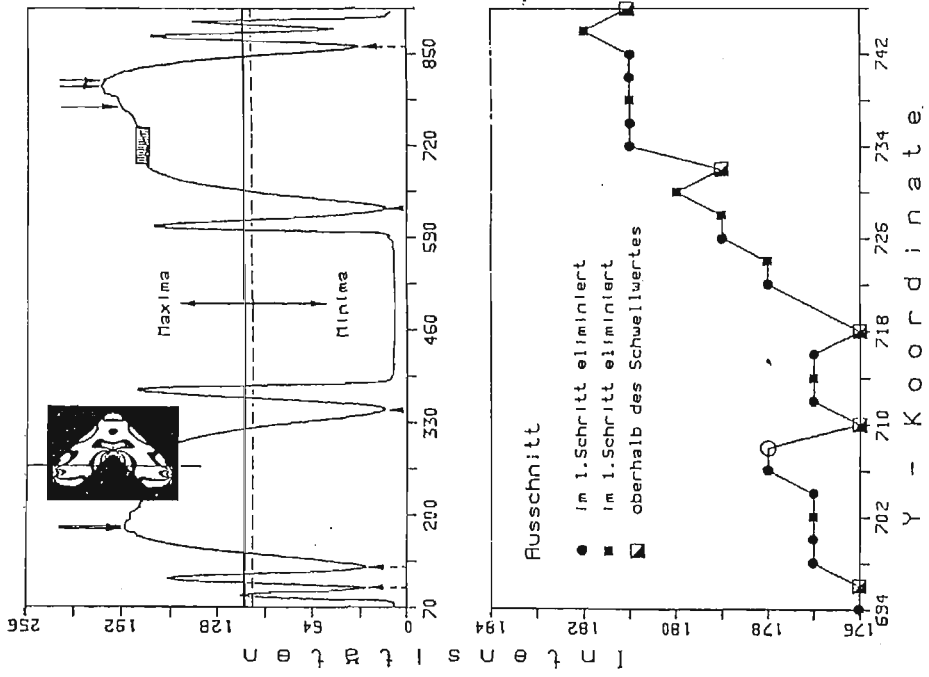


Fig. 6.

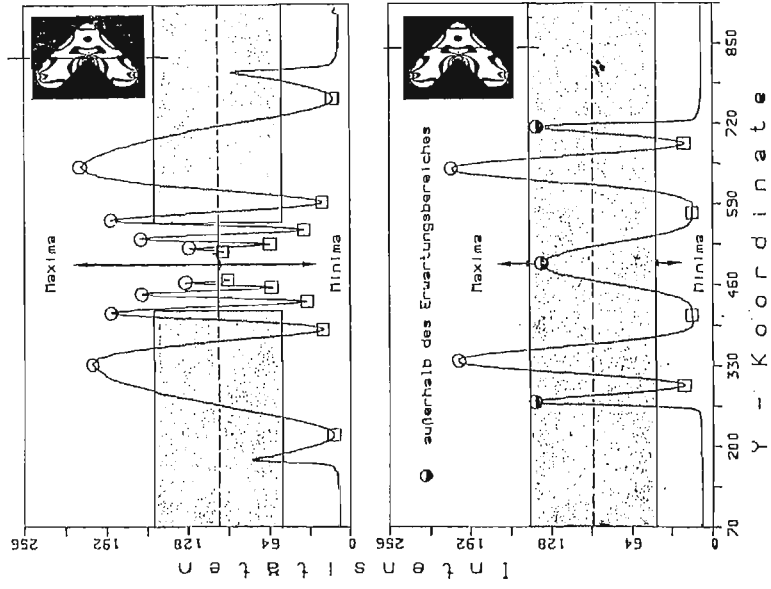


Fig. 7.

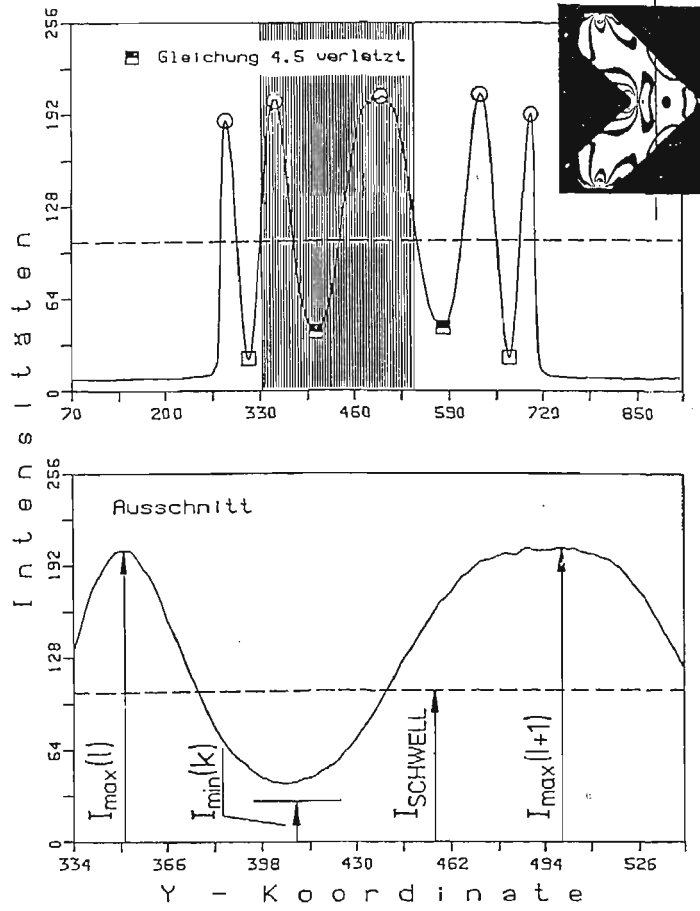
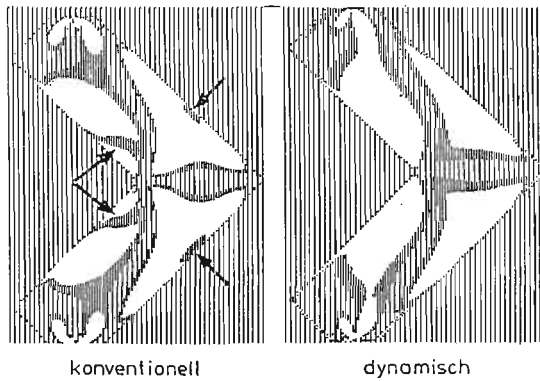


Fig. 8.

$0^\circ$ -Isokline



belastet

Fig. 9.



**4.2 Isoclines.** Under the supposition of elastic response of material, the principal directions of the stress state are independent of the magnitude of the stresses and therefore the isoclinics, too, whereas the isochromatic fringes are changing with the variation of stresses. Thus, by varying the load  $p$ , the light intensity holds:

$$I = \sin^2 2\alpha \iint A_x^2(\lambda) \sin^2 \pi \frac{G(p)}{\lambda} d\lambda dp. \quad (11)$$

The isochromatic fringes are then smeared and the loci of minimum intensity yield the coordinates of the isoclinics. Discrete integration of eq. (11) over  $p$  is equivalent to image-storing included filtering of local-invariant noise.

Further evaluation has to be done as for isochromatic fringes (Fig. 9).

### 5. Tracing algorithm

The coordinates of the extrema are stored in integer values (pixel), therefore the mean camber lines always appear as stepped parts of straight lines. Those parts of more than three pixels are registered by the coordinates of the initial and the end point, thus saving memory capacity also. Loci of extrema which are not in direct vicinity of those parts are proved by a neighbourhood matrix. (Fig. 10), whether they are relevant or not.

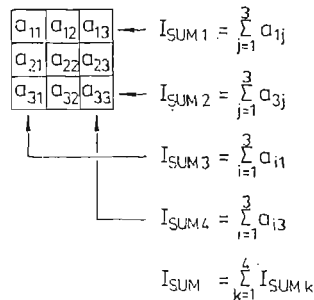


Fig. 10.

Depending on the partial sum, it will be decided, in which direction the search process should proceed. In case of discontinuity, the neighborhood matrix will be enlarged. Because of edgeeffects uncertainties in areas close to the object contour lines may be observed (< 20 pixels). Then the mean camber lines are extrapolated from the internal curves. Finally, smooth curves are produced using parametric cubic spline functions.

### 6. Conclusions

The described procedures have been developed under the aspect, that microcomputers are available only, and it is even not necessary to use an image-frame-store. The whole programming has been done in overlay-structure. Application is not restricted to photo-

elasticity only, but photoviscoelasticity, non-linear and dynamic problems may be considered also, as well as Moiré techniques and holography.

#### 7. References

1. V. PERZBORN, *Ein Beitrag zur Digitalen Bildverarbeitung in der Spannungsoptik*. Diss. Bergische Universität — HG Wuppertal, Wuppertal, 1986.

#### Резюме

#### АВТОМАТИЧЕСКАЯ ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА ОБРАЗОВ

Обработка образов в фотоупругости требует записи и разделения двух семей кривых: изохром и изоклин. Обработка алгоритмов для фильтрации, отбора разниц интенсивности света и локализации геометрических точек максимальной интенсивности света является необходимой. Определение изоклин является особенно трудным так как не достает видео-камер различающих цветы. В работе выведены алгоритмы и описаны процедуры для улучшения обработки образов в фотоупругости.

#### Streszczenie

#### AUTOMATYCZNE CYFROWE PRZETWARZANIE OBRAZÓW

Przetwarzanie obrazów dla elastoptyki wymaga zapisania i rozdzielania dwóch rodzin linii: izochrom i izoklin. Konieczne jest opracowanie algorytmów dla filtracji, eliminacji różnic w intensywności światła i lokalizacji miejsc geometrycznych punktów o maksymalnej intensywności światła. Wyznaczenie przebiegu izoklin jest szczególnie trudne ze względu na brak wideo-kamer rozróżniających kolory. W pracy opisane są algorytmy i procedury dla udoskonalenia przetwarzania obrazów elastoptycznych.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 czerwca 1987 roku.*

---



## APPLICATIONS OF THE DIFFERENCE HOLOGRAM INTERFEROMETRY\*

ZOLTÁN FÜZESSY  
FERENC GYIMESI  
JÁNOS KORNIS

*Institute of Physics, Technical University Budapest*

### 1. Introduction

The aptitude of hologram interferometry for measurement of quantities being of industrial importance has undoubtedly been proved. Hologram interferometry can be used to produce a fringe pattern which represents the field of surface displacement of an opaque object in response to an arbitrary type of loading. It has successfully been applied for investigating phase object as well where the change in refractive index distribution is stored by an interference pattern. Among numerous applications of holography the contouring has also to be mentioned.

There are different techniques for quantitative evaluation of interferograms. Nevertheless, the main difficulty in applying hologram interferometry stems from the numerical evaluation of interferograms. First, the extraction of the tremendous data set from the requires a considerable amount of time. Second, the lack of the zero order fringe (unmoved points within the illuminated area) can introduce ambiguity at the interpretation of interferograms and lead to decrease of accuracy.

Frequently, there is no need to determine the total three-dimensional deformation to specify the shape of an object, or to calculate the temperature and mass distributions. The main interest can only lie in the differences (e.g. in shapes) of two objects. One of them can be referred to as the master one, the other as the test object at large scale production sampling.

The comparison can be done by the difference hologram interferometry [1]. As its inherent property a new object being compared is illuminated holographically by reconstructing the real images of the first object. The idea of the holographic illumination was proposed by D. Denby at al. [2], its potentiality to compare two objects by hologram interferometric techniques was formulated by D. B. Neumann [3]. In the following a short discussion of its principles will be given and selected applications will be presented.

---

\* Praca wygłoszona na XII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa-Jadwisin, 1986

## 2. Basic considerations

Let us survey the steps of making difference interferogram, i.e. pattern displaying the difference in characteristic quantities.

In the first step, the conventional hologram interferometry is used to record an interference pattern which contains information concerning deformation, shape, or refractive index changes of the master object. This interferogram is considered as a way of recording and storing two wavefronts with a given phase difference.

For a while let us think in terms of the conventional hologram interferometry, keeping in mind the task of comparison. Then, the second step would be recording another double exposure interferogram related to a new (test) object. Its fringe system would contain information about deformation, shape or refractive index change of the test object. So, the test interferogram would also store two wavefronts with definite phase difference.

Determining differences between the two objects both interferograms are to be evaluated, because numerical results are comparable, only.

If the difference hologram interferometry is applied, there is no need for separate recording and evaluation of the interferograms. The test object is illuminated by the real images of the master objects. As it was stated above the phases of the illuminating wavefronts were determined by the states of the master object. The states of the new object, due to the applied illumination, modify those phases and their subtraction/addition is realized by recording a new interferogram. Bearing the subtraction of the phases in mind, the difference in the states of the two objects is recorded by the new holographic interferogram.

With computer aided evaluation the difference interference pattern provides a very quick, easy to handle, optical measuring tool for the comparison of two objects with interferometric precision. Using fast recording material, the technique in this realization can be used as an on-line measuring device.

The quantitative representation of what has been said above is as follows [4]. For the sake of simplicity we restrict ourselves to the phase object considerations. Naturally, the analysis is also valid for opaque object investigations.

Let the test object in its initial state be illuminated by the first real image of the master object. The complex amplitude  $\tilde{U}_1$  of the light arriving at the plate can be expressed as:

$$\tilde{U}_1 = U_0 \exp[-j\Phi_0],$$

where  $U_0$  and  $\Phi_0$  are both functions of the spatial coordinates at the plate. The quantities  $U_0$  and  $\Phi_0$  contain all the informations related to the wavefield which is determined by the refractive index distributions of the master and as well as test objects in their initial states.

The complex amplitude  $\tilde{U}_2$  arriving at the plate during the second exposure, when the test object is subjected to a given load, e.g. heating, can be expressed as:

$$\tilde{U}_2 = U_0 \exp[-j(\Phi_0 + \Delta\Phi - \Delta\Phi')],$$

where  $U_0$  and  $\Phi_0$  are as before;  $\Delta\Phi$  is the phase difference caused by the refractive index change in the master object and  $\Delta\Phi'$  is that of the test object. Because of the phase reversal

of the master wavefronts the phase differences  $\Delta\Phi$  and  $\Delta\Phi'$  should be taken of opposite sign when both of them belong to the object change of the same character, e.g. increasing the refractive indices in transparent object case.

At the reconstruction of the holograms the irradiance of the object will be proportional to:

$$J = |\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2|^2 = 2U_0[1 + \cos(\Delta\Phi' - \Delta\Phi)].$$

The number of fringes in the difference interference pattern is determined by the sum of  $\Delta\Phi'$  and  $(-\Delta\Phi)$ .

### 3. Realization of the difference hologram interferometry

The analysis discussed above has been carried out in terms of separate uses of the master object wavefronts for illumination, and can be realized by dual reference beam method which permits dynamic control of the reconstructed real images of the master object and adds flexibility to the adjustment of the holographic illumination.

The master wavefronts can be recorded on a single plate with single reference beam, too [5]. The peculiarities of the experimental set up are as follows:

Two-reference beam method: the two master holograms are recorded by two reference beams. The simplified experimental set up without beam expanding elements is shown in Fig. 1. The laser light coming from the right hand upper corner is divided into two beams.

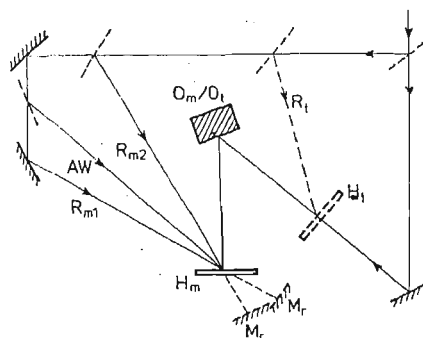


Fig. 1. Experimental arrangement: two-reference beam method

The beam passing through the first beamsplitter is the master object beam. The reflected light after consecutive splitting produces reference beam  $R_t$  for recording the difference pattern during the second step on the plate  $H_t$ ; reference beams  $R_{m1}$  and  $R_{m2}$  for recording the master holograms on the plate  $H_m$  and the adjusting beam  $AW$ . Symbols  $O_m$  and  $O_t$  denote master and test objects, respectively. Mirrors  $M_r$  reverse the reference beams  $R_{m1}$  and  $R_{m2}$  for the illumination of the test object.

The two states of the master object are recorded on the same plate ( $H_m$ ) by the two reference  $R_{m1}$  and  $R_{m2}$  coming from different directions. For fine alignment of the mirrors  $M_r$ , reversing the reference beams, an additional spherical wavefront  $AW$  is recorded by both reference beams. Reconstructing it by both conjugate reference beams simultaneously, its fringe free image indicates the correct alignment of the reversing mirrors.

Single reference beam method 1. (without beam splitting the object beams). The corresponding arrangement is the simplest one because one reference beam is used, only, as in conventional double exposure holography. When the master hologram is illuminated by the reversed reference beam, both master object wavefronts are reconstructed and used in both illuminations. A double exposure interferogram is made for test object. When the test interferogram is reconstructed interference of four wavefronts can be observed. They are the difference interference pattern, and disturbing interference fringe systems: sum of the displacements and twice the actual displacement of the test object.

If the displacement of the master and test objects is too large that their fringe systems are unresolvable, the difference interference pattern will be the only visible fringe system. The disturbing interference patterns result in a decrease in the visibility of the difference interference pattern.

The schematic drawing of the corresponding experimental arrangement is shown in Fig. 2 with main notations as in Fig. 1.

Single reference beam method 2 (with beamsplitting of object beams). An intermediate arrangement between the two reference beam technique and a single reference beam method 1 is shown in Fig. 3. A single reference beam is used for recording master wavefronts on a single plate. The significant element of the experimental set up in Fig. 3 is the beamsplitter  $BS$  separating the master object wavefronts on their way toward the hologram plate  $H_m$ . As a result of the beamsplitting they arrive on the hologram plate from different directions. During the wavefront reversal the appropriate path is open only while the alternate one is blocked.

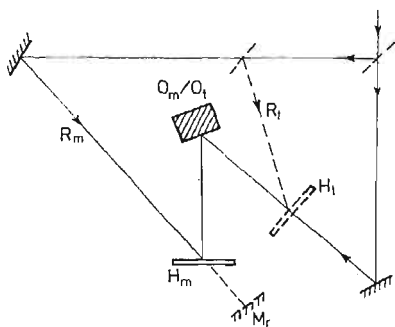


Fig. 2. Experimental arrangement: single reference beam method; no beamsplitting the object beam

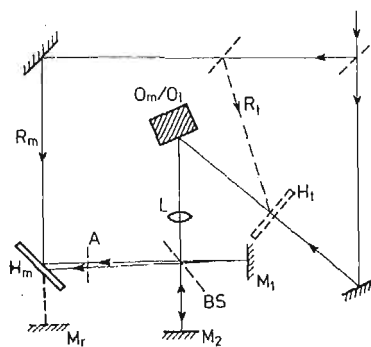


Fig. 3. Experimental arrangement: single reference beam method; beam splitting the object beam

All the other steps in producing difference interference pattern are the same as those discussed above. It is worth mentioning that there are another ways to split the object beams, e.g. using a michelson interferometer type beamsplitting.

#### 4. Applications

**4.1. Displacement difference measurement.** In the case of displacement measurement the master object surface under study was the bottom of a pressure chamber. Between the

two exposures the pressure was increased in it causing a bulging of the bottom and producing concentric fringe system.

For the sake of simplicity the same chamber was used for the test object as well, but in the latter case the bottom was repainted and the chamber position changed a little to simulate the different microstructure.

The first step is the recording a double exposure interferogram, corresponding to the two states of the bottom before and after the load. The developed plate  $H_m$  (Fig. 1) is placed back (with interferometric precision), the master object  $O_m$  taken away and the test object  $O_t$  placed as shown in the figure. A new holographic plate  $H_t$  is placed in the direction where the master object had been illuminated from.

The reference beams  $R_{m1}$  and  $R_{m2}$  were plane waves, their reversal is simply realized by the mirrors  $M_j$ . The test object  $O_t$  is illuminated by reconstructed real images of the master chamber in turn, corresponding to the sequence at the recording of the master holograms. If the pressure change between the two exposures in the master and test chambers is different, the bulging of the bottom will be different. This difference can be recorded in the form of interference pattern by the plate  $H_t$ .

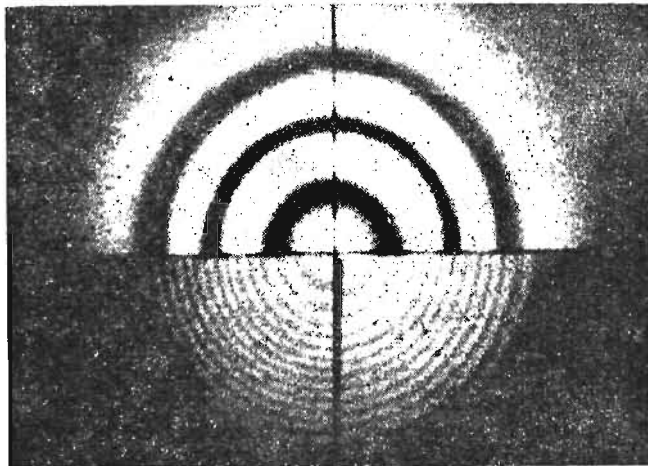


Fig. 4. Deformation measurement with two-reference beam method: composite interferogram (I)

The working of *DHI* can be demonstrated quantitatively on a composite interferogram in Fig. 4. The lower left quarter shows a quarter of the fringe system of the master object the upper half shows the half of the fringe system of the test object and the lower right quarter shows the essence: a quarter of the fringe system displaying the difference between the master and test object bulging. The bulging of the master object results in 15 (light) fringes, that of the test object only 3 fringes and their difference is really 12 fringes.

The composite interferogram of Fig. 4 is not composed by phototechnics but the holographic recording of the test object itself is composite: it was made in three steps and with different coverings of the test object. The coverings marked with lines and the illuminations belonging to them are explained in Fig. 5. First the lower half of the test object is illuminated with the image of the master object in its undeformed state ( $I_{m1}$ ). In the second



step the test object, in its undeformed state yet, is illuminated with the image of the master object in its deformed state ( $I_{m2}$ ) and the lower right quarter is covered. After that the deformation of the test object follows. Then the last step is the illumination of the test object with the image of the master object in its deformed state ( $I_{m2}$ ) while the lower left quarter of the test object is covered.

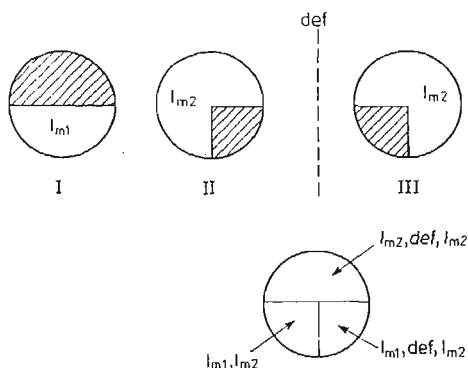


Fig. 5. Deformation measurement with two-reference beam method: steps of making the composite interferogram

Summarizing the three steps, the following has happened on the different parts of the test object (Fig. 5, lower part). The lower left quarter of the test object was illuminated only in the undeformed state of the test object by  $I_{m1}$  and  $I_{m2}$ , thus the interferometric fringe system of the master object arose. The upper half of the test object was illuminated before and after its deformation with the same wavefront, with the image of the master object in its deformed state ( $I_{m2}$ ), thus the interferometric fringe system of the deformation of the master object arose. Finally, the lower right quarter of the test object was illuminated before and after its deformation with different images of the master object and in the right order ( $I_{m2}$  after  $I_{m1}$ ), thus the required difference arose.

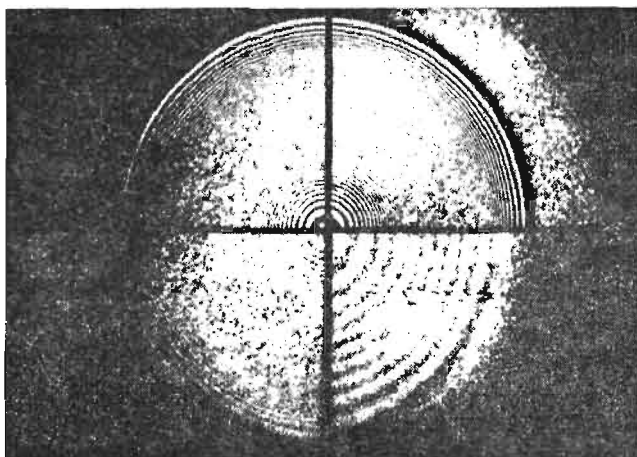


Fig. 6. Deformation measurement with two-reference beam method: composite interferogram (II)

The advantage of all of this is that the fringe system of the deformation of the test object and the difference fringe system could be recorded from nearly the same viewing directions at the same deformation, happening once, of the test object. Thus the source of error that the repeated deformation of the test object may be a bit different is omitted. (Of course, the recording of the two fringe systems at the same deformation, happening once, of the test object could be done without covering as well. One should put a beamsplitter in the path of the test object wavefront and use two hologram plates. However, this would have increased the already very dangerous light poverty of the set up.)

Fig. 6 is very similar to Fig. 4, only the fringe systems to be subtracted are too dense to be observed by the naked eye. Nevertheless their small difference can be seen in unchanged quality. Thus *DHI* works in the case of invisible dense fringes as well.

**4.2. Shape difference measurement.** As the second example of application a two-refractive index contouring will be presented [5]. As for the first step in *DHI* contouring, the quality of difference holograms and their reproducibility were the main aspects at the choice of the proper *DHI* method. They had been found quite problematic at the authors previous deformation measurements as well. The lower quality may be connected with the diffuse holographic illumination itself although simple interferograms of good quality could be produced by using the same holographic illumination in both steps. The reproducibility, however, must depend upon the disturbing effects of the surroundings only.

The two-refractive-index contouring has got the special requirement that at least the observation of the object has to be perpendicular to the window of the container [6]. At *DHI* contouring, where the observation and illumination change their role at producing the difference, this means that in any case both have to be perpendicular to the window of the container. A beamsplitter can ensure this but with significant loss of light power only. Therefore, a compromise was chosen and the beamsplitter was replaced by a pair of mirrors cemented on the faces of a prism close to each other. Through this pair of mirrors, the observation of the master object (and the illumination of the test object) was perfectly perpendicular and the illumination of the master object (and the observation of test object) was only nearly perpendicular.

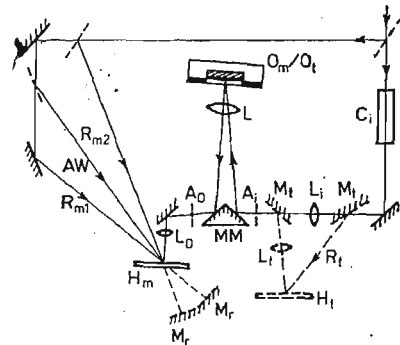


Fig. 7. Experimental arrangement for contouring

The sketch of the experimental setup is shown in Fig. 7, and the pair of mirrors is denoted by *MM*. The lens  $L_i$  focuses the beam of the collimator  $C_i$  onto the right mirror of the pair of mirrors *MM* and the lens  $L$  ensures the parallel object illumination. The obser-

vation from parallel directions is achieved through the lens  $L$  again and after the reflection on the left mirror of  $MM$  through the aperture  $A_0$  and the lens  $L_0$ . The pair of mirrors  $MM$  is placed at the foci of the lenses  $L_i$ ,  $L$  and  $L_0$  that the illumination and observation directions could get quite close to each other  $R_{m1}$  and  $R_{m2}$  are the two plane reference waves and  $AW$  is the additional spherical wave for the master hologram  $H_m$ . (The beam expanding elements are not shown.)

The changes required to the production of the difference interferogram of the test object are shown by dotted lines in the figure. The mirrors  $M_r$  reverse the reference beams  $R_{m1}$  and  $R_{m2}$  and the mirrors  $M_t$  reflect the reference beam  $R_t$  and the test object beam onto the hologram plate  $H_t$ . The lens  $L_t$  makes a very reduced image of the test object on the hologram plate to increase the intensity of the weak object beam.

The object is an aluminium membrane of 60 mm diameter, the middle of which can be loaded with a micrometer screw to change its shape in a controlled way. Its surface was machined by surface grinder and was corroded by NaOH to get a plane and diffuse surface which could be contoured with  $10 \mu\text{m}$  sensitivity. It is placed in a container with an optically flat planparallel window.

To get  $10 \mu\text{m}$  sensitivity, alcohol and water are used in the container in the two steps of contouring at the argon laser line  $\lambda = 488 \text{ nm}$ . First the contour image of the master

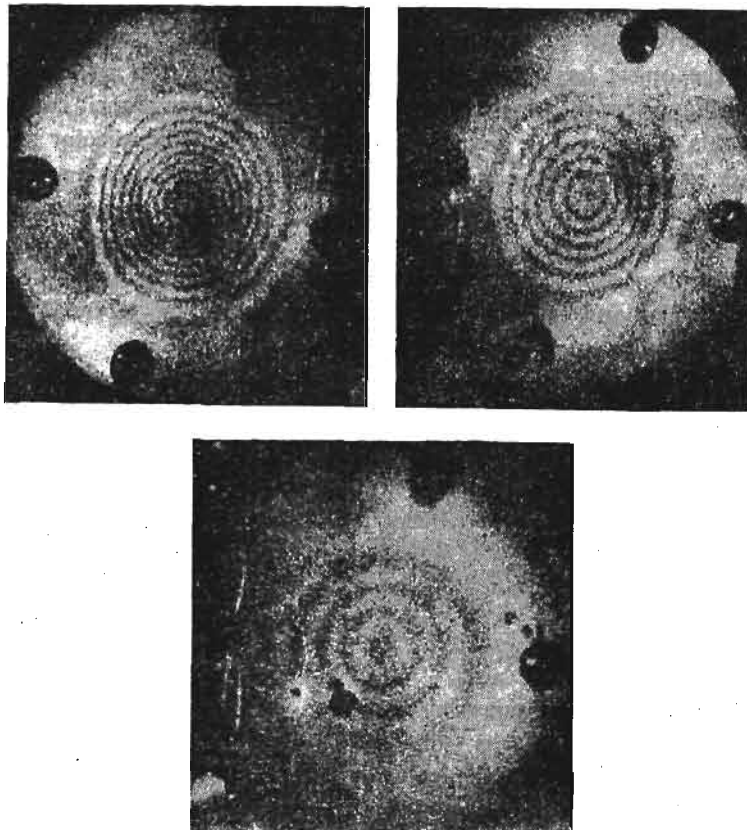


Fig. 8. Master-, test and difference contour fringes

object is produced. The two exposures of the master hologram  $H_m$  are taken with the reference beams  $R_{m1}$  and  $R_{m2}$  separately while the additional wave  $AW$  remains always present. At the reconstruction of the master hologram  $H_m$ , the reference beams  $R_{m1}$  and  $R_{m2}$  are reversed to produce real images. Their coincidence is achieved by observing and eliminating the interference fringes of the two real images of the additional wave  $AW$ . Then the contour fringes of the master object appear. These images are used separately for the illumination of the test object in the second step at the recording of the test hologram  $H_t$ . The liquids and reference beams  $R_{m1}$  and  $R_{m2}$  are used in the same order as before. Thus the difference contour image of the two objects is produced by the test hologram  $H_t$ .

In Fig. 8 the evidence of difference making is illustrated numerically. The arrangement used was the predecessor of the arrangement outlined above. The illumination and observation directions subtended wider angle and the lens  $L$  was put quite obliquely in the light path to avoid the disturbing reflections. The concentric fringe system of the approx.  $65 \mu\text{m}$  bulging at the centre is shown in Fig. 8 in the case of the master object. The test object was simulated by changing the shape of the same object to approx.  $100 \mu\text{m}$  bulging. Its fringe system is shown in Fig. 8. The fringe system of the difference bulging (approx.  $35 \mu\text{m}$ ) of the centre is displayed in Fig. 8 within half a fringe accuracy.

#### References

1. Z. FÜZESSY, F. GYIMESI, *Industrial Applications of laser Technology*, W. F. Fagan, ed., Proc. SPIE 398, 240 (1983)
2. D. DENBY, G. E. QUINTANILLA, J. B. BUTTERS, Proc. Strathclyde conf. 1975, Cambridge University Press, p. 323/1976.
3. D. B. NEUMANN, *Tec. Digest, Topical Meeting on Hologram Interferometry and Speckle Metrology* Opt. Soc. Am., MB 2 - 1 (1980)
4. Z. FÜZESSY, F. GYIMESI, *Opt. Commun.* 57, 1, 31 (1986)
5. F. GYIMESI, Z. FÜZESSY, *Opt. Commun.* 53, 1, 17 (1985)
6. R. K. ERF. (ed.), *Holographic nondestructive testing*, Academic Press, New York, 1974, p. 139.

#### Резюме

#### ПРИМЕНЕНИЯ РАЗНОСТНОЙ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

В работе представлено методы разностной голографической интерферометрии. Преимущество метода состоит в возможности сравнения между двумя объектами и пригоден когда нет необходимости вычисления всех компонент перемещения или формы объекта, а мы заинтересованы определением разницы перемещений или изменения формы объекта.

#### Streszczenie

#### ZASTOSOWANIE RÓŻNICOWEJ INTERFEROMETRII HOLOGRAFICZNEJ

Praca przedstawia krótki opis zasad różnicowej interferencji holograficznej. Jej istotna zaleta polega na możliwości porównywania (znajdowania różnic) pomiędzy dwoma obiektami. Metoda jest przydatna gdy nie ma konieczności wyznaczania wszystkich składowych przemieszczenia, lub wyznaczania kształtu obiektu a wówczas gdy interesuje nas różnica kształtu lub zmiana kształtu obiektu.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 czerwca 1987 roku.*



## SPECKLE PATTERN CORRELATION USING DIGITAL IMAGE PROCESSING\*

ROLAND HÖFLING  
WOLFGANG OSTEN

*Academy of Sciences of GDR — Karl-Marx-Stadt and Berlin*

### 1. Introduction

Over the last 15 years, a lot of work has been done in the field of displacement measurement by coherent optics. One of the methods, beside holographic interferometry, is speckle metrology which splits into Speckle Pattern Photography (SPP) and Speckle Pattern Interferometry (SPI). Depending on the point of view, the measurement principle has been described in different terms by several authors and the sum of literature is not always easy to be understood. SPP is sometimes explained by moire terminology and the basic relations in SPI originate from optical path length argumentations similar to holographic interferometry. In basic papers by Pedersen and Yamagushi [1, 2] speckle metrology is explained from a unified point of view: intensity correlation.

In section 2 we follow this theory in order to explain the measuring principle of Digital Speckle Pattern Interferometry (DSPI) and give a simulation example of it. The experimental arrangement incorporating a digital image processing system Robotron A6472 is discussed in section 3. The online data pickup and correlogram construction enable us to proceed with automatic evaluation which is subject to chapter 4.

### 2. Speckle pattern interferometry — an intensity correlation technique

The basic relation in speckle pattern correlation measurements connects the crosscorrelation function with the mutual intensity of the light field scattered from the undeformed ( $j = 1$ ) and deformed ( $j = 2$ ) object, respectively:

$$\sigma_{12} = \frac{\langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} = \frac{|\langle U_1^* U_2 \rangle|^2}{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \quad (1)$$

and holds if the speckle pattern obeys gaussian statistics (3).  $I_j$  and  $U_j$  denote the intensity and amplitude field of the light and  $\langle \dots \rangle$  is an ensemble mean. In the following, we consider SPI only and assume the speckle position to be fixed, i.e. no speckle shift. Beyond

\* Praca wygłoszona na XII Symposium Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego Warszawa-Jadwisin, 1986.

this, the mean intensities  $\langle I_1 \rangle$  and  $\langle I_2 \rangle$  should be equal, thus we drop the index. The mutual intensity in this case becomes:

$$\langle U_1^* U_2 \rangle = \langle I \rangle \exp \left( \frac{2\pi}{\lambda} i(\mathbf{h} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{d} \right), \quad (2)$$

where  $\mathbf{h}$  and  $\mathbf{k}$  are the unit vectors of the illumination any observation direction, respectively.  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)^T$  denotes the displacement vector field and  $\lambda$  is the wavelength of the used laser light. As it is obvious from Eq. (2) the correlation function of a simple illuminated and observed object is a constant. In common SPI setups, two statistically independent speckle patterns  $U^1$  and  $U^2$  are superposed in order to produce interferometric sensitivity [4]. We than have:

$$\langle U_1^* U_2 \rangle = \langle U_1^* U_1^1 \rangle + \langle U_1^* U_2^2 \rangle, \quad (3)$$

and with (1) and (2):

$$\rho_{12} = \frac{\langle I^1 \rangle^2 + \langle I^2 \rangle^2 + 2\langle I^1 \rangle \langle I^2 \rangle \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2 - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)) \cdot \mathbf{d} \right)}{(\langle I^1 \rangle + \langle I^2 \rangle)^2}. \quad (4)$$

Before we apply Eq. (4) to given interferograms, we select the case of maximal contrast of correlation fringes. This is achieved, if the mean intensities of the interfering speckle fields are equal:  $\langle I^1 \rangle = \langle I^2 \rangle$ . With the abbreviation  $\mathbf{S}$  for the sensitivity vector we finally get:

$$\rho_{12} = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{S} \cdot \mathbf{d} \right) \right), \quad (5)$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{h}_1 - \mathbf{k}_1) - (\mathbf{h}_2 - \mathbf{k}_2). \quad (6)$$

With the proper choice of illumination and observation geometries the sensitivity vector  $\mathbf{S}$  allows to separate displacement components lying both in the object surface tangential plane and normal to it.

**2.1. In-plane sensitivity.** The scheme of an interferometer capable of in-plane displacement measurements [4] is plotted in figure 1. The object is illuminated by two collimated beams in a symmetric manner. Both beams create independent speckle patterns that inter-

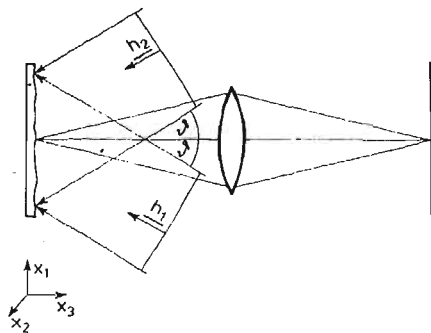


Fig. 1. Double-beam interferometr for in-plane displacement measurements

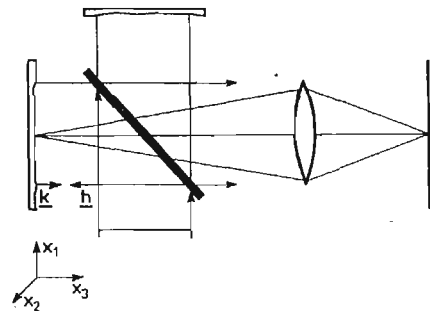


Fig. 2. Modified Michelson interferometr for out-of plane displacement measurements

ferre on the detector plane and produce a resulting third pattern. Assuming parallel observation for the field of view Eq. (6) yields:

$$S = \sin \vartheta (1, 0, 0)^T \quad (7)$$

and reveals independence of out-of plane displacements. This is a very important distinction to holographic interferometry. From the spacing of correlation fringes strain may be obtained directly without solving systems of equations and without knowledge of the absolute fringe orders.

**2.2. Out-of plane sensitivity.** There are different interferometric setups realizing out-of plane displacement measurements [4]. A common method is the superposition of a smooth reference wave with its virtual source at the centre of the imaging aperture. We describe two other arrangements less complicated in adjustment. The first is shown in figure 2 and consists in a modified Michelson interferometer. The mirrors have been substituted by diffus scattering object and reference surfaces. They are illuminated by the beam splitter. mirror and the reflected speckle fields are collected again to interfere. The sensitivity vector becomes:

$$S = (0, 0, 2)^T. \quad (8)$$

In practical applications the sensitivity according to Equ. (8) may be too high and therefore an interferometer of reduced sensitivity has been developed [4]. It is sketched in figure 3.

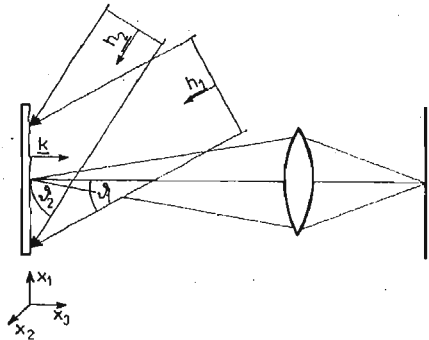


Fig. 3. Interferometer with reduced out-of plane sensitivity

The sensitivity vector is:

$$S = (\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2, 0, \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2)^T, \quad (9)$$

and in the limit of streaking illumination  $(\vartheta_1, \vartheta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2})$  we have:

$$S = (0, 0, \vartheta_2 - \vartheta_1)^T. \quad (10)$$

### 3. Correlogram formation in speckle pattern interferometry

In section 2 it is shown which relations exist between the displacement vector field  $d$  and the crosscorrelation function. The remaining question is, how to measure that quantity. Different methods have been developed from several authors and fall into two categories: optical and electronical. In optical processing the speckle fields of both object



states are recorded on the same photographic plate. Sharp structures of the speckle pattern itself or additional introduced speckle structuring (interference or shift) are exploited to detect regions of decorrelation (i.e. vanishing structures) by an optical Fourierprocessing.

Electronic processing allows to bypass the photochemical process by pattern recording with photoelectric detectors (TV pickup tube, CCD matrix, photodiode array) thereby simplifying the procedure and making it more acceptable for application. The method is called Electronic Speckle Pattern Interferometry (ESPI). ESPI is a widely used tool in vibration mode and displacement visualization for scientific and engineering purpose [5, 6]. Visual fringe interpretation, however, often yields qualitative results only.

The reduced volume and cost of memory circuits recommend the video recording media used in ESPI to be substituted by more accurate digital image memories. Consequently, a computer may be used to perform both correlation of the stored speckle patterns and displacement extraction from the resulting correlograms (often called "interferograms"). Some recent papers [7 - 11] present this Digital Speckle Pattern Interferometry (DSPI) and introduce phase shifting techniques in order to get quantitative results. Digital pattern processing by today's microcomputer systems suffers from high processing time requirements for full TV image operations (e.g.  $512 \times 512$  pixel). Offline links to large scale computers [7] or reduced pixel numbers [8 - 11] are reported relaxing the time problem. We, instead, use the fast pipeline image processor that realizes image operations at video rates (40 ms) by virtue of the SIMD principle. It provides real-time correlograms as well as fast online evaluation.

The way of getting the desired correlation function depends on the type of experiments: dynamic or static load. In the case of dynamic loads (vibration, shock) the patterns are added in the photodetector already either in a time-average or a double exposition fashion. The speckle contrast of the resulting pattern is related to the degree of correlation and high pass filters or level-windowing techniques convert contrast variations into brightness fringes.

We focus our interest on the static load case and investigate what happens in detail. The patterns of the initial and deformed state of the object are recorded successively and stored on a video tape or in a digital memory. After that, the squared difference of the patterns  $I_1$  and  $I_2$  is displayed. If we replace the ensemble mean by a spatial average (i.e.

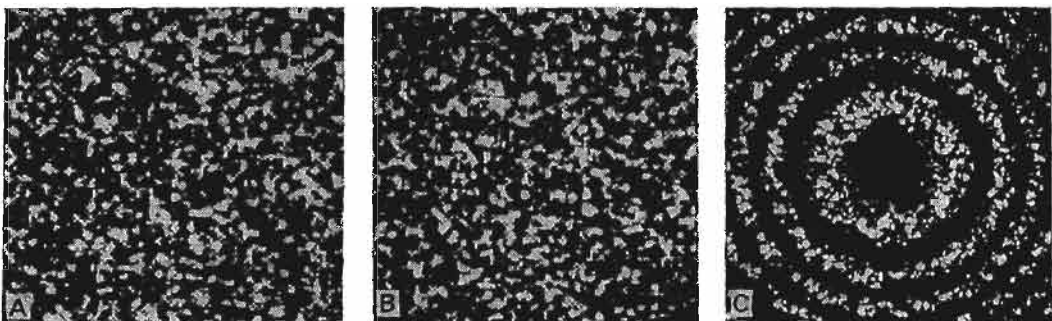


Fig. 4. Example correlogram formation

(A) pattern of the undeformed state, (B) pattern of the deformed state, (C) squared difference  $(A - B)^2$

by eye), we measure:

$$\langle (I_1 - I_2)^2 \rangle = 2\langle I \rangle^2 (1 - \rho_{12}) \quad (11)$$

and from Eq. (5) we get:

$$\langle (I_1 - I_2)^2 \rangle = 2\langle I \rangle^2 \sin^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{S} \cdot \mathbf{d} \right). \quad (12)$$

In order to give an example, figure 4 shows the monitor print of two different simulated speckle patterns [12] whose mutual correlation is  $\rho_{12} \sim (k - k_0)^2 + (l - l_0)^2$  where  $(k_0, l_0)$  denotes pixel locations in the image center. Clear correlation fringes are visible in the patterns are subtracted and squared according to Eq. (11).

#### 4. Experimental results in DSPI

The scheme of our speckle pattern interferometer is drawn in figure 5. The expanded and collimated light from a 30 mW He-Ne laser is directed to a beam splitter mirror thus illuminating a 50 mm-spot on the diffusely scattering reference and object surfaces. One of the objects is a central loaded circular disk, sprayed white. The reflected light of both surfaces is collected again by the mirror and imaged onto the pickup tube of a simple TV camera. A numerical apertur (NA) = 5.6 has been found sufficient for the camera

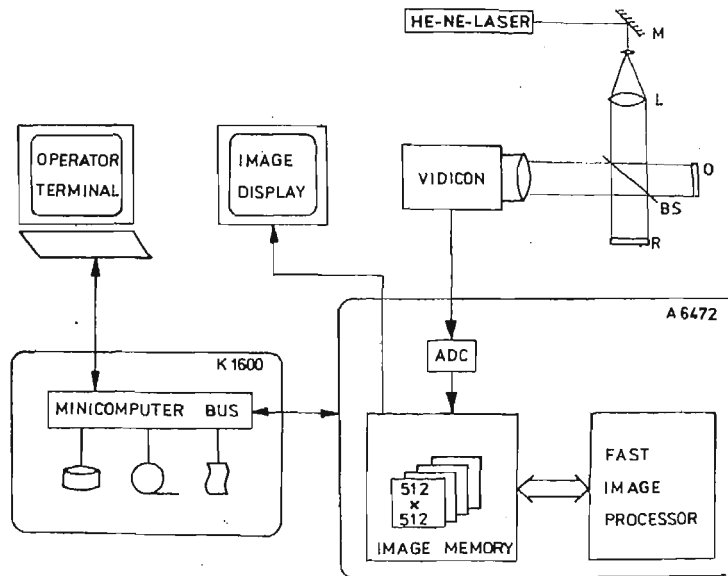


Fig. 5. Schematic diagram of the experimental setup

*M* ... mirror, *L* ... beam expanding lenses, *O* ... object, *R* ... reference surface, *BS* ... beam splitter

lens, although the resulting speckles (typically less than  $15 \mu\text{m}$  in size) are not completely resolved by our vidicon. The camera signal is fed to the image processing system and digitized to be stored in one of the four  $512 \times 512$  pixel image memories, each 8 bit deep. The squared and level sliced difference between a stored reference frame and the live

camera image is presented on the image display at video rates using the fast pipeline processor K2072 of the image processing system ROBOTRON A6472.

If only one TV frame is used for the reference pattern heavy electronic noise impairs the fringe contrast (figure 6(A)). According to its origin, electronic noise may be reduced drastically by frame averaging. Mostly we use 12 - 20 TV frames for at least the reference pattern. The frame averaging takes us about 2 seconds but produces much better correlograms almost free of electronic noise (figure 6(B)). Up to 50 straight or 18 closed circular fringes have been counted by eye. Sometimes the interferometer head has been changed (according to figure 1) in order to investigate in-plane deformations. Some results with different types of deformation are shown in figure 7.

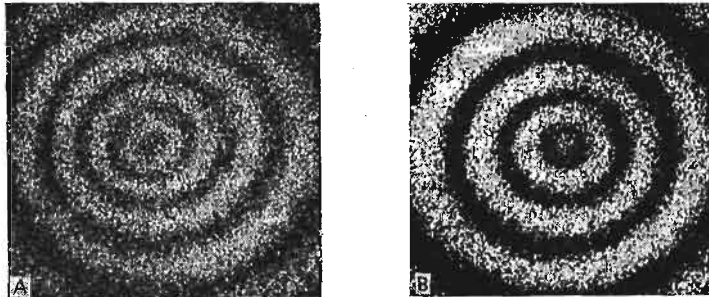


Fig. 6. Influence of frame averaging

(A) correlogram with high electronic noise (single frame), (B) correlogram from frame averaged speckle patterns

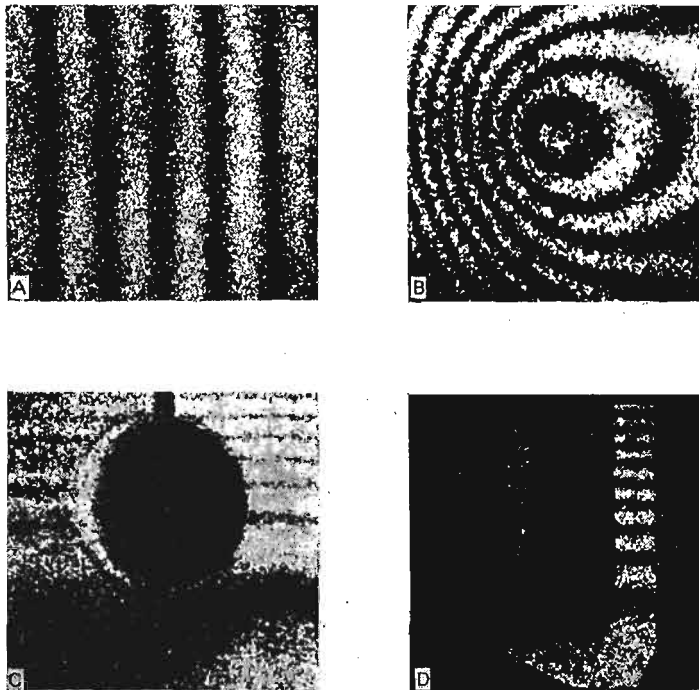


Fig. 7. Various results for out-of plane as well as in-plane deformation measurements

(A) pure out-of plane tilt, (B) combination of tilt and out-of plane deformation (as in fig. 6), (C) in-plane deformation of a clamp with a hole, (D) static in-plane deformation of a tuning-fork

### 5. Automatic evaluation of DSPI correlograms

From Eq. (12) it is obvious, that displacement extraction from a correlogram may take advantage from extrema locations that coincide with:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{d} = N \frac{\lambda}{2}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

In order to get automatically all points satisfying Eq. (13) fringe centres (or skeletons) of the correlogram have to be found. Image processing software is available for this purpose in holographic interferometry [13, 14] and we apply it to DSPI correlograms. It is suggested sometimes that automatic fringe centre determination is hard if not impossible in speckle pattern interferometry. We found the line thinning algorithm working quite good if careful preprocessing has been applied to the correlogram.

**5.1. Preprocessing of correlograms.** Speckles carry the displacement information in DSPI but after the correlogram is obtained they represent pure noise. This is a main source of casual errors in DSPI [7] and some care should be taken of suppressing it. A common method is the application of mean filters (digital low-pass filters) which are simple and fast but they will fail in critical applications because of image blurring. Examples are shown in figure 7 where different window sizes have been used. Although speckles are not removed completely the fringes tend to fuse already. That for, a special geometric filter, proposed by Crimmins [15, 16] has been implemented and gives significant more clear fringes than mean filters do (figure 8) if the fringes are dense.

After correlogram smoothing a shading correction is recommended for equalization of fringe modulation. This is done, deviding the correlogram by the mean intensity  $\langle I \rangle$  which may to obtained from camera again or be calculated from the correlogram by a large-window mean filter that causes the fringes to blur. After the equalization step a global threshold may be found for image binarization. Two examples are presented in figure 9.

**5.2 Skeleton based evaluation.** Binary fringes are the starting point for line thinning algorithms that produce a fringe skeleton (3 - 10 s) as it is visible in figure 10. Such skeleton may be improved by both automatic filter algorithms (tip removal) or man-machine interactions (gap closing). Doing so, skeletons of proper accuracy have been extracted. For an example the skeleton of figure 9(C) is plotted in figure 11(A). The displacement values have been evaluated giving a standard deviation from a fitted curve of  $\sigma_p = 12^\circ$  corresponding to a casual displacement error of  $2\sigma_d = 43$  nm. The displacement field calculation proceeds with semiautomatic fringe order assignment and interpolation of broken fringe orders on a regular mesh ( $32 \times 32$  nodal points). The final plotting of the experimental result (1024 points) appears after altogether 2 - 3 min and the pseudo-3D-plot of the displacement field corresponding to the skeleton in figure 11(A) is printed in figure 11(B).

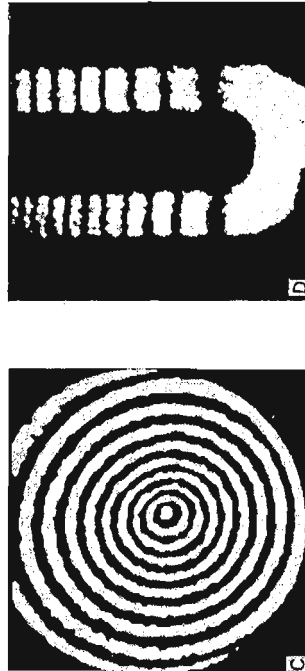
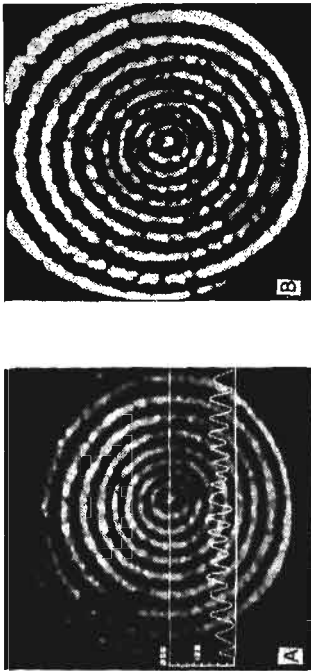


Fig. 9. Demonstration of preprocessing steps  
 (A) smoothed correlogram, (B) image (A) divided by a „very-low” pass filtered,  
 (C) binary image of (B), (D) binary image of the in-plane displacement of a tuning-fork

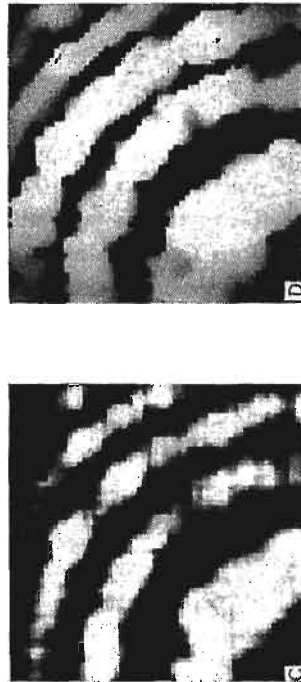
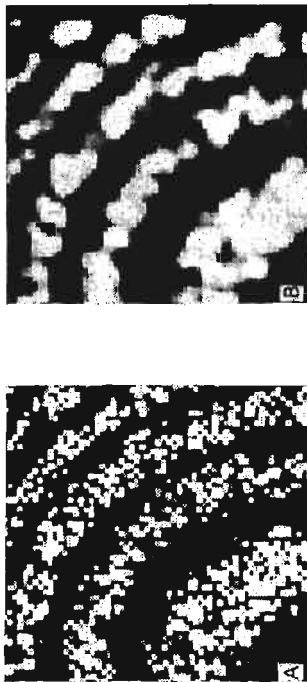


Fig. 8. Correlogram smoothing by different filters  
 (A) original (part of fig. 4(C),  $64 \times 64$  pixel), (B)  $3 \times 3$  mean filter applied to (A) (0.08 s),  
 (C)  $7 \times 7$  mean filter applied to (A) (0.24 s), (D) four cycles of geometric filter applied  
 (A) (1 min)

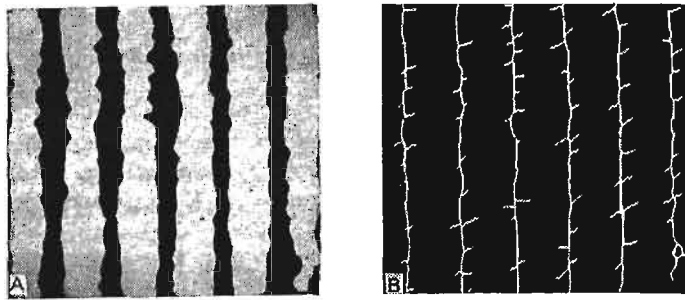


Fig. 10. Skeleton extraction by line thinning  
 (A) binary image of fig. 7(A), (B) line thinning algorithm applied to (A)

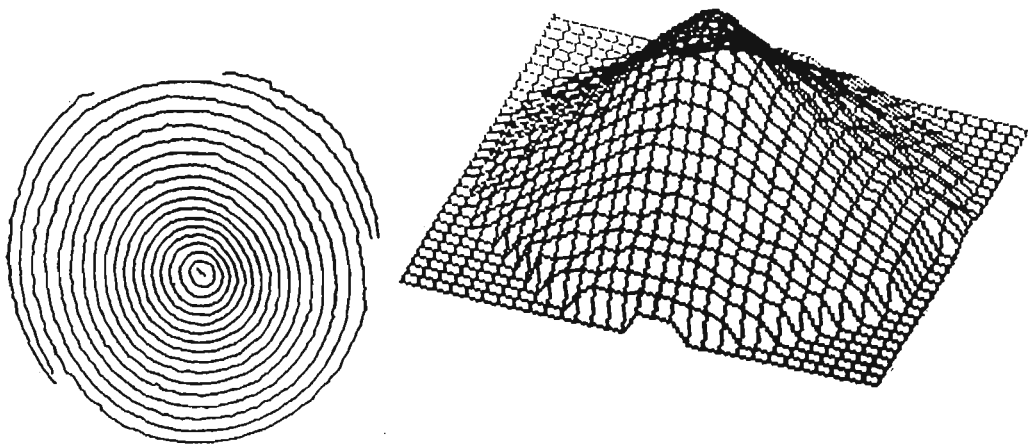


Fig. 11. Skeleton of fig. 9(C) and plotting of the displacement field

## 6. References

1. H. M. PEDERSEN, *Optica Acta*, Vol. 29, 105 - 118 (1982)
2. I. YAMAGUSHI, *Progr. in Optics*, Vol. XXII, 272 - 339 (1985)
3. J. W. GOODMAN, in *Laser Speckle and Related Phenomena* by J. C. Dainty (ed.), Springer, 1984
4. R. JONES, C. WYKES, *Holographic and Speckle Interferometry*, Cambridge University Press, 1983
5. J. N. BUTTERS, in *The Engineering use of coherent Optics* by E. R. Robertson (ed.), Cambridge, 1976
6. S. NAKADATE, H. SAITO, *Appl. Optics*, Vol. 24, 2171 - 80 (1985)
7. O. J. LOKBERG, G. A. SLETTMOEN, *Proc. SPIE*, Vol. 398, 295 - 9 (1983)
8. K. CREATH, *Appl. Optics*, Vol. 24, 3053 - 8 (1985)
9. K. CREATH, *Topical Meeting on Mach. Vision THB 4/1 - 4* (1985)
10. K. CREATH, G. A. SLETTMOEN, *J. Opt. Soc. Am. A* Vol. 2, 1629 - 36
11. D. W. ROBINSON, D. C. WILLIAMS, *Opt. Commun.* Vol. 57, 26 - 30 (1986)
12. R. HÖFLING, W. OSTEN, (to be published in *Optica Acta*)
13. N. EICHHORN et al., *Acta Polytech. Scand. Appl. Phys. Ser. No. PHY 150*, 88 - 91 (1985)
14. J. SAEDLER et al., *Bild und Ton*, Vol. 39, 140 - 4, 165 - 73 (1986)
15. T. R. CRIMMINS, *Appl. Optics*, Vol. 24, 1439 - 43 (1985)
16. T. R. CRIMMINS, *Opt. Engng.* Vol. 25, 651 - 4 (1986)

## Резюме

КОРРЕЛЯЦИЯ СПЕКЛ-КАРТИН ПРИ ПРИМЕНЕНИИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ  
ОБРАЗОВ

В работе представлено спекле интерферометрию при использовании свойств цифровой обработки образов (Digital speckle pattern interferometry). В исследованиях использовано систему ROBOTRON A 6472 с видикон-камерой о  $512 \times 512$  пикселях. Исследовано перемещения в плоскости и перпендикулярные к ней.

## Streszczenie

## KORELACJA OBRAZÓW PLAMKOWYCH PRZY UŻYCIU TECHNIKI CYFROWEJ

W pracy przedstawiono interferometrię plamkową wykorzystując właściwości cyfrowego przetworzenia obrazów (Digital speckle pattern interferometry). Badania wykonano przy wykorzystaniu systemu ROBOTRON A 6472 wyposażonego w vidicon-kamerę o  $512 \times 512$  pixelach. Badano przemieszczenia w płaszczyźnie i przemieszczenia o kierunku normalnym do płaszczyzny.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 czerwca 1987 roku.*

---

## WYKORZYSTANIE ZJAWISKA ELASTO-AKUSTYCZNEGO DO POMIARU NAPRĘŻEŃ\*

JULIAN DEPUTAT

*Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN — Warszawa*

### 1. Wstęp

Metoda ultradźwiękowa jest jedną z intensywnie rozwijanych nieniszczących metod pomiaru naprężeń. Jej szczególne cechy to możliwość pomiaru naprężeń zarówno na powierzchni jak i w objętości ciała, bezpośrednio pomiaru naprężenia (a nie wyznaczanie naprężenia na podstawie zmierzonego odkształcenia), a także możliwość pomiaru bezwzględnych wartości naprężenia, a nie tylko jego zmian. Początki ultradźwiękowych pomiarów naprężeń wiążą się z pracą Bensona i Relsona opublikowaną w roku 1959 [1]. W pracy tej autorzy wykazali istnienie zależności między naprężeniem w ciele stałym a prędkością rozchodzenia się ultradźwiękowych fal poprzecznych, a także zauważyli, że wpływ naprężenia na prędkość fal zmienia się wraz ze zmianą kierunków propagacji i polaryzacji fal względem kierunku naprężenia. Przez analogię do zjawiska elastoptycznego, polegającego na zależności prędkości fal świetlnych od naprężenia, odpowiednie związki dla fal ultradźwiękowych nazwano zjawiskiem elastoakustycznym.

Ultradźwiękowe pomiary naprężeń są techniką młodą. Wiele problemów pomiarowych pozostaje jeszcze otwartymi. W ciągu ostatnich kilku lat obserwuje się jednak szybki postęp zarówno w zakresie teorii rozchodzenia się fal akustycznych w ośrodkach rzeczywistych, w zakresie metod pomiarowych jak też w dziedzinie aparatury i przemysłowych zastosowań.

W referacie przedstawiono główne zasady ultradźwiękowych pomiarów naprężeń i przytoczono przykłady zastosowań tej techniki.

### 2. Zjawisko elastoakustyczne

W ciałach stałych prędkość fal ultradźwiękowych zależy od stałych sprężystości, gęstości ciała, temperatury, stosunku wymiarów geometrycznych ciała do długości fali i od naprężenia panującego w obszarze, przez który fala przechodzi. Ta ostatnia zależność, uwarunkowana nieliniowością sprężystą materiału leży u podstaw tensometrii ultradźwiękowej.

\* Praca wygłoszona na XII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa-Jadwisin, 1986.



Pierwszą pracą, w której uzyskano wyrażenia wiążące prędkość fal ultradźwiękowych z naprężeniem i potwierdzono doświadczalnie otrzymane zależności była praca Hughes'a i Kelly [2]. Według tych autorów prędkości fal ultradźwiękowych wiążą się z naprężeniem zależnościami:

$$\varrho_0 V_{110}^2 = \lambda + 2\mu - \frac{P}{3K_0} [6l + 4m + 7\lambda + 10\mu] \quad (1)$$

$$\varrho_0 V_{120}^2 = \mu - \frac{P}{3K_0} \left[ 3m - \frac{n}{2} + 3\lambda + 6\mu \right] \quad (2)$$

$$\varrho_0 V_{111}^2 = \lambda + 2\mu - \frac{\sigma}{3K_0} \left[ 2l + \lambda + \frac{\lambda + \mu}{\mu} (4m + 4\lambda + 10\mu) \right] \quad (3)$$

$$\varrho_0 V_{121}^2 = \mu - \frac{\sigma}{3K_0} \left[ m + \frac{\lambda n}{4\mu} + 4\lambda + 4\mu \right] \quad (4)$$

$$\varrho_0 V_{112}^2 = \lambda + 2\mu - \frac{\sigma}{3K_0} \left[ 2l - \frac{2\lambda}{\mu} (m + \lambda + 2\mu) \right] \quad (5)$$

$$\varrho_0 V_{122}^2 = \mu - \frac{T}{3K_0} \left[ m + \frac{\lambda n}{4\mu} + \lambda + 2\mu \right] \quad (6)$$

$$\varrho_0 V_{123}^2 = \mu - \frac{T}{3K_0} \left[ m - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} n - 2\lambda \right] \quad (7)$$

We wzorach tych:  $\varrho$  — masa właściwa w stanie naturalnym (dla  $\delta = 0$ ),  $\lambda$  i  $\mu$  — stałe Lamego,  $K_0$  — moduł sprężystości objętościowej,  $m$ ,  $l$  i  $n$  — stałe sprężystości 3-go rzędu,  $P$  — ciśnienie hydrostatyczne,  $\sigma$  — naprężenie jednoosiowe,  $V$  — prędkość fal ultradźwiękowych. Indeksy przy  $V$  oznaczają kolejno: kierunek rozchodzenia się fal, kierunek drgań cząstek (kierunek polaryzacji), kierunek naprężenia jednoosiowego. We wzorach (1) i (2) indeks zero oznacza przypadek ciśnienia hydrostatycznego.

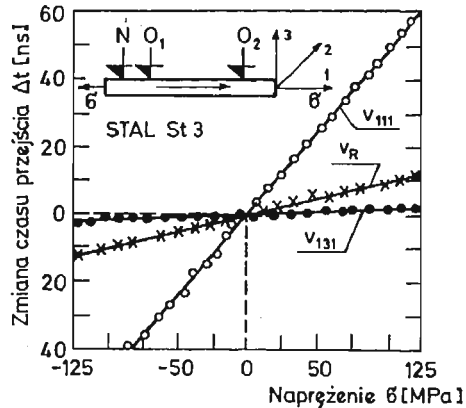
Obszerny przegląd prac teoretycznych dotyczących zjawiska elastoakustycznego można znaleźć w monografiach i artykułach przeglądowych np. [3, 4]. Odmienne podejście autorów i różny stopień stosowanych przybliżeń prowadzą do różnych wzorów końcowych a nawet różnych określeń stałych sprężystości wyższych rzędów. Doświadczenia wykazują słabą nieliniowość zależności prędkość — naprężenie i w praktyce korzysta się z wyznaczonej doświadczalnie dla danego materiału zależności prędkości od naprężenia w postaci:

$$\frac{V - V^0}{V^0} = \frac{t^0 - t}{t} = \beta \sigma \quad (8)$$

gdzie  $V^0$  i  $V$  są prędkościami fal w tym samym materiale w stanie naturalnym i w stanie naprężonym,  $t^0$  i  $t$  — odpowiednie czasy przejścia fal,  $\beta$  — stała elastoakustyczna materiału dla danej konfiguracji kierunków propagacji, polaryzacji i naprężenia,  $\sigma$  — naprężenie jednoosiowe.

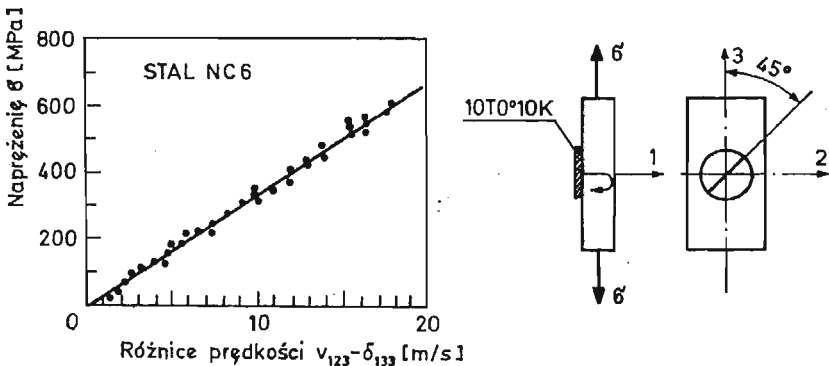
Na rysunku 1 przedstawiono zmiany czasu przejścia fal podłużnych, poprzecznych oraz powierzchniowych  $R$  rozchodzących się w kierunku naprężenia przy zmianach wartości i znaku naprężenia. Dane te uzyskano dla próbki ze stali St3 w temperaturze 18°C. Droga fal podłużnych wynosiła 196 mm, a drogi fal poprzecznych i powierzchniowych

107 mm. Przy wzroście naprężenia rozciągającego prędkość fal rozchodzących się w kierunku naprężenia maleje (czas przejścia rośnie). Wzrost naprężenia ściskającego powoduje zwiększenie prędkości fal (czas przejścia maleje).



Rys. 1. Zmiany czasu przejścia  $\Delta t$  fal podłużnych  $V_{111}$ , poprzecznych  $V_{131}$  i powierzchniowych  $R$  rozchodzących się w kierunku naprężenia  $\sigma$  w funkcji naprężenia. Próbka ze stali St3. W ramce rysunku układ głowic ultradźwiękowych:  $N$  — głowica nadawcza,  $O_1$  i  $O_2$  — głowice odbiorcze. Zmiany czasu mierzone na drodze między głowicami odbiorczymi

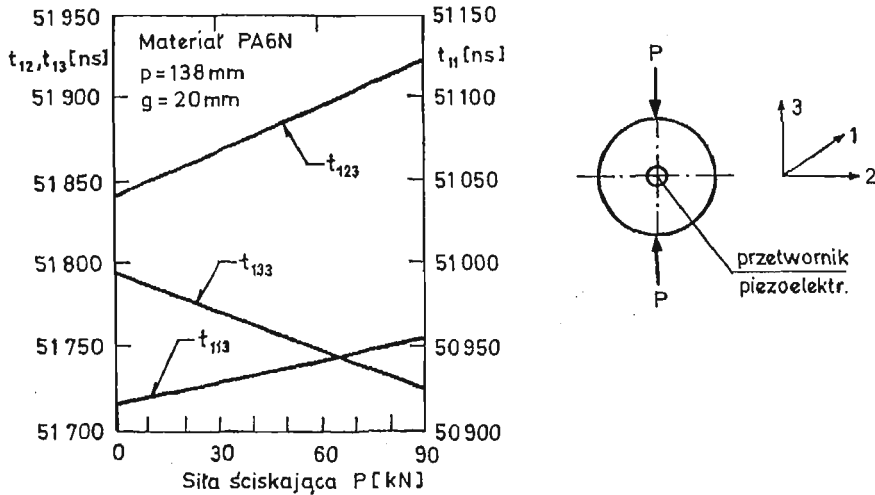
Podobne zależności skalujące można uzyskać dla fal rozchodzących się w kierunku prostopadłym do kierunku naprężenia. Wyniki uzyskane dla kilku przypadków przedstawiono na rysunkach 2 i 3.



Rys. 2. Zależność między naprężeniem i różnicą prędkości fal poprzecznych rozchodzących się w kierunku prostopadłym do kierunku naprężenia i spolaryzowanych w kierunku naprężenia  $V_{133}$  i w kierunku prostopadłym do kierunku naprężenia  $V_{123}$ . Próbka ze stali NC6. Obok wykresu umieszczono schemat badania

Na rysunku 2 przedstawiono zależność różnicy prędkości fal poprzecznych rozchodzących się w kierunku prostopadłym do kierunku naprężenia, spolaryzowanych w kierunku naprężenia, i rozchodzących się w tym samym kierunku fal spolaryzowanych prostopadle do kierunku naprężenia od wartości naprężenia rozciągającego  $\sigma$ . Dane przedstawione

na rysunku 2 uzyskano dla płaskorównoległej próbki ze stali NC6. Wykresy na rysunku 3 przedstawiają wyniki badań zależności naprężenie-czas przejścia fal wykonanych w środku krążka z PA6 ściskanego wzdłuż średnicy. Siła ściskająca  $P$  działa w kierunku 3. Fale rozchodzą się w kierunku 1.



Rys. 3. Zmiany czasu przejścia fal podłużnych i poprzecznych spolaryzowanych w kierunku działania siły ściskającej i prostopadle do siły ściskającej w funkcji siły ściskającej krążek  $P$ . Próbką był krążek z PA6N średnicy 138 mm i grubości 20 mm

Cyfry przy literach  $t$  na rysunku oznaczają kolejno kierunek rozchodzenia się fal, kierunek drgań cząstek w fali i kierunek działania siły.

Badania przeprowadzono na krążku grubości 20 mm i średnicy 138 mm. W przypadku fal podłużnych mierzono czas 16 przejść impulsu przez grubość krążka, a dla fal poprzecznych 8 przejść. Przy punktowej sile nacisku  $P$  wzdłuż średnicy krążka w jego środku powstaje złożony stan naprężenia, przy czym naprężenie ściskające:

$$\sigma_1 = -2P/\pi g d \quad (9)$$

i rozciągające:

$$\sigma_2 = 6P/\pi g d, \quad (10)$$

gdzie:

$d$  — średnica krążka,

$g$  — grubość krążka.

Na podstawie pomiarów podobnych do tych, których wyniki zamieszczono na rys. 1, 2 i 3 można wyznaczyć wartości współczynników elastoakustycznych dla poszczególnych przypadków. Doświadczenia potwierdzają prostą proporcjonalność między przyrostem prędkości fal ultradźwiękowych i naprężeniem.

Zmiany prędkości zachodzące pod wpływem naprężenia są małe. Przykładowo, dla stali wzrost naprężenia rozciągającego o 10 MPa powoduje zmniejszenie o ok. 0,75 m/s prędkości fal podłużnych rozchodzących się w kierunku naprężenia, poprzecznych o ok. 0,03 m/s, a powierzchniowych o ok. 0,15 m/s. Taki sam przyrost naprężenia powoduje

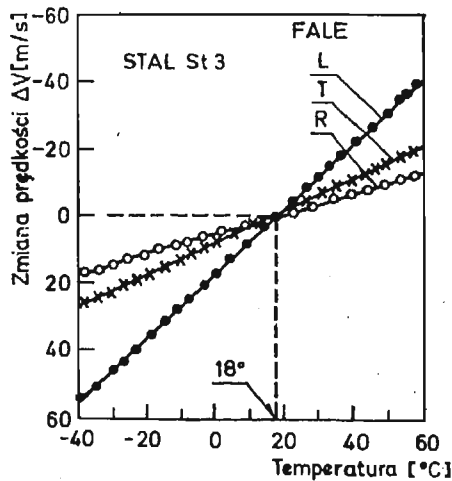
zwiększenie o ok. 0,3 m/s różnicy prędkości fal poprzecznych rozchodzących się prostopadle do kierunku naprężenia i spolaryzowanych:

- a) w kierunku naprężenia;
- b) prostopadle do kierunku naprężenia.

Dla aluminium odpowiednie wielkości są prawie dwa razy większe. Wielokrotnie większe zmiany prędkości fal pod wpływem naprężenia występują w żeliwie. Zmiany prędkości fal podłużnych rozchodzących się w próbce żeliwnej prostopadle do kierunku naprężenia osiągają wartość nawet 12 m/s przy przyroście naprężenia o 10 MPa [5], przy czym wielkość tych zmian zależy od gatunku żeliwa. Najbardziej czułe na naprężenie są fale podłużne rozchodzące się w kierunku naprężenia. Dlatego fale te są najczęściej wykorzystywane w badaniach naprężeń. Do pomiarów naprężeń można przyjąć, że dla nominalnie tego samego gatunku materiału wartości współczynników elastoakustycznych są stałe [6].

### 3. Wpływ temperatury na prędkość fal

Wahania temperatury powodują zmiany wymiarów badanego elementu i wpływają na prędkość rozchodzenia się fal ultradźwiękowych. Na rysunku 4 podano wyniki badania zmian prędkości fal podłużnych  $L$ , poprzecznych  $T$  oraz powierzchniowych w funkcji temperatury dla stali St3. W temperaturze  $18^{\circ}\text{C}$  prędkości fal w badanej próbce wynosiły  $V_L = 5958$  m/s,  $V_T = 3270$  m/s,  $V_R = 3040$  m/s. Jak widać, w badanym zakresie temperatur prędkość liniowo maleje przy wzroście temperatury.



Rys. 4. Przyrosty prędkości  $\Delta V$  fal podłużnych  $L$ , poprzecznych  $T$  i powierzchniowych  $R$  przy zmianach temperatury. Próbką ze stali St3

Wielkość zmiany prędkości fal w stali przy zmianie temperatury o  $1^{\circ}\text{C}$  jest bliska zmianie spowodowanej przyrostem naprężenia o 10 MPa. Jeśli używane są głowice ultradźwiękowe z klinami wykonanymi z tworzywa sztucznego, trzeba liczyć się z ok. cztero-

krotnie większymi zmianami prędkości fal w tworzywie sztucznym niż ma to miejsce w stali. Dlatego przy porównaniu wyników pomiarów prędkości fal konieczne jest stosowanie poprawek temperaturowych lub odpowiednich układów kompensacyjnych.

#### 4. Wpływ niejednorodności materiału

W praktyce interesujące są pomiary przyrostu naprężenia spowodowanego przyłożeniem obciążenia albo też pomiary bezwzględnej wartości naprężenia panującego w materiale.

W pierwszym przypadku można wykonać pomiar czasu przejścia fal ultradźwiękowych przez ten sam odcinek drogi w tym samym obszarze materiału w stanie początkowym (np. dla  $\sigma = 0$ ) i w stanie końcowym (gdy  $\sigma \neq 0$ ) i wartość zmiany naprężenia wyliczyć z liniowej zależności między przyrostem prędkości i przyrostem naprężenia (8).

W drugim przypadku zwykle jest dostępny materiał tylko w stanie naprężonym, a wartość prędkości czy czasu przejścia fal gdy w badanym obszarze materiału naprężenie nie występuje nie jest znana. Taka sytuacja ma miejsce gdy chcemy wyznaczyć bezwzględną wartość naprężeń, a więc np. przy pomiarach naprężeń własnych. Materiały techniczne wykazują znaczną niejednorodność własności sprężystych i lokalne różnice prędkości fal ultradźwiękowych w materiałach pozbawionych naprężeń mogą być istotne i dla wyznaczenia naprężeń na podstawie pomiarów prędkości nie można przyjąć, że wartość prędkości fal w określonym gatunku materiału w stanie naturalnym (bez naprężeń) jest stała.

Granice niejednorodności właściwości akustycznych materiałów konstrukcyjnych nie są bliżej znane. O skali zjawiska mówią wyniki dokładnych pomiarów prędkości fal, które wykonano na próbkach ze stali NC6 i ze stali węglowej, wyciętych z różnych obszarów tego samego arkusza blachy. Przed pomiarami próbki poddano obróbce odprężającej. W próbkach ze stali NC6 największa różnica prędkości fal podłużnych wynosiła 8,2 m/s fal powierzchniowych 5,2 m/s, fal poprzecznych spolaryzowanych w kierunku walcowania 5,4 m/s, a spolaryzowanych prostopadle do kierunku walcowania 4,9 m/s. Wartości różnicy prędkości fal poprzecznych spolaryzowanych w kierunku walcowania, spowodowanej zmianą naprężenia o 10 MPa, zawierały się w granicach  $0,31 \div 0,32$  m/s. W stali węglowej największa różnica prędkości fal podłużnych miała wartość 10,8 m/s, a fal powierzchniowych 6,9 m/s. Dla porównania zmiana naprężenia o 10 MPa powodowała zmiany prędkości fal podłużnych w granicach  $0,69 \div 0,72$  m/s, fal poprzecznych  $0,06 \div 0,08$  m/s, a fal powierzchniowych  $0,12 \div 0,15$  m/s.

Błędy w ocenie naprężenia, jakie mogą powstać na skutek zaniedbania niejednorodności w tych blachach, sięgają setek megapaskali. Przyczyną lokalnych różnic właściwości sprężystych są gradienty temperatur, naprężeń i odkształceń plastycznych w czasie walcowania, kucia czy przeciągania, a także nierównomierny rozkład zanieczyszczeń. Różnice składu i odchyłeń parametrów technologicznych powodują niepowtarzalność właściwości poszczególnych partii materiału. Dlatego występują lokalne różnice prędkości fal w jednym kawałku i odmienne wartości w poszczególnych partiach nominalnie takiego samego materiału.

### 5. Uwzględnienie różnic własności sprężystych

W niektórych przypadkach na podstawie pomiarów prędkości fal podłużnych i poprzecznych w badanym materiale i w materiale wzorca bez naprężeń można wyznaczyć prędkość, jaką miałyby fale podłużne w badanym materiale, gdyby był on pozbawiony naprężeń. W płaskim stanie naprężeń wykorzystuje się do tego celu zanedbywalnie małą czułość na naprężenie fal poprzecznych rozchodzących się w kierunku naprężenia, tak że można przyjąć:

$$\begin{aligned} V_T^\sigma &= V_T^0, \\ t_T^\sigma &= t_T^0. \end{aligned} \quad (11)$$

Na różnicę czasów przejścia fal podłużnych w badanym materiale i we wzorcu mogą składać się różnice czasów przejścia związane z odmiennością właściwości sprężystych  $\Delta t_L^\delta$ , z naprężeniami  $\Delta t_L^\sigma$  i z różnicą temperatury. Przyjmując, że czasy przejścia fal ultradźwiękowych we wzorcu i w badanym materiale odnoszą się do jednej wspólnej temperatury, można napisać:

$$\Delta t_L = t_L^\sigma - t_L^w = \Delta t_L^\delta + \Delta t_L^\sigma. \quad (12)$$

Wartość czasu przejścia fal w badanym materiale dla  $\sigma = 0$ , potrzebna do wyznaczenia bezwzględnej wartości naprężenia, będzie:

$$t_L^0 = t_L^w + \Delta t_L^\delta. \quad (13)$$

Wartość  $\Delta t_L^\delta$  jest poprawką na różnicę właściwości sprężystych materiału badanego i wzorca.

W ośrodkach izotropowych bez naprężeń między prędkościami fal podłużnych i poprzecznych zachodzi związek:

$$V_L^0 = V_T^\sigma \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}, \quad (14)$$

gdzie:

$\nu$  — współczynnik Poissona.

Jeśli anizotropia stali jest spowodowana wyróżnioną orientacją ziarn w wyniku odkształcenia plastycznego, to moduł sprężystości objętościowej  $K$  jest stały niezależnie od kierunku [7]. Stałość  $K$  pociąga za sobą związek:

$$V_L^2 - \frac{4}{3} V_T^2 = K = const. \quad (15)$$

Z (15) otrzymuje się zależności na obliczenie zmiany prędkości i czasu przejścia fal podłużnych, spowodowane różnicami właściwości sprężystych:

$$\Delta V_L^\delta = \frac{4}{3} \frac{V_T}{V_L} \Delta V_T, \quad (16)$$

$$\Delta t_L^\delta = \frac{4}{3} \left( \frac{L_T}{l_L} \right)^2 \left( \frac{t_L}{l_T} \right)^3 \Delta t_T, \quad (17)$$

gdzie:

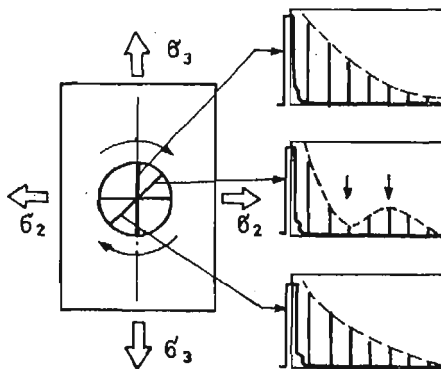
$l_L, l_T$  — drogi fal  $L$  oraz  $T$ .

Wartość naprężenia oblicza się ze wzoru:

$$\sigma = \frac{1}{\beta_L t_T} [t_L^w + \Delta t_L^s - t_L^g]. \quad (18)$$

### 6. Pomiary w dwuosiowym stanie naprężenia

Rozpatrzmy płaski dwuosiowy stan naprężenia, jaki występuje np. w cienkim krążku ściskanym wzdłuż średnicy w kierunku 3. Kierunki naprężeń głównych łatwo ustalić, wykorzystując fale poprzeczne rozchodzące się w kierunku grubości krążka. Obracając przetwornik piezoelektryczny wokół jego osi znajduje się dwa prostopadłe względem siebie położenia, przy których obwiednie ciągu ech dna monotonicznie maleją. Orientacja płaszczyzn polaryzacji pokrywa się wtedy z kierunkiem naprężenia głównego. Przy innych orientacjach płaszczyzny polaryzacji na obwiedni ciągu ech dna występują ekstrema (rys. 5). Maksima i minima obwiedni powstają jako wynik interferencji w zgodnej i prze-



Rys. 5. Kształt obwiedni ciągu ech dna próbki płaskorównoległej w dwuosiowym stanie naprężenia dla fal poprzecznych rozchodzących się w kierunku prostopadłym do kierunku naprężeń głównych i spolaryzowanych w kierunku naprężenia głównego (wykładniczo zanikające ciągi ech dna) i w kierunku tworzącymi kąt  $45^\circ$  z kierunkami naprężeń głównych (ekstrema na obwiedni ciągu ech dna)

ciwnej fazie fal składowych, na które dzieli się fala poprzeczna, jeśli cząstki nie drgają tylko w kierunku jednego naprężenia głównego [8]. Położenie ekstremum na osi czasu jest zależne od częstotliwości fali, rodzaju materiału i różnicy prędkości fal spolaryzowanych w kierunkach naprężeń głównych, a różnica ta jest proporcjonalna do różnicy wartości naprężeń (rys. 2). Do wyznaczenia znaku i wartości naprężeń głównych  $\sigma_2$  oraz  $\sigma_3$  można wykorzystać pomiary czasów przejścia  $t_{113}$  fal podłużnych rozchodzących się w kierunku prostopadłym do kierunku naprężenia oraz  $t_{133}$  i  $t_{123}$  fal poprzecznych rozchodzących się w kierunku prostopadłym do kierunku naprężenia i spolaryzowanych odpowiednio w kierunku naprężenia i w kierunku prostopadłym do kierunku naprężenia (rys. 3). Na prędkość fal rozchodzących się w kierunku prostopadłym do kierunku naprężeń głównych mają wpływ obydwa naprężenia główne. Można to zapisać:

$$V_{11} = V_{11}^0 (1 + \beta_{11} \sigma_{33} + \beta_{13} \sigma_{22}), \quad (19)$$

$$V_{12} = V_{12}^0(1 + \beta_{12} \sigma_{33} + \beta_{13} \sigma_{22}), \quad (20)$$

$$V_{13} = V_{13}^0(1 + \beta_{13} \sigma_{33} + \beta_{12} \sigma_{22}). \quad (21)$$

Sumy i różnice naprężeń głównych wiążą się z sumami i różnicami względnych zmian prędkości:

$$\frac{V_{11} - V_{11}^0}{V_{11}^0} = \beta_{11}(\sigma_{33} + \sigma_{22}), \quad (22)$$

$$\frac{V_{13} - V_{13}^0}{V_{13}^0} - \frac{V_{12} - V_{12}^0}{V_{12}^0} = \beta_{13-12}(\sigma_{33} - \sigma_{22}), \quad (23)$$

$$\frac{V_{13} - V_{13}^0}{V_{13}^0} + \frac{V_{12} - V_{12}^0}{V_{12}^0} = \beta_{13+12}(\sigma_{33} + \sigma_{22}). \quad (24)$$

Współczynniki elastoakustyczne we wzorach (22÷24) opisują proporcjonalność różnicy i sumy względnych zmian prędkości odpowiednio do różnicy i sumy naprężeń głównych. Wartości tych współczynników można wyznaczyć przy próbie ściskania krążka z badanego materiału. Zależności (22÷24) można zapisać, zastępując prędkości odpowiednimi czasami przejścia fal przez grubość badanego elementu, tak jak to zrobiono we wzorze (8). Do wyznaczenia bezwzględnych wartości naprężeń głównych trzeba znać wartość czasu przejścia fal w stanie badanym i w stanie naturalnym bez naprężeń.

Jeśli znane są współczynniki elastoakustyczne materiału i w wybranym obszarze zmierzono czasy przejścia trzech typów fal  $t_{11}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{13}$ , to dane te wystarczają do obliczenia czasu przejścia  $t_i^0$  wybranego typu fal przez ten sam odcinek drogi, gdy naprężenia nie występują. W materiale izotropowym w stanie nieodkształconym prędkość fal poprzecznych nie zależy od orientacji płaszczyzny polaryzacji:

$$V_{12}^0 = V_{13}^0 = V_T^0. \quad (25)$$

Korzystając z zależności (22÷24) otrzymamy wzór na prędkość fal poprzecznych w materiale bez naprężeń:

$$V_{12}^0 = V_{13}^0 = V_T^0 = \frac{1}{m-2} (mkV_{11} - V_{11} - V_{13}), \quad (26)$$

gdzie:

$$m = \frac{\beta_{13+12}}{\beta_{11}}, \quad (27)$$

$$k = \frac{V_{13}^0}{V_{11}^0} = \frac{V_T^0}{V_L^0}. \quad (28)$$

Wartości  $m$  oraz  $k$  mogą być przyjęte dla danego materiału jako stałe.

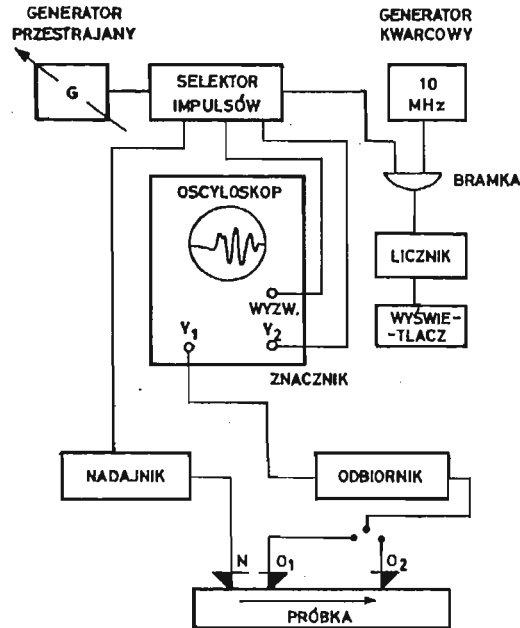
## 7. Aparatura ultradźwiękowa

Przegląd sposobów pomiaru prędkości fal ultradźwiękowych i opisy odpowiednich układów pomiarowych można znaleźć w wielu dostępnych artykułach i monografiach [9, 10, 11]. Najczęściej są stosowane metody oparte na pomiarze czasu przejścia fal ultra-



dźwiękowych przez stały odcinek drogi w badanym materiale. W zależności od geometrii badanego elementu i stanu naprężenia dobiera się różne układy głowic, mody fal i kierunki propagacji fal. Do wyznaczenia bezwzględnej wartości naprężenia jest potrzebny pomiar bezwzględnej wartości prędkości (czasu przejścia), a nie tylko zmiany prędkości.

Jednym z przyrządów spełniających ten warunek, jest nanosekundowy miernik czasu przejścia impulsów ultradźwiękowych, zbudowany w IPPT PAN [12]. Przyrząd ten może służyć do pomiaru czasu między dwoma wybranymi impulsami. Schemat blokowy układu pomiarowego przedstawiono na rysunku 6. Generator przestrajany  $G$  wytwarza sygnał



Rys. 6. Schemat blokowy nanosekundowego miernika czasu przejścia impulsów ultradźwiękowych

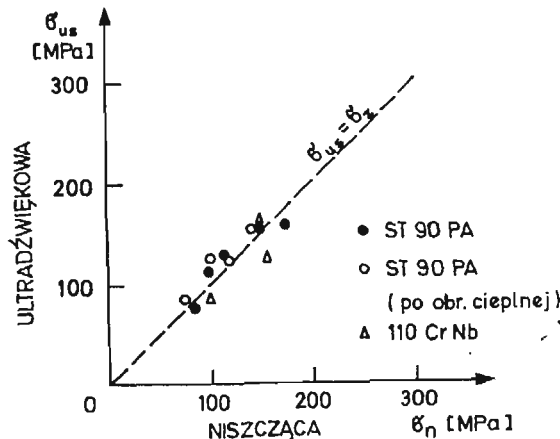
wyzwolenia nadajnika, sygnał wyzwolenia podstawy czasu, sygnał znacznika i sygnał bramki. Sygnał wyzwolenia nadajnika powoduje pobudzenie przetwornika głowicy nadawczej i wysłanie impulsu ultradźwiękowego do badanego materiału. Okres pobudzenia nadajnika wynosi  $100 T$ . Po upływie czasu równego  $9 T$  jest wyzwalana podstawa czasu oscyloskopu. Czas ten jest tak dobrany, aby na ekranie oscyloskopu można było obserwować odpowiednio rozciągnięty sygnał (impuls) odebrany przez przetwornik odbiornika. Na odebrany sygnał, widoczny na ekranie lampy oscyloskopowej, jest nakładany sygnał znacznika czasu (—) pojawiający się po upływie  $10 T$  od momentu wyzwolenia nadajnika. Przez precyzyjne strojenie generatora  $G$  można tak dobrać okres drgań  $T$ , aby znacznik czasu znalazł się w wybranym miejscu na zobrazowaniu odebranego impulsu. Wtedy czas przejścia fali będzie równy  $10 T$ . Przez zliczenie w czasie równym  $10^4 T$  impulsów kwarcowego generatora wzorcowego  $10 \text{ MHz}$  i po zaokrągleniu wskaźnika ostatniego licznika pomiar czasu  $T$  zostanie dokonany z dokładnością  $\pm 1 \text{ ns}$ . Zakres czasów mierzonych za pomocą przyrządu wynosi  $1 \div 1000 \text{ ns}$ . Decydujący wpływ na dokładność i pow-

tarzalność pomiarów ma chropowatość powierzchni badanego elementu, od której zależą warunki tworzenia się czoła fali w materiale.

Pomiary z zastosowaniem fal powierzchniowych można prowadzić również za pomocą refraktometru ultradźwiękowego [13]. Za pomocą tego przyrządu wyznacza się przebieg zmian współczynnika odbicia fal ultradźwiękowych na granicy cieczy wzorcowej i badanej próbki w funkcji kąta padania i mierzy się wartość kątów padania, przy których w próbce powstają fale podłużne, poprzeczne i powierzchniowe (tzw. krytyczne kąty padania). Na podstawie zmierzonej wartości kąta krytycznego dla fal powierzchniowych wyznacza się wartość fazowej prędkości fal powierzchniowych. Dla próbki stalowej dokładność pomiaru prędkości wynosi 0,03%. Zmierzone wartości odnoszą się do niewielkiej objętości materiału, określonej średnicą wiązki i długości wzbudzanej fali powierzchniowej. Przy częstotliwości 10 MHz pole pomiarowe ma średnicę 6 mm, a grubość warstwy badanej wynosi ok. 0,3 mm.

### 8. Pomiar naprężeń podłużnych w szynach

Technikę opisaną w rozdziale 5 i miernik czasu wg [12] wykorzystano w zbudowanym w IPPT PAN przyrządzie do pomiaru naprężeń podłużnych w główkach szyn kolejowych [14]. Za pomocą nanosekundowego miernika czasu mierzy się czas przejścia fal podłużnych i poprzecznych na ustalonych odcinkach drogi wzdłuż osi szyny. Automatycznie jest rejestrowana temperatura szyny. Na podstawie zmierzonych wartości czasów przejścia fal i temperatury badanej szyny oraz uwzględniając wprowadzone wcześniej do pamięci mikroprocesora wartości czasów przejścia w materiale szyny bez naprężeń, wartości współczynników elastoakustycznych i współczynników temperaturowej zależności prędkości fal — układ logiczny oblicza wartość naprężenia. Miernik ten jest od kilku lat wykorzystywany w Hucie Katowice do kontroli wartości naprężeń własnych w produkowanych tam szynach. Szerokie badania porównawcze wyników uzyskanych metodą ultradźwiękową i metodą niszczącą przez cięcie i pomiar odkształceń w wyniku wyzwania naprężeń potwierdzają poprawność wyników uzyskiwanych za pomocą miernika.



Rys. 7. Porównanie wyników pomiarów naprężeń metodami ultradźwiękową i niszczącą

Na rys. 7 pokazano przykładowo zestawienie wyników pomiarów naprężeń własnych w szynach uzyskanych metodą ultradźwiękową i niszczącą [15].

### 9. Pomiar naprężeń w śrubach

Klucze dynamometryczne wskazują wartość momentu dokręcającego. Jeśli opory tarcia w gwincie nie są jednakowe, to przy tych samych wartościach momentu dokręcającego uzyskuje się różne naprężenia śrub, a więc i różną jakość połączeń śrubowych. Ultradźwiękowy „klucz dynamometryczny” jest narzędziem wiarygodnym i niezastąpionym w odpowiedzialnych konstrukcjach z połączeniami śrubowymi.

Naprężenie w śrubach wyznacza się na podstawie pomiaru czasu przejścia fal ultradźwiękowych wzdłuż osi śruby. Zwykle dostępny jest co najmniej jeden koniec śruby i można łatwo uzyskać echo albo echa dna śruby. Jeśli zmierzy się czas przejścia przed dokręceniem ( $\sigma = 0$ ) i po dokręceniu ( $\sigma \neq 0$ ), to zmiana czasu przejścia fal wzdłuż osi śruby jest wprost proporcjonalna do naprężenia i doświadczalnie wyznaczone zależności dla śrub danej konstrukcji mogą posłużyć do pomiaru zmian naprężenia podczas dokręcania.

Na obserwowany przyrost czasu składa się zmiana drogi fali w wyniku wydłużenia sprężystego śruby i zmiana prędkości fal w wyniku działania naprężenia. Naprężenie wzdłuż osi śruby jest niejednakowe. Na swobodnych powierzchniach czołowych naprężenie ma wartość zero. Na odcinkach nakrętek rośnie i najwyższą wartość ma w części gwintowanej zawartej pomiędzy wewnętrznymi powierzchniami nakrętek. W części gładkiej naprężenie osiąga stałą wartość  $\sigma_0$ .

Gdy celem pomiaru jest wyznaczenie wartości naprężenia w gładkiej części śruby już dokręconej, bez możliwości zmierzenia czasu przejścia  $t^0$  wzdłuż osi śruby nienaprzężonej, sytuacja jest podobna do tej, jaka ma miejsce przy wyznaczaniu naprężeń własnych. I w tym przypadku można wykorzystać fale poprzeczne rozchodzące się wzdłuż osi śruby jako fale odniesienia, mało czułe na naprężenie. Obserwowana zmiana czasu przejścia fal ultradźwiękowych jest proporcjonalna do naprężenia średniego, które jest mniejsze od naprężenia w części gładkiej:

$$\sigma_{sr} = k\sigma_0, \quad k < 1. \quad (29)$$

Z pomiaru znane są wartości czasu przejścia fal podłużnych  $t_L^0$  i poprzecznych  $t_T^0$  przez ten sam materiał i przez tę samą drogę. Naprężenie zmienia wartość stosunku tych czasów. Czasy przejścia  $t_L^0$ ,  $t_T^0$  wyrażają zależności:

$$t_L = t_L^0 + \Delta t_L = t_L^0 \left[ 1 + \left( \beta_L + \frac{1}{E} \right) \frac{\sigma_0}{k} \right], \quad (30)$$

$$t_T = t_T^0 + \Delta t_T = t_T^0 \left[ 1 + \left( \beta_T + \frac{1}{E} \right) \frac{\sigma_0}{k} \right]. \quad (31)$$

Przyjmując w (30) i (31):

$$p = t_T^0/t_L^0, \quad m = t_T^0/t_L^0, \quad (32)$$

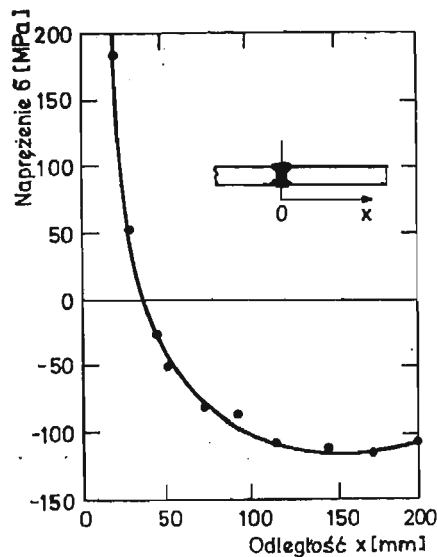
otrzymujemy:

$$\sigma_0 = \frac{(m-p)k}{p\left(\beta_L + \frac{1}{E}\right) - m\left(\beta_T - \frac{1}{E}\right)}. \quad (33)$$

Zależność (33) umożliwia wyznaczenie wartości naprężenia w gładkiej części śruby na podstawie pomiaru czasu przejścia fal podłużnych i poprzecznych wzdłuż osi śruby, jeśli znany jest współczynnik kształtu  $k$  oraz stałe materiałowe  $\beta_L$ ,  $\beta_T$  i  $E$  [16, 17].

## 10. Pomiary naprężeń spawalniczych

Pierwszą próbą wykorzystania zjawiska elastoakustycznego do pomiaru naprężeń spawalniczych była praca [18], w której zmierzono zmiany czasu przejścia fal powierzchniowych przy oddalaniu układu głowic od spoiny na rurze. Ze względu na zakres i technikę praca ma raczej charakter sygnałny. Wykorzystanie precyzyjnych pomiarów ultradźwiękowych z zastosowaniem jednej z metod opisanych w pierwszej części artykułu umożliwia pomiar naprężeń spawalniczych. Znaczenie techniki ultradźwiękowej polega na możliwości kontroli prawidłowości obróbki odpężającej. Na rysunku 8 przykładowo przedstawiono przebieg zmian naprężeń podłużnych w funkcji odległości od spoiny [19].



Rys. 8. Zmiany naprężenia prostopadłego do spoiny w funkcji odległości od spoiny

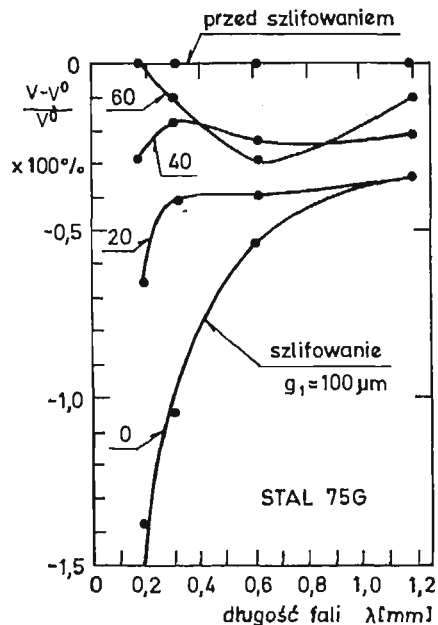
## 11. Pomiary naprężeń szlifierskich

W pracy [20] przedstawiono wyniki badania naprężeń w wierzchniej warstwie przedmiotów za pomocą ultradźwiękowych fal powierzchniowych. Badania wykonano na obrabianych cieplnie próbkach ze stali typu 75G ( $R_m > 1200$  MPa,  $R_e > 1000$  MPa). Współ-

czynnik elastoakustyczny fal powierzchniowych w tej stali ma wartość:

$$\beta_R = 1 \cdot 10^{-5} \text{MPa}^{-1}$$

Pomiary prędkości fal powierzchniowych wykonano za pomocą refraktometru ultradźwiękowego. Pomiar prowadzono na płaskiej powierzchni próbki w obszarze o średnicy ok. 10 mm. Stosowano cztery częstotliwości fal: 15, 10, 5 i 2,5 MHz. Przy tych częstotliwościach długości wzbudzanych w stali fal powierzchniowych wynoszą odpowiednio: 0,2; 0,3; 0,6 i 1,2 mm. Oznacza to, że w każdym z tych przypadków zbierano informacje z warstwy materiału o grubości kolejno: 0,2; 0,3; 0,6 i 1,2 mm licząc od powierzchni próbki. W celu wywołania naprężeń płaska powierzchnia próbek była szlifowana zgrubnie bez chłodzenia, przy jednokrotnym przejściu ściernicy  $V_s = 30$  m/s i głębokości skrawania  $g_t = 100 \mu\text{m}$ . Wyniki pomiarów ultradźwiękowych podano na rysunku 9, który przedstawia zależność względnych zmian prędkości od długości wzbudzanych fal powierzchniowych dla powierzchni po szlifowaniu zgrubnym oraz po kolejnych szlifowaniach dokładnych  $g = 5 \mu\text{m}$  usuwających warstwy naprężone do głębokości 20, 40 i 60  $\mu\text{m}$ . Na prawej osi pionowej naniesiono wartości naprężenia odpowiadające danym zmianom prędkości fal powierzchniowych. Charakter zależności wskazuje, że naprężenia powstające w wyniku szlifowania zgrubnego równoważą się w wierzchniej warstwie grubości bliskiej długości fali powierzchniowej o częstotliwości 2,5 MHz ( $\lambda = 1,2$  mm), przy czym blisko powierzchni występują naprężenia rozciągające o wartościach maksymalnych wynoszących odpowiednio 1200 i 500 MPa. Naprężenia rozciągające maleją do wartości bliskich zeru, przechodząc na głębokości ok. 60  $\mu\text{m}$  w naprężenia ściskające. Przedstawiają to zależności podane na rysunku 9 uzyskane na próbkach ze stali 75G, szlifowanych zgrubnie przez jednorazowe



Rys. 9. Względne zmiany prędkości fal powierzchniowych w funkcji długości fali dla próbki ze stali w stanie wyjściowym przed szlifowaniem (prosta u góry rysunku), po szlifowaniu zgrubnym  $g_t = 100 \mu\text{m}$  (krzywa najniższej położona) i po usunięciu warstw naprężonych grubości kolejno 20, 40 i 60  $\mu\text{m}$

usuwanie warstw grubości 100  $\mu\text{m}$  i 50  $\mu\text{m}$  przy najwyższej stosowanej częstotliwości równej 15 MHz ( $\lambda = 0,2$  mm). Dane dla stanu wyjściowego układają się wzdłuż linii równoległej do osi naprężeń, co oznacza brak gradientu właściwości sprężystych w kierunku grubości. Po szlifowaniu prędkości fal ultradźwiękowych zależy silnie od długości fali, czyli od grubości warstwy, w której naprężenie jest mierzone. Podana głębokość równoważenia się naprężeń rozciągających i ściskających jest wielkością orientacyjną możliwą do sprecyzowania po rozwiązaniu tzw. zagadnienia odwrotnego [21], dzięki któremu można odtworzyć profil właściwości sprężystych warstwy, opierając się na zmierzonych zmianach prędkości fal powierzchniowych w funkcji częstotliwości. Precyzja odtworzenia profilu naprężenia zależy od stosowanego zakresu zmian częstotliwości. W przytoczonych wynikach doświadczalnych dolna granica częstotliwości (2,5 MHz) wydaje się wystarczająca, natomiast górna granica (15 MHz), ograniczona przez stosowany układ nadawczo-odbiorczy, powinna być o rząd wyższa.

## 12. Zakończenie

W pracy przedstawiono główne zasady ultradźwiękowych pomiarów naprężeń w materiałach technicznych, opisano przykładowe układy pomiarowe i kilka zastosowań tej techniki tensometrycznej. Ostatnio obserwuje się szybki rozwój tensometrii ultradźwiękowej, i to zarówno w zakresie aparatury i metod badania, jak i pola zastosowań. W wielu ośrodkach są prowadzone prace podstawowe i wdrożeniowe z tego zakresu. Należy tu wymienić próby zastosowania ultradźwiękowej techniki do odwzorowania pól naprężeń w wewnętrznych obszarach elementów, np. rozkładu naprężeń w otoczeniu zakończenia szczeliny, do badania rozkładu naprężeń wzdłuż toru wiązki fal ultradźwiękowych czy ultradźwiękową tomografię komputerową. Przedstawione przykłady zastosowań zaczerpnięto z prac wykonanych w Pracowni Ultradźwiękowych Badań Materiałów Zakładu Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Warszawie.

## Literatura

1. R. W. BENSON, V. G. RAELSON, *Acoustoelasticity*, Product Engineering, No 29, 1959.
2. D. A. HUGNES, G. S. KELLY, *Second-Order Elastic Deformation of Solids*, Phys. Rev., 1959, No 92, 1145.
3. R. E. GREEN, *Treatise on Materials Science and Technology*, V. 3 — Ultrasonic Investigation on Mechanical Properties, Academic Press, 1973.
4. В. М. БОБРЕНКО, А. Н. КУДЕНКО, *Акустическая тензометрия I. Физические основы*, Дефектоскопия, 1980, 2 и *Акустическая тензометрия II. Методы и устройства*, Дефектоскопия, 1980, 12.
5. J. SZYMAŃSKI, W. LENARD, *Zjawisko elastoakustyczne w żeliwie szarym*. Materiały X Krajowej Konferencji Badań Nieniszczących, Jadwisin 1980.
6. M. ADAMSKI, J. DEPUTAT, *Strukturalna czułość współczynnika elastoakustycznego*, Materiały XVIII Otwartego Seminarium z Akustyki OSA-81, Gliwice 1981.
7. G. BRADFIELD, *Strength Elasticity and Ultrasonics*, Ultrasonics, 1972, No 10.
8. J. DEPUTAT, *Akustyczne pomiary naprężeń*, PAK 1976 nr 3.
9. R. TRUPELL, C. H. ELBAUM, B. CHICK, *Ultrasonic methods in solid state physics*, Academic Press, London 1969.

10. J. WEHR, *Pomiary prędkości i tłumienia fal ultradźwiękowych*, PWN, Warszawa 1972.
11. М. А. КРИСТАЛ, Б. Е. ПЕСТОВ, В. В. ДАВИДОВ, В. ТРОИЦКИ, *Электронная аппаратура ультразвуковых установок для исследования свойств твердого тела*, Изд. Энергия, Москва 1974.
12. J. DEPUTAT, *Podstawy i zastosowania tensometrii ultradźwiękowej*, Dozór Techniczny, 3, 1983, s. 95 - 100 i 4, 1983, s. 142 - 149.
13. J. DEPUTAT, A. BROKOWSKI, *Refraktometr ultradźwiękowy*, Patent PRL 107747.
14. J. DEPUTAT, A. BROKOWSKI, *Ultrasonic Measurements of residual stresses in rails*, Proc. 11th World Conference on Nondestructive Testing, Las Vegas, 3 - 8.11.1985, str. 592.
15. A. MIERNIK, K. FLAK, *Pomiary naprężeń własnych w szynach kolejowych za pomocą przyrządu UMN-10*, Materiały 15 Krajowej Konferencji Badań Nieniszczących, Rynia, 4 - 6.11.1986, Wyd. IPPT PAN, str. 371.
16. J. DEPUTAT, *Ultradźwiękowe pomiary naprężeń w śrubach*, Materiały VII Krajowej Konferencji Badań Nieniszczących, Referat K-12, Uniejów 1977.
17. J. DEPUTAT, *Ultrasonic technique for measuring stress in screws*, Proc. 9th WCNDT, Report 4 EDD-2, Melbourne 1979, oraz J. DEPUTAT, *Zasady ultradźwiękowych pomiarów naprężeń własnych w materiałach technicznych*, Materiały XI Krajowej Konferencji Badań Nieniszczących, Opole 1982, Wyd. IPPT PAN, WSI — Opole SIMP.
18. L. ADLER, K. V. COOK, B. R. DEWOY, R. T. KING, *The Relationship between Ultrasonic Rayleigh Waves and Surface Residual Stress*, Materials Evaluation, 1977 No 35.
19. J. DEPUTAT, *Ultradźwiękowe pomiary naprężeń spawalniczych*, Przegląd Spawalnictwa, 36, 1984 nr 7 str. 10 - 17 i 36, 1984 nr 8 str. 15 - 17.
20. A. BROKOWSKI, J. DEPUTAT, *Nieniszczące pomiary naprężeń w technicznej warstwie wierzchniej przedmiotów szlifowanych*, Materiały Szkoły Trybologicznej, Wyd. ITWL, Rynia 1982.
21. I. M. RICHARDSON, B. R. TITTMANN, *Estimation of surface layer structure from Rayleigh wave dispersion II, Sparse data case — analytical theory*, J. Appl. Phys. 1977 No 48.

#### Р е з ю м е

#### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АКУСТО-УПРУГОГО ЭФФЕКТА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Описано основные свойства акустоупругого явления (влияние напряжения на скорость ультразвуковых волн) в конструкционных сталях и возможности использования этого эффекта для измерений остаточных напряжений в металлургических материалах, деталях машин, в элементах конструкций. Подробно представлено ультразвуковой метод измерения остаточных напряжений в железнодорожных рельсах, ультразвуковую аппаратуру для измерения этих напряжений и сравнение результатов полученных ультразвуковой и разрушающими методами.

#### S u m m a r y

#### USE OF ELASTO-ACOUSTIC EFFECT IN STRESS-MEASUREMENTS

The influence of stress on ultrasonic velocity in steel is investigated and the methods based on this effect are used for residual stress measurements in steel mill products, machine parts, and construction members. We present the detailed description of ultrasonic measurements of residual stress in railway rails, the measuring equipment and comparison of the destructive test results with ultrasonic data.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 czerwca 1987 roku.*

## WYZNACZANIE PRZEMIESZCZEŃ I ODKSZTAŁCEŃ NA PODSTAWIE KONTRASTU PRAŻKÓW NA OBRAZACH INTERFEROMETRII HOLOGRAFICZNEJ\*

MAREK J. MATCZAK

*Uniwersytet Szczeciński*

### 1. Wstęp

Interferometria holograficzna [1] jest dziedziną stosunkowo młodą, powstałą w latach sześćdziesiątych prawie równocześnie z uruchomieniem pierwszych laserów, które są niezbędnymi dla tej techniki pomiarowej źródłami światła stanowiącego tu mechanicznie bezkontaktowy nośnik informacji. Podstawową własnością światła laserowego, wykorzystywaną w interferometrii holograficznej, jest spójność promieniowania umożliwiająca realizację zjawisk interferencyjnych, na których oparty jest zapis informacji i formowanie obrazów interferencyjnych. Obecnie znanych jest wiele technik uzyskiwania interferogramów holograficznych. Wybór odpowiedniej techniki w konkretnym przypadku podyktowany jest własnościami badanego obiektu i warunkami pomiaru. Technika uzyskiwania hologramów z zapisanym obrazem interferencyjnym jest jednak tylko pierwszym etapem na drodze prowadzącej do wyznaczenia poszukiwanych wielkości pomiarowych. Drugi etap polega na uformowaniu obrazu interferencyjnego za pomocą układu optycznego (oko ludzkie, kamera fotograficzna lub telewizyjna, inny wyspecjalizowany układ optyczny) odwzorowującego rozkład pola świetlnego odtwarzanego z hologramu. Ogólny opis powstałego obrazu interferencyjnego zależy w znacznym stopniu od parametrów tego układu. Trzecim i ostatnim etapem jest tu, na ogół numeryczne, przetwarzanie rozkładu natężenia światła w obrazie interferencyjnym na poszukiwane wielkości pomiarowe.

Realizację dwu ostatnich etapów można przeprowadzić na wiele różnych sposobów, które nazwiemy tu metodami pomiarowo-interpretacyjnymi. Z punktu widzenia aktualnej wiedzy można wyróżnić trzy grupy takich metod.

Historycznie pierwsza grupa metod oparta jest na pomiarze przestrzennej lokalizacji prążków interferencyjnych [2÷5]; jej syntetyczne omówienie zawarte jest w monografii [6]. Są to niestety metody wyłącznie punktowe i nie poddają się automatyzacji procesu pomiarowego. Jak dotąd, nie znalazły one praktycznego zastosowania w pomiarach ilościowych.

Druga grupa metod pomiarowo-interpretacyjnych bazuje na rozkładzie prążków interferencyjnych na powierzchni badanego obiektu. W grupie tej należy wyróżnić trzy

---

\* Praca wygłoszona na XII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa - Jadwisin 1986.



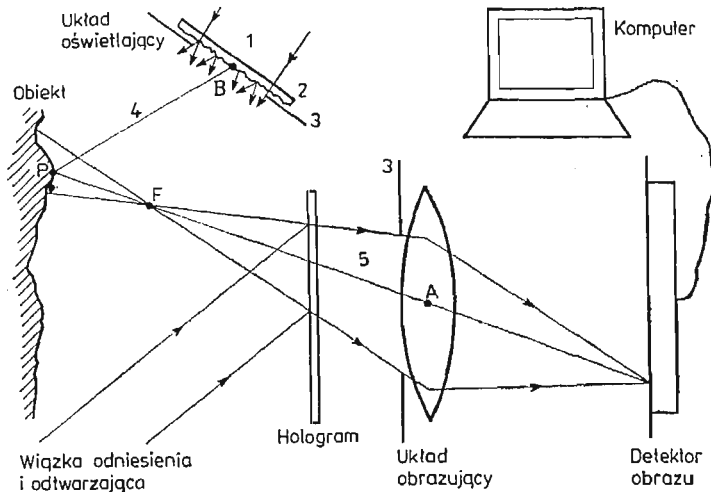
metody, które zdały już egzamin praktyczny: kinetyczna metoda zliczania prążków [7] — wyłącznie punktowa; metoda absolutnego rzędu prążka, zwana również metodą prążka zerowego rzędu [8] — dominująca obecnie w praktycznych zastosowaniach interferometrii holograficznej jako poddająca się automatyzacji metoda połowa; oraz statyczna metoda różnicowa [9] — wymagająca minimum aż czterech różnych hologramów, lecz umożliwiającą ilościową interpretację w przypadkach, w których wyznaczenie absolutnej wartości rzędu prążków interferencyjnych jest niemożliwe. Metody należące do tej grupy pozwalają na bezpośrednie wyznaczenie co najwyżej pola przemieszczeń, z którego następnie można uzyskać pole odkształceń za pomocą różniczkowania numerycznego, prowadzącego jednak zazwyczaj do bardzo niskiej dokładności wyników obliczeń przez znaczne spotęgowanie bezpośrednich błędów pomiarowych.

Trzecia grupa metod oparta jest na pomiarze kontrastu prążków interferencyjnych. W pierwszym etapie tworzenia tej grupy metod ograniczono się do analizy przypadku, w którym optyczny układ obrazujący jest ściśle zogniskowany na badanym punkcie powierzchni obiektu, a apertury zarówno w układzie dyfuzyjnie oświetlającym obiekt jak i obrazującym są kołowe [10]. Teoretyczna analiza tego przypadku umożliwiła ściśle wyjaśnienie oraz doświadczalną weryfikację wpływu dyfuzyjnego oświetlenia obiektu na rozkład natężenia światła w obrazie interferencyjnym [11] oraz pierwsze zastosowania występujących tu efektów fizycznych [12, 13]. Następnie uogólniono analizę problemu na przypadek dowolnych apertur [14] oraz doświadczalnie zweryfikowano pewne szczególne przypadki [15]. Obraz interferencyjny, utworzony przez układ optyczny ściśle zogniskowany na powierzchni obiektu, charakteryzuje się rozkładem kontrastu prążków jednoznacznie zdeterminowanym przez rozkład określonych składowych wektora przemieszczenia. Analiza obrazów interferencyjnych uzyskanych za pomocą rozogniskowanego układu optycznego była następnym etapem rozwoju metod kontrastu prążków [16]. W tym przypadku rozkład kontrastu prążków w obrazie interferencyjnym zależy również od rozkładu elementów tensora odkształcenia i tensora obrotu, opisujących deformację badanego obiektu. Ta informacja zawarta w obrazie interferencyjnym pozwoliła na opracowanie połowych metod wyznaczania przemieszczeń [17] i odkształceń [18] na podstawie kontrastu prążków. Analiza zagadnienia modyfikacji oświetlenia obiektu między dwiema ekspozycjami holograficznymi ujawniła również możliwość zastosowania metod kontrastu prążków do wyznaczania kształtu powierzchni badanego obiektu [19], co ze względu na techniczną prostotę realizacji pomiaru wydaje się być konkurencyjne w stosunku do skomplikowanych technicznie immersyjnych i bichromatycznych holograficznych metod warstwiczowania obiektów.

## 2. Układ pomiarowy

Schemat układu pomiarowego do holograficznego wyznaczenia przemieszczeń i odkształceń metodą kontrastu prążków interferencyjnych przedstawiony jest na rys. 1. Badany obiekt oświetlony jest w ogólności rozproszonym światłem spójnym za pomocą układu oświetlającego, którego podstawowym elementem jest dyfuzor 2, składający się z jednej lub kilku matówek. Wiązka światła laserowego 1 rozprasza się na dyfuzorze,

a diafragma 3 organiczną czynną powierzchnię układu oświetlającego. W szczególnych przypadkach, o których jest mowa dalej, można zastosować układ oświetlający, który formuje falę sferyczną lub płaską. Rozproszone od obiektu światło pada na płytę holo-



Rys. 1. Schemat holograficzno-optycznego układu pomiarowego (objaśnienia w tekście)

graficzną, gdzie interferuje ze spójną wiązką odniesienia tworząc holograficzny zapis fali propagującej się od obiektu (tzw. wiązki przedmiotowej). W przypadku badania dynamicznych obciążeń obiektu (w tym także i drgań) należy zastosować dwuimpulsową metodę rejestracji holograficznej z ustaloną wcześniej odległością czasową między impulsami laserowymi. Wówczas na hologramie zostaną oddzielnie zarejestrowane dwie wiązki przedmiotowe, niosące informację odpowiednio o dwu różnych stanach badanego obiektu. Gdy badania dotyczą obciążeń statycznych, to można również zastosować metodę czasu rzeczywistego, wymagającą jedynie pojedynczej ekspozycji holograficznej dla wybranego stanu obciążenia obiektu.

Po wywołaniu i utrwaleniu hologramu należy go oświetlić wiązką odtwarzającą o geometrii identycznej z wiązką odniesienia użytą w procesie zapisu. W przypadku hologramu dwuekspozycyjnego zrekonstruowane wówczas zostaną jednocześnie dwie wiązki przedmiotowe, zapisane uprzednio w różnych chwilach czasu, i po przejściu przez obrazujący układ optyczny utworzą w jego płaszczyźnie obrazowej interferencyjny obraz badanego obiektu. Metoda czasu rzeczywistego wymaga umieszczenia wykonanego hologramu jednoekspozycyjnego dokładnie w miejsce, w którym się znajdował w procesie zapisu. Wtedy zrekonstruowana wiązka przedmiotowa interferuje w płaszczyźnie obrazowej z wiązką propagującą się aktualnie od obiektu, a zmiana jego stanu obciążenia w stosunku do obciążenia występującego podczas rejestracji holograficznej spowoduje powstanie obrazu interferencyjnego.

W ogólności obrazujący układ optyczny nie musi być zogniskowany na powierzchni badanego obiektu lub miejsca lokalizacji jej obrazu pozornego, widzianego przez hologram. Warunek dokładnego zogniskowania jest konieczny tylko dla niektórych, omówionych dalej, metod pomiarowych. Istotnym elementem układu obrazującego jest diafragma

3, której kształt i rozmiary mają zasadnicze znaczenie dla ilościowej interpretacji obrazów interferencyjnych oraz określają czułość metody.

W płaszczyźnie obrazowej optycznego układu obrazującego umieszczony jest detektor obrazu, którym może być zarówno siatkówka oka ludzkiego, emulsja fotograficzna, lampa analizująca kamery telewizyjnej jak i macierz detektorów optoelektronicznych. Dla automatycznej interpretacji ilościowej najbardziej odpowiednia jest jedna z dwu ostatnich możliwości, gdyż zastosowanie kliszy fotograficznej jako pośredniego medium rejestracji obrazu interferencyjnego może prowadzić do znacznych błędów rozkładu kontrastu wczytywanego do komputera w procesie densytometrycznym ze względu na niekontrolowaną na ogół nieliniowość charakterystyki fotograficznego materiału światłoczułego.

Ostatnim elementem układu pomiarowo-interpretacyjnego jest komputer, w którym dokonywana jest obróbka obrazu interferencyjnego oraz jego interpretacja ilościowa na bazie algorytmów numerycznych opracowanych na podstawie równań interferometrii holograficznej. Wybór odpowiedniego komputera powinien wynikać z analizy potrzeb użytkownika w zakresie wielkości powierzchni badanego obiektu, pożądanej zdolności rozdzielczej obrazów interferencyjnych, rodzaju poszukiwanych wielkości oraz wymaganej szybkości obliczeń. Minimalną dla tych potrzeb konfigurację hardware'ową stanowi mikrokomputer klasy IBM PC.

### 3. Ogólne równania interferometrii holograficznej

Rozkład natężenia światła w obrazie interferencyjnym, powstającym w płaszczyźnie obrazowej optycznego układu obrazującego (rys. 1 — płaszczyzna detektora obrazu), ma następującą ogólną postać [14]:

$$I = I_0 [1 + P_V(x)P_I(y) \cos D(f)], \quad (1)$$

gdzie  $I_0$  jest rozkładem natężenia światła w nieinterferencyjnym obrazie obiektu;  $P_V$  i  $P_I$  są funkcjami aperturowymi będącymi transformacjami fourierowskimi funkcji źrenic  $p_V$  i  $p_I$  opisujących kształt diafragm odpowiednio w obrazującym układzie optycznym i w układzie oświetlającym:

$$P(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(r) \exp(-ikz \cdot r) dr, \quad (2)$$

gdzie  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  jest długością fali użytego światła laserowego, a  $r$  — wektorem wodzącym w płaszczyźnie diafragmy.  $D = 2\pi f$  jest funkcją różnicy fazowej interferujących wiązek przedmiotowych, a  $f$  — rzędem prążka interferencyjnego.

Argumenty funkcji występujących w wyrażeniu (1) związane są z wielkościami opisującymi deformację obiektu w następujący sposób [16, 17]:

$$x = \frac{1}{L} N_A \left\{ N_V u + (L_V - L) S_V \left[ \frac{1}{L_I} N_I u + (\nabla \times u) g \right] \right\} \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{L_I} N_B N_I u, \quad (4)$$

$$f = \frac{1}{\lambda} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}, \quad (5)$$

gdzie  $\mathbf{u}$  jest wektorem przemieszczenia danego punktu powierzchni obiektu między dwoma porównywanymi interferencyjnie stanami obciążenia obiektu,  $\nabla \times \mathbf{u}$  — iloczynem tensorowym wektorowego operatora różniczkowego „nabla” i wektora przemieszczenia, zwanym tensorem gradientu przemieszczenia,  $\mathbf{g}$  — wektorem czułości układu holograficznego, będącym sumą wektorów jednostkowych wyznaczających, odpowiednio, kierunki oświetlenia i obserwacji (4 i 5 na rys. 1),  $\mathbf{N}$  — operatorem projekcji normalnej: na płaszczyznę diafragmy w układzie obrazującym ( $\mathbf{N}_A$ ) i oświetlającym ( $\mathbf{N}_B$ ), oraz na płaszczyznę prostopadłą do kierunku obserwacji ( $\mathbf{N}_V$ ) i oświetlenia ( $\mathbf{N}_I$ ),  $S_V$  — operatorem projekcji skośnej wzdłuż normalnej do powierzchni obiektu na płaszczyznę prostopadłą do kierunku obserwacji.  $L$  ( $= \overline{AF}$  na rys. 1) oznacza odległość ogniskowania układu obrazującego,  $L_V$  ( $= \overline{AP}$ ) i  $L_I$  ( $= \overline{BP}$ ) — odległości danego punktu  $P$  na powierzchni obiektu, odpowiednio, od centrów  $A$  i  $B$  układu obrazującego i oświetlającego.

Wzory (3÷5) stanowią zbiór ogólnych równań interferometrii holograficznej. Zawierają one informację o trzech różnych składowych wektora przemieszczenia, przy czym pierwsze z tych równań opisuje ponadto sześć niezależnych składowych tensora gradientu przemieszczenia, z których można bezpośrednio zbudować dla małych deformacji tensory odkształceń  $E_S$  i obrotów  $R_S$  powierzchni badanego obiektu [18]:

$$E_S = \frac{1}{2} N_S [\nabla \times \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{u})^T] N_S, \quad (6)$$

$$R_S = \frac{1}{2} N_S [\nabla \times \mathbf{u} - (\nabla \times \mathbf{u})^T] N_S + \hat{\varepsilon} \{ [N_S (\nabla \times \mathbf{u}) \mathbf{n}_S] \hat{\varepsilon} \mathbf{n}_S \}, \quad (7)$$

gdzie  $T$  oznacza transpozycję macierzy,  $N_S$  jest operatorem projekcji normalnej na płaszczyznę styczną do powierzchni obiektu,  $\mathbf{n}_S$  — wektorem jednostkowym normalnym do tej powierzchni, a  $\hat{\varepsilon}$  — trójwymiarowym operatorem permutacji. Pierwszy składnik we wzorze (7) opisuje obrót elementu objętościowego wokół normalnej do jego powierzchni, natomiast drugi — obrót powierzchni wywołany zarówno inklinacją elementu objętościowego jak i jego odkształceniem ścinającym.

Wielkości występujące po lewej stronie równań (3÷5) należy wyznaczyć na podstawie analizy obrazów interferencyjnych, opisanych ogólnie wzorem (1). Funkcja  $\cos D$  występująca w tym wzorze opisuje rozkład prążków interferencyjnych na powierzchni badanego obiektu, natomiast występujący przed nią czynnik  $P_V P_I$  związany jest z ich kontrastem  $V$  (inaczej: widzialnością), zdefiniowanym następująco:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (8)$$

gdzie  $I_{max}$  i  $I_{min}$  oznaczają maksymalną i minimalną wartość natężenia światła w sąsiedztwie danego punktu powierzchni obiektu na obrazie interferencyjnym, co odpowiada sąsiadującym ze sobą prążkom: jasnemu i ciemnemu. Z definicji (8) zastosowanej do wzoru (1) wynika, że:

$$V = |P_V P_I|. \quad (9)$$

Uwzględniając fakt, że funkcje  $P_V$  i  $P_I$  mogą przyjmować zarówno dodatnie jak i ujemne wartości, można zatem przekształcić wzór (1) do następującej postaci:

$$I = I_0 \left\{ 1 + V \cos \left[ D + \frac{\pi}{2} (1 - \operatorname{sgn} P_V P_I) \right] \right\}. \quad (10)$$

Jak wynika z powyższej analizy, wektorowe argumenty  $x$  i  $y$  funkcji aperturowych można wyznaczyć na podstawie pomiaru kontrastu prążków w obrazach interferencyjnych utworzonych przy zastosowaniu diafragm o odpowiednim kształcie i orientacji. Na przykład, gdy diafragma ma kształt kołowy, to:

$$P(z) = 2 \frac{J_1(kR|z|)}{kR|z|}, \quad (11)$$

gdzie  $J_1$  oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju i pierwszego rzędu, a  $R$  jest promieniem diafragmy. W przypadku diafragmy szczelinowej:

$$P(z) = \frac{\sin \left( kl \cdot \frac{z}{2} \right)}{kl \cdot \frac{z}{2}}, \quad (12)$$

gdzie wektor  $l$  określa długość i orientację szczeliny.

#### 4. Wyznaczanie pola przemieszczeń

Jedną z grup metod wyznaczania pola przemieszczeń na podstawie pomiaru kontrastu prążków w obrazie interferencyjnym bazuje na następującej tożsamości algebraicznej [17]:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_V} \mathbf{n}_V + V_G N_V \mathbf{u}, \quad (13)$$

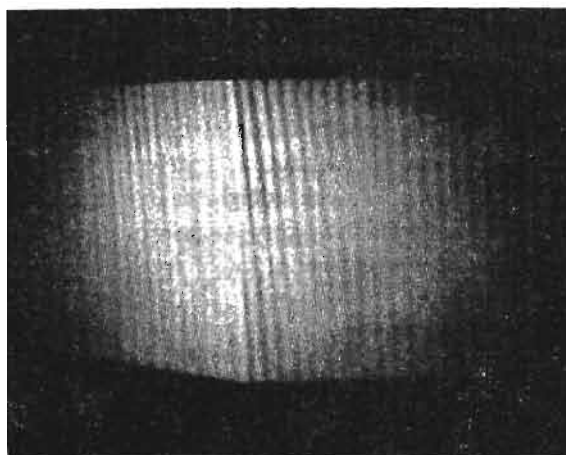
gdzie  $\mathbf{n}_V$  jest wektorem jednostkowym wyznaczającym kierunek obserwacji obiektu, a  $V_G$  — operatorem projekcji skośnej wzdłuż kierunku obserwacji na płaszczyznę prostopadłą do wektora czułości  $\mathbf{g}$ .

Wartość pierwszego składnika we wzorze (13) można wyznaczyć znając rozkład wartości rzędu prążka  $f$  na powierzchni badanego obiektu (patrz wzór (5)). Pomocniczą metodą doświadczalną wyznaczania tego rozkładu polega na identyfikacji prążka zerowego rzędu, który zlokalizowany jest na ogół w miejscach zerowego przemieszczenia. Gdy zarówno układ oświetlający jak i obrazujący wyposażony jest w diafragmę kołową, przy czym ten ostatni zogniskowany jest na powierzchni obiektu ( $L = L_V$ ), to w miejscach tych kontrast przyjmuje wartość maksymalną  $V = 1$ . Rząd następných prążków ma wartość bezwzględną kolejno rosnącą o 1 (patrz rys. 2).

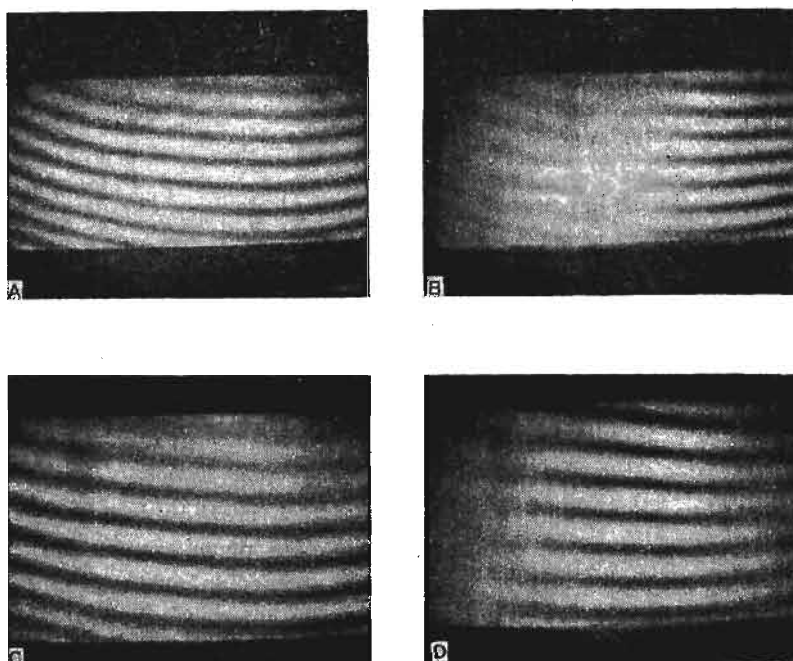
Wyznaczenie wartości drugiego składnika we wzorze (13) sprowadza się do wyznaczenia wektora  $N_V \mathbf{u}$ , będącego rzutem wektora przemieszczenia na płaszczyznę prostopadłą do kierunku obserwacji. Istnieje kilka technik doświadczalnego wyznaczania tej wielkości. W przypadku, gdy powierzchnia obiektu jest płaska lub gdy decydujemy się na dokony-

wanie pomiarów oddzielnie dla wybranych punktów powierzchni, można łatwo zrealizować warunek  $L = L_V$ , redukując równanie (3) do postaci:

$$x = \frac{1}{L_V} N_A N_V u \quad \text{lub} \quad N_V u = L_V A_V x, \quad (14)$$



Rys. 2. Obraz interferencyjny obiektu obróconego wokół osi przecinającej górną część jego powierzchni, uzyskany przy zastosowaniu diafragm kołowych



Rys. 3. Obrazy interferencyjne obiektu obróconego wokół normalnej do jego powierzchni, uzyskane dla odległości ogniskowania  $L_1$  (a, b) oraz  $L_2 < L_1$  (c, d) przy zastosowaniu diafragmy szczelinowej o orientacji poziomej (a, c) i pionowej (b, d)

gdzie  $A_V$  jest operatorem projekcji skośnej wzdłuż normalnej do płaszczyzny diafragmy na płaszczyznę prostopadłą do kierunku obserwacji. Wzajemnie prostopadłe składowe wektora  $x$  w płaszczyźnie diafragmy zawierającej ten wektor można wyznaczyć na podstawie pomiaru rozkładu kontrastu w dwu obrazach interferencyjnych otrzymanych z tego samego hologramu przy użyciu diafragmy szczelinowej w dwu wzajemnie prostopadłych jej orientacjach (patrz wzór (12)), gdy obiekt był oświetlony falą płaską lub sferyczną, tzn. gdy  $P_I \equiv 1$  i  $V = |P_V|$ . W przypadku, gdy powierzchnia nie jest płaska, a więc gdy nie można zogniskować układu obrazującego równocześnie na wszystkie jej punkty, to wektor  $N_V u$  można wyznaczyć na drodze automatycznej analizy połowej na podstawie pomiaru rozkładu kontrastu w czterech obrazach interferencyjnych (rys. 3) otrzymanych z tego samego hologramu dla dwu różnych odległości ogniskowania,  $L_1$  i  $L_2$ , i dla dwu wzajemnie prostopadłych orientacji diafragmy szczelinowej. Z każdej pary obrazów, oddzielnie dla  $L_1$  i  $L_2$ , wyznacza się wektory  $x_1$  i  $x_2$  w sposób omówiony dla poprzedniego przypadku. Wówczas [17]:

$$N_V u = \frac{1}{L_1 - L_2} A_V [(L_V - L_2)L_1 x_1 - (L_V - L_1)L_2 x_2]. \quad (15)$$

Wektorowe składniki we wzorze (13) mogą być wyznaczone jedynie z dokładnością do ich kierunku (lecz już nie zwrotu). Wyboru właściwej kombinacji znakowej można dokonać na podstawie pomiaru kontrastu w obrazie interferencyjnym, uzyskanym za pomocą układu obrazującego o bardzo małej kołowej aperturze kątowej ( $R/L \ll 1$ ) przy dyfuzyjnym oświetleniu obiektu, tzn. w warunkach, gdy  $P_V \equiv 1$  i  $V = |P_I|$ . Wówczas właściwy wektor  $u$ , obliczony na podstawie równania (13), musi spełniać następujące równanie (patrz wzory (11) i (4)):

$$\left| 2 \frac{J_1(kR |N_B N_I u|/L_I)}{kR |N_B N_I u|/L_I} \right| = V, \quad (16)$$

gdzie, w tym przypadku,  $R$  jest promieniem diafragmy kołowej w układzie oświetlającym, a  $V$  — wartością kontrastu w tak uzyskanym obrazie. Zwrot wektora  $u$  jest nadal nieokreślony, co generalnie wynika z faktu, że obraz interferencyjny „nie pamięta”, który z dwu porównywanych stanów obiektu był stanem początkowym.

W przypadku, gdy rozkład rzędu prążka nie może być z góry określony, nawet przy zastosowaniu metody identyfikacji prążka zerowego rzędu, wówczas można ten rozkład wyznaczyć rozwiązując równanie kwadratowe względem  $f$ , powstałe z podniesienia do kwadratu argumentu funkcji Bessela, obliczonego z równania (16), oraz przy zastosowaniu wzorów (13) i (5). Wybór właściwego pierwiastka tego równania wynika z analizy położenia badanego punktu powierzchni względem sąsiednich prążków interferencyjnych.

Omówiona powyżej grupa metod wyznaczania pola przemieszczeń bazuje tylko na jednym interferogramie holograficznym, co jest jej szczególną zaletą. Inne grupy metod oparte na pomiarze kontrastu wymagają większej liczby interferogramów holograficznych [14], co jednak pozwala całkowicie wyeliminować z analizy rozkład rzędu prążka interferencyjnego.

### 5. Wyznaczanie pola odkształceń

W myśl wzorów (6) i (7), wyznaczenie pola odkształceń powierzchni, jak i tensora obrotu jej elementów, sprowadza się do wyznaczenia tensora lewostronnej projekcji gradientu przemieszczenia,  $N_S(\nabla \times u)$ , który explicite występuje we wzorze (3) określającym argument funkcji aperturowej układu obrazującego, decydującej o rozkładzie kontrastu w obrazie interferencyjnym. W przypadku oświetlenia obiektu falą płaską ( $L_I \rightarrow \infty$ ) argument ten redukuje się do postaci, która po prostym przekształceniu prowadzi do następującego równania [18]:

$$N_S(\nabla \times u)g = \frac{1}{L_V - L} N_S(L A_V x - N_V u), \quad (17)$$

przy czym  $P_I \equiv 1$  i  $V = |P_V(x)|$ . Wyznaczenie poszukiwanej wielkości wymaga skonstruowania równania tensorowego z trzech równań typu (17). Rozwiązanie takiego równania przyjmuje wówczas postać:

$$N_S(\nabla \times u) = W G^{-1}, \quad (18)$$

gdzie:

$$W = [w_1, w_2, w_3], \quad G = [g_1, g_2, g_3], \quad (19)$$

przy czym  $g_i (i = 1, 2, 3)$  są różnymi wektorami czułości układu holograficznego, które nie powinny leżeć w jednej płaszczyźnie, aby móc zbudować  $G^{-1}$ , natomiast wektory  $w_i$  w najprostszym pomiarowo układzie są zdefiniowane następująco:

$$w_i = \frac{1}{L_V - L} N_S A_V \left\{ L x_i - \frac{1}{L - L'} [(L_V - L') L x_i - (L_V - L) L' x'_i] \right\} \quad (20)$$

gdzie  $x_i$  wyznacza się w sposób analogiczny do opisanego w poprzednim paragrafie na podstawie obrazów interferencyjnych, uzyskanych dla różnych kierunków oświetlenia obiektu, determinujących różne wektory  $g_i$ , przy tym samym kierunku obserwacji i tej samej odległości ogniskowania  $L$ . Wektor  $x'_i$  wyznacza się z dwu obrazów dla  $g_1$  i dla odległości ogniskowania  $L' \neq L$ . Tak więc tensor odkształceń powierzchni określony jest ostatecznie następującym wzorem [18]:

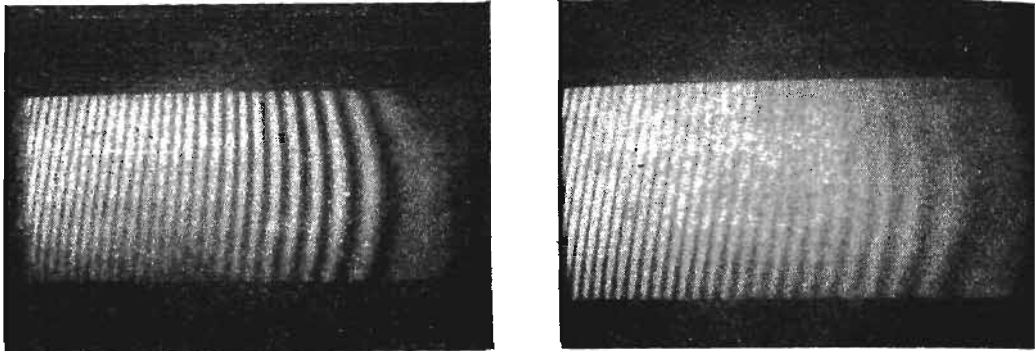
$$E_S = \frac{1}{2} [W G^{-1} N_S + (W G^{-1} N_S)^T]. \quad (21)$$

Osiem obrazów interferencyjnych, niezbędnych do wyznaczenia tym sposobem pola odkształceń uzyskiwanych jest z trzech różnych interferogramów dla różnych wektorów czułości, przy czym interferogramy te powinny być równocześnie zarejestrowane na tym samym hologramie za pomocą trzech różnych par wiązek odniesienia i oświetlających obiekt, w taki sposób, że pary te są wzajemnie niespójne, a spójność występuje jedynie między wiązkami należącymi do tej samej pary, co można osiągnąć przez wytworzenie takiej różnicy dróg optycznych między tymi parami, która jest większa od drogi spójności lasera [20], lub przez zastosowanie lasera trójczęstotliwościowego [21].

Zależność kontrastu prążków od wartości odkształceń pozwala również na bezpośrednią, jakościową ocenę ich rozkładu na powierzchni badanego obiektu. W miejscach,



w których zmiana kontrastu jest największa podczas przeogniskowywania układu obrazującego występują największe odkształcenia, i odwrotnie. Prawdopodobnie tę ilustruje rys. 4.



Rys. 4. Obrazy interferencyjne ugięcia płyty sztywno zamocowanej wzdłuż jej prawej krawędzi; po lewej — dla układu obrazującego zogniskowanego na powierzchni płyty, po prawej — z przeogniskowaniem

## 6. Uwagi końcowe

Podstawowe równania interferometrii holograficznej zostały wyprowadzone przy założeniu, że obiekt rozprasza światło stochastycznie, oraz że proces zapisu holograficznego odbywa się w liniowej części charakterystyki materiału światłoczułego. Pominięto również szum optyczny, generowany przez rozproszenie światła na ziarnistej strukturze emulsji hologramu w procesie rekonstrukcji holograficznej obrazu. W praktyce założenia te w mniejszym lub większym stopniu nie są spełnione, co powoduje, że w obrazie interferencyjnym pojawia się tło świetlne obniżające kontrast tego obrazu. Uwzględnienie tego efektu w procesie interpretacyjnym nie jest jednak trudne, lecz wymaga zwiększenia liczby analizowanych obrazów.

Metody oparte na pomiarze kontrastu prążków umożliwiają wyznaczenie pól przemieszczeń i odkształceń bez znajomości rozkładu rzędu prążka interferencyjnego oraz bez konieczności różniczkowania pola przemieszczeń w celu wyznaczenia odkształceń.

Istotną zaletą tych metod jest możliwość sterowania w szerokim zakresie czułością pomiarów przez zmianę rozmiarów diafragm stosowanych w układzie holograficzno-pomiarowym.

Niniejsza praca została wykonana w ramach Centralnego Programu Badań Podstawowych Nr 02.20.

## Literatura

1. *Holografia optyczna*, pod red. M. PLUTY, PWN, Warszawa 1980.
2. K. A. HAINES, B. P. HILDEBRAND, *Surface-deformation measurement using the wavefront reconstruction technique*, *App. Opt.* 5, no. 4, 595 - 602, 1966.
3. W. T. WELFORD, *Fringe visibility and localization in hologram interferometry*, *Opt. Commun.* 1, 123 - 125, 1969.
4. S. WALLIS, *Visibility and localization of fringes in holographic interferometry of diffusely reflecting surfaces*, *Ark. Fys.* 40, 299 - 403, 1970.

5. K. A. STETSON, *Fringe interpretation for hologram interferometry of rigid-body motions and homogeneous deformations*, J. Opt. Soc. Am. 64, 1 - 10, 1974.
6. W. SCHUMANN, M. DUBAS, *Holographic Interferometry*, Springer Verlag, Berlin 1979.
7. E. B. ALEKSANDROV, A. M. BONCH-BRUEVICH, *Investigation of surface strains by the hologram technique*, Sov. Phys.-Tech. J. 12, 258 - 265, 1967.
8. A. E. ENNOS, *Measurement of in-plane surface strain by hologram interferometry*, J. Sci. Instrum. 1, no. 7, 731 - 734, 1968.
9. H. KREITLOW, Ph. D. THESIS, Techn. Univ. Hannover, 1976.
10. M. J. MATCZAK, *Fringe visibility method as a new method of holographic interferograms interpretation*, Proc. SPIE, Vol. 370, 163 - 167, 1982.
11. M. J. MATCZAK, R. PAWLUCZYK, Z. KRASKA, *Diffuse illumination in holographic interferometry*, Proc. SPIE, Vol. 370, 216 - 220, 1982.
12. Z. KRASKA, R. PAWLUCZYK, M. J. MATCZAK, *Identification of the local minima of fringes order in holographic interferometry*, Proc. SPIE, Vol. 370, 206 - 210, 1982.
13. R. PAWLUCZYK, Z. KRASKA, *Diffuse illumination in holographic double-aperture interferometry*, Appl. Opt. 24, no. 18, 3072 - 3078, 1985.
14. M. J. MATCZAK, *Diffractional description of interference image formation and its consequences in holographic interferometry*, Proc. EOC'83 (European Optical Conference on Optics in Science and Technology), Rydzyna (Poland) 1983, pp. 130 - 139.
15. M. YONEMURA, *Holographic measurement of in-plane deformation using fringe visibility*, Optik 63, no. 2, 167 - 177, 1983.
16. M. J. MATCZAK, *The fringe visibility method and different applications of it*, FMC-Series, no. 26, 109 - 120, 1987.
17. M. J. MATCZAK, *Single-hologram method for evaluating displacement field*, Proc. SPIE, Vol. 661, 280 - 285, 1986.
18. M. J. MATCZAK, *Direct holographic determination of the rotation and strain fields by means of the fringe visibility method*, Proc. SPIE, Vol. 661, 286 - 289, 1986.
19. M. J. MATCZAK, *Holographic determination of the surface shape by means of the fringe visibility method*, Proc. SPIE, Vol. 661, 328 - 331, 1986.
20. Z. FÜZESSY, *Methods of holographic interferometry for industrial measurements*, Period. Polytech. 21, 257, 1977.
21. Z. FÜZESSY, *Measurement of 3-D displacement by incoherent superposition of interferograms*, Israel J. Techn. 18, 251, 1980.

## Р е з ю м е

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ КОНТРАСТА ПОЛОС  
НА ОБРАЗАХ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

На фоне методов голографической интерферометрии представлено теоретические основы метода контраста интерференционных полос, который применяется для определения перемещений и деформации поверхности объектов. Представленный метод делает возможным определить перемещения и деформации без необходимости определения ряда полосы и затруднительного дифференцирования перемещений.

## S u m m a r y

DISPLACEMENT AND STRAIN EVALUATION ON THE BASIS OF FRINGE CONTRAST IN  
HOLOGRAPHIC INTERFEROMETRY

On the background of different methods of holographic interferometry (Sec. 1), the theoretical idea of the fringe visibility method (Sec. 3) on the basis of the holographic measuring system (Sec. 2) has been

discussed. Application of this method to displacement (Sec. 4) and strain (Sec. 5) evaluation has been presented. Some practical remarks relating to the method (Sec. 6) have been also given.

The presented method enables to determine the displacement and strain fields without knowledge of the fringe order distribution and without necessity to differentiate the displacement field.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 czerwca 1987 roku.*

---

## ZAGADNIENIE RÓWNOWAŻNEJ AMPLITUDY NAPRĘŻEŃ W OCENIE TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ ELEMENTÓW KONSTRUKCYJNYCH

JÓZEF SZALA

*Akademia Techniczno-Rolnicza, Bydgoszcz*

W artykule przedstawiono metodę wyznaczania amplitudy naprężeń sinusoidalnych równoważnych z punktu widzenia trwałości zmęczeniowej — naprężeniom stochastycznym. Wykazano, że w zakresie nieograniczonej trwałości zmęczeniowej zawodzą dotychczas znane sposoby wyznaczania amplitudy zastępczej oparte na zastosowaniu hipotezy Palmgren — Minera. Dla tego zakresu wykorzystano koncepcję linii stałych uszkodzeń zmęczeniowych opartą na analizie przebiegu zjawisk zmęczeniowych w metalach. Artykuł zilustrowano analizą wyników badań zmęczeniowych.

### Wykaz ważniejszych oznaczeń

- $C$  — stała w opisie wykresu zmęczeniowego,  
 $C_t$  — stała w opisie wykresu trwałości zmęczeniowej,  
 $m_t$  — wykładnik potęgi w opisie wykresu zmęczeniowego,  
 $m'$  — wykładnik potęgi wtórnego wykresu zmęczeniowego,  
 $m_i$  — wykładnik potęgi w opisie wykresu trwałości zmęczeniowej,  
 $N$  — trwałość zmęczeniowa elementu konstrukcyjnego przy obciążeniu sinusoidalnym wyrażona liczbą cykli,  
 $N_c$  — trwałość zmęczeniowa elementu konstrukcyjnego przy obciążeniu stochastycznym lub programowanym wyrażona liczbą cykli,  
 $N_0$  — liczba cykli odpowiadająca punktowi załamania wykresu zmęczeniowego,  
 $n_c$  — sumaryczna liczba cykli w widmie obciążeń,  
 $n_c P(\sigma_a)$  — widmo obciążeń,  
 $n_i$  — liczba cykli na  $i$ -tym stopniu
- $$\sum n_i = n_c$$
- $P(\sigma_a)$  — rozkład amplitud,  
 $p(\sigma_a)$  — funkcja gęstości rozkładu amplitud,  
 $Z_G$  — granica zmęczenia (oznaczenie ogólne) w MPa,  
 $\alpha_i = \frac{n_i}{n_c}$  — względna liczba cykli na  $i$ -tym stopniu,

- $\zeta$  — współczynnik wypełnienia widma,  
 $\lambda$  — liczba powtórzeń widma obciążeń,  
 $\lambda_c$  — liczba powtórzeń widma obciążeń do zniszczenia zmęczeniowego

$$N_c = \lambda_c \cdot n_c$$

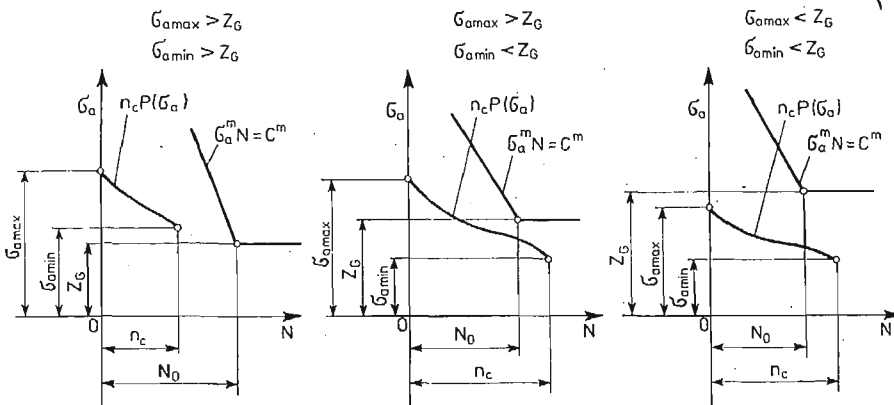
- $\sigma_a$  — amplituda naprężeń (oznaczenie ogólne) w MPa,  
 $\sigma_{ai}$  — amplituda  $i$ -tego stopnia (w widmie stopniowym  $i = 1, 2 \dots k$ , gdzie  $k$  — liczba stopni),  
 $\sigma_{amax}$  — maksymalna amplituda naprężeń w widmie obciążeń w MPa,  
 $\sigma_a(N)$  — wykres zmęczeniowy (Wöhlera),  
 $\sigma_{amax}(N_c)$  — wykres trwałości zmęczeniowej,  
 $\sigma_{amin}$  — minimalna amplituda naprężeń w widmie obciążeń w MPa,  
 $\sigma_{ar}$  — równoważna amplituda naprężeń w MPa.

## 1. Wprowadzenie

Analiza zagadnienia równoważnej amplitudy naprężeń, pod względem trwałości zmęczeniowej ekwiwalentnej obciążeniu stochastycznemu lub programowanemu, przedstawiona w prezentowanym artykule dotyczy zakresów: wysokocyklowej ograniczonej i nieograniczonej trwałości.

Znaczenie tego zagadnienia polega na tym, że szczególnie w zakresie nieograniczonej trwałości, wyznaczenie amplitudy równoważnej umożliwia obliczenie — w tradycyjnych metodach — współczynnika bezpieczeństwa lub w probabilistycznym ujęciu — prawdopodobieństwa zniszczenia zmęczeniowego. Podkreślić należy, że w zakresie nieograniczonej trwałości ze względów oczywistych wartości trwałości się nie wyznacza. Z drugiej strony — ilościowa analiza obciążeń elementów konstrukcyjnych (szczególnie elementów maszyn), które mogą ulec zniszczeniu zmęczeniowemu wykazała, że ponad 95% tych elementów konstruuje się na nieograniczoną trwałość.

Możliwe przypadki położenia widma obciążeń w stosunku do wykresu zmęczeniowego pokazano na rys. 1 [1]. W przypadku (a) wszystkie amplitudy w widmie obciążeń



Rys. 1. Wzajemne położenie wykresu zmęczeniowego  $\sigma_a(N)$  i widma obciążeń  $P(\sigma_a) n_c$

są większe od granicy zmęczenia ( $\sigma_{amax} > Z_G$  oraz  $\sigma_{amin} > Z_G$ ), a trwałość zmęczeniowa jest ograniczona. W przypadku (b) zachodzi  $\sigma_{amax} > Z_G$  natomiast  $\sigma_{amin} < Z_G$ . W zależności od wartości parametrów widma obciążeń w przypadku tym otrzymuje się ograniczoną (wysokie wartości  $\sigma_{amax}$  i  $\zeta$ ) lub nieograniczoną trwałość (niskie wartości  $\sigma_{amax}$  i  $\zeta$ ). Ze znanych parametrów natężenia obciążeń zmiennych (postaci widma) opisanych m.in. w pracy [2] w tej pracy wybrano współczynnik wypełnienia widma  $\zeta$ , ponieważ bezpośrednio związany jest z rozkładem amplitud naprężeń stochastycznych:

$$\zeta = \int_{\sigma_{amin}}^{\sigma_{amax}} \frac{1}{A} \sigma_a p(\sigma_a) d\sigma_a, \quad (1)$$

gdzie:

$$A = \int_{\sigma_{amin}}^{\sigma_{amax}} p(\sigma_a) d\sigma_a,$$

lub dla widma stopniowego

$$\zeta = \frac{1}{\sigma_{amax}} \sum_{i=1}^k \sigma_{ai} \alpha_i. \quad (2)$$

W przypadku (c) rys. 1 zachodzi  $\sigma_{amax} < Z_G$  i  $\sigma_{amin} < Z_G$ . Element konstrukcyjny nie ulega zniszczeniu w pojęciu deterministycznym, natomiast w materiale zachodzą zgodnie z wynikami badań opublikowanymi w pracy [3] zjawiska zmęczeniowe do mikropęknięć włącznie. W badaniach przeprowadzonych na różnych metalach i ich stopach opisanych w pracach [4] i [5] potwierdzono spostrzeżenia, że kumulacja uszkodzeń zmęczeniowych zachodzi także poniżej granicy zmęczenia.

Można w tym przypadku przyjęc założenie, że obciążenie sinusoidalne o amplitudzie równoważnej powoduje ten sam stopień uszkodzenia zmęczeniowego, jak obciążenie stochastyczne o określonym widmie (np. rozwinięte mikropęknięcia).

W literaturze m.in. [1], [2] i [6] spotyka się zależności na obliczenie zastępczej amplitudy oparte na założeniach hipotezy sumowania uszkodzeń zmęczeniowych podanej przez Palmgrena i Minera a odniesionej do liczby cykli  $N_0$ . Zależności te umożliwiają obliczenia zmęczeniowe dla przypadku (a) z rys. 1 w ograniczonym zakresie, umożliwiają mianowicie obliczenie współczynnika bezpieczeństwa  $\delta$ , nie dają jednak możliwości obliczenia równoważnej amplitudy z punktu widzenia trwałości zmęczeniowej. Dla widma stopniowanego przyjmuje się założenie, że:

$$\sigma_{az}^m N_0 = \sum_{i=1}^r \sigma_{ai} n_i, \quad (3)$$

a sumowaniu podlegają cykle o  $\sigma_{ai} > Z_G$  ( $i = 1, 2 \dots r$ ). Z warunku tego wynika, że amplituda  $\sigma_{az}$  jest równoważna widmu obciążenia o rozkładzie  $P(\sigma_a) \lambda n_c$  gdy  $\lambda n_c < N_c$  w odniesieniu do liczby cykli  $N_0$  (a nie trwałości  $N_c$ ). Wychodząc z definicji amplitudy równoważnej  $\sigma_{ar}$  zakłada się, że  $\lambda_c n_c = N_c$ , a zatem z przekształcenia wzoru (3) otrzymuje

się:

$$\sigma_{az} = \sqrt[m]{\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^r \sigma_{ai}^m n_i}, \quad (4)$$

po przekształceniach:

$$\sigma_{az} = Z_G \sqrt[m]{\frac{N_c}{N_0} \sum_{i=1}^r \left(\frac{\sigma_{ai}}{Z_G}\right)^m \alpha_i}. \quad (5)$$

Na podstawie hipotezy Palmgren-Minera trwałość zmęczeniową  $N_c$  oblicza się z wzoru [1] [2]:

$$N_c = \frac{N_0}{\sum_{i=1}^r \left(\frac{\sigma_{ai}}{Z_G}\right)^m \alpha_i}. \quad (6)$$

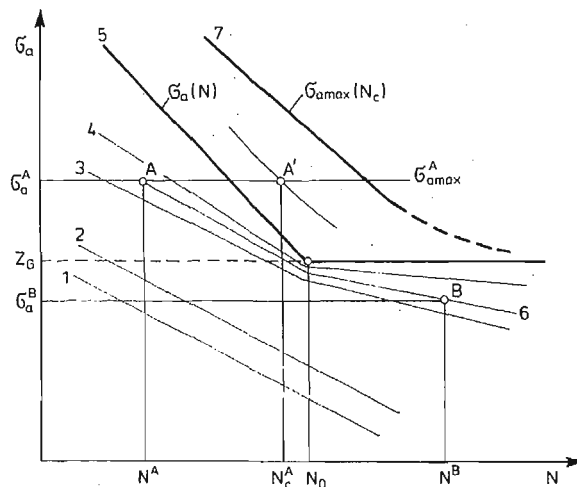
Podstawiając wzór (6) do (5) otrzymuje się:

$$\sigma_{az} \equiv Z_G, \quad (7)$$

a zatem amplituda zastępcza  $\sigma_{az}$  jest dla tego przypadku równoważna granicy zmęczenia.

## 2. Sformułowanie zagadnienia

Na podstawie analizy wyników badań zawartych w pracach [3], [4] i [5] sporządzono uproszczony wykres w zakresie wysokocyklowej trwałości zmęczeniowej (rys. 2), na którym poza liniami granicznymi dla stref poszczególnych zjawisk zmęczeniowych (oznaczo-



Rys. 2. Schematyczne ujęcie wykresu zmęczeniowego z oznaczeniem linii: 1-obszary linii poślizgu, 2-pasm poślizgu, 3-mikropęknięć, 4-rozwoju pęknięć, 5-zniszczenia elementów (wykres zmęczeniowy), 6-(przykładowa linia) stałych uszkodzeń zmęczeniowych, 7-zniszczenia elementów przy obciążeniu stochastycznym lub programowanym (krzywa trwałości zmęczeniowej)

nych cyframi od 1 - 5) wykreślono przykładową linię stałych uszkodzeń 6. Wykres ten ilustruje zjawiska obserwowane przy obciążeniu sinusoidalnym. Punkty *A* i *B* leżą na jednej linii stałych uszkodzeń, ponieważ, jak wynika z badań, podobny efekt zmęczenia (tu odpowiednie stadium rozwoju mikropęknięć) uzyskać można przy amplitudzie  $\sigma_a^A$  po  $N^A$  cyklach obciążenia i przy amplitudzie  $\sigma_a^B$  po  $N^B$  cyklach obciążenia.

Podobne zjawiska zmęczeniowe mają miejsce w przypadku obciążenia stochastycznego lub programowanego, zawierających w sobie naprężenia o dużych i małych amplitudach zgodnie z rozkładem  $P(\sigma_a)$ . A zatem stadium zmęczenia oznaczone punktem *A* osiąga się przy obciążeniu stochastycznym w punkcie *A'*. Z porównania trwałości zmęczeniowej wyrażonej łączną liczbą cykli do zniszczenia elementu przy obciążeniu sinusoidalnym o amplitudzie  $\sigma_a$  i przy obciążeniu stochastycznym o  $\sigma_{amax} = \sigma_a$  otrzymujemy, że  $N < N_c$ , a zatem wykres trwałości zmęczeniowej  $\sigma_{amax}(N_c)$  leży po prawej stronie wykresu zmęczeniowego  $\sigma_a(N)$  — rys. 2. Można w skrócie stwierdzić, że obciążenie sinusoidalne stwarza cięższe warunki z punktu widzenia przebiegu procesu zmęczenia niż obciążenie stochastyczne lub programowane, co z łatwością można prześledzić postępując się rys. 2.

W przypadku obciążeń sinusoidalnych o amplitudach mniejszych od granicy zmęczenia ( $\sigma_a < Z_G$ ) nie nastąpi zniszczenie elementu, ale jak wynika to z rys. 2 w materiale powstają określone zmiany zmęczeniowe (dla niektórych metali i ich stopów, szczególnie stali konstrukcyjnych, gałęź nieograniczonej trwałości wykresu jest równoległa do osi odciętych). Obciążenie elementu konstrukcyjnego zgodnie z widmem obciążeń (według rozkładu amplitud  $P(\sigma_a)$ ) cyklami o amplitudach na przemian większych i mniejszych od granicy zmęczenia powoduje określone obniżenie wytrzymałości zmęczeniowej materiału, co wyraża się przyjęciem wtórnego wykresu zmęczeniowego  $\sigma'_a(N)$  — linia 4 na rys. 3b, c i d. Przez taką modyfikację wykresu zmęczeniowego umożliwia się w obliczeniach trwałości zmęczeniowej (wyznaczenie analityczne krzywej trwałości  $\sigma_{amax}(N_c)$ ) uwzględnienie wpływu amplitud mniejszych od granicy zmęczenia, zawartych w widmie obciążeń, na trwałość zmęczeniową (przypadek b i c na rys. 3). Wpływ ten jest istotny i został doświadczalnie wykazany [7].

Z porównania rys. 1b z rys. 3b i c wynika, że dla przypadku gdy  $\sigma_{amax} > Z_G$  a  $\sigma_{amin} < Z_G$  w zależności od parametrów widma (wartości  $\sigma_{amax}$  i  $\zeta$ ) otrzymuje się ograniczoną trwałość (rys. 3b) lub nieograniczoną trwałość zmęczeniową (rys. 3c).

W przypadku zilustrowanym na rys. 1c. w którym  $\sigma_{amax}$  i  $\sigma_{amin} < Z_G$  zniszczenie elementu nie nastąpi, stąd wykres trwałości zmęczeniowej 3 wykreślony na rys. 3d poniżej linii  $Z_G$  odniesiony jest do określonych zmian zmęczeniowych w materiale.

Na podstawie powyższego opisu można określić amplitudę równoważną  $\sigma_{ar}$  co w sposób graficzny pokazano na rys. 3. Przypadki a i b dotyczą ograniczonej trwałości, dla której  $N_c < N_0$  oraz  $\sigma_{ar} > Z_G$ , natomiast przypadki c i d dotyczą nieograniczonej trwałości, dla której  $N_c > N_0$  oraz  $\sigma_{ar} < Z_G$ .

Wartości  $\sigma_{ar}$  obliczyć można z wzorów:

$$\sigma_{ar}^m N_c = Z_G^m N_0 = C^m \quad \text{dla} \quad N_c \leq N_0, \quad (8)$$

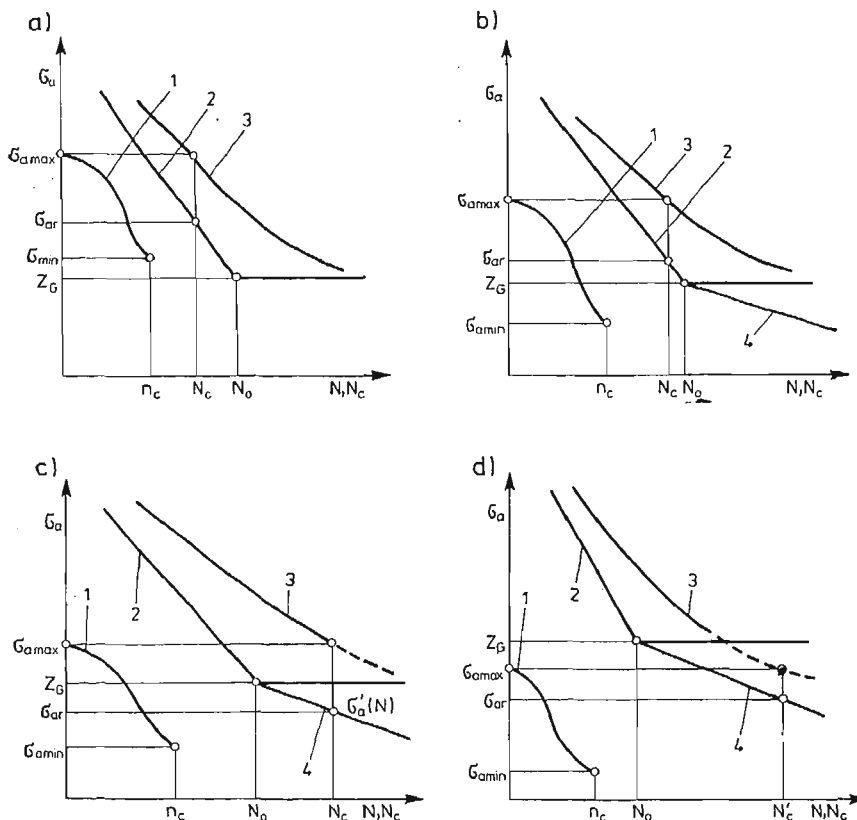
lub:

$$\sigma_{ar}^{m'} N_c = Z_G^{m'} N_0 = C_G^{m'} \quad \text{dla} \quad N_c > N_0. \quad (9)$$



Wartość  $N_c$  wyznacza się doświadczalnie obciążając element konstrukcyjny obciążeniem stochastycznym lub programowanym zgodnie z rozkładem amplitud opisanym widmem obciążeń. W takim przypadku wyniki badań aproksymuje się funkcją wykładniczą:

$$\sigma_{amax}^{m_t} N_c = C_i^{m_t}. \quad (10)$$



Rys. 3. Ilustracja graficzna wyznaczania amplitudy równoważnej  $\sigma_{ar}$ :

a) w zakresie ograniczonej trwałości gdy  $\sigma_{amax}$  i  $\sigma_{amin} > Z_G$ , b) w zakresie ograniczonej trwałości gdy  $\sigma_{amax} > Z_G$  a  $\sigma_{amin} < Z_G$ , c) w zakresie nieograniczonej trwałości gdy  $\sigma_{amax} > Z_G$  a  $\sigma_{amin} < Z_G$ , d) w zakresie nieograniczonej trwałości gdy  $\sigma_{amax}$  i  $\sigma_{amin} < Z_G$

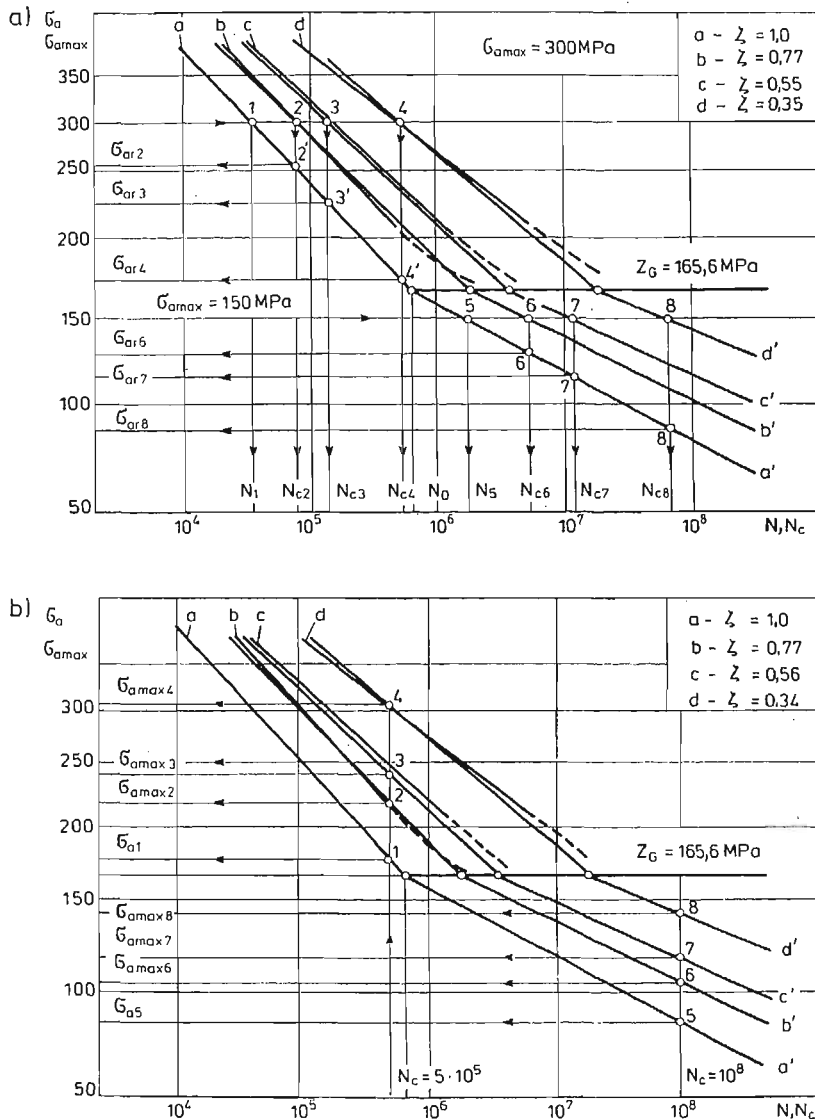
Na rysunku oznaczono: 1-widmo obciążeń ( $P(\sigma_a) n_c$ ), 2-wykres zmęczenia  $\sigma_a(N)$ , 3-wykres trwałości zmęczenia  $\sigma_{amax}(N_c)$ , 4-wtórny wykres zmęczenia  $\sigma_a(N)$

Trwałość  $N_c$  można także obliczyć różnymi metodami np. metodami opartymi na zastosowaniu hipotez sumowania uszkodzeń [8], [9] i [10], na koncepcji dwuetapowego przebiegu procesu zmęczenia (do inicjacji pęknięcia z wykorzystaniem teorii karbu Neubera i rozwoju pęknięcia z wykorzystaniem teorii mechaniki pęknięcia) [11] i [12] lub z wykorzystaniem zależności statystycznych pomiędzy parametrami krzywych zmęczenia i krzywych trwałości zmęczenia [13]

## 3. Analiza danych eksperymentalnych

Dla ilustracji opisanego w punkcie 2 zagadnienia wykorzystane zostaną wyniki badań zmęczeniowych elementów stalowych (stal 45 normalizowana) z karbem ( $\alpha_k = 1,65$ ) zestawione i opracowane statystycznie w dodatku do pracy [13].

Na podstawie wyników badań 60 próbek wyznaczono krzywą zmęczeniową (wykres a na rys. 4a) o następujących parametrach:  $m = 4,56$ ,  $Z_G = 165,6$  MPa,  $N_0 = 6,5 \cdot 10^5$  cykli,  $C = 3110$ . Traktując obciążenie sinusoidalne, przy którym wyznaczono tę krzywą



Rys. 4. Wykresy zmęczeniowe i wykresy trwałości zmęczeniowej dla różnych widm obciążeń z oznaczeniem: a) wyznaczania wartości  $\sigma_{ar}$  dla widm o  $\sigma_{amax}$  i  $\zeta$ , b) wyznaczania wartości  $\sigma_{amax}$  dla założonej trwałości  $N_c$  i  $\zeta$

jako szczególny przypadek obciążenia stochastycznego można zgodnie z definicją współczynnika wypełnienia widma  $\zeta$  przypisać mu wartość  $\zeta_1 = 1,0$ . Przedłużenie wykresu zmęczeniowego poniżej granicy zmęczenia (linia  $a'$ ) wykonano zgodnie z hipotezą Haibacha [14] przyjmując zgodnie z jej założeniami wykładnik potęgi  $m' = 2m - 1$ .

Badania programowane (równoważne badaniom przy obciążeniu stochastycznym) przeprowadzono dla trzech różnych wartości  $\zeta$ : 0,77, 0,56, 0,34 także na 60 próbkach, a na podstawie wyników tych badań wyznaczono krzywe trwałości zmęczeniowej o następujących parametrach:

- wykres b ( $\zeta_2 = 0,77$ ,  $m_{t2} = 5,37$ ,  $C_{t2} = 2451$ ),
- wykres c ( $\zeta_3 = 0,56$ ,  $m_{t3} = 5,75$ ,  $C_{t3} = 2278$ ),
- wykres d ( $\zeta_4 = 0,34$ ,  $m_{t4} = 6,02$ ,  $C_{t4} = 2818$ ).

Wykresy te na rys. 4 wykreślono grubą linią. Obliczone na podstawie zależności podanych w pracy [13] krzywe trwałości także w zakresie poniżej granicy zmęczenia wykreślono na rys. 4 liniami cienkimi i oznaczono indeksem (') — prim.

Zależność amplitudy równoważnej od współczynnika wypełnienia widma  $\zeta$  w zakresie ograniczonej i nieograniczonej trwałości pokazano na rys. 4a.

W pierwszym przypadku dla widm o  $\sigma_{amax} = 300 \text{ MPa} > Z_G = 165,6 \text{ MPa}$  otrzymuje się z wzoru (10) wartości  $N_1, N_{c2}, N_{c3}$  i  $N_{c4}$  dla których z wzoru (8) obliczyć można wartości  $\sigma_{ar2}, \sigma_{ar3}$  i  $\sigma_{ar4}$ . Z pobieżnej analizy danych na wykresach widać istotny wpływ postaci widma (współczynnik  $\zeta$  — wzór (1) na amplitudę równoważną.

W drugim przypadku przyjmując  $\sigma_{amax} = 150 \text{ MPa} < Z_G = 165,6 \text{ MPa}$  otrzymuje się podobnie wartości  $N_5, N_{c6}, N_{c7}$  i  $N_{c8}$  obliczone z wzoru (10) podstawiając te wartości do wzoru (9) obliczamy amplitudy równoważne  $\sigma_{ar6}, \sigma_{ar7}$  i  $\sigma_{ar8}$ . Podkreślić tu należy ponownie, że dane te dotyczą określonego stopnia uszkodzenia zmęczeniowego nie zaś całkowitego zniszczenia elementu.

Obliczenie amplitudy równoważnej  $\sigma_{ar}$  ma miejsce wówczas gdy znane są cechy konstrukcyjne elementu i jego widmo obciążeń a ocenie podlega współczynnik bezpieczeństwa lub prawdopodobieństwo zniszczenia.

W przypadku konstruowania elementu na założoną trwałość  $N_c$ , ocenie podlega dopuszczalna wartość naprężenia maksymalnego w widmie  $\sigma_{amax}$  przy znanej wartości  $\zeta$ . Ten przypadek dla zakresu ograniczonej ( $N = 5 \cdot 10^5$  cykli — punkty 1, 2, 3 i 4) oraz nieograniczonej trwałości ( $N_c = 10^8$  cykli — punkty 5, 6, 7 i 8) pokazano na rys. 4b. Oznaczenie linii wykresowych jak na rys. 4a.

Omówiony przykład można rozszerzyć na inne elementy konstrukcyjne wykonane ze stali, stwierdzenie to oparto na wynikach badań węzłów konstrukcyjnych wykonanych z rur spawanych, lutowanych i osiach hartowanych powierzchniowo [13].

Wstawiając do wzoru (8) wartość  $N_c$  wyznaczoną z wzoru (10) otrzymamy:

$$\sigma_{ar}^m \left( \frac{C_t}{\sigma_{amax}} \right)^{m_t} = C^m \quad (11)$$

i po przekształceniach:

$$\sigma_{ar} = \sigma_{amax}^{\frac{m_t}{m}} \frac{C}{C_t^{\frac{m_t}{m}}} \quad (12)$$

Z analizy statystycznej danych doświadczalnych zamieszczonych w pracy [13] wynika, że wartości stałych w równaniach krzywych zmęczeniowych  $C$  i trwałości zmęczeniowych  $C_t$  różnią się nieistotnie (mają charakter stałych materiałowych) oraz, że stosunek wykładników potęg  $m_t/m$  zależny jest od współczynnika wypełnienia widma  $\zeta$ :

$$\frac{m_t}{m} = \zeta^{-r}, \quad (13)$$

gdzie:  $r = 0,16-0,44$  dla elementów stalowych średnio  $r = 0,28$ . Wykorzystując podane zależności otrzymujemy dla zakresu ograniczonej trwałości ( $\sigma_{amax} > Z_G$  i  $N_c < N_0$ ):

$$\sigma_{ar} = \frac{m_t}{\sigma_{amax}^m} C \left(1 - \frac{m_t}{m}\right), \quad (14)$$

natomiast dla zakresu nieograniczonej trwałości ( $\sigma_{amax} < Z_G$ ):

$$\sigma_{ar} = \frac{m'_t}{\sigma_{amax}^{m'}} C' \left(1 - \frac{m'_t}{m'}\right). \quad (15)$$

Stosunek wykładników potęgi  $\frac{m_t}{m} = \frac{m'_t}{m'}$ , natomiast wartość stałej  $C'$  oblicza się z równania linii  $a'$ :

$$\sigma_a^{m'} N = Z_G^{m'} N_0 = C'^{(m')}, \quad (16)$$

stąd

$$C' = Z_G N_0^{\frac{1}{m'}}. \quad (17)$$

Bardziej złożony jest przypadek nieograniczonej trwałości zilustrowany na rys. 3c gdy zachodzi  $\sigma_{amax} > Z_G$  i  $N_c > N_0$  wówczas postępując podobnie, jak w przypadkach wprowadzenia wzorów (14) i (15) otrzymuje się:

$$\sigma_{ar} = \frac{m_t}{\sigma_{amax}^{m'}} \frac{C'}{C^{\frac{m_t}{m'}}}. \quad (18)$$

Na podstawie podanych wzorów można wykonać wykresy zależności amplitudy równoważnej  $\sigma_{ar} = f(\sigma_{amax}, \zeta)$  dla znanej krzywej zmęczeniowej elementu konstrukcyjnego.

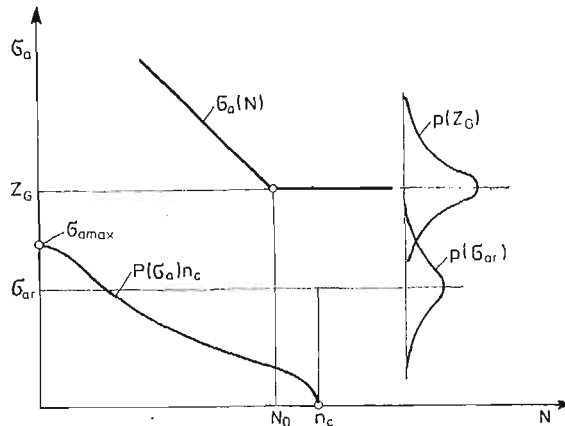
#### 4. Podsumowanie

Podstawową charakterystyką własności zmęczeniowych materiałów lub elementów konstrukcyjnych jest wykres zmęczeniowy (Wöhlera), wyznaczany przy obciążeniu sinusoidalnym.

Wyznaczenie amplitudy równoważnej umożliwia na podstawie tego wykresu ocenę trwałości zmęczeniowej elementu konstrukcyjnego poddanego obciążeniom stochastycznym lub programowanym.

W zakresie nieograniczonej trwałości zmęczeniowej stanowi możliwość wyznaczenia prawdopodobieństwa zniszczenia metodami opracowanymi dla obciążeń sinusoidalnych,

które opisano m.in. w pracach [1], [6]. Schemat do tych metod obliczeń przedstawiono na rys. 5. Rozkład granicy zmęczenia  $p(Z_G)$  wyznacza się na podstawie wyników badań zmęczeniowych (np. metodą schodkową) natomiast rozkład amplitudy równoważnej  $p(\sigma_{ar})$  wyznaczany jest na podstawie pomiarów obciążeń eksploatacyjnych obliczanych elementów konstrukcyjnych z zastosowaniem przedstawionej w tym artykule metody wyznaczania  $\sigma_{ar}$ . Rozkłady te w przypadku braku danych z badań zmęczeniowych i po-



Rys. 5. Schemat do obliczeń prawdopodobieństwa zniszczenia zmęczeniowego elementu konstrukcyjnego w zakresie nieograniczonej trwałości

miarów obciążeń można przyjąć na podstawie danych literaturowych z badań podobnych elementów konstrukcyjnych. Danych tych jest jednakże mało i fakt ten stanowi najpoważniejszą przeszkodę w stosowaniu probabilistycznych metod obliczeń zmęczeniowych.

#### Literatura

1. S. KOCANĀDA, J. SZALA, *Podstawy obliczeń zmęczeniowych*, W-wa PWN, 1985
2. J. SZALA, *Badania i obliczenia zmęczeniowe elementów maszyn w warunkach obciążeń losowych i programowych*, Prace IPPT nr 6, 1979
3. S. KOCANĀDA, *Zmęczeniowe pękanie metall*, W-wa, WNT, 1986
4. В. Ф. ТЕРЕНТЕВ, М. БИЛЫ, *К вопросу о построении полной кривой усталости*, Проблемы Прочности 6, 1972, ss. 12 - 22
5. M. BILY, V. F. TERENTEV, *A Complete Fatigue S/N Curve*, Materialprüfung, 1, 1973, pp. 10 - 15
6. В. П. КОГАЕВ, *Расчёты на прочность при напряжениях переменных во времени*, Москва, Машиностроение 1977
7. J. SZALA, *Wpływ naprężeń o wartościach mniejszych od nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej na trwałość zmęczeniową*, Prace Wydziału Nauk Technicznych Bydgoskiego Towarzystwa Naukowego nr 10, Warszawa - Poznań, PWN, 1978, ss. 49 - 55
8. J. SZALA, *Hipotezy sumowania uszkodzeń zmęczeniowych — wybrane zagadnienia*, Prace Wydziału Nauk Technicznych Bydgoskiego Towarzystwa Naukowego nr 15, Warszawa - Poznań, PWN, 1985
9. S. SUBRAMANYAN, *A Cumulative Damage Rule Based on the Knee Point of the S-N Curve*, Transactions of the ASME, Journal of Engineering Materials and Technology, A, 1976, pp. 316 - 321
10. Ю. ШАЛЬЯ, *Суммирование усталостных повреждений в условиях случайных и программированных напряжений*, Механическая Усталость Металлов, АН УССР, Наукова Думка, Киев 1983
11. L. E. TUSEKER, *A Procedure for Designing Against Fatigue Failure of Notched Parts*, Society of Automotive Engineers, SAE Paper No 720265, New York, 1972

12. G. GLINKA, *Powstawanie i wzrost pęknięć zmęczeniowych*, Politechnika Warszawska, Prace Naukowe — Mechanika, Zeszyt 75, Warszawa, 1981
13. J. SZALA, *Ocena trwałości zmęczeniowej elementów maszyn w warunkach obciążeń losowych i programowych*, Zeszyty Naukowe nr 7 79, Mechanika 22, Bydgoszcz, AT-R, 1980
14. E. HAIBACH, *Modifizierte Lineare Schadensakkumulations-Hypothese zur Berücksichtigung des Dauerfestigkeitsabfalls mit fortschreitender Schädigung*, Laboratorium für Betriebsfestigkeit, Darmstadt, Technische Mitteilugen TM Nr 50 70, Juli 1970

## Р е з ю м е

ВОПРОС ЭКВИВАЛЕНТНОЙ АМПЛИТУДЫ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ОЦЕНКЕ  
ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИОННЫХ ДЕТАЛЕЙ

В работе представлен метод определения эквивалентной, синусоидальной амплитуды напряжений эквивалентных стохастическим напряжениям — взвешивая прочность. Доказано, что существующие методы определения эквивалентной, синусоидальной амплитуды, использующие гипотезу Пальнгрема-Майнера не оправдывают себя в диапазоне неограниченной прочности. Для этого диапазона применена концепция линии постоянных усталостных повреждений, которую обработано аннулируя процесс усталостных явлений в металлах. Теоретические рассуждения проиллюстрированы анализом результатов исследований на прочность.

## S u m m a r y

PROBLEM OF EQUIVALENT STRESS AMPLITUDE FOR EVALUATION  
OF CONSTRUCTION ELEMENTS FATIGUE LIFE

The method of calculation of equivalent, sinusoidal stress amplitude, adequate for random stress taking into consideration fatigue life, has been presented. It has been proved, that existing methods based on Palmgren-Miner's hypothesis are disappointing for unlimited life scale. The idea of constant fatigue damage lines, based on analysis of fatigue phenomena in metals, has been used for this scale. The theoretical considerations have been illustrated by enclosed analysis of fatigue experimental results.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 lutego 1987 roku.*



## NONLINEAR EQUATIONS OF SHELLS OF SLOWLY VARYING CURVATURES

ZENON RYCHTER

*Politechnika Białostocka*

### 1. Introduction

A major problem in the general nonlinear theory of thin elastic shells consists in reducing the very complex general field equations to simpler, tractable forms. Extensive surveys, of efforts along these lines can be found in the works of Koiter [1] and Pietraszkiewicz [2], so we may concentrate here on those results having a direct bearing on the present work.

One early recognized possibility is to deal with only the equilibrium equations and compatibility conditions in conjunction with the constitutive relations. In this way the very involved stress-displacement relations are put aside and no restrictions as to the magnitudes of displacements and their derivatives must be adopted. These so-called "intrinsic shell equations" can be greatly simplified if the strains are small and the ratio of maximum membrane to bending strains is not very large or very small compared with unity. The resulting "lowest-order interior equations" due to John [3] and Koiter [1] permit further reduction for "quasi-shallow" shells (also called "shells of small Gaussian curvature") introduced by Koiter [1] which are characterized by the requirement of smallness of the Gaussian curvature with respect to the reciprocal of the square of the characteristic deformation wave length. Under such circumstances, the membrane forces can be represented in terms of a stress function and the bending strains through a strain function, leading to two appealingly simple differential equations in two unknowns [1].

This paper aims at extending the range of applicability of the now classic equations of quasi-shallow shells. To this end, the condition of quasi-shalowness is replaced by the weaker assumption of slow variation of curvatures over the middle surface — an assumption first proposed by Duddeck [4] in the context of linear theory and then exploited by Łukasiewicz (see [5]) in a series of papers concerning both linear and nonlinear shell problems. We borrow from Duddeck his refined expression for membrane forces in terms of a strain function which, contrary to quasi-shallow shells, takes account of the Gaussian curvature. The second of Duddeck's variables, the normal deflection of the midsurface, turns out to be unsuitable for the intended here displacement-free theory and is not used. Instead, we express the bending strains through a strain function, finding the appropriate formula from Duddeck's stress function by noting a static-geometric analogy between membrane forces and bending strains. Compared with Koiter's [1] strain function ("curvature function" in his terminology), our new formula is only slightly more compli-



cated due to the occurrence of a Gaussian curvature-related term. In the end, a relatively simple set of two governing differential equations in two unknowns — the stress and strain functions — is obtained which generalizes the equations of quasi-shallow shells and reduces to the latter upon dropping terms multiplied by the Gaussian curvature. It is a matter of course that the new equations generalize also all their predecessors involving two unknowns one of which is the normal deflection, i.e. the equations of shallow shells due to Donnell [6], Mushtari [7], and Vlasov [8], as well as equations for shells of slowly varying curvatures due to Duddeck [4] and Łukasiewicz [5].

Our work closes with a formulation of appropriate displacement-free boundary conditions to be used with the two differential equations. These include a set of static boundary conditions derived by proper simplification from Danielson's conditions [9], and a set of deformational boundary conditions which are a reduced version of those provided by Pietraszkiewicz [2].

The differential equations and boundary conditions found are truly displacement-free only for surface and edge loads whose components are known in the basis attached to the deformed shell. Consequently, dead loads are inappropriate and only pressure-like loads can be admitted.

## 2. Reduction of basic field equations

This section is devoted to reducing the general nonlinear shell equations to the so-called "lowest-order interior equations" [1, 3]. Although the outcome of this reduction is identical with [1, 3], our derivation throws new light on the subject as we: (a) make a distinction between the wave lengths corresponding to membrane and bending strains (b) introduce a wave length characterising the variation of curvatures over the midsurface; consequently, the validity criteria for the "lowest-order interior equations" become more precise than in [1, 3].

To begin with we assume, as Koiter [1] does, that the strains are small everywhere in the shell which is thin, homogeneous, and linearly elastic. The fundamental field equations now are as follows ([1], p. 34). The constitutive equations between the symmetric membrane forces  $N_{\alpha\beta}$  and extensional strains  $g_{\alpha\beta}$ , and between the moments  $M_{\alpha\beta}$  and bending strains  $q_{\alpha\beta}$  read

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{Eh} [(1+\nu)N_{\alpha\beta} - \nu a_{\alpha\beta} N_{\lambda}^{\lambda}], \quad (1)$$

$$M_{\alpha\beta} = D [(1-\nu)q_{\alpha\beta} + \nu a_{\alpha\beta} q_{\lambda}^{\lambda}], \quad (2)$$

where  $a_{\alpha\beta}$  is the metric tensor of the undeformed middle surface,  $h$  denotes the constant shell thickness,  $E$  is Young's modulus,  $\nu$  is Poisson's ratio, and  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  stands for the flexural rigidity. The force equilibrium equations are:

$$\left( N^{\beta\alpha} + \frac{1}{2} b_{\lambda}^{\alpha} M^{\beta\lambda} - \frac{1}{2} b_{\lambda}^{\beta} M^{\alpha\lambda} + q_{\lambda}^{\alpha} M^{\beta\lambda} \right)_{|\beta} + (b_{\lambda}^{\alpha} + q_{\lambda}^{\alpha}) M_{|\beta}^{\beta\lambda} = -\bar{p}^{\alpha}, \quad (3)$$

$$M_{|\alpha\beta}^{\alpha\beta} - \left( \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\lambda} q_{\lambda\beta} + \frac{1}{2} b_{\beta}^{\lambda} q_{\lambda\alpha} + q_{\alpha}^{\lambda} q_{\lambda\beta} \right) M^{\alpha\beta} - (b_{\alpha\beta} + q_{\alpha\beta}) N^{\alpha\beta} = \bar{p}. \quad (4)$$

Here  $b_{\alpha\beta}$  is the curvature tensor of the undeformed midsurface, a vertical stroke indicates surface covariant differentiation based on the undeformed metric  $a_{\alpha\beta}$ ,  $\bar{p}^\alpha$  and  $\bar{p}$  are surface loads tangential and normal to the deformed shell (this is indicated by the overbars). The compatibility conditions assume the form:

$$e^{\alpha\beta} e^{\lambda\mu} \left[ \left( q_{\beta\lambda} + \frac{1}{2} b_{\beta}^{\delta} g_{\delta\lambda} + \frac{1}{2} b_{\lambda}^{\delta} g_{\delta\beta} \right)_{|\mu} - b_{\lambda}^{\delta} (g_{\delta\beta|\mu} + g_{\delta\mu|\beta} - g_{\beta\mu|\delta}) \right] = 0, \quad (5)$$

$$e^{\alpha\beta} e^{\lambda\mu} \left( g_{\alpha\mu|\beta\lambda} + b_{\alpha\mu} q_{\beta\lambda} + \frac{1}{2} q_{\alpha\mu} q_{\beta\lambda} \right) = 0, \quad (6)$$

where  $e_{\alpha\beta}$  is the permutation tensor based on  $a^{\alpha\beta}$ .

In order to compare the various terms in the above equations, we assume that the surface coordinates have the dimension of length. This makes it possible to introduce the relations:

$$g_{\alpha\beta} = 0(g), \quad q_{\alpha\beta} = 0(q), \quad b_{\alpha\beta} = 0(1/R),$$

to define the parameters  $g$ ,  $q$  and  $R$  which are the absolute maximum stretching and bending strains, and the smallest principal radius of curvature of the midsurface. The rates of change of the strains and curvatures will be characterized by means of wave lengths  $L_g$ ,  $L_q$  and  $L_r$  as follows:

$$g_{\alpha\beta|\lambda} = 0(g/L_g), \quad q_{\alpha\beta|\lambda} = 0(q/L_q), \\ b_{\alpha\beta|\lambda} = 0(1/RL_r), \quad K_{|\alpha} = 0(K/L_r),$$

where  $K$  is the Gaussian curvature of the undeformed midsurface; the same wave lengths will be used in evaluating higher-order derivatives, e.g.  $g_{\alpha\beta|\lambda\eta} = 0(g/L_g^2)$ , etc. These definitions and relations (1) and (2) imply that:

$$N_{\alpha\beta} = 0(Ehg), \quad N_{\alpha\beta|\lambda} = 0(Ehg/L_g), \\ M_{\alpha\beta} = 0(Eh^3q), \quad M_{\alpha\beta|\lambda} = 0(Eh^3q/L_q),$$

where use has been made of the fact that  $a_{\alpha\beta} = 0(1)$ . Now the magnitudes of the individual terms in the equilibrium and compatibility equations (3) - (6) are:

$$(3): \quad Ehg/L_g, \quad \underline{Eh^3q/RL_q}, \quad \underline{Eh^3q/RL_r}, \quad \underline{Eh^3q^2/L_q},$$

$$(4): \quad \underline{Eh^3q/L_g^2}, \quad \underline{Eh^3q^2/R}, \quad \underline{Eh^3q^3}, \quad Ehg/R, \quad Ehgq,$$

$$(5): \quad q/L_q, \quad \underline{g/RL_g}, \quad \underline{g/RL_r},$$

$$(6): \quad \underline{g/L_g^2}, \quad q/R, \quad q^2,$$

where in evaluating (5) and (6) one should remember that  $e^{\alpha\beta} = 0(1)$ .

In order to simplify equations (3) - (6), we first take notice of the well-known fact that uncoupled constitutive equations (1) and (2) are approximate ones because of omission of terms conforming to relations [1, 9]:

$$h/R \ll hq/g \ll (R/h, 1/hq). \quad (7)$$

Now the underlined terms in (4) are seen to be negligible and can be dropped.

To proceed further, we assume that the shell curvatures vary slowly compared with the strains variation, in the sense that

$$L_g \leq L_r, \quad L_a \leq L_r. \quad (8)$$

Keeping this in mind, we find that the underscored terms in (3) and (5) may be neglected in comparison with the remaining contributions provided that:

$$h/R \ll (hq/g) (L_g/L_a) \ll (R/h, 1/hq). \quad (9)$$

Deleting all the underlined terms in (3) - (5) and transforming the first terms in (4) and (6) as in [1], we finally get reduced equilibrium and compatibility equations of the form:

$$N_{|\beta}^{\beta\alpha} = -\bar{p}^\alpha, \quad e^{\alpha\beta} e^{\lambda\mu} q_{\beta\lambda|\mu} = 0, \quad (10, 11)$$

$$Dq_{\sigma|\beta}^{\alpha|\beta} - (b_{\alpha\beta} + q_{\alpha\beta}) N^{\alpha\beta} = \bar{p}, \quad (12)$$

$$N_{\alpha|\beta}^{\alpha|\beta} - E h e^{\alpha\beta} e^{\lambda\mu} \left( b_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} q_{\alpha\mu} \right) q_{\beta\lambda} = -(1+\nu) \bar{p}_{|\alpha}^\alpha. \quad (13)$$

These are exactly the "lowest-order interior equations" of [1, 3]. Their validity depends on the requirements (7) - (9) of which only (7) can be found in Koiter's work [1]. Practically, the curvatures vary smoothly in most shell applications so that relations (8) are true. As for (9), these conditions reduce to Koiter's assumptions (7) only for deformations characterized by equal wave lengths of the membrane and bending strains; this is very often assumed for analytical convenience, but surely unjustified, in general, physically (see [10]).

### 3. Governing equations in terms of stress and strain functions

The system of equations (10) - (13) lends itself to further simplifications resulting in two coupled equations for two unknowns — a stress and a strain function. For quasi-shallow shells such equations have been found by Koiter [1]. Here we propose two more general and more complex equations valid for shells of slowly varying curvatures.

An appropriate approximate solution to the equilibrium equations (10) has been found by Duddeck [4] in the form:

$$N^{\beta\alpha} = e^{\beta\lambda} e^{\alpha\mu} (F_{|\mu\lambda} + a_{\mu\lambda} KF) + \bar{P}^{\alpha\beta}, \quad (14)$$

where  $\bar{P}^{\alpha\beta}$  is a particular solution to (10); this formula is of interest thanks to the  $KF$  term absent in works on shallow and quasi-shallow shells. Introducing (14) into (10) and making use of the well-known geometric relations:

$$e^{\beta\lambda} F_{|\mu\lambda} = K e_{\mu\beta} F^{|\beta}, \quad e^{\alpha\mu} e_{\mu\beta} = -a_{\beta}^\alpha,$$

the residual error in (10) is found to be equal to  $K_{|\alpha} F$ . This quantity is  $O(KF/L_r)$ , while the principal term in (10),  $N_{|\beta}^{\beta\alpha}$ , is, by (14),  $O(F/L_g^2)$ , so that the relative error in (10) is negligible when:

$$(L_g/L_r) (KL_g^2) \ll 1. \quad (15)$$

A welcome feature of the compatibility equations (11) is their similarity, in the sense

of static-geometric analogy, to the equilibrium equations (10). Remembering this, we immediately find from (14) the solution to (11) in terms of a strain function  $W$ :

$$q_{\alpha\beta} = W_{|\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} KW. \quad (16)$$

This expression was apparently first used by the present writer [11] in the linear theory of shells of slowly varying curvatures; neglecting the  $KW$  terms, (16) assumes the form familiar from Koiter's quasi-shallow shells [1].

Introduction of (16) into (11) produces in the latter equations a residual error that is negligible when:

$$(L_q/L_r)(KL_q^2) \ll 1. \quad (17)$$

Substitution of (14) and (16) into (12) and (13) finally yields

$$\begin{aligned} D(W|_{\alpha}^{\alpha} + 2KW)|_{\beta}^{\beta} - e^{\alpha\lambda} e^{\beta\mu} (b_{\alpha\beta} + W_{|\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} KW) (F_{|\mu\lambda} + a_{\mu\lambda} KF) = \\ = (b_{\alpha\beta} + W_{|\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} KW) \bar{P}^{\alpha\beta} + \bar{p}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} (F|_{\alpha}^{\alpha} + 2KF)|_{\beta}^{\beta} - E h e^{\alpha\beta} e^{\lambda\mu} \left( b_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} W_{|\alpha\mu} + \frac{1}{2} a_{\alpha\mu} KW \right) (W_{|\lambda\beta} + a_{\lambda\beta} KW) = \\ = (1+\nu) \bar{P}_{|\alpha\beta}^{\alpha\beta} - \bar{P}_{\alpha}^{\alpha}|_{\beta}^{\beta}. \end{aligned} \quad (19)$$

The two just derived governing differential equations in two unknowns,  $F$  and  $W$ , are the major novel finding of this account. Recall that they are valid for small strains and under the assumptions (7) - (9), (15) and (17). For shells of slowly varying curvatures in the sense of (8), the requirements (15) and (17) are clearly less restrictive than the assumption  $KL^2 \ll 1$  (here  $L = L_g = L_q$ ) adopted in the theory of quasi-shallow shells [1]. Consequently, our equations (18) and (19) generalize those of quasi-shallow shells; the former reduce to the latter when the  $K$  terms are dropped. As an example consider a spherical shell: it has constant curvatures ( $1/L_r = 0$ ) and thus represents a shell of slowly varying curvatures for all deformations with finite wave lengths  $L_g, L_q$ , whereas it belongs to the class of quasi-shallow shells only for sufficiently small products  $KL_g^2$  and  $KL_q^2$  of Gaussian curvature and the wave lengths squared.

#### 4. Boundary conditions

Boundary conditions suitable for our differential equations (18) and (19) must not involve displacements if they are to be of any value. This quality possess the static conditions provided that the edge load components are known in the natural basis of the deformed shell. An appropriate set of such conditions may be easily obtained from Danielson's conditions ([9], Eqs. (4.10) - (4.12)) upon neglecting small terms satisfying relations (7). The result is:

$$N^{\alpha\beta} n_{\beta} = \bar{N}^{\alpha}, \quad (1-\nu) Dq^{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} + \nu Dq_{\alpha}^{\alpha} = \bar{M}_n, \quad (20, 21)$$

$$Dq_{\beta}^{\beta}|^{\alpha} n_{\alpha} + D(1-\nu) (q^{\alpha\beta} n_{\alpha} t_{\beta})_{,s} = \bar{M}_{t,s} - \bar{Q}, \quad (22)$$

where  $\bar{N}^{\alpha}$  are the components of the membrane force,  $\bar{Q}$  is the shear force,  $\bar{M}_n$  is the bending moment and  $\bar{M}_t$  represents the torque, all prescribed per unit length of the undeformed

med edge but resolved with respect to the deformed basis (its vectors have approximately the same magnitudes as the undeformed base vectors, because of small strains, but may have quite different directions, since displacements and rotations are not restricted);  $n_\alpha$  is the unit normal to the undeformed edge surface,  $t_\alpha$  is the unit tangent to the undeformed edge curve,  $( )_{,s}$  indicates differentiation with respect to the undeformed arc length.

Deformational boundary conditions represent another type of displacement-free conditions. A set suitable for our purposes is readily derived from Pietraszkiewicz ([2], Eqs. (4.4.40) and (6.3.8)), after simplifications based on (7), in the form:

$$q^{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta = k_t, \quad q^{\alpha\beta} t_\alpha n_\beta = k_{tn}, \quad (23, 24)$$

$$t^\alpha e^{\lambda\beta} q_{\lambda\alpha|\beta} + (t^\alpha n^\beta g_{\alpha\beta})_{,s} = k_n, \quad t^\alpha t^\beta g_{\alpha\beta} = g_t. \quad (25, 26)$$

Here  $k_t$ ,  $k_{tn}$  and  $k_n$  denote the changes of the normal curvature, the geodesic torsion and the geodesic curvature of the boundary curve, and  $g_t$  is its elongation. When the edge is clamped, for instance, all these quantities are zero.

With (14) and (16) the above static and deformational boundary conditions may be easily represented in terms of the stress and strain functions.

## 5. Conclusions

The two differential equations and the static and deformational boundary conditions obtained in this paper for shells of slowly varying curvatures, undergoing small strains with unrestricted displacements and rotations are fairly simple, but must be used with discretion. First, a word of caution should be said in regard to the simplifications made in deriving the equations, which were based on a qualitative rather than quantitative argument. Therefore it is imperative that each solution of our simplified equations be checked for consistency with the original, unsimplified equations. These latter equations, as Koiter [1] points out, are unsuitable for shell stability problems and so are, of course, the reduced equations presented here. Finally, there is apparently no variational formulation equivalent to our differential equations and boundary conditions; this is a serious drawback from a computational viewpoint.

In theoretical perspective, our result seems worth while, as it considerably expands the limits of validity of the various similar equations known previously.

## References

1. W. T. KOITER, *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. B69(1966) 1 - 54.
2. W. PIETRASZKIEWICZ, *Finite rotations and Lagrangean description in the non-linear theory of shells*, PWN, Warszawa-Poznań 1979.
3. F. JOHN, *Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations*, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965) 235 - 267.
4. H. DUDDECK, *Biegetheorie der allgemeinen Rotationsschalen mit schwacher Veränderlichkeit der Schalenkrümmungen*, Ingenieur-Archiv 33 (1964) 279 - 300.
5. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w tarczach, płytach i powłokach*, PWN, Warszawa 1976.
6. L. H. DONNELL, *Stability of thin-walled tubes under torsion*, NACA, Rep. No. 479, 1933.

7. X. M. Муштари, *Некоторые обобщения теории тонких оболочек*, Изв. физ. Мат. Казанск, Унив. 2, сер. 8, 1938.
8. В. З. Власов, *Общая теория тонких оболочек*, Москва - Ленинград 1949.
9. D. A. DANIELSON, *Simplified intrinsic equations for arbitrary elastic shells*, Int. J. Eng. Sci. 8 (1970) 251 - 259.
10. Z. RYCHTER, *O porównaniu rozwiązań w teorii powłok walcowych i teorii sprężystości*, Arch. Inż. Łąd. 30 (1984) 585 - 593.
11. Z. RYCHTER, *Zredukowane liniowe równania powłok o wolno zmiennych krzywiznach*, Mech. Teor. Stos. 22 (1984) 613 - 620.

#### Резюме

#### НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБОЛОЧЕК С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ КРИВИЗНАМИ

Общие нелинейные уравнения равновесия и условия совместности деформации тонких, упругих оболочек сведены к двум уравнениям для функции напряжений и функции деформаций. Приведены соответствующие статические и деформационные граничные условия. Предположено, что деформации малы а кривизны изменяются медленно, но перемещения и обороты не ограничены. Полученные результаты обобщают известные уравнения пологих оболочек, оболочек малой Гауссовой кривизны и оболочек с медленно изменяющимися кривизнами.

#### Streszczenie

#### NIELINIOWE RÓWNANIA POWŁOK O WOLNO ZMIENIAJĄCYCH SIĘ KRZYWIZNACH

Ogólne nieliniowe równania równowagi i warunki nierozdzielności cienkich powłok sprężystych zredukowano do dwóch równań z funkcją naprężeń i funkcją odkształceń. Przedstawiono odpowiednie statyczne i deformacyjne warunki brzegowe. Założono małe odkształcenia i łagodną zmienność krzywizn powłoki, natomiast przemieszczenia i obroty nie są ograniczone. Otrzymane wyniki są ogólniejsze od znanych równań powłok o małej wyniosłości, powłok o małej krzywiznie Gaussa oraz powłok o łagodnie zmiennych krzywiznach.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 stycznia 1987 roku.*



## ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA PRZEPŁYWU IDEALNEGO CZYNNIKA ŚCIŚLIWEGO W PALISADZIE PROFILI METODĄ WARIACYJNĄ

M. J. CIAŁKOWSKI

*Politechnika Poznańska*

### Wykaz ważniejszych oznaczeń

$w$	— wektor prędkości względnej
$\omega$	— wektor prędkości kątowej
$u$	— wektor prędkości obwodowej
$c$	— wektor prędkości bezwzględnej
$a$	— lokalna prędkość dźwięku
$\Phi$	— potencjał prędkości
$P$	— ciśnienie
$P_0$	— ciśnienie całkowite
$\rho$	— gęstość
$\kappa$	— wykładnik izentropy
$F_r$	— jednostkowa siła odśrodkowa
$F_{Cor}$	— jednostkowa siła Coriolisa
$V, H^1(\Omega)$	— przestrzeń Hilberta
$\Omega$	— obszar przepływu
$\partial\Omega$	— brzeg obszaru $\Omega$
$\hat{n}$	— jednostkowy wektor normalny do brzegu

W zagadnieniach przepływowych maszyn wirnikowych ważną rolę odgrywa wyznaczenie pól prędkości, ciśnień, gęstości itp. W związku z rozwojem metod numerycznych oraz elektronicznych maszyn cyfrowych stało się możliwe wyznaczenie rozkładów prędkości dla niektórych ważnych technicznie przypadków. W niniejszej pracy wyprowadzono funkcjonal energii dla przepływu potencjalnego czynnika ściśliwego z uwzględnieniem doprowadzenia pracy w kole wirnikowym. Minimalizacja funkcjonału energii jest równoważna równaniom ruchu [12]. Ujęcie opisu przepływu w postaci całki energii jest bardzo wygodne do stosowania metody elementu skończonego, która w naturalny sposób pozwala uwzględnić nieregularne obszary. Wariacyjne (energetyczne) ujęcie różnych przy-



padków przepływu czynnika ściśliwego było przedmiotem prac [2, 3, 5, 6, 8]. Dla przepływu transonicznego w maszynach przepływowych szereg pozycji bibliograficznych jest przedstawionych w pracy [13]. W niniejszej pracy zbadano możliwość minimalizacji funkcjonału energii za pomocą metody odwzorowania zwięźającego oraz metody Newtona dla przepływu poddźwiękowego i transonicznego. W końcowej części pracy przedstawiono algorytm znalezienia rozwiązania w obszarze dyskretnym dla przypadku stacjonarnego przepływu przez płaską palisadę profilów.

### 1. Podstawowe równania

— Równanie ruchu.

Równanie to dla przypadku stacjonarnego ma postać [4]:

$$\frac{D\mathbf{w}}{dt} = \nabla \left( \frac{1}{2} w^2 \right) - \mathbf{w} \cdot \text{rot } \mathbf{w} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P,$$

lub po obustronnym pomnożeniu przez  $\mathbf{w}$ :

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{1}{2} w^2 \right) = \mathbf{w} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} w^2 \right) = \mathbf{w} \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \mathbf{w} \nabla P, \quad (1)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_{cor}.$$

— Równanie ciągłości przepływu:

$$\text{div}(\rho \mathbf{w}) = 0 \quad \text{lub} \quad \rho \text{div } \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla \rho = 0. \quad (2)$$

— Równanie energii.

W maszynach przepływowych wygodnie jest używać równania energii nie w postaci różniczkowej lecz skończonej. Ma to miejsce szczególnie w przypadkach, w których następuje doprowadzenie (względnie odprowadzenie) pracy. W adiabaticznym przepływie stacjonarnym ilość pracy przekazanej czynnikowi wzdłuż linii prądu wyraża zależność [1, 9]:

$$I_t = i_2 - i_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2). \quad (3)$$

Przekazana praca może być wyrażona również równaniem Eulera dla maszyn przepływowych w postaci:

$$I_t = u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u} = \mathbf{u}_2 \mathbf{c}_2 - \mathbf{u}_1 \mathbf{c}_1. \quad (4)$$

Z porównania (1) i (2) otrzymujemy nową funkcję  $I$  zwaną rotalpią:

$$I = i_1 + \frac{1}{2} c_1^2 - u_1 c_{1u} = i_2 + \frac{1}{2} c_2^2 - u_2 c_{2u} = i + \frac{1}{2} c^2 - u c_u = \text{const}. \quad (5)$$

Z trójkąta prędkości (rys. 1) wynika, że iloczyn  $u c_u$  z równania (4) możemy wyrazić przez prędkość względną  $w$  i wypadkową  $c$ , mianowicie:

$$w^2 = c^2 + u^2 - 2u c_u = c^2 + u^2 - 2u c,$$

a stąd:

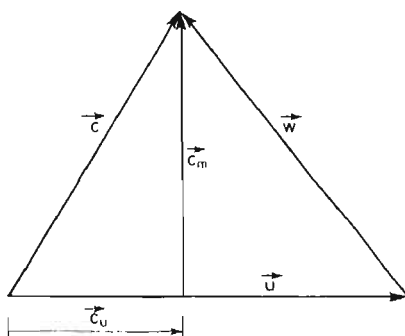
$$I = i + \frac{1}{2} c^2 - u c_u = i + \frac{1}{2} w^2 - \frac{1}{2} u^2 = i + \frac{1}{2} w^2 - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = \text{const}. \quad (6)$$

Ponieważ rotacja jest stała wzdłuż linii prądu więc jej gradient jest wektorem prostopadłym do linii prądu, co prowadzi do zerowania się następującego iloczynu:

$$\boldsymbol{w} \cdot \nabla I = 0 \quad \text{lub} \quad \boldsymbol{w} \cdot \nabla a_0^2 = 0. \quad (6a)$$

— Równanie przemiany:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} i. \quad (7)$$



Rys. 1.

W dalszych rozważaniach wykorzystamy zależność:

$$a^2 = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_s = \kappa \frac{P}{\rho} \quad \text{skąd} \quad a^2 = (\kappa - 1) \cdot i,$$

więc:

$$\nabla P = a^2 \nabla \rho. \quad (9)$$

Ze względu na jednolitość oznaczeń oraz ciągłość przejścia z  $\omega \rightarrow 0$ , prędkość dźwięku odpowiadająca rotacji całkowitej będziemy oznaczać również przez  $a_0$  jak w przypadku  $\omega = 0$ ; wtedy  $a_0 = (\kappa - 1) \cdot I$ . Przeto zależność (6) przyjmie postać:

$$I = \frac{a_0^2}{\kappa - 1} = \frac{a^2}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{w}^2 - \boldsymbol{u}^2) \quad \text{lub} \quad a_0^2 = a^2 + \frac{\kappa - 1}{2} (\boldsymbol{w}^2 - \boldsymbol{u}^2) \quad (10)$$

Wykorzystując zależność (9) wprowadzimy równanie ruchu (1) do równania ciągłości (2), stąd otrzymujemy równanie:

$$a^2 \operatorname{div} \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \cdot \left[ \boldsymbol{F} - \nabla \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{w}^2 \right) \right] = 0.$$

Prędkość dźwięku w powyższym równaniu możemy wyznaczyć z zależności (10), stąd mamy następującą postać równania ciągłości:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} + \frac{\boldsymbol{w} \cdot \left[ \boldsymbol{F} - \nabla \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{w}^2 \right) \right]}{a_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2} (\boldsymbol{w}^2 - \boldsymbol{u}^2)} = 0. \quad (11)$$

Wyznamy następujący iloczyn występujący w równaniu (11):

$$\boldsymbol{w} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{w} (\boldsymbol{F}_r + \boldsymbol{F}_{Cor}) = \boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{i} \cdot \omega^2 x + \boldsymbol{j} \cdot \omega^2 y) - 2\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{F}_r, \quad (12)$$

gdyż iloczyn

$$\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{w}) = 0,$$

tzn. siła Coriolisa nie wykonuje pracy.

Rozważmy teraz drugi składnik zależności (11); wykorzystamy zależności (6a) i (12):

$$\boldsymbol{w} \cdot \left[ \boldsymbol{F} - \nabla \left( \frac{1}{2} w^2 \right) \right] = \boldsymbol{w} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} w^2 \right) = a_0^2 f^{\kappa-1} \cdot \boldsymbol{w} \cdot \nabla (\ln f), \quad (13)$$

gdzie:

$$f = \frac{\rho}{\rho_0} - \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{w^2 - u^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}; \quad a_*^2 = \frac{2}{\kappa+1} a_0^2. \quad (14)$$

Stąd:

$$\frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa = \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{w^2 - u^2}{a_*^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad (15)$$

przy czym wielkości  $P_0, \rho_0$  są odniesione do rotalpii  $I_0$ .

Po uwzględnieniu zależności (13) równanie ciągłości (11) jest następujące:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \cdot \nabla (\ln f) = 0 \quad \text{lub} \quad \operatorname{div}(f \boldsymbol{w}) = 0. \quad (16)$$

Zakładamy dalej, że przepływ bezwzględny jest niewirowy, tzn. istnieje potencjał prędkości  $\Phi$  spełniający zależność:

$$\nabla \Phi = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \quad (17)$$

Wprowadzając zależność (17) do równania (16) i wykonując różniczkowanie otrzymujemy podstawowe równanie gazodynamiki dla maszyn przepływowych:

$$(a^2 - w_x^2) \Phi_{xx} + (a^2 - w_y^2) \Phi_{yy} + (a^2 - w_z^2) \cdot \Phi_{zz} - 2w_x w_y \Phi_{xy} - 2w_x w_z \Phi_{xz} - \\ - 2w_y w_z \Phi_{yz} + \boldsymbol{w} (\Phi_x \cdot \nabla u_x + \Phi_y \cdot \nabla u_y + \Phi_z \cdot \nabla u_z) = 0, \quad (18)$$

a dla przypadku dwuwymiarowego:

$$(a^2 - w_x^2) \Phi_{xx} - 2w_x w_y \Phi_{xy} + (a^2 - w_y^2) \Phi_{yy} = 0, \quad (19)$$

przy czym  $\Phi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \dots$  itd.

Wyznaczmy wyróżnik równania (19):

$$\Delta = 4w_x^2 w_y^2 - 4(a^2 - w_x^2)(a^2 - w_y^2) = -4a^4 \left( 1 - \frac{w^2}{a^2} \right) = \\ = -4a^4 \frac{1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a^2} - \frac{w^2}{a^2}}{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \frac{u^2}{a^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \frac{w^2}{a^2}}. \quad (20)$$

Znak wyróżnika  $\Delta$  decyduje o charakterze równania (19), mianowicie:

$$\begin{aligned} \Delta < 0 \text{ (typ eliptyczny) wtedy } \frac{w^2}{a^2} < 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a^2}, \\ \Delta > 0 \text{ (typ hiperboliczny) wtedy } \frac{w^2}{a^2} > 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a^2}, \\ \Delta = 0 \text{ (linia paraboliczności) wtedy } \frac{w^2}{a^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a^2} = 1. \end{aligned} \quad (21)$$

Miejsce geometryczne punktów dla których  $\Delta = 0$  dzieli obszar przepływu na obszar poddźwiękowy oraz obszar naddźwiękowy. Wyróżnik  $\Delta$  będzie odgrywać istotną rolę przy badaniu zbieżności procesów iteracyjnych.

## 2. Ujęcie wariacyjne równania ciągłości

Równanie (16) na mocy (17) możemy napisać w następującej postaci:

$$\operatorname{div}(fw) = \operatorname{div} \left\{ \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} (\nabla\Phi - u) \right\} = 0. \quad (22)$$

Równanie Eulera rachunku wariacyjnego [7] jest następujące:

$$\frac{\partial F}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi_z} \right) = 0, \quad (23)$$

gdzie funkcja  $F = F(\Phi, \Phi_x, \Phi_y)$  jest funkcją tworzącą.

Z porównania (23) z (22) mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \Phi} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \Phi_x} &= - \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{1}{1-\kappa}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - u_x \right), \\ \frac{\partial F}{\partial \Phi_y} &= - \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} - u_y \right), \\ \frac{\partial F}{\partial \Phi_z} &= - \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} - u_z \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Całkowanie układu równań (24) daje:

$$F(\nabla\Phi, u, a_*) = \frac{\kappa+1}{2\kappa} a_*^2 \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} + \frac{\kappa+1}{2\kappa} \cdot C, \quad (25)$$

lub

$$F(w, u, a_*) = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \cdot a_*^2 \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{w^2 - u^2}{a^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} + \frac{\kappa+1}{2\kappa} \cdot C. \quad (25a)$$

Stałą całkowania określamy z warunku istnienia ciągłego przejścia od przepływu czynnika ściśliwego do przepływu czynnika nieściśliwego ( $a_* \rightarrow \infty$ ). Łatwo pokazać, że  $C = -a_*^2$  a stąd:

$$F(w, u, a_*) = \frac{\kappa+1}{2\kappa} a_*^2 \left[ \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{w^2 - u^2}{a_*^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right]. \quad (26)$$

Na mocy (15) otrzymujemy:

$$F(w, u, a_*) = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \cdot a_*^2 \left( \frac{P}{P_0} - 1 \right) = \frac{\kappa+1}{2\kappa} a_*^2 \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa - 1 \right]. \quad (26a)$$

Funkcja  $F$  posiada wymiar energii:

$$[F] = [a_*^2] = [m^2/s^2] = [J/kg].$$

W szczególnym przypadku dla przepływu czynnika nieściśliwego ( $a_* \rightarrow \infty$ ) funkcja  $F$  ma postać:

$$F(w, u, \infty) = -\frac{1}{2} (w^2 - u^2) = -\frac{1}{2} [(\nabla\Phi)^2 - 2\mathbf{u} \cdot \nabla\Phi]. \quad (26b)$$

Całka wariacyjna z uwzględnieniem warunków brzegowych wyraża się następującym wzorem:

— dla przepływu czynnika ściśliwego:

$$J(\Phi, u, a_*) = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} a_*^2 \left\{ \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - \mathbf{u})^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right\} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \chi(s, \Phi, \Phi_s) ds, \quad (27)$$

— dla przepływu czynnika nieściśliwego:

$$J(\Phi, u, \infty) = \lim_{a_* \rightarrow \infty} J(\Phi, u, a_*) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\nabla\Phi)^2 - 2\mathbf{u} \cdot \nabla\Phi] d\Omega + \int_{\partial\Omega} \chi(s, \Phi, \Phi_s) \cdot ds. \quad (28)$$

W przedstawiony sposób zagadnienie stacjonarnego przepływu idealnego czynnika ściśliwego sprowadziliśmy do zagadnienia optymalizacji funkcjonału energii. Aby wyznaczyć nieznaną funkcję  $\chi$  wyznaczmy pierwszą wariację funkcjonału (27) [14].

$$\delta J = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} [F]_{\Phi} \delta\Phi d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left( F_{\Phi_x} \frac{dy}{ds} + F_{\Phi_y} \frac{dx}{ds} + F_{\Phi_z} \frac{dz}{ds} + \chi_{\Phi} - \frac{d}{ds} \chi_{\Phi_s} \right) \delta\Phi ds,$$

$$[F]_{\Phi} = F_{\Phi} - \frac{\partial}{\partial x} F_{\Phi_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{\Phi_y} - \frac{\partial}{\partial z} F_{\Phi_z},$$

oraz  $[F]_{\Phi} = 0$  na podstawie (23) i (27). Zatem na brzegu  $\partial\Omega$  mamy:

$$F_{\Phi_x} \frac{dy}{ds} - F_{\Phi_y} \frac{dx}{ds} + F_{\Phi_z} \frac{dz}{ds} + \chi_{\Phi} - \frac{d}{ds} \chi_{\Phi_s} = 0. \quad (29)$$

Przekształćmy dalej pierwszą część zależności (29) do innej postaci, mianowicie:

$$F_{\Phi_*} \frac{dy}{ds} - F_{\Phi_y} \frac{dx}{ds} + F_{\Phi_z} \frac{dz}{ds} = f(\nabla\Phi - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = f \cdot w_n \quad (30)$$

$w_n$  — składowa normalna prędkości  $\vec{w}$

Ponieważ  $\chi_{\Phi_*} = 0$  przeto z zależności (29) po uwzględnieniu wyniku (30) mamy:

$$\chi_{\Phi} = f \cdot w_n = p(s),$$

a stąd funkcja  $\chi$  ma postać:

$$\chi = \Phi(s) \cdot p(s).$$

Ostatecznie funkcjonał energii (wzięty ze znakiem przeciwnym) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} J(\Phi, \mathbf{u}, a_*) &= -\frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} a_*^2 \left\{ \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - \mathbf{u})^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right\} d\Omega + \\ &- \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot p(s) ds = -\frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} a_*^2 \left[ 1 - \frac{P(\Phi, \mathbf{u}, a_*)}{P_0} \right] \cdot d\Omega - \\ &- \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot p(s) \cdot ds, \end{aligned} \quad (31)$$

gdzie funkcja:

$$p(s) = \frac{\rho}{\rho_0} w_n = \Delta m,$$

wyraża jednostkowe natężenie przepływu masy przez jednostkowy element powierzchni  $\partial\Omega$ .

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcjonału energii (31) jest zerowanie się I wariacji. Niech  $v \in V(\Omega)$ ,  $\alpha \in R^1$ , wtedy:

$$\begin{aligned} \delta J &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(\Phi + \alpha \cdot v, \mathbf{u}, a_*) - J(\Phi, \mathbf{u}, a_*)}{\alpha} = \\ &= \int_{\Omega} (\nabla\Phi - \mathbf{u}) \cdot \nabla v \cdot \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - \mathbf{u})^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} d\Omega - \int_{\partial\Omega} v \cdot p(s) \cdot ds, \end{aligned} \quad (32)$$

lub:

$$\delta J = \int_{\Omega} w \cdot \nabla v \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{w^2 - u^2}{a_*^2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} d\Omega - \int_{\partial\Omega} v \cdot p(s) ds. \quad (32a)$$

Kładąc  $\delta J = 0$  otrzymujemy równanie wariacyjne:

$$\int_{\Omega} (\nabla\Phi - \mathbf{u}) \cdot \nabla v \cdot \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - \mathbf{u})^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} d\Omega = \int_{\partial\Omega} v \cdot p(s) \cdot ds, \quad (33)$$

z którego można wyznaczyć rozkład prędkości dla zadanej funkcji  $p(s)$ .

Dla przepływu czynnika nieściśliwego ( $a_* \rightarrow \infty$ ):

$$\delta J = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} vp(s) \cdot ds. \quad (34)$$

Zauważmy, że równanie wariacyjne (33) jest nieliniowe. Stanowi to dość duże utrudnienie numeryczne, które można pokonać stosując metody iteracyjne rozwiązywania równań nieliniowych. O zbieżności procesów iteracyjnych decyduje znak drugiej wariacji  $\delta^2 J$  funkcjonału energii (31). Ponieważ  $\delta^2 J = \delta(\delta J)$  przeto dla  $\alpha \in R^1$  mamy:

$$\begin{aligned} \delta^2 J(\mathbf{w}, \mathbf{u}, a_*, v, h) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\delta J(\mathbf{w} + \alpha \nabla h, \mathbf{u}, a_*, v) - \delta J(\mathbf{w}, \mathbf{u}, a_*, v)}{\alpha} = \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2-\kappa} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \frac{\mathbf{u}^2}{a_*^2} - \frac{\mathbf{w}^2}{a_*^2} \right) \nabla h \nabla v \, d\Omega \\ &+ \frac{2}{\kappa+1} \int_{\Omega} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2-\kappa} [(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) \cdot (\nabla h \cdot \nabla v) - (\mathbf{w} \cdot \nabla h) \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla v)] \, d\Omega. \end{aligned}$$

Wektory  $\mathbf{w}$ ,  $\nabla v$ ,  $\nabla h$  są wektorami współliniowymi, więc funkcja podcałkowa w drugiej całce jest równa tożsamościowo zeru.

Ostatecznie mamy:

$$\delta^2 J = \int_{\Omega} f^{2-\kappa} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \frac{\mathbf{u}^2}{a_*^2} - \frac{\mathbf{w}^2}{a_a^2} \right) \nabla h \nabla v \, d\Omega,$$

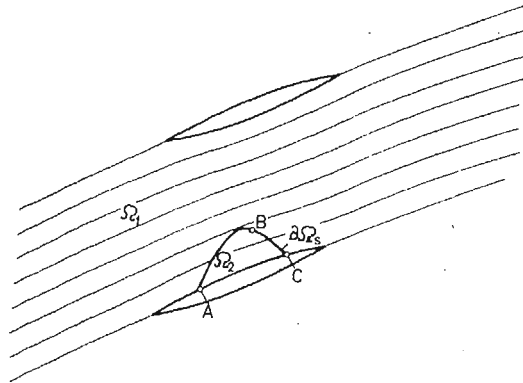
w szczególności dla  $h = v$ :

$$\delta^2 J = \frac{\kappa}{\kappa+1} \int_{\Omega} f^{2-\kappa} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \frac{\mathbf{u}^2}{a_*^2} - \frac{\mathbf{w}^2}{a_*^2} \right) (\nabla v)^2 \, d\Omega. \quad (35)$$

Druga funkcja podcałkowa w nawiasie jest wyróżnikiem charakterystycznym podstawowego równania gazodynamiki dla maszyn przepływowych, zależność (20).

Druga wariacja funkcjonału energii (31) spełnia nierówności:

- dla przepływu poddźwiękowego ( $\Delta < 0$ )  $\delta^2 J > 0$ ,
- dla przepływu nadźwiękowego ( $\Delta > 0$ )  $\delta^2 J < 0$ .



Rys. 2.

Aby druga wariacja funkcjonału energii była dodatnia również w obszarze naddźwiękowym należy zmodyfikować funkcjonal poprzez dodanie członu regularyzującego  $H(\Phi, u)$  ujmującego przyrost entropii na fali uderzeniowej. Różne możliwości regularyzacji przedstawiono w pracy [27].

### 3. Funkcjonał energii dla przepływu transonicznego

Pod pojęciem przepływu transonicznego rozumiemy taki przepływ, w którym występują lokalne pola naddźwiękowe prędkości, to znaczy, w obszarze  $\Omega_2$  (rys. 2) prędkość jest większa od prędkości dźwięku ( $\Delta > 0$ ,  $\delta^2 J < 0$ ) a w obszarze  $\Omega_1/\Omega_2$  prędkość jest mniejsza od prędkości dźwięku. Interesujące są tutaj tylko takie przypadki, gdy przyrost entropii na poszczególnych liniach prądu za falą uderzeniową jest bardzo mały. Wtedy wielkość wektora rotacji prędkości jest do pominięcia [15, 16] i przepływ za falą uderzeniową możemy traktować jako bezwirowy i potencjał prędkości będzie funkcją ciągłą na fali uderzeniowej.

Na linii  $AB$ , (rys. 2,) prędkość przepływu jest równa prędkości dźwięku. Na linii  $BC$  występuje fala uderzeniowa. Dla obszaru  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  całki energii mają postać (funkcja  $p(s)$  na profilu zeruje się):

$$J_1 = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} a_*^2 \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi_1 - \mathbf{u})^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right\} d\Omega +$$

$$- \int_{\partial\Omega} \Phi_1 p_1(s) ds - \int_{\partial\Omega_s} \Phi_1 p_1(s) ds$$

$$J_2 = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} a_*^2 \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi_2 - \mathbf{u})^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right\} d\Omega +$$

$$+ \int_{\partial\Omega_s} \Phi_2 p_2(s) \cdot ds + H(\Phi, u).$$

Ze względu na ciągłość masy i potencjału prędkości na fali uderzeniowej zachodzi równość:

$$\Phi_1 \varrho_1 w_{n_1} = \Phi_2 \varrho_2 w_{n_2} \quad \text{na} \quad \partial\Omega_s; \quad \varrho w_n|_{\partial\Omega} = p(s),$$

przeto:

$$\int_{\partial\Omega_s} \Phi_1 \cdot p_1(s) \cdot ds - \int_{\partial\Omega_s} \Phi_2 p_2(s) ds = 0,$$

oraz na mocy ciągłości funkcji  $\Phi$  w całym obszarze  $\Omega$ :

$$J = J_1 + J_2 = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} a_*^2 \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - \mathbf{u})^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right\} d\Omega +$$

$$- \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot p(s) \cdot ds + H(\Phi, u).$$



#### 4. Minimalizacja funkcjonału energii

Funkcjonał energii w postaci (31) nie jest funkcjonałem kwadratowym. Zatem I wariacja nie jest formą dwuliniową. Istnieje wiele metod minimalizacji funkcjonałów w zależności od pewnych własności funkcjonału (ściśła wypukłość, nieujemność II wariacji). Dalej zbadamy czy funkcjonał (31) może zostać zminimalizowany za pomocą metody odwzorowania zwężającego, dla funkcjonałów ściśle wypukłych. Zakładamy, że  $\Phi \in V(V$  — przestrzeń Hilberta). Zajmiemy się teraz zbadaniem ściślej wypukłości funkcjonału energii, ciągłości I i II wariacji. Spełnienie tych własności oraz nieujemność i ograniczoność II wariacji gwarantują istnienie odwzorowania zwężającego [10].

**4.1. Wypukłość funkcjonału energii.** Musimy zbadać, czy spełniony jest warunek ( $0 < \alpha < 1$ ):

$$J[(1-\alpha) \cdot \Phi + \alpha \cdot \varphi] \leq (1-\alpha)J(\Phi) + \alpha \cdot J(\varphi), \quad \varphi, \Phi \in V,$$

$$J(\Phi) = -\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_{\Omega} a_*^2 \left\{ \left[ 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2}{a_*^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right\} d\Omega +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot p(s) \cdot ds = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} a_*^2 [1 - f(\Phi)] \cdot d\Omega + \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot p(s) \cdot ds. \quad (36)$$

Ze względów fizycznych funkcja  $\Phi$  musi spełniać następujący warunek:

$$1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2 - u^2}{a_*^2} \geq 0. \quad (37)$$

Zajmijmy się zbadaniem wypukłości funkcji  $f(\Phi)$ . Dla wektora prędkości obwodowej istnieje funkcja  $U$  taka, że  $u = \nabla U$ .

Dokonyamy zatem przedstawienia  $\bar{\Phi} = \Phi - U$ , stąd:

$$f(\bar{\Phi}) = - \left[ 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left( \frac{\nabla\bar{\Phi}}{a_*} \right)^2 \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} =$$

$$= - \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = f(\lambda),$$

oraz:

$$f''(\lambda) = \frac{2\kappa}{\kappa+1} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda^2 \right)^{\frac{2-\kappa}{\kappa-1}} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \lambda^2 \right); \quad \lambda = \frac{\nabla\bar{\Phi}}{a_*}.$$

Zatem funkcja  $f(\bar{\Phi})$  na mocy nieujemności  $f''(\bar{\Phi})$  [19] jest wypukła w zakresie prędkości określonych nierównościami:

$$f''(\bar{\Phi}) = \frac{2\kappa}{\kappa+1} \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\bar{\Phi} - u)^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{2-\kappa}{\kappa-1}} \left[ 1 - \frac{(\nabla\bar{\Phi} - u)^2}{a_*^2} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} \right]$$

$$= \frac{2\kappa}{\kappa+1} \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{w^2 - u^2}{a_*^2} \right)^{\frac{2-\kappa}{\kappa-1}} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \frac{w^2}{a_*^2} \right) \geq 0 \quad (38)$$

jeśli:

$$1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \frac{w^2}{a_*^2} \geq 0,$$

to znaczy w zakresie przepływów poddźwiękowych.

Z nieujemności i wypukłości funkcji  $f(\Phi)$  wynika wypukłość funkcjonału energii (31). Ścisła wypukłość zachodzi zawsze, gdy  $f'' > 0$

**4.2. Ciągłość I i II wariacji funkcjonału energii.** Musimy sprawdzić, czy z warunku  $\Phi_n \rightarrow \Phi_0$  wynika  $J(\Phi_n) \rightarrow J(\Phi_0)$  oraz  $\delta^2 J(\Phi_n) \rightarrow \delta^2 J(\Phi_0)$ . Nietrudno zauważyć, że warunek ten dla (32) i (35) jest spełniony.

**4.3. Nieujemność (koercywność) II wariacji funkcjonału energii.**

— Przepływ poddźwiękowy

Dla przepływu poddźwiękowego nieujemność II wariacji wynika ze znaku wyróżnika (21) równania charakterystycznego i zawsze  $\delta^2 J > 0$ .

— Przepływ transoniczny

Dla słabych fal uderzeniowych przyrost entropii jest proporcjonalny do trzeciej potęgi z różnicy prędkości za i przed falą [16]:

$\Delta s = -A \cdot [(\nabla\Phi - \mathbf{u}) \cdot \nabla n_+ - (\nabla\Phi - \mathbf{u}) \cdot \nabla n_-]^3 > 0$  skąd  $w \cdot \nabla n_+ - w \cdot \nabla n_- \leq B$ ,  $A, B > 0$ , lub pisząc w postaci ogólniejszej [27]:

$$\operatorname{div}[(\nabla\Phi - \mathbf{u})] \leq B,$$

albo w postaci słabej;

$$- \int_{\Omega} (\nabla\Phi - \mathbf{u}) \nabla \eta d\Omega \leq B \int_{\Omega} \eta d\Omega, \quad \eta \in V_+ = \{\eta: \eta \in H_0^1(\Phi), \eta \leq 0\}. \quad (39)$$

Przyjmując skończenie wymiarową przestrzeń  $V$  z funkcjami bazowymi  $\{\varphi_i\}$ , nierówność (39) przyjmie postać:

$$- \int_{\Omega} (\nabla\Phi - \mathbf{u}) \nabla \varphi_i d\Omega \leq B \int_{\Omega} \varphi_i d\Omega \quad \bigwedge \varphi_i \in V. \quad (39a)$$

Nierówność (39a) dołączamy do funkcjonału energii przez zastosowanie funkcji kary, otrzymamy wtedy zmodyfikowany funkcjonał energii:

$$J_K(\Phi, \mathbf{u}, a_*) = J(\Phi, \mathbf{u}, a_*) + H(\Phi, \mathbf{u}),$$

gdzie:

$$H(\Phi, \mathbf{u}) = K \cdot \sum_{i=1}^N \left\{ \left[ - \int_{\Omega} (\nabla\Phi - \mathbf{u}) \nabla \varphi_i d\Omega - B \int_{\Omega} \varphi_i d\Omega \right]^+ \right\}^2, \quad t^+ = \max(0, t), \quad K > 0,$$

oraz:

$$\begin{aligned} \delta^2 J_K &= \frac{\kappa}{\kappa+1} \int_{\Omega} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2-\kappa} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \frac{w^2}{a_*^2} \right) \cdot (\nabla v)^2 d\Omega + 2K \cdot \left( \int_{\Omega} \nabla v \nabla \eta d\Omega \right)^2 \geq \\ &\geq (\mu_1 + \mu_2) \int_{\Omega} (\nabla v)^2 d\Omega = \mu \cdot \int_{\Omega} (\nabla v)^2 d\Omega, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2. \end{aligned}$$

Stałą  $B$  i kary  $K$  należy dobrać tak aby  $\delta^2 J_K > 0$  (wtedy  $\mu > 0$ ), oraz był spełniony warunek (39).

Dalej wykorzystamy nierówność Friedrichsa [18], otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\delta^2 J_K &= \mu \int_{\Omega} (\nabla v)^2 d\Omega = \mu \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} (\nabla v)^2 + \frac{1}{2} (\nabla v)^2 \right] d\Omega = \\
&= \mu \frac{C}{2} \int_{\Omega} \left[ v^2 d\Omega + \frac{1}{2} (\nabla v)^2 \right] d\Omega = \\
&\geq \mu \min \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} C \right) \int_{\Omega} [v^2 + (\nabla v)^2] d\Omega = \mu C_1 \|v\|_{H^1}^2, \\
C_1 &= \min \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} C \right) > 0.
\end{aligned} \tag{40}$$

Ograniczoność II wariacji wynika z ciągłości II wariacji. Wykazaliśmy zatem ciągłość I i II wariacji, nieujemność i ograniczoność II wariacji przeto na mocy twierdzenia [10] operacja  $T\Phi = \Phi - \gamma \cdot G(\Phi)$  jest operacją zwiężającą. Operacja  $T$  jest zawsze zwiężająca dla przepływów poddźwiękowych ( $\delta^2 J_K > 0$ ) oraz dla przepływów transonicznych, dla których  $\mu > 0$ .

Liczba  $\gamma \in \left( 0, \frac{2}{M^2} \right)$ ,  $\mu > 0$ , a stała  $M$  wynika z nierówności [10]:

$$\|G(u) - G(v)\| \leq M \|u - v\|.$$

W zależności od wyboru parametru  $\gamma$  proces iteracyjny oparty na metodzie odwzorowania zwiężającego jest szybciej lub wolniej zbieżny, najlepszą wartością jest  $\gamma = \mu/M^2$ . Dla przepływów transonicznych szczególnie trudno jest określić wartość dodatniej liczby  $\mu$ , gdyż obszar  $\Omega_2$  zależy od wielkości wektora prędkości napływu na palisadę oraz kąta napływu jak również geometrii palisady. Określenie zatem optymalnej wartości parametru  $\gamma$  jest stosunkowo trudne. Proces iteracyjny z parametrem  $\gamma \neq \gamma_{opt}$  jest wolnozbieżny. Znacznie szybszą zbieżność gwarantuje metoda Newtona, która jest zbieżna przy tych samych założeniach [10] co metoda odwzorowania zwiężającego. W zagadnieniach opływu palisady profili obok warunków brzegowych oraz geometrii palisady zadaje się kąt napływu w nieskończoności. Uwzględnienie kąta napływu jest łatwe przez wykorzystanie cyrkulacji. Mianowicie w przekroju  $\partial\Omega_3$  (który przyjmujemy jako leżący w nieskończoności) składowa styczna  $v_y$ , prędkości jest związana z cyrkulacją następująco:

$$\Gamma_3 = \int_{\partial\Omega_3} \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy = \Phi_2 - \Phi_1,$$

a z drugiej strony uwzględniając fakt, że składowa  $v_y$  ma stałą wartość w przekroju  $\partial\Omega_3$  mamy:

$$\Gamma_3 = \int_{\partial\Omega_3} \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy = \int_{\partial\Omega_3} v_y dy = v_y (y_2 - y_1) = (y_2 - y_1) v_x \operatorname{tg} \alpha_{-\infty}.$$

Zatem:

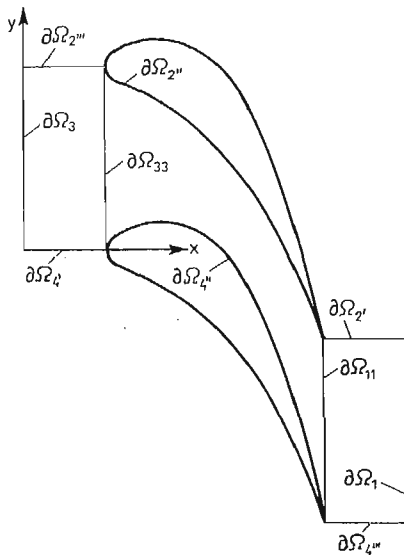
$$\Phi_2 - \Phi_1 = (y_2 - y_1) v_x \operatorname{tg} \alpha_{-\infty}, \tag{46}$$

gdzie indeksy 1 i 2 oznaczają punkt początkowy i końcowy leżący w przekroju  $\partial\Omega_3$  w kierunku osi  $y$ .

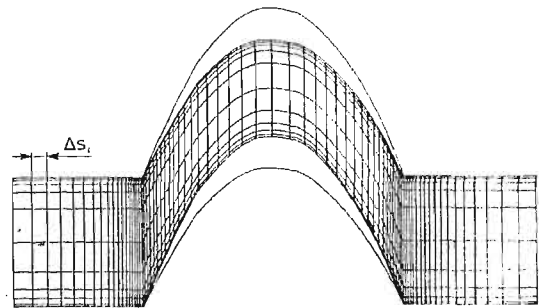
W przypadku zadanego kąta napływu  $\alpha_{-\infty}$  równanie wariacyjne (33) należy rozwiązać łącznie z warunkiem (46). Wprowadzenie liniowego ograniczenia (46) nie zmienia przedstawionych własności funkcjonału  $J(\Phi, u, \alpha_*)$ .

## 5. Przykład obliczeniowy

Przedstawione rozważania wykorzystamy do określenia wielkości przepływowych w stacjonarnym przepływie idealnego czynnika ściśliwego przez płaską palisadę o nieskończonej liczbie łopatek. Ze względu na stacjonarność przepływu ograniczymy się do obszaru pokazanego na rys. 3. W szczególnym przypadku obszar pokazany na rys. 3 może się zawierać między kolejnymi szczelinami międzywieńcowymi (linie  $\partial\Omega_1$  i  $\partial\Omega_3$  leżą w środku szczeliny międzywieńcowej).



Rys. 3.



A1 = 10,00	A4 = 16,00
A2 = 10,00	A5 = 16,00
A3 = 16,00	A6 = 10,00
L1 = 10	LV = 20
L2 = 80	LN = 20

Rys. 4.

Na liniach  $\partial\Omega_{2'''}$  i  $\partial\Omega_{4'}$  oraz  $\partial\Omega_{2'}$  i  $\partial\Omega_{4'''}$  ze względu na periodyczność mamy takie same składowe prędkości (wielkości nieznanne). Na linii  $\partial\Omega_3$  rozkład prędkości jest zadany. Natomiast na linii  $\partial\Omega_1$  nieznanne rozkład prędkości spełnia warunek ciągłości. Ponadto nieznanne jest kąt sływu. Funkcjonał energii (31) wymaga znajomości rozkładu prędkości  $p(s)$  na całej linii  $\partial\Omega$ .

Funkcja  $p$  spełnia warunek ciągłości:

$$\int_{\partial\Omega} p(s) ds = 0, \quad p \in L^2(\partial\Omega). \quad (41)$$

Zastosowanie zasady minimum energii potencjalnej (zasady najmniejszego działania) spowoduje wybranie z klasy funkcji  $p(s)$  spełniających warunek ciągłości (41) takiej, która nada całce energii wartość minimalną. W klasie funkcji  $\Phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\partial\Omega)$  odpowiada to spełnieniu równania ciągłości nie tylko w postaci wariacyjnej (33) lecz również w postaci różniczkowej. W omawianym zagadnieniu rozwiązania poszukujemy w skończeniu wymiarowej przestrzeni  $H^1(\Omega) \cap L^2(\partial\Omega)$ . W tej przestrzeni na brzegu zadajemy funkcję  $p(s)$  (równanie wariacyjne (33)) a równanie ciągłości na brzegu  $\partial\Omega$  jest spełnione

w następującym sensie:

$$\int_{\partial\Omega} v \left[ p(s) - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] ds = 0 \quad v, \Phi \in H^1(\partial\Omega). \quad (42)$$

W dyskretnym obszarze  $\Omega$  fizycznemu rozwiązaniu najbliższe jest to rozwiązanie, które na każdym odcinku obszaru dyskretnego spełnia najlepiej równanie ciągłości w zwykłym sensie. Dla obszaru pokazanego na rysunku nr 4 otrzymujemy:

$$\delta = \sum_i \left| \int_{\partial\Omega_i} \left[ p(s) - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] ds \right| = \sum_i \delta_i = \delta_{min}. \quad (43)$$

W otoczeniu krawędzi napływu i spływu występują stosunkowo duże gradienty prędkości a długość przedziału całkowania  $|\partial\Omega|$  jest stosunkowo mała i udział wielkości  $\delta_i$  w sumie (43) może być niewielki i numeryczne poszukiwanie minimum funkcji (43) może okazać się kłopotliwe. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy:

$$\delta_i = \left| \int_{\partial\Omega_i} \left[ p(s) - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] ds \right| = |\Delta s_i| \left| p(s) - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{s=s^*}, \quad s^* \in \partial\Omega_i.$$

Zatem pomijając tłumiący charakter wielkości  $|\Delta s_i|$  nowe wyrażenie odpowiadające wielkości  $\bar{\delta}$  charakteryzujące jakość rozwiązania ma postać:

$$\bar{\delta} = \sum_i \frac{1}{|\Delta s_i|} \left| \int_{\partial\Omega_i} \left[ p(s) - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] ds \right| = \sum_i \frac{\delta_i}{|\Delta s_i|}. \quad (44)$$

Otrzymaliśmy zatem wyrażenie na defekt masy z jednakowym stopniem wrażliwości dla każdego przedziału o długości  $|\Delta s_i|$ . Jako rozwiązanie fizyczne, będziemy uważać takie, które będzie minimalizować wyrażenie  $\bar{\delta}$  dla funkcji  $p(s)|_{\partial\Omega}$  spełniających warunków ciągłości.

Do generacji siatki obliczeniowej zastosowano zasadę zagęszczania siatki w otoczeniu punktów wokół których panują największe gradienty prędkości. Ponadto dla uproszczenia algorytmu numerycznego przyjęto taką samą liczbę węzłów w każdym przekroju prostokątnym do osi  $x$ , rys. 4.

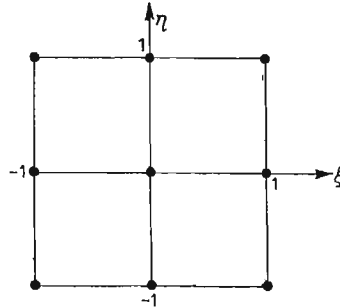
Na rys. 4 przedstawiono kierunki zagęszczania siatki. Wielkość zagęszczania w danym kierunku jest scharakteryzowana liczbą  $AI, I = 1, \dots, 6$ , która jest równa ilorazowi długości kroku pierwszego i ostatniego siatki w obszarze zagęszczania. Wyróżniono sześć obszarów zagęszczania, rys. 4:

- obszar 1, od pionowej linii środkowej kanału w kierunku linii  $\partial\Omega_{11}$
- obszar 2, od pionowej linii środkowej kanału w kierunku przekroju wlotowego palisady (linia  $\partial\Omega_{33}$ )
- obszar 3, od linii środkowej kanału w kierunku
- obszar 4, od przekroju  $\partial\Omega_1$  w kierunku przekroju wlotowego palisady (linia  $\partial\Omega_{11}$ )
- obszar 5, od przekroju  $\partial\Omega_3$  w kierunku przekroju wlotowego palisady (linia  $\partial\Omega_{33}$ )
- obszar 6, od linii środkowej kanału w kierunku linii  $\partial\Omega_4$ .

Na rys. 4 zaznaczono również liczbę podziału w kierunku osi  $y-L_1$ , w kierunku osi  $x-L_2$ , w obszarze dolotowym —  $LV$ , w obszarze wylotowym —  $LN$ .

Jeśli  $AI > 1$ ,  $I = 1, \dots, 6$ , wówczas następuje zagęszczenie siatki w kierunkach zaznaczonych na rys. 4. Jeśli  $AI < 1$ , wówczas kierunek zagęszczania jest przeciwny.

Zagęszczenie następuje według postępu geometrycznego. Jako parametry podstawowe służą: liczba  $AI$  określająca stopień zagęszczenia i liczba przedziałów w kierunku zagęszczania.



Rys. 5.

Do obliczeń numerycznych zastosowano metodę elementu skończonego z elementem czworokątnym typu lagranżowskiego z dziewięcioma węzłami. Uzyskano dzięki temu:

- wysoki stopień aproksymacji zadania wyjściowego,
- wysoki stopień aproksymacji profilu.

Minimalizacji funkcjonau (31) dokonano przez rozwiązanie nieliniowego równania wariacyjnego (33). Równanie to zlinearyzowano metodą Newtona [25, 26]. Proces iteracyjny ma następującą postać:

$$\int_{\Omega} \left\{ f_n \cdot (\nabla \Phi_{n+1} - \mathbf{u}) \nabla v - \frac{2}{\kappa + 1} \cdot \frac{[(\nabla \Phi_{n+1} - \mathbf{u})(\nabla \Phi_n - \mathbf{u})] \cdot [(\nabla \Phi_n - \mathbf{u}) \nabla v]}{a_*^2} f_n^{2-\kappa} \right\} d\Omega =$$

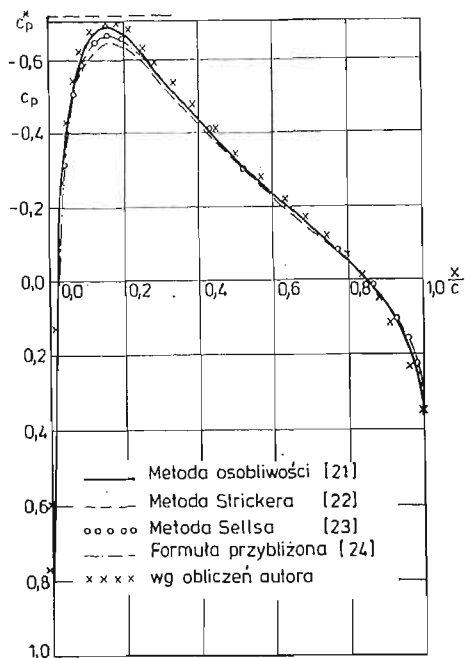
$$= \int_{\partial \Omega} v \cdot p(s) ds - \frac{2}{\kappa + 1} \int_{\Omega} \frac{(\nabla \Phi_n - \mathbf{u})^2 [(\nabla \Phi_n - \mathbf{u}) \nabla v]}{a_*^2} f_n^{2-\kappa} d\Omega, \quad n = 0, 1, \dots \quad (45)$$

Dla  $n = 0$  przyjęto  $\Phi_0 = 0$  i równanie (45) redukuje się do równania opisującego przepływ czynnika nieściśliwego. Podstawową zaletą procesu (45) jest uzyskanie szybkiej zależności oraz symetryczności macierzy głównej układu równań odpowiadającego zależności (45).

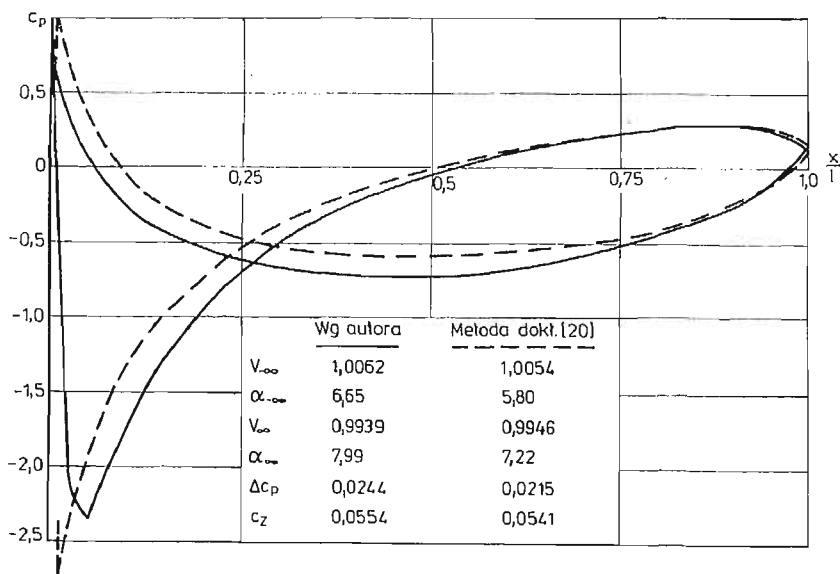
Na rys. 6 przedstawiono porównanie wyników przebiegu współczynnika ciśnienia w przypadku opływu profilu NACA 0012 według przedstawionej metody z wynikami innych autorów. Przedstawione wyniki uzyskano na siatce z 675 węzłami. Ze względu na wykorzystanie metody Newtona do rozwiązania nieliniowego równania (33), proces iteracyjny przerwano po 5 iteracji uzyskując oszacowanie w normie  $\|\Phi_5 - \Phi_4\|_{H^1} < 10^{-5}$ . Dla przypadku opływu palisady profili (złożonych z pojedynczych profili Bondera [20]) ciecżą doskonałą, porównanie wyników według metody odwzorowania konforemnego [20] z wynikami autora, przedstawiono na rys. 7.

Czas obliczeń na siatce o 675 węzłach kształtował się następująco (maszyna cyfrowa ODRA 1305)

— opływ pojedynczego profilu płynem ściśliwym, 5 iteracji  $\times$  7 min./iterację  
 --- opływ palisady cieżą doskonałą  $\sim 15$  min.



Rys. 6.



Rys. 7.

## Literatura

1. E. TULISZKA, *Sprężarki, dmuchawy i wentylatory*, WNT Warszawa 1969.
2. W. FISZDON, *Application of Variational Methods to the Solution of Practical Supersonic Flow Problems*, ZAMM, Tagungsheft 42, 1962
3. W. FISZDON, *Known applications of variational methods to transonic flow calculations*, Symposium Transsonicum Aachen, 1964.
4. W. J. PROSNAK, *Mechanika płynów*, Vol. II, PWN Warszawa 1971.
5. R. L. SELIGER, G. B. WHITHAM, *Variational principles in continuum mechanics*, Proc. Roy. Soc. A 305, 1-25, 1968.
6. K. G. GUDERLEY, O. P. BHUTANI, *On the Relation between Variational Principles for Inviscid Gas Flows in Spaces of Different Dimensions*, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). Vol. 24, 1973
7. A. KNECHSKE, *Differentialgleichungen*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1962.
8. B. KRAJEWSKI, *Variational Problems of the Theory of Three-Dimensional Flow Through Thermal Turbomachinery*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 6, 15, 1963.
9. W. TRAUPEL, *Thermische Turbomaschinen*, Bd. I, Springer-Verl. 1966
10. J. CEA, *Optimisation: Theorie et algorithmes*, Dunod, Paris 1971.
11. J. SZMELTER, *Metody komputerowe w mechanice*, BNI Warszawa 1980.
12. B. ŚREDNIAWA, *Hydrodynamika i teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1977
13. R. PIEPRZYK, M. CIAŁKOWSKI, *Analiza porównawcza istniejących metod obliczania osiowo-symetrycznego przepływu przez osiowe wieńce sprężarek transonicznych*, Opracowanie wykonane w ramach Problemu Międzyresortowego MR. I. 26, Praca niepublikowana. Poznań 1978.
14. W. I. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, Tom 4, cz. I. PWN, Warszawa 1962
15. A. H. SHAPIRO, *Compressible Fluid Flow*, The Ronald Press Company, New York, 1954.
16. L. LANDAU, E. LIFSZYC, *Mechanika ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa 1958.
17. K. MAURIN, *Analiza. Elementy cz. I.*, PWN, Warszawa 1974.
18. G. N. POŁOŻY, i inni, *Metody przybliżonych obliczeń*, WNT, Warszawa 1966
19. D. S. MITRINOVIĆ, *Elementarne nierówności*, PWN, Warszawa 1972.
20. M. E. KLONOWSKA, W. J. PROSNAK, J. K. SZYMAŃSKI, *Obliczanie opływu palisady prostoliniowej*, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN. Nr 44, 1976.
21. H. JÄGER, *Singularitätenverfahren höherer Ordnung zur Berechnung der ebenen Unterschallströmung*, Dissertation, Stuttgart 1984.
22. R. STRICKER, *Zur Berechnung der stationären unterkritischen Potentialströmung um ebene Profile beliebiger Form*, MMB — Bericht Nr UD — 135-74 (Ö), 1975.
23. C. C. L. SELLS, *Plane Subcritical flow past a lifting aerofil*, Proc. Roy. Soc. A. 308, 377 - 401, 1968.
24. Th. E. LABRUJERE, W. LOEVE, J. W. SLOFF, *An approximate method for the determination of the pressure distribution on wings in the lower critical speed range*, AGARD Cp 35, 71 - 1 - 17 - 10, 1968.
25. M. CIAŁKOWSKI, *Linearizacja wybranych równań mechaniki płynów za pomocą metody Newtona*, Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej — Maszyny Robocze i Pojazdy, 25, 1985.
26. M. CIAŁKOWSKI, *Linearisierung der gasdynamischen Grundgleichung für Strömungsmaschinen*, ZAMM, 66, 1986, 4, T 197 - 200.
27. M. O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI, P. PERIAUX, O. PIRONNEAU, G. POIRIER, *Application of Optimal Control and Finite Element Methode to the Calculation of Transonic Flows and Incompressible Viscous Flows*, Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique, Rapport de Recherche, No 294, Avril 1978.



*Praca została wykonana na podstawie badań przeprowadzonych w ramach stypendium im. A. v. Humboldta w „Institut für Strahlantriebe und Turboarbeitsmaschinen der RWTH Aachen”. Dir. Prof. Dr.-Ing. H. E. Gallus.*

Р е з ю м е

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИДЕАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ТЕКУЧЕЙ  
СРЕДЫ В РЕШЁТКЕ ПРОФИЛЕЙ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

В работе представлено вариационный подход к решению задачи течения невязкой и сжимаемой текучей среды в турбомашинах. Исследованы свойства первой и второй вариации функционала энергии, а также приведено метод решения нелинейного вариационного уравнения. Теоретические рассуждения иллюстрированы расчётным примером. Численные результаты получены методом конечных элементов с четырёхугольным элементом изопараметрическим с 9 узлами.

S u m m a r y

SOLUTION TO A PROBLEM OF THE IDEAL FLOW OF COMPRESSIBLE  
LIQUID IN CASCADE PROFILES BY VARIATIONAL METHOD

A variational approach to a problem of the flow of a non-viscous, compressible liquid in flow machines has been presented. The properties of the first and the second variation of the energy functional have been investigated as well as a method of solution of nonlinear variational equation. Theoretical investigations have been illustrated by numerical examples. The numerical results have been obtained by FEM method with quadrangle element isoparametric with 9 knots.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 kwietnia 1985 roku.*

STRUKTURA TURBULENCJI I BILANS JEJ ENERGII W WARSTWIE  
PRZYŚCIENNEJ NA POWIERZCHNI PRZEPUSZCZALNEJ

ALICJA JARŻA

*Politechnika Częstochowska*

Wykaz oznaczeń

- $B_f$  — parametr wymiany masy,  
 $c_f$  — współczynnik tarcia powierzchniowego,  
 $F$  — intensywność odsysania,  
 $G$  — parametr kształtu Clausera,  
 $H = \delta_1/\delta_2$  — parametr kształtu,  
 $k$  — liczba falowa,  
 $Re_M = \frac{U_\infty \cdot \delta_2}{\nu}$   
 $Re_x = \frac{U_\infty \cdot x}{\nu}$   
 $Re_\lambda = \frac{\sqrt{u'^2} \lambda}{\nu}$   
 $U$  — składowa wzdłużna prędkości średniej,  
 $U_\infty$  — prędkość średnia przepływu niezakłóconego,  
 $u_\tau^*$  — prędkość tarcia,  
 $u^+ = U/u_\tau$  — bezwymiarowa prędkość wzdłużna,  
 $v_w$  — prędkość normalna na ścianie,  
 $u', v', w'$  — składowe fluktuacji prędkości,  
 $\frac{\overline{q^2}}{2} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$  — energia kinetyczna turbulencji,  
 $y^+ = \frac{y \cdot u_\tau}{\nu}$  — bezwymiarowa współrzędna normalna,  
 $\delta$  — grubość warstwy przyściennej,  
 $\delta_1, \delta_2$  — miary liniowe straty wydatku i pędu,  
 $\nu$  — lepkość kinematyczna,

$\varepsilon$	— dysypacja energii,
$L$	— skala czasowa turbulencji,
$\tau$	— czas,
$\lambda$	— mikroskala Taylora,
$A$	— skala całkowita turbulencji.

## 1. Wstęp

Oddziaływanie na przebieg zjawisk zachodzących w warstwie przyściennej prowadzić może do poprawy własności aerodynamicznych opływanych ciał oraz do wzrostu efektywności procesów termicznych i chemicznych w przepływie przyściennym.

Jedną ze znanych i wykorzystywanych w praktyce inżynierskiej form sterowania przepływem w warstwie przyściennej jest powierzchniowa wymiana masy. Odsysanie i wydmuch w warstwie przyściennej umożliwiają ingerencję w poszczególne fazy jej rozwoju. Taki sposób sterowania warstwą przyścienną stosowany jest od dawna w konstrukcjach lotniczych do polepszania charakterystyk aerodynamicznych samolotów. Zainteresowanie turbulentną warstwą przyścienną z wydmuchem wynika ponadto z faktu praktycznego stosowania transpiracji w celu ochrony opływanych powierzchni przed działaniem wysokich temperatur. Odsysanie natomiast jest formą sterowania warstwą przyścienną o szczególnym znaczeniu w zapobieganiu oderwaniu.

Oceniając dotychczasowy stan wiedzy o przepływach z powierzchniową wymianą masy stwierdzić można, że w większości prac analizie poddano przypadek laminarnego ruchu płynu. Efekty tej grupy opracowań podsumowano m.in. w monografii Changa [1]. Nieliczne są natomiast prace dotyczące, dominującego w rzeczywistości, turbulentnego charakteru zjawisk zachodzących w warstwie przyściennej na powierzchni przepuszczalnej, przy czym najbardziej kompleksowe analizy przeprowadzone zostały dla przypadku z wydmuchem. Wymienić tu należy prace Stevensona [2], Simpsona [3] i Pimenty [4] oraz przede wszystkim monograficzne omówienie badań Kaysa [5] oraz Kaysa i Moffata [6] z Uniwersytetu Stanforda. Dotychczas opublikowane prace zawierają sformułowanie praw oporu i tarcia powierzchniowego przy opływie ciał przepuszczalnych oraz prezentują różne koncepcje opisu pól prędkości średniej, przy czym najbardziej znane są tu propozycje Tennekesa [7] i Heada [8]. Analiza ruchu średniego w warstwach przyściennych na powierzchniach przepuszczalnych rozszerzona została na przypadek opływu z gradientem ciśnienia — prace McLeana i Mellora [9] oraz Andersena, Kaysa i Moffata [10].

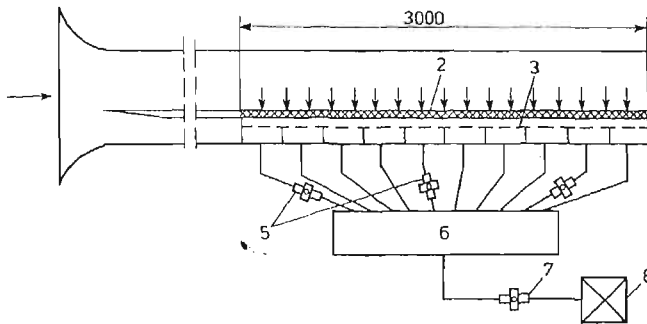
Istniejące opracowania nie określają jednakże struktury turbulencji w tego typu przepływie lecz ograniczają się do podania podstawowych jej charakterystyk (Rotta [11]), a zaproponowany przez Cebeciego i Smitha [12] zero-równaniowy model turbulencji nie ma charakteru ogólnego dla całej klasy przepływów przyściennych z odsysaniem i wydmuchem.

W tym stanie zagadnienia celowym wydaje się poznanie energetycznych mechanizmów turbulentnego transportu pędu w warstwie przyściennej na powierzchni przepuszczalnej. Eksperymentalne określenie cech mikrostruktury turbulencji wykorzystane być może do sformułowania postaci członów równania bilansowego energii kinetycznej turbulencji,

a w dalszej fazie do stworzenia modelu turbulencji, umożliwiającego ilościowy opis przepływu przyściennego z powierzchniową wymianą masy.

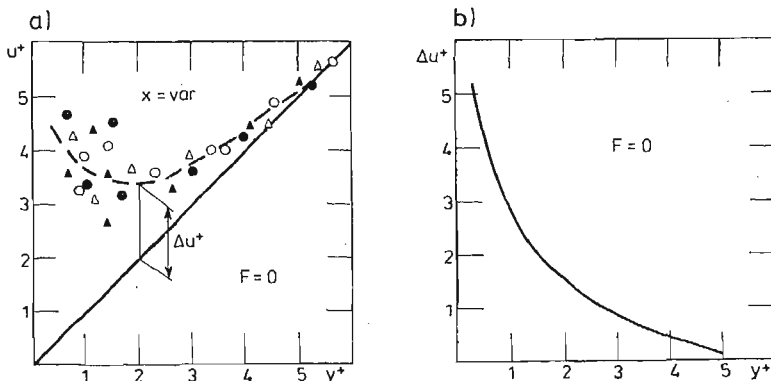
## 2. Metodyka eksperymentu

Omawiane badania doświadczalne przeprowadzone zostały przy użyciu stanowiska pomiarowego, którego schemat przedstawia rys. 1. Płyta pomiarowa (2) o długości  $\cong 3000$  mm stanowiła dno komory tunelu aerodynamicznego o przekroju poprzecznym  $400 \times 400$  mm. Przepuszczalna część płyty ułożona została z segmentów porowatych o dłu-



Rys. 1. Schemat stanowiska pomiarowego

gości 100 mm każdy, wykonanych ze spiekanych kulek brązu, których średnica zawarta była w przedziale  $(300 \div 330) \mu\text{m}$ . Znajdująca się pod powierzchnią przepuszczalną komora podciśnieniowa podzielona została na segmenty (100 mm) połączone przez kolektor (6) z wentylatorem odciągowym (8). Sumaryczny przepływ powietrza odsysanego z całej powierzchni płyty przepuszczalnej określano przy użyciu rotametrów (7), kontrolując jednocześnie ilość czynnika odsysanego z każdego segmentu przy pomocy rotametrów (5), włączonych do poszczególnych przewodów odsysających. Intensywność odsysania zmieniana była w zakresie  $F = -v_w/U_\infty = -0.001 \div -0.0094$  poprzez regulację sumarycznego



Rys. 2 a) Wyjaśnienie sposobu korekcji wskazań sondy w bezpośrednim sąsiedztwie ścianki, b) Krzywa korekcyjna

przepływu czynnika odprowadzanego przez powierzchnię porowatą. Prędkość przepływu niezakłóconego utrzymywano na poziomie  $U_\infty = 12$  m/s.

Do pomiaru rozkładów zarówno prędkości średniej jak i wielkości fluktuacyjnych stosowano metodę termoanemometryczną. Wyniki pomiarów zakłócone oddziaływaniem ścianki skorygowano przy użyciu krzywej korekcyjnej (rys. 2a i b), sporządzonej dla używanej w czasie pomiarów sondy zgodnie z metodyką podaną w pracach [13] i [14]. Stwierdzono przy tym, że ze względu na małe wartości prędkości na ściance, odpowiadające objętemu badaniami zakresowi zmian intensywności odsysania, nie zachodziła potrzeba stosowania żmudnej metody korekcji, zalecanej przez Vlasowa i Polyaeva [15] dla płyty przepuszczalnej.

### 3. Określenie współczynnika tarcia powierzchniowego

Jedną z podstawowych informacji w badaniach warstw przyściennych, niezbędną do wyjaśnienia całokształtu procesów w niej zachodzących, jest znajomość naprężeń stycznych na ściance, wyrażonych poprzez współczynnik tarcia powierzchniowego.

Charakter zmienności współczynnika  $c_f$  był wielokrotnie analizowany, zarówno w przypadku odsysania jak i wydmuchu przez powierzchnię przepuszczalną. Uzyskano szereg zależności empirycznych, ujmujących wpływ powierzchniowej wymiany masy na wartość tarcia powierzchniowego. Formuły te mają różną postać w zależności od zastosowanej przez autorów metody określania  $c_f$ . Do najczęściej cytowanych w literaturze, należą dane uzyskane przez Simpsona [5, 6] i Andersena [10, 6].

Wynikająca z opracowania profili prędkości średniej zależność Simpsona:

$$\frac{c_f}{2} = 0.013(\text{Re}_M)^{-0.25} \left[ \frac{\ln(1+B_f)}{B_f} \right]^{0.77}, \quad (1)$$

gdzie:

$$B_f = \frac{v_w/U_\infty}{c_f/2}$$

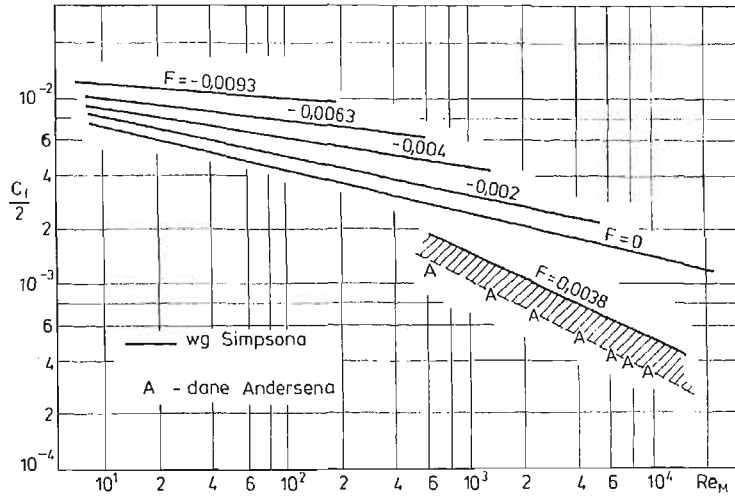
posłużyła do wykreślenia przedstawionych na rys. 3 nomogramów, umożliwiających odczyt współczynnika tarcia powierzchniowego dla objętych badaniami intensywności odsysania.

Andersen wyznaczał współczynnik tarcia powierzchniowego w sposób pośredni, poprzez pomiar profili naprężeń tnących Reynoldsa i ich ekstrapolację w kierunku ścianki za pomocą związku wynikającego z całkowitej postaci równania warstwy przyściennej [10, 4]:

$$\frac{c_f}{2} = \frac{-\overline{u'v'}(y)}{U_\infty^2} - \frac{U(y) \cdot v_w}{U_\infty^2},$$

Omówienie dokładności założeń tej metody zawiera praca [10]. Zestawione na rys. 3 dane (dla możliwych do porównania warunków słabego wydmuchu) świadczą o znacznych różnicach wartości współczynnika  $c_f$  otrzymanych przez cytowanych wyżej autorów.

Inna stosowana metoda określania współczynnika tarcia powierzchniowego na gładkiej płycie nieprzepuszczalnej [16] oparta jest na zmodyfikowanym równaniu profilu prędkości Clausera, w którym wielkość  $c_f$  występuje jako parametr. W przypadku warstwy przyściennej z powierzchniową wymianą masy, do opisu profilu prędkości średniej w obszarze



Rys. 3. Przebieg zmienności współczynnika  $c_f$  w funkcji  $Re_M$  wg Simpsona [6] i Andersena [10]

logarytmicznym wykorzystywana jest często zależność Stevensona [2, 11]:

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B - \frac{1}{4} \left( \frac{v_w}{u_\tau} \right) \left( \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \right)^2 \tag{2}$$

Uwzględniając, że:

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{U}{U_\infty} \sqrt{\frac{2}{c_f}}, \quad \frac{v_w}{u_\tau} = \frac{v_w}{U_\infty} \sqrt{\frac{2}{c_f}},$$

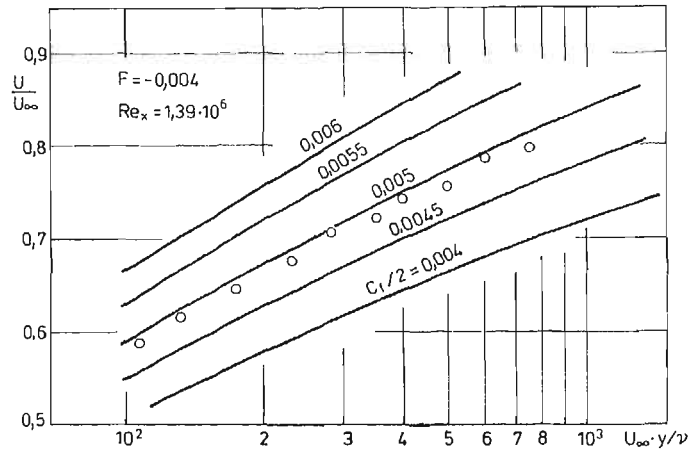
oraz:

$$y^+ = \frac{y \cdot u_\tau}{\nu} = \frac{U_\infty \cdot y}{\nu} \sqrt{\frac{c_f}{2}}$$

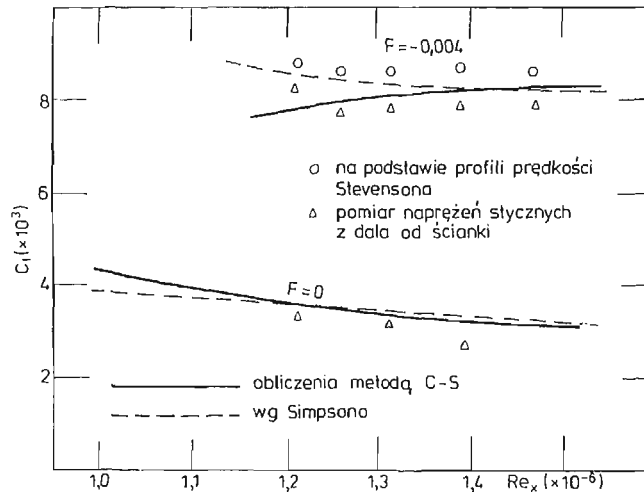
„prawo ściany” Stevensona zapisać można w postaci:

$$\frac{U}{U_\infty} = \sqrt{\frac{c_f}{2}} \left[ \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{U_\infty \cdot y}{\nu} \sqrt{\frac{c_f}{2}} \right) + B \right] - \frac{1}{4} \frac{v_w}{U_\infty} \left[ \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{U_\infty \cdot y}{\nu} \sqrt{\frac{c_f}{2}} \right) + B \right]^2,$$

gdzie, zgodnie z zaleceniami autora formuły,  $B$  jest stałą, niezależną od powierzchniowej wymiany masy, przyjmowaną na poziomie  $B = 4.8$ . Przykład graficznego przedstawienia tej formuły, dla intensywności odsysania  $F = -0.004$ , ukazuje rys. 4. Nanosząc w tym układzie punkty pomiarowe z profilu prędkości dla analizowanego trawersu określić można, z dobrym przybliżeniem, odpowiadającą mu wartość współczynnika tarcia powierzchniowego.



Rys. 4. Wyznaczanie współczynnika tarcia powierzchniowego w oparciu o równanie profilu Stevensona



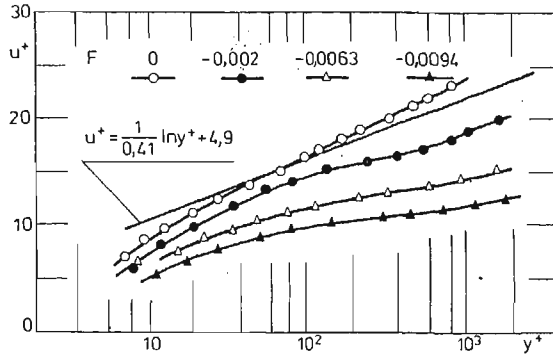
Rys. 5. Porównanie wartości  $c_f$  uzyskanych przy użyciu różnych metod

Rys. 5 przedstawia zestawienie porównawcze wartości współczynnika tarcia powierzchniowego wyznaczonych przy użyciu omówionych wyżej metod, uzupełnione rozkładem  $c_f$  określonym przy pomocy procedury Cebeciego-Smitha [17]. Dane te wskazują, że wyniki zastosowania rozważanych tu sposobów określania  $c_f$  grupują się we wspólnym paśmie z dość znacznym (13%) rozrzutem. W prezentowanej w pracy analizie wykorzystano wartości naprężeń na ścianie otrzymane metodą zalecaną przez Andersena [10].

#### 4. Wyniki badań

Podjęta w pracy analiza dotyczyła zarówno podstawowych charakterystyk ruchu średniego jak i wielkości opisujących strukturę turbulencji w warstwie przyściennej z jed-

norodnym odsysaniem powierzchniowym. Rys. 6 przedstawia profile prędkości średniej we współrzędnych  $u^+ - y^+$ , określone w trawersie  $Re_x = 1.7 \cdot 10^6$  i reprezentujące cztery poziomy intensywności odsysania. Na wykresie tym naniesiono również zależność Clausera, słuszną dla gładkiej płyty nieprzepuszczalnej. Stwierdzić można, że w warunkach odpowiadających danym na wykresie, wpływ odsysania obejmuje swym zasięgiem wszystkie strefy warstwy przyściennej, a układ klasycznych współrzędnych „prawa ściany” dla powierzchni nieprzepuszczalnej traci w tym przypadku swą uniwersalność.



Rys. 6. Profile prędkości średniej w warstwie przyściennej z odsysaniem

Jak już wcześniej wspomniano, Stevenson zaproponował zależność opisującą profil prędkości w wewnętrznym obszarze warstwy przyściennej z powierzchniową wymianą masy. Jego równanie prezentowane już tutaj w formie (2), zapisywane jest najczęściej w postaci:

$$u_p^+ \equiv \left( \frac{2}{v_w^+} \right) [(1 + v_w^+ \cdot u^+)^{0.5} - 1] = \left( \frac{1}{\kappa} \right) \ln y^+ + C \quad (3)$$

Stevenson dokonał eksperymentalnej weryfikacji tego związku, opierając się głównie na wynikach badań warstwy z wydmuchem [12, 17] i na tej podstawie stwierdził, że stałe  $\kappa$  i  $C$  są niezależne od intensywności wymiany masy i wynoszą odpowiednio: 0,41 oraz 5,8.

Konfrontacja zależności Stevensona z danymi eksperymentalnymi uzyskanymi w warunkach odsysania (rys. 7) wskazuje, że dla zapewnienia lepszej uniwersalności związku (3) wymagane byłoby funkcyjne związanie składnika  $C$  z intensywnością odsysania.

Formułując zależność opisującą profil prędkości w obszarze zewnętrznym:

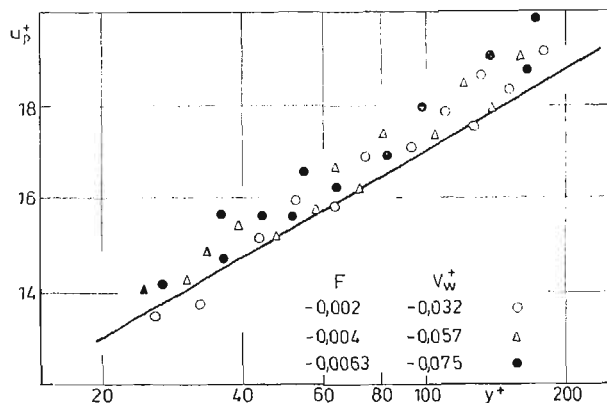
$$\left( \frac{2}{v_w^+} \right) [(1 + v_w^+ \cdot u^+)^{0.5} - 1] = \left( \frac{1}{\kappa} \right) \ln y^+ + C + \left( \frac{H}{\kappa} \right) \cdot W \left( \frac{y}{\delta} \right), \quad (4)$$

Coles [18] zaleca empiryczny warunek dla  $C$  w postaci:

$$C = C_0 + \left( \frac{2}{v_w^+} \right) [(1 + K v_w^+)^{0.5} - 1] - K, \quad (5)$$

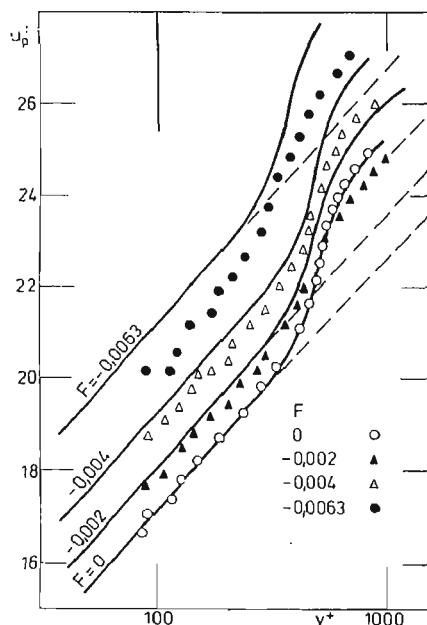
gdzie:  $C_0 = 5$ , natomiast  $K = 10,805$ .





Rys. 7. Porównanie danych doświadczalnych z „prawem ściany” Stevensona

Coles nie uzależnił, występujących w równaniu (4), parametru profilu  $II$  jak również funkcji śladu  $W(y/\delta)$  od intensywności wymiany masy, przyjmując:  $II = 0,55$  (jak dla warstwy równowagowej na powierzchni nieprzepuszczalnej) oraz  $W(y/\delta) = 1 - \cos(\pi y/\delta)$ . Na rys. 8 naniesiono linie wynikające z „prawa defektu” Colesa (4) oraz odpowiadające tym warunkom profile eksperymentalne. Poważne rozbieżności, notowane szczególnie dla większych wartości parametrów odsysania, tłumaczyć można faktem, że empiryczna postać związku (5) wyznaczona została głównie w oparciu o dane eksperymentu z wydmuchem i niewielkim odsysaniem. Równanie (5) traci bowiem sens gdy  $-v_w^+ \leq 1/K$ , natomiast składnik  $(II/\kappa) \cdot W(y/\delta)$  przyjmuje na granicy warstwy stałą, niezależną od inten-



Rys. 8. Profile prędkości średniej w obszarze zewnętrznym — zestawienie linii wg Colesa z punktami eksperymentalnymi

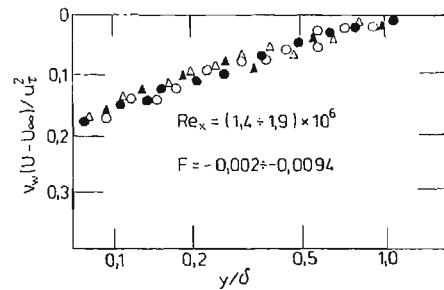
sywności odsysania wartość  $(0,55/0,41) \cdot 2 = 2,68$ , co jest sprzeczne z wynikami doświadczeń.

Analiza profili prędkości średniej wykazała, że zaproponowana przez Clausera [16] koncepcja równowagowej warstwy przyściennej może być rozszerzona na klasę przepływów z powierzchniową wymianą masy. Warunkiem, jaki musi być spełniony, jest zachowanie cech podobieństwa przepływu średniego w rejonie zewnętrznym, czyli uniwersalność profili prędkości we współrzędnych „defektu”. Parametr kształtu zaproponowany przez Clausera w postaci związku:

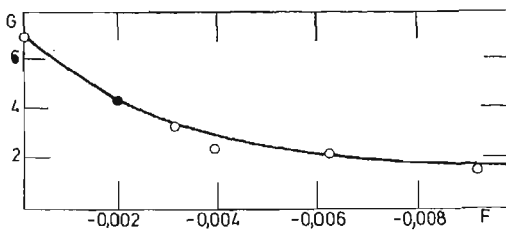
$$G = \frac{\int_0^\infty \left( \frac{U_\infty - U}{u_\tau} \right)^2 dy}{\int_0^\infty \frac{U_\infty - U}{u_\tau} dy} \quad (6)$$

osiąga w stanie równowagowym warstwy stałą, niezależną od współrzędnej  $x$ , wartość.

Rys. 9 stanowi potwierdzenie uniwersalności profili prędkości w obszarze zewnętrznym warstwy przyściennej z odsysaniem, w końcowej części analizowanej drogi jej rozwoju. Na rys. 10 natomiast, ukazano wartości parametru  $G$  uzyskane przy różnych intensywno-



Rys. 9. Uniwersalność profili prędkości w układzie współrzędnych „defektu”



Rys. 10. Parametr Clausera w funkcji intensywności odsysania

ności odsysania. Przykładowo, w warunkach zerowej wymiany masy, parametr ten przyjmuje wartość  $G = 6,5$  co jest zgodne z danymi zawartymi w literaturze, m.in. w [6]. Clauser [16] i Coleman [19] wiązali parametr  $G$  z parametrem kształtu  $H_{12} = \delta_1/\delta_2$  zależnością:

$$G = \frac{H-1}{H} \sqrt{\frac{2}{c_f}} \quad (7)$$

Oprócz podanego równaniem (1) związku określającego współczynnik tarcia powierzchniowego, Simpson sformułował również empiryczną formułę opisującą zmienność parametru

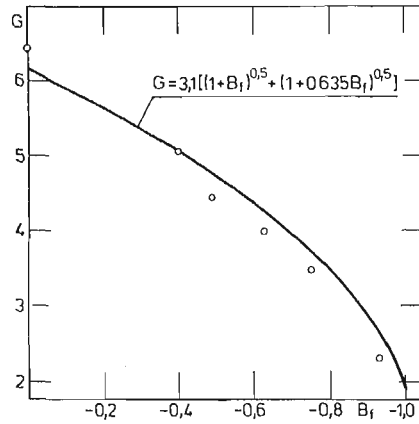
kształtu  $H$  w funkcji intensywności odsysania:

$$H = \frac{1}{1 - 3.1 \sqrt{\frac{c_f}{2} [(1+B_f)^{0.5} + (1+0.635B_f)^{0.5}]}} \quad (8)$$

Wynikającą z powiązania równań (1), (7) i (8) zależność:

$$G = 3.1[(1+B_f)^{0.5} + (1+0.635B_f)^{0.5}], \quad (9)$$

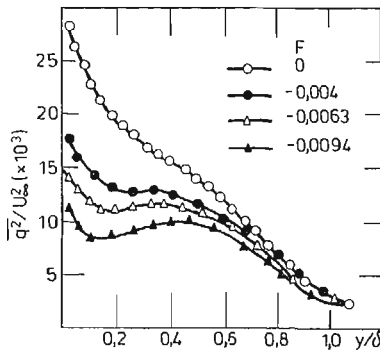
zobrazowano graficznie na rys. 11 gdzie naniesiono również punkty z rys. 10. Porównując te dane zauważyć można, że formuła (9) określa z dość dobrym przybliżeniem, związek między parametrem Clausera i intensywnością odsysania powierzchniowego.



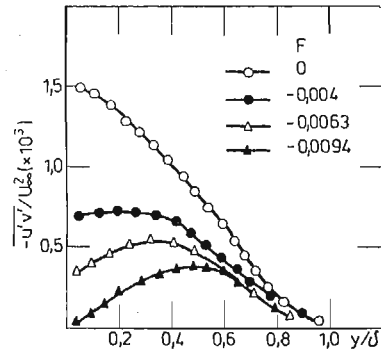
Rys. 11. Porównanie eksperymentalnych wartości parametru  $G$  z zależnością (9)

Kolejna część rozważań dotyczy wpływu odsysania powierzchniowego na wielkości charakteryzujące strukturę turbulencji w warstwie przyściennej na płaskiej płycie porowatej.

Z przedstawionych na rys. 12 i 13 zredukowanych rozkładów energii kinetycznej turbulencji oraz naprężeń Reynoldsa, określonych w poprzek warstwy dla kilku intensywności



Rys. 12. Rozkłady kinetycznej energii turbulencji w funkcji odległości od ścianki dla różnych intensywności odsysania



Rys. 13. Naprężenia Reynoldsa w warstwie przyściennej z odsysaniem

ności odsysania wynika, że ten typ oddziaływania na warstwę obniża zarówno ogólny poziom energii fluktuacji jak i turbulentnych naprężeń stycznych. Znajduje to swój wyraz w bilansie kinetycznej energii turbulencji, której równanie dla ustalonego przepływu płynu nieściśliwego, po zastosowaniu uproszczeń typowych dla dwuwymiarowej warstwy przyściennej bez podłużnego gradientu ciśnienia zapisane być może w postaci bezwymiarowej:

$$\underbrace{\left[ U \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\overline{q^2}}{2} \right) + V \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\overline{q^2}}{2} \right) \right]}_{(1)} \frac{\delta}{U_\infty^3} + \underbrace{\frac{\delta}{U_\infty^3} \overline{u'v'}}_{(2)} \frac{\partial U}{\partial y} + \underbrace{\frac{\delta}{U_\infty^3} \frac{\partial}{\partial y} \overline{v' \left( \frac{q^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right)}}_{(3)} + \underbrace{\frac{\delta}{U_\infty^3} \varepsilon}_{(4)} = 0 \quad (10)$$

(1) — konwekcja, (2) — produkcja, (3) — dyfuzja, (4) — dysypacja.

Eksperymentalna weryfikacja bilansu energii kinetycznej nastęrcza wiele trudności. Praktycznie niemierzalna jest bowiem korelacja ciśnieniowo-prędkościowa  $\overline{v'p'}$ , wyznaczana z reguły jako wielkość zamykająca równanie energii. Poważny problem metrologiczny stanowi określenie dysypacji energii turbulencji [20]. Podstawą oszacowania tego składnika w omawianych badaniach był związek:

$$E_u(k, \tau) = \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (11)$$

obowiązujący w obszarze lokalnej izotropii.

Wielkość  $\alpha$  w tym równaniu oznaczająca dla  $Re_\lambda \geq 100$  pewną stałą uniwersalną [20], przyjęta została  $\alpha = 0,53$ , zgodnie z propozycją Lawna [21].

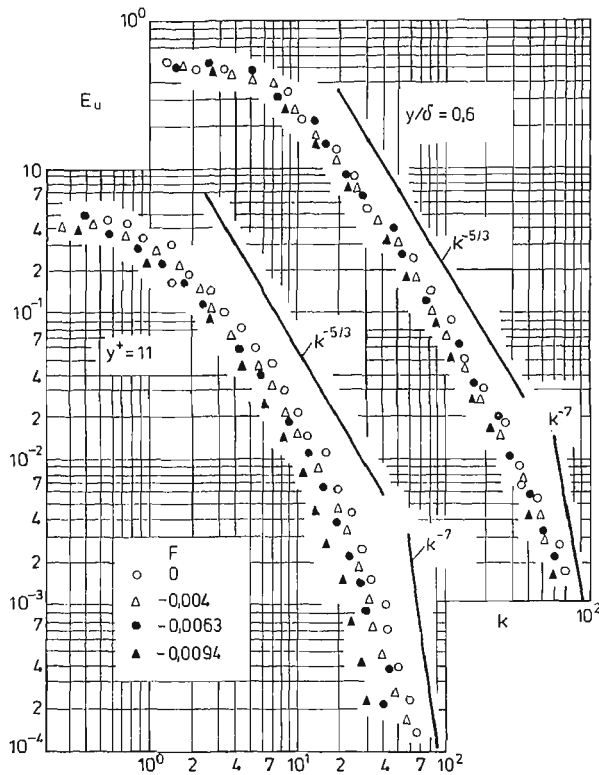
Występowanie cech lokalnej izotropii w warstwie przyściennej z odsysaniem stwierdzono na podstawie analizy spektralnej, która przeprowadzona została dla składowej fluktuacji wzdłużnej:

$$\overline{u'^2} = \int_0^\infty E_u(k) dk \quad \text{gdzie:} \quad k = \frac{2\pi f}{U}$$

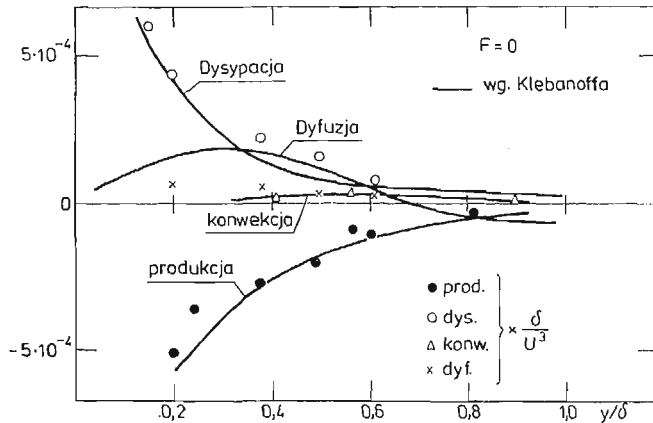
Przedstawione na rys. 14 jednowymiarowe widma energii, uzyskane w dwóch odległościach od ścianki dla kilku wartości intensywności odsysania, skonfrontowane zostały z linią  $k^{-5/3}$ , charakterystyczną dla stanu lokalnej izotropii Kołmogorowa. Z zestawienia tego wyniku, że „prawo  $-5/3$ ”, obowiązuje również w warstwie przyściennej z odsysaniem.

Wpływ odsysania zaobserwować można w obszarze wewnętrznym warstwy, gdzie powoduje ono obniżenie spektralnych rozkładów energii, wyraźniejsze w zakresie większych liczb falowych. W strefie zewnętrznej ( $y/\delta = 0,6$ ) natomiast, punkty pomiarowe grupują się wokół prawie wspólnej dla wszystkich wartości  $F$  krzywej spektralnej.

Na rys. 15 zilustrowano bilans energii kinetycznej turbulencji w warstwie przyściennej na płaskiej płycie nieprzepuszczalnej, przeprowadzony na podstawie r. (10). Naniesione tu linie reprezentują wyniki Klebanoffa [22], natomiast punkty pomiarowe odpowiadają rezultatom uzyskanym w niniejszej pracy przy zerowej intensywności odsysania. Z przed-



Rys. 14. Widma energii turbulentnych fluktuacji wzdłużnych w warunkach odsysania powierzchniowego

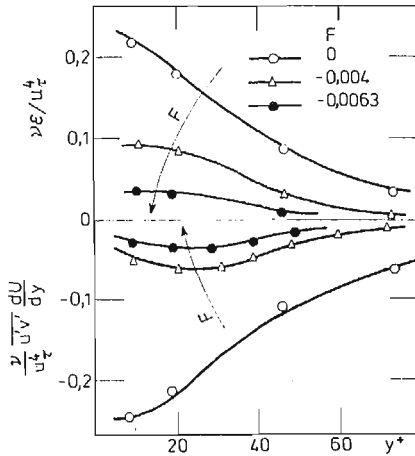


Rys. 15. Bilans energii kinetycznej turbulencji w warstwie przyściennej na płaskiej płycie nieprzepuszczalnej

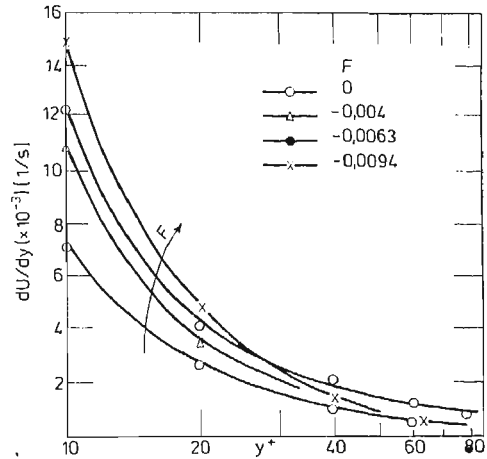
stawionych na rys. 15 przebiegów wynika, że dominujący udział w bilansie energii mają człony produkcji i dysypacji energii kinetycznej turbulencji, szczególnie w strefie wewnętrznej warstwy przyściennej. Składnik konwekcyjny jest nieznaczny w całym jej obszarze, a w części wewnętrznej praktycznie pomijalny. Obserwowana nadwyżka produkcji energii kinetycznej nad jej dysypacją przekazywana jest dyfuzyjnie do rejonu zewnętrznego.

Przedstawione na rys. 16 rozkłady energii dysypacji i produkcji, odpowiadające strefie wewnętrznej, wskazują na silne oddziaływanie odsysania, wyrażające się obniżeniem zarówno intensywności dysypacyjnej konwersji ruchu burzliwego jak i poboru energii z ruchu średniego. Pod wpływem odsysania zmienia się nie tylko rozkład naprężeń stycznych Reynoldsa (rys. 13) ale również profil prędkości średniej, co objawia się m.in. zwiększeniem jej gradientu w pobliżu ścianki (rys. 17). Wypadkowym efektem tych oddziaływań jest jednakże silne osłabienie członu produkcji.

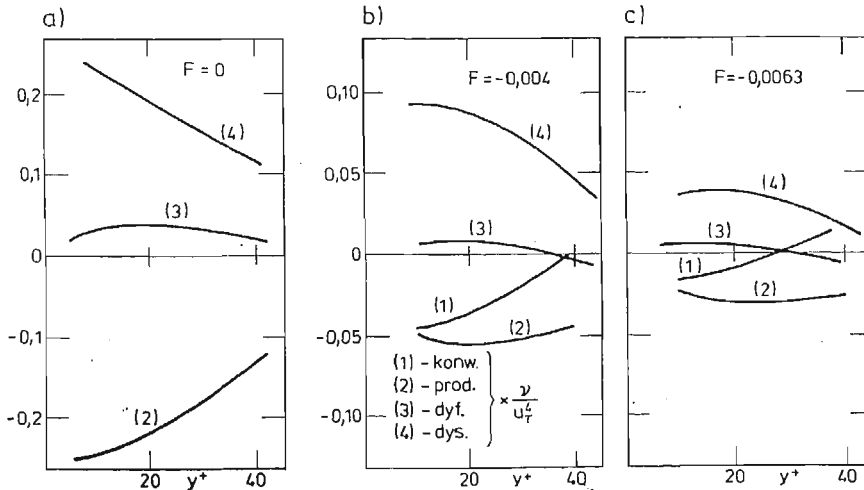
Istnienie składowej normalnej prędkości  $v_w$  na ściance powoduje, że w obszarze wewnętrznym pewnego znaczenia nabiera konwekcyjny transport energii (rys 18), pomijalny



Rys. 16. Człony produkcji i dysypacji w strefie wewnętrznej warstwy przyściennej z jednorodnym odsysaniem



Rys. 17. Wpływ odsysania na gradient prędkości średniej

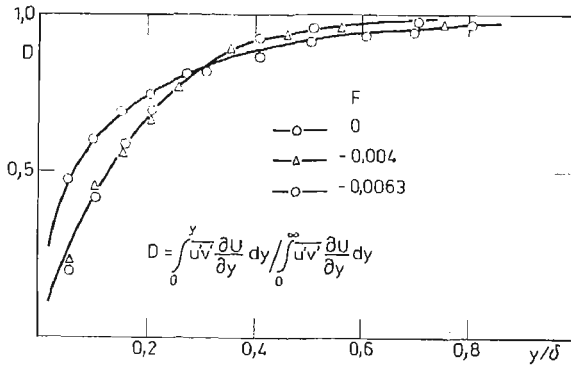


Rys. 18. Bilans energii kinetycznej turbulencji w strefie wewnętrznej warstwy dla różnych intensywności odsysania:

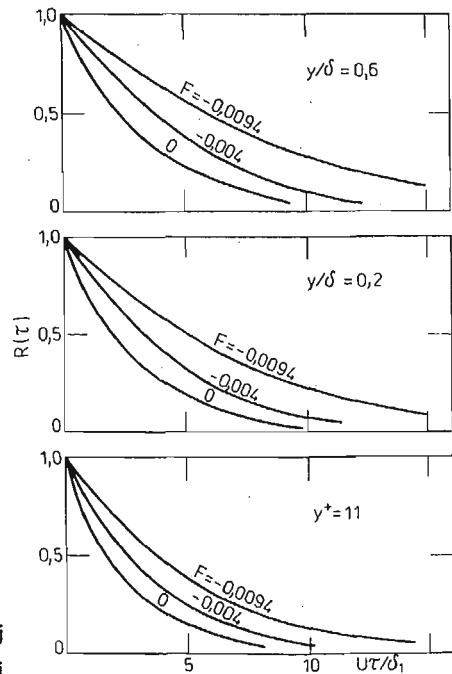
a)  $F = 0$ ;    b)  $F = -0.004$ ;    c)  $F = -0.0063$

w tejże strefie w warunkach braku odsysania. Transport w kierunku ścianki turbulentnej energii kinetycznej zdaje się stanowić ważny mechanizm jej redukcji. Winna ona bowiem ulegać dysypacji na ściance, o czym świadczy również fakt, że człon konwekcyjny ma ten sam znak co człon produkcji, zatem jest on równoważony przez składnik o znaku przeciwnym.

Rys. 19 obrazuje względny udział poszczególnych stref warstwy przyściennej w procesie generacji turbulencji. Znajduje tu potwierdzenie fakt, że zewnętrzne 80% warstwy przy-



Rys. 19. Względny udział poszczególnych obszarów warstwy przyściennej w produkcji energii kinetycznej turbulencji



Rys. 20. Funkcja autokorelacji dla składowej wzdłużnej fluktuacji prędkości w różnych odległościach od ścianki

ściennej wnosi jedynie około 20% całkowitej produkcji energii. Obserwacja ta zgodna jest z danymi Laufera [23] uzyskanymi dla przepływu w rurze i podtrzymuje twierdzenie, że cienki rejon przyścienny odgrywa dominującą rolę w określaniu struktury całej warstwy.

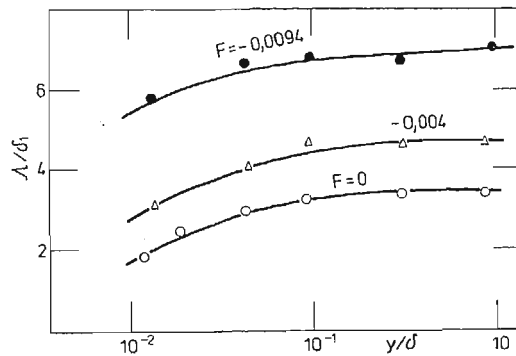
Wpływ odsysania przejawia się tu w nieznacznym odsunięciu od ścianki obszaru o maksymalnym natężeniu produkcji energii turbulencji.

Dodatkowym potwierdzeniem słuszności wniosku o osłabieniu procesów dysypacyjnych w warstwie z odsysaniem, są wyniki pomiarów funkcji autokorelacji. Z przebiegu tych funkcji wnioskować można o skali czasowej, wyrażającej średni czas istnienia wiru:

$$\Gamma = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau \quad (12)$$

Z przedstawionych na rys. 20 rozkładów funkcji korelacji czasowej dla składowej wzdłużnej fluktuacji prędkości wynika jakościowa tendencja do wydłużania czasu „życia” wirów ze wzrostem intensywności odsysania. Jednocześnie, wyznaczona przy założeniu słuszności hipotezy Taylora, skala całkowita turbulencji:

$$A = U \cdot \Gamma \quad (13)$$



Rys. 21. Wpływ odsysania na skalę całkowitą turbulencji

odniesiona na rys. 21 do liniowej straty wydatku  $\delta_1$ , świadczy o narastaniu względnych rozmiarów wirów w funkcji intensywności odsysania.

## 5. Uwagi końcowe

Przedstawiona w pracy eksperymentalna analiza struktury turbulencji w warstwie przyściennej z odsysaniem wykazała, że ten typ oddziaływania na przepływ obniża ogólny poziom energii turbulencji oraz hamuje intensywność jej konwersji poprzez produkcję i dysypację. Zaobserwowano uaktywnienie procesu konwekcyjnego transportu energii w kierunku ścianki wywołane powierzchniowym odsysaniem. Z rozkładu funkcji autokorelacji określono jakościową tendencję do zwiększania czasu trwania wirów oraz ich względnych rozmiarów ze wzrostem intensywności odsysania. Na podstawie analizy spektralnej stwierdzono istnienie cech lokalnej izotropii w badanym typie przepływu, co uzasadniło zastosowanie „prawa  $-5/3$ ” do oszacowania wielkości dysypacji energii.



## Literatura

1. K. P. CHANG, *Control of Flow Separation*, Series in Thermal and Fluids Engineering. Mc Graw Hill 1976.
2. T. N. STEVENSON, *Experiments on Injection into an Incompressible Turbulent Boundary Layers*, The College of Aeronautics Cranfield. Report Aero. No. 177 1964.
3. L. R. SIMPSON, *Characteristics of Turbulent Boundary Layers at Low Reynolds Number with and without Transpiration*, J. of Fluid Mech. 1970 vol. 42.
4. M. M. PIMENTA, R. J. MOFFAT, W. M. KAYS, *The Structure of a Boundary Layer on a Rough Wall with Blowing and Heat Transfer*, Trans. ASME. Journal of Heat Transfer. No. 5 1979 vol. 101.
5. W. M. KAYS, *Heat Transfer to the Transpired Turbulent Boundary Layer*, Int. J. of Heat and Mass Transfer. 1972 vol. 15 p. 1023.
6. W. M. KAYS, J. R. MOFFAT, *The Behaviour of Transpired Turbulent Boundary Layers*, Studies in Convection. vol. 1. Ed. by E. Launder Acad. Press 1975.
7. H. TENNEKES, *Similarity Laws for Turbulent Boundary Layers with Suction or Injection*, J. of Fluid Mech. 1965 vol. 21 part 4, p. 689.
8. M. R. HEAD, *The Boundary Layer with Distributed Suction*, Rep. Mem. Aero. Res. Council. London 1951.
9. J. D. MCLEAN, G. L. MELLOR, *The Transpired Turbulent Boundary Layer in an Adverse Pressure Gradient*, Int. J. Heat and Mass Transfer. 1972 vol. 15, p. 2353.
10. P. S. ANDERSEN, W. M. KAYS, *Experimental Results for the Transpired Turbulent Boundary Layer in an Adverse Pressure Gradient*, J. of Fluid Mech. 1975 vol. 69, part 2, p. 35.
11. C. J. ROTTA, *Control of Turbulent Boundary Layers by Uniform Injection and Suction of Fluid*, Jahrbuch der DGLR 1970.
12. T. СЕВЕЦИ, A. M. O. SMITH, *Analysis of Turbulent Boundary Layers*, Acad. Press London 1974.
13. S. OKA, Z. KOSTIČ, *Influence of Wall Proximity on Hot-wire Velocity Measurements*, DISA Information No. 13 1972.
14. K. S. HEBBAR, *Wall Proximity Corrections for Hot-wire Readings in Turbulent Flows*, DISA Information No. 25 1980.
15. D. I. VLASOV, W. M. POLYAEV, *Using Hot-wire Probes for Investigation of Flow in the Boundary Layers Along a Permeable Surface*, DISA Inform. No. 18 1975.
16. F. H. CLAUSER, *Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients*, Journal of the Aero. Sci. vol. 21 1954.
17. T. СЕВЕЦИ, P. BRADSHAW, *Momentum Transfer in Boundary Layer*, Hemisphere Publishing Corp. London 1977.
18. D. COLES, *A Survey of Data for Turbulent Boundary Layers with Mass Transfer*, AGARD Conf. Proc. No. 93 on Turbulent Shear Flows London 1971.
19. H. W. COLLEMAN, *The Accelerated Fully Rough Turbulent Boundary Layer*, J. of Fluid Mech. 1977 vol. 82, part 3, p. 507.
20. J. W. ELSNER, *Turbulencja Przepływów*, PWN Warszawa 1987.
21. J. B. LAWN, J. of Fluid Mech. 1971 vol. 48, p. 477.
22. P. S. KLEBANOFF, *Characteristics of Turbulence in Boundary Layer with Zero Pressure Gradient*, NACA Rep. 1247, pp. 1135 - 1153 1955.
23. J. LAUFER, *The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow*, NACA Rep. 1174, p. 1 1954.

## Резюме

## БАЛАНС ЭНЕРГИИ И СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Представлено результаты термоанемометрических измерений осредненных и пульсационных характеристик пограничного слоя на проницаемой поверхности при однородном отсосе. При учёте корреляционно-спектрального анализа получено значения членов уравнения кинетической энергии

турбулентности: порождения, диссипации, диффузии и конвекции. Приведенные данные свидетельствуют о существенном искажении внутренней структуры турбулентности и её вихревой картины в пограничном слое при наличии отсоса.

#### Summary

#### TURBULENCE STRUCTURE AND BALANCE OF TURBULENT KINETIC ENERGY IN BOUNDARY LAYER ALONG A PERMEABLE SURFACE

The effect of uniform wall suction on the mean flow characteristics and the turbulent structure of boundary layer on a permeable flat plate has been experimentally investigated.

The results discussed have included the mean velocity profiles, turbulent energy and Reynolds stress distributions, time-correlations and energy-spectra in turbulent boundary layer controlled by surface suction.

The energy-exchange processes have been analysed with special attention to the contribution of the production and dissipation terms for the total turbulent kinetic energy balance.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 listopada 1986 roku.*



## OPIS STANU ZARYSOWANIA LEPKOSPŘŻYSTEJ TARCZY W UJĘCIU DYSTRYBUCYJNYM

MACIEJ MINCH

*Politechnika Wroclawska*

W pracy wyprowadzono równanie różniczkowe lepkospřżystej tarczy zarysowanej. Wykorzystując zasadę wariacyjną typu Gurtina, aparat teorii funkcji uogólnionych oraz przyjmując związki fizyczne dane ogólnym przedstawieniem całkowym Boltzmannna, wyprowadzono równanie różniczkowe płaskiego stanu naprężenia w materiale liniowo lepkospřżystym. W równaniu tym warunki brzegowe, początkowe oraz graniczne w rysie zawarte są *explicite*. Podano przybliżony sposób rozwiązania wychodząc z analogii sprężysto-lepkospřżystej.

### 1. Wprowadzenie

W ramach liniowej teorii sprężystości istnieje wiele modeli opisujących zachowanie się ciał z defektami. Prace te rozwijają się w dwóch kierunkach. Pierwszy z nich wykorzystuje dyskretny model obliczeń (metoda różnic skończonych, metoda elementów skończonych) [4, 9, 12]. Globalny obraz efektów zarysowania otrzymany w tych pracach jest poprawny, jednak zaburzenia w miejscach rys są z założenia niedokładne. Drugi kierunek polega na formułowaniu różnych modeli matematycznych dla ciał kruchych z defektami. Literatura w tej dziedzinie jest niezwykle bogata. Wymienić tu można m.in.: pracę [18], w której rozwiązań poszukuje się poprzez przekształcenia całkowite i wprowadzenie funkcji zmiennych zespolonych oraz prace [11, 19] gdzie podano teorie defektów. Teorie te polegają na budowaniu pewnych potencjałów modelujących defekt.

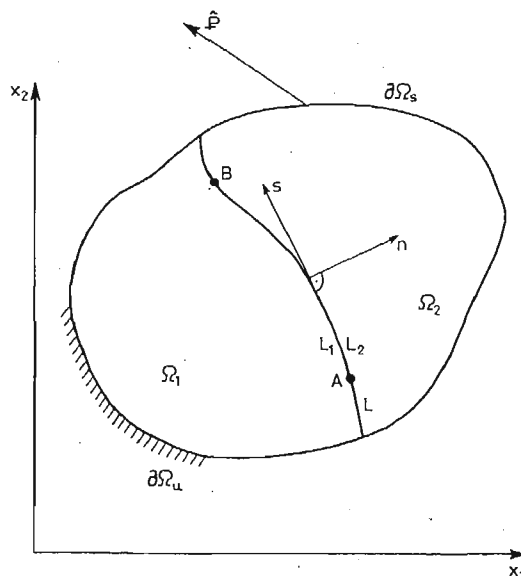
Wykorzystanie matematycznych modeli dla ciał kruchych w konstrukcjach z betonu zbrojonego napotyka jednak na pewne trudności. Dlatego też teorie żelbetu rozwijają się niezależnie, choć wykorzystują również rozwiązania matematycznych teorii defektów. Żelbetowe tarcze zarysowane projektuje się do dzisiaj jako sprężyste, jednorodne i izotropowe. Taki model obliczeniowy, przyjęty już kilkadziesiąt lat temu, wykazuje wiele sprzeczności. W przedziale obciążeń użytkowych w konstrukcji tarczy obserwuje się niejednorodności występujące w postaci rys oraz deformacji reologicznych i plastycznych. W tarczy takiej zachodzi znaczna redystrybucja sił wewnętrznych, w porównaniu do jej stanu sprężystego. Wniosek ten potwierdzony został także licznymi doświadczeniami.

W modelu teoretycznym konieczne jest zatem przyjęcie takiego sposobu opisu, aby można było uwzględnić w nim obserwowane nieciągłości deformacji. Odbywać się to może przez przyjęcie przemieszczeń w szerszej klasie funkcji, tzn. w klasie funkcji uogólnionych lub inaczej dystrybucji. Podejście takie dla konstrukcji żelbetowych belek, płyt i tarcz prezentują np. prace [1, 2, 5, 15]. Przyjęte w nich modele nie uwzględniają jednak zjawisk reologicznych w betonie poza miejscami defektów. Dla większości materiałów ich zachowanie w procesie odkształcenia odbiega od założeń przyjętych w liniowej teorii sprężystości. Istnieje zatem potrzeba dalszego uściślenia modeli przez uwzględnienie w opisie własności materiału zmiany odkształceń w czasie i ich wpływu na stan konstrukcji.

W niniejszej pracy wyprowadzono równanie różniczkowe płaskiego stanu naprężenia w ramach liniowej lepkosprężystości. Związki fizyczne przyjęto w formie ogólnego przedstawienia całkowego Boltzmanna. Podano przybliżony sposób rozwiązania wychodząc z analogii sprężysto-lepkosprężystej oraz określono związek fizyczny w rysie.

## 2. Założenia

Rozważa się jednorodną i izotropową tarczę cienką, której powierzchnia środkowa zajmuje obszar  $\Omega$  parametryzowany kartezjańskim układem współrzędnych  $x_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , ograniczoną dowolnym konturem  $\partial\Omega$ , na brzegu  $\partial\Omega_u$  sztywno zamocowaną, ze swobodnym brzegiem  $\partial\Omega_s$  i statycznym obciążeniem zewnętrznym  $\hat{p}$  (rys. 1). Ponadto obszar tarczy  $\Omega$  podzielony jest pojedynczą, niepropagującą się rysą krzywoliniową  $L$ , kawałkami gładką w  $R^2$ , na dwa podobszary  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ . Zakłada się, że rysa obejmuje całą grubość tarczy, przy czym  $L_1$  i  $L_2$ , stanowią odpowiednio lewy i prawy brzeg rysy  $L = L_1 \cup L_2$ . Przyjęcie większej liczby rys poza komplikacją natury rachunkowej nie wniesie nic nowego do przeprowadzanych tu rozważań.



Rys. 1. Rozpatrywany obszar tarczy  $\Omega$  z rysą na krzywej  $L$ .

Warunki brzegowe zadania mają następującą postać:

— warunki przemieszczeniowe

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{na} \quad \partial\Omega_u \quad (2.1)$$

— warunki naprężeniowe

$$\mathbf{S}\mathbf{n} = \hat{\mathbf{p}} \quad \text{na} \quad \partial\Omega_s \quad (2.2)$$

Tutaj  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$  oznaczają odpowiednio wektor przemieszczenia i tensor naprężenia określone czasoprzestrzennie, natomiast  $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\hat{\mathbf{p}}$  są funkcjami wektorowymi zadanymi odpowiednio na brzegach  $\partial\Omega_u$  i  $\partial\Omega_s$ , zaś  $\mathbf{n}$  jest wektorem normalnym zewnętrznym do brzegu  $\partial\Omega$ .

Ponadto do warunków brzegowych zewnętrznych (2.1) i (2.2) dołączyć należy jeszcze warunek graniczny w rysie, w której przemieszczenie  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  doznaje skoku

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]_L = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in L, \quad (2.3)$$

gdzie  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  jest funkcją gęstości defektu ciągłą na krzywej  $L$ , zaś symbol  $[f]_L$  oznacza różnicę prawostronnej i lewostronnej granicy funkcji  $f$  przy przejściu przez krzywą  $L$ .

Postać funkcji gęstości defektu może być przyjmowana w różny sposób w zależności od działania wymuszającego pola deformacji lub obciążeń na brzegi tarczy lub bezpośrednio w rysie. Jest ona przedmiotem oddzielnych badań [15]. Szerszy komentarz dotyczący gęstości defektu  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  dla konstrukcji betonowych ze zbrojeniem podany będzie w dalszej części pracy.

Całość dotychczasowych rozważań dotyczyła szczególnego przypadku rysy dzielącej obszar  $\Omega$  na dwie części. Można wykazać [1], że uogólnienie na przypadek rysy wewnętrznej (np. na łuku  $\widehat{AB}$  — rys. 1) w niczym nie zmienia przeprowadzanych rozważań. Sprowadza się to do przyjęcia na pozostałej części krzywej  $L$  warunku:

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]_L = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \notin \widehat{AB}, \quad (2.4)$$

oraz związków definiujących zachowanie się funkcji gęstości defektu na końcach rysy:

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}{\partial s} (A) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}{\partial s} (B) = 0. \quad (2.5)$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że przyjęcie na krzywej  $L$  warunku (2.3) powoduje konieczność przeprowadzenia rozważań w klasie funkcji uogólnionych, stąd w dalszych działaniach opierano się na definicjach i związkach teorii dystrybucji podanych przez Schwartza [17]. Są one znane i nie wymagają tu przypomnienia. Można jedynie zaznaczyć, że w przypadku opisu zadania płaskiego dotyczą działań w przestrzeni  $(D(\Omega))^2$  dwuwymiarowych wektorowych funkcji próbnych (gdzie  $\Omega$  jest dowolnym otwartym obszarem przestrzeni euklidesowej  $R^2$ ).

W dalszych rozważaniach, ze względu na dowolne zarysowanie tarczy wzdłuż krzywej  $L$  wynikające z wymuszającego pola obciążeń lub deformacji, istotne znaczenie mają dystrybucje singularne typu delta (będące uogólnieniem funkcji  $\delta$  — Diraca), o danej gęstości  $\psi$  skoncentrowanej na krzywej  $L \subset R^2$ , których własności definiuje się nastę-

pująco [1]:

$$\langle \psi \delta_L, \varphi \rangle = \int_L \psi(x) \varphi(x) ds, \quad (2.6)$$

oraz pochodna dystrybucji na krzywej  $L$  wynikająca bezpośrednio z definicji dystrybucji regularnych:

$$\langle D^\alpha(\psi \delta_L), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_L \psi(x) D^\alpha \varphi(x) ds, \quad (2.7)$$

gdzie:  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ .

Tutaj funkcja  $\psi(x)$  jest funkcją ciągłą na krzywej  $L$ , zaś całki po prawej stronie wzorów (2.6) i (2.7) są całkami krzywoliniowymi po krzywej  $L$ .

Wynika stąd, że funkcjonały sformułowane powyżej dla jednostkowych gęstości funkcji  $\psi$  mają analogiczną własność odsiewającą jak funkcja typu  $\delta$  — Diraca, polegającą na przyjmowaniu wartości funkcji  $\varphi$  lub jej pochodnych dla argumentów  $x$  leżących na krzywej  $L$ .

Obszerniejsze wyjaśnienie dystrybucji skoncentrowanych na krzywej, ich definicje i interpretacje dla zagadnień dwuwymiarowych znaleźć można w pracy [8], skąd po pewnych prostych przekształceniach można otrzymać m.in. własność (2.6).

### 3. Równanie różniczkowe lepkosprężystej tarczy zarysowanej

Rozpatruje się zachowanie lepkosprężystej tarczy zarysowanej zgodnie z założeniami podanymi w rozdziale 2.

Podstawowy układ równań płaskiego stanu naprężenia składa się z:

— równań równowagi:

$$\operatorname{div} S + b = 0, \quad (3.1)$$

— związków geometrycznych [3]:

$$E = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) = \hat{\nabla} u, \quad (3.2)$$

oraz związków fizycznych danych ogólnym przedstawieniem całkowym Boltzmanna [16]:

$$S = \int_0^t \psi_1(t-\tau) \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t [\psi_2(t-\tau) - \psi_1(t-\tau)] \mathbf{1} \frac{\partial \operatorname{tr} E}{\partial \tau} d\tau \quad (3.3)$$

Tutaj  $E(x, t)$  i  $b(x, t)$  oznaczają odpowiednio tensor odkształcenia i wektor sił masowych określone czasoprzestrzennie,  $\psi_1$  i  $\psi_2$  są pewnymi funkcjami relaksacji, zaś  $\mathbf{1}$  jest tensorem jednostkowym.

Układ równań pola (3.1)÷(3.3) jest spełniony w przestrzeni  $\Omega \times [0, \infty)$ , gdzie  $[0, \infty)$  jest przedziałem czasowym.

Do układu równań pola (3.1)÷(3.3) należy jeszcze dołączyć warunki brzegowe (2.1) i (2.2) oraz warunek początkowy na tensor odkształcenia

$$E(\cdot, 0) = E^0. \tag{3.4}$$

Tutaj wskaźnik „0” oznacza wielkość odkształcenia w chwili początkowej  $t = 0$ .

Wykorzystując rachunek operatorowy Mikusińskiego [13], można zapisać równanie (3.3) w alternatywnej postaci:

$$1 * S = \psi_1 * E + \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1) * 1 \operatorname{tr} E - F, \tag{3.5}$$

gdzie:

$$F = \psi_1 * E^0 + \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1) * 1 \operatorname{tr} E^0. \tag{3.6}$$

Mnożenie splotowe względem czasu oznaczono z poniższego związku:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau. \tag{3.7}$$

Do opisu omawianego zagadnienia wykorzystano, na podstawie analogii sprężystej, splotową zasadę wariacyjną typu Gurtina [6, 7], stowarzyszoną z układem równań pola (3.1)÷(3.3) oraz warunkami brzegowymi (2.1)÷(2.3) i warunkiem początkowym (3.4). Przyjęto funkcjonal postaci:

$$J(u) = \int_{\Omega} U d\Omega - \int_{\Omega} 1 * b * u d\Omega - \int_{\partial\Omega} 1 * \hat{p} * u d\partial\Omega, \tag{3.8}$$

gdzie:

$$U = \psi_1 * \left( \frac{1}{2} \hat{\nabla} u - E^0 \right) * \hat{\nabla} u + \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1) * \left( \frac{1}{2} \operatorname{div} u - \operatorname{tr} E^0 \right) * \operatorname{div} u, \tag{3.9}$$

jest funkcją energii odkształcenia będącą odpowiednikiem energii odkształcenia w teorii sprężystości.

Dalej oblicza się wariację funkcjonału (3.8):

$$\begin{aligned} \delta J = & - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \left\{ \left[ \psi_1 * \nabla^2 + \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) * \operatorname{grad} \operatorname{div} \right] u + \right. \\ & \left. + 1 * b - \operatorname{div} F \right\} \delta u d\Omega + \\ & + \int_{\partial\Omega_s} [1 * \hat{p} - P(u)] \delta u d\partial\Omega + \int_L P(u) \delta u ds, \end{aligned} \tag{3.10}$$



gdzie:

$$P(\cdot) = - \left[ \mathbf{F} - \left( \psi_1 \hat{\nabla} + \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1) * \text{div} \right) (\cdot) \right] \mathbf{n}, \quad (3.11)$$

jest analogią do operatora napęcia powierzchniowego w teorii sprężystości.

Jeżeli  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  jest kinematycznie dopuszczalnym przemieszczeniem (tzn. jeśli stanowi rozwiązanie zagadnienia (2.1)÷(2.3) i (3.1)÷(3.4)) to wariacja (3.10) równa się zeru. Z drugiej strony jeśli prawa strona równania (3.10) znika dla dowolnego wyboru  $\delta \mathbf{u}$  to otrzymuje się przemieszczeniowe równanie różniczkowe tarczy lepkosprężystej:

$$\left[ \psi_1 * \nabla^2 + \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) \text{grad div} \right] \mathbf{u} + 1 * \mathbf{b} - \text{div} \mathbf{F} = 0, \quad (3.12)$$

naturalne warunki brzegowe dotyczące brzegu swobodnego lub sztywnego (gdzie dla brzegu sztywnego warunek  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  sprowadza się formalnie do warunku  $\delta(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})|_{\partial\Omega_u} = \mathbf{0}$  oznaczającego zgodnie z (2.1) wypadkową przemieszczenia  $\mathbf{u}$  na sztywnym brzegu  $\partial\Omega_u$ )

$$[P(\mathbf{u}) - 1 * \hat{\mathbf{p}}]|_{\partial\Omega_s} = \mathbf{0} \vee \delta \mathbf{u}|_{\partial\Omega_u} = \mathbf{0}, \quad (3.13)$$

oraz dodatkowy warunek graniczny w rysie wyrażający ciągłość wypadkowego wektora napieć przy przejściu przez rysę  $L$ :

$$[P(\mathbf{u})]_L = \mathbf{0}. \quad (3.14)$$

Pojawienie się ostatniej całki krzywoliniowej we wzorze (3.10) i w efekcie warunku (3.14), wynika z uwzględnienia dodatkowego brzegu wewnątrz obszaru  $\Omega$ , tzn. linii rysy  $L = L_1 \cup L_2$ , gdzie  $L_1$  i  $L_2$  stanowią przeciwległe jej brzegi. Całkę tę można przekształcić do postaci, w której będzie liczona ona wzdłuż linii, a wielkości podcałkowe składać się będą z sumy dwu składników związanych z przemieszczeniem stycznym do rysy  $\delta u_s$  i przemieszczeniem normalnym do niej  $\delta u_n$ . Wyrazi się to formalnie przez cosinusy kierunkowe  $n_\alpha$  ( $\delta \mathbf{u} = \delta u_s n_1 + \delta u_n n_2$ ). Należy przy tym zwrócić uwagę na fakt, że dla brzegów  $L_1$  i  $L_2$  posiadają one przeciwne zwroty. Uzyska się w ten sposób w warunku (3.14) zasadę akcji i reakcji napieć stycznych i normalnych na brzegach rysy  $L$ . Warunek (3.14) przedstawia zatem warunek ciągłości wypadkowego wektora napieć przy przejściu przez rysę  $L$ .

W celu uproszczenia zadania brzegowego zarysowanej tarczy lepkosprężystej, równanie różniczkowe (3.12) ze stowarzyszonymi warunkami brzegowymi i warunkiem granicznym w rysie zastąpi się dalej równoważnym równaniem opisanym w terminach dystrybucji przy założeniu, że  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  należy do szerszej klasy funkcji, tzn. klasy funkcji uogólnionych. W tym celu formalnie oblicza się wyrażenia:

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2 \mathbf{u}, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \{ \nabla^2 \mathbf{u} \} \varphi d\Omega - \\ &- \int_{\partial\Omega} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{u} \right) \varphi - \left( \frac{\partial}{\partial n} \varphi \right) \mathbf{u} \right] d\partial\Omega + \\ &+ \int_L \left[ \left( \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{u} \right)_L \varphi - \frac{\partial}{\partial n} \varphi [\mathbf{u}]_L \right] ds, \end{aligned} \quad (3.15)$$

oraz:

$$\begin{aligned} \langle \text{grad div } \mathbf{u}, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \{ \text{grad div } \mathbf{u} \} \varphi d\Omega + \\ &+ \int_{\partial\Omega} (\text{div } \varphi \mathbf{u} - \text{div } \mathbf{u} \varphi) d\partial\Omega - \\ &- \int_L ([\mathbf{u}]_L \text{div } \varphi - [\text{div } \mathbf{u}]_L \varphi) n ds. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Tutaj  $\{ \}$  oznacza różniczkowanie w zwykłym sensie,  $[\mathbf{u}]_L$  oznacza skok wektora przemieszczenia przy przejściu przez rysę  $L$ , zaś  $\varphi$  jest dowolną funkcją niekoniecznie z przestrzeni  $D$ .

Po elementarnych przekształceniach wzoru (3.12), wykorzystaniu relacji (2.1) i (3.13) ÷ (3.16) oraz używając dystrybucji  $\delta$ , zapisano równanie różniczkowe na wektor przemieszczenia  $\mathbf{u}(x, t)$  w lepkospężystej tarczy zarysowanej w postaci funkcjonalowej:

$$\begin{aligned} \left[ \psi_1 * \nabla^2 + \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) * \text{grad div} \right] \mathbf{u} + 1 * \mathbf{b} - \\ - \text{div } \mathbf{F} = -P(g\delta_L) + [1 * \hat{p} - P(\mathbf{u})] \delta_s + P[(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \delta_n] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Otrzymano w ten sposób równanie różniczkowe na wektor przemieszczenia  $\mathbf{u}(x, t)$  tarczy lepkospężystej zarysowanej, które zawiera w sobie komplet warunków brzegowych zewnętrznych na brzegu  $\partial\Omega$ , warunki początkowe oraz spełnia warunek graniczny w rysie powodujący skok wektora przemieszczenia przy przejściu przez jej brzeg.

Zwrócić należy uwagę na podobieństwo równania (3, 17) do równania przemieszczeniowego zagadnienia płaskiego z rysą podanego w pracy [5]:

$$\begin{aligned} \mu \left( \nabla^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div} \right) \mathbf{u} = \\ = -N(g\delta_L) + (\hat{p} - N(\mathbf{u})) \delta_s + N[(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \delta_n], \end{aligned} \quad (3.18)$$

gdzie  $N$  jest operatorem napięcia powierzchniowego

$$N(\cdot) = \mu \left( \hat{\nabla} + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{1} \text{div} \right) (\cdot) \mathbf{n}. \quad (3.19)$$

Różnica polega na występowaniu w funkcjach relaksacji wielkości  $\lambda$  i  $\mu$  zależnych od czasu.

#### 4. Związek fizyczny w rysie

Postać funkcji gęstości  $g(x, t)$  decyduje o stopniu trudności rozważanego problemu, stąd konieczność jej szerszego omówienia. Przy wyprowadzaniu równania różniczkowego tarczy lepkospężystej (3.17) przyjęto gęstość defektu  $g(x, t)$ , opisującą skok wektora przemieszczenia w rysie zgodnie z równaniem (2.3), na tyle regularną na ile wymagają tego obliczenia. Aby uzyskać postać funkcji gęstości  $g(x, t)$  należy w tarczy żelbetowej rozpatrzyć warunki równowagi w rysie pamiętając przy tym, że po powstaniu rysy istnieje

w niej uzewnętrznione zbrojenie, które wzajemnie oddziałują na sąsiednie brzegi rysy. Staje się zatem oczywiste, że rozwarcie rysy zależy będzie od wielkości sił występujących w odkrytym zbrojeniu w rysie. Złożoność niektórych procesów zachodzących w elementach żelbetonowych wymaga poczynienia szeregu założeń upraszczających koniecznych do określenia związku fizycznego w rysie. Jako główne wymienić tu można: rozpatrywanie statycznego zjawiska zarysowania (bez efektów dynamicznych podczas pęknięcia rysy itp.), założenie braku oddziaływań betonu między sąsiednimi brzegami rysy (wzajemne ząbienie się betonu) co powoduje, że napięcia w rysie przenoszone są tylko przez zbrojenie, ponadto przyjęcie krzywoliniowego wykresu naprężenie — odkształcenie  $\sigma - \varepsilon$  dla betonu oraz modelu sprężystoplastycznego  $\sigma - \varepsilon$  dla stali zbrojeniowej.

Rozpatrzenie wyrunków równowagi w rysie oraz założeń przyjętych z ogólnej teorii rys pozwala na otrzymanie prawa fizycznego opisującego jej rozwieranie się w procesie obciążenia — odciążenia w następującej postaci:

$$g(x, t) = g_0(x, t) + g_1(x)T(x, t), \quad x \in \widehat{AB} \quad (4.1)$$

Tutaj  $g_0(x, t)$  oznacza deformacje trwałe w rysie zależne od historii obciążenia (pamięć konstrukcji), natomiast  $g_1(x)T(x, t)$  deformacje sprężyste zależne od wypadkowego wektora napięć  $T(x, t)$  działającego w zbrojeniu rysy.

Wartości funkcji  $g_0(x, t)$  i  $g_1(x)$  zależą od parametrów wytrzymałościowych, geometrii rysy, charakterystyki zbrojenia itp. i są funkcjami ciągłymi punktów krzywej  $L$ .

Związek (4.1) jest związkiem lokalnym ważnym jedynie dla rysy tzn.  $g(x, t) = 0$  dla  $x \notin \widehat{AB}$ . Szczegółowe wyprowadzenie prawa fizycznego opisującego rozwarcie rysy dane zależnością (4.1) znaleźć można w pracy [15].

Wykorzystując sformułowany związek fizyczny w rysie (4.1) możliwe jest podanie rozwiązania w formie analogii sprężysto-lepkosprężystej. Prowadzi to jednak do znacznych komplikacji natury matematycznej, stąd przybliżony sposób rozwiązania możliwy jest do podania jedynie w formie pewnej przybliżonej procedury postępowania.

Przyjmując zależność (4.1) dla zagadnienia sprężystego za pierwsze przybliżenie rozwiązania równania lepkosprężystego (3.17) można przedstawić sprężyste rozwiązanie równania (3.18) w formie równania różniczkowo-całkowego:

$$u(x) = \int_{\widehat{AB}} [g_0(y) + g_1(y)T(y)]N(G(x, y))ds + \\ + \int_S \{N(G(x, y))[u(y) - \hat{u}(y)] - G(x, y)[N(u(y)) - \hat{p}(y)]\}ds \quad (4.2)$$

gdzie  $G(x, y)$  jest funkcją Greena spełniającą równanie:

$$\mu \left( \nabla^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div} \right) G(x) = \delta(x) \quad (4.3)$$

oraz założone warunki brzegowe (2.1) i (2.2).

Tutaj symbol  $\delta(x)$  oznacza deltę Diraca.

Rozwiązanie zagadnienia sprężystego sprowadza się zatem do wyznaczenia z zależności (4.2) nieznannej wartości wektora napięć działającego w przekroju zarysowanym.

Różniczkując obustronnie równanie (4.2) oraz wiążąc przemieszczenia  $u(x)$  z siłami wewnętrznymi przy pomocy zależności (3.2) i związków fizycznych dla płaskiego zadania sprężystego:

$$S = 2\mu \left( E + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \text{tr} E \right) \quad (4.4)$$

oraz odpowiednich transformacji naprężeniowych, doprowadza się je do postaci, w której po lewej stronie równania i w wyrażeniu podcałkowym występują te same wielkości, tzn. otrzymuje się równanie całkowe. Jest to silnie osobliwe równanie całkowe z osobliwościami typu  $\frac{1}{x}$ , z rzędem osobliwości wynikającej z postaci funkcji Greena  $G$  (por. np. [14]).

Zatem rozwiązanie zmodyfikowanego równania całkowego (4.2) istnieje i jest możliwe w sensie wartości głównej całki krzywoliniowej po krzywej  $\widehat{AB}$ .

Ze względu na skomplikowaną budowę równania (4.2), a właściwie równania całkowego opisanego powyżej, otrzymanie rozwiązania możliwe jest jedynie w formie przybliżonej za pomocą metod numerycznych np. metodą całek brzegowych.

Przemieszczenia „stowarzyszonego” problemu sprężystego  $u(x, t)$  przyjęte w oparciu o równanie (4.2) posłużą do rozwiązania statycznego zagadnienia lepkospężystość zadania płaskiego ze stacjonarną rysą w postaci splotu:

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial \tilde{u}(x, \tau)}{\partial \tau} \varphi(t - \tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Tutaj  $\varphi$  jest pewną kombinacją pochodnych funkcji relaksacji lub pełzania. Analogiczny splotowy sposób rozwiązania dotyczy naprężeń i odkształceń.

Rozwiązanie równania (4.5) w połączeniu z równaniem (4.2) możliwe jest jedynie w sposób przybliżony za pomocą metod numerycznych. Wymienić tu można np. metodę kolokacji rozwiązania całek brzegowych dla ustalonych punktów czasowych oraz punktów brzegu. Odbywać się to może w następujący sposób. Wychodząc od chwili początkowej  $t_0 = 0$ , rozwiązuje się całki brzegowe zmodyfikowanego równania (4.2) dla stanu sprężystego metodą kolokacji do uzyskania żądanej dokładności. Uzyskany w ten sposób końcowy podział brzegu tarczy na punkty kolokacyjne nie ulega już zmianie w procesie dalszego rozwiązywania tarczy dla iteracji czasowej. W kolejnym kroku następuje przejście do chwili czasowej  $t_1 = \Delta t$  i powtórne rozwiązywanie całek brzegowych z wykorzystaniem zależności uzyskanych w chwili  $t_0$ . Dalsza iteracja czasowa przebiega do wartości końcowej  $t_i = t_k$ , przy czym wyliczone wielkości kroku  $t_{i-1}$  (przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia) wykorzystywane są w rozwiązaniu całek brzegowych kroku  $t_i$ . Wielkość przyrostów czasowych  $\Delta t$  zależy od żądanej dokładności rozwiązania. Ze względu na charakter funkcji pełzania możliwe jest tu przyjęcie w procesie iteracji czasowej zmiennego kroku całkowania  $\Delta t$ , z krokiem zwiększającym się proporcjonalnie do miary stabilizacji odkształceń w czasie dla ustalonego poziomu obciążenia konstrukcji.

Uproszczenie przedstawionego powyżej zapisu iteracyjnego uzyskać by można przez sformułowanie metody całek brzegowych czasoprzestrzennych jako analogii do znanej czasoprzestrzennej metody elementów skończonych. Metody te stanowią jednak osobny

rozdział przybliżonych rozważań matematycznych i wykraczają poza ramy niniejszego artykułu.

### 5. Podsumowanie

Równanie (3.17) zostało wyprowadzone przy założeniu związków konstytutywnych w formie ogólnych przedstawień całkowych Boltzmanna. Przejście do modeli reologicznych, w których związki fizyczne opisane są operatorami różniczkowymi możliwe jest przez zastosowanie rachunku operatorów Mikusińskiego [13]. Przy czym mają miejsce związki

$$\begin{aligned} P_\alpha(t) * \Psi_\alpha(t) &= 1 * Q_\alpha(t), \\ Q_\alpha(t) * \Phi_\alpha(t) &= 1 * P_\alpha(t), \end{aligned} \quad (5.1)$$

ponadto

$$\Psi_\alpha(t) * \Phi_\alpha(t) = t, \quad \text{dla } \alpha = 1, 2. \quad (5.2)$$

Tutaj  $\Phi$  jest wektorem pełzania, zaś  $P_\alpha$  i  $Q_\alpha$  są pewnymi operatorami różniczkowymi. Jawną postać tych operatorów w poszczególnych modelach reologicznych znaleźć można w monografii [16]. Również przejście do modeli reologicznych betonu nie następuje większych trudności matematycznych.

Wyprowadzone globalne równanie różniczkowe opisuje model lepkosprężystej tarczy zarysowanej, będący uściśleniem sformułowanego wcześniej modelu zarysowanej tarczy sprężystej [5]. Pojawienie się w równaniu (3.17) warunków brzegowych wynika z zastosowania do analizy funkcji uogólnionych. Równanie to uwzględnia nieciągłość wektora przemieszczenia w miejscu rysy, zapewniając jednocześnie ciągłość wektora napięć przy przejściu przez krzywą  $L$ , zaś przybliżone rozwiązanie tego równania podano na podstawie analogii sprężysto-lepkosprężystej.

W dotychczasowych pracach technicznych przyjmujących rozwiązania w terminach dystrybucji [1, 2] otrzymano numeryczne rozwiązania zadań dla konstrukcji zarysowanych, które zweryfikowano z doświadczeniami, uzyskując pozytywną ocenę metody obliczeniowej. Pozwala to mieć nadzieję, że rozwiązanie w wyniku analizy numerycznej lepkosprężystej żelbetowej tarczy zarysowanej uściśli otrzymane wyniki w stosunku do analogicznej tarczy zarysowanej o modelu sprężystym.

### Literatura

1. A. BARYŁA, E. SOBOCIŃSKA, *Teoria płyt żelbetowych z rysami*, PWN, Warszawa-Lódź 1983.
2. A. BORCZ, *Teoria konstrukcji żelbetowych, cz. I*, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1973.
3. D. E. CARLSON, *Linear thermoelasticity*, in *Encyclopedia of Physics, Mechanics of Solids II*, IVa/2, Springer, Berlin etc. 1972.
4. H. GEISTEEFELDT, *Stahlbetonscheiben im gerissenen Zustand-Berechnung mit Berücksichtigung der rissabhängigen Schubsteifigkeit im Materialgesetz*, Institut für Statik der Technischen Universität Braunschweig, Bericht nr 76 - 19, Braunschweig 1976.
5. J. GŁADYSZ, M. MINCH, *Wykorzystanie rachunku dystrybucyjnego do opisu tarczy zarysowanej*, *Mech. Teoret. i Stos.* 23, 3 - 4, 1985, 467 - 473.

6. M. E. GURTIN, *Variational principles for linear elastodynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal., 16, 1, 1964.
7. M. E. GURTIN, *Variational principles for linear initialvalue problems*, Q. Appl. Math., 22, 3, 1964.
8. G. JEMIELITA, *Zginanie płyt prostokątnych obciążonych wzdłuż krzywej*, Arch. Inż. Łąd., XIX, 1, 1973, 117 - 134.
9. Н. КАРПЕНКО, *Теория деформирования железобетона с трещинами*, Строиздат, Москва 1976.
10. J. KORTAS, *Etude de L'ouverture des fissures en fonction du temps dans les poutres en beton arme, on partiellement proceint*, Diss. Lyon 1975.
11. E. KOSSECKA, *Mathematical theory of defects, Part I., Statics*, Arch. Mech. Stos., 26, 6, 1974, 995 - 1010.
12. F. LEONHARDT, E. MÖNNING, *Vorlesungen über Massivbau*, vol. 2, Springer, Berlin 1975.
13. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.
14. M. MINCH, *Funkcja Greena tarczy sprężystej*, Arch. Inż. Łąd., XXV, 1, 1979, 113 - 128.
15. M. MINCH, *Metoda teoretycznego wyznaczania naprężeń w żelbetowych tarczach zarysowanych*, Rozpr. Inż., 28, 3, 1980, 445 - 468.
16. W. NOWACKI, *Teoria pelzania*, PWN, Warszawa 1963.
17. L. SCHWARTZ, *Theorie des distributions*, Paris 1966.
18. J. SNEDDON, *Zagadnienia szczelin w matematycznej teorii sprężystości*, PWN, Warszawa 1962.
19. H. ZORSKI, *Theory of discrete defects*, Arch. Mech. Stosow., 18, 3, 1966, 301 - 372.

## Р е з ю м е

ОПИСАНИЕ СОСТОЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ДИСКА С ТРЕЩИНОЙ  
В КЛАССЕ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

В работе выведено дифференциальное уравнение вязкоупругого диска с трещиной. Используя вариационный принцип типа Гуртина, класс обобщённых функций и физическую связь типа Больцмана, получено дифференциальное уравнение плоского напряжённого состояния для линейного вязкоупругого материала. В этом уравнении появляются краевые условия, начальные условия и внутренние условия в трещине. Представлено приближённый способ решения основан на упруго-вязкоупругой аналогии.

## S u m m a r y

DESCRIPTION OF A CRACKED STATE OF A VISCOELASTIC  
PLATE BY DISTRIBUTIONAL FORMULATION

The paper contains a mathematical model of viscoelastic plate with cracks loaded in its plane. The crack has been characterized by the discontinuity of the displacement vector. The distributional differential equation of the viscoelastic plate with crack, appropriate boundary conditions, initial conditions and compatibility conditions, have been derived by the variational method of Gurtin in the space of general Functions. An approximate method of solution resulting from the elastic — viscoelastic analogy has been given.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 23 stycznia 1987 roku.*



## QUASI-STATYCZNA SPRĘŻYSTO-LEPKOPLASTYCZNOŚĆ DLA MATERIAŁU NIEŚCIŚLIWEGO. ROZWIĄZANIE MES

MACIEJ BANYŚ

*Politechnika Wroclawska*

### 1. Wprowadzenie

Zagadnienia quasistatycznej lepkoplastyczności są rozwiązywane efektywnie przy zastosowaniu procedur iteracyjno-przyrostowych typu Newtona-Raphsona [3, 2]. Tego typu metody zarówno w przypadku bez wzmocnienia, jak i ze wzmocnieniem kinematycznym są bezwarunkowo stabilne dla parametru aproksymacji liniowej  $\Theta \geq \frac{1}{2}$  i umożliwiają uzyskanie rozwiązań sprężysto-plastyczności, jako stanów ustalonych odpowiadających dużym czasom. Dotychczasowe rozwiązania pozwalają na stwierdzenie, że jedynie dla parametru  $\Theta = 1$  niezależnie od wielkości przyrostu czasu  $\delta t$  uzyskuje się wyniki praktycznie dowolnie dokładne. Dla parametru  $\Theta \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$  dokładność w istotny sposób zależała od wartości przyrostu  $\delta t$ , przy czym im mniejsza wartość  $\Theta$  tym, w celu zapewnienia dokładności, należy stosować mniejsze  $\delta t$ . W dotychczasowych rozważaniach koncentrowano się głównie na weryfikacji metod pod kątem ich stabilności i dokładności pomijając przypadek materiału nieściśliwego w zakresie sprężystym i plastycznym. Istnieje kilka możliwości uwzględnienia tej własności materiału [7], jednakże istnieją procedury, które „załamują” się i uniemożliwiają osiągnięcie pożądanej dokładności. W pracy skoncentrowano się na przebadaniu jednej z częściej stosowanych możliwości, która zadowalająco uwzględniła efekt nieściśliwości.

### 2. Procedura numeryczna

Model lepkoplastyczny zaproponowany w pracy [4] umożliwia stosowanie różnych kryteriów uplastycznienia i typów wzmocnienia. Dla kryterium Hubera-Misesa i wzmocnienia kinematycznego można zapisać model lepkoplastyczny w postaci:

$$\dot{\epsilon}^a = \frac{3}{2} \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{\sigma_{kint}}{\sigma_e} - 1 \right) \right\rangle \cdot \frac{1}{\sigma_{kint}} \|S_D \sigma_k, \quad (2.1)$$



gdzie  $\varepsilon^a$  — wektor odkształceń niesprężystych,

$\gamma$  oznacza lepkość,

$$\sigma_{kint} = \sqrt{\frac{3}{2} s_k^T || s_k}, \quad \langle \Phi \rangle = \begin{cases} \Phi, & \Phi \geq 0, \\ 0, & \Phi < 0, \end{cases}$$

$\sigma_e$  — aktualna granica plastyczności na rozciąganie,

$s_k = S_D \sigma_k$ ,  $s_k$  oznacza wektor dewiatora naprężenia względnego,

$S_D$  — macierz dewiatorowa,

$\sigma_k = \sigma - c ||| \varepsilon^a$ ,  $\sigma_k$  oznacza naprężenie względne.

Macierz  $||$  jest macierzą diagonalną wynikającą z zastosowania zapisu wektorowego tensora  $\sigma$ , a macierz  $|||$  przedstawia macierz diagonalną wynikającą ze stosowania odkształceń inżynierskich (z pominięciem  $\frac{1}{2}$  przy odkształceniach  $\varepsilon_{xy}$ ). Współczynnik  $c$  określa wzmocnienie kinematyczne. Metody opisane w pracach [2, 6] uwzględniają odkształcenia sprężyste poprzez równanie konstytutywne:

$$\sigma = D \varepsilon^e, \quad (2.2)$$

gdzie:  $D$  — macierzą sprężystości,

$\varepsilon^e$  — oznacza wektor odkształceń sprężystych.

Równanie równowagi dla obszaru  $V$  dla zastosowanej dyskretyzacji wprowadzonej przez macierz odkształceń  $B$  ma postać

$$\int_V B^T \sigma dV = R, \quad (2.3)$$

gdzie:  $\varepsilon = Bu$ ,  $u$  oznacza wektor przemieszczeń węzłów,

$R$  jest wektorem wszystkich obciążeń zewnętrznych.

Wprowadzając iteracyjno-przyrostowy zapis powyższych równań, aproksymację liniową i rozwinięcie w szereg Taylora prędkości odkształceń niesprężystych  $\dot{\varepsilon}^a$  możemy wyprowadzić procedurę typu Newtona-Raphsona tak jak w pracy [2]. Rozwiązanie sprowadza się wówczas do rozwiązywania układu równań liniowych tworzonych na nowo dla kolejnej  $i$ -tej iteracji w zastosowanym  $(n+1)$ -szym przyroście:

$$K' \cdot \Delta u_{n+1}^i = J - Y_{n+1}^i, \quad (2.4)$$

gdzie:  $K'$  jest macierzą sztywności postaci:

$$K' = \int_V B^T D'' B dV, \quad (2.5)$$

$\Delta u$  przedstawia przyrost przemieszczeń pomiędzy kolejnymi iteracjami.

Wektory prawej strony równania (2.4) tzw. sił równoważących mają postać:

$$J = \int_V B^T D' D^{-1} X_{n+1}^i dV, \quad Y_{n+1}^i = \int_V B^T \sigma_{n+1}^i dV - R_{n+1}, \quad (2.6)$$

gdzie:  $X_{n+1}^i = \delta \sigma_{n+1}^{i-1} - D(\delta \varepsilon_{n+1}^{i-1} - \dot{\varepsilon}_{n+1,0}^a \cdot \delta t)$ .

Macierz  $D''$  jest macierzą sprężysto-lepkoplastyczną uwzględniającą wzmocnienie i ma

postać:

$$D'' = G^T \left[ G D^{-1} G^T + \delta t \cdot \Theta \cdot \left( \frac{\partial \dot{\epsilon}^a}{\partial \sigma} \Big|_{n+\theta} \right)^T \right]^{-1} \cdot G. \quad (2.7)$$

Przyrost  $\delta \sigma_{n+1}^i = \sigma_{n+1}^{i+1} - \sigma_n$ .

Macierz  $D'$  jest związana z macierzą  $D''$  równaniem

$$D'' = D' G,$$

gdzie macierz  $G$  jest macierzą „wzmocnienia” postaci

$$G = I - \delta t \cdot \Theta \cdot \left( \frac{\partial \dot{\epsilon}^a}{\partial \sigma} \Big|_{n+\theta} \right)^T. \quad (2.8)$$

Macierz  $G$  w przypadku braku wzmocnienia, tzn. gdy  $c = 0$ , równa się macierzy jednostkowej  $I$ . W takim przypadku algorytm upraszcza się do opisanego w pracy [3].

Przyrost naprężeń pomiędzy kolejnymi iteracjami określony jest wzorem:

$$\Delta \sigma_{n+1}^i = D'' B \Delta u_{n+1}^i - D' D^{-1} X_{n+1}^i. \quad (2.9)$$

Algorytm powyższej procedury przedstawiony został w pracy [2].

### 3. Materiał nieściśliwy

Model lepkoplastyczny przedstawiony w punkcie II gwarantuje nieściśliwość materiału w zakresie plastycznym. Taką własność obserwujemy w przypadku metali. W niektórych przypadkach przyjmuje się również nieściśliwość w zakresie sprężystym, co odpowiada stosowaniu ułamka Poissona  $\nu = 0,5$ . Wówczas macierz sprężystości staje się nieokreślona ze względu na wyrażenie  $(1 - 2 \cdot \nu)$  w mianowniku. Możliwości rozwiązywania takich problemów zostały omówione ogólnie w pracy [7]. Jednakże w konkretnym przypadku konieczny jest wybór sposobu traktowania nieściśliwości dający gwarancję możliwie dokładnego rozwiązania. W pracy zastosowano często stosowany sposób polegający na przyjęciu ułamka Poissona o wartości bliskiej 0,5. Wybór ten podyktowany był własnościami procedury. Zwróćmy uwagę na równanie (2.7) określające macierz sprężysto-lepkoplastyczną. W przypadku wartości bliskich 0,5 macierz sprężystości posiada elementy o dużych wartościach. Z kolei macierz podatności  $D^{-1}$  ma elementy o małych wartościach, odwrotnie proporcjonalne do elementów macierzy  $D$ . Ten fakt powoduje, że w równaniu (2.7) dominuje drugi człon sumy wynikający ze stosowania modelu lepkoplastycznego. W równaniach (2.6) oraz (2.9) występuje iloczyn  $D^{-1} X_{n+1}^i$ . Ze względu na postać wektora  $X_{n+1}^i$  i własność macierzy podatności  $D^{-1}$  możemy stwierdzić, że powyższy iloczyn będzie równy wektorowi o skończonych wartościach. Decydujący ze względu na efektywność algorytmu będzie moment startu, gdy  $\sigma = 0$ . Wówczas drugi człon sumy związany z pochodnymi cząstkowymi przyjmie wartości zerowe i macierz  $D'' = D' = D$ . W miarę narastania odkształceń niesprężystych zwiększa się dominacja drugiego członu, a zmniejsza się wpływ wyrażenia  $(1 - 2 \cdot \nu)$ .

W pierwszym punkcie zaznaczyliśmy, że model lepkoplastyczny pozwala dla proporcjonalnego obciążania w prosty sposób generować rozwiązania dla plastyczności

Rozwiązanie plastyczne otrzymuje się jako graniczne rozwiązanie dla dużych czasów. Wówczas osiągamy stan stacjonarny i dalszy przyrost odkształceń plastycznych jest zerowy. Czas gra rolę fikcyjnego parametru. Również wielkość  $\gamma$  określana jako lepkość może przyjmować dowolną wartość bez wpływu na wynik obliczeń. Rozwiązanie sprężysto-epkopiastyczne dąży asymptotycznie do rozwiązania sprężysto-plastycznego. Z tego względu można weryfikować procedurę porównując wyniki obu metod tzn. sprężysto-lepkoplastyczności (stan stacjonarny) i sprężystoplastyczności. Należy podkreślić, że w MES rozwiązanie dla plastyczności otrzymuje się iteracyjnie lub przyrostowo. Zawsze na każdym etapie rozwiązywania problemem jest niedokładne spełnienie kryterium uplastycznienia  $\sigma_{kint} = \sigma_e$ . Stan naprężenia musi znaleźć się na powierzchni plastyczności i nie może jej przekroczyć. Takie przejście graniczne jest trudne do spełnienia numerycznie dla każdego punktu Gaussa całkowania numerycznego. Wykorzystanie modelu lepko-plastycznego omija ten problem dając rozwiązanie asymptotyczne i z tego względu jest konkurencyjne mimo pewnych wad [1, 6].

#### 4. Weryfikacja procedury

Do obliczeń wybraliśmy przykład rury grubościenniej nieskończenie długiej obciążonej ciśnieniem wewnętrznym. Przykład ten jest rozwiązany w literaturze i często jest stosowany do weryfikacji procedur numerycznych [1 ÷ 3]. Zastosowano prawo (2.1) z funkcją potęgową  $\Phi(F) = F^n$ .

Dane materiałowe przyjęliśmy tak jak w pracy [2]:

moduł Younga  $E = 3 \cdot 10^7$ ,

ułamek Poissona  $\nu = 0.495$  do  $0.499999995$ ,

granica plastyczności  $\sigma_e = 3 \cdot 10^4$ ,

wskaźnik potęgowania  $n = 1$ , promień wewnętrzny  $a = 1$ ,

lepkość  $\gamma = 1 \cdot 10^{-8}$ , promień zewnętrzny  $b = 2$ ,

współczynnik wzmocnienia  $c = 1,15 \cdot 10^7$ .

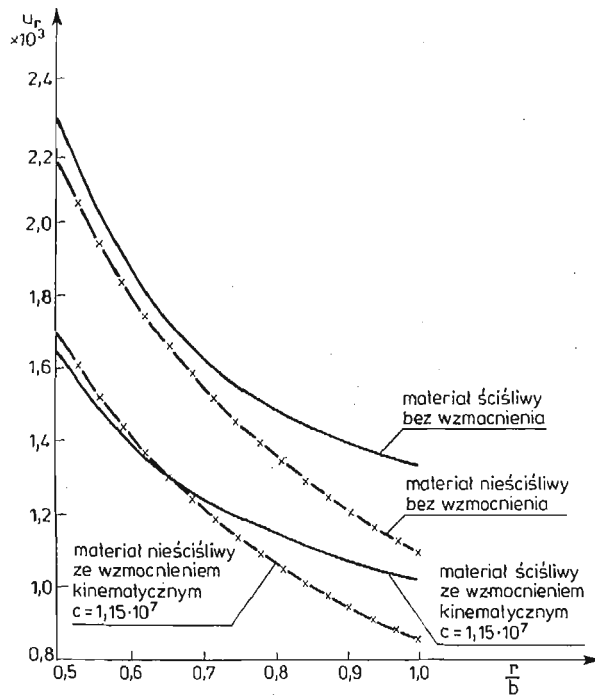
Zastosowano osiowo-symetryczne trójwęzłowe elementy Lagrange'a z ograniczoną możliwością odkształceń  $\epsilon_x = 0$  w kierunku osi symetrii oraz całkowanie numeryczne dwupunktowe kwadraturą Gaussa. Dyskretyzowano przekrój na 8 elementów z globalnie 17 węzłami. Wykonane obliczenia miały na celu potwierdzenie rozważań teoretycznych związanych z bezwarunkową stabilnością dla  $\theta \geq 1/2$  i dowolnie dużych przyrostów czasu  $\delta t$  oraz zbadanie wpływu wartości ułamka Poissona na dokładność i efektywność procedury. Ponieważ można uzyskać rozwiązanie sprężysto-plastyczne dla dużych czasów, z tego względu przyjęto przyrost czasu  $\delta t = 10^{10}$ . Przyrost ten umożliwia osiągnięcie stanu ustalonego już w drugim przyroście. Rozwiązaniem startowym było rozwiązanie czysto sprężyste. Przyjęto ciśnienie wewnętrzne  $p = 22420$ , które powoduje zarówno w przypadku bez wzmocnienia jak i ze wzmocnieniem znaczne uplastycznienie przekroju rury.

Zagadnienie rury grubościenniej nieskończenie długiej i obciążonej ciśnieniem wewnętrznym dla materiału nieściśliwego bez wzmocnienia redukuje się do prostych równań względem naprężeń [5]. W MES możliwe jest rozwiązanie tego zagadnienia poprzez przy-

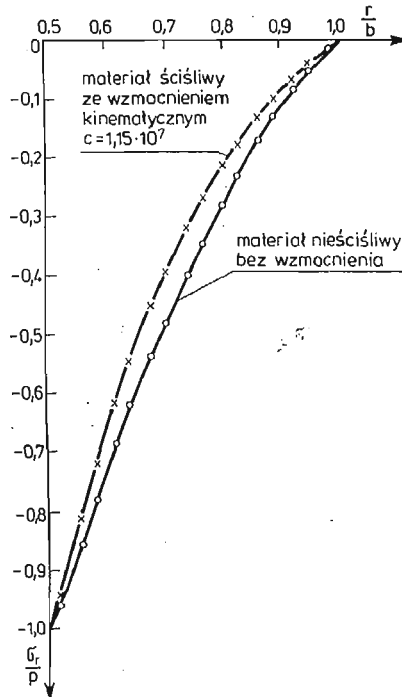
jęcie ułamka Poissona bliskiego wartości 0,5. W oparciu o opracowaną procedurę rozwiązano powyższe zagadnienie przyjmując różne wartości ułamka Poissona coraz bliższe 0,5. Praktycznie już dla wartości  $\nu = 0,495$  otrzymuje się bardzo zadowalające wyniki zarówno w zakresie przemieszczeń jak i naprężeń w przypadku bez oraz ze wzmocnieniem kinematycznym (rys. 1÷4). Przyjmowanie wartości coraz bliższych 0,5 nie powoduje znaczących zmian w wynikach. Różnice nie przekraczają przy tym 1%. Trzeba ponadto zaznaczyć, że aż do wartości  $\nu = 0,49999995$  nie występują zaburzenia w wynikach, co świadczy o dobrych własnościach procedury. Dopiero przyjęcie  $\nu = 0,499999995$  powoduje gwałtowne perturbacje w wynikach począwszy od rozwiązania sprężystego. Należy dodać, że wzrost wartości ułamka Poissona powoduje niekiedy wzrost liczby przyrostów potrzebnych w celu uzyskania stanu ustalonego. Powyższe obliczenia porównano dla materiału ściśliwego w zakresie sprężystym (rys. 1÷4). Praktycznie jedynie dla naprężenia osiowego  $\sigma_z$  widać istotne różnice pomiędzy materiałem ściśliwym a nieściśliwym. Wszystkie obliczenia zamieszczone na poniższych rysunkach wykonano dla parametru aproksymacji liniowej  $\Theta = 1$  i ułamka Poissona  $\nu = 0,495$  otrzymując stan ustalony w drugim przyroście przy nieprzekraczaniu pięciu iteracji. Warunek plastyczności w strefie plastycznej został spełniony idealnie w każdym punkcie Gaussa (błąd 0%). Obliczenia wykonano w podwójnej precyzji na komputerze SM4.

Następnie dla różnych wartości parametru aproksymacji  $\Theta$  testowano zachowanie się procedury związane z wpływem wartości ułamka Poissona  $\nu = 0,495$ . Obliczenia przeprowadzono dla przypadku bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem kinematycznym. Wpływ parametru aproksymacji możemy obserwować na podstawie spełnienia warunku plastyczności, tzn. poprzez statyczną funkcję uplastycznienia  $F = \frac{\sigma_{kint}}{\sigma_e} - 1$ . W przypadku osiągnięcia granicy plastyczności funkcja  $F$  przyjmuje wartość zero. W celu analizy wpływu parametru aproksymacji liniowej przyjmijmy różne wartości parametru dla naprężeń  $\Theta_\sigma$  oraz odkształceń niesprężystych  $\Theta_\epsilon$ . Przyjęcie obu wartości równych zero powodowało niestabilność numeryczną procedury zarówno w przypadku bez wzmocnienia, jak i ze wzmocnieniem kinematycznym (dla przyrostów czasu  $\delta t$  większych niż  $10^8$ ). W przypadku

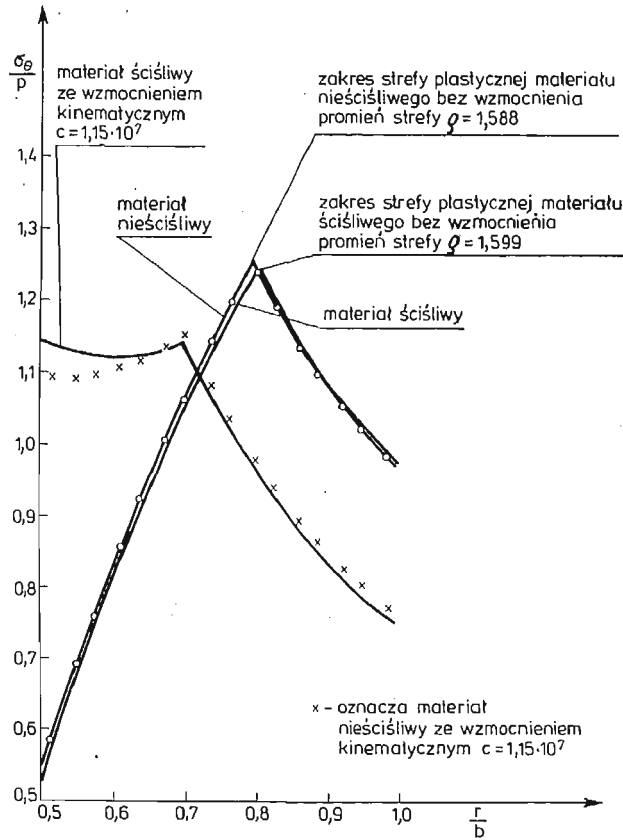
bez wzmocnienia, gdy  $\Theta_\epsilon = 0$  otrzymujemy algorytm stabilny dla  $\Theta_\sigma \geq \frac{1}{2}$ , jednakże, im mniejsza wartość  $\Theta_\sigma$ , tym mniejsza dokładność wyników (rys. 5); zwłaszcza dla granicznej wartości  $\Theta_\sigma = 0,5$  obserwujemy duże zaburzenia. W przypadku ze wzmocnieniem kinematycznym najbardziej interesujący jest wpływ drugiego parametru aproksymacji, tzn.  $\Theta_\epsilon$  (przy  $\Theta_\sigma = 1$ ). Jeżeli  $\Theta_\epsilon = 0$ , to pomijamy wpływ pochodnej cząstkowej względem  $\epsilon^a$  i procedura jest typu Newtona-Raphsona dla  $\sigma$  oraz początkowych obciążeń dla  $\epsilon^a$ . Wówczas macierz wzmocnienia  $G = I$  (patrz wzór 2.8). Okazuje się, że taki przypadek prowadzi do bardzo dużych błędów (rys. 6). Wzrost wartości  $\Theta_\epsilon$  zdecydowanie polepsza dokładność i w przypadku, gdy  $\Theta_\sigma = \Theta_\epsilon = 1$  otrzymuje się bardzo dobre wyniki (niezależnie od wartości przyrostu  $\delta t$ ). Należy zaznaczyć, że nie obserwowano znaczących różnic w wartościach funkcji uplastycznienia  $F$  dla ułamków Poissona bliskich 0,5 (rys. 6, 7).



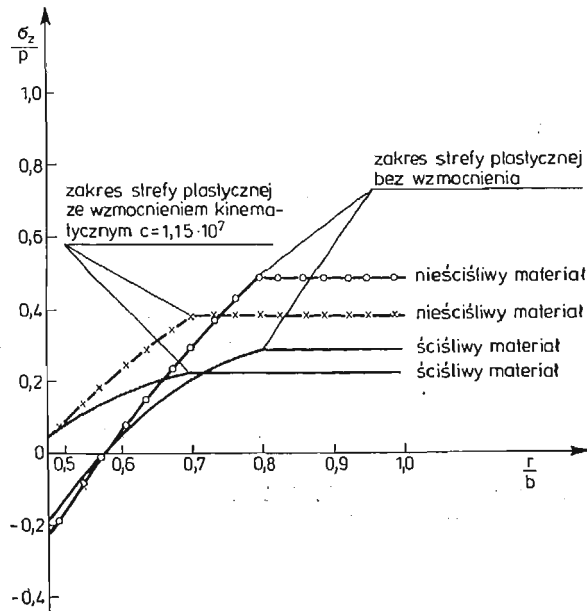
Rys. 1. Rura grubościenna. Wykresy przemieszczeń promieniowych  $u_r$  dla materiału nieściśliwego i ściśliwego. Przyjęto materiał bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem kinematycznym. Zastosowano 8 elementów; wartości przemieszczeń w węzłach; linie ciągłe — rozwiązanie ścisłe [5]



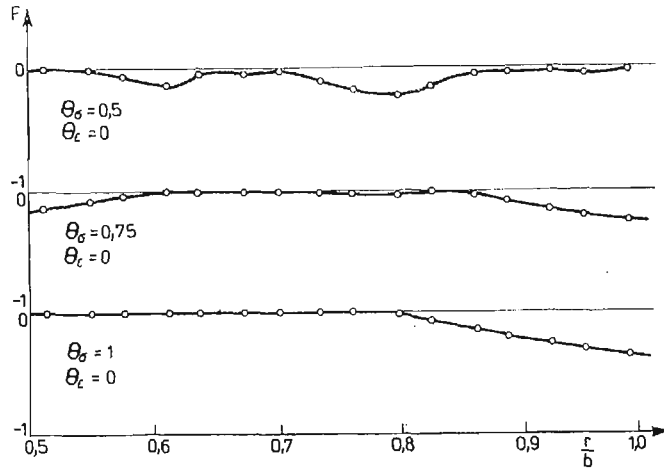
Rys. 2. Wykresy naprężeń promieniowych  $\sigma_r$  dla rury grubościennej z materiału ściśliwego i nieściśliwego;  $p$  — oznacza ciśnienie wewnętrzne;  $r$  — promień; linie ciągłe — obliczenia ścisłe [5]. Przyjęto materiał bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem kinematycznym. Wartości naprężeń w punktach Gaussa; zastosowano 8 elementów



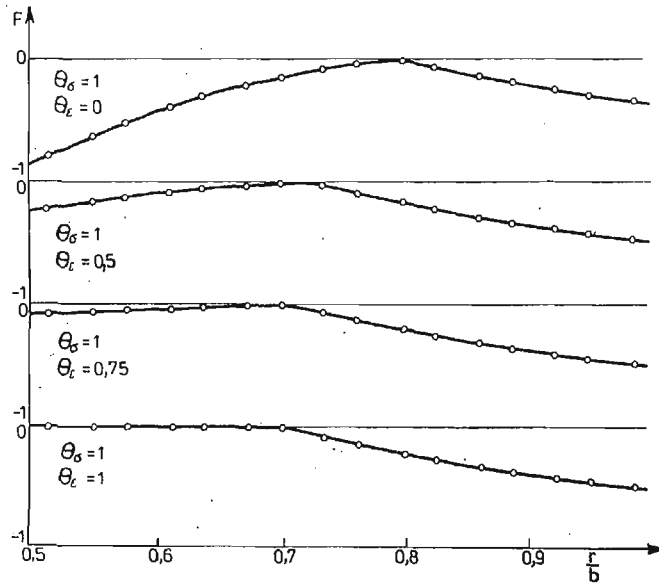
Rys. 3. Rura grubościenna. Wykresy naprężeń obwodowych dla materiału ściśliwego i nieściśliwego. Przyjęto materiał bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem kinematycznym. Linie ciągłe — obliczenia porównawcze [5]; wartości naprężeń w punktach Gaussa



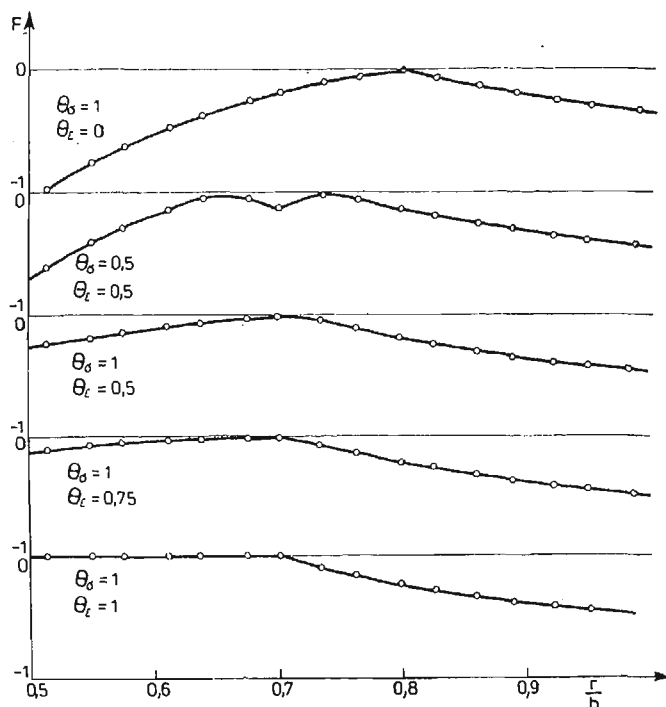
Rys. 4. Rura grubościenna. Wykresy naprężeń osiowych  $\sigma_z$  dla materiału ściśliwego i nieściśliwego. Przyjęto materiał bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem kinematycznym. Wartości naprężeń w punktach Gaussa; zastosowano 8 elementów i dwupunktową kwadraturę Gaussa



Rys. 5. Zależność statycznej funkcji uplastycznienia  $F$  od parametrów aproksymacji liniowej  $\Theta$ . Przypadek bez wzmocnienia



Rys. 6. Zależność statycznej funkcji uplastycznienia  $F$  od parametrów aproksymacji liniowej  $\Theta$ . Przypadek ze wzmocnieniem kinematycznym



Rys. 7. Analogiczny wykres jak na rys. 6; przypadek materiału ściśliwego z ułamkiem Poissona  $\nu = 0.3$

## 5. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych rozważań i weryfikacji numerycznej można stwierdzić, że procedura typu Newtona-Raphsona jest bezwarunkowo stabilna dla parametrów aproksymacji liniowej  $\theta \geq \frac{1}{2}$ . Umożliwia ona efektywne rozwiązywanie zagadnień quasi-statycznej sprężysto-lepkoplastyczności oraz sprężysto-plastyczności dla różnych wartości ułamka Poissona praktycznie dowolnie bliskich 0,5, co odpowiada przyjęciu materiału nieściśliwego.

## Literatura

1. J. H. ARGYRIS, L. F. VAZ, K. J. WILLAM, *Improved solution methods for inelastic rate problems*, Comp. Meth. App. Mech. Eng. 16, 31 - 77, 1978.
2. M. BANYŚ, *Rozwiązywanie problemów quasi-statycznej sprężysto-lepkoplastyczności ze wzmocnieniem kinematycznym*, Mech. Teor. i Stos. (w druku).
3. T. J. R. HUGHES, R. L. TAYLOR, *Unconditionally stable algorithms for quasistatic elasto-visco-plastic finite element analysis*, Comp. Struct. 8, 169 - 173, 1978.
4. P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastyczności*, PWN, 1966.
5. W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, J. Wiley, 1951.



6. O. C. ZIENKIEWICZ, I. CORMEAU, *Visco-plasticity, plasticity and creep in elastic solids — a unified numerical solution approach*, Int. J. Num. Meth. Eng. 8, 821 - 845, 1974.
7. O. C. ZIENKIEWICZ, *Viscoplasticity, plasticity, creep and viscoplastic flow-problems of small, large and continuing deformations*, Computational Mechanics, ed. J. T. Oden, Austin, Texas, 297 - 328, 1974.

Резюме

КВАЗИ-СТАТИЧЕСКАЯ УПРУГО ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТЬ ДЛЯ  
НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА. РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ.

Применен метод конечных элементов для квазистатических проблем упруго вязкопластичности с учетом кинематического упрочнения. Принят несжимаемый материал в упругой области для числа Пуассона близкого 0.5. Не наблюдалось значительное влияние числа Пуассона на снижение эффективности алгоритма области стабильности как и точности. Для параметра аппроксимации  $\Theta = 1$  и число Пуассона  $\nu = 0.495$  получены очень удовлетворительные результаты для несжимаемых материалов.

Summary

QUASI — STATIC ELASTO — VISCOPLASTICITY FOR INCOMPRESSIBLE MATERIAL  
SOLUTION BY FEM.

The finite element method has been applied to quasi-static elasto-viscoplasticity with kinematic hardening. Incompressible material in the elastic range has been considered for the Poisson ratio close to 0.5. The substantial influence of the Poisson ratio on deterioration of the algorithm effectiveness in the range of stability and accuracy was not observed. The satisfactory result for the incompressible material with application of parametr  $\Theta = 1$  and the Poisson ratio  $\nu = 0.495$  has been obtained.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 30 marca 1987 roku.*

## NON-STANDARD ANALYSIS AND THE CONTINUOUS MEDIA

JERZY BŁAHUT

*Politechnika Śląska, Gliwice*

### 1. Preliminary remarks

The A. Robinson's non-standard analysis seems to be a very convenient and efficient tool of formalization of the connections between the system of corpusculae of material body and the continuous medium, representing this body.

In the survey [5] of Polish studies in the above mentioned direction and in the paper [7] quoted in [5], there is also demonstrated the possibility of a similar formalization of the connections between porous medium and its skeleton (at given time instant).

In this paper we present certain notion of continuous medium and discuss its simple topological and measure theoretical properties.

We begin with a brief description of the non-standard formalism, used below. Starting from the set  $X_0 = \mathbb{R}$  (the real line) of individuals we obtain the universe of the standard model  $M$  of analysis as  $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ , where  $X_{n+1}$  equals to  $X_n$  plus the power set of  $X_n$  for any natural  $n$ . The set-theoretical epsilon-relation  $\epsilon$ , restricted to  $X^2$  is the only extralogical relation of the model  $M$ . The language of  $M$  contains also the constants, at least one for each element of  $X$ . For given infinite set  $W$  of indices and the  $\mathcal{X}_0$ -regular ultrafilter  $D$  on  $W$ , we define nonstandard model  $*M$  as the ultrapower of  $M$  modulo  $D$ . We do not suppose for  $*M$  the enlargement property and we make no hypotheses on saturation of  $*M$  in the powers, greater than  $\mathcal{X}_1$ .

The symbols  $\hat{a}_w, \hat{A}_w, \dots$  stand for elements of the non-standard universe, that are equivalence classes of the functions  $(a_w)_{w \in W}, (A_w)_{w \in W}, \dots$  respectively modulo  $D$ . The expressions of set theory, analysis etc., introduced in the paper are to be understood as the abbreviations of the expressions, defined in  $*M$ . The standard elements of  $*X$  and the internal sets (relations, functions) in  $*M$  are defined as usual, the notation for standard elements is the usual one, too. We refer to [3] for details. If the argument concerns only the  $*$ elements of  $*X_n$  with given, finite  $n$  (as in the whole text below), then we can identify the relation  $*\epsilon$  of  $*M$  with a suitable restriction of the set-theoretical epsilon.

## 2. Main definition and theorems

In all the paper  $U$  denotes a bounded open set in the space  $R^3$  of the standard model  $M$ .  
**Definition 1.** The set  $P \subseteq U$  is said to be a continuous medium of the internal set  $\hat{A}_w$  of points of  $*R^3$  in  $U$  if there holds inclusion  $\hat{A}_w \cap *U \subseteq *P$ .

We shall frequently use the following trivial

**Lemma 1.** The set  $P \subseteq U$  is a continuous medium of  $\hat{A}_w$  in  $U$  as above if there exists a set  $H \in D$  such, that

$$U \cap \bigcup_{w \in H} A_w \subseteq P$$

(here and everywhere in the paper  $W$  and  $D$  are the set of indices and the ultrafilter, used in the description of  $*M$  in the section 1).

**Proof.** It is immediate. Indeed,  $\hat{A}_w \cap *U \subseteq *P$  iff  $A_w \cap U \subseteq P$  for each  $w$  from the set of indices, belonging to  $D$ , which is equivalent with the condition in the thesis, q.e.d.

The set  $\hat{A}_w$  may be meant as a hyperfinite set of mass-points (see e.g. [5, 6]) or as the sum of (maybe, hyperfinite, too) internal family of balls of infinitesimal radius, intended as a model of a set of atoms. We can also interpret  $\hat{A}_w$  as a skeleton of porous medium (see [7]). The notion of continuous medium defined in this section seems to be very naive and even too general. We prove, however, that under very natural hypotheses about the distribution of points of  $\hat{A}_w$  in  $*U$  there is very few continuous media of  $\hat{A}_w$  in  $U$ .

Let  $\{K_n\}_{n \in *N}$  be an internal sequence (indexed with extended naturals) of cubes  $K_n$  of the form  $[a_n, b_n) \times [c_n, d_n) \times [e_n, f_n)$  ( $[x, y)$  is the set of all  $z \in *R$  such that  $x \leq z < y$ ). Suppose that:

1° there exists a positive infinitesimal  $\hat{h}_w$  such that  $b_n - a_n = d_n - c_n = f_n - e_n = \hat{h}_w$  for any  $n \in *N$ ,

2° if  $m, n \in *N$ ,  $m < n$  then  $K_m, K_n$  are disjoint,

3° the extended space  $*R^3$  is a sum of all  $K_n$ 's,  $n \in *N$ .

Denote by  $\text{mes}$  the three-dimensional Lebesgue measure, by  $*\text{mes}$  its extension in  $*M$  and by  $\text{st } x$  the standard part of a finite hyperreal  $x$ . Denote, at the end, by  $A^\circ$  the interior of a set  $A \subseteq R^3$  in the natural topology of  $R^3$ .

We have the following theorems

**Theorem 1.** If for each  $K_n \subseteq *U$  the intersection  $K_n \cap \hat{A}_w$  is non-empty, then any continuous medium  $P$  of  $\hat{A}_w$  in  $U$  is dense in  $U$ .

**Theorem 2.** If for any  $K_n \subseteq *U$  holds the inequality:

$$\text{st} \left( \frac{* \text{mes}(K_n \cap \hat{A}_w)}{* \text{mes}(K_n)} \right) > 0,$$

then each Lebesgue measurable continuous medium  $P$  of  $\hat{A}_w$  in  $U$  is of full Lebesgue measure in  $U$ .

**Theorem 3.** If for each  $K_n \subseteq *U$  holds the inequality:

$$\text{st} \left( \frac{* \text{mes}(K_n \cap \hat{A}_w^\circ)}{* \text{mes}(K_n)} \right) > 0,$$

then each continuous medium  $P$  of  $\hat{A}_w$  in  $U$  is of full Lebesgue measure in  $U$  and the set  $U \setminus P$  is nowhere dense in  $U$ .

Remark. The occurrence of  $^*mes$ , a canonical extension of Lebesgue measure (not of the external measure) in  $^*R^3$  in the inequalities of thms 2,3 implies measurability of the sets in question.

Proof of the thm 1. Let  $P$  be a continuous medium of  $\hat{A}_w$  in  $U$  and let  $B \subseteq U$  be an open ball with a center  $c$  and radius  $r > 0$ . Since  $^*R^3$  is a sum of  $K'_n$ 's, there exists  $p \in ^*N$  such, that  $^*c \in K_p$ . Since  $0 < \hat{h}_w < ^*r$ , we have  $K_p \subseteq ^*B$ . Let  $K_p = \hat{C}_w$ , where any  $C_w$ ,  $w \in W$ , is a cube in  $R^3$  of the form  $[s_w, t_w) \times [u_w, x_w) \times [y_w, z_w)$ . Then  $K_p \subseteq ^*B$  and  $K_p \cap \hat{A}_w$  non-empty imply, that  $C_w \subseteq B$  and  $C_w \cap A_w \neq \emptyset$  for each  $w$  from certain set  $H_0 \in D$ . Hence, if  $U \cap \bigcup_{w \in H} A_w \subseteq P$  for certain  $H \in D$ , then  $\bigcup_{w \in H} (C_w \cap A_w) \subseteq P$  and for each  $w \in H_0 \cap H$ ,  $C_w \cap A_w \subseteq P$  has non-void intersection with  $B$ .  $H_0 \cap H \in D$  is non-empty set, which completes the proof.

Proof of the thm 2. Since  $U$  is bounded, the set  $I$  of all  $n \in ^*N$  such, that  $K_n \subseteq ^*U$ , is hyperfinite. Hence, the set of all numbers:

$$c_n = \frac{^*mes(K_n \cap \hat{A}_w)}{^*mes(K_n)}, \quad n \in I,$$

is finite or hyperfinite and, according to the well-known non-standard result, has a least number  $\hat{c}_w$ . The standard part  $2c$  of  $\hat{c}_w$  is positive.

For certain  $H_1 \in D$  we have  $c_w > c > 0$  whenever  $w \in H_1$ . Let  $P$  be a Lebesgue measurable continuous medium of  $\hat{A}_w$  in  $U$ . Then for certain  $H_2 \in D$  there is:

$$U \cap \bigcup_{w \in H_2} A_w \subseteq P.$$

Choose arbitrary point  $p$  in  $U$ . For certain  $q \in ^*N$  there is  $^*p \in K_q$  and, since  $U$  is open, also  $K_q \subseteq ^*U$ . Put  $K_q = \hat{C}_w$ , where each  $C_w$  is as in the proof of thm 1. Then for certain  $H_3 \in D$  there is:

$$\frac{mes(C_w \cap A_w)}{mes(C_w)} \geq c_w \quad \text{and} \quad p \in C_w,$$

whenever  $w \in H_3$ . Since the set  $H = H_1 \cap H_2 \cap H_3$  is infinite, and the length  $\hat{h}_w$  of the edge of  $K_q$  is an infinitesimal, there is a sequence  $\{w_n\}_{n=1}^\infty$  of  $w_n$ 's from  $H$  such, that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{h}_{w_n} = 0$ . Let for each finite natural  $n$   $E_n$  be an open cube with the edges of length  $2\hat{h}_{w_n}$  parallel to the axes of coordinates, such, that  $p \in E_n$  and  $C_{w_n} \subseteq E_n$ . Then we have:

$$\begin{aligned} \frac{mes(E_n \cap P)}{mes(E_n)} &\geq \frac{mes(A_{w_n} \cap E_n)}{mes(E_n)} \geq \frac{mes(C_{w_n} \cap A_{w_n})}{mes(E_n)} \geq \frac{1}{8} \cdot \frac{mes(C_{w_n} \cap A_{w_n})}{mes(C_{w_n})} \\ &\geq \frac{1}{8} \cdot c_{w_n} \geq c/8 > 0. \end{aligned}$$

Hence,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (mes(E_n \cap P)/mes(E_n)) \geq c/8 > 0.$$

Since  $P$  is Lebesgue measurable,  $\text{mes}(U \setminus P) = 0$  results from the last inequality above and from the Lebesgue density theorem.

Proof of the theorem 3. Let  $P$  be any continuous medium of  $\hat{A}_w$  in  $U$ , where  $\hat{A}_w$  satisfies the hypothese of the theorem. Denote the interior of  $A_w$  by  $B_w$ . There exists a set  $H_1 \in \mathcal{D}$  such, that  $P$  is a superset of the continuous medium  $P_0 = U \cap \bigcup_{w \in H_1} B_w$  of the set  $\hat{B}_w$  in  $U$ .

$\hat{B}_w$  satisfies the condition of the theorem 2,  $P_0$  is open and hence measurable, which completes the proof of the first thesis. Now, let  $p$  be a point in  $U$  and  $K$  and open cube in  $\mathbb{R}^3$  with center  $p, K \subseteq U$ . There exists  $K_n = \hat{C}_w$  (any  $C_w$  is a cube in  $\mathbb{R}^3$  with the edges of length  $h_w$ ) such, that  ${}^*p \in K_n$ . Thus, there exists a set  $H_2 \in \mathcal{D}$  such, that  $\bigcup_{w \in H_2} (C_w \cap B_w) \subseteq P \cap K$  and  $B_w \cap C_w$  is non-empty whenever  $w \in H_2$ . Left hand side of the last inclusion is an open set and we have proved, that each neighbourhood of each  $p \in U$  includes an open ball that is disjoint with  $U \setminus P$ . Hence,  $U \setminus P$  is nowhere dense, q.e.d.

### 3. Generalization

The ultrapower technique was essential above for obtaining proofs of thms 1, 2, 3. However, according to certain Frayne's theorem (corollary 4.3.13 in [1]), if  $M_1$  is a proper elementary extension of the standard model  $M$  from the section 1, then  $M_1$  can be elementarily embedded into an ultrapower  ${}^*M$  of  $M$  modulo certain ultrafilter  $D$ . If  $M_1$  contains non-standard naturals,  $D$  must be  $\mathcal{X}_0$ -regular. This makes possible generalization of the theorems 1, 2, 3 by weakening hypotheses. Let  ${}^*M$  be arbitrary proper elementary extension of  $M$ , containing non-standard naturals, let  $U$  and  ${}^*U$  be as in the section 2. Writing in the definition 1  $A$  instead of  $\hat{A}_w$  ( $A$  an internal subset of  ${}^*\mathbb{R}^3$ ) we can modify the definition of continuous medium. Let for internal  $A \subseteq {}^*\mathbb{R}^3$   $A^\circ$  be the internal set,  $p \in A^\circ$  if there exists positive (maybe, infinitesimal)  $r \in {}^*\mathbb{R}$  such, that the internal ball  $B$  with center  $p$  and radius  $r$  is a subset of  $A$ . Let, at the end, the internal sequence of  $K'_n$ s,  $n \in {}^*\mathbb{N}$ , fulfils the conditions 1°, 2°, 3° of section 2 with a positive infinitesimal  $h$  instead of  $\hat{h}_w$ . Then, writing in the theorems 1, 2, 3  $A$  instead of  $\hat{A}_w$  and  $A^\circ$  instead of  $\hat{A}_w^\circ$ , we obtain true theorems.

### 4. On the existence of porosity

Define, analogously as in [5] the porosity  $\pi(p)$  of  $\hat{A}_w$  at the point  $p \in U$  as a standard part of the  $F$ -limit:

$$F\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}(\hat{A}_w \cap {}^*I_n) / \text{mes}({}^*I_n),$$

where for  $p = (x, y, z)$  and a finite natural  $n, I_n = \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \times \left(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right) \times \left(z - \frac{1}{n}, z + \frac{1}{n}\right)$  is an open interval in  $\mathbb{R}^3$  (see [4] for the definition of  $F$ -limit). By

$st_3 \hat{p}_w$ , we denote in this section the point  $p \in R^3$  such, that the euclidean distance between  $\hat{p}_w$  and  $*p$  is infinitesimal.

Denote by  $S$  the  $\sigma$ -algebra of all Borel subsets of  $U$ . We prove the following

Theorem 4. If  $\hat{A}_w \in *S$ , then the porosity function  $\pi$  is defined at almost all (with respect to the Lebesgue measure) points of the set  $U$ .

Proof. Denote by  $S_1$  the  $\sigma$ -algebra of subsets of  $*U$ , generated by  $*S$  and let the internal sequence  $\{K_n\}_{n \in *N}$  be as in section 2. For any  $E \subseteq U$  let  $\tilde{E}$  be a counterimage of  $E$  with respect to the mapping  $st_3$ .

We sketch, for convenience, the proof, that  $\tilde{E} \in S_1$  whenever  $E \in S$ . Let  $G \subseteq U$  be open, let  $d(a, A)$  be the distance of point  $a$  from the set  $A$  in the euclidean metric of  $R^3$  and

let for  $n \in N$ ,  $G_n$  be the sum of those exactly  $K_q$ 's that  $*d(\hat{p}_w, *U \setminus G) \geq \frac{1}{*n}$  for any

$\hat{p}_w \in K_q$ . Then  $\tilde{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n, \tilde{G} \in S_1$ . The family of all sets  $\tilde{E}$ , where  $E \in S$ , is a  $\sigma$ -algebra of subsets of  $\tilde{U}$ , generated by the sets  $\tilde{G}$ , where  $G \subseteq U$  are open. Of course, this  $\sigma$ -algebra is a subfamily of  $S_1$ . Put  $m_0(B) = *mes(B \cap \hat{A}_w)$  for any  $B \in *S$ .  $(*U, *S, m_0)$  is then an internal measure space in a sense of [2] and we can extend  $st m_0$  to the Loeb measure  $m_1$  defined on  $S_1$ .

Let, at the end,  $m_2(E) = m_1(\tilde{E})$  for each  $E \in S$ . Then for a sequence  $\{E_n\}$  of pairwise

disjoint sets from  $\tilde{S}$ ,  $E_n$ 's are pairwise disjoint and  $m_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = m_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n) = m_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m_1(\tilde{E}_n)$ ,  $m_2$  is a measure on  $S$ . If  $E \in S$  is of Lebesgue measure zero, then for

any  $*\varepsilon > 0$ , and open  $G \subseteq U$  such, that  $mes(G) > \varepsilon$  and  $E \subseteq G$  we have  $\tilde{G} \subseteq *G$ , for  $G$  open, and  $m_2(E) \leq m_2(G) = m_1(\tilde{G}) \leq m_1(*G) = st *mes(*G \cap \hat{A}_w) \leq st *mes(*G) < \varepsilon$ .

Hence,  $m_2(E) = 0$  too and  $m_2$  is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure restricted to  $S$ . It follows from the Radon-Nikodym theorem, that  $m_2$  has at Lebesgue almost all points  $p = (x, y, z) \in U$  the Radon-Nikodym derivative with respect to  $mes$ ,

denote it by  $f(p)$ , equal to  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_2(I_n) / mes(I_n)$ , where  $I_n = \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \times \left(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right) \times$

$\times \left(z - \frac{1}{n}, z + \frac{1}{n}\right)$  is an open interval and  $I_n \subseteq U$  for  $n$  large enough. We have for any standard natural  $n$  and for:

$$J_n = \left(x - \frac{1-2^{-n}}{n}, x + \frac{1-2^{-n}}{n}\right) \times \left(y - \frac{1-2^{-n}}{n}, y + \frac{1-2^{-n}}{n}\right) \times$$

$$\left(z - \frac{1-2^{-n}}{n}, z + \frac{1-2^{-n}}{n}\right), *J_n \subseteq \tilde{I}_n \subseteq *I_n \text{ and } m_1(*I_n \setminus *J_n) \leq$$

$$mes(I_n \setminus J_n) < 1/(8^n mes(I_n)).$$

Hence, for  $n$  large enough:

$$\left| \frac{m_2(I_n)}{\text{mes}(I_n)} - \text{st} \frac{* \text{mes}(*I_n \cap \hat{A}_w)}{* \text{mes}(*I_n)} \right| < 8^{-n}$$

and  $f(p)$  equals to  $\pi(p)$  the standard part of the  $F$ -limit of  $* \text{mes}(*I_n \cap \hat{A}_w) / * \text{mes}(*I_n)$ , q.e.d.

#### References

1. C. C. CHANG, H. J. KEISLER, *Model Theory*, Amsterdam 1973.
2. P. A. LOEB, *Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory*, Trans. of AMS, 211 (1975) pp. 113 - 122.
3. M. MACHOVER, J. HIRSCHFELD, *Lectures on non-standard analysis*, Berlin, Heidelberg, New York 1969.
4. A. ROBINSON, *Non-standard analysis*, Amsterdam 1966.
5. Cz. WOŹNIAK, *Nonstandard analysis in mechanics*, Advances in mechanics (1986) Nr 1 pp. 3 - 36.
6. Cz. WOŹNIAK, *On the nonstandard analysis and the interrelations between mechanics of mass-point systems and continuum mechanics*, Mech. Teor. i Stos. 4, 19 1981, pp. 511 - 525.
7. Cz. WOŹNIAK, K. NOBIS, *Non-standard analysis and balance equations in the theory of porous media*, Bull. Ac. Pol. Sci. Tech. XXIX, 11 - 12, 1981, pp. 213 - 218.

#### Резюме

#### НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ И СПЛОШНЫЕ СРЕДЫ

Для внутреннего множества  $\hat{A}_w$  точек нестандартного расширения трехмерного пространства и открытого множества  $U$  стандартного пространства определяем непрерывную среду  $\hat{A}_w$  в  $U$  как стандартное множество  $P$ , в расширении  $*P$  которого заключены все общие точки  $\hat{A}_w$  и  $*U$ . Для этого абстрактного определения даются возможные физические истолкования, в том числе связанные с понятием пористой среды.

Даются условия гарантирующие, что непрерывная среда

- 1° плотная в  $U$ ,
- 2° измеримая непрерывная среда полной меры в  $U$ ,
- 3° всякая непрерывная среда полной меры в  $U$  и её внутренность плотная в  $U$ ,

Доказаны соответствующие теоремы. Доказана даже теорема существования почти всюду функции пористости в смысле работы [7].

#### Streszczenie

#### ANALIZA NIESTANDARDOWA I OŚRODKI CIĄGŁE

Dla zbioru wewnętrznego  $\hat{A}_w$  punktów rozszerzenia niestandardowego przestrzeni trójwymiarowej definiujemy ośrodek ciągly zbioru  $\hat{A}_w$  w otwartym podzbiorku  $U$  standardowej przestrzeni trójwymiarowej jako zbiór  $P$  standardowych punktów przestrzeni, w którego rozszerzeniu  $*P$  zawarte są wszystkie punkty wspólne  $\hat{A}_w$  i  $*U$ .

Dla tej definicji podajemy możliwe interpretacje fizyczne, między innymi w terminach ośrodka porowatego.

Podano w pracy warunki dostateczne na to, by

- 1° ośrodek ciągly  $P$  był gęsty w  $U$ ,

---

2° mierzalny ośrodek ciągły  $P$  był pełnej miary w  $U$ ,

3° każdy ośrodek ciągły był pełnej miary w  $U$  i miał wnętrze gęste w  $U$ .

Podano dowody odpowiednich twierdzeń. Udowodniono także przy dodatkowych założeniach o  $\hat{A}_w$  twierdzenie o istnieniu prawie wszędzie funkcji porowatości w sensie pracy [7].

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 września 1986 roku.*

---





## CONSTRAINTS IN SOILD MECHANICS. AN APPLICATION OF NONSTANDARD ANALYSIS

EWARYST WIERZBICKI

*Institut Mechaniki UW*

### 1. Introduction

The concept of constraints in solid mechanics is usually utilized to formulate special cases of constitutive relations identifying with certain restriction imposed on pairs  $(\chi, T)$  of a motion  $\chi$  and a stress  $T$ . To be a constitutive relation such restriction must have a special form, i.e. it must fulfil certain necessary conditions stated in the general theory of constitutive relations. The following Noll axiom is exactly one of these conditions, [9, p. 160].

The principle of determinism for simple materials. The stress at the place occupied by the body-point  $\chi$  at the time  $t$  is determined by the history  $\chi^t$  of the motion of the body up to the time  $t$ , i.e.

$$T(\chi(X, t), t) = \mathcal{F}(\nabla\chi^t(X, \cdot); X).$$

Here  $\mathcal{F}(\cdot)$  denotes a sufficient regular mapping of histories  $\nabla\chi^t$  of a gradient  $\nabla\chi$  of a motion  $\chi$ , body -points  $X$  onto symmetric Cauchy stress tensors.

The above principle of determinism will be called here a classical principle of determinism. However, there exist real materials for which forementioned defined principle leads to the theory not consistent with experiment. In such situations more general or alternative formulations of the principle of determinism should be applied. For example, if admissible motions of a body are subjected to constraints of the form:

$$w(X, \nabla\chi^t \nabla\chi(X, t)) = 0, \quad (1.1)$$

where  $w(\cdot)$  is sufficient regular function with values in  $R^n$  then the following statement holds, [9 p. 176].

Principle of determinism for simple materials subject to constraints. The stress at the place occupied by the body-point  $X$  at the time  $t$  is determined by the history  $\chi^t$  of the motion  $\chi$  up to the time  $t$  only to within an arbitrary tensor that does no work in any motion compatible with the constraints. That is:

$$T(\chi(X, t), t) = G(\nabla\chi^t(X, \cdot); X) + N,$$

where the mapping  $G(\cdot)$  need be sufficiently regular and defined only for arguments  $\nabla\chi^t$  such as to satisfy the constraints,  $N$  being a stress for which the stress-power vanishes in any motion satisfying the constraints, i.e.  $\text{tr}(ND) = 0$  for each symmetric tensor  $D$  such that:

$$\frac{\partial w}{\partial(\chi_{k,\alpha}^k \chi_{k,\beta})} D^{lm}(\chi^{-1})^{\alpha}_{,l}(\chi^{-1})^{\beta}_{,m} = 0.$$

The principle of determinism for simple materials with constraints is a generalisations of the classical principle. If there are no restrictions of the form (1.1), i.e.  $w(\cdot) = \text{const.}$ , then  $N = 0$  and both principles coincide.

The principle of determinism can be formulated in mechanics also in more general form, describing more general classes of physical situations. For example in [14] it can be found the following formulation of constraints:

$$w(\chi, \nabla\chi, \dots, \nabla^p\chi) = 0$$

and in [1] we deal with constraints:

$$w(J, \nabla J, \dots, \nabla^p J) = 0,$$

$$J \equiv (\chi, \chi^{(1)}, \dots, \chi^{(q)}),$$

where  $p, q$  are natural numbers and numbers in scopes under the letters denote suitable time-derivative.

In the paper we apply nonstandard analysis as a mathematical tool derive new constitutive relations of mechanics from the known constitutive relations. Fundamental concepts of this approach are based on [7, 11, 12]. The aim of the paper is to prove that by applying concepts and methods of nonstandard analysis the principle of determinism for constitutive relations with constraints can be obtained from the classical principle of determinism. This proof will be realized by a certain specification of nonstandard constitutive relations which are consistent with the classical principle of determinism. We are to show that this approach has the following attributes:

(i) it eliminates from the axioms of mechanics the principle of determinism with constraints,

(ii) it has a clear physical interpretation being based only on the classical principle of determinism,

(iii) it leads to a description of physical situations which cannot be described neither by the classical principle of determinism nor by the principle of determinism for constitutive relations with constraints.

In the paper the concept of a constitutive relation is understood in more general sense than that in most of the papers on this subject. Namely after a certain specification the constitutive relations will be treated as constitutive relations for the internal forces describing material properties of bodies — or as constitutive relations for the external forces describing interactions between a body and its exterior, cf. [11, 15].

### 2. Physical foundations

Let be given the following objects:

(i) the set  $I$  of states  $\gamma$  of the mechanical system under consideration, i.e. assume that  $I$  is an open set in a certain topological space,

(ii) the set  $\mathcal{P}$  of admissible evolutions  $R \ni t \rightarrow \gamma(t) \in I$  of states of the mechanical system under consideration, i.e. the set of right-hand side differentiable functions of real variable; assume that this differentiation is well defined,

(iii) the dual pairing  $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle, W')$  of linear topological spaces in which  $W$  is the space of time rates  $\dot{\gamma}$ ,  $W'$  is the space of reactions  $\varrho$  of the system and  $\langle \dot{\gamma}, \varrho \rangle$  is the power of the reaction  $\varrho$  for the rate  $\dot{\gamma}$ ,  $\dot{\gamma} \in W$ ,  $\varrho \in W'$ ,

(iv) the set  $H_t$  of histories  $\gamma^{(t)} : R_t \rightarrow I$  of the evolution  $\gamma(\cdot) \in \mathcal{P}$  of the system states up to the time  $t$ , defined for each  $t \in R$ , i.e.

$$\gamma^{(t)}(s) = \gamma(t-s)$$

for  $t \in R$ ,  $s \in R$ ,  $s \geq 0$ .

As a basis for our considerations the following requirement will be postulated.

Principle of determinism. For each time-instant  $t \in R$  a reaction  $\varrho(t)$  of the system is uniquely determined by the history  $\gamma^{(t)} \in H_t$  of the evolution  $\gamma(\cdot) \in \mathcal{P}$  up to the time  $t$  and by the rate  $\dot{\gamma}(t)$  of change of a system state in the time  $t$ , i.e.

$$\varrho(t) = \varphi(t, \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}^{(t)}). \tag{2.1}$$

Introducing above and applying below concepts such as the state of the system, a reaction of the system, the rate of changing of a state of the system, etc., can have a different physical interpretation, which can be found in [11].

In a description of a mechanical system the concept of constraints is used in situations where it is impossible to receive so many informations to be sufficient to describe it by a constitutive relation satisfying the classical principle of determinism. Accepting here as a fundamental requirement the classical principle of determinism has then a superior authority with respect to other ones. The approach using in the paper is in agree with above premises because the concept of constraints is here a natural consequence of the classical principle of determinism.

### 3. Tools from nonstandard analysis

Let  $\mathcal{X}$  be a nonempty set. From all sequences of points of  $\mathcal{X}$  we shall distinguish the set  $C$ ,  $C \subset \mathcal{X}^N$ , elements of which will be called the converging sequences. For each converging sequence  $(x_n)_{n \in N}$  we assign exactly one point  $\lim x_n \in \mathcal{X}$  which will be called a limit of  $(x_n)_{n \in N}$ . We will also say that each sequence  $(x_n)_{n \in N} \in C$  converges to the limit  $\lim x_n$ . We assume that the operation  $\lim : C \rightarrow \mathcal{X}$  fulfils the following conditions:

(i) each subsequence of a sequence converging to  $x$ ,  $x \in \mathcal{X}$ , is a sequence converging to  $x$ ,

(ii) the constant sequence with values equal to  $x$ ,  $x \in \mathcal{X}$ , converges to  $x$ ,

(iii) each sequence not converging to  $x$ ,  $x \in \mathcal{X}$ , contains a subsequence which in turn does not contain any subsequence converging to  $x$ .

Then the pair  $(\mathcal{X}, \text{lim})$  will be referred to as  $L'$ -space, cf. [6 p. 339]. Let  $C_A, A \subset \mathcal{X}$ , stands for the set of all converging sequences with values in  $A$  and let  $P(\mathcal{X})$  be the power set of  $\mathcal{X}$ . Define two sequences  $\text{cl}_n: P(\mathcal{X}) \rightarrow P(\mathcal{X}), \text{int}_n: P(\mathcal{X}) \rightarrow P(\mathcal{X})$ , of operations, setting:

$$\text{cl}_1(A) \equiv \{\text{lim } x_n: (x_n)_{n \in N} \in C_A\},$$

$$\text{cl}_{n+1}(A) \equiv \text{cl}_1 \text{cl}_n(A), \quad n \in N,$$

and:

$$\text{int}_1(A) \equiv \mathcal{X} \setminus \text{cl}_1(\mathcal{X} \setminus A),$$

$$\text{int}_{n+1}(A) \equiv \text{int}_1 \text{int}_n(A), \quad n \in N,$$

for every  $A \in P(\mathcal{X})$ . It is easy to verify that each pair  $(\mathcal{X}, \text{cl}_n) n \in N$ , is a step-space, cf. [3], i.e. for each  $n \in N$  the operation  $\text{cl}_n$  fulfils all conditions defining a closure operation in a topological space (possible except the requirement that  $\text{cl}_n^2$  must be equal to  $\text{cl}_n$ ). It is easy to introduce a topological structure in each  $L'$ -space by defining the closed sets as the sets  $D$  containing limits converging sequences of points belonging to the set  $D$ , cf. [2 p. 90]. This topology will be denoted by  $\tau$ . If the operation  $\text{lim}$  fulfils the additional condition

(iv) if  $\text{lim } x_n = x$  and  $\text{lim } x_k^{n_i} = x_n, n \in N$ , then there exist sequences  $(n_i)_{i \in N}, (k_i)_{i \in N}$  of natural numbers for which  $\text{lim } x_{k_i}^{n_i} = x$ ,

then  $\text{cl}_n = \text{cl}_m$  for each pair  $(n, m) \in N^2$  and  $\text{cl} = \text{cl}_n, n \in N$ , is then a closure operation in topological space  $(\mathcal{X}, \tau, \text{cf. [2, p. 90]})$ .

Similarly to such topological concepts as: the monad, the standard part operation, the  $F$ -limit operation, we are going to define, for any  $n \in N$  and for any  $L'$ -space, new concepts of  $n$ -monad,  $n$ -standard part operation and  $F$ -limit operation. To this aid let the pair  $(\mathcal{X}, \text{lim})$  be a  $L'$ -space and let  $\mathcal{X}, \text{lim}$  be objects in a certain full structure  $\mathfrak{M}$ . Let  $*\mathfrak{M}$  be an enlargement of  $\mathfrak{M}$ . We have  $*\mathcal{X} \in *\mathfrak{M}$  and  $\text{lim} \in *\mathfrak{M}$  (here and below we write  $\text{lim}$  instead of  $*\text{lim}$ ). The pair  $(*\mathcal{X}, \text{lim})$  is considered here as a  $QL'$ -space. For  $x \in \mathcal{X}$  and  $n \in N$  define:

$$\text{Mon}_n(x) \equiv \cap \{*A: A \in P(\mathcal{X}), x \in A = \text{int}_n A\}. \quad (3.1)$$

Denoting by  $\mu_\tau(x)$  the monad of  $x$  in the topological space  $(\mathcal{X}, \tau)$  it is easy to verify that the following inclusions:

$$\text{Mon}_1(x) \supset \text{Mon}_2(x) \supset \text{Mon}_3(x) \supset \dots,$$

as well as the equality:

$$\bigcap_{n \in N} \text{Mon}_n(x) = \mu_\tau(x)$$

hold. The  $L'$ -space  $(\mathcal{X}, \text{lim})$  will be called  $n$ -Hausdorff,  $n \in N$ , if  $x = y$  is implied by  $\text{Mon}_n(x) = \text{Mon}_n(y)$ . It is easy to see that if  $L'$ -space  $(\mathcal{X}, \text{lim})$  is  $n$ -Hausdorff, for a certain  $n \in N$ , then the topological space  $(\mathcal{X}, \tau)$  is a Hausdorff space.

Now let  $L'$ -space be  $n$ -Hausdorff for a certain  $n \in N$ . Then in every  $n$ -monad  $\text{Mon}_n(x), x \in \mathcal{X}$ , there is exactly one standard point. For each pair  $(x, y) \in \mathcal{X} \times *\mathcal{X}$  we shall write  $\text{st}_n y = x$  if  $y \in \text{Mon}_n(x)$ . The aforementioned operation  $\text{st}_n: *\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  will be considered as the  $n$ -standard part operation. The domain of  $\text{st}_n$  is equal to  $\bigcup \{\text{Mon}_n(x): x \in \mathcal{X}\}$ . A sequence  $(x_n)_{n \in *N}$  of points of  $*\mathcal{X}$  will be called  $F$ -converging if there exist a point

$x, x \in \mathcal{X}$ , and a hypernatural number  $\lambda_0 \in {}^*N \setminus N$ , such that the relation  $x_\nu \in \text{Mon}_n(x)$  holds for every  $\nu \in {}^*N \setminus N, \nu < \lambda_0$ . Points from  $\text{Mon}_n(x)$  will be considered as  $F_n$ -limits of  $(x_n)_{n \in {}^*N}$ .

The concepts of  $n$ -Hausdorff  $L'$ -space,  $n$ -monad,  $n$ -standard part operation,  $F_n$ -limit, operation will be used below only in the case of  $n = 1$ . In the sequel instead of a 1-monad a 1-Hausdorff space, etc., we shall use the terms: a monad, a Hausdorff  $L'$ -space, etc., respectively.

Now let  $T$  stands for a fixed topological regular space and  $2^T$  be the set of all closed subsets of  $T$ . Let define a convergence in  $2^T$  setting  $(A_n)_{n \in N} \in C$  iff for some  $A \in 2^T$  the following statements holds:

(i)  $\limsup A_n = A$ , i.e. each neighbourhood of any point from  $A$  has a nonempty intersections with almost every set  $A_n, n \in N$ ,

(ii)  $\liminf A_n = A$ , i.e. each neighbourhood of any point from  $A$  has a non-empty intersection with infinite number of sets  $A_n, n \in N$ .

The set  $2^T$  with the convergence of sequences of sets defining above, determines a certain  $L'$ -space, [6 p. 188], which will be denoted here by  $(2^T, \text{lim})$ . An important result, [10], is that this  $L'$ -space is Hausdorff (i.e. 1-Hausdorff) and:

$$\text{Mon}(A) = \{B \in {}^*(2^T) : {}^\circ B = A\}, \quad A \in 2^T, \quad (3.2)$$

where  ${}^\circ B$  stands for the standard part of the set  $B$ . It means that the standard part operation in  $L'$ -space  $(2^T, \text{lim})$  is equal to the standard part operation of (closed) subsets of  $T$ . Moreover,  $F\text{-lim } A_n = \text{Mon}(A)$  provided that:

$$(\exists \lambda_0 \in {}^*N \setminus N)(\forall n \in {}^*N \setminus N)[n < \lambda_0] \Rightarrow [A = {}^\circ A_n],$$

for each  $F$ -converging sequence  $(A_n)_{n \in {}^*N}$  of closed subsets  $A_n \in {}^*(2^T)$ .

#### 4. From microconstitutive relations to macroconstitutive relations.

Now we are going to formulate the method which enable us to obtain new constitutive relations from the known constitutive relations. The known constitutive relations are here relations satisfying the following form of the classical principle of determinism (2.1):

$$\varrho(t) = \tilde{\varphi}_t(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), \gamma^{(t)}), \quad (D)$$

where function  $\tilde{\varphi}_t: \Gamma \times W \times H_t \rightarrow W'$ , for every  $t \in R$ , is defined by  $\tilde{\varphi}_t(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), \gamma^{(t)}) \equiv \equiv \varphi(t, \dot{\gamma}(t), \gamma^{(t)})$ . The formula (D) is a starting point of our considerations. In the sequel arguments  $t$  and  $\gamma^{(t)}, \gamma^{(t)} \in H_t, t \in R$ , will be treated as parameters; for the sake of simplicity they will be omitted. So (D) has a form:

$$\varrho = \tilde{\varphi}(\gamma, \dot{\gamma}); \quad \tilde{\varphi}: \Gamma \times W \rightarrow W'. \quad (4.1)$$

Let us assume that the set  $U(\gamma) \equiv \text{dom } \tilde{\varphi}(\gamma, \cdot)$ , for every  $\gamma \in \Gamma$ , is open in  $W$ . In a particular case Eq. (4.1) reduces to  $\varrho = \tilde{\varphi}(\gamma)$ .

Let  $\Phi$  be a set of functions  $\tilde{\varphi}: \Gamma \rightarrow W \rightarrow W'$  which are assumed to describe physical situations defined by (D). Hence we conclude that the set  $\Phi$  depends on parameters  $t$  and  $\gamma^{(t)}(\cdot)$ . In agreement with physical premises,  $\Phi$  is an infinite set. Every function

$\tilde{\varphi} \in \Phi$  will be called a constitutive relation. It is not assumed here that every constitutive relation being an element of  $\Phi$  has a physical sense.

Let  $\mathfrak{M} \equiv (A_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$  be a full structure in which sets  $R, \Gamma, W, W'$  are separated objects of the type  $A_{(0)}$ . Passing to an enlargement  ${}^*\mathfrak{M}$  of  $\mathfrak{M}$ , elements of  ${}^*\Phi$  will be called microconstitutive relations:

$$\varrho = \tilde{\varphi}(\gamma, \dot{\gamma}); \tilde{\varphi}: {}^*\Gamma \times {}^*W \rightarrow {}^*W', \tilde{\varphi} \in {}^*\Phi. \quad (4.2)$$

For every microconstitutive relation  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\varphi} \in {}^*\Phi$ , and for every  $\gamma, \dot{\gamma} \in \Gamma$ , we have  $\text{dom } \tilde{\varphi}(\varphi, \cdot) = {}^*U(\gamma)$ . Every function  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\varphi} \in {}^*\Phi$ , is an internal relation but not necessary standard.

Let us assume that the set  $\Gamma$  is a topological Hausdorff space satisfying the first axiom of countability. For every state  $\gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , we denote by  $(\sigma_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$  the neighbourhood-basis of  $\gamma$  in  $\Gamma$ . In the space  $2^{W'}$  of all closed subsets of  $W'$  we shall introduce a  $L'$ -space structure setting  $T := W'$  in  $L'$ -space  $(2^T, \text{lim})$ . It is possible to introduce such structure by means of considerations of Sec. 3, provided that  $W'$  is regular. Let us define sequences  $(\mathcal{R}_n^{\tilde{\varphi}}(\gamma, w))_{n \in \mathbb{N}}$  setting

$$\mathcal{R}_n^{\tilde{\varphi}}(\gamma, w) \equiv \{\varrho = \tilde{\varphi}(\bar{\gamma}, \bar{w}) : (\bar{\gamma}, \bar{w}) \in \sigma_n(\gamma) \times B(w, r_0/n)\}, \quad (4.3)$$

where  $r_0 \in R_+$ ,  $\tilde{\gamma} \in {}^*\Phi$  and  $B(w, r_0/n)$  is an open ball in  $W$  with a center  $w$  and a radius  $r_0/n$ ,  $n \in {}^*\mathbb{N}$ . Let  $\Psi_0$  be a subset of  ${}^*\Phi$  satisfying conditions:

(i) for every  $\tilde{\varphi} \in \Psi_0$ ,  $\gamma \in {}^*\Gamma$ ,  $w \in {}^*W$ , sequences  $(\overline{\mathcal{R}}_n^{\tilde{\varphi}}(\gamma, w))_{n \in {}^*\mathbb{N}}$  of closures of sets defined by Eq. (4.3) have  $F$ -limits (in the sense precised in Sec. 3),

(ii) there exist 1° a standard state  $\gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , 2° a standard velocity  $\dot{\gamma}$ ,  $\dot{\gamma} \in W$ , 3° a non-standard number  $\lambda_0 \equiv \lambda_0(\tilde{\gamma})$ ,  $\lambda_0 \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ , such that:

$${}^\circ[\mathcal{R}_\nu^{\tilde{\varphi}}(\bar{\gamma}, \bar{w})] \neq \emptyset, \quad (\tilde{\varphi}, \bar{\gamma}, \bar{w}) \in \Psi_0 \times \mu(\gamma) \times \mu(w), \quad (4.4)$$

where the closures  $\overline{\mathcal{R}}_\nu^{\tilde{\varphi}}(\bar{\gamma}, \bar{w})$  of sets  $\mathcal{R}_\nu^{\tilde{\varphi}}(\bar{\gamma}, \bar{w})$ , for every  $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ,  $\nu < \lambda_0$ , are  $F$ -limits of the sequences  $(\overline{\mathcal{R}}_n^{\tilde{\varphi}}(\gamma, w))_{n \in {}^*\mathbb{N}}$  and where the sets  $\overline{\mathcal{R}}_\nu^{\tilde{\varphi}}(\bar{\gamma}, \bar{w})$  do not depend on  $(\bar{\gamma}, \bar{w}) \in \mu(\gamma) \times \mu(w)$ .

In  $\Psi_0$  we introduce an equivalence relation  $\sim$ , setting  $\tilde{\varphi}_1 \sim \tilde{\varphi}_2$  provided that:

$$(\forall \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) [ [\nu < \min(\lambda_0(\tilde{\varphi}_1), \lambda_0(\tilde{\varphi}_2))] \Rightarrow [{}^\circ R_{\tilde{\varphi}_1}^{\tilde{\varphi}}(\gamma, w) = {}^\circ R_{\tilde{\varphi}_2}^{\tilde{\varphi}}(\gamma, w)] ],$$

holds for  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2) \in \Psi_0^2$ . The equivalence class determined by the microconstitutive relation  $\tilde{\varphi} \in \Psi_0$  and the pertinent quotient set will be denoted by  $\pi(\tilde{\varphi})$  and  $\Pi$  respectively. Setting:

$$\mathcal{R}^{\pi(\tilde{\varphi})}(\gamma, w) \equiv {}^\circ[\mathcal{R}_\nu^{\tilde{\varphi}}(\gamma, w)], \quad (4.5)$$

for  $(\tilde{\varphi}, \gamma) \in \Psi_0 \times \Gamma$ , the relation:

$$\varrho \in \mathcal{R}^{\pi(\tilde{\varphi})}(\gamma, w), \quad \mathcal{R}^{\pi(\cdot)}: \Gamma \times W \rightarrow 2^{W'}, \quad (4.6)$$

will be called a macroconstitutive relation generated by a microconstitutive relation  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\varphi} \in \Psi_0$ , provided that  $\pi = \pi(\tilde{\varphi})$ . It is a macroidealisation of physical situation described by microconstitutive relation given by (4.2). It is important that  $\mathcal{R}^{\pi(\tilde{\varphi})}(\gamma, w)$  is a closed set in  $W'$  but not necessary bounded. Microconstitutive relations  $\tilde{\varphi}_1$  and  $\tilde{\varphi}_2$  will be considered as nondiscernible if they generate the same macroconstitutive relation. Equality of

classes  $\pi(\tilde{\varphi}_1)$  and  $\pi(\varphi_2)$  is equivalent to nondiscernibleness of microconstitutive relations  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$ . Introducing parameters  $t$  and  $\gamma^{(t)}$  it can be formulate the following proposition.

**Proposition.** For every microconstitutive relation  $\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi} \in \Psi_0$ , there exists in  $\mathfrak{M}$  a macroconstitutive relation  $\mathcal{R}_t^{\pi(\tilde{\varphi})}(\gamma^{(t)}, \cdot)$  generated by  $\tilde{\varphi}$ , i.e. there exists in  $\mathfrak{M}$  a set of reactions, closed in  $W'$ , uniquely determined by  $\gamma(t), \dot{\gamma}(t)$  and  $\gamma^{(t)}$ . A relation  $\mathcal{R}_t^{\pi(\tilde{\varphi})}(\gamma^{(t)}, \cdot)$  not depend on a choice of a microconstitutive relation from the class  $\pi(\tilde{\varphi})$ , i.e. it is the same for each pair of microconstitutive relations. So (4.2) implies:

$$\varrho(t) \in \mathcal{R}_t^{\pi(\tilde{\varphi})}(\gamma^{(t)}, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)). \tag{GD}$$

Above proposition will be considered as the general principle of determinism and the family of multifunctions:

$$\Gamma \ni \gamma \rightarrow \Delta_t^{\gamma^{(t)}}(\gamma) \equiv \{w \in W: (\gamma, w) \in \text{dom} \mathcal{R}_t^{\pi(\tilde{\varphi})}(\gamma^{(t)}, \cdot)\}, \tag{4.7}$$

where:

$$\text{dom} \mathcal{R}_t^{\pi(\tilde{\varphi})}(\gamma^{(t)}, \cdot) \equiv \{(\gamma, w) \in \Gamma \times W: \mathcal{R}_t^{\pi(\tilde{\varphi})}(\gamma^{(t)}, \gamma, w) \neq \emptyset\},$$

will be formed constraints. We will describe below physical situations for which constraints (4.7) do not depend on the history  $\gamma^{(t)}, \gamma^{(t)} \in H_t$ . So, we shall also define  $\Delta_t(\gamma) \equiv \Delta_t^{\gamma^{(t)}}(\gamma)$ . From now on and from Eq. (4.4) we conclude that evolutions  $\gamma(\cdot) \in \mathcal{P}$ , satisfying for every  $t \in R$  the condition  $\dot{\gamma}(t) \in \Delta_t(\gamma(t))$ , exist. So, for each  $t \in R$  and  $\gamma \in \Gamma$  the set  $\Delta_t(\gamma)$  is the set of all rates  $\dot{\gamma}$  of state  $\gamma$  at the time  $t$ . However, macroconstitutive relations as well as constitutive relations from the set  $\Phi$  not necessary have physical sense.

### 5. From the general principle of determinism to the principle of determinism for constitutive relations with constraints

The formalism presented in Sec. 4 leads from microconstitutive relations satisfying the classical principle of determinism ( $D$ ) to the macroconstitutive relations satisfying the general principle of determinism ( $GD$ ). The idea of such passage is in splitting the set  $\Psi_0$  of microconstitutive relations into disjointed classes. To every class is assigned the value of the operation  $\tilde{\varphi} \rightarrow \mathcal{R}_t^{\pi(\tilde{\varphi})}(\cdot)$  on an arbitrary element  $\varphi$  of this class. This mapping is one to one and the operation mentioned above is additive if at least one from the components is standard, i.e.:

$$\mathcal{R}_t^{\pi(\tilde{\varphi} + * \psi)}(\cdot) = \mathcal{R}_t^{\pi(\tilde{\varphi})}(\cdot) + \mathcal{R}_t^{\pi(* \psi)}(\cdot).$$

The operation  $\Phi \rightarrow * \Phi$  together with the choice of the set  $\Phi$  of constitutive relations leads to the set  $* \Phi$ . The choice of the operation  $\Phi \rightarrow * \Phi$  seems to be natural, because  $\Phi$  and  $* \Phi$  represent the same physical object in different structures  $\mathfrak{M}$  and  $* \mathfrak{M}$  respectively. The restriction of the considerations to the set  $\Psi_0$ , which is the domain of the operation  $\tilde{\varphi} \rightarrow \mathcal{R}_t^{\pi(\tilde{\varphi})}(\cdot)$ , has a character of a regularisation assumption and is made only for securing mathematical correctness of the proposed approach. Now the question arise: What constitutive relations already known in mechanics can be obtained on that way from a certain microconstitutive relation  $\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi} \in \Psi_0$ ?



Answer yes to this question can be easily obtained for relations satisfying the classical principle of determinism (D) by setting  $\tilde{\varphi} := * \psi$  where  $\psi: \Gamma \times W \rightarrow W'$  is a function for which every element of the family  $\{\text{dom } \psi(\gamma, \cdot) : \gamma \in \Gamma\}$  is open. It is not so easy to obtain a result related to the question for more wide class of constitutive relations. In Sec. 6 we shall obtain results for certain special cases of constitutive relations, namely we shall found solutions to the following problem:

Problem. Let  $t$  be a fixed time instant,  $t \in R$ , and let be given:

- (i) constraints  $\Gamma \ni \gamma \rightarrow \Delta_s(\gamma) \subset W, s \in R,$
- (ii) the family of functions  $\psi_s: \Gamma \times W \times H_s \rightarrow W, s \in R,$  sufficiently regular and that for every  $s \in R$  and for every pair  $(\gamma, \gamma^{(s)}) \in \Gamma \times H_s$  inclusion:

$$\Delta_s(\gamma) \subset \text{dom } \psi_s(\gamma, \cdot, \gamma^{(s)})$$

holds. We are to find a microconstitutive relation which generate the macroconstitutive relation:

$$\varrho(t) \in \psi_t(\gamma(t), \gamma(t), \gamma^{(t)}) + N_{\Delta_t(\gamma(t))}(\dot{\gamma}(t)). \quad (5.1)$$

In Eq. (5.1)  $N_{\Delta_t(\gamma(t))}(\dot{\gamma}(t))$  is a cone, normal to the set  $\Delta_t(\gamma(t))$  in a point  $\dot{\gamma}(t) \in \Delta_t(\gamma(t))$ , defined as follows. Let  $\Delta \subset W$  and  $w \in W$ . First we define a cone tangent to  $\Delta$  at a point  $w$ , setting, [8]:

$$T_\Delta(w) \equiv \liminf_{\substack{\Delta \ni \bar{w} \rightarrow w \\ t \downarrow 0}} t^{-1}(\Delta - \bar{w}),$$

where  $\lim \inf$  is taken in the Hausdorff sense [4, p. 147].

A cone normal to  $\Delta$  is the set defined by:

$$N_\Delta(w) \equiv \{\varrho \in W' : \langle \dot{\gamma}, \varrho \rangle \geq 0, \bar{w} \in T_\Delta(w)\}.$$

Note that if  $\Delta$  is a closed set in a separable Banach space (and hence in all special cases examined in Sec. 6) then, [8]:

$$N_\Delta(w) = \{\varrho \in W' : \varrho // \|\varrho\| \in \partial d_\Delta(w)\} \cup \{0\},$$

where  $\partial d_\Delta$  is the subgradient of the function  $d_\Delta: W \rightarrow R_+$  defined by:

$$d_\Delta(w) \equiv \inf \{\|w - \bar{w}\| : \bar{w} \in \Delta\}.$$

A solution to the aforementioned problem can be given by an arbitrary microconstitutive relation which generates a macroconstitutive relation satisfying the following principle of determinism.

The principle of determinism for constitutive relations with constraints. The reaction  $\varrho(t)$  of the system at the time  $t$  is determined by a history  $\gamma^{(t)} \in H_t$ , up to the time  $t$  by a state  $\gamma(t)$  and by a rate  $\dot{\gamma}(t)$  with an accuracy to an additive term  $\varrho, \varrho \in W'$ , having nonnegative power:

$$\langle \dot{\gamma}, \varrho \rangle \geq 0, \quad (5.2)$$

on every rate  $\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \in W$ , admissible by constraints, i.e. on every rate belonging to the set  $\Delta_t(\gamma(t))$ .

In the forementioned principle of determinism the condition (5.2) can be changed by

the alternative condition:

$$\langle \dot{\gamma}, \varrho \rangle = 0, \tag{5.2.1}$$

provided that for every  $t \in R$  and every  $\gamma(\cdot) \in \mathcal{P}$  the set  $\Delta_t(\gamma(t))$  is a certain linear space.

### 6. Special cases

6.1. Firstly let us assume that: 1°  $\Gamma$  is an open set in a certain linear space  $\tilde{W}$  for which  $\dim \tilde{W} = \dim W < +\infty$ , 2° constraints are holonomic, i.e. for every  $t \in R$  equality:

$$\Delta_t(\gamma) = T_{[\Delta_t]}(\gamma), \gamma \in [\Delta_t], \tag{6.1}$$

where:

$$[\Delta_t] \equiv \{\gamma \in \tilde{W}: \Delta_t(\gamma) \neq \emptyset\}, \tag{6.2}$$

holds. Moreover let for every  $\dot{\gamma} \in \Delta_t(\gamma)$  equality:

$$N_{\Delta_t(\gamma)}(\dot{\gamma}) = N_{[\Delta_t]}(\gamma) \tag{6.3}$$

holds. Then it can be proved that, [10], there exists a microconstitutive relation  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{Y}_0$  which generates the following macroconstitutive relation:

$$\varrho(t) \in \psi_t(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), \gamma^t) + N_{[\Delta_t]}(\gamma).$$

This result is equivalent to the principle of determinism stated below.

Principle of determinism for constitutive relations with holonomic constraints in spaces of finite dimension. The reaction  $\varrho(t)$  of the system at the time  $t$  is determined by a history  $\gamma^{(t)}$  of the system up to time  $t$ , by a state  $\gamma(t)$  and by a rate  $\dot{\gamma}(t)$  with an accuracy to an additive term having nonnegative power:

$$\langle \dot{\gamma}, \varrho \rangle \geq 0 \tag{6.4}$$

on every rate  $\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \in W$ , admissible by constraints, i.e. on every rate belonging to the set  $T_{[\Delta_t]}(\gamma(t))$ .

As before in the forementioned principle of determinism the condition (6.4) can be changed by the alternative condition

$$\langle \dot{\gamma}, \varrho \rangle = 0 \tag{6.5}$$

provided that for every  $t \in R$  and every  $\gamma(\cdot) \in \mathcal{P}$  the set  $T_{[\Delta_t]}(\gamma(t))$  is a certain linear space.

6.2. Now assume that: 1°  $\Gamma$  is a certain Riemannian manifold and 2° the set  $\Delta_t(\gamma(t))$ , for every  $(t, \gamma(\cdot)) \in R \times \mathcal{P}$  is a conformal image of a non-empty closed convex set in  $R^n$  or a diffeomorphic image of a closed set in  $R^n$  with  $C^1$ -boundary. Then it can be proved that, [10], there exists a microconstitutive relation  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{Y}_0$  which generates the following macroconstitutive relation:

$$\varrho(t) \in \psi_t(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + N_{\Delta_t(\gamma(t))}(\dot{\gamma}(t)).$$

This result is equivalent to the principle of determinism for constitutive relations with constraints in its general form stated in Sec. 5 provided that  $\Gamma$  is a Riemannian manifold.

6.3. At last let us assume that (D) has a form:

$$\varrho(t) = \sigma'(\gamma(t)),$$

where  $\sigma: \Gamma \rightarrow \mathcal{R}$  is a certain function Gateaux differentiable in every point of the set  $\Gamma$  which is assumed to be an open subset of a certain separable Hilbert space  $\tilde{W}$ . Then the spaces  $\tilde{W}$  and  $W$  are isomorphic and will be identified below. Moreover let us assume that constraints are holonomic, i.e. that equalities (6.1), (6.2) and (6.3) holds. Then it can be proved that, [10], there exists a microconstitutive relation  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{V}_0$  which generates the following macroconstitutive relation:

$$\varrho(t) \in \varepsilon'(\gamma(t)) + N_{[A_t]}(\gamma(t)),$$

where  $\varepsilon: \Gamma \rightarrow \mathcal{R}$  denote the known Gateaux differentiable function,  $[A_t]$  is assumed to be a non-empty convex closed set. This result is equivalent to the following principle of determinism:

The principle of determinism for potential constitutive relations with holonomic constraints in Hilbert spaces. The reaction  $\varrho(t)$  of the system at the time  $t$  is determined by a state  $\gamma(t)$  of the system with an accuracy to an additive term  $\varrho$  having nonnegative power  $\langle \dot{\gamma}, \varrho \rangle \geq 0$  on every rate  $\dot{\gamma}$ ,  $\dot{\gamma} \in W$ , admissible by constraints, i.e. on every rate belonging to the set  $T_{[A_t]}(\gamma(t))$ .

As before in the forementioned principle of determinism inequality  $\langle \dot{\gamma}, \varrho \rangle \geq 0$  can be changed by the alternative condition (6.5) provided that for every  $t \in \mathcal{R}$  the set  $T_{[A_t]}(\gamma(t))$  is a certain linear space.

## 7. Final remarks

In the paper the following results are obtained:

(i) An approach of formulating new constitutive relations of mechanics starting from the known relations. The known relations satisfy the classical principle of determinism.

(ii) It is proved that, in the proposed approach, constitutive relations with constraints are special cases of constitutive relations without constraints.

(iii) The principle of determinism for constitutive relations with constraints is deduced from the classical principle of determinism, where no constraints are taken into account.

(iv) A generalisation of some topological concepts of nonstandard analysis to analogical concepts in  $L'$ -spaces is discussed.

(v) It is proved that the standard operation in  $L'$ -space of closed subsets of a regular topological space  $T$  coincides with the standard part operation of closed sets in a topological space  $T$ .

Results (ii) and (iii) can be generalized without difficulties for more wide class of constitutive relations than that described in the paper. This generalisation is related to the relations in which the reaction of the system depends on fields in RHS of (D) as well as on elements of a certain fibre bundle, [5], and to the relations in which (D) is replaced by

$$\varrho(t) = \tilde{\varphi}_i(\tilde{\gamma}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t), \tilde{\gamma}^{(i)}),$$

where  $\tilde{\gamma}(\cdot) \equiv (\gamma(\cdot), \Theta(\cdot))$  is a pair of an evolution  $\gamma(\cdot) \in \mathcal{P}$  and a temperature-field  $\Theta(\cdot)$ . In this case, applying the method proposed in the paper, we are able to formulate thermo-mechanical constraints, [13].

#### References

1. W. BIELSKI, *Osrodki ciagle z więzami aholonomicznymi*, Dissertation, Faculty of Mathematics, Computer Sciences and Mechanics, Warsaw University, 1976.
2. R. ENGELKING, *General topology*, PWN, Warszawa, 1977.
3. F. HAUSDORFF, *Gestufte Raumes*, Fund. Math., XXXV, 1935, 486 - 502.
4. F. HAUSDORFF, *Mengenlehre*, 3rd edition, Springer, Berlin, 1927.
5. W. KOSIŃSKI, *Równania ewolucji ciał dyssypatywnych*, IFTR Report, 26, Warszawa 1983.
6. K. KURATOWSKI, *Topology*, Acad. Press, New York 1966.
7. A. ROBINSON, *Non-Standard Analysis*, Studies in Logic and Foundations of Mathematics, North Holland, Amsterdam 1979.
8. R. T. ROCKAFELLAR, *Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions*, Can. J. Math., XXXII, 2, 1980, 257 - 280.
9. C. TRUESDELL, *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, The John Hopkins Univeristy, Baltimore-Maryland 1972.
10. E. WIERZBICKI, Dissertation, Faculty of Mathematics, *Computer Science and Mechanics*, Warsaw University, 1985.
11. Cz. WOŹNIAK, *Constraints in Constitutive Relations in Mechanics*, Mech. Teor. i Stos.
12. Cz. WOŹNIAK, *Non Standard Analysis in Mechanics*, Advances in Mechanics, to be published.
13. Cz. WOŹNIAK, *On the Modelling of the Materials and Interrelations with Thermo-electro-mechanical Constraints*, Bull. Acad. Polon., Ser. Sci. Techn., to be published.
14. Cz. WOŹNIAK, *Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego*, in: *Dynamika układów sprężystych*, Ossolineum, Warszawa 1976.
15. Cz. WOŹNIAK, *Więzy w mechanice ciał odkształcalnych*, Ossolineum, Warszawa, to be published.

#### Резюме

#### СВЯЗИ В МЕХАНИКЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА. ПРИМЕНЕНИЕ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

В статье предложено метод формулировки новых конститутивных соотношении механики, которого исходным положением являются известные определяющие (конститутивные) соотношения. Метод основан на понятиях нестандартного анализа. Применяя предложенный метод доказано, что принцип детерминизма для конститутивных соотношений со связями можна вывести из классического принципа детерминизма, в котором связи отсутствуют.

#### Streszczenie

#### WIĘZY W MECHANICE CIAŁA STAŁEGO. ZASTOSOWANIE ANALIZY NIESTANDARDOWEJ

W pracy zaproponowano metodę formułowania nowych relacji konstytutywnych ze znanych relacji konstytutywnych. Wykorzystano w niej efektywnie pojęcia analizy niestandardowej. Stosując powyższą metodę wykazano, że zasada determinizmu dla relacji konstytutywnych z więzami może być otrzymana z zasady determinizmu dla relacji konstytutywnych bez więzów.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 7 kwietnia 1986 roku.*



# BIULETYN INFORMACYJNY

NA PODSTAWIE „SPRAWOZDANIA Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA  
MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W ROKU 1986“

## 1. Działalność naukowa

### 1.1. Zebrania naukowe

Zebrania naukowe były formą ciągłej działalności. W 1986 roku Zarząd Główny zorganizował jedno zebranie naukowe, natomiast w Oddziałach Towarzystwa odbyło się w sumie 76 zebrań, na których wygłoszono 82 referaty.

Poniżej podajemy szczegółowy wykaz referatów.

#### Zarząd Główny

- J. Kubik: Termodynamika obróbki betonu  
2 lipca ob. 29 os., dysk. 6
- Na Zebraniu Plenarnym ZG 30 stycznia 1986 komunikat „O historii towarzystw naukowych” wygłosił J. Wojnarowski.

#### Bielsko-Biała

- A. Kleczkowski: Badanie stateczności i kierowności samochodu  
7 lutego ob. 24 os., dysk. 11
- J. Sochański: Zagadnienia energetyczne w procesie konwekcyjnego suszenia materiałów  
4 lipca ob. 6 os., dysk. 4
- A. Sucheta: Wybrane zagadnienia akumulacji ciepła w nagrzewaczach elektrycznych<sup>†</sup>  
24 października ob. 10 os., dysk. 7

#### Bydgoszcz

- A. Topoliński: Program GENMIX2P  
5 marca ob. 6 os., dysk. 5
- B. Siolkowski: Niestateczność turbulentna zespołów mieszających  
25 marca ob. 6 os., dysk. 6
- Zb. Kączkowski: Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych  
14 maja ob. 46 os., dysk. 6
- T. Topoliński: O pewnej metodzie obliczeniowej trwałości zmęczeniowej tworzyw sztucznych  
12 grudnia ob. 12 os., dysk. 6
- J. Lorkowski: Niszczące działanie lodu na konstrukcję palową  
30 grudnia ob. 8 os., dysk. 5

#### Częstochowa

- R. Józwiak: Wpływ szczelinowego wydmuchu powietrza z grzbietowej powierzchni płata na jego charakterystyki aerodynamiczne  
23 stycznia od. 17 os., dysk. 3
- K. Sobczyk: Probabilistyczne modelowanie procesów zniszczenia zmęczeniowego  
27 marca ob. 28 os., dysk. 5
- J. Wojnarowski: Zastosowanie grafów w modelowaniu drgań  
7 maja ob. 19 os., dysk. 3

- H. Radomiak: Spalanie pyłu węglowego w strudze zaburzonej drganiem akustycznymi  
26 czerwca ob. 19 os., dysk. 2
- S. Oziemski: Model obliczeniowy wytrzymałości statycznej i zmęzeniowej spoin czdłowych  
17 października ob. 19 os., dysk. 3
- J. Świdryczuk: Rozwój i deformacja warstwy wirowej indukowanej za profilem aerodynamicznym  
12 listopada ob. 16 os., dysk. 2

#### Gdańsk

- M. Wieczorek: Analiza konstrukcji podatnych na wyboczenie  
21 lutego ob. 25 os., dysk. 8
- B. Błocka: Drgania własne segmentowych uźebrowanych powłok obrotowych  
11 marca ob. 23 os., dysk. 6
- F. Romanów: Stateczność konstrukcji warstwowych z uwzględnieniem trójosiowego stanu przemieszczeń rdzenia  
21 maja ob. 15 os., dysk. 5
- M. Kleiber: Aktualne kierunki w metodach numerycznych mechaniki  
3 czerwca ob. 35 os., dysk. 6
- C. Cichoń: Problemy stateczności konstrukcji w ujęciu metody elementów skończonych  
4 czerwca ob. 15 os., dysk. 3
- J. Dvornik (Jugosławia): Nowa metoda rozwiązywania układu równań liniowych i nieliniowych  
20 października ob. 18 os., dysk. 4
- J. Arbocz (Holandia): Shell Stability Research at the Delft University of Technology  
17 listopada ob. 21 os., dysk. 4

#### Gliwice

- G. Bobkowski: Wpływ dezintegracji wywołanej cieczami na tężliwość próbek węgla w trójkierunkowym stanie naprężenia  
23 kwietnia ob. 14 os., dysk. 5
- L. Kumor: Nośność graniczna obudów zmechanizowanych osłabionych otworami  
11 czerwca ob. 16 os., dysk. 7
- M. Czop: Metoda wytrzymałościowego sprawdzania poprawności połączeń spawanych elementów nośnych górniczych obudów zmechanizowanych  
17 września ob. 10 os., dysk. 5
- Cz. Rodkiewicz (Kanada): On the field distortions due to the aortic arch  
11 listopada ob. 16 os., dysk. 7
- K. Wernerowski: Wybrane zagadnienia modelowania drgań gazohybrydowego łożyska poprzecznego  
3 grudnia ob. 9 os., dysk. 3

#### Kielce

- B. Gambin: Fale sprężyste w ciele stałym  
18 lutego ob. 18 os., dysk. 4
- B. Gambin: Fale nieciągłości. Zagadnienia początkowe  
25 lutego ob. 18 os., dysk. 4
- S. K. Dey (USA): Aproksymalne metody w dynamice płynów  
23 maja ob. 17 os., dysk. 2
- A. Barwicki: Wykorzystanie komputreów w dydaktyce  
16 grudnia ob. 21 os., dysk. 4

#### Kraków

- G. Szefer: Nieliniowe efekty w mechanice ośrodków porowatych  
25 maja ob. 15 os., dysk. 5
- J. Kruzelecki: Wybrane zagadnienia stateczności powłok w zakresie sprężysto plastycznej deformacji  
26 listopada ob. 11 os., dysk. 5

## Lublin

- W Cieślak, St. Gózdź: Zastosowanie szeregów Fouriera do obliczeń mechanizmów krzywkowych  
17 kwietnia
- R. Ostapiuk: Elektromechaniczne urabianie skał  
grudzień

## Łódź

- B. Rogowski: Gładki kontakt między sztywnym stępem a ortotropową belką wspornikową  
26 czerwca ob. 16 os., dysk. 11
- B. Michałak: Metoda elementów skończonych dla wieloparametrowej teorii płyt o średniej grubości  
26 czerwca ob. 16 os., dysk. 6
- R. Barrou (Wielka Brytania): The sloshing of fluid containers  
2 października ob. 21 os., dysk. 5.
- J. S. Fleming (Wielka Brytania): Reciprocating compressors: research at the University of Strathclyde.  
2 października ob. 21 os., dysk. 5.
- H. Aurich, E. Köhler (NRD): Problemy automatyzacji w procesie szycia  
16 października ob. 22 os., dysk. 2
- Cz. Woźniak: Niestandardowa metoda homogenizacji periodycznych kompozytów  
27 listopada ob. 21 os., dysk. 8
- I. Krucińska: Analiza własności mechanicznych włókien węglowych  
10 grudnia ob. 12 os., dysk. 6

## Opole

- T. Smoleń: Reologiczne modele kształtu budowli z podłożem  
5 stycznia ob. 5 os., dysk. 3
- M. Wróbel: Numeryczne metody termodyfuzji  
7 kwietnia ob. 8 os., dysk. 4
- J. Czarniecki: Zjawiska powierzchniowe  
12 maja ob. 15 os., dysk. 10
- T. Chmielewski: Przegląd modeli wymuszenia sejsmicznego i reakcji układów dyskretnych  
30 września ob. 23 os., dysk. 5
- Z. Zembaty: Drgania losowe i niezawodność wysokich budowli pod obciążeniem sejsmicznym  
6 listopada ob. 22 os. dysk. 7
- J. Angerman: Nieliniowa statyka masztów z odciągami  
13 listopada ob. 26 os. dysk. 8
- J. Kubiak: O Slowackim Towarzystwie Mechaniki  
18 listopada ob. 22 os., dysk. 4

## Poznań

- M. Kleiber: Mikrokomputery w mechanice — moda czy wiarygodny trend rozwojowy.  
29 stycznia ob. 25 os., dysk. 7
- W. Dudziak: Przegląd problematyki badawczej Pracowni Mechaniki Ośrodków Porowatych Zakładu Aerodynamiki IPPT PAN  
12 lutego ob. 19 os., dysk. 3
- D. Beśdo (RFN): O organizacji Instytutu Mechaniki w Uniwersytecie w Hannoverze. O ciałach typu Cosseratów  
21 maja ob. 18 os., dysk. 4
- St. Matysiak: Wybrane zagadnienia mechaniki periodycznych kompozytów warstwowych  
26 czerwca ob. 7 os., dysk. 4
- Z. Sobotka (CSRS): Plastyczność niesymetryczna ze ścinaniem dodatnim i ujemnym  
16 września ob. 17 os., dysk. 7
- Xu Bing Ye (ChRL): Problemy nośności granicznej konstrukcji  
19 września ob. 5 os., dysk. 2



- O. Bruhns (RFN): About constitutive equations of plasticity  
14 października ob. 19 os., dysk. 2
- H. G. Nathe (RFN): Identification of mechanical systems  
27 października ob. 15 os., dysk. 3

#### Rzeszów

- H. Kopecki: Wpływ nieliniowości optycznej na wyniki badań cienkościennych ustrojów nośnych w warunkach skośnego prześwietlania  
21 marca ob. 12 os., dysk. 5
- J. Walczak: Wykorzystanie komputerów w mechanice — sprawozdanie z udziału w szkole PAN  
26 marca ob. 12 os., dysk. 4
- J. Rembisz: Trwałość elementów struktur cienkościennych z koncentratorami w świetle właściwości reologicznych materiału  
8 maja ob. 10 os., dysk. 5
- Z. Stojek: Analiza drgań własnych układów z płyt trójwarstwowych  
25 czerwca ob. 12 os. dysk. 4
- wspólne posiedzenie Zespołu Dynamiki Maszyn PAN z Rzeszowskim Oddziałem PTMTS. Posiedzeniu przewodniczył Marek Dietrich  
17 października ob. 26 os., dysk. 13

#### Szczecin

- J. Lubasiński: Dynamiczne właściwości spoczynkowego styku powietrzchni chropowatych  
21 stycznia ob. 12 os., dysk. 6
- B. Pała: Analiza współpracy budowli z podłożem przy wymuszaniu kinetycznym w ujęciu reologicznym  
22 maja ob. 13 os., dysk. 3
- A. Stępniewski: Równania Appela jako kowariantna postać równań ruchu nieholonomicznego układu materialnego w podprzestrzeni przestrzeni Riemanna  
5 czerwca ob. 7 os., dysk. 3
- Ch. Reissmann (NRD): Uproszczony model dla wyznaczania naprężeń i odkształceń spawalniczych  
20 czerwca ob. 11 os., dysk. 3
- H. Bergander (NRD): Zachowanie się materiału przy dużych odkształceniach  
7 listopada ob. 15 os. dysk. 3
- J. Sułocki: Fundamenty na podłożu nieściśliwym  
12 grudnia ob. 19 os., dysk. 5

#### Warszawa

- spotkanie okrągłego stołu n.t.: Modelowanie w mechanice konstrukcji i materiałów: stochastyczne czy inne?. Referaty wygłosili:
  - K. Sobczyk pt: Drgania stochastyczne i zniszczenie zmęczeniowe
  - A. Tylikowski: Drgania i stateczność konstrukcji  
7 marca ob. 20 os., dysk. 6
- spotkanie okrągłego stołu n.t. Stateczność, stabilność a może coś innego?. Referaty wprowadzające wygłosili: R. Bogacz oraz B. Radziszewski. Dyskusję prowadziła W. Szemplińska — Stupnicka  
4 czerwca ob. 20 os., dysk. 6
- spotkanie okrągłego stołu n.t. O modelowaniu sprężystych i niesprężystych kompozytów. Referaty wprowadzające wygłosili: St. Matysiak, M. Wągrowaska oraz Cz. Woźniak. Dyskusję prowadził W. Kosiński  
5 grudnia ob. 21 os., dysk. 14

#### Wrocław

- K. Szymoch: Aglomeracja sferyczna węgla w warunkach transportu hydraulicznego  
19 marca ob. 7 os., dysk. 5
- E. Brzuchowski: Hipoteza niedostrzegalnych układów w ruchu wirowym  
23 czerwca ob. 30 os., dysk. 5

- E. Kalinowski: Pewne aspekty II zasady termodynamiki  
25 czerwca ob. 9 os., dysk. 4
- J. Czmochowski: Zastosowanie metody elementów skończonych w analizie stateczności płyt trójwarstwowych  
25 listopada ob. 10 os., dysk. 3

#### Zielona Góra

- St. Misztal: Betonowe zbrojone elementy prętowe poddane działaniu długotrwałych obciążeń wibracyjnych  
4 czerwca ob. 15 os., dysk. 8
- J. M. Gregorienko (ZSRR): Główne problemy naukowe z zakresu teorii powłok, rozpatrywane w Instytucie Mechaniki Ukraińskiej Akademii Nauk  
16 czerwca ob. 18 os. dysk. 6
- G. Bryś, W. Gruszecki: Zastosowanie metod programowania liniowego do optymalizacji stalowych ram  
18 czerwca ob. 12 os., dysk. 6

#### 1.2. Sympozjony w Oddziałach

##### Gliwice

- XXV Sympozjon „Modelowanie w mechanice”  
17 - 22 marca, Kudowa 43 ref., 127 ucz. (w tym: 3 gości zagr.)

##### Poznań

- XII Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”  
15 - 17 maja, Błażejewko 148 ucz. (w tym: 14 gości zagr.)  
119 ref., 35 w sesji plakat.

##### Rzeszów

- VI Sympozjum Dynamiki Konstrukcji  
16 - 18 października 40 ref., 75 ucz., (w tym: 5 gości zagr.)

##### Warszawa

- II Konferencja „Mechanika w lotnictwie”  
27 - 28 lutego 49 ref., 152 uczestników
- I Ogólnopolska Konferencja „Mikrokomputery w mechanice”  
27 lutego 35 ref., 135 ucz.
- XII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego  
8 - 10 października 64 tef., 126 ucz. (w tym 8 gości zagr.)

#### 1.3. Sesje i seminaria naukowe

W roku 1986 zorganizowano następujące sesje i seminaria naukowe:

##### Zarząd Główny

- Sesja naukowa połączona z XXII Zjazdem Delegatów PTMTS  
9 października, Kokotek 6 ref., 90 uczestn.

##### Bydgoszcz

- Jubileuszowa Sesja z okazji 15-lecia Oddziału Towarzystwa. Referat wprowadzający pt. „Zastosowanie teorii grafów w mechanice” wygłosił J. Wojnarowski  
18 kwietnia 12 ref., 32 uczestn.

##### Gdańsk

- „Zastosowanie metody elementów skończonych w mechanice continuum” — W. Grzelak  
listopad’85 — czerwiec’86 20 uczestn.

**Gliwice**

- sesja naukowa poświęcona prezentacji prac zgłoszonych na konkurs naukowy im. prof. Wł. Burzyńskiego  
10 maja 5 ref.

**Kielce**

- „Cykle graniczne układów dynamicznych na płaszczyźnie” — Z. Denkowska  
27 listopada 12 uczestn.

**Poznań**

- „Nierówności wariacyjne i ich zastosowanie w mechanice”  
10 listopada, 17 listopada, 24 listopada, 8 grudnia 15 uczestników

**Rzeszów**

- „Metoda elementów skończonych w zagadnieniach obliczeń wytrzymałościowych maszyn wirowych”  
— H. Kopecki  
9 grudnia, 16 grudnia 10 uczestn.

**Zielona Góra**

- „Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych w dynamice konstrukcji”  
12 listopada (23 uczestn.), 26 listopada (16 uczestn.), 17 grudnia (10 uczestn.).

**1.4. Konkursy**

W roku 1986 zorganizowano 3 konkursy naukowe:

**Częstochowa**

- Konkurs na najlepszą pracę z mechaniki płynów rozstrzygnięty 10 września. Sąd konkursowy w składzie: profesorowie J. Elsner (Przewodniczący), Z. Dzygałło, Z. Kazimierski, J. Ostrowski, K. Orzechowski, W. Prosnak, R. Puzyrewski, E. Tuliszcza, doc. A. Żabicki przyznał następujące nagrody:
  - jedną nagrodę drugiego stopnia  
mgr W. Klonowiczowi za pracę „Pomiar średniej czasowej pulsującego ciśnienia gazu przy pomocy cienkiej rurki”
  - trzy nagrody trzeciego stopnia  
dr inż. A. Jarzy za pracę „Przemiany energetyczne w warstwie przyściennej z powierzchniowym odsysaniem”  
dr J. Świryczukowi za pracę „Rozwój i deformacja warstwy wirowej za profilem aerodynamicznym”  
mgr S. Wrzesieniowi za pracę „Numeryczne modelowanie płaskich lepkich przepływów naddźwiękowych z falą uderzeniową”
  - dwa wyróżnienia  
dr Z. Bisowi za pracę „Wpływ rozmiarów geometrycznych warstwy materiału sypkiego na warunki przejścia jej w stan fluidyzacji”  
dr W. Błasiakowi za pracę „Modelowanie zjawisk zachodzących w strefie separacji polewiska fluidalnego”

**Gliwice**

- Konkurs na pracę dyplomową z zakresu mechaniki teoretycznej im. prof. W. Burzyńskiego. Wyniki konkursu zostały opublikowane w sprawozdaniu za XXI kadencję w Biuletynie Informacyjnym MTiS z. 3, 1987.

**Łódź**

- Konkurs na najlepszą pracę z dziedziny mechaniki technicznej. Sąd konkursowy w składzie: prof. M. Suchar (Przewodniczący) oraz docenci J. Lipiński i T. Przedeki przyznał następujące nagrody:
  - nagrodę I stopnia  
dr Ryszardowi Wojnarowi za pracę „Fale powierzchniowe w termosprężystości z czasami relaksacji”
  - dwie nagrody II stopnia

- Janowi A. Kołodziejowi i Maciejowi Barbackiemu za pracę „Teoretyczny model porowatego zewnętrznie zasilanego cylindrycznie gazowego łożyska wzdłużnego z odkształcalnym materiałem porowatym” Mariuszowi Kaczmarkowi, Janowi A. Kołodziejowi i Grzegorzowi Musielakowi za pracę „Wyznaczanie powierzchni swobodnej cieczy w trójkątnym rowku”  
— jedną nagrodę III stopnia  
Amalii Pielorz za pracę „Wykorzystanie metody falowej w badaniach układów napędowych, porównanie z innymi metodami.

### 1.5. Kursy, szkoły

W 1986 roku zorganizowano następujące kursy o charakterze szkoleniowym:

#### Kielce

cykl wykładów „Metody komputerowe w mechanice” prof. Suhrit K. Dey (USA)  
20 - 26 czerwca 20 uczestników

#### Szczecin

cykl wykładów „Metoda różnic skończonych w mechanice ciała stałego i termodynamice” prof. H. Pfau (NRD)  
14 - 18 kwietnia 10 uczestników

## 2. Działalność wydawnicza

W 1986 roku Komitet Redakcyjny kwartalnika „Mechanika Teoretyczna i Stosowana” działał w zmienionym składzie.

### 2.1. Wydawnictwa periodyczne i ciągłe

W 1986 roku ukazały się drukiem następujące zeszyty kwartalnika „Mechanika Teoretyczna i Stosowana”:

- w styczniu 1/85 — 10,5 ark. wydawniczego, nakład 510 egz.
  - w lutym 2/85 — 11,5 ark. wydawniczego, nakład 500 egz.
  - w sierpniu 3 - 4/85 — 26 ark. wydawniczych, nakład 500 egz.
  - w grudniu 1 - 2/86 — 18,5 ark. wydawniczego, nakład 500 egz.
- Złożono do druku zeszyty: 3/86, 4/86, 1 - 2/87 oraz 3/87

Wydano drukiem metodą małej poligrafii:

- zbiór referatów XXV Sympozjonu „Modelowanie w mechanice” PTMTS Oddział Gliwice 1986, z. 53 T. I ss. 291, T. II ss. 281
- zbiór referatów XII Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”, Politechnika Poznańska, Poznań 1986, ss. 440.
- zbiór referatów XII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, PTMTS Oddział Warszawski, Zespół Mechaniki Doświadczalnej Komitetu Mechaniki PAN, Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1986, ss. 241
- zbiór referatów VI Sympozjum Dynamiki Konstrukcji, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, seria Mechanika, Rzeszów 1986, T. I i II ss. 600
- J. Wojnarowski: „O Chińskim Towarzystwie Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, PTMTS, Pol. Śl., Gliwice 1986, ss. 5

## 3. Współpraca Towarzystwa z zagranicą

- powołano 3 nowych Członków Zagranicznych:
  1. prof. Giovanni Bianchi (30 stycznia — na wniosek profesorów A. Moreckiego i J. Wojnarowskiego)
  2. prof. Miomir Vukobratović (8 października — na wniosek profesorów A. Moreckiego i J. Wojnarowskiego)
  3. prof. Arthur Bergles (8 października — na wniosek prof. A. Olędzkiego)
- podpisano umowę o współpracy dwustronnej ze Słowackim Towarzystwem Mechaniki (zatwierdzone przez obie Akademie Nauk)

— sfinalizowano rozmowy i rozpoczęto działania zmierzające do zorganizowania w terminie 23 - 26 czerwca 1987 I Polsko-Jugosłowiańskiej Konferencji nt. „Nowe kierunki w mechanice ciał stałych i konstrukcji”. Ze strony polskiej do Komitetu Organizacyjnego weszli: profesorowie Zb. Olesiak, J. Wojnarowski i Cz. Woźniak.

Konferencja odbyła się w Dubrowniku w czerwcu 1987 r.

— gośćmi Towarzystwa byli profesorowie: Johann Arbocz (Holandia), Horst Aurich (NRD), R. Barron (Wlk. Brytania), Dieter Besdo (RFN), Helge Bergander (NRD), Otto Bruhns (RFN), Suhrit K. Dey (USA), Josip Dvornik (Jugosławia), J. S. Fleming (Wlk. Brytania), J. M. Gregorienko (ZSRR), Eberhardt Köhler (NRD), Hua Ling (ChRL), H. G. Natke (RFN), Christoph Reismann (NRD), Czesław Rodkiewicz (Kanada), Xu Bing Ye (ChRL), Zdenek Sobotka (CSRS).

#### 4. Działalność organizacyjna

##### 4.1. Władze Towarzystwa

W dniach 9 - 10 października 1986 odbył się XXII Walny Zjazd Delegatów Towarzystwa, na którym wybrano nowe władze PTMTS.

Zarząd Główny XXII kadencji ukonstytuował się następująco:

prof. dr hab. J. Wojnarowski — Przewodniczący  
 prof. dr hab. R. Gutowski — Wiceprzewodniczący  
 prof. dr hab. Cz. Woźniak — Wiceprzewodniczący  
 prof. dr hab. Zb. Dźygadło — Sekretarz Generalny  
 prof. dr hab. R. Parkitny — Skarbnik  
 doc. dr J. Lipiński — Z-ca Sekretarza Generalnego  
 doc. dr Z. Sulimowski — Z-ca Skarbnika

Główna Komisja Rewizyjna XXII Kadencji podjęła działalność w składzie:

prof. dr hab. A. Tylikowski — Przewodniczący  
 doc. dr R. Bąk, prof. dr O. Dąbrowski, prof. dr hab. St. Dubiel oraz prof. dr hab. R. Ganowicz — Członkowie

Składy Zarządów w Oddziałach podaliśmy w Biuletynie Informacyjnym MTiS z. 3, 1987.

##### 4.2. Członkowie Towarzystwa

Liczba członków w poszczególnych Oddziałach na koniec roku 1986 była następująca: Bielsko Biala — 28, Bydgoszcz — 43, Częstochowa — 80, Gdańsk — 59, Gliwice — 171, Kielce — 31, Kraków — 92, Lublin — 57, Łódź — 56, Opole — 23, Poznań — 75, Rzeszów — 25, Szczecin — 42, Warszawa — 222, Wrocław — 99, Zielona Góra — 21. Razem 1124 członków.

##### 4.3. Członkowie zagranicznie Towarzystwa

Przyjęto 3 nowych członków zagranicznych (punkt 3).

#### 5. Zebrania Organizacyjne

##### 5.1. Zjazd Delegatów

W dniach 9 - 10 października odbył się w Kokotku k/Lublińca XXII Zjazd Delegatów PTMTS, w którym udział wzięło 89 delegatów. Protokół ze Zjazdu Delegatów zostanie opublikowany oddzielnie.

##### 5.2. III Kongres Nauki Polskiej

W dniach 3 - 7 marca 1986 w obradach III Kongresu Nauki Polskiej PTMTS reprezentował przewodniczący prof. J. Wojnarowski.

##### 5.3. Zebrania Głównej Komisji Rewizyjnej

Odbyły się dwa zebrania Głównej Komisji Rewizyjnej: 15 maja oraz 9 października

##### 5.4. Zebrania Prezydium Zarządu Głównego

Odbyło się 5 zebrań Prezydium ZG w dniach: 29 stycznia (7 osób), 13 marca (9 osób), 17 kwietnia (3 osoby), 20 maja (4 osoby), 2 grudnia (5 osób). Wszystkie w PKiN w Warszawie.

### 5.5. Zebrania Plenarne Zarządu Głównego

W 1986 r. odbyły się 4 zebrania Plenarne ZG: 30 stycznia PEN Klub Warszawa, (26 osób), 2 lipca — Opole (29 osób), 8 października — Kokotek (26 osób), 10 października zebranie konstytucyjne — Kokotek (28 osób).

### 5.6. Zebrania Zarządów w Oddziałach Towarzystwa

W 1986 r. odbyły się 73 zebrania organizacyjne Zarządów w Oddziałach Towarzystwa. Podano je w tablicy:

Lp.	Oddział	Data walnego zgromadzenia Oddziału	Liczba zebrań Zarządów i Prezydium				
			I kw.	II kw.	III kw.	IV kw.	Razem
1	Bielsko-Biała	30.05.86	2	1	1	1	5
2	Bydgoszcz	18.04	1	2	1	3	7
3	Częstochowa	27.03	2	—	—	1	3
4	Gdańsk	27.05	1	—	—	—	1
5	Gliwice	13.05	2	4	—	3	9
6	Kielce	26.03	3	3	—	4	10
7	Kraków	19.03	—	1	—	1	2
8	Lublin	13.03	—	—	—	—	—
9	Łódź	24.04	—	—	—	2	2
10	Opole	21.05	—	—	—	2	2
11	Poznań	14.04	2	2	—	2	6
12	Rzeszów	21.03	2	2	—	5	9
13	Szczecin	24.04	—	2	—	—	2
14	Warszawa	26.05	1	3	—	1	5
15	Wrocław	23.06	—	1	—	3	4
16	Zielona Góra	22.05	2	2	—	2	6
	Razem		18	23	2	30	73

### 7. Etatowi pracownicy PTMTS

Barbara Michalska-Czachor	(do 12 marca 86) ZGPTMTS	cały etat
A. Furmaniak-Dźwiarek	ZG PTMTS	cały etat
Helena Jańczyk	ZG PTMTS	1/2 etatu
Ewa Koisar	ZG PTMTS	1/2 etatu
Cecylia Sarbinowska	o/Bydgoszcz	1/5 etatu
Anna Sadek	o/Częstochowa	1/4 etatu
Hanna Pieniążek (do 1.IX.86)	o/Gdańsk	1/4 etatu
Janina Zabiello (od 1.IX.86)	o/Gdańsk	1/4 etatu
Jadwiga Wojda	o/Gliwice	1/2 etatu
Maria Cabak	o/Kraków	1/4 etatu
Irena Szmelter	o/Łódź	1/4 etatu
Maria Zwierzykowska	o/Poznań	1/5 etatu
Mieczysława Mierzejewska	o/Szczecin	1/4 etatu
Czesława Ostrowska	o/Rzeszów	1/8 etatu
Helena Wzorek	o/Wrocław	1/4 etatu

Sekretarz Generalny PTMTS  
prof. dr hab. Z. Dzygałło

Przewodniczący PTMTS  
prof. dr hab. J. Wojnarowski

**SPRAWOZDANIE  
Z KONFERENCJI NAUKOWEJ GAMM W STUTTGARCIE  
(13 - 17 kwietnia 1987)**

Komitet Organizacyjny: Profesorowie: H. Bufler, H. Bednarczyk, R. Eppler, K. Kirchgässner, W. Schiehlen, W. Wendland i P. Werner.

Program konferencji zawierał 12 wykładów plenarnych (sesje poranne) oraz 335 referatów (sesje popołudniowe).

Na konferencji przedstawiono następujące wykłady plenarne:

- Untersuchung von Gleichungen der mathematischen Physik mit der Methode der geometrischen Optik (H. D. ALBER, Bonn),
  - Biomechanik und Implantattechnik (F. BAUMGART, Grenchen). Wykład wzbudził duże zainteresowanie słuchaczy i dyskusję.
  - Parametrische Optimierung: Pivot- und Prediktor-Korrektur-Homotopiemethoden. Eine Übersicht (J. GUDDAT, Berlin). Referent jest znany z wielu publikacji dotyczących optymalizacji globalnej. Wykład wzbudził duże zainteresowanie słuchaczy.
  - Neue Entwicklungen in der Technischen Schwingungslehre (P. HAGEDORN, Darmstadt),
  - Steuerung von Phasenübergängen — Mathematische Modelle und Numerische Simulation (K. H. HOFFMANN, Augsburg),
  - Stiffness and strength of damaged materials (J. HULT, Goeteborg),
  - Neue optische Möglichkeiten der Dichte- und Geschwindigkeitsmessung in Strömungen (W. MERZ-KIRCH, Essen),
  - Numerische Strömungsmechanik — Grundlagen und aerodynamische Anwendungen (H. OERTEL, Göttingen),
  - Existenzaussagen für stationäre Strömungen viskoelastischer Flüssigkeiten (M. RENARDY, Blacksburg),
  - Neuere theoretische und experimentelle Arbeiten auf dem Gebiet der Wellenausbreitung in Festkörpern (M. SAYIR, Zürich),
  - Bedienungsmodelle: Algorithmische Methoden für strukturierte Probleme (H. SCHELLHAAS, Darmstadt),
  - Finite element methods in solid mechanics with applications to fracture (J. R. WHITEMAN, Uxbridge).
- Był to wykład inauguracyjny i zawierał szereg oryginalnych wyników badań oprócz przeglądu prac z zakresu stosowania metody elementów skończonych w mechanice zniszczenia.

Wykład specjalny poświęcony pamięci Ludwiga Prandtla na temat „Die Entwicklung der Tragflügeltheorie” przedstawił Prof. Dr. R. EPPLER z Uniwersytetu w Stuttgarcie. Referent przedstawił wykład z właściwą sobie swadą i omówił szereg interesujących wyników badań teoretycznych i doświadczalnych z zakresu kształtowania skrzydeł samolotów oraz sposobów sterowania nimi. Podczas wykładu referent zademonstrował modele latające.

Wykład otwarty (ogólnodostępny) na temat “Simulation in der Fahrdynamik” przedstawił F. PANIK z firmy Daimler-Benz AG Stuttgart.

Referaty popołudniowe (short lectures) prezentowano w siedmiu następujących grupach tematycznych:

1. Zagadnienia drgań i stateczności (70 referatów)
2. Mechanika ciał sprężystych i plastycznych (84 referaty)
3. Mechanika płynów (74 referaty)
4. Metody numeryczne w równaniach różniczkowych, metody elementów skończonych i metody elementów brzegowych (43 referaty)
5. Optymalizacja, teoria decyzji, stochastyka i metody matematyczne stosowane w ubezpieczeniach (11 referatów)
6. Matematyka stosowana i fizyka matematyczna (31 referatów)
7. Analiza numeryczna (22 referaty)

Grupy tematyczne 1, 2 i 3 podzielono na podgrupy 1a, 1b, 2a, 2b i 3a, 3b z uwagi na dużą liczbę referatów w tych trzech grupach. Obrady popołudniowe odbywały się równolegle w kilku sekcjach.

Językami oficjalnymi konferencji były: angielski, niemiecki i francuski. Czas przeznaczony na wykłady plenarne wynosił 45 minut, natomiast na referaty 20 minut włączając 5 minut na dyskusję.

Podczas konferencji (15 kwietnia) odbyło się Zebranie Ogólne członków GAMM. Ze strony polskiej przedstawicielem w Prezydium GAAM jest Prof. G. Szefer.

W konferencji wzięło udział 554 uczestników w tym 296 członków GAAM i 53 osoby towarzyszące. Delegacje poszczególnych krajów miały następującą liczebność: RFN — 376, Bułgaria — 2, Czechosłowacja — 9, NRD — 2, Dania — 1, Finlandia — 2, Francja — 1, Grecja — 3, Wielka Brytania — 3, Włochy — 3, Jugosławia — 56, Kanada — 2, Austria — 34, Polska — 36, Arabia-Saudyjska — 1, Szwecja — 1, Szwajcaria — 7, Bahrajn — 1, USA — 2, ZSRR — 2, Węgry — 7 i Ching — 3.

Uczestnicy konferencji zostali przyjęci w sali posiedzeń w Ratuszu Miejskim przez burmistrza Stuttgartu — Rommla. Organizacja konferencji i warunki jej przeprowadzenia były wzorowe.

Wykłady plenarne oraz referaty przedstawione na konferencji zostaną opublikowane w czasopiśmie ZAMM W roku 1988 (prawdopodobnie w numerach 4 i 5). Uczestnicy konferencji z Polski przedstawili 25 referatów.

*S. JENDO, IPPT, PBN, Warszawa*

*E.-A. MÜLLER, Max-Planck Institut für Strömungsforschung, Getynga, RFN*

#### PIERWSZA MIĘDZYNARODOWA KONFERENCJA IMEKO TC-15 n.t. "MEASUREMENT OF STATIC AND DYNAMIC PARAMETERS OF STRUCTURES AND MATERIALS"

Pilźń, 26 - 28 maja 1987 r

W dniach 26 - 28 maja 1987 r. odbyła się w Pilźnie, Czechosłowacja I-sza Międzynarodowa Konferencja IMEKO TC-15 (International Measurement Confederation — Technical Committee 15 — Experimental Stress Analysis), jedna z najbardziej znaczących konferencji naukowych z zakresu metod doświadczalnych w dziedzinie mechaniki ciała stałego.

Organizatorami konferencji były:

- Czechosłowackie Stowarzyszenie Naukowo-Techniczne ČSVTS;
- Czechosłowackie Towarzystwo Naukowo-Techniczne;
- Czechosłowacki Komitet Zastosowań Cybernetyki;
- Czechosłowacki Komitet Narodowy IMEKO TC-15;
- Czechosłowackie Towarzystwo Mechaniki — ČSAV (Československé Akademie Věd), Praha, Sekcja Doświadczalnej Analizy Naprężeń;
- Koncern „Skoda” w Pilźnie;
- Dom Techniki ČSVTS w Pilźnie.

Przewodniczący Komitetu Organizacyjnego Konferencji, w skład którego wchodził czołowi naukowcy z 7-miu krajów Europy, był doc. dr inż. J. Javornický z Czechosłowackiej Akademii Nauk (zmarł w kwietniu b.r.).

Celem konferencji było omówienie tych zagadnień z zakresu metod doświadczalnych w dziedzinie mechaniki ciała stałego, które Rada Główna IMEKO uznała obecnie za szczególnie ważne. Należały do nich:

- a) — automatyzacja procesu rejestracji i obróbki danych pomiarowych;
- b) — automatyzacja pomiarów wielkości mechanicznych i innych;
- c) — optyczne i elektryczne metody eksperymentalnej analizy naprężeń;
- d) — pomiary mechanicznych parametrów konstrukcji, w szczególności wielkości dynamicznych;
- e) — metody specjalne pomiaru odkształceń ciał stałych;

Obrady odbywały się w salach konferencyjnych Domu Kultury w Pilźnie. Oficjalnymi językami konferencji były języki: czeski, słowacki i angielski. W konferencji wzięło udział około 210 osób, z czego 58 z poza Czechosłowacji.

Konferencja, w której wzięło udział wielu naukowców o światowych nazwiskach, rozpoczęła się w dniu 26 maja 1987 r. Na wstępie zebrani chwilą ciszy uczcili pamięć zmarłego doc. J. Javornický'ego, Przewod-



niczącego Komitetu Organizacyjnego Konferencji, a po przemówieniach okolicznościowych i krótkiej przerwie rozpoczęły się właściwe obrady.

Rozpoczęto je pierwszą sesją plenarną, na której w 4-ech referatach problemowych omówiono: zagadnienia technik hybrydowych w analizie nieliniowych problemów ciał stałych (prof. K. Laermann — RFN), pomiary wielkości dynamicznych przy wysokich wartościach obciążeń (prof. J. Dally — USA), możliwości i ograniczenia zastosowań zintegrowanej elastooptyki w badaniach ogólnego trójwymiarowego stanu naprężenia (prof. H. Aben — ZSRR) oraz znaczenie doświadczeń jako źródła informacji naukowych i technicznych (doc. J. Javornický — przedstawił dr J. Jira).

Drugą sesją plenarną rozpoczęto trzeci dzień obrad konferencji. Przedstawiono na niej 4 referaty, w których omówiono: kryteria pęknięć i zniszczenia kompozytów (prof. P. Theocaris — Grecja), zastosowanie metod optycznych do pomiaru odkształceń w dwukierunkowym stanie obciążenia (prof. A. Lagarde — Francja), zagadnienia dokładności metod optycznych stosowanych przy pomiarach przemieszczeń (prof. C. Sciamarella — USA) oraz zagadnienia dotyczące obróbki danych eksperymentalnych (dr O. Kropač — ČSRS). W ciągu trzydniowych obrad, oprócz wymienionych sesji plenarnych odbyło się:

- osiem sesji tematycznych, poświęconych określonej tematyce, na których w 46-ciu referatach przedstawiono różne zagadnienia z zakresu optycznych i elektrycznych metod stosowanych w analizie naprężeń, dokładności i zakresu zastosowań tych metod, automatyzacji prowadzenia badań i komputerowej obróbki wyników, metod specjalnych, specjalistycznej aparatury pomiarowej itp.;
- dwie sesje plakatowe, na których przedstawiono 43 prace prezentując głównie wyniki najbardziej interesujących badań — zarówno statycznych jak i dynamicznych — różnego rodzaju konstrukcji, a także materiałów — w szczególności kompozytowych.

Ogółem przedstawiono 98 prac, z których 59 przedstawili naukowcy z Czechosłowacji, 7 — z Polski, po 6 — z ZSRR i RFN, po 3 — z Węgier i NRD, po 2 — z USA, Jugosławii i Bułgarii i po 1-iej z Anglii, Egiptu, Grecji, Francji, Holandii, Rumunii, Kuwejtu i Włoch.

W ramach konferencji zostały również zorganizowane dwie interesujące wycieczki naukowo-techniczne: do Ośrodka Badawczego koncernu Skoda, gdzie zaprezentowano m.in. zautomatyzowane systemy prowadzenia badań dynamicznych różnego rodzaju konstrukcji przy zastosowaniu komputerowo sterowanych układów zadawania obciążeń, a także automatycznej rejestracji i obróbki wyników — oraz do jednego z Zakładów tegoż koncernu, w którym produkowane są m.in. kotły i urządzenia do elektrowni atomowych.

Streszczenia prac, przedstawionych na konferencji zostały wydane drukiem w wersjach, opracowanych przez autorów. Tytuł wydawnictwa: International Conference "MEASUREMENT OF STATIC AND DYNAMIC PARAMETERS OF STRUCTURES AND MATERIALS", 26 - 28.05.1987, Plzeň — ČSRS. Wydawcą był Dom Techniki ČSVTS — Plzeň.

Materiały te wydano w dwóch tomach, z których tom I, o objętości 323 strony, zawiera streszczenia 52 prac, natomiast tom II o objętości 322 stron zawiera streszczenia 49 prac.

*Władysław Walczak*  
*Łódź*

**MIĘDZYKONFERENCJA DRGAŃ  
NIELINIOWYCH — ICNO XI  
Budapeszt 17 - 23 sierpnia 1987**

Po raz pierwszy gospodarzami konferencji tradycyjnie organizowanych przez Akademię Nauk Czechosłowacji, NRD, Polski i Ukrainy byli Węgrzy. Prac organizacyjnych podjęły się Towarzystwo Matematyczne im. Janoša Bolyai i Węgierska Akademia Nauk. W konferencji uczestniczyło nieco mniej niż oczekiwano pracowników naukowych z całego świata, głównie mechaników i matematyków. Obrady odbywały się w Gmachu Głównym Politechniki Budapeszteńskiej.

Otwarcie konferencji połączono z uczczeniem 80-cio lecia urodzin Członka Rzeczywistego PAN Prof. S. Ziemby i 70-cio lecia urodzin Członka Rzeczywistego AN ZSRR J. A. Mitropolskiego głównych inicjatorów organizowania konferencji. Podczas otwarcia Dr Á. Bosznay przedstawił życiorys naukowy Prof. S. Ziemby ze szczególnym uwzględnieniem kontaktów węgiersko-polskich oraz historii organizacji

Konferencji Drgań Nieliniowych. Dr L. Hatvani przedstawił życiorys oraz bogaty dorobek naukowy Prof. J. A. Mitropolskiego. Uchwałą Komitetu Naukowego XI-tą Konferencję Drgań Nieliniowych poświęcono obu zasłużonym uczonym.

Na zaproszenie międzynarodowego Komitetu Naukowego wygłoszono 32 czterdziestominutowe referaty plenarne. Obrady odbywały się w następujących sekcjach:

1. Analityczne metody (69)
2. Jakościowe metody (119)
3. Numeryczne metody (43)
4. Zastosowania w mechanice i fizyce (113)
5. Zastosowania w elektrycznych i elektronicznych obwodach i systemach (26)
6. Zastosowania w biologii, chemii, ekonomii i innych naukach (26).

W nawiasach są zamieszczone liczby dwudziestominutowych referatów zakwalifikowanych przez organizatorów do poszczególnych sekcji. Ze względu na dużą liczbę referatów w sekcji 2 i 4 obrady odbywały się równolegle w dwu salach, co uniemożliwiało wysłuchanie wszystkich referatów nawet jednej z wymienionych sekcji.

W obradach konferencji wzięła czynny udział liczna 27-io osobowa grupa uczestników z Polski, w tym 16 przedstawicieli nauk technicznych głównie mechaników i 11 matematyków. Trzy referaty plenarne powierzone przedstawicielom naszego kraju wygłoszili:

Prof. Cz. Olech „O pewnych przypuszczeniach Jakobiego”,

Prof. W. Stupnicka-Szemplińska „Ruch chaotyczny a przybliżone teorie drgań nieliniowych”,

Prof. S. Ziemia (współautorzy doc. B. Radziszewski i dr K. Gajewski) „O ocenie zbioru stabilnych rozwiązań rekurencyjnych równań”.

Wśród referatów plenarnych ze szczególnym zainteresowaniem spotkały się następujące wystąpienia: L. O. Chow „Rodzina podwójnych zwojów: bifurkacje, chaos i normalna postać”,

A. Halanay „Periodyczne i prawieperiodyczne rozwiązania afinicznych układów stochastycznych”,

P. Holmes „Węzły i genealogie orbit nieliniowych oscylatorów”

A. A. Martyniuk „Analiza jednostajnej asymptotycznej stateczności osobliwie zaburzonego układu za pomocą macierzowej funkcji Lapunowa”

D. T. Mook „Analityczne i numeryczne badanie oddziaływania pomiędzy parametrycznym a zewnętrznym wzbudzeniem drgań o dużej amplitudzie”,

Ali H. Nayfeh „Parametryczne wzbudzenie dwu wewnętrznie rezonujących oscylatorów”.

Wygłoszone referaty będą wydane w postaci obszerniejszych czterostronicowych streszczeń w materiałach konferencyjnych.

Program imprez towarzyszących konferencji był stosunkowo skromny i ograniczył się do wieczoru powitalnego.

*Andrzej Tylikowski*



## Spis treści

<p>V. ASKEGAARD, Problems in connection with design, calibration and use of pressure cells          Проектирование, калибровка и применения датчиков давления          Problemy projektowania, kalibracji i użytkowania czujników ciśnienia</p>	219
<p>K. H. LAERMANN, Automatic digital image-processing in photoelasticity          Автоматическая цифровая обработка образов          Automatyczne cyfrowe przetwarzanie obrazów</p>	231
<p>Z. FÜZESSY, F. GYIMESI, J. KORNIS, Applications of the difference hologram interferometry          Применения разностной голографической интерферометрии          Zastosowanie różnicowej interferometrii holograficznej</p>	243
<p>R. HÖFLING, W. OSTEN, Speckle pattern correlation using digital image processing          Корреляция спекл-картин при применении цифровой обработки образов          Korelacja obrazów plamkowych przy użyciu techniki cyfrowej</p>	253
<p>J. DEPUTAT, Wykorzystanie zjawiska elasto-akustycznego do pomiaru naprężeń          Использование акусто-упругого эффекта для измерения напряжений          Use of elasto-acoustic effect in stress measurements</p>	263
<p>M. J. MATCZAK, Wyznaczenie przemieszczeń i odkształceń na podstawie kontrastu prążków na obrazach interferometrii holograficznej          Определение перемещений и деформации на основе контраста полос на образах голографической интерферометрии          Displacement and strain evaluation on the basis of fringe contrast in holographic interferometry</p>	279
<p>J. SZALA, Zagadnienia równoważnej amplitudy naprężeń w ocenie trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych          Вопрос эквивалентной амплитуды напряжений при оценке прочности конструктивных деталей          Problem of equivalent stress amplitude for evaluation of construction elements fatigue life</p>	291
<p>Z. RUCHTER, Nonlinear equations of shells of slowly varying curvatures          Нелинейные уравнения оболочек с медленно изменяющимися кривизнами          Nieliniowe równania powłok o wolno zmieniających się krzywiznach</p>	302
<p>M. ŚLĄKOWSKI, Rozwiązanie zagadnienia przepływu idealnego czynnika ściśliwego w palisadzie profili metodą wariacyjną          Решение задачи идеального течения текучей среды в решётке профилей вариационным методом          Solution to a problem of the ideal flow of compressible liquid in cascade profiles by variational method</p>	311
<p>A. JARŻA, Struktura turbulencji i bilans jej energii w warstwie przyściennej na powierzchni przepuszczalnej          Баланс энергии и структура турбулентности в пограничном слое на проницаемой поверхности          Turbulence structure and balance of turbulent kinetic energy in boundary layer along a permeable surface</p>	329
<p>M. MIŃSKI, Opis stanu zarysowania lepkosprężystej tarczy w ujęciu dystrybucyjnym          Описание состояния вязкоупругого диска с трещиной в классе обобщённых функций          Description of a cracked state of a viscoelastic plate by distributional formulation</p>	347
<p>M. BANYS, Quasi-statyczna sprężysto-lepkoplastyczność dla materiału nieściśliwego. Rozwiązanie MES.          Квази-статическая упруго вязкопластичность для несжимаемого материала. Решение методом конечных элементов          Quasi-static elasto-viscoplasticity for incompressible material. Solution by FEM</p>	359
<p>J. WŁANUT, Non-standard analysis and the continuous media          Нестандартный анализ и сплошные среды</p>	369

Analiza niestandardowa i ośrodki ciągłe	
E. WIERZBIŃSKI, Constraints in solid mechanics. An application of nonstandard analysis	377
Связи в механике твёрдого тела. Применение нестандартного анализа	
Więzy w mechanice ciała stałego. Zastosowanie analizy niestandardowej	
BIULETYN INFORMACYJNY	389

## INSTRUKCJE DLA AUTORÓW

### Ogólne

W Mechanice Teoretycznej i Stosowanej drukowane są prace przeglądowe oraz oryginalne teoretyczne i doświadczalne z zakresu mechaniki ciała stałego oraz cieczy i gazów. Publikujemy również dyskusję naukową oraz polemikę dotyczącą prac z mechaniki, które ukazały się w MTiS lub w innych czasopiśmie naukowych.

W Biuletynie Informacyjnym drukujemy sprawozdania z konferencji naukowych z zakresu mechaniki w kraju i za granicą oraz z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Praca może być złożona do druku w MTiS pod warunkiem jej nieopublikowania w innym czasopiśmie.

Drukujemy w języku polskim oraz na życzenie autorów w języku angielskim pod warunkiem złożenia pracy w tym języku.

Prace należy nadsyłać na adres Redakcji bądź jednego z redaktorów, w dwóch egzemplarzach (oryginał + kopia).

Praca złożona do druku podlega recenzji.

Wszelkie zmiany (poprawki autorskie) po zakwalifikowaniu artykułu do druku i przekazaniu go do drukarni mogą być dokonane tylko w czasie 1 korekty (na koszt autora).

Po opublikowaniu autorzy otrzymują 25 egzemplarzy odbitek swojego artykułu.

### Szczegółowe

1. Prace składane do publikacji w MTiS powinny zawierać (wg kolejności)
  - a) Tytuł
  - b) Imię, Nazwisko z podaniem miejsca pracy
  - c) Abstrakt (w języku polskim)
  - d) Właściwą pracę
  - e) Spis literatury
  - f) Streszczenia w języku
    - praca w języku polskim — rosyjskim w maszynopisie i angielskim
    - praca w języku angielskim — polskim i rosyjskim.
2. Tekst powinien być napisany po jednej stronie (nie na papierze kredowym) z zachowaniem podwójnych odstępów i obustronnych marginesów — z lewej 6 cm, z prawej 1 cm.
3. Wzory należy wpisywać czytelnie, w kolorze czarnym, z zachowaniem numeracji po stronie prawej (należy zwrócić szczególną uwagę na rozróżnienie 1 oraz litery l, zera i litery o oraz literę q i p).
4. Życzenia autorów dotyczące formy graficznej pracy w tym kroju czcionki, liter greckich itp. powinny być dołączone na osobnej kartce, bądź na marginesie (ołówkiem).
5. Tablice występujące w tekście należy dołączyć na oddzielnych kartkach (jedna na stronie).
6. Podpisy pod rysunkami powinny być wyszczególnione oddzielnie, a nie pod rysunkami.
7. Prosimy o sporządzanie wykazu literatury w sposób następujący: W. Nowacki, Teoria Sprężystości, Warszawa, PWN, 1970.
8. Odnośniki należy numerować kolejno w całej pracy, a nie wg strony.
9. Obowiązuje stosowanie układu jednostek SI.

Prenumeratę **na kraj** przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch”, oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do 10 czerwca na I półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki społecznej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki **za granicę** przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO BP XV Oddział w Warszawie Nr 1658-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki **za granicę** jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleciodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona—Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona—Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA* jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od I.I.1967 r. jako kwartalnik.  
(Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Sala Kongresowa, pokój 309)

---