

7¹¹ 720

**P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J**

PL ISSN 0079-3701

M E C H A N I K A T E O R E T Y C Z N A I S T O S O W A N A

**KWARTALNIK
TOM 20 • ZESZYT 3-4**



**WARSZAWA 1982
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E**

531

SPIS TREŚCI

W. NOWACKI	<i>Modele matematyczne fenomenologicznej piezoelektryczności</i> <i>Математическая модель феноменологического пьезоэлектричества</i> <i>Mathematical models of a phenomenological piezoelectricity</i>	175
D. WEICHERT	<i>A minimum-principle for stress-state in elastic-plastic plates and the systematical generation of appropriate plate-models</i> <i>Закон минимум для напряженного состояния в упруго-пластических плитах и соответствующая модель плиты</i> <i>Zasada minimum dla stanu naprężenia w prętach sprężysto-plastycznych oraz dyskusja stosownego modelu płyt</i>	193
K. GRYSA	<i>O metodach teorii potencjałów w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych wymiany ciepła</i> <i>О методах теории потенциалов в разрешивании обратных задач теплопроводности</i> <i>On the methods of the theory of potentials is resolving the inverse heat conduction problems</i>	207
R. МОКРЫК, Z. ОЛЕСΙΑК	<i>Termodyfuzja w zagadnieniu kontaktu warstwy i półprzestrzeni sprężystej</i> <i>Термодиффузия при контакте упругого слоя с полупространством</i> <i>Thermodiffusion in a contact of an elastic layer with a semispace</i>	225
A. WACHESKA-SKOWRON	<i>O więzach wewnętrznych dla materiałów typu prędkościowego</i> <i>О внутренних связях для материалов скоростного типа</i> <i>On internal constants for velocity type materials</i>	237
W. NAGÓRKO	<i>O błędzie rozwiązań przybliżonych w mechanice</i> <i>Погрешность приближенных решений в механике</i> <i>On approximate solutions in mechanics</i>	245
K. PODOLAK	<i>O propagacji fal naprężenia w sprężysto-plastycznym przewodniku poddanym działaniu ruchomej siły masowej w obecności pola magnetycznego</i> <i>О распространении волн напряжения в упруго-пластическом проводнике под действием подвижной массовой силы в магнитном поле</i> <i>On the propagation of stress waves produced by a moving body force in an elastic-plastic conductor subject to a magnetic field</i>	253
F. ROMANÓW, J. CZMOSCHOWSKI	<i>Nieliniowa teoria stateczności powłok przekładkowych z uwzględnieniem poprzecznej odkształcalności rdzenia</i> <i>Нелинейная теория устойчивости трёхслойных оболочек с учетом поперечной деформируемости заполнителя</i> <i>Non-linear theory of the stability of sandwich shells with transverse deformability of the core</i>	271
S. JAKUBOWSKI	<i>Analiza stanu zakrytycznego swobodnie podpartej tarczy prostokątnej poddanej działaniu mimośrodowego ściskania i jej zastosowanie do przybliżonego obliczania cienkościennego dźwigara skrzynkowego</i> <i>Анализ послекритической стадии прямоугольной пластинки нагруженной эксцентрической сжимающей силой и его применение в приближенном методе вычисления тонкостенной банки.</i> <i>The post-buckling state analysis of a rectangular plate subjected to an eccentric compression and its application in an approximate calculations of thin walled box girder</i>	285
K. GRYSA, Z. KOZŁOWSKI	<i>O jednowymiarowym zagadnieniu identyfikacji strumienia ciepła na brzegu warstwy płaskiej</i> <i>О одномерной задаче идентификации теплового потока на поверхности плоского слоя,</i> <i>On an one-dimensional heat flux identification problem at a surface of a plane slab</i>	303
B. SKIERCZYŃSKI	<i>Wykorzystanie metod analizy wrażliwości do badania układów mechanicznych opisywanych liniovymi i nieliniowymi równaniami Mathieu</i> <i>Применение метода анализа чувствительности к механическим системам описываемым линейными и нелинейными уравнениями Матье</i> <i>Method of sensitivity analysis applied to mechanical systems governed by linear and nonlinear Mathieu equations</i>	321

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 2 0 Z E S Z Y T 3 - 4

W A R S Z A W A 1 9 8 2

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

KOMITET REDAKCYJNY
MAREK DIETRICH—PRZEWODNICZĄCY
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,
JÓZEF WIĘCKOWSKI,
ZBIGNIEW OLESIAK—REDAKTOR NACZELNY,
JACEK STUPNICKI—REDAKTOR
ANDRZEJ SZANIAWSKI—REDAKTOR,
CZESŁAW WOŹNIAK—REDAKTOR
MONIKA WĄGROWSKA—REDAKTOR,
ELŻBIETA OLSZEWSKA—SEKRETARZ

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 570. Ark. wydawniczych 16.0. Ark. drukarskich 14,75. Papier druk. b. sat. kl. III, 90 g. 70×100
Oddano do składania 6.XII.1982 r. Druk ukończono we wrześniu 1983 r. Zam. 3304/82 Cena zł 120.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

7" 720

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3/4, 20 (1982)

MODELE MATEMATYCZNE FENOMENOLOGICZNEJ PIEZOELEKTRYCZNOŚCI

WITOLD NOWACKI

PAN Warszawa

1. Wprowadzenie

Niektóre kryształy, takie jak kwarc, turmalin, sól Seignetta itd. poddane działaniu ciśnienia stają się elektrycznie spolaryzowanymi (P. i J. Curie, 1880). Obok tego efektu piezoelektrycznego wystąpi efekt odwrotny, wywołany przyłożeniem elektrycznego potencjału do ciała — w efekcie ciało dozna odkształcenia. Ten odwrotny efekt został w 1881 r. przewidziany przez LIPPMANNA [5] na podstawie rozważań termodynamicznych i potwierdzony doświadczalnie przez braci CURIE 1881, [6].

Praktyczne zastosowania efektu piezoelektrycznego są dobrze znane, przede wszystkim w generacji fal ultradźwiękowych, w konwersji energii elektromagnetycznej na mechaniczną i odwrotnie, w prospekcji ciał o własnościach piezoelektrycznych itd. [7].

W niniejszym artykule przedstawimy kilka modeli matematycznych piezoelektryczności i piezo-termosprężystości. Rozważania nasze rozpoczniemy od przedstawienia klasycznego, kwazistatycznego modelu W. VOIGTA [1], przechodząc następnie do omówienia bardziej ogólnego przypadku, w którym dynamiczne elektromagnetyczne pole jest sprzężone z polem odkształcenia [16]. Następnie odstępimy od założenia procesu adiabatycznego i rozpatrzmy kwazistyczny model termopiezoelektryczności. [2] [4].

Wreszcie rozpatrzmy bardzo ogólny model R. D. MINDLINA [3], w którym rozpatruje się wpływ gradientu polaryzacji elektrycznej na elektromechaniczne pole. Rozważania nasze kończy prezentacja dynamicznego zagadnienia termopiezoelektryczności z gradientem polaryzacji. [32]

2. Pole elektromagnetyczne

Rozważania nasze rozpoczniemy od podstaw elektromagnetycznych zagadnienia. Przedstawmy najpierw równania elektrodynamiki MAXWELLA [8]

$$(2.1) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{I} + \dot{\mathbf{D}}$$

$$(2.2) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}},$$

$$(2.3) \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_e,$$

$$(2.4) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

gdzie \mathbf{H} jest wektorem pola magnetycznego, \mathbf{E} jest wektorem pola elektrycznego, \mathbf{B} — wektorem indukcji magnetycznej a \mathbf{D} wektorem przesunięcia elektrycznego. \mathbf{I} jest wektorem prądu przewodzenia a ρ_e — ładunkiem elektrycznym.

Do równań Maxwella dodać należy związki konstytutywne

$$(2.5) \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

$$(2.6) \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

Tutaj \mathbf{P} jest wektorem polaryzacji elektrycznej, \mathbf{M} — wektorem magnetyzacji, ε_0 , μ_0 oznaczają przenikalność elektryczną i magnetyczną.

Równaniom Maxwella można nadać inną równorzędną postać [8]

$$(2.7) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{I} + \dot{\mathbf{D}}$$

$$(2.8) \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

$$(2.9) \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \dot{\mathbf{A}}$$

$$(2.10) \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho_e$$

Posłużymy się tą postacią równań elektrodynamiki w celu uzyskania równań kwazistatycznych. W równaniach (2.7) - (2.10) wprowadzono potencjał skalarny φ i potencjał wektorowy \mathbf{A} .

Łatwo się przekonać, że z równań (2.1) - (2.4) otrzymuje się twierdzenie Poyntinga

$$(2.11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V U_e dV = - \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} dA - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{I} dV,$$

gdzie

$$U_e = \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Równanie (2.11) daje się interpretować fizycznie jako bilans energii elektromagnetycznej. Skalar $\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}$ przedstawia przepływ energii elektromagnetycznej przez powierzchnię A ciała do otaczającego go ośrodka. Wyrażenie $\dot{U}_e = \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}$ identyfikujemy jako przyrost energii elektromagnetycznej w czasie. Wreszcie $\mathbf{E} \cdot \mathbf{I}$ reprezentuje ciepło Joule'a. Wektor Poyntinga \mathbf{h} daje się wyrazić przy pomocy potencjałów φ i \mathbf{A} w sposób następujący

$$(2.12) \quad \mathbf{h} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \varphi (\mathbf{I} + \dot{\mathbf{D}}) - \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{H}$$

Dla piezoelektryków wprowadzamy te same uproszczenia co dla niemagnetyzujących się dielektryków

$$(2.13) \quad \mathbf{I} = 0, \quad \mathbf{M} = 0, \quad \rho_e = 0.$$

Dalszym uproszczeniem jest przyjęcie, że $\mathbf{A} \approx 0$. W tym przypadku uprości się bilans energii (2.11) do postaci

$$(2.14) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V U_e dV = - \int_A n \varphi \dot{\mathbf{D}} dA = \int_V \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} dV, \quad \dot{U}_e = \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}}$$

Z układu równań (2.5) - (2.10) pozostaną nam

$$(2.15) \quad \mathbf{E} = \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Mamy tu do czynienia z kwazistatycznym polem elektrycznym

$$(2.16) \quad \varepsilon_0 \nabla^2 \varphi = \text{div } \mathbf{P}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Uproszczenie $\dot{A} \approx 0$ albo $|A| \ll (\text{grad } \varphi)$ jest słuszne gdy rozważymy długości fal bliskie długościom fal sprężystych. Omówienie szczegółowe i teoretyczne uzasadnienie uproszczenia $\dot{A} \approx 0$ znajdzie czytelnik w cennej pracy H. F. TIERSTEN'A [9].

3. Klasyczna teoria piezoelektryczności W. VOIGTA [1]

Założmy, że ciało dozna odkształcenia wskutek działania obciążeń zewnętrznych i pola elektromagnetycznego, które to przyczyny zmieniają się w czasie. Założmy, że w ciele brak źródeł ciepła i przewodnictwa cieplnego (proces adiabatyczny). Zastosujemy do dowolnego obszaru V ciała ograniczonego powierzchnią A , zasadę zachowania energii

$$(3.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i + U \right) dV = \int_V X_i v_i dV + \int_A p_i v_i dA + \int_V E_i \dot{D}_i dV$$

Tutaj ρ jest gęstością, $v_i = \dot{u}_i$ pochodną czasową przemieszczenia, X_i składową sił masowych, $p_i = \sigma_{ji} n_j$ siłą kontaktową, σ_{ij} tensorem naprężenia a n_i składową wektora normalnej do powierzchni A . Dalej $U = U_m + U_e$ jest energią wewnętrzną (mechaniczną i elektryczną).

Przekształcając równanie (3.1) i wykorzystując równanie ruchu

$$(3.2) \quad \sigma_{ji,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i,$$

otrzymamy

$$\int_V \dot{U} dV = \int_V (\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + E_i \dot{D}_i) dV.$$

co prowadzi dla dowolnej objętości V do lokalnego związku

$$(3.3) \quad \dot{U} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + E_i \dot{D}_i.$$

Ponieważ $U \equiv U(\epsilon_{ij}, D_i)$, to słuszne jest równanie

$$(3.4) \quad \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \dot{\epsilon}_{ij} + \left(E_i - \frac{\partial U}{\partial D_i} \right) \dot{D}_i = 0.$$

Równanie to winno być spełnione dla dowolnych wartości $\dot{\epsilon}_{ij}$, \dot{D}_i . Stąd wynika, że

$$(3.5) \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad E_i = \frac{\partial U}{\partial D_i}.$$

W dalszych rozważaniach wygodniej będzie operować entalpią elektryczną:

$$(3.6) \quad H = U - E_i D_i.$$

Eliminując \dot{U} z równania (3.3) i (3.6) dochodzimy do równania

$$(3.7) \quad \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \dot{\epsilon}_{ij} - \left(D_i + \frac{\partial H}{\partial E_i} \right) \dot{E}_i = 0.$$

Równanie to winno być spełnione dla dowolnych wartości $\dot{\epsilon}_{ij}$, \dot{E}_i , zatem

$$(3.8) \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad D_i = - \frac{\partial H}{\partial E_i}.$$

Rozwińmy entalpię elektryczną $H(\varepsilon_{ij}, E_i)$ w szereg Maclaurina w otoczeniu stanu naturalnego ($\varepsilon_{ij} = 0$, $E_i = 0$) i pominiemy człony wyższe od stopnia drugiego.

$$(3.9) \quad H(\varepsilon_{ij}, E_i) = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{kij} \varepsilon_{ij} E_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^e E_i E_j$$

Tutaj c_{ijkl}^E jest sztywnością sprężystą przy $E_i = \text{const.}$, ε_{ij}^e — jest stałą przenikalności dielektrycznej przy $\varepsilon_{ij} = \text{const.}$, wreszcie e_{kij} jest stałą piezoelektryczną. Na podstawie rozważań termodynamicznych oraz ze względu na symetrię tensorów σ_{ij} i ε_{ij} otrzymamy

$$(3.10) \quad c_{ijkl} = c_{klij}, \quad c_{ijkl} = c_{jikl}, \quad c_{ijkl} = c_{ijlk}, \quad e_{kij} = e_{kjil}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

W przypadku ogólnym kryształu trójskośnego mamy 21 stałych sprężystych c_{ijkl} . 18 stałych piezoelektrycznych e_{kij} i 6 stałych przenikalności elektrycznej ε_{ij} . Ponieważ w przypadku kryształów centrosymetrycznych znika tensor polarny, to w ciałach centrosymetrycznych nie wystąpi efekt piezoelektryczny.

Zważywszy na równania (3.8) i wyrażenie (3.9) otrzymujemy następujące związki konstytutywne

$$(3.11) \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k,$$

$$(3.12) \quad D_i = e_{iki} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik} E_k$$

Wstawmy związki konstytutywne (3.11) (3.12) do równań różniczkowych rozpatrywanego pola sprężonego

$$(3.13) \quad \sigma_{jL,j} + X_L = \varrho \ddot{u}_L, \quad D_{L,i} = 0.$$

W rezultacie tego postępowania otrzymamy układ czterech równań, w których jako nieznanne funkcje wystąpią trzy składowe wektora przemieszczenia u oraz potencjał elektryczny φ .

$$(3.14) \quad c_{ijkl} u_{k,Lj} + e_{kij} \varphi_{,kj} + \chi_L = \varrho \ddot{u}_L,$$

$$(3.15) \quad e_{iki} u_{k,ii} - \varepsilon_{ik} \varphi_{,ik} = 0.$$

Układ równań (3.14) (3.15) winien być uzupełniony warunkami brzegowymi; mechanicznymi i elektrycznymi. Te ostatnie dane są w postaci

$$(3.16) \quad \varphi = \Phi(x, t) \quad \text{na} \quad \partial B_1 \quad D_k n_k = -\sigma \quad \text{na} \quad \partial B_2,$$

gdzie

$$\partial B = \partial B_1 \cup \partial B_2, \quad \partial B_1 \cap \partial B_2.$$

Tutaj σ jest ładunkiem powierzchniowym. Znając rozwiązania (u_i, φ) równań (3.14) (3.15) wyznaczmy wektor pola elektrycznego $E_i = -\varphi_{,i}$ a z równań konstytutywnych (3.11) (3.12) naprężenia σ_{ij} i składowe wektora przesunięcia elektrycznego D_i . Polaryzację elektryczną P_i wyznaczmy ze związku

$$(3.17) \quad P_i = D_i - \varepsilon_0 E_i$$

Zważywszy na (3.6) i (3.9) przedstawimy wreszcie energię wewnętrzną U w postaci

$$(3.18) \quad U = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_i E_j$$

Ponieważ U jest nieujemnym skalarzem, to prawa strona równania (3.18) winna być formą kwadratową dodatnio określoną, co zabezpiecza stabilność rozwiązania.

Przedstawiona tu w sposób zwarty klasyczna teoria piezoelektryczności W. Voigta stanowi powiązanie elastodynamiki sprężystego ciała anizotropowego z quasistatycznym polem elektrycznym. Z teorii tej wynika, że efekty piezoelektryczne nie występują w kryształach o cechach centrosymetrycznych.

Poniżej podamy najważniejsze twierdzenia ogólne. Przede wszystkim podamy rozszerzoną na piezoelektryczność zasadę prac wirtualnych, przy wariacji stanu przemieszczenia i przesunięcia elektrycznego. Oto postać tego twierdzenia [10]

$$(3.19) \quad \delta(\mathcal{W} + \mathcal{E}) = \int_B (X_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_{\partial B} (p_i \delta u_i - \varphi \delta D_k n_k) dA,$$

gdzie

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} c_{ijkl} \int \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \int E_i E_j dV.$$

W przypadku szczególnym rzeczywistych przemieszczeń i przesunięć elektrycznych, otrzymamy z (3.19) podstawowe równanie energetyczne

$$(3.20) \quad \frac{d}{dt}(\mathcal{W} + \mathcal{E} + \mathcal{K}) = \int_B X_i v_i dV + \int_{\partial B} (p_i v_i - \varphi \dot{D}_k n_k) dA, \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} \rho \int_B v_i v_i dV$$

Równanie to może posłużyć do wyprowadzenia twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań układu równań (3.14) (3.15).

Twierdzenie Hamiltona, uogólnione na piezoelektryczność ma postać [10]

$$(3.21) \quad \delta \int_{t_2}^{t_1} (\mathcal{K} - \Pi) dt = 0,$$

gdzie

$$(3.22) \quad \Pi = \int_B (H - X_i u_i) dV - \int_{\partial B} (p_i u_i - \sigma \varphi) dA.$$

Twierdzenie o wzajemności prac przedstawia się w postaci splotowej jak następuje

$$(3.23) \quad \int_B X_i * u'_i dV + \int_{\partial B} (p_i * u'_i + D_k * \varphi' n_k) dA = \int_B X'_i * u_i dV + \int_{\partial B} (p'_i * u_i + D'_k * \varphi n_k) dA.$$

Tutaj wprowadzono oznaczenia

$$X_i * u'_i = \int_0^t X_i(\mathbf{x}, t - \tau) u'_i(\mathbf{x}, \tau) d\tau \text{ itd.}$$

Dotąd rozwiązano szereg problemów szczegółowych, odnoszących się do propagacji fal powierzchniowych Rayleigha, Love'a i Stoneleya i to dla rozmaitych klas kryształów [11] - [15] zagadnienia kwazistatycznego.



4. Sprzężenie fal sprężystych i elektromagnetycznych

W poprzednich rozważaniach mieliśmy do czynienia z oddziaływaniem kwazistatycznego pola z ruchem ciała sprężystego. Obecnie odrzucimy to zawężenie, rozpatrując zagadnienie dynamiczne, tak sprężyste jak i elektrodynamiczne.

Rozważmy układ równań elektrodynamiki Maxwella, zakładając że $\mathbf{M} = 0$, $\rho_e = 0$. Mamy

$$(4.1) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{I} + \dot{\mathbf{D}}$$

$$(4.2) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \dot{\mathbf{H}}$$

$$(4.3) \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

$$(4.4) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

Dodajmy do równań (4.1) - (4.8) związki konstytutywne

$$(4.5) \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$(4.6) \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$(4.7) \quad \mathbf{I} = \sigma \mathbf{E}$$

Wykonując na równaniu (4.2) operację rotacji oraz wykorzystując równanie (4.1) oraz (4.6) dochodzimy do równania falowego

$$(4.8) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2},$$

Wyraźmy teraz wektor \mathbf{D} przy pomocy związków konstytutywnych (3.12) dla zagadnienia kwazistatycznego. Otrzymamy równanie

$$(4.9) \quad E_{i,jj} - E_{j,ji} + \mu_0 \sigma \frac{\partial E_i}{\partial t} = -\mu_0 \left(e_{ikl} \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial t^2} + \varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 E_k}{\partial t^2} \right).$$

gdzie

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k})$$

W tych trzech równaniach różniczkowych funkcjami nieznanymi są u_i oraz E_i . Pozostałe trzy równania dostarczą nam równania ruchu

$$(4.10) \quad c_{ijkl} u_{k,lj} - e_{kij} E_{k,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i$$

Otrzymaliśmy zatem sześć równań różniczkowych z sześcioma nieznanymi funkcjami u_i , E_i . Rozpatrywany tu problem i jego rozwiązanie pochodzi od J. J. KAYME [16].

Przykłady wykonane przez J. J. Kayme dla kryształów klasy 42 m (dla ADP — amonium dihydrogen phosphate) wskazują na dyspersję i tłumienie fali płaskiej. Tłumienie to znika gdy $\sigma \rightarrow 0$, jednak pozostaje dyspersja fal. Widocznym też staje się z rozwiązane go przykładu, że odkształcenie ciała nieznacznie tylko modyfikuje fale elektromagnetyczne.

5. Termopiezoelektryczność

W poprzednich punktach założyliśmy, że proces termodynamiczny jest adiabatyczny.. Teraz odrzucimy to ograniczenie. Oznaczmy przez q wektor przepływu ciepła. Niech we wnętrzu ciała działa źródło ciepła o intensywności w . W wyniku działania ogrzania zewnętrznego i działania źródeł ciepła nastąpi przyrost temperatury Θ , równy różnicy $T - T_0$, gdzie T jest temperaturą absolutną a T_0 jest temperaturą stanu naturalnego, w którym brak naprężeń i odkształceń.

Poniżej przedstawiamy bilans energii [4]

$$(5.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i + U \right) dV = \int_V (X_i v_i + W) dV + \int_A (p_i v_i - q_i n_i) dA + \int_V E_i \dot{D}_i dV$$

oraz nierówność Clausiusa-Duhema

$$(5.2) \quad \dot{S} + \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} - \frac{W}{T} \geq 0$$

W bilansie energii (5.1) dostrzegamy (w porównaniu z wyrażeniem (3.1)) człony wyrażające moc niemechaniczną, przepływ ciepła poprzez powierzchnię ciała oraz energię generowaną wewnątrz ciała. W nierówności Clausiusa-Duhema (5.2) przez S oznaczono entropię. Przekształcając wyrażenie (5.1) w analogiczny sposób jak to zrobiono z (3.1), wprowadzając energię swobodną $F = U - ST$ oraz entalpię elektryczną $H = F - D_i F_i$ dochodzimy do następujących związków

$$(5.3) \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i}, \quad S = -\frac{\partial H}{\partial T}, \quad -\frac{q_i T_i}{T} > 0$$

Ostatnia nierówność jest spełniona przez prawo Fouriera przewodnictwa cieplnego

$$(5.4) \quad q_i = -k_{ij} T_{,j}$$

Rozwijając entalpię w szereg Taylora w otoczeniu stanu naturalnego

$$(5.5) \quad H = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{kij} \varepsilon_{ij} E_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_i E_j - \gamma_{ij} \varepsilon_{ij} \Theta - g_i E_i \Theta - \frac{c_s}{2T_0} \Theta^2,$$

i wykorzystując związki (5.3) dochodzimy do następujących związków konstytutywnych

$$(5.6) \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \gamma_{ij} \Theta - e_{kij} E_k,$$

$$(5.7) \quad S = \gamma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{c_s}{T_0} \Theta + g_i E_i,$$

$$(5.8) \quad D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + g_i \Theta + \varepsilon_{ik} E_k,$$

Równanie (5.6) można traktować jako związek Duhamela-Neumanna, rozszerzony na piezoelektryczność. Mamy tu 10 nowych stałych: γ_{ij} , g_i , c_s . Stała c_s jest ciepłem właściwym przy stałym odkształceniu.

Wstawmy związki konstytutywne (5.6) do równań ruchu, a związek (5.8) do równań Gaussa ($D_{i,i} = 0$). Otrzymujemy równania

$$(5.9) \quad c_{ijkl} u_{k,lj} - e_{kij} \varphi_{,kj} - \gamma_{ij} \Theta_{,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i,$$

$$(5.10) \quad e_{iki} u_{k,ii} - \varepsilon_{ik} \varphi_{,ki} + g_i \Theta_{,i} = 0.$$

Powyższe równania należy uzupełnić równaniem przewodnictwa cieplnego. Otrzymamy je przy wykorzystaniu bilansu entropii

$$(5.11) \quad T\dot{S} = -q_{i,t} + W$$

Biorąc pod uwagę związek konstytutywny (5.7), prawo Fouriera (5.4) oraz zakładając, że $\left| \frac{\Theta}{T_0} \right| \ll 1$ dochodzimy do liniowego równania przewodnictwa cieplnego

$$(5.12) \quad k_{ij}\Theta_{,ij} - c_e\dot{\Theta} - T_0(\gamma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - g_i\dot{\varphi}_{,i}) = -W.$$

Równania (5.9) oraz równanie (5.12) stanowią komplet równań termopiezoelektryczności. Obmyślono szereg ogólnych twierdzeń termosprężystości, takich jak twierdzenie energetyczne, twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań [17] zasadę prac wirtualnych, zasadę Hamiltona [18], twierdzenie o wzajemności prac [19]. Dotąd rozwiązano tylko nieliczne zagadnienia szczegółowe, dotyczące propagacji fal [20]. Pole elektromagnetyczne występujące w teorii R. D. MINDLINA [4] jest polem kwazistatycznym. Łatwo jednak uzyskać uogólnienie tej teorii przy rozpatrzeniu dynamicznego pola elektromagnetycznego.

W tym przypadku do dyspozycji mamy układ równań (przy $I = 0$)

$$(5.13) \quad E_{i,jj} - E_{j,ji} = -\mu_0\ddot{D}_i,$$

$$(5.14) \quad \sigma_{ji,j} + X_i = \rho\ddot{u}_i,$$

$$(5.15) \quad k_{ij}\Theta_{,ij} - c_e\dot{\Theta} - T_0(\gamma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} + g_i\dot{E}_i) = -W.$$

Do tych równań należy wprowadzić związki konstytutywne (5.6) i (5.8). Zauważmy, że wskutek naprężenia termicznego wszystkie fale są tłumione i ulegają dyspersji.

6. Klasyczna teoria piezoelektryczności w ujęciu R. A. Toupina

Równania różniczkowe piezoelektryczności Voigta otrzymać można również jako szczególny przypadek liniowej teorii dielektryków R. A. TOUPINA [24].

Rozdzielmy energię wewnętrzną na dwie części, na część pochodzącą od odkształcenia i polaryzacji oraz na energię pochodzącą od pola elektrycznego Maxwella

$$(6.1) \quad U = U^K(\epsilon_{ij}, P_i) + \frac{1}{2} \epsilon_0 \varphi_{,i} \varphi_{,i}$$

Zważywszy na (6.1) wyrazimy entalpię elektryczną w następującej postaci

$$(6.2) \quad H = U - D_i E_i = U^L(\epsilon_{ij}, P_i) - \frac{1}{2} \epsilon_0 \varphi_{,i} \varphi_{,i} + \varphi_{,i} P_i$$

Wykorzystajmy twierdzenie wariacyjne R. A. TOUPINA [24]

$$(6.3) \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_{B^*} (\delta K - \delta H) dV + \int_B (X_i \delta u_i + E_i^0 \delta P_i) dV + \int_{\partial B} p_i \delta u_i dA \right\} = 0.$$

Tutaj B jest obszarem ciała a $B^* = B \cup B'$, gdzie B' jest obszarem zewnątrz. E_i^0 jest zewnętrznym polem elektrycznym. W twierdzeniu (6.3) wariacji doznają przemieszczenia,

polaryzacja elektryczna oraz potencjał elektryczny. Zauważmy, że $U^L = U^L(\varepsilon_{ij}, P_i)$. Korzystając z definicji naprężenia σ_{ij} i lokalnej siły elektrycznej E_i^L , gdzie

$$(6.4) \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial U^L}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad E_i^L = - \frac{\partial U^L}{\partial P_i}$$

przedstawimy wirtualny przyrost entalpii elektrycznej w postaci

$$(6.5) \quad \delta H = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + (\varphi_{,i} - E_i^L) \delta P_i - \varepsilon_0 \varphi_{,i} \delta \varphi_{,i} + P_i \delta \varphi_{,i}$$

Wstawiając (6.5) do (6.3) i wykonując przepisane działania, dochodzimy do wyrażenia

$$(6.6) \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_B \left[\sigma_{ji,j} + X_i - \rho \ddot{u}_i \right] \delta u_i + (E_i^L - \varphi_{,i} + E_i^0) \delta P_i + (-\varepsilon_0 \varphi_{,ii} + P_{i,i}) \delta \varphi + \right\} dv + \\ - \int_{B'} \varepsilon_0 \varphi_{,ii} \delta \varphi dV + \int_{\partial B} [(p_i - \sigma_{ji} n_j) \delta u_i + n_i (\varepsilon_0 \varphi_{,i} - P_i \delta \varphi)] dA \Big\} = 0.$$

Ze względu na dowolność wariacji δu_i , δP_i , $\delta \varphi$ otrzymamy następujący układ równań różniczkowych

$$(6.7) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{ji,j} + X_i &= \rho \ddot{u}_i \\ E_i^L - \varphi_{,i} + E_i^0 &= 0 \\ -\varepsilon_0 \varphi_{,ii} + P_{i,i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{dla } x \in B$$

$$(6.10) \quad \varphi_{,ii} = 0 \quad \text{dla } x \in B'$$

z warunkami brzegowymi

$$(6.11) \quad \sigma_{ji} n_j = p_i$$

$$(6.12) \quad (-\varepsilon_0 \varphi_{,i} + P_i) n_i = 0$$

Równanie (6.8) nie występowało w klasycznej teorii W. Voigta. Jest to tzw. bilans sił intermolekularnych wprowadzony przez R. A. Toupin na podstawie rozważań nad równowagą sił elektrycznych.

Przyjmijmy energię $U^L \equiv U^L(\varepsilon_{ij}, P_i)$ w postaci formy kwadratowej, dodatnio zdefiniowanej

$$(6.13) \quad U^L = \frac{1}{2} c_{ijkl}^p \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} a_{ij}^e P_i P_j + f_{klj} \varepsilon_{ij} P_k$$

Z wykorzystania związków (6.4) mamy

$$(6.14) \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl}^p \varepsilon_{kl} + f_{klj} P_k$$

$$(6.15) \quad E_i^L = f_{ikl} \varepsilon_{kl} + a_{ik}^e P_k$$

R. D. MINDLIN [23] wykazał, że przedstawiona tu droga postępowania prowadzi do równań różniczkowych, identycznych z wyprowadzonymi przez W. Voigta.

7. Gradientowa teoria dielektryków R. D. Mindlina

Badania eksperymentalne wykazują, że efekt piezoelektryczny wystąpić może również w centrosymetrycznych kryształach. Teorię uwzględniającą wpływ gradientu polaryzacji

opracował R. D. MINDLIN [3], [23]. Głównym osiągnięciem tej teorii jest wprowadzenie nowego efektu elektryczno-mechanicznego, występującego tak w centrosymetrycznych jak i niecentrosymetrycznych kryształach.

Punktem wyjścia naszych rozważań jest wyrażenie na entalpię elektryczną z punktu 6, z tym jednak że U^L jest funkcją odkształcenia ε_{ij} , polaryzacji P_i oraz gradientu polaryzacji P_{ij} .

$$(7.1) \quad H = U^L(\varepsilon_{ij}, P_i, P_{i,j}) - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_{,i} \varphi_{,i} + \varphi_{,i} P_i$$

Wstawiając powyższe do zasady Hamiltona w ujęciu Toupinia ((6.3) z punktu 6), dochodzimy po wykonaniu przepisanych operacji i wprowadzeniu tensora

$$(7.2) \quad E_{ij} = \frac{\partial U^L}{\partial P_{j,i}},$$

do następującego wyrażenia

$$(7.3) \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \int_B [(\sigma_{ji,j} + X_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i + (E_{ji,j} + E_i^L - \varphi_{,i} + E_i^0) \delta P_i + (-\varepsilon_0 \varphi_{,ii} + P_{i,i}) \delta \varphi] dV + \\ - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_B \varepsilon_0 \varphi_{i,i} \delta \varphi dV + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_B [(p_i - \sigma_{ji} n_j) \delta u_i - E_{ji} n_i \delta P_i + (\varepsilon_0 |\varphi_{,i}| - P_i) n_i \delta \varphi] dA = 0.$$

Zauważmy, że występują tu dwa nowe człony: $E_{ji,j} \delta P_i$ w całce objętościowej oraz $E_{ji} n_j \delta P_i$ w całce powierzchniowej. Ze względu na dowolność wielkości wirtualnych δu_i , δP_i , $\delta \varphi$ otrzymamy następujące równania różniczkowe dielektryków

$$(7.5) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{ji,j} + X_i &= \rho \ddot{u}_i, \\ E_{ji,j} + E_i^L - \varphi_{,i} + E_i^0 &= 0, \\ -\varepsilon_0 \varphi_{,ii} + P_{i,i} &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ dla } x \in B$$

$$(7.6) \quad -\varepsilon_0 \varphi_{,ii} + P_{i,i} = 0,$$

$$(7.7) \quad \varphi_{,ii} = 0, \quad \text{dla } x \in B'$$

wraz z naturalnymi warunkami brzegowymi

$$(7.8) \quad p_i - \sigma_{ji} n_j = 0,$$

$$(7.9) \quad E_{ji} n_j = 0,$$

$$(7.10) \quad \varepsilon_0 |\varphi_{,i}| - P_i n_i = 0,$$

W stosunku do teorii klasycznej zmianie uległo równanie (7.5), które zostało rozszerzone o człon $E_{ji,j}$. Doszedł również nowy warunek brzegowy (7.9).

Obok warunku brzegowego (7.8) przyjąć możemy warunek brzegowy w przemieszczeniach. Podobnie, obok warunku (7.8) można przyjąć warunek dla polaryzacji. Wreszcie obok warunku (7.10) przepisać można potencjał φ na brzegu.

Rozwińmy U^L w otoczeniu stanu naturalnego, w którym odkształcenie i polaryzacja są równe zero a tensor E_{ij} przyjmuje wartość b_{ij}^0

$$(7.11) \quad U^L = b_{ij}^0 P_{j,i} + \frac{1}{2} a_{ij}^{\varepsilon, G} P_i P_j + \frac{1}{2} b_{ijkl}^{\varepsilon, P} P_{j,i} P_{i,k} + \frac{1}{2} c_{ijkl}^{\varepsilon, G} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \\ + d_{ijkl}^P P_{j,i} \varepsilon_{kl} + f_{ijk}^G P_i \varepsilon_{jk} + j_{ijk}^{\varepsilon} P_i P_{k,j},$$

Zważywszy na związki

$$(7.12) \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial U^L}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad E_i^L = -\frac{\partial U^k}{\partial P_i}, \quad E_{ij} = \frac{\partial U^L}{\partial P_{j,i}},$$

dochodzimy do równań konstytutywnych

$$(7.13) \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + f_{kij} P_k + d_{kl ij} P_{l,k},$$

$$(7.14) \quad -E_j^L = f_{jkl} \varepsilon_{kl} + a_{jk} P_k + j_{jkl} P_{l,k},$$

$$(7.15) \quad E_{ij} = d_{ijkl} \varepsilon_{kl} + j_{kij} P_k + b_{ijkl} P_{l,k} + b_{ij}^0.$$

Wstawienie związków (7.13) - (7.15) do równań (7.4) - (7.6) prowadzi do układu siedmiu równań różniczkowych, w których jako wielkości nieznanne wystąpią funkcje u_i , P_i , φ . Zauważmy, że wprowadzenie gradientu polaryzacji nie podwyższa rzędu równań różniczkowych.

Godnym uwagi jest fakt, że sprzężenie elektromechaniczne wystąpi w przypadku ciał centrosymetrycznych. W tym szczególnym przypadku jest $f_{ijk} = 0$, $j_{ijk} = 0$ gdyż nieparzyste tensory są równe zeru dla ciał centrosymetrycznych, podczas gdy stałe d_{ijkl} nie znikają. Ze związków (7.13) i (7.15) staje się widoczne, że stałe d_{ijkl} odgrywają rolę sprzężeń między polem elektrycznym i mechanicznym.

W przypadku ciała izotropowego równania konstytutywne przyjmą postać

$$(7.16) \quad \sigma_{ij} = c_{12} u_{k,k} \delta_{ij} + c_{44} (u_{i,j} + u_{j,i}) + d_{12} P_{k,k} \delta_{ij} + d_{44} (P_{i,j} + P_{j,i}).$$

$$(7.17) \quad E_{ij} = d_{12} u_{k,k} \delta_{ij} + d_{44} (u_{i,j} + u_{j,i}) + b_{12} P_{k,k} \delta_{ij} + b_{44} (P_{j,i} + P_{i,j}) + b_{77} (P_{j,i} - P_{i,j}) + b^0 \delta_{ij},$$

$$(7.18) \quad E_i^L = -a P_i$$

Podstawienie tych związków do równań różniczkowych (7.16) - (7.18) prowadzi do następującego układu trzech sprzężonych równań różniczkowych

$$(7.19) \quad c_{44} \nabla^2 u + (c_{12} + c_{44}) \text{grad div } \mathbf{u} + d_{44} \nabla^2 \mathbf{P} + (d_{12} + d_{44}) \text{grad div } \mathbf{P} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}},$$

$$(7.20) \quad d_{44} \nabla^2 \mathbf{u} + (d_{12} + d_{44}) \text{grad div } \mathbf{u} + (b_{44} + b_{77}) \nabla^2 \mathbf{P} + (b_{12} + b_{44} - b_{77}) \text{grad div } \mathbf{P} - a \mathbf{P} - \text{grad } \varphi + \mathbf{E}^0 = 0,$$

$$(7.21) \quad -\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi + \text{div } \mathbf{P} = \rho_e \quad \text{dla } x \in B,$$

$$(7.22) \quad \nabla^2 \varphi = 0, \quad \text{dla } x \in B'.$$

Do równań różniczkowych (7.19) - (7.22) dochodzą warunki brzegowe (7.8) - (7.10). Układ równań (7.19) - (7.22) jest złożony i trudny do rozwiązania w tej postaci.

W przypadku nieskończonego obszaru sprężystego znaczne uproszczenie równań otrzymamy przez dekompozycję występujących w nich wektorów na część potencjalną i część solenoidalną.

$$(7.23) \quad \mathbf{u} = \text{grad } \psi + \text{rot } \mathbf{H}, \quad \mathbf{P} = \text{grad } \chi + \text{rot } \mathbf{K}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{K} = 0,$$

$$(7.24) \quad \mathbf{X} = \rho (\text{grad } \vartheta + \text{rot } \boldsymbol{\eta}), \quad \mathbf{E}^0 = \text{grad } \tau + \text{rot } \boldsymbol{\xi}, \quad \text{div } \boldsymbol{\eta} = 0, \quad \text{div } \boldsymbol{\xi} = 0.$$

Wstawienie dekompozycji wektorów (7.23) - (7.24) do równań różniczkowych (7.19) - (7.22) sprowadza je do dwu niezależnych od siebie układów równań

$$(7.25) \quad \begin{aligned} c_{11} \square^2 \psi + d_{11} \nabla^2 \chi &= -\rho \vartheta, \\ d_{11} \nabla^2 \psi + (b_{11} \nabla^2 - a) \chi - \varphi &= -\tau, \\ \nabla^2 \chi - \varepsilon_0 \nabla^2 \varphi &= \rho_e, \end{aligned}$$

oraz

$$(7.26) \quad \begin{cases} c_{44} \square_2^2 H + d_{44} \nabla^2 K = -\rho \eta, \\ d_{44} \nabla^2 H + (\hat{b}_{44} \nabla^2 - a) K = \xi. \end{cases}$$

Tutaj wprowadziliśmy oznaczenia

$$c_{11} = c_{12} + 2c_{44}, \quad d_{11} = d_{12} + 2d_{44}, \quad b_{11} = b_{12} + 2b_{44}, \quad \hat{b}_{44} = b_{44} + b_{77}$$

$$\square_1^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \partial_t^2, \quad \square_2^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \partial_t^2, \quad c_1 = \left(\frac{c_{11}}{\rho} \right)^{1/2}, \quad c_2 = \left(\frac{c_{44}}{\xi} \right)^{1/2}.$$

Rozpatrzmy przypadek szczególny podłużnej fali płaskiej, propagującej się w nieskończonej przestrzeni sprężystej w kierunku osi x_1 . W tym przypadku jest

$$(7.27) \quad \psi \equiv \psi(x_1, t), \quad \varphi \equiv \varphi(x_1, t), \quad \chi \equiv \chi(x_1, t), \quad K = 0, \quad H = 0$$

Pozostają nam równania

$$(7.28) \quad \left(l_1^2 \partial_1^4 - \left(1 + \frac{b_{11}}{\hat{a} c_1^2} \partial_t^2 \right) \partial_1^2 + \frac{1}{c_1^2} \partial_t^2 \right) (\psi, \chi) = 0, \quad \varphi = \varepsilon_0^{-1} \chi$$

$$\hat{a} = a + \varepsilon_0^{-1} \quad l_1^2 = \frac{c_{11} d_{11} - d_{12}^2}{c_{11} \hat{a}} > 0$$

Dla fali harmonicznie zmiennej w czasie jest

$$(7.29) \quad (\psi, \chi, \varphi) = (\psi^0, \chi^0, \varphi^0) \exp[-i\omega t + ikx_1].$$

Tutaj $\psi^0, \chi^0, \varphi^0$ są stałymi (amplitudami) a $v = \omega/k$ jest prędkością fazową. Wstawiając (7.29) do (7.28) otrzymamy równanie charakterystyczne

$$(7.30) \quad l_1^2 k^4 + k^2(1 - \eta) - \sigma_1^2 = 0, \quad \eta = \frac{\omega^2 b_{11}}{\hat{a} c_{11}}, \quad \sigma_1 = \frac{\omega}{c_1},$$

z którego wywodzą się cztery pierwiastki

$$(7.31) \quad k_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{l_1 \sqrt{2}} \sqrt{(1 - \eta) \pm \sqrt{(1 - \eta)^2 + 4\sigma_1^2 l_1^2}}.$$

Interesują nas jedynie pierwiastki rzeczywiste, gdyż tylko te prowadzą do rzeczywistych prędkości fazowych

$$(7.32) \quad k_{1,2} = \pm k, \quad k_{1,2} = \frac{1}{l_1 \sqrt{2}} \sqrt{1 - \eta + \sqrt{(1 - \eta)^2 + 4\sigma_1^2 l_1^2}}.$$

W rezultacie otrzymamy fale

$$(7.33) \quad (\psi, \chi) = (\psi_+^0, \chi_+^0) \exp[-i\omega t + ikx_1] + (\psi_-^0, \chi_-^0) \exp[-i\omega t - ikx_1]$$

gdzie $v = \omega/k$. Zauważmy, że $k = k(\omega)$, co wskazuje na to, że fale ulegają dyspersji.

Dotąd rozwiązano nieliczne zagadnienia dynamiczne, przede wszystkim jednowymiarowe. [26] [27] [29].

Wróćmy do wyrażenia dla energii wewnętrznej. R. D. Mindlin wykazał, że słuszny jest związek

$$(7.34) \quad \int_{B^*} U dV = \frac{1}{2} \int_B (x_i u_i + E_i^0 P_i) dV + \frac{1}{2} \int_{\partial B} \{ (\sigma_{ji} u_i + E_{ji} P_i) n_j + (-\varepsilon_0 |\varphi_{,i}| + P_i x_i + b_{ij}^0 P_j) n_i \} dA.$$

Założmy teraz, że brak jest sił masowych i zewnętrznego pola elektrycznego ($X_i = 0$, $E_i^o = 0$) oraz że warunki brzegowe na powierzchni ∂B są jednorodne

$$(7.35) \quad \sigma_{ji}n_j = 0, \quad E_{ji}n_j = 0, \quad (-\varepsilon_0|\varphi_{,i}| + P_i)n_i = 0.$$

Wtedy z równania (7.34) pozostaje nam

$$(7.36) \quad \int_{B^*} U dV = \frac{1}{2} \int_{\partial B} n_i b_{ij}^0 P_j dA.$$

Jest to tzw. energia deformacji i polaryzacji.

Rozpatrzmy prosty przykład zagadnienia jednowymiarowego odnoszącego się do półprzestrzeni sprężystej $x_1 \geq 0$. Rozwiążmy jednorodny układ równań różniczkowych (z równań (7.19 - (7.21))

$$(7.37) \quad \begin{cases} c_{11} \partial_1^2 u_1 + d_{11} \partial_1^2 P_1 = 0, \\ d_{11} \partial_1^2 u_1 + b_{11} \partial_1^2 P_1 - a P_1 - \partial_1 \varphi = 0, \\ -\varepsilon_0 \partial_1^2 \varphi + \partial_1 P_1 = 0, \end{cases}$$

który rozwiązać należy przy uwzględnieniu jednorodnych warunków brzegowych

$$(7.38) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = c_{11} \partial_1 u_1 + d_{11} \partial_1 P_1 = 0, \\ E_{11} = d_{11} \partial_1 u_1 + b_{11} \partial_1 P_1 + b_0 = 0, \\ \varepsilon_0 (\partial_1 \varphi^+ - \partial_1 \varphi^-) + P_1 = 0, \quad \text{dla } x_1 = 0, \end{cases}$$

oraz

$$(7.39) \quad u_1 \rightarrow 0, \quad P_1 \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0 \quad \text{dla } x_1 \rightarrow \infty$$

Rozwiązanie tego zagadnienia w półprzestrzeni sprężystej ma postać

$$(7.40) \quad u_1 = u_1^0 e^{-x_1/l_1}, \quad P_1 = P_1^0 e^{-x_1/l_1}, \quad \varphi = \varphi^0 e^{-x_1/l_1},$$

gdzie

$$u_1^0 = -\frac{b_0 d_{11}}{l_1 \hat{a}}, \quad P_1^0 = \frac{b_0}{l_1 \hat{a}}, \quad \varphi^0 = -\frac{\varepsilon_0^{-1} b_0}{\hat{a}}.$$

Wielkości P_1 , φ i u_1 zanikają wykładniczo wewnątrz ciała. Energia deformacji i polaryzacji przyjmie wartość

$$(7.41) \quad U = -\frac{b_0^2}{2l_1 \hat{a}} < 0,$$

W rozpatrywanym tu przypadku braku sił masowych i zewnętrznego pola elektrycznego oraz przy uwzględnieniu jednorodnych warunków brzegowych, całkowita energia wewnętrzna wyraża się całką powierzchniową (7.36). Wyrażenie to jest równe zero, gdy przyjmujemy $b_0 = 0$. Wyrażenie (7.36) nazywamy energią powierzchniową deformacji i polaryzacji.

Na podstawie rozważań Tosi oraz Gemmera, Mac Rae i Gazisa [38] [39] traktować można energię deformacji i polaryzacji (7.36) jako tę część energii, którą dodać należy do energii więzów międzyatomowych aby otrzymać energię potrzebną do rozdzielania materiału wzdłuż powierzchni S .

Zauważmy, że w wyrażeniu na entalpię pominieliśmy człon $c_{ij}^0 \varepsilon_{ij}$. Jednak wprowadzenie

wstępnego odkształcenia nie zmieni stanu rzeczy. Wprowadzenie członu $\varepsilon_{ij}c_{ij}^0$ prowadzi do jednorodnego stanu naprężenia, które w ciele ograniczonym można usunąć przez nałożenie jednorodnego stanu odkształcenia.

Gradientowa teoria piezoelektryczności wyjaśnia również anomalie występujące w cienkich błonach sprężystych (efekt Meada [21] [22]), w pomiarze wielkości C^{-1} (C — pojemność elektryczna).

W ostatniej dekadzie gradientowa teoria piezoelektryczności R. D. Mindlina doznała znacznego rozwoju, szczególnie w zakresie zagadnień ustalonych. Uzyskano funkcje Greena dla wielkości u_i , P_i , φ w nieskończonej przestrzeni sprężystej. Obmyślono funkcje naprężeń, uogólniając funkcje Galerkina oraz Papkowicza-Neubera na zagadnienia piezoelektryczności. Rozpatrzono zagadnienie działania punktowego ładunku elektrycznego, umieszczonego w półprzestrzeni sprężystej. Wiele uwagi poświęcono badaniom energii deformacji i polaryzacji [25] - [29].

W ostatnich latach sporo uwagi poświęcono propagacji fal sprężystych w ośrodku piezoelektrycznym. Zanimujemy badania odnoszące się do fal płaskich, walcowych i sferycznych oraz fal powierzchniowych Rayleigh'a i Love'a. [30 - 32] [35].

W ostatnich latach opracowano również podstawy termo-piezoelektryczności [34] oraz rozwiązano szereg problemów ustalonej i nieustalonej termopiezoelektryczności takich jak fale termosprężyste, funkcje Greena, rozszerzone zagadnienie Lamba [35] - [37].

8. Sprzężenie fal mechanicznych i elektromagnetycznych w teorii gradientowej R. D. Mindlina

W rozważaniach naszych, dotyczących gradientowej teorii dielektryków, traktowaliśmy pole elektromagnetyczne jako kwazistatyczne pole elektryczne. Obecnie uwolnimy się od tego założenia i rozpatrywać będziemy pełny układ równań Maxwella (przy $\mathbf{I} = 0$, $\mathbf{M} = 0$).

$$(8.1) \quad \text{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A},$$

$$(8.2) \quad \mathbf{E} = -\text{grad} \varphi - \dot{\mathbf{A}}, \quad \text{div} \mathbf{D} = \rho_e.$$

Tutaj φ jest skalarnym potencjałem elektrycznym, \mathbf{A} wektorowym potencjałem magnetycznym. Równania (8.1) (8.2) wraz ze związkami konstytutywnymi

$$(8.3) \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H},$$

są punktem wyjścia dalszych rozważań. W rezultacie eliminacji wewnątrz równań (8.1) - (8.2) otrzyma się następujące równania falowe

$$(8.4) \quad (c^2 \nabla^2 - \partial_t^2) \varphi - c^2 \varepsilon_0^{-1} \text{div} \mathbf{P} + c^2 \varepsilon_0^{-1} \rho_e = 0,$$

$$(8.5) \quad (c^2 \nabla^2 - \partial_t^2) \mathbf{A} + \varepsilon_0^{-1} \dot{\mathbf{P}} = 0, \quad \text{dla } \mathbf{x} \in B, \quad c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2},$$

oraz

$$(8.6) \quad \left. \begin{aligned} (c^2 \nabla^2 - \partial_t^2) \varphi &= 0 \\ (c^2 \nabla^2 - \partial_t^2) \mathbf{A} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{dla } \mathbf{x} \in B'$$

Zauważmy, że równanie bilansu sił intermolekularnych

$$(8.7) \quad E_{j1,j} + E_1^T + E_1 + E_1^0 = 0,$$

jest sprzężone z równaniem (8.5) i (8.4) a to poprzez człon $E_i = -\varphi_{,i} - \dot{A}_i$. W przypadku ciała izotropowego otrzymamy następujący układ równań

$$(8.8) \quad c_{44}\nabla^2\mathbf{u} + (c_{11} + c_{44})\text{grad div}\mathbf{u} + d_{44}\nabla^2\mathbf{P} + (d_{12} + d_{44})\text{grad div}\mathbf{P} + \mathbf{X} = \rho\ddot{\mathbf{u}},$$

$$(8.9) \quad d_{44}\nabla^2\mathbf{u} + (d_{12} + d_{44})\text{grad div}\mathbf{u} + (b_{44} + b_{77})\nabla^2\mathbf{P} + \\ + (b_{12} + b_{44} - b_{77})\text{grad div}\mathbf{P} - a\mathbf{P} - \text{grad}\varphi - \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{E}^0 = 0,$$

$$(8.10) \quad (c^2\nabla^2 - \partial_t^2)\varphi - c^2\varepsilon_0^{-1}\text{div}\mathbf{P} + c^2\varepsilon_0^{-1}\varrho_e = 0,$$

$$(8.11) \quad (c^2\nabla^2 - \partial_t^2)\mathbf{A} + \varepsilon_0^{-1}\dot{\mathbf{P}} = 0.$$

Otrzymaliśmy nader złożony układ równań sprzężonych. Układ tych równań podany został przez R. D. Mindlina [32]. Badania tego autora [32] wykazały, że w przypadku harmonicznym fal poprzecznych w kuli wpływ sprzężenia jest nieznaczny i że stosowana może być teoria kwazistatyczna.

Poniżej podajemy uogólnione równania sprzężonej termopiezoelktryczności

$$(8.12) \quad c_{44}\nabla^2\mathbf{u} + (c_{12} + c_{44})\text{grad div}\mathbf{u} + d_{44}\nabla^2\mathbf{P} + (d_{12} + d_{44})\text{grad div}\mathbf{P} + \\ + \mathbf{X} = \rho\ddot{\mathbf{u}} + \gamma\text{grad}\Theta,$$

$$(8.13) \quad d_{44}\nabla^2\mathbf{u} + (d_{12} + d_{44})\text{grad div}\mathbf{u} + (b_{44} + b_{77})\nabla^2\mathbf{P} + \\ + (b_{12} + b_{44} - b_{77})\text{grad div}\mathbf{P} - a\mathbf{P} - \text{grad}\varphi - \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{E}^0 = \eta\text{grad}\Theta,$$

$$(8.14) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\varphi - \varepsilon_0^{-1}\text{div}\mathbf{P} + \varepsilon_0^{-1}\varrho_e = 0,$$

$$(8.15) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\mathbf{A} - \varepsilon_0^{-1}c^{-2}\dot{\mathbf{P}} = 0,$$

$$(8.16) \quad k\nabla^2\Theta - c_e\dot{\Theta} - T_0(\gamma\dot{u}_{k,k} + \eta\dot{P}_{k,k}) = -W.$$

W niniejszym artykule przeglądowym przedstawiliśmy modele piezoelektryczności i termopiezoelktryczności, poprzez najprostszy model Voigta aż do złożonego modelu dynamicznej termopiezoelktryczności. Widocznym jest, że wraz z uogólnieniem modelu rosną trudności matematyczne rozwiązania układu równań. Jednocześnie jednak bardziej złożone modele wyjaśniają szereg anomalii i pozwalają na wykrycie nowych zjawisk.

Badania pól sprzężonych prowadzą do nowych interdyscyplinarnych dziedzin nauki i tworzą pole współpracy badaczy reprezentujących różne dziedziny, mechaników, akustyków, termodynamików i elektrodynamików.

Rozwój pól sprzężonych jest charakterystycznym trendem we współczesnej mechanice ciała stałego.

Literatura cytowana w tekście

1. W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Treubner, Leipzig, (1910).
2. R. A. TOUPIN, *The elastic dielectric*, J. Rat. Mech. Analysis, **55** (1956), 849.
3. R. A. MINDLIN, *Polarization gradient in elastic dielectrics*, Int. J. Solids Structures, **4** (1968), 637.
4. R. D. MINDLIN, *On the equations of motion of piezoelectric crystals*, Problems of Continuum Mechanics. SIAM Philadelphia Pennsylvania, 1961.

5. H. G. LIPPMANN, *Ann. Chim.* **29** (1881), 145.
6. J. and P. CURIE, *Compte Rendus.* **93** (1884), 1137.
7. M. P. WOLAROWICH, G. A. SOBOLEV, *Piezoelectric metod of geophysical prospecting of quartz* (w jez. rosyjskim). Izd. Nauka, Moscow, 1969.
8. J. A. STRATTON, *Electromagnetic theory*, Mc Graw-Hill, New York, 1969.
9. H. F. TIERSTEN, *The radiation and confinement of electromagnetic energy accompanying the oscillations of piezoelectric crystal plates*. Rec. Advances in Engineering Science. Part. I. Ed. A. C. Eringen, Gordon and Breach Science Publ. New York 1970.
10. H. F. TIERSTEN, *Linear piezoelectric plate vibrations*, Plenum Press, New York 1969.
11. J. L. BLEUSTEIN, J. ACCOUST, Soc. of America, **45** (1969), 614.
12. D. S. DRUMHELLER, A. KALNIS, J. Acoust. Soc. Of America, **47** (1970) 1343.
13. J. L. BLEUSTEIN, *Applied Physics Letters*, **13** (1968), 412.
14. P. M. BRANKOW, C. F. LONG, *Acta Mechanika*, **3** (1966), 13.
15. R. MEIR, K. SCHUSTER, *Annalen der Physik*, **11** (1933), 397.
16. J. KAYME, *Conductivity and viscosity effects on wave propagation in piezoelectric crystals*. J. Acoust. Soc. Amer. **26** (1949), 990.
17. W. NOWACKI, *Some general theorems of thermopiezoelectricity*, J. of Thermal Stresses, **1** (1978), 171.
18. H. PARKUS, *Über die Erweiterung des Hamilton'schen Principes auf thermoelastische Vorgänge*. Federhofer-Girkmann Festschrift Wien, 1950 Verlag F. Deuticke.
19. W. NOWACKI, *A reciprocity theorem for coupled mechanical and thermoelastic fields in piezoelectric crystals*. Proc. Vibr. Problems **6**, 1 (1965).
20. A. V. PAL, *Surface waves in a thermo-piezoelectric medium of monoclinic symmetry*, Czech. J. Phys., **8**, 29 (1969), 1271.
21. C. A. MEAD, *Electron mechanism in thin insulating films*, Phys. Rev., **128** (1962), 2088.
22. C. A. MEAD, *Electron transport in thin insulating films*, Proc. Int. Sym. on Basic Problems in Thin Film Physic. Ruprecht. Gottingen (1966), 674.
23. R. D. MINDLIN, *Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics*. J. of Elasticity, **2** 44 (1962), 217.
24. R. A. TOUPIN, *A dynamical theory of elastic dielectrics*, Int. J. Eng. Sci., **1** (1963), 101.
25. R. D. MINDLIN, *Continuum and lattice theories of influence of electromechanical coupling on capacitance of thin dielectric fields*, Int. J. Solids Structures, **5** (1969) p. 1197.
26. J. SCHWARTZ, *Solutions of the equations of equilibrium of elastic dielectrics: stress functions, concentrated force, surface energy*, Int. J. Solids Structures, **5** (1969), 1209.
27. P. F. GOU, *Effects of gradient of polarization on stress-concentration at cylindrical hole in an elastic dielectric*, Int. J. Solids Structures, **7** (1971), 1467.
28. K. L. CHOWDHURY and P. G. GLOCKNER, *Point charge in the interior of an elastic dielectric half space* Int. J. Solids Structures, **15** (1977), 481.
29. A. ASKAR, P. C. Y. LEE and A. S. CAKMAK, *The effect of surface and discontinuity on the surface energy and other induced fields in elastic dielectrics with polarization gradient*, Int. J. Solids Structures, **7** (1971), 523.
30. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Love's waves in elastic isotropic dielectrics*, Bull. Acad. Polon. Sci (w druku).
31. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Surface waves in piezoelectric materials of classe 42 m*, Bull. Acad. Polon. Sci (w druku).
32. R. D. MINDLIN, *Electromagnetic radiation from a vibrating, elastic sphere*, Int. J. Solids Structures, **10** (1974), 1307.
33. K. L. CHOWDHURY, P. G. GLOCKNER, *On thermoelastic dielectrics*, Int. J. Solids Structures, **13** (1977), 1173.
34. K. L. CHOWDHURY, M. EPSTEIN, P. G. GLOCKNER, *On the thermodynamics of nonlinear elastic dielectrics*, Departmental Report No 119, Dep. of Mech. Engeering. The University of Calgary, March 1978.
35. J. P. NOWACKI, P. G. GLOCKNER, *Some dynamical problems of thermoelastic dielectric*, Int. J. Solids Structures, 1978 (w druku).

37. J. P. NOWACKI, P. G. GLOCKNER, *Propagation of waves in the interior of a thermoelastic dielectric half-space*, Int. J. Solids Structures (1981).
38. L. H. GLOCKNER, A. U. RAE and C. D. HARTMAN „(110) Nickel surface”. J. Appl. Phys. 32 (1961), 2432.
39. R. A. GOUPIN and D. C. GAZIS, *Surface effects and initial stress in continuum and lattice models in crystals*, In Lattice Dynamics, R. F. Wallis Editor, Pergamon Press, Oxford 1964, 597.

Резюме

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСТВА

Работа посвящена дискуссии некоторых математических моделей пьезоэлектричества и пьезо-термоэлектричества. Начиная с модели В. Фойгта, перечислено более общие случаи в которых электромагнитические и деформационные поля сопряжены. Рассмотрено квазистатическую модель термопьезоэлектричества и довольно общую модель Миндлина, в которой учтено влияние градиента поляризации в упругом диэлектрике.

Summary

MATHEMATICAL MODELS OF A PHENOMENOLOGICAL PIEZOELECTRICITY

The purpose the paper is to discuss mathematical models of piezo-thermoelectricity. Starting from W. Voigt quasistatic model we pass to more general case in which there is a coupling between the electromagnetic and deformation fields. The quasistatic model of the thermopiezoelectricity and general model introduced by Mindlin, in which the effect of a polarization gradient in elastic dielectrics is taken into account, have been also considered.

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 października 1981 roku

A MINIMUM-PRINCIPLE FOR STRESS-STATE IN ELASTIC-PLASTIC PLATES AND THE SYSTEMATICAL GENERATION OF APPROPRIATE PLATE-MODELS¹⁾

DIETER WEICHERT

*Institut für Mechanik, Ruhr-Universität
4630 Bochum-1, West-Germany*

1. Introduction

In this paper we treat the initial boundary-value problem of elastic-plastic plates subjected to arbitrary dead-loadtype loading histories. This problem differs from analogous purely elastic problems by the fact that even under the assumption of certain shape of strain-distribution over the thickness of the plate, such as Kirchhoff-Love-hypothesis[1], no prediction about stress-distribution over the thickness of the plate can be made as no one-to-one correspondance between strains and stresses holds. So here we treat this problem genuinely as three-dimensional problem constrained by certain geometrical and statical conditions which have a distinct meaning in theory of plates and in theory of plasticity, respectively. We show, that well known Kirchhoff plate-theory is a special case of the herein presented concept. For the construction of a minimum-principle for the state of stress in the plate we make use of a recently derived minimum-principle for general three-dimensional body [2], based on the formulation of constitutive relations by means of convex analysis [3, 4] and internal parameters [5] in order to describe elastic-perfectly plastic and elastic-linear hardening material behaviour by the same mathematical model.

In the last chapter a numerical illustration of the presented method is given for the case of a proportionally loaded elastic-perfectly plastic square plate.

2. The three-dimensional initial boundary-value problem. Local formulation of the problem

A body of volume Ω as subregion of product-space of three-dimensional Euclidean space R^3 and space T of time t , defined on the intervall $T = [0, \infty)$, with sufficiently regular boundary $\partial\Omega$, is subjected to external agencies $a = a(x)$, described by the set $[f^*(x) \in \Omega, P^*(x) \in \partial\Omega_s, u^*(x) \in \partial\Omega_k]$, where $f(x)$, $u(x)$ and $p(x)$ denote three-dimensional vectors of volume-forces, displacements and surface-forces, respectively. $\partial\Omega_k$ and $\partial\Omega_s$,

¹⁾ This paper was elaborated during a stay at the Institut of Mechanics, University of Warsaw and the author wishes to express his gratitude to Professor dr hab. Czesław Woźniak for invitation and permanent support.

denote disjoint parts of $\partial\Omega$ where kinematical and statical boundary conditions are prescribed, resp., Considering quasi-static deformation processes in the range of small deformations for conservative external agencies $a(x)$, statical and kinematical field-equations are given by:

$$\text{Div } \sigma + f^* = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2.1)$$

$$n \cdot \sigma - P^* = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_s,$$

$$\varepsilon - \text{Grad}_s u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.2)$$

$$u = u^* = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_k$$

Div and Grad_s denote divergence-operator and symmetric part of gradient-operator, $\sigma(x)$, $\varepsilon(x)$ are elements of space τ_6^2 of symmetric, two-dimensional tensors with 6 independent components, n denotes outer normal unit-vector on $\partial\Omega$. Prescribed quantities are indicated by upper star. The problem consists of determining $\sigma\varepsilon$ and u for the entire deformation-process. Constitutive relations are described by use of internal parameters [5], such that elastic-perfectly plastic and elastic-linear hardening material behaviour can be treated by the same mathematical methods. Assuming, that entire strain $\varepsilon(x)$ can be additively decomposed into purely elastic part $\varepsilon^e(x)$ and purely plastic part $\varepsilon^p(x)$, generalized stress-, generalized elastic strain- and generalized plastic strain-tensors are defined, respectively, by the sets $s(x) = [\sigma, \pi]$, $e^e(x) = [\varepsilon^e, \omega]$, $e^p(x) = [\varepsilon^p, k]$, where internal statical, elastic and plastic parameters $\pi(x)$, $\omega(x)$ and $k(x)$ are elements of vector-space τ_r^1 with r independent components. It can be shown [2], that for vanishing $\omega(x)$ and $k(x)$ at time $t = 0$, entire generalized strain e is given by $e = [\varepsilon^e + \varepsilon^p, 0]$, defined on Ω . Assuming the existence of a convex, lower semi-continuous elastic strain energy-density $\psi(e^e)$ and introducing bilinear form (s, e^e) as inner product $s \dots e^e$ defined by

$$(2.3) \quad s \dots e^e = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e + \pi_n \omega_n \quad i, j \in [1, 2, 3], \quad n \in [1, 2, \dots, r]$$

where ψ and (\dots) are mappings of product-space $\tau_6^2 \times \tau_r^1$ onto R^1 , defined on Ω , the following three relations are equivalent conditions for s and e^e to satisfy elastic material behaviour:

$$\left. \begin{aligned} (2.4) \quad & e^e \in \partial\psi^*(s), \\ (2.5) \quad & s \in \partial\psi(e^e), \\ (2.6) \quad & \psi(e^e) + \psi^*(s) - (s, e^e) \geq 0, \end{aligned} \right\} \text{in } \Omega$$

with polar elastic energy-density $\psi^*(s)$ defined by:

$$(2.7) \quad \psi^*(s) = \sup_{e^e \in \tau_6^2} [(s, e^e) - \psi(e^e)] \quad \text{in } \Omega,$$

$\partial(\dots)$ denotes subdifferential of the considered quantity. In the herein treated case of linear-elastic material behaviour (2.4 - 2.6) degenerate to

$$(2.8) \quad e^e = G \dots s \hat{=} [\varepsilon_{ij}^e, \omega_n] = [\sigma_{kl} L_{ijkl}, \pi_m \dot{Z}_{mn}], \quad i, j, k, l \in [1, 2, 3],$$

$$(2.9) \quad s = G^{-1} \dots e^e \hat{=} [\sigma_{ij}, \pi_n] = [\varepsilon_{kl}^e L_{ijkl}^{-1}, \omega_m \dot{Z}_{mn}^{-1}] \quad m, n \in [1, 2, \dots, r],$$

$$(2.10) \quad \frac{1}{2} e^e \dots G^{-1} \dots e^e + \frac{1}{2} s \dots G \dots s - s \dots e^e = 0.$$

L and \dot{Z} denote here positive definit matrices with known constant coefficients of elastic and hardening-coefficients, respectively, G is defined as the set $[L, \dot{Z}]$, upper index „-1” denotes inverse of the considered matrix.

Analogously plastic part of constitutive relations is formulated: If $\varphi(s)$ denotes plastic potential, defined as convex and lower semi-continuous indicator-function of convex closed region E_t in space $\tau_6^2 \times \tau_1^1$ of generalized stresses s , normality-rule for rate of generalized plastic strain \dot{e}^p , used in this paper as plastic flow-law, may be expressed by the following relations, each equivalent to the other:

$$\left. \begin{aligned} (2.11) \quad & \dot{e}^p \in \partial\varphi(s) \\ (2.12) \quad & s \in \partial\varphi^*(\dot{e}^p) \\ (2.13) \quad & \varphi(s) + \varphi^*(\dot{e}^p) - (\dot{e}^p, s) \geq 0 \end{aligned} \right\} \text{ in } \Omega$$

where in (2.13) equality holds if plastic flow-law and yield-condition, demanding that every admissible state of stress s is in the interior or on the boundary of E_t , are fulfilled. Here, superposed dot denotes time-derivative, (\dot{e}^p, s) denotes according to elastic part of constitutive relations, bilinear form $\dot{e}_{ij}^p \sigma_{ij} + k_n \pi_n$, $i, j \in [1, 2, 3]$, $n \in [1, 2, \dots, r]$. $\varphi^*(\dot{e}^p)$ is polar plastic potential, defined by:

$$(2.14) \quad \varphi^*(\dot{e}^p) = \sup_{s^* \in \tau_6^2} [(\dot{e}^p, s^*) - \varphi(s^*)] \quad \text{in } \Omega$$

Reformulation of the problem, minimum principle for stresses. Assumption: External agencies $a(x)$ are represented by the given field-quantities σ^0 , ε^0 and u^0 such that:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \text{Div } \sigma^0 + f^* &= 0 & \text{in } \Omega, \\ n \cdot \sigma^0 - p^* &= 0 & \text{on } \partial\Omega_s, \end{aligned}$$

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \varepsilon^0 - \text{Grad}_s u^0 &= 0 & \text{in } \Omega, \\ u^0 - u^* &= 0 & \text{on } \partial\Omega_k, \end{aligned}$$

$$(2.17) \quad \varepsilon^0 - L \cdot \sigma^0 = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Physically, σ^0 and u^0 represent the solution of an analogous purely elastic problem. Defining statically and kinematically admissible generalized stresses s^s and s^k , resp., by the definitions

$$(2.18) \quad \begin{aligned} s^k &= [\sigma^k, \sigma] := \{s \in \tau_6^2 / \sigma = L \cdot^{-1} \text{Grad}_s u \quad \text{in } \Omega, u = 0 \text{ on } \partial\Omega_k\} \\ s^s &= [\sigma^s, \pi] := \{s \in \tau_6^2 / \text{Div } \sigma = 0 \quad \text{in } \Omega, n \cdot \sigma = 0 \text{ on } \partial\Omega_s\} \end{aligned}$$

the entire problem is reformulated by: Determine s , e and e^p such that:

$$(2.19) \quad \left. \begin{aligned} s &= s^0 - s^s \\ e &= G \cdot (s^0 + s^k) \\ \dot{e}^p &= G \cdot (\dot{s}^s + \dot{s}^k) \in \partial\varphi(s^0 - s^s) \end{aligned} \right\} \text{ in } \Omega$$

This, however, is equivalent [2] to the minimization of the functional $\lambda(s^s, s^k)$, defined by

$$(2.20) \quad \lambda(s^s, s^k) = \varphi(s^0 - s^s) + \varphi^*(G \cdot (\dot{s}^s + \dot{s}^k)) - (G \cdot (\dot{s}^s + \dot{s}^k), s^0 - s^s) \geq 0$$

according to ((2.11) - (2.13), (2.20)).

By completion of space $c_{\delta+r}^{\infty}$ of smooth tensorfields of generalized stresses s with respect to the scalar-product

$$(2.21) \quad \langle s, s^2 \rangle_G = \int_{\Omega} s^{(1)} \dots G \dots s^{(2)} e^{-t} dx, \quad s^1, s^2 \in c_{\delta+r}^{\infty}$$

in [2] Hilbert-space H of generalized stress-fields s is constructed. Global formulation of plastic part of constitutive relations is then given by

$$(2.22) \quad \Phi(s) + \Phi^*(G^{-1} \dot{e}^p) - \langle G^{-1} \dot{e}^p, s \rangle_G \geq 0,$$

where global plastic potential Φ and polar potential Φ^* are defined by

$$(2.23) \quad \Phi(s) = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_c(s) e^{-t} dx, \quad s \in H$$

$$\varphi_c(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s \in E_t, \quad E_t \subset H, \\ +c & \text{if } s \notin E_t, \quad c \in R^1, \quad c > 0 \end{cases}$$

$$(2.24) \quad \Phi^*(G^{-1} \dot{e}^p) = \sup_{s^* \in H} [\langle G^{-1} \dot{e}^p, s^* \rangle_G - \Phi(s^*)] \quad \text{in } \Omega$$

As G is a constant positiv multiplier, here and in the following space of generalized strains is identified with Hilbert-space of generalized stress by use of the isomorphism $e = G \dots$. Analogously to (2.11) - (2.13), (2.22) is equivalent to:

$$(2.25) \quad \left. \begin{aligned} G^{-1} \dots \dot{e}^p &= \dot{s}^s + \dot{s}^k \in \partial \Phi(s) \\ s &\in \partial \Phi^*(\dot{s}^s + \dot{s}^k) \end{aligned} \right\} \quad \text{in } \Omega$$

Making use of the assumption of given purely elastic solution σ^0, u^0 and of orthogonality of kinematically and statically admissible stresses s^k, s^s with respect to scalar-product (2.21), stated by

$$(2.26) \quad \langle s^k, s^s \rangle_G = 0 \quad \text{in } \Omega; \quad s^k \in H_k \subset H \supset H_s \in S^s; \quad H_k \perp H_s,$$

minimum-principle (2.20) is now stated globally: The convex functional \mathcal{A} defined by

$$(2.27) \quad \mathcal{A}(s^k, s^s) = \Phi(s^0 - s^s) + \Phi^*(\dot{s}^s + \dot{s}^k) - \langle s^0 - s^s, \dot{s}^s + \dot{s}^k \rangle_G \quad \text{in } \Omega$$

assumes the minimum equal to zero for the solution $[\hat{s}^k, \hat{s}^s]$. However, as $\mathcal{A}(s^k, s^s)$ is not strictly convex, solution may be not unique. If we resign from determination of \hat{s}^k , such that rate of plastic strain $\dot{e}^p = G \dots (\hat{s}^s + \hat{s}^k)$ and as consequence entire state of strain cannot be determined, strictly convex functional $\mathcal{A}_0(s^s)$, defined by

$$(2.28) \quad \mathcal{A}_0(s^s) = \Phi(s^0 - s^s) + \Phi_0^*(\dot{s}^s) - \langle s^0 - s^s, \dot{s}^s \rangle_G \geq 0 \quad \text{in } \Omega$$

can be constructed [2]. Lower index „0” denotes restriction of the domains of \mathcal{A} and Φ^* to elements of H_s . Solution \hat{s}^s of the problem is then uniquely obtained by minimization of \mathcal{A}_0 , if any solution exists. As in case of elastic-linear hardening material behaviour region E_t of admissible generalized stresses is constant, (2.28) can be reduced to the minimization of

$$(2.29) \quad \mathcal{A}_0(s^s) = \sup_{s^s \in s^0 - E_t \cap H_s} \langle s^s - s^{s*}, \dot{s}^s \rangle_G;$$

3. The initial boundary-value problem of elastic-plastic plates. Systematical generation of plate-models from three-dimensional theory

A three-dimensional body of volume Ω , given by midsurface Γ as subregion in $R^2 \times T$, parametrized by rectangular coordinates x_1, x_2 and time-coordinate $t \in T = [0, \infty)$, with sufficiently regular boundary $\partial\Gamma$ and constant extension in x_3 -direction with $x_3 \in [-h, +h]$, is called „plate”, if $2h$ is much smaller than characteristic length L as measure of extension of Γ in $x_1 - x_2$ -plane. $\partial\Gamma$ consists of parts $\partial\Gamma_k$ and $\partial\Gamma_s$, where kinematical and static boundary-conditions are prescribed. For the moment we assume $\partial\Gamma_s \cap \partial\Gamma_k = \emptyset$, though in the sequel of the paper we shall weaken this assumption. Forces acting on upper and lower planes Γ^+, Γ^- , resp., parallel to Γ at distance h , will be treated as forces acting on Γ , kinematical conditions will only be prescribed on $\partial\Gamma_k$, not on Γ .

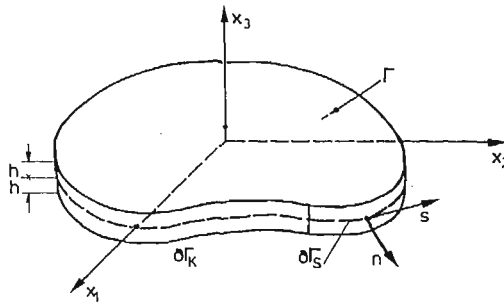


Fig. 1

In order to obtain a two-dimensional minimum-principle for state of stress in the plate according to (2.29), we define two-dimensional representatives of all three-dimensional quantities used in chapter 2. In general, they may be introduced in several manners: By use of multilayer-model, where the three-dimensional body is represented by a finite number of layers, such that to each three-dimensional field-quantity in the body for each layer a two-dimensional representative of the considered quantity is assigned [6, 7]. Here we use polynomial representatives defined in the following way: Be $f(x)$ an arbitrary smooth scalar-, vector- or tensorvalued function defined on Ω . We expand $f(x)$ into a Taylor-series with respect to midsurface Γ up to order q such that two-dimensional coefficients $F(x_1, x_2, t)$ of Taylor-expansion are defined by:

$$(3.1) \quad F^{(k)}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{\partial^{k-1} f(x)}{(\partial x_3)^{k-1}} \right|_{x_3=0} \quad k \in [1, 2, \dots, q]$$

This represents a mapping of the domain $\mathcal{A}_3(f) \subset C_3^\infty$, where C_3^∞ denotes the space of smooth three-dimensional functions f onto the domain $\mathcal{A}_2(F) \subset (C_2^\infty)^q$, where $(C_2^\infty)^q$ denotes the product-space of smooth two-dimensional functions of power q . The inverse relation, given by

$$(3.2) \quad f(x) = \sum_{k=1}^q F^{(k)}(x_1, x_2, t) x_3^{k-1} \quad k \in [1, 2, \dots, q],$$

however maps $\mathcal{A}_2(F)$ only onto a subdomain $\mathcal{A}'_3 \subset \mathcal{A}_3$. In our approach we take only elements of \mathcal{A}'_3 into account and interpret this restriction as an imposition of constraints according to [6] on the three-dimensional body. This restriction is the starting-point for the construction of plate-theories characterized by the parameter q .

Here we introduce namely two-dimensional representatives \mathbf{n} , \mathbf{q} , \mathbf{u} of three-dimensional generalized stresses s , generalized strains e and displacements u , defined by the sets:

$$\mathbf{n} = [N^q, \pi^q]; \quad \mathbf{q}^e = [Q^q, \Theta^q]; \quad \mathbf{q}^p = [P^q, K^q], \quad \mathbf{U} = [u^q]$$

with the definitions:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} N^q &= [N_{ij}^{(1)}, N_{ij}^{(2)}, \dots, N_{ij}^{(q)}], & \Pi^q &= [\Pi_n^{(1)}, \Pi_n^{(2)}, \dots, \Pi_n^{(q)}] \\ Q^q &= [Q_{ij}^{(1)}, Q_{ij}^{(2)}, \dots, Q_{ij}^{(q)}], & \Theta^q &= [\Theta_n^{(1)}, \Theta_n^{(2)}, \dots, \Theta_n^{(q)}] \\ P^q &= [P_{ij}^{(1)}, P_{ij}^{(2)}, \dots, P_{ij}^{(q)}], & K^q &= [K_n^{(1)}, K_n^{(2)}, \dots, K_n^{(q)}] \\ U^q &= (u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(q)}) \end{aligned}$$

with $i, j \in [1, 2, 3]$, $n \in [1, 2, \dots, r]$; q : order of Taylor-expansion.

The two-dimensional minimum-principle. Inserting so defined two-dimensional quantities into scalar-product (2.21) and using the multiplier $^b G$ such that $G^{-1} e(q^q) \in H$, we obtain:

$$(3.4) \quad \langle\langle \mathbf{n}, \bar{\mathbf{n}} \rangle\rangle_G = \langle\langle \mathbf{n}, \mathbf{q} \rangle\rangle = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \mathbf{m} \mathbf{q} e^{-t} dx_1 dx_2 dt,$$

with the definitions

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{n} \mathbf{m} \mathbf{q} &= \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q (N_{ij}^{(k)} m_{kl} Q_{ij}^{(l)} + \Pi_n^{(k)} m_{kl} \Theta_n^{(l)}), \\ m &= m_{kl} = \int_{-h}^{+h} x_3^{k+l-2} dx_3. \end{aligned}$$

Splitting up (3.4) into parts containing solely vector- and tensor-components in $x_1 - x_2$ — direction and those containing components in x_3 -direction, we obtain:

$$(3.6) \quad \langle\langle \mathbf{n}, \mathbf{q} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{n}_{\alpha\beta}, \mathbf{q}_{\alpha\beta} \rangle\rangle + 2\langle\langle \mathbf{n}_{\alpha 3}, \mathbf{q}_{\alpha 3} \rangle\rangle + \langle\langle \mathbf{n}_{33}, \mathbf{q}_{33} \rangle\rangle + \langle\langle \pi_n, \Theta_n \rangle\rangle, \quad \alpha, \beta \in [1, 2]$$

defined by:

$$(3.7) \quad \langle\langle \mathbf{n}_{\alpha\beta}, \mathbf{q}_{\alpha\beta} \rangle\rangle = \int_{\Gamma} \left[\sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q N_{\alpha\beta}^{(k)} m_{kl} Q_{\alpha\beta}^{(l)} \right] e^{-t} dx_1 dx_2 dt,$$

$$(3.8) \quad \langle\langle \mathbf{n}_{\alpha 3}, \mathbf{q}_{\alpha 3} \rangle\rangle = \int_{\Gamma} \left[\sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q N_{\alpha 3}^{(k)} m_{kl} Q_{\alpha 3}^{(l)} \right] e^{-t} dx_1 dx_2 dt,$$

$$(3.9) \quad \langle\langle \mathbf{n}_{33}, \mathbf{q}_{33} \rangle\rangle = \int_{\Gamma} \left[\sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q N_{33}^{(k)} m_{kl} Q_{33}^{(l)} \right] e^{-t} dx_1 dx_2 dt,$$

$$(3.10) \quad \langle\langle \Pi_n, \Theta_n \rangle\rangle = \int_{\Gamma} \left[\sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q \Pi_n^{(k)} m_{kl} \Theta_n^{(l)} \right] e^{-t} dx_1 dx_2 dt.$$

In accordance with the physical definition of „plates”, given in the beginning of this chapter, we now precise that plates in general are characterized by the vanishing of (3.9) and thin plate by additionally vanishing of (3.8). In the following we shall deal exclusively

with so defined thin plates. In minimum-principle (2.29) statically admissible generalized stresses were used for the construction of the solution of the problem. If now we use two-dimensional representatives for the stresses we also need a criterion for statical admissibility of these quantities. Here we use condition of orthogonality with respect to scalar-product (3.4), analogous to orthogonality-condition (2.26). Statically admissible stress-representatives are then defined by:

$$(3.11) \quad \mathbf{n}^s = \{ \mathbf{n} / \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}^k \rangle = 0 \quad \text{on } \Gamma \}$$

with kinematically admissible generalized strain-representatives $\mathbf{q}^k = [Q^{kq}, 0]$ defined by the set

$$(3.12) \quad Q^{kq} := \{ Q^q / Q^{(l)} = Q_{\alpha\beta}^{(l)} = \text{Grad}_s u_{\alpha}^{(l)} \quad \text{in } \Gamma, u_{\alpha}^{(l)} = 0 \text{ on } \partial\Gamma_k \}$$

with $\alpha, \beta \in [1, 2]; l \in [1, 2, \dots, q]; q$: order of Taylor-expansion. In order to identify Kirchhoff plate-theory lateron directly as special case of the herein presented generalized theory we impose on u^q the constraint

$$(3.13) \quad \bar{u}_{\alpha}^{(2)} = -u_{\alpha}^{(2)}, \quad \bar{u}_{\alpha}^{(k)} = u_{\alpha}^{(k)} \quad k = 1, 3, \dots, q, \quad k \neq 2$$

By twice application of divergence-theorem (3.11) delivers immediately conditions for statical admissible two-dimensional representatives of generalized stresses.

Example for $q = 4$. If we insert into (3.11) two-dimensional representatives of order $q = 4$, we obtain:

$$(3.14) \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}^k \rangle = \int_{\Gamma} \left[2hN_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\alpha,\beta}^{(1)} + \frac{2}{3} h^3 (-N_{\alpha\beta}^{(2)} u_{\alpha\beta}^{(2)} + N_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\alpha,\beta}^{(3)} + N_{\alpha\beta}^{(3)} u_{\alpha,\beta}^{(1)}) + \right. \\ \left. \frac{2}{5} h^5 (N_{\alpha\beta}^{(3)} u_{\alpha,\beta}^{(3)} + N_{\alpha\beta}^{(2)} u_{\alpha,\beta}^{(4)} - N_{\alpha\beta}^{(4)} u_{\alpha\beta}^{(2)}) + \frac{2}{7} h^7 N_{\alpha\beta}^{(4)} u_{\alpha,\beta}^{(4)} \right] e^{-t} dx_1 dx_2 dt = \\ = \int_{\Gamma} \left[\left(2hN_{\alpha\beta}^{(1)} + \frac{2}{3} h^3 N_{\alpha\beta}^{(3)} \right), \left(-\frac{2}{3} h^3 N_{\alpha\beta}^{(2)} - \frac{2}{5} h^5 N_{\alpha\beta}^{(4)} \right), \left(\frac{2}{3} h^3 N_{\alpha\beta}^{(1)} + \frac{2}{5} h^5 N_{\alpha\beta}^{(3)} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{2}{5} h^5 N_{\alpha\beta}^{(2)} + \frac{2}{7} h^7 N_{\alpha\beta}^{(4)} \right) \right] \cdot [u_{\alpha,\beta}^{(1)}, u_{\alpha\beta}^{(2)}, u_{\alpha,\beta}^{(3)}, u_{\alpha,\beta}^{(4)}]^T e^{-t} dx_1 dx_2 dt = 0.$$

Where square brackets denote supervectors and superposed „T” indicates transported supervector. Twice application of divergence-theorem then delivers:

$$(3.15) \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}^k \rangle = - \int_{\Gamma} \left[\left(2hN_{\alpha\beta,\beta}^{(1)} + \frac{2}{3} h^3 N_{\alpha\beta,\beta}^{(3)} \right), \left(\frac{2}{3} h^3 N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^{(2)} + \frac{2}{5} h^5 N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^{(4)} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{2}{3} h^3 N_{\alpha\beta,\beta}^{(1)} + \frac{2}{5} h^5 N_{\alpha\beta,\beta}^{(3)} \right), \left(\frac{2}{5} h^5 N_{\alpha\beta,\beta}^{(2)} + \frac{2}{7} h^7 N_{\alpha\beta,\beta}^{(4)} \right) \right] \cdot [u_{\alpha}^{(1)}, u^{(2)}, u_{\alpha}^{(3)}, u_{\alpha}^{(4)}]^T \cdot \\ e^{-t} dx_1 dx_2 dt + \int_{\partial\Gamma} \left[\left(2hN_{\alpha n}^{(1)} + \frac{2}{3} h^3 N_{\alpha n}^{(3)} \right), (v + M_{ns,s}), M_{nn}, \right. \\ \left. \left(\frac{2}{3} h^3 N_{\alpha n}^{(1)} + \frac{2}{5} h^5 N_{\alpha n}^{(2)} \right), \left(\frac{2}{5} h^5 N_{\alpha n}^{(2)} + \frac{2}{7} h^7 N_{\alpha n}^{(4)} \right) \right] \cdot [u_{\alpha}^{(1)}, u^{(2)}, u_n^{(2)}, u_{\alpha}^{(3)}, u_{\alpha}^{(4)}]^T \cdot \\ e^{-t} ds dt + \int_{\Gamma} [M_{ns}]_{C^+}^{\pm} u^{(2)} e^{-t} dt = 0,$$

where last term indicates difference of lefthand and righthand limit of the square bracket at a certain point $c \in \partial\Gamma$. Here we use the definitions:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} &= n_\alpha \frac{\partial}{\partial n} - n_\beta \frac{\partial}{\partial s}; \quad n = \cos(x_\alpha, n) \quad \alpha \neq \beta, \\
 V &= n_\alpha \left(\frac{2}{3} h^3 N_{\alpha\beta}^{(2)} + \frac{2}{5} h^5 N_{\alpha\beta}^{(4)} \right)_{|\beta}; \quad N_{\alpha n}^{(i)} = N_{\alpha\beta}^{(i)} n_\beta, \\
 (3.16) \quad M_{ns} &= \epsilon_{\alpha\beta} n_\alpha n_\delta \left(\frac{2}{3} h^3 N_{\delta\beta}^{(2)} + \frac{2}{5} h^5 N_{\alpha\beta}^{(4)} \right), \quad \alpha, \beta, \delta \in [1, 2] \\
 M_{nn} &= n_\alpha n_\beta \left(\frac{2}{3} h^3 N_{\alpha\beta}^{(2)} + \frac{2}{3} h^5 N_{\alpha\beta}^{(4)} \right); \quad (\cdot)_{|n} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial n}; \quad (\cdot)_{|s} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial s}
 \end{aligned}$$

n and s denote coordinates of normal and tangent direction to $\partial\Gamma$, resp., n denotes outer normal-vector on $\partial\Gamma$ and $\epsilon_{\alpha\beta}$ is permutation-symbol: $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$.

Conclusion from (3.15) is, that for the chosen model all (vector-or scalarvalued) elements of supervector containing statical quantities have to be equal to zero for arbitrary admissible conjugate displacement-representatives in the integral over Γ . On $\partial\Gamma$ conditions of statical admissibility depend on the support of the plate. Necessary for the vanishing of the integral over $\partial\Gamma$ is, that the product of conjugate statical and kinematical quantities vanishes, what permits, as weakening of the introductory assumptions, mixed boundary-conditions.

Imposure of constraints to deformations is quite arbitrary as long as physically motivated. For example, in order to obtain from (3.14) a plate-model fulfilling Kirchhoff-Love-hypothesis, we impose on deformation-representative u^a the constraint:

$$(3.17) \quad \bar{u}_\alpha^{(2)} = \bar{u}_\alpha^{(l)} = -u_\alpha^{(2)}, \quad \bar{u}_\alpha^{(1)} = u_\alpha^{(1)}, \quad l = 2, 3, \dots, q; \quad l \neq 1.$$

Then, after performing the same calculation as previously, we obtain instead of (3.15) the expression:

$$\begin{aligned}
 \langle (n, q^k) \rangle &= - \int_{\Gamma} \left[\left(2h N_{\alpha\beta}^{(1),\beta} + \frac{2}{3} h^3 N_{\alpha\beta}^{(3),\beta} \right), \left(\frac{2}{3} h^3 N_{\alpha\beta}^{(3),\beta\alpha} + \frac{2}{5} h^5 N_{\alpha\beta}^{(4),\beta\alpha} \right) \right] \\
 (3.18) \quad [u_\alpha^{(1)}, u^{(2)}]^T e^{-t} dx_1 dx_2 dt &+ \int_{\partial\Gamma} \left[\left(2h N_{\alpha n}^{(1)} + \frac{2}{3} h^3 N_{\alpha n}^{(3)} \right), \right. \\
 (V + m_{ns,s}, M_{nn}) &\left. \cdot [u_\alpha^{(1)}, u^{(2)}, u_{|n}^{(2)}]^T e^{-t} ds dt + \int_{\Gamma} [M_{ns}]_C^+ u^{(2)} e^{-t} dt = 0,
 \end{aligned}$$

with definitions according to (3.16).

Inserting statically admissible stress-tensors determined in this way according to the chosen plate-model into the two-dimensional functional

$$(3.19) \quad \tilde{A}_0(n^s) = \sup_{n^s \in n^0 - \tilde{E}_t \cap H_s} \langle (n^s - n^{s*}, G_\cdot, \dot{n}^s) \rangle \quad n^s \in n^0 - \tilde{E}_t \cap H_s$$

where E_t denotes convex region of admissible generalized stresses s , expressed by two-dimensional representatives and \hat{n}^0 denotes given purely elastic solution of the problem.

Stress-representative \mathbf{n} of the researched state of stress in the elastic-plastic plate is then given by the superposition

$$(3.20) \quad \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}^0 - \hat{\mathbf{n}}^s \quad \text{on } \Gamma,$$

where functional $\tilde{A}(\mathbf{n}^s)$ attains uniquely the minimum of value zero for the function $\hat{\mathbf{n}}^s$. If such function does not exist, also the solution of the problem does not exist.

4. Numerical example

A quadratic, homogeneous, on entire boundary ∂I simply supported, elastic-perfectly plastic plate is proportionally loaded by a distributed force \tilde{q} acting orthogonally on the midspan of the plate. Load is given by the function

$$(4.2) \quad \tilde{q}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) = \dot{q}_0(t) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2a} \tilde{x}_1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2a} \tilde{x}_2\right),$$

where q_0 is the controlling parameter of the loading.

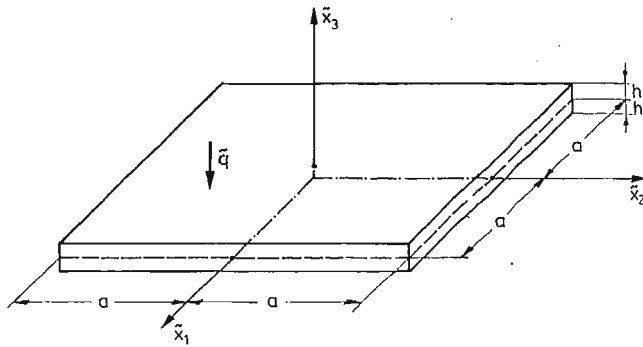


Fig. 2

In the following we use dimensionless quantities

$$x_\alpha = \frac{\tilde{x}_\alpha}{2a}; \quad x_3 = \frac{\tilde{x}_3}{2h},$$

$$q = \frac{\tilde{q}}{E} \left(\frac{a}{2h}\right)^4; \quad \sigma_s = \frac{\tilde{\sigma}_s}{E}, \quad N_{\alpha\beta} = \frac{\tilde{N}_{\alpha\beta}}{Ea^2} \left(\frac{a}{2h}\right)^4.$$

For this problem purely elastic solution is given by [1]:

$$(4.2) \quad N_{\alpha\beta}^{0(2)} = \frac{a^2 q_0}{\pi^2} (1 + \nu) \sin\left[\frac{\pi}{2}(x_1 + 1)\right] \sin\left[\frac{\pi}{2}(x_2 + 1)\right] \quad \alpha = \beta$$

$$N_{\alpha\beta}^{0(2)} = \frac{a^2 q_0}{\pi^2} (1 - \nu) \cos\left[\frac{\pi}{2}(x_1 + 1)\right] \cos\left[\frac{\pi}{2}(x_2 + 1)\right] \quad \alpha \neq \beta$$

with ν as Poissons ratio. Here we use stress-representatives N up to order $q = 2$ and choose as test-functions:

$$\begin{aligned}
 N_{11}^{s(2)} &= c_1(1-x_1^2)(1-x_2^2) + c_2(1-x_1^2)(1-x_2^4), \\
 (4.3) \quad N_{22}^{s(2)} &= c_3(1-x_2^2)(1-x_1^2) + c_4(1-x_2^2)(1-x_1^4), \\
 N_{12}^{s(2)} = N_{21}^{s(2)} &= c_5 \left[2x_1 x_2 - \frac{1}{3}(x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3) \right] + c_6 \left[2x_1 x_2 - \frac{1}{5}(x_1^5 x_2 + x_1 x_2^5) \right].
 \end{aligned}$$

with the set $[c_1, c_2, \dots, c_6]$ as free parameters. After fulfilling conditions of symmetry and condition (3.11) of statical admissibility (4.3) reduces to:

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad N_{\alpha\beta}^{s(2)} &= c_1(1-x_\alpha^2)(1-x_\beta^2) - c_2(1-x_\alpha^2)(1-x_\beta^4) \quad \alpha = \beta \\
 N_{\alpha\beta}^{s(2)} &= c_1 \left(x_\alpha - \frac{1}{3} x_\alpha^3 \right) \left(x_\beta - \frac{1}{3} x_\beta^3 \right) + c_2 \left(x_\alpha - \frac{1}{5} x_\alpha^5 \right) \left(x_\beta - \frac{1}{5} x_\beta^5 \right) \quad \alpha \neq \beta
 \end{aligned}$$

with only two free parameters c_1 and c_2 , which are subjected to the minimization-process of functional \tilde{A}_0 , which reduces now to a function of parameters c_1 and c_2 :

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad \tilde{A}_0(c_1, c_2) &= \sup_{n^s(c_1^*, c_2^*) \in n^0 - \tilde{E}_t \cap H_s} [(c_1^2 - c_1 c_1^*) \cdot 4,01468 + (c_2^2 - c_2 c_2^*) \cdot 6,01351 + \\
 &+ (2c_1 c_2 - c_1 c_2^* - c_2 c_1^*) \cdot 5,21133]; \quad n^s(c_1, c_2) \in n^0 - \tilde{E}_t \cap H_s
 \end{aligned}$$

Here ν was chosen $\nu = 0.3$.

We describe region $\tilde{E}_t \cap_s H$ by Tresca- and von-Mises-yield conditions:
Tresca-yield-condition:

$$\begin{aligned}
 (4.6) \quad (N_{11}^{s(2)} - N_{22}^{s(2)})^2 + 4N_{12}^{s(2)2} &\leq N_\sigma^{(2)2} \quad \text{if} \quad N_{11}^{s(2)} N_{22}^{s(2)} \leq N_{12}^{s(2)2} \\
 \frac{1}{2} (N_{11}^{s(2)} + N_{22}^{s(2)}) \pm \left[\frac{1}{4} (N_{11}^{s(2)} - N_{22}^{s(2)})^2 + N_{12}^{s(2)2} \right]^{1/2} &\leq N_\sigma^{(2)} \quad \text{if} \quad N_{11}^{s(2)} N_{22}^{s(2)} > N_{12}^{s(2)2}
 \end{aligned}$$

von-Mises-yield-condition:

$$(4.7) \quad N_{11}^{s(2)2} + N_{22}^{s(2)2} - N_{11}^{s(2)} N_{22}^{s(2)} + 3N_{12}^{s(2)2} \leq N_\sigma^{(2)2}$$

where $N_\sigma^{(2)}$ is defined by $\frac{2h^2}{3} \sigma_s$, with σ_s as stress-limit of uniaxial tension-test. Practically this means, that limit for two-dimensional stress-representative is reached (in uniaxial case), when yieldings in upper and lower planes Γ^+ , Γ^- starts. From the minimization of function \tilde{A}_0 we obtain numerically results for different loading-parameters q_0 , namely:

q_0	c_1	c_2	
1.5	0.1933	-0.2708	V. Mises
2.5	-0.3327	0.1234	„
1.5	0.1575	-0.2351	Tresca
2.5	-0.3673	0.1580	„

Fig. 3

In figure 5 the shape of regions of admissible parameters c_1, c_2 are drawn in c_1 - c_2 -plane for two values of loading-parameter q_0 . The inner domain is in both cases related to Tresca yield-criterion and the outer domain to von Mises-yield-criterion. The vectors C indicate the position of minimizing parameters \hat{c}_1, \hat{c}_2 . For increasing load-parameter q_0 the region of admissible parameters c_1 and c_2 becomes smaller and vanishes beyond a critical value q_0^* such that no solution of the problem in the chosen space of test-functions

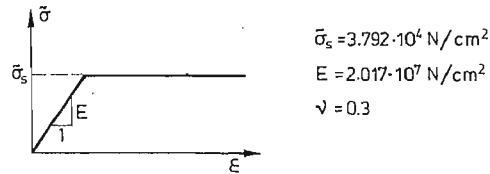


Fig. 4. Uniaxial stress-strain diagram of the considered material.

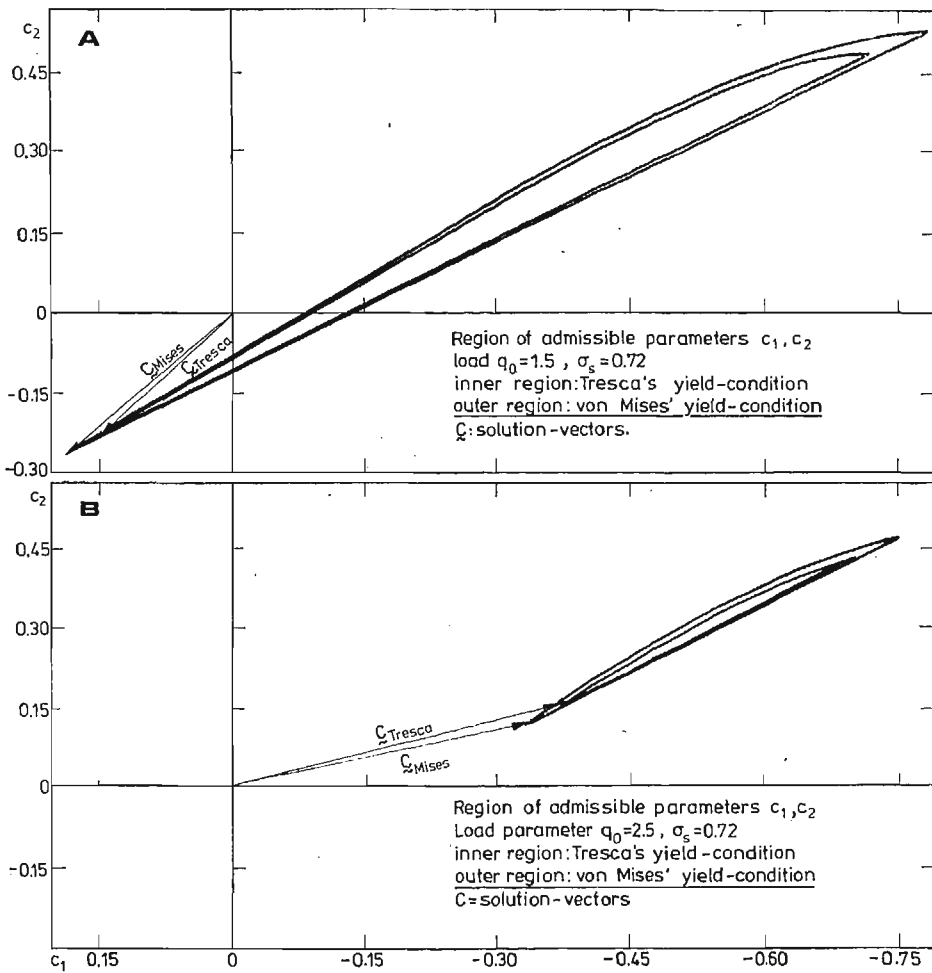


Fig. 5

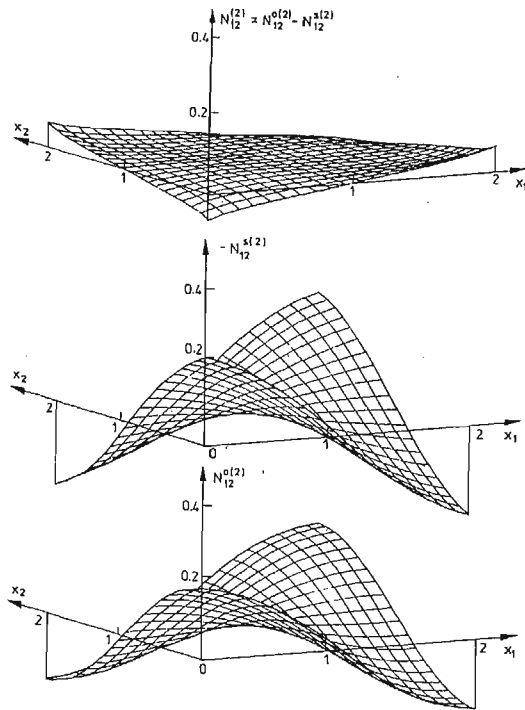
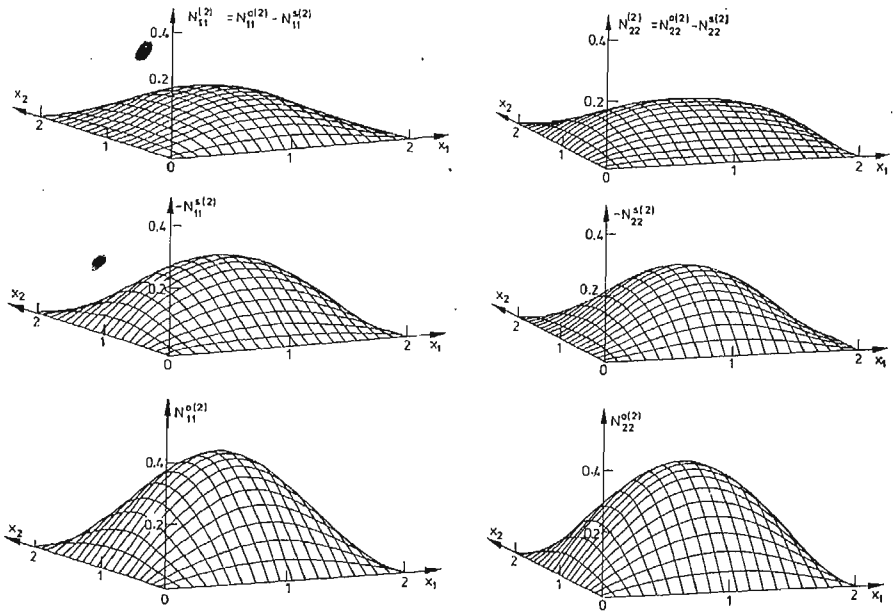


Fig. 6

exists for $q_0 \geq q_*^0$. In figure 6 the distribution of purely elastic solution N^0 , of the minimizing statical admissible stress-representative \hat{N}^s and of solution \hat{N} of the problem as superposition of N^0 and \hat{N}^s are sketched qualitatively in x_1-x_2 -plane.

Literature

1. TIMOSCHENKO, WOINOWSKI-KRIEGER, *Theorie of plates and shells*, Mc Graw-Hill Book company, New-York, 1959.
2. P. RAFALSKI, *Solution of the elastic-viscoplastic boundary-value problem*, Int. J. Engng. Sci., 15,193, 1977.
3. J. J. MOREAU, *Fonctionelles convexes*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, 1966 - 67, Collège de France, Paris.
4. B. NAYROLES, *Quelques applications variationnelles de la théorie des fonctions duales à la mécanique des solides*, J. de Mécanique, Vol 10, N° 2, 1971.
5. B. HALPHEN, NGUYEN QUOC SON, *Sur les matériaux standard généralisés*, J. de Mécanique, 14, pp. 39 - 63, 1965.
6. CZ. WOŹNIAK, *Large deformations of elastic and non-elastic plates, shells and rods*, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 20, Bochum 1980.
7. D. WEICHERT, *Variational formulation and solution of boundary-value problems in the theory of plasticity and application to plate-problems*, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 25, Bochum, 1981.

Резюме

ЗАКОН МИНИМУМ ДЛЯ НЕПРАЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛИТАХ И СООТВЕТСТВУЮЩИЙ МОДЕЛЬ ПЛИТЫ

Напряженное состояние в плитах под действием истории нагрузки определяется применяя экспериментальные теоремы к задачам в рамках геометрически линейной теории. Предлагается, что плиты трехмерные с геометрическими связями обоснованными физически. Работа иллюстрирована численным примером.

Streszczenie

ZASADA MINIMUM DLA STANU NAPRĘŻENIA W PŁYTACH SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH ORAZ DYSKUSJA STOSOWNEGO MODELU PŁYT

Stan naprężenia w płycie pod działaniem dowolnych historii obciążenia wyznaczono przez zastosowanie twierdzeń ekstremalnych do zagadnień w ramach teorii geometrycznej liniowej. Przyjęto, że płyty są trójwymiarowe z nałożonymi fizycznie uzasadnionymi więzami geometrycznymi. Pracę uzupełnia przykład liczbowy.

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 października 1981 roku

O METODACH TEORII POTENCJAŁÓW W ROZWIĄZYWANIU ZAGADNIĘŃ ODWROTNYCH WYMIANY CIEPŁA

KRZYSZTOF GRYSA

Politechnika Poznańska

Wstęp

Zagadnienia odwrotne wymiany ciepła rozważane są w literaturze naukowej od ok. dwudziestu lat. Pod tym określeniem rozumie się zwykle jeden z następujących rodzajów zagadnień: a) wyznaczenie funkcji opisującej źródło ciepła przy znanym rozkładzie temperatury w ciele, [1], b) wyznaczenie współczynników charakteryzujących proces wymiany ciepła przy znanym rozkładzie temperatury w rozważanym ośrodku, [2], c) odtwarzanie historii zmian temperatury w ciele przy znanym jej rozkładzie dla chwil czasu $t > t_0$, [3], oraz d) odtwarzanie warunków brzegowych przy znajomości tzw. wewnętrznych odpowiedzi termicznych, którymi mogą być temperatura lub strumień ciepła określone w pewnych punktach wewnętrznych rozważanego ciała, [4]. W niniejszej pracy zajmiemy się zagadnieniami odwrotnymi rozumianymi w sensie punktu d).

Przegląd metod, stosowanych przy rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych zamieszczono w pracy [4]. Jak wynika z tego przeglądu, głównie zajmowano się — jak dotąd — zagadnieniami jednowymiarowymi. Przez wiele lat podstawowym problemem było uzyskanie rozwiązania przybliżonego, opisującego w zadowalający sposób poszukiwane warunki brzegowe. Głównym założeniem, które jest również podstawowym założeniem i niniejszej pracy, była znajomość rodzaju warunków panujących na brzegach. Zadowalające rezultaty dla zagadnień jednowymiarowych uzyskano dopiero w ostatnich latach — można tu wymienić np. prace [5] i [6]. Jednakże zagadnienia wielowymiarowe stanowiły problem o znacznie większym stopniu trudności — toteż ilość prac, w których takie problemy się rozważa, jest raczej niewielka. Wyniki, prezentowane w tych pracach, nie budzą większego zaufania (por. [7, 8]). Są to wyniki przybliżone, których wykorzystanie w praktyce uwarunkowane jest dostępem do szybkołoczącego komputera o bardzo dużej pamięci operacyjnej.

W niniejszej pracy rozważa się zagadnienie odwrotne wymiany ciepła w trzech wymiarach. Wykorzystując tzw. potencjały cieplne sprowadza się problem do równań całkowych. W pierwszej części pracy zdefiniowano zagadnienia Fouriera i określono klasy funkcji, do których należą dane i poszukiwane wielkości. Następnie zdefiniowano potencjały cieplne i pewne funkcje pomocnicze, ułatwiające analizę tak zagadnień początkowo-brzegowych jak i odwrotnych. W trzeciej części pracy pokazano rozwiązania niektórych początkowo-brzegowych zagadnień wymiany ciepła. Rozważania zawarte w tej części

pracy są punktem wyjścia do analizy dotyczącej zagadnień odwrotnych. Jednocześnie stanowią pewien materiał porównawczy, pozwalający lepiej uchwycić różnicę podejść do zagadnień początkowo-brzegowych i odwrotnych. W części czwartej podane są rozwiązania dotyczące zagadnień odwrotnych. Rozwiązania te określone są przy pomocy funkcji stanowiących rozwiązania pewnych równań całkowych typu Volterra I rodzaju o jądrach będących iloczynami pewnych jąder słabo osobliwych. W końcowych częściach pracy przedstawiono metodę przybliżonego rozwiązywania równań całkowych determinujących gęstości potencjałów, przy pomocy których definiuje się rozwiązania zagadnień odwrotnych oraz krótko omówiono możliwości zastosowań praktycznych otrzymanych wyników.

1. Zagadnienia Fouriera

Rozważmy ograniczony obszar $\Omega \subset R^3$, którego brzegiem jest zamknięta powierzchnia klasy C^2 , [9, s. 217]. Punkty wewnętrzne rozpatrywanego obszaru będziemy oznaczać przez $x = (x_1, x_2, x_3)$ lub przez $y = (y_1, y_2, y_3)$, a punkty zamkniętej powierzchni $S = \partial\Omega$ przez $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ lub przez $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$. W obszarze tym będziemy rozważać równanie przewodnictwa cieplnego

$$(1.1) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) T(x, t) = F(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, \infty),$$

z warunkiem początkowym

$$(1.2) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} T(x, t) = \varphi(x),$$

oraz z różnego typu warunkami brzegowymi. Tutaj ∇^2 jest operatorem Laplace'a, $T(x, t)$ — temperaturą, $F(x, t)$ — funkcją źródła, $F(x, t) = -Q(x, t)/\lambda$, gdzie $Q(x, t)$ — intensywność źródła ciepła, λ — współczynnik przewodnictwa cieplnego, κ — współczynnik dyfuzyjności temperaturowej. O funkcji $\varphi(x)$ zakłada się, że jest ograniczona i ciągła dla $x \in \Omega$.

Ze względu na rodzaje warunków brzegowych rozróżnia się tzw. pierwsze, drugie i trzecie zagadnienie Fouriera, a także zagadnienia mieszane.

Pierwsze zagadnienie Fouriera polega na wyznaczeniu funkcji $T(x, t)$, która dla $t > 0$ spełnia równanie (1.1) w obszarze Ω , jest ciągła w $\bar{\Omega}$, spełnia warunek (1.2), a na brzegu S spełnia warunek brzegowy I rodzaju

$$(1.3) \quad T(\xi, t) = \psi(\xi, t).$$

Drugie zagadnienie Fouriera formułuje się analogicznie, z tą różnicą, że na brzegu S funkcja $T(\xi, t)$ musi spełniać warunek brzegowy II rodzaju

$$(1.4) \quad \frac{\partial T}{\partial n_\xi}(\xi, t) = \Psi(\xi, t).$$

Trzecie zagadnienie Fouriera polega na wyznaczeniu w obszarze Ω funkcji $T(x, t)$, która — oprócz równania (1.1) i warunku (1.2) — musi spełniać warunek brzegowy III rodzaju:

$$(1.5) \quad \frac{\partial T}{\partial n_\xi}(\xi, t) + \chi(\xi, t)T(\xi, t) = \Phi(\xi, t).$$

W powyższych związkach n_ξ oznacza normalną zewnętrzną do S , zaś $\varphi(\xi, t)$, $\Psi(\xi, t)$, $\Phi(\xi, t)$ i $\chi(\xi, t)$ są pewnymi funkcjami ograniczonymi i ciągłymi dla $t > 0$ i $\xi \in S$, [9]. O współczynnikach λ i κ zakłada się, że są stałe. Funkcja $\chi(\xi, t)$ ma związek z liczbą Biota, $Bi(\xi, t)$:

$$(1.6) \quad Bi(\xi, t) = \chi(\xi, t)L$$

gdzie L jest wymiarem charakterystycznym obszaru Ω . Stąd — wobec stałości λ — widoczne jest, iż w ramach omawianej teorii dopuszcza się zależność współczynnika wnikania ciepła, α , powiązanego z liczbą Biota wzorem

$$(1.7) \quad Bi = \alpha L/\lambda,$$

od współrzędnych ξ i t : $\alpha = \hat{\alpha}(\xi, t)$.

Oprócz warunków (1.2) i jednego z warunków (1.3), (1.4) czy (1.5) powinien być jeszcze spełniony warunek zgodności, który na postać następującą:

— w przypadku I zagadnienia Fouriera:

$$(1.8) \quad \varphi(\xi, 0) = \lim_{x \rightarrow \xi} \varphi(x),$$

— w przypadku II zagadnienia Fouriera

$$(1.9) \quad \Psi(\xi, 0) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n_\xi},$$

— w przypadku III zagadnienia Fouriera

$$(1.10) \quad \Phi(\xi, 0) = \lim_{x \rightarrow \xi} \left[\frac{\partial \varphi(x)}{\partial n_\xi} + \chi(\xi, 0)\varphi(x) \right].$$

W teorii równań całkowych dowodzi się, że każda funkcja klasy $C^2(\mathcal{E}_r)$ (gdzie $\mathcal{E}_r = \Omega \times (0, T)$, Ω — obszar ograniczony klasy C^1 , [10, str. 351]) daje się w obszarze \mathcal{E}_r rozłożyć na sumę potencjałów cieplnych (por. [10, str. 345 - 351]). W związku z tym w następnej części pracy określimy potencjały cieplne oraz pewne inne funkcje pomocne przy dalszych rozważaniach.

2. Potencjały cieplne

Ażeby sprowadzić sformułowane wyżej zagadnienia Fouriera do równań całkowych konstruuje się pewne szczególne rozwiązania równania (1.1), które odgrywają taką samą rolę, jak potencjały logarytmiczne czy potencjały newtonowskie warstwy pojedynczej i podwójnej w zagadnieniach Dirichleta i Neumanna.

Rozważmy funkcję

$$(2.1) \quad w(x, t) = \kappa(4\kappa\pi t)^{-\frac{m}{2}} \exp[-|x|^2(4\kappa t)^{-1}],$$

określoną dla $t > 0$ i $x \in R^m$. Funkcja ta nosi nazwę rozwiązania podstawowego równania przewodnictwa cieplnego (1.1), [9, s. 224]. Otrzymuje się je w przypadku, gdy $Q(x, t)/\lambda = \delta(x)\delta(t)$, gdzie $\delta(x)$ — dystrybucja Diraca. Za pomocą tej funkcji konstruuje się pewne rozwiązania równania (1.1), mające postać całek. Całki te noszą nazwy potencjałów cieplnych.

Potencjałem cieplnym warstwy podwójnej nazywa się całkę

$$(2.2) \quad U(x, t) = \int_0^t \int_S f(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} w(x - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau,$$

gdzie funkcja f nosi nazwę gęstości warstwy podwójnej.

Potencjałem cieplnym warstwy pojedynczej nazywa się całkę

$$(2.3) \quad V(x, t) = \int_0^t \int_S h(\zeta, \tau) w(x - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau,$$

gdzie funkcja h nosi nazwę gęstości warstwy pojedynczej.

Potencjałem cieplnym objętościowym [10, s. 350] nazywamy całkę

$$(2.4) \quad A(x, t) = - \int_0^t \int_\Omega F(y, \tau) w(x - y, t - \tau) dy d\tau,$$

gdzie F jest funkcją mierzalną i ograniczoną w obszarze Ω .

Oprócz trzech wyżej określonych całek wprowadza się jeszcze tzw. całkę Poissona-Weierstrassa [9, s. 225], nazywaną także całką Fouriera-Poissona [10, s. 361]. Ma ona postać

$$(2.5) \quad I(x, t) = - \frac{1}{\varkappa} \int_\Omega \varphi(y) w(x - y, t) dy.$$

Określone wzorami (2.2) i (2.3) potencjały mają m.in. następujące własności: Jeśli $x \rightarrow \xi$ oraz $x \in \Omega$, naś f i h są funkcjami ciągłymi, to

$$(2.6) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ t > 0}} U(x, t) = - \frac{1}{2} f(\xi, t) + \int_0^t \int_S f(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} w(\xi - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau,$$

$$(2.7) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ t > 0}} \frac{\partial}{\partial n_\xi} V(x, t) = \frac{1}{2} h(\xi, t) + \int_0^t \int_S h(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} w(\xi - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau$$

Przedstawione wyżej związki różnią się nieco od odpowiednich wzorów podanych w monografii [9]. Wynika to z innej orientacji normalnej do brzegu S ; w monografii [9] n jest normalną wewnętrzną.

Oprócz podanych wyżej funkcji, których własności będą w pracy wykorzystywane, wprowadza się dla skrócenia zapisu następującą funkcję:

$$(2.8) \quad P(x, t) = \frac{1}{\varkappa} \int_\Omega \varphi(y) w(x - y, t) dy - \int_0^t \int_\Omega F(y, \tau) w(x - y, t - \tau) dy d\tau.$$

Jak widać, funkcja $P(x, t)$ jest różnicą całki Poissona-Weierstrassa i potencjału objętościowego. Funkcje $\varphi(x)$ i $F(x, t)$ mają charakter określony związkami (1.1) i (1.2).

Dla $t = 0$ znajdujemy — na mocy twierdzeń podanych w monografii [10] na stronach 367, 361 i 347, iż

$$(2.9) \quad P(x, 0) = \int_{\Omega} \varphi(y) w(x-y, 0) dy = \varphi(x).$$

3. Postać całkowa zagadnień Fouriera .

Ponieważ punktem wyjścia do rozważań dotyczących problemów odwrotnych wymiany ciepła jest postać całkowa zagadnień Fouriera, więc poniżej przedstawiono niektóre spośród takich przedstawień.

W przypadku I zagadnienia Fouriera funkcję $T(x, t)$ można przedstawić w postaci sumy potencjału cieplnego warstwy podwójnej o gęstości f oraz funkcji $P(x, t)$:

$$(3.1) \quad T(x, t) = P(x, t) - U(x, t).$$

Gęstość $f(\xi, t)$ musi dla $t > 0$ spełniać równanie całkowe

$$(3.2) \quad \frac{1}{2} f(\xi, t) - U(\xi, t) = \psi(\xi, t) - P(\xi, t).$$

Jest to — jak wynika z (2.2) — równanie typu Volterry II rodzaju.

W przypadku jednowymiarowym I zagadnienie Fouriera formułuje się następująco:

$$(3.3) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) T_1(x, t) = F_1(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T_1(x, t) = \varphi_1(x)$$

$$T_1(0, t) = \psi_0(t), \quad T_1(l, t) = \psi_l(t).$$

Tutaj i w dalszych rozważaniach indeks „1” służy do zaakcentowania, że chodzi o przypadek jednowymiarowy. Wzory (3.1) i (3.2) zastosowane do zagadnienia jednowymiarowego prowadzą do następujących związków całkowych:

$$(3.4) \quad T_1(x, t) = \frac{l-x}{2\kappa} f_1(l, t) \times \frac{w_1(x-l, t)}{t} + \frac{x}{2\kappa} f_1(0, t) \times \frac{w_1(x, t)}{t} + P_1(x, t),$$

$$(3.5) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} f_1(0, t) + \frac{l}{2\kappa} f_1(l, t) \times \frac{w_1(l, t)}{t} = \psi_0(t) - P_1(0, t) \\ \frac{1}{2} f_1(l, t) + \frac{l}{2\kappa} f_1(0, t) \times \frac{w_1(l, t)}{t} = \psi_l(t) - P_1(l, t) \end{cases}$$

Symbol \times oznacza splot, [11, s. 149].

Układ równań całkowych (3.5) można łatwo rozwiązać w transformatach Laplace'a. Po wstawieniu tych rozwiązań do przetransformowanego związku (3.4), a następnie odwróceniu transformat otrzymuje się funkcję $T_1(x, t)$ w postaci

$$(3.6) \quad T_1(x, t) = \frac{d}{dt} \{ \psi_0(t) - P_1(0, t) \} \times \left\{ \frac{l-x}{l} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k} \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \sin\left(\frac{l-x}{l}\alpha_k\right) \exp\left(-\alpha_k^2 \cdot \frac{\kappa t}{l^2}\right) \Big\} + \frac{d}{dt} \{\psi_1(t) - P_1(l, t)\} \times \\ & \times \left\{ \frac{x}{l} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k} \sin\left(\frac{x}{l}\alpha_k\right) \exp\left(-\alpha_k^2 \cdot \frac{\kappa t}{l^2}\right) \right\} + P_1(x, t), \end{aligned}$$

gdzie $\alpha_k = \pi k$, przy czym możliwość wykorzystania całki Duhamela i doprowadzenia funkcji $T_1(x, t)$ do podanej wyżej postaci wynika ze wzoru (2.9) oraz postaci prawych stron równań (3.5), a także ze wzoru (5.3) z pracy [13], rozpisanego dla $x = 1$. Różniczkowanie funkcji $P_1(0, t)$ i $P_1(l, t)$ po czasie rozumie się w sensie twierdzeń podanych w monografii [10] na stronach 360 i 366.

W przypadku III zagadnienia brzegowego funkcję $T(x, t)$ można przedstawić w postaci sumy potencjału cieplnego warstwy pojedynczej o gęstości h oraz funkcji $P(x, t)$:

$$(3.7) \quad T(x, t) = V(x, t) + P(x, t).$$

Gęstość $h(\xi, t)$ musi dla $t > 0$ spełniać następujące równanie całkowe:

$$(3.8) \quad \frac{1}{2} h(\xi, t) + \int_0^t \int_S h(\zeta, \tau) N(\xi, \zeta, t, \tau) dS_\zeta d\tau = k(\xi, t)$$

gdzie

$$(3.9) \quad \begin{aligned} N(\xi, \zeta, t, \tau) &= \frac{\partial}{\partial n_\xi} w(\xi - \zeta, t - \tau) + \chi(\xi, t) w(\xi - \zeta, t - \tau), \\ k(\xi, t) &= \Phi(\xi, t) - \left(\frac{\partial}{\partial n_\xi} + \chi(\xi, t) \right) P(\xi, t). \end{aligned}$$

Jeśli z funkcją $\chi(\xi, t)$ dokonać przejścia do zera, wówczas równania całkowe (3.7) i (3.8) z odpowiednio zmodyfikowanymi związkami (3.9) opisują II zagadnienie Fouriera. W miejsce funkcji $\Phi(\xi, t)$ należy wówczas wstawić $\Psi(\xi, t)$.

Rozważmy jeszcze równanie (1.1) z warunkiem początkowym (1.2) i warunkami brzegowymi mieszany:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} T(\xi, t) &= \psi(\xi, t) \quad \text{dla} \quad \xi \in S_1 \\ \frac{\partial T}{\partial n_\xi}(\xi, t) + \chi(\xi, t) T(\xi, t) &= \Phi(\xi, t) \quad \text{dla} \quad \xi \in S_2, \end{aligned}$$

przy czym $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \cup S_2 = S$. Rozwiązanie problemu początkowo-brzegowego (1.1), (1.2), (3.10) można przedstawić w postaci

$$(3.11) \quad T(x, t) = V(x, t) - U(x, t) + P(x, t),$$

gdzie gęstości f i h potencjałów cieplnych są funkcjami, równymi odpowiednio

$$(3.12) \quad \begin{aligned} f(\xi, t) &= T(\xi, t) = \psi(\xi, t) \quad \text{dla} \quad \xi \in S_1, \\ h(\xi, t) &= \frac{\partial T}{\partial n_\xi}(\xi, t) = \Phi(\xi, t) - \chi(\xi, t) f(\xi, t) \quad \text{dla} \quad \xi \in S_2. \end{aligned}$$

Wzór (3.11) wynika z ogólnej postaci rozwiązania równania (1.1) z warunkiem początkowym (1.2) i dowolnymi warunkami brzegowymi, [10, s. 350]. Funkcje f i h dla ξ należących do — odpowiednio — S_2 i S_1 określa się jako rozwiązania następującego układu równań całkowych, wynikających z (3.11) i (2.6):

$$(3.13) \quad \frac{1}{2}f(\xi, t) = - \int_0^t \int_{S_1} \psi(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} w(\xi - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau + \\ + P(\xi, t) - \int_0^t \int_{S_2} f(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} w(\xi - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau + \\ + \lim_{x \rightarrow \xi} \left\{ \int_0^t \int_{S_1} h(\zeta, \tau) w(x - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^t \int_{S_2} [\Phi(\zeta, \tau) - \chi(\zeta, \tau) f(\zeta, \tau)] w(x - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau \right\},$$

gdzie osobno trzeba rozpatrzyć $\xi \in S_1$ i $\xi \in S_2$.

W przypadku jednowymiarowym powyższe zagadnienie mieszane sprowadza się do rozwiązania równania (3.3)₁ z warunkami (3.3)₂ oraz warunkami brzegowymi postaci — np. —

$$(3.14) \quad \frac{\partial T_1}{\partial x}(0, t) - \chi_1(0, t)T_1(0, t) = -\Phi_0(t), \\ T_1(l, t) = \psi_l(t),$$

ozn. tutaj $S_1 = \{l\}$, $S_2 = \{0\}$.

Wzór (3.11) oraz równania wynikające z (3.13) przyjmą wówczas postaci

$$(3.15) \quad T_1(x, t) = \frac{l-x}{2\kappa} \psi_l(t) * \frac{w_1(x-l, t)}{t} + \frac{x}{2\kappa} f_1(0, t) * \frac{w_1(x, t)}{t} + \\ + P_1(x, t) + h_1(l, t) * w_1(x-l, t) - [\chi_1(0, t)f_1(0, t) - \Phi_0(t)] * w_1(x, t),$$

$$(3.16) \quad \frac{1}{2}f_1(0, t) + \frac{1}{2}\chi(0, t)f_1(0, t) * \sqrt{\frac{\kappa}{\pi t}} - \\ - h_1(l, t) * w_1(l, t) = \frac{l}{2\kappa} \psi_l(t) * \frac{w_1(l, t)}{t} + \Phi_0(t) * \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi t}} + P_1(0, t), \\ \frac{l}{2\kappa} f_1(0, t) * \frac{w_1(l, t)}{t} - \chi(0, t)f_1(0, t) * w_1(l, t) + \\ + h_1(l, t) * \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi t}} = \frac{1}{2} \psi_l(t) - \Phi_0(t) * w_1(l, t) - P_1(l, t).$$

Przyjmijmy dla uproszczenia, iż $\chi(0, t) = \chi = \text{const}$. Wówczas układ równań całkowych (3.16) można łatwo rozwiązać w transformatach Laplace'a. Przetransformowaną funkcję $T_1(x, t)$ można ostatecznie przedstawić w postaci

$$(3.17) \quad \bar{T}_1(x, s) = \frac{1}{M(s)} \left\{ [\bar{\psi}_1(s) - \bar{P}_1(l, s)] \left[\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cosh \left(x \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \chi \sinh \left(x \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right) \right] + \left[\bar{\psi}_0(s) + \left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}} - \chi \right) \bar{P}_1(0, s) \right] \times \sinh \left[(l-x) \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right] + \bar{P}_1(x, s) \right\},$$

gdzie $M(s) = \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cosh \left(l \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right) + \chi \sinh \left(l \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right)$, s — parametr transformacji. Od-

wrócenie transformaty $T_1(x, s)$ nie przedstawia większych trudności.

Odnośnie równań całkowych występujących przy rozwiązywaniu zagadnień Fouriera w przestrzeni trójwymiarowej dowodzi się, że ich rozwiązanie istnieje i jest funkcją ciągłą, [9].

4. Zagadnienia odwrotne wymiany ciepła

Jak już wspomniano na wstępie, przez zagadnienia odwrotne wymiany ciepła będziemy rozumieli problem wyznaczenia warunków brzegowych (których rodzaj jest znany) przy znajomości warunków początkowych, funkcji źródła oraz przy znanej funkcji $T(x^*, t)$ lub $q(x^*, t)$, $x^* \in \partial\Omega^*$, gdzie $\Omega^* \subset \Omega$. Funkcja $T(x^*, t)$ opisuje rozkład temperatury na pewnej powierzchni $\partial\Omega^*$, zaś funkcja $q(x^*, t)$ — rozkład strumienia ciepła na tej powierzchni. Funkcje te, określone dla $x^* \in \partial\Omega^*$ i $t > 0$, nazywać będziemy wewnętrznymi odpowiedziami (w skrócie *WO*), przy czym $T(x^*, t)$ jest wewnętrzną odpowiedzią temperaturową (*WOT*), zaś $q(x^*, t)$ — wewnętrzną odpowiedzią strumieniową (*WOS*).

Nie każda funkcja może opisywać *WOT* czy *WOS*. Pewne ograniczenia na te funkcje wynikają z ogólnej postaci rozwiązania równania (1.1) z warunkiem początkowym (1.2) [10, s. 350], jak również z fizyki zagadnienia. Na podstawie własności potencjałów cieplnych oraz całki Poissona-Weierstrassa (por. [9, s. 225], a także [10], twierdzenia na s. 360 i 366) otrzymujemy następujące warunki dostateczne na to, aby funkcja $T(x^*, t)$ lub $q(x^*, t)$ mogła opisywać *WO*:

1° Funkcja ta musi być ograniczona dla $t \in (0, \infty)$

2° Funkcja ta musi mieć skończone granice dla $t \rightarrow 0+$ i $t \rightarrow \infty$.

3° W przypadku *WOT* funkcja $T(x^*, t)$ musi być przynajmniej jednokrotnie różniczkowalna względem czasu dla $t > 0$:

W praktyce przy poszukiwaniu rozwiązań przybliżonych rezygnuje się z warunku 3° na rzecz słabszego warunku, a mianowicie różniczkowalności funkcji $T(x^*, t)$ względem czasu w przedziale $t > 0$ poza pewną przeliczalną liczbą chwil.

Przy rozważaniu zagadnień odwrotnych zakłada się, że znany jest rodzaj warunków, panujących na brzegu $S = \partial\Omega$, a w przypadku gdy są to warunki III rodzaju — że znany jest współczynnik $\chi(\xi, t)$. Brzeg $\partial\Omega^*$ obszaru $\Omega^* \subset \Omega$ może mieć część wspólną z brzegiem S . Przy stosowaniu do obliczeń dotyczących tych zagadnień transformacji Laplace'a zakłada się, iż transformaty wyników są odwracalne. To założenie zwykle pociąga za sobą spełnienie warunków 1° i 2°, jak również słabszej postaci warunku 3°, [6].

Rozważmy teraz pewne zagadnienia szczegółowe.

Założmy, że znana jest *WOT*, tzn. że

$$(4.1) \quad T(x^*, t) = \psi^*(x^*, t), \quad x^* \in \partial\Omega^*, \quad \Omega^* \subset \Omega,$$

oraz że na brzegu obszaru panują warunki brzegowe I rodzaju. Niech funkcje $\varphi(x)$ oraz $F(x, t)$ będą funkcjami danymi, ciągłymi i ograniczonymi dla $x \in \Omega$ (założenie to będzie obowiązywać do końca pracy). Funkcją poszukiwaną jest $T(\xi, t)$, $\xi \in \partial\Omega$, opisująca temperaturę brzegu obszaru Ω . Funkcję tę można określić wzorem, wynikającym z (3.2) i (2.6):

$$(4.2) \quad T(\xi, t) = \frac{1}{2} f(\xi, t) - U(\xi, t) + P(\xi, t),$$

gdzie $f(\xi, t)$ jest rozwiązaniem następującego równania całkowego typu Voltery I rodzaju, wynikającego z (3.1):

$$(4.3) \quad \int_0^t \int_S f(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\xi} w(x^* - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau = P(x^*, t) - \psi^*(x^*, t).$$

Jądro równania (4.3) można traktować jako iloczyn dwóch jąder słabo osobliwych, [9, s. 227]. Wynika stąd możliwość rozwiązania równania (4.3), a co za tym idzie — określenia funkcji $T(\xi, t)$.

Z porównania rozwiązania — czy też postaci całkowej — zagadnienia odwrotnego odpowiadającego I zagadnieniu Fouriera i zewnętrznego I zagadnienia Fouriera, [9, s. 233 - 234], wynika, iż są to problemy różnego typu. Mimo bowiem, iż jądra równań całkowych na gęstości f potencjału warstwy podwójnej różnią się tylko znakiem, to w przypadku I zewnętrznego zagadnienia Fouriera mamy do czynienia z równaniem Voltery II rodzaju, podczas gdy w przypadku zagadnienia odwrotnego odpowiadającego I wewnętrznemu zagadnieniu Fouriera do rozwiązania jest równanie Voltery I rodzaju na tę gęstość. Również wzory opisujące temperaturę punktów $x \in \Omega$ różnią się od siebie. W przypadku zagadnienia odwrotnego temperatura $T(x, t)$ dana jest wzorem (3.1), w którym potencjał warstwy podwójnej wyznaczony jest w oparciu o rozwiązanie równania (3.2), w którym z kolei funkcja $\psi(\xi, t) = T(\xi, t)$ jest dana związkami (4.2). Natomiast w przypadku odpowiedniego zewnętrznego zagadnienia funkcjonuje wzór podany w monografii [9], s. 234, który należy uzupełnić o potencjał objętościowy.

W przypadku jednowymiarowym w miejsce równania całkowego (4.3) otrzymuje się — po wykonaniu transformacji Laplace'a — układ równań na transformaty $\bar{f}_1(0, s)$ i $\bar{f}_1(l, s)$, wynikający z (3.4). Po rozwiązaniu tego układu równań i wstawieniu wyników do przetransformowanego związku (4.2), który w przypadku jednowymiarowym rozбивa się na dwa związki, gdyż $S = \{0, l\}$, otrzymuje się transformaty Laplace'a rozwiązań w postaci

$$(4.4)_1 \quad \bar{T}_1(0, s) = \bar{P}_1(0, s) - \sum_{k=1}^2 \left\{ [\bar{\psi}_k^*(s) - \bar{P}_1(x_k, s)] (-1)^k \times \frac{\sinh\left(x_{3-k} \sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right)}{\sinh\left(D \sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right)} \right\}$$

$$(4.4)_2 \quad \bar{T}_1(l, s) = \bar{P}_1(l, s) + \sum_{k=1}^2 \left\{ [\bar{\psi}_k^*(s) - \bar{P}_1(x_k, s)] (-1)^k \times \frac{\sinh\left[(l - x_{3-k}) \sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right]}{\sinh\left(D \sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right)} \right\},$$

gdzie $x_1, x_2 \in (0, l)$, $\psi_k^*(t) = T_1(x_k, t)$ jest *WOT* w punkcie x_k , $k = 1, 2$, $D = x_2 - x_1$. Transformaty dane wzorami (4.4) można odwrócić metodą podaną w pracy [6]. Metoda ta polega na przejściu do przybliżonego opisu funkcji $\psi_k^*(t)$ i $P_1(x_k, t)$ przy pomocy funkcji schodkowych (które są funkcjami dopuszczalnymi do opisu *WOT*, [6]). W ten sposób ułamki występujące pod sumą można sprowadzić do postaci transformat, spełniających założenia lematu Jordana, [11, s. 186]. Dzieje się tak dzięki przemnożeniu tych ułamków przez transformaty funkcji Heaviside'a występujących w opisie funkcji schodkowych. Po odwróceniu tak otrzymanych transformat dokonuje się ponownie przejścia, tym razem od opisu przybliżonego do ścisłego i w ten sposób otrzymuje się funkcje $T_1(0, t)$ i $T_1(l, t)$. Warto tu nadmienić, że w przypadkach, gdy $x_1 < D$ lub $l - x_2 < D$, niektóre spośród ułamków występujących w transformatach (4.4) od razu spełniają założenia lematu Jordana i kwalifikują się do odwrócenia metodą residuów. Wyniki otrzymane przy odwróceniu bezpośrednim pokrywają się w takim przypadku z wynikami otrzymanymi na opisanej w pracy [6].

Po odwróceniu transformat danych wzorami (4.4), przy wykorzystaniu całki Duhamela (co gwarantują związek (2.9) oraz wzór (4.2) z pracy [14]) i odpowiednich twierdzeń zawartych w monografii [10], s. 364, 367, 361 i 347, otrzymujemy dla $t > 0$

$$(4.5) \quad T_1(0, t) = P_1(0, t) - \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{d}{dt} [\psi_k^*(t) - P_1(x_k, t)] * \\ * \left\{ \frac{x_{3-k}}{D} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\alpha_l} \sin \frac{x_{3-k} \alpha_l}{D} \exp \left(-\alpha_l^2 \cdot \frac{\pi t}{D^2} \right) \right\},$$

$$T_1(l, t) = P_1(l, t) - \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{d}{dt} [\psi_{3-k}^*(t) - P_1(x_{3-k}, t)] * \\ * \left\{ \frac{l-x_k}{D} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\alpha_l} \sin \frac{\alpha_l(l-x_k)}{D} \exp \left(-\alpha_l^2 \cdot \frac{\pi t}{D^2} \right) \right\},$$

przy czym różniczkowanie funkcji P_1 po czasie rozumiane jest w sensie twierdzeń zawartych w monografii [10], s. 360 i 366. Między wzorami (4.5) i (3.6) istnieje pewne podobieństwo w budowie; w przypadku, gdy $x_1 = 0$, $x_2 = l$ wzory (4.5) i odpowiednie związki wynikające z (3.6) są identyczne.

Punktów x_1 i x_2 nie można wybierać dowolnie. Nie można wybierać takich punktów, przy których ułamki x_k/D i $(l-x_k)/D$, $k = 1, 2$, są liczbami całkowitymi. Jeśli bowiem ułamki te przyjmują wartości całkowite, wówczas argumenty sinusów stają się dla każdego $l = 1, 2, \dots$ wielokrotnością π i szeregi nieskończone znikają. Jeśli — dla lepszego zilustrowania sytuacji — przyjmujemy zerowe warunki początkowe i brak funkcji źródła, to przy całkowitych wartościach wspomnianych ułamków wzory (4.5) sprowadzają się do postaci

$$(4.6) \quad T_1(0, t) = \frac{x_2}{D} \psi_1^*(t) - \frac{x_1}{D} \psi_2^*(t),$$

$$T_1(l, t) = \frac{l-x_1}{D} \psi_2^*(t) - \frac{l-x_2}{D} \psi_1^*(t).$$

Wyliczając z układu równań (4.6) funkcje $\psi_1^*(t)$ i $\psi_2^*(t)$ i porównując je z odpowiednimi związkami wynikającymi z (3.6) łatwo zauważa się brak zgodności pomiędzy tymi związkami. Wynika stąd następujący warunek na dobór punktów x_1 i x_2 :

$$(4.7) \quad x_2 > \max\left(2x_1, \frac{l+x_1}{2}\right).$$

Przy spełnionym warunku (4.7) spełnione są następujące nierówności: $x_1/D < 1$, $(l-x_2)/D < 1$, $x_2/D < 2$, $(l-x_1)/D < 2$. Nierówność (4.7) potwierdza jeden z wniosków, wynikających z pracy [6], a mianowicie iż punktów x_1 i x_2 nie można wybierać w sposób zupełnie dowolny. Ponadto, porównując ograniczenia na dobór tych punktów wynikające z prac [6], [12] i nierówność (4.7), dochodzimy do wniosku, iż ograniczenia związane z doбором punktów x_1 i x_2 są zależne od rodzaju warunków panujących na brzegach rozważanego obszaru.

Założmy teraz, że znana jest *WOS*, tzn. że

$$(4.8) \quad q(x^*, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n^*}(x^*, t) = \Psi^*(x^*, t), \quad x^* \in \partial\Omega^*, \quad \Omega^* \subset \Omega,$$

oraz że na brzegu panują warunki I rodzaju. Funkcją poszukiwaną jest więc ponownie $T(\xi, t)$. Określa się ją i w tym wypadku wzorem (4.2), lecz gęstość potencjału cieplnego warstwy podwójnej, $f(\xi, t)$, jest tym razem rozwiązaniem równania całkowego postaci

$$(4.9) \quad \lambda \frac{\partial}{\partial n^*} \int_0^t \int_S f(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\xi} w(x^* - \xi, t - \tau) dS_\xi d\tau = \lambda \frac{\partial P}{\partial n^*}(x^*, t) + \Psi^*(x^*, t),$$

gdzie n^* jest normalną zewnętrzną do $\partial\Omega^*$.

Przyjmijmy teraz, że znana jest *WOT* i że jest ona opisana związkami (4.1), zaś na brzegu $S = \partial\Omega$ panują warunki II rodzaju. Funkcją poszukiwaną jest pochodna $\frac{\partial T}{\partial n_\xi}(\xi, t)$, opisująca gradient temperatury na brzegu S . Funkcję tę można określić wzorem wynikającym z (3.8) w przypadku, gdy $\chi = 0$:

$$(4.10) \quad \frac{\partial T}{\partial n_\xi}(\xi, t) = \frac{\partial P}{\partial n_\xi}(\xi, t) + \frac{1}{2} h(\xi, t) + \int_0^t \int_S h(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\xi} w(\xi - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau.$$

Do wyprowadzenia związku (4.10) wykorzystano wzór (2.7). Funkcja $h(\xi, t)$ jest rozwiązaniem następującego równania całkowego, wynikającego z (3.7):

$$(4.11) \quad \int_0^t \int_S h(\xi, \tau) w(x^* - \xi, t - \tau) dS_\xi d\tau = -P(x^*, t) + \psi^*(x^*, t).$$

Na zakończenie rozważań dotyczących postaci całkowej rozwiązań zagadnień odwrotnych założmy, że znana jest *WOT* i że jest ona postaci (4.1), zaś na brzegu $S = \partial\Omega$ panują mieszane warunki brzegowe, a mianowicie warunki dane związkami (3.10). Funkcjami poszukiwanymi są więc $T(\xi, t)$ dla $\xi \in S_1$ oraz $\Phi(\xi, t)$ dla $\xi \in S_2$. Funkcje te można określić następującymi wzorami:

$$(4.12) \quad T(\xi, t) = P(\xi, t) + V(\xi, t) - U(\xi, t) + \frac{1}{2}f(\xi, t),$$

$$(4.13) \quad \Phi(\xi, t) = \left[\frac{\partial}{\partial n_\xi} + \chi(\xi, t) \right] P(\xi, t) + \frac{1}{2}h(\xi, t) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial n_\xi}(\xi, t) + \int_0^t \int_S h(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\xi} w(\xi - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau + \\ + \chi(\xi, t)V(\xi, t) - \frac{\partial}{\partial n_\xi} U(\xi, t) + \frac{1}{2} \chi(\xi, t)f(\xi, t) - \chi(\xi, t)U(\xi, t),$$

przy czym gęstości potencjałów ciepłych f i h spełniają związki (3.12) oraz równanie całkowe postaci

$$(4.14) \quad V(x^*, t) - U(x^*, t) = P(x^*, t) - T(x^*, t).$$

W przypadku jednowymiarowym zagadnienie to można zapisać następująco. Przyjmując, iż warunki brzegowe mają postać (3.14), a poszukiwanymi funkcjami są $\Phi_0(t)$ i $\psi_i(t)$, otrzymuje się — przy przyjęciu, że w punktach x_1 i x_2 określone są WOT — układ równań całkowych na funkcje $f_1(0, t)$, $h_1(l, t)$, $\Phi_0(t)$ i $\psi_i(t)$, składający się z równań (3.16), oraz równań wynikających z (3.15):

$$(4.15) \quad \frac{l-x_k}{2\kappa} \psi_i(t) * \frac{w_1(x_k-l, t)}{t} + \frac{x_k}{2\kappa} f_1(0, t) * \frac{w_1(x_k, t)}{t} - \chi_1(0, t) * w_1(x_k, t) + \\ + h_1(l, t) * w_1(x_k-l, t) + \Phi_0(t) * w_1(x_k, t) = \psi_k^*(t) - P_1(x_k, t), \quad k = 1, 2.$$

Otrzymany układ czterech równań całkowych można rozwiązać w dziedzinie transformat Laplace'a przy założeniu, iż $\chi(0, t) = \text{const} = \chi$. Otrzymujemy transformaty rozwiązań, $\bar{\psi}_i(s)$ i $\bar{\Phi}_0(s)$ w następującej postaci

$$(4.16) \quad \bar{\psi}_i(s) = \bar{P}_1(l, s) + \sum_{k=1}^2 (-1)^k [\bar{\psi}_k^*(s) - \bar{P}_1(x_k, s)] * \frac{\sinh \left[(l-x_{3-k}) \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right]}{\sinh \left(D \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right)}, \\ \bar{\Phi}_0(s) = - \sum_{k=1}^2 (-1)^k [\bar{\psi}_k^*(s) - \bar{P}_1(x_k, s)] * \\ * \frac{\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cosh \left(x_{3-k} \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right) + \chi \sinh \left(x_{3-k} \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right)}{\sinh \left(D \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right)} - \left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}} - \chi \right) P_1(0, s).$$

Związki (4.16)₁ i (4.4)₂ mają tę samą postać; jest to zgodne z intuicją, gdyż odtwarzana jest tu temperatura na podstawie WOT. Natomiast $\bar{\Phi}_0(s)$ jest nieco bardziej złożona, aczkolwiek również nie następuje większych trudności przy retransformacji metodą podaną na początku tej części pracy.

Zauważmy jeszcze, że gdy $\chi \rightarrow 0$, tzn. gdy warunek brzegowy na brzegu $x = 0$ staje się warunkiem II rodzaju, otrzymujemy (kładąc w miejsce $\bar{\Phi}_0(s)$ transformatę $\bar{\Psi}_0(s)$) transformatę opisującą strumień ciepła na brzegu (z dokładnością do współczynnika λ), zaś przechodząc z do nieskończoności w ten sposób, aby $\bar{\Phi}_0(t)/\chi \rightarrow \psi_0(t)$, otrzymujemy na brzegu $x = 0$ warunek brzegowy I rodzaju, zaś transformata (4.16)₂ przyjmuje postać (4.4)₁.

5. Metoda przybliżonego rozwiązywania równań całkowych Voltery I rodzaju

Równania całkowe na gęstości potencjałów, (4.3), (4.9), (4.11) i inne, które pojawiają się podczas rozważań dotyczących trójwymiarowych zagadnień odwrotnych wymiany ciepła, mają — ogólnie rzecz biorąc — postać równania całkowego typu Voltery I rodzaju,

$$(5.1) \quad \int_S u(\zeta, t) * K(y - \zeta, t) dS_\zeta = v(y, t),$$

przy czym jądro tego równania całkowego, $K(y - x, t - \tau)$; oraz funkcja $v(y, t)$ są znane, zaś funkcją poszukiwaną jest $u(\zeta, t)$. W monografii [9] dowodzi się, że w przypadkach rozważanych w tej pracy jądro to jest iloczynem dwóch jąder słabo osobliwych, co pozwala znaleźć rozwiązanie tego równania metodą iteracji jąder i kolejnych przybliżeń. Metoda ta, aczkolwiek ścisła, jest dosyć mało przydatna w konkretnych obliczeniach. Dlatego pokrótce przedstawiamy metodę przybliżoną, pozwalającą w stosunkowo prosty sposób otrzymać przybliżone rozwiązanie równania (5.1).

Zapiszmy funkcję podcałkową następująco:

$$(5.2) \quad u(\zeta, t) * K(y - \zeta, t) = H(y, \zeta, t).$$

Zakładamy, iż funkcji $u(\zeta, t)$ poszukiwać będziemy w postaci przybliżonej. W związku

z tym przyjmijmy podział przedziału czasu $(0, T)$ na podprzedziały $\left(0, \frac{1}{2}\Delta\right)$, $\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta,$

$\left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta\right)$, $i = 1, 2, \dots, I$, gdzie $\left(I + \frac{1}{2}\right)\Delta = T$. Na powierzchni S wybierzemy układ

punktów ζ_l , $l = 1, \dots, L$, stanowiących środki ciężkości elementów σ_l . Elementy skończone σ_l mogą mieć kształty np. trójkątów, [15]. Zakłada się, że są one rozłączne, mają wspólne krawędzie, wierzchołki ich są punktami należącymi do S , a cały zbiór elementów $\{\sigma_l\}_{l=1, \dots, L}$ stanowi powierzchnię Lapunowa, stanowiącą przybliżenie powierzchni S . Natomiast na powierzchni $\partial\Omega^*$ wybierzemy zbiór punktów y_m , $m = 1, \dots, L$, stanowiących środki ciężkości elementów Δ_m , dobranych w sposób analogiczny jak elementy σ_l .

Zakładamy, iż zamiast funkcji $u(\zeta, t)$ poszukiwać będziemy jej przybliżonej postaci $Au(\zeta, t)$, określonej następująco:

$$(5.3) \quad Au(\zeta, t) = \sum_{i=1}^{I+1} [u_i(\zeta) - u_{i-1}(\zeta)] \eta \left(t - \left(i - \frac{1}{2} \right) \Delta \right),$$

gdzie

$$(5.4) \quad u_i(\zeta) = \sum_{l=1}^L u_{il} E_{\sigma, l}(\zeta), \quad i = 1, \dots, I, \quad u_0(\zeta) = \varphi(\zeta),$$

$$u_{I+1}(\zeta) = u_I(\zeta).$$

Funkcję $E_{\sigma, l}(\zeta)$ definiujemy następująco:

$$(5.5) \quad E_{\sigma, l}(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \zeta \notin \sigma_l, \\ 1 & \text{gdy } \zeta \in \sigma_l. \end{cases}$$

Podobnie przybliżamy postać jądra $K(y - \zeta, t)$:

$$(5.6) \quad AK(y - \zeta, t) = \sum_{i=1}^{I+1} [K_i(y, \zeta) - K_{i-1}(y, \zeta)] \eta \left(t - \left(i - \frac{1}{2} \right) \Delta \right),$$

gdzie $K_i(y, \zeta) = K(y - \zeta, i\Delta)$, $i = 1, \dots, I$, $K_0(y, \zeta) = 0$ (por. [10], s. 346), $K_{I+1}(y, \zeta) = K_I(y, \zeta)$.

Przybliżoną postać funkcji $H(y, \zeta, \tau)$ nazwiemy $AH(y, \zeta, t)$.

Podstawiając do równania (5.2) w miejsce występujących tam funkcji ich postaci przybliżone, znajdujemy, iż

$$(5.7) \quad AH(y, \zeta, t) = \sum_{i=1}^{I+1} H_k(y, \zeta) (t - k\Delta)_+,$$

gdzie

$$(5.8) \quad H_k(y, \zeta) = \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i, j \in \{1, \dots, I\}}} [u_i(\zeta) - u_{i-1}(\zeta)] [K_j(y, \zeta) - K_{j-1}(y, \zeta)],$$

oraz $(t - k\Delta)_+ = (t - k\Delta) \eta(t - k\Delta)$. Wprowadzając związki

$$(5.9) \quad H_k(y, \zeta) = \sum_{l=1}^L H_{kl}(y) E_{\sigma, l}(\zeta), \quad \text{oraz}$$

$$\hat{K}_j(y, \zeta) = \sum_{l=1}^L K_{jl}(y) E_{\sigma, l}(\zeta),$$

gdzie $K_{il}(y) = K_j(y, \zeta_l)$, a funkcja \hat{K}_j stanowi pewne przybliżenie funkcji K_j , oraz podstawiając prawe strony wzorów (5.9) w miejsce H_k i K_j do związku (5.8) przy wykorzystaniu (5.4), znajdujemy

$$(5.10) \quad H_{kl}(y) = \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i, j \in \{1, \dots, I\}}} [u_{il} - u_{i-1, l}] [K_{jl}(y) - K_{j-1, l}(y)],$$

$$k = 1, \dots, I+1,$$

$$l = 1, \dots, L.$$

Kładąc ponadto

$$(5.11) \quad H_{kl}(y) = \sum_{m=1}^L H_{klm} E_{\lambda, m}(y),$$

$$\hat{K}_{jl}(y) = \sum_{m=1}^L K_{jlm} E_{\lambda, m}(y),$$

gdzie $K_{jlm} = K_{jl}(y_m)$, a funkcja \hat{K}_{jl} stanowi przybliżenie funkcji K_{jl} , oraz podstawiając prawe strony wzorów (5.11) w miejsce H_{kl} i K_{jl} do związku (5.10), znajdujemy

$$(5.12) \quad H_{klm} = \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i, j \in \{1, \dots, I\}}} [u_{il} - u_{l-1, i}] [K_{jlm} - K_{j-1, lm}],$$

$$k = 1, \dots, I+1$$

$$l, m = 1, \dots, L.$$

Równanie (5.1), które dzięki wprowadzeniu funkcji H można zapisać w postaci

$$(5.13) \quad \int_S H(y, \zeta, t) dS_{\zeta} = v(y, t),$$

zapiszemy teraz w postaci przybliżonej. Wprowadzając funkcję Av , aproksymującą v w sposób następujący:

$$(5.14) \quad Av(y, t) = \sum_{k=1}^{I+1} \sum_{m=1}^L v_{km} (t - k\Delta)_+ E_{\lambda, m}(y),$$

oraz wykorzystując związki (5.9), (5.11), (5.12), (5.13) i wstawiając w (5.13) funkcję Av w miejsce v otrzymuje się ostatecznie następujący układ równań na wielkości u_{il} :

$$(5.15) \quad \sum_{l=1}^L B_l \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i, j \in \{1, \dots, I\}}} [u_{il} - u_{l-1, i}] [K_{jlm} - K_{j-1, lm}] = v_{km},$$

gdzie $B_l = \int_{\sigma_l} d\sigma_l$, $k = 1, 2, \dots, I+1$, $m = 1, 2, \dots, L$. Jest to I układów równań, każdy z L niewiadomymi, którymi są wielkości u_{il} . Wyznaczenie tych wielkości pozwala następnie zbudować funkcję $Au(\xi, \tau)$ wg wzorów (5.3) i (5.4).

Podsumowanie

Wykorzystanie potencjałów cieplnych do budowy całkowitej postaci rozwiązań problemów odwrotnych wymiany ciepła pozwala rozwiązywać zagadnienia odwrotne w przestrzeni trójwymiarowej przy dowolnych kształtach rozpatrywanych ciał. Oznacza to możliwość prognozowania obciążeń termicznych elementów maszyn cieplnych w ten sposób, aby wewnątrz tych elementów panowały temperatury o z góry danym na dowolnej powierzchni zawartej wewnątrz tego elementu, $\partial\Omega^*$, rozkładzie. Możliwość ta może zostać wykorzystana w praktyce np. przy optymalizowaniu czasu rozruchu turbin cieplnych, gdyż

od rozkładu temperatury wewnątrz łopatek zależą powstające w nich naprężenia termiczne, mogące — w przypadkach szczególnie niekorzystnych — spowodować trwałe ich uszkodzenia.

Przedstawiona procedura przybliżonego rozwiązywania równań całkowych na gęstości potencjałów wymaga użycia maszyn cyfrowych. Tym niemniej w dobie szybkiego rozwoju elektronicznej techniki obliczeniowej rozwiązywanie na maszynach cyfrowych układów równań typu (5.15) nie przedstawia większych trudności.

Literatura cytowana w tekście

1. M. M. LAVRENTIEV, V. G. ROMANOV, V. G. VASILIEV, *Multidimensional inverse problems for differential equations*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.
2. A. G. TEMKIN, *Obratnyje metody teploprovodnosti*, Izd. Energia, Moskwa, (1963).
3. M. I. IMANALIEV, *Metody rešenija nelinejnych obratnych zadač i ich prilozhenie*, Izd. Ilim, Frunze, (1977).
4. K. GRYSA, M. J. CIAŁKOWSKI, *Zagadnienia odwrotne pól temperatur — przegląd literatury*, Mech. Teoret. Stos., **18**, 4, 535 - 554 (1980).
5. R. G. HILLS, G. P. MULHOLLAND, *The accuracy and resolving power of one dimensional transient inverse heat conduction theory as applied to discrete and inaccurate measurements*, Int. J. Heat Mass Transfer, **22**, 8, 1221 - 1229 (1979).
6. K. GRYSA, M. J. CIAŁKOWSKI, H. KAMIŃSKI, *On a certain inverse temperature field problem of the theory of thermal stresses*, Nucl. Eng. Design, **64**, 2, 169 - 184 (1981).
7. M. IMBER, *Temperature extrapolation mechanism for two-dimensional heat flow*, AIAA Journal, **12**, 8, 1089 - 1093 (1974).
8. M. IMBER, *Two-dimensional inverse conduction problem — further observations*, AIAA Journal, **13**, 1, 114 - 115 (1975).
9. A. PISKOREK, *Równania całkowe*, WNT Warszawa, (1971).
10. H. MARCINKOWSKA, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych*, PWN Warszawa, (1972).
11. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT Warszawa, (1972).
12. M. IMBER, J. KHAN, *Prediction of transit temperature distribution with embedded thermocouples*, AIAA Journal, **10**, 6, 784 - 789, (1972).
13. K. GRYSA, J. J. JANKOWSKI, *O sumowaniu pewnych szeregów Diniego i trygonometrycznych, pojawiających się w zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych*, Mech. Teoret. Stos., **16**, 3, 299 - 319 (1978).
14. K. GRYSA, H. KAMIŃSKI, *O sumowaniu pewnych szeregów trygonometrycznych, występujących w zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych*, ZNPP s. Mechanika, Nr 16, 85 - 97 (1980).
15. J. DECLoux, *Metod konečnych elementov*, Izd. Mir, Moskwa, 1976.

Резюме

О МЕТОДАХ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛОВ В РАЗРЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассуждается трехмерную обратную задачу теплопроводности. Используя термические потенциалы получены результаты в виде интегральных уравнений. Для одномерных случаев представлены решения в виде бесконечных рядов. Для интегральных уравнений описывающих обратные задачи в трехмерном случае показана путь определения решений в приближенном виде.

S u m m a r y

ON METHODS OF THE THEORY OF POTENTIALS IN RESOLVING THE INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS

The three-dimensional inverse heat conduction problems are dealt with. Making use of the thermal potentials one obtains the results in the form of the integral equations. For the one-dimensional cases the solutions have been found in a form of the infinite series. For the integral equations describing the inverse problems in the three-dimensional case a way of determining an approximate form of solution is shown.

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1982 roku

TERMODYFUZJA W ZAGADNIENIU KONTAKTU WARSTWY I PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ

ROMAN MOKRYK

Lwów

ZBIGNIEW OLESIAK

*Instytut Mechaniki
Uniwersytet Warszawski*

1. Wstęp

Dyfuzja jest zjawiskiem związanym z budową molekularną materii i polega na ruchu pojedynczych atomów i molekuł lub jonów. Zjawisko to występuje często w przyrodzie, wykorzystywane jest również w wielu procesach technologicznych przede wszystkim w fizyce materiałów, a ostatnio w elektronice. Mimo charakteru wybitnie molekularnego proces dyfuzji daje się opisać z dobrym przybliżeniem metodami teorii ośrodków ciągłych, które jak wiadomo, nie uwzględniają atomowej struktury materii. Zagadnienia dyfuzji rozpatruje się często również w ramach mechaniki statystycznej.

Przypuśćmy, że mamy do czynienia z ciałem stałym o określonych własnościach. Dla potrzeb technicznych badane są zjawiska dyfundowania do obszaru zajmowanego przez ciało stałe cząstek otaczającego je gazu, cieczy, lub innego ciała stałego w przypadku ich kontaktu. Intensywność procesu dyfuzji, jego natężenie, zależy w pierwszym rzędzie od własności chemicznych substancji biorących udział w dyfuzji, ale nie tylko. Ważne znaczenie odgrywają czynniki fizyczne jak np. ciśnienie otaczającego gazu lub cieczy, siła nacisku przy kontakcie dwóch ciał, temperatura, kierunek i natężenie strumienia ciepła, pole elektromagnetyczne, stałe materiałowe mechaniczne i termiczne, itd.

Łatwo stwierdzić, że modele matematyczne dyfuzji czy też termodyfuzji, gdy rozpatrywane jest jedno ciało z otaczającą cieczą lub gazem są znacznie prostsze, a odpowiednie równania łatwiejsze do rozwiązania w porównaniu z przypadkiem równań dyfuzji między ciałami stałymi poprzez powierzchnie kontaktu. Znacznie bardziej skomplikowane są zagadnienia dynamiczne, gdy ciśnienie, strumień ciepła, powierzchnia kontaktu, pole elektromagnetyczne są funkcjami czasu. Ostatnio przeprowadzono doświadczenia z dyfuzją metali w warunkach nieważkości i próżni kosmicznej. Wyniki tych doświadczeń są trudno dostępne dla skonfrontowania z teorią.

Założymy tu, że powierzchnia kontaktu jest płaszczyzną i rozpatrzmy przypadek

termodyfuzji między warstwą sprężystą i półprzestrzenią (lub między dwiema półprzestrzeniami), obie izotropowe i jednorodne lecz o różnych stałych materiałowych. Przy kontakcie dwóch ciał proces termodyfuzyjny może odbywać się w ten sposób, że materia przechodzi od ciała 1 do ciała 2, lub na odwrót od ciała 2 do ciała 1, może również mieć miejsce porównywalna ilościowo dyfuzja dwustronna z przechodzeniem materii w obu kierunkach.

Podstawowe równania termodyfuzji, w oparciu o termodynamikę procesów nieodwracalnych [1], zostały podane przez Ja. S. PIDSTRYHACZA [2, 3] i W. NOWACKIEGO [5, 6]. W dziedzinie tej rozwiązano niewiele zagadnień szczegółowych, wymienimy tu prace [3, 4, 7, 8, 9 i 12].

W tej pracy zajmiemy się przypadkiem, gdy termodyfuzja jednego ze składników jest o wiele bardziej istotna i interesować nas będzie zmiana koncentracji tego właśnie składnika pod wpływem pola odkształcenia i temperatury. Zagadnienie kontaktu półprzestrzeni zostało rozwiązane, w ramach przyjętych założeń, dla wszystkich czasów t , lecz bez uwzględnienia sił zewnętrznych. Przy kontakcie warstwy z półprzestrzenią uwzględniamy siły ciśnienia działające na swobodną powierzchnię warstwy przenoszące się przez powierzchnię kontaktu na półprzestrzeń sprężystą. W tym przypadku zagadnienie zostało rozwiązane dla dużych czasów t , co wynika z przybliżonego obliczenia transformat odwrotnych Laplace'a.

W wyprowadzonych równaniach i wzorach uwzględniamy pełne sprzężenie pola koncentracji, temperatury i odkształcenia. Dotyczy to przede wszystkim uogólnionego prawa Fouriera i Ficka (2.4) i (2.5) i wynikających z nich równań.

2. Równania i podstawowe związki termodyfuzji ciał sprężystych

Za punkt wyjścia bierzemy układ równań różniczkowych cząstkowych termodyfuzji ośrodka sprężystego w następującej postaci [2, 5]:

$$(2.1) \quad \mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \bar{u} + \bar{X} = \rho \ddot{\bar{u}} + \gamma_{\Theta} \text{grad } \Theta + \gamma_c \text{grad } c,$$

$$(2.2) \quad (k' \nabla^2 - n \partial_t) \Theta = \gamma_{\Theta} \text{div } \dot{\bar{u}} + d \dot{c},$$

$$(2.3) \quad (a \nabla^2 - m \partial_t) c = \nabla^2 (\gamma_c \text{div } \bar{u} + dc),$$

gdzie (2.1) jest uogólnionym równaniem Naviera, (2.2) uogólnionym równaniem przewodnictwa cieplnego, a (2.3) równaniem bilansu koncentracji składnika. We wzorach tych uwzględniliśmy uogólnione prawo Fouriera (przewodnictwa cieplnego), Ficka (termodyfuzji) i Hooke'a:

$$(2.4) \quad T_0 \bar{q} = (dL_{\eta a} - L_{aa}) \text{grad } T + L_{\eta a} \gamma_c \text{grad div } \bar{u} + aL_{\eta a} \text{grad } c,$$

$$(2.5) \quad T_0 \bar{\eta} = (dL_{\eta \eta} - L_{\eta a}) \text{grad } T + L_{\eta a} \gamma_c \text{grad div } \bar{u} + aL_{\eta \eta} \text{grad } c,$$

$$(2.6) \quad \sigma = 2\mu \epsilon + (\lambda \text{div } \bar{u} - \gamma_{\Theta} \Theta - \gamma_c c) \cdot \mathbf{1}.$$

We wzorach powyższych \bar{q} jest strumieniem ciepła, c — koncentracją składnika, $\bar{\eta}$ — strumieniem dyfundującej masy, L_{aa} , $L_{\eta a}$, $L_{\eta \eta}$ są fenomenologicznymi współczynnikami Onsagera spełniającymi warunki $L_{aa} > 0$, $L_{\eta \eta} > 0$, $L_{\eta \eta} L_{aa} - L_{\eta a}^2 > 0$, γ_c , γ_e , γ_n , d , m , a , n są stałymi, u jest wektorem przemieszczenia, $\Theta = T - T_0$ różnicą temperatur względem

stanu naturalnego, σ i ϵ są odpowiednio tensorami naprężenia i odkształcenia, $\mathbf{1}$ tensorem jednostkowym, λ , μ są stałymi Lamégo, ponadto przyjęliśmy oznaczenia $T_0 k' = k$, $mL_{\eta\eta} = T_0$.

3. Zagadnienie kwazi-stacjonarne

Celem pracy jest wyprowadzenie związków i zbadanie wpływu niestacjonarnych pól odkształcenia i temperatury na rozkład koncentracji dyfundującego składnika w warunkach fizycznego kontaktu dwóch ciał sprężystych. Zagadnienie rozwiążemy przy następujących założeniach. Rozpatrzmy procesy, w których można pominąć wpływ sił masowych i sił bezwładności w równaniu bilansu pędu. Również zaniedbamy wpływ zmiany odkształcenia na pole temperatury, uwzględniając jednak wpływ odkształcenia na pole koncentracji. Przy tych założeniach równania (2.1) - (2.3) przyjmują postać

$$(3.1) \quad \mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \bar{u} = \gamma_\Theta \text{grad } \Theta + \gamma_c \text{grad } c,$$

$$(3.2) \quad k' \nabla^2 \Theta - n \frac{\partial \Theta}{\partial t} = d \frac{\partial c}{\partial t},$$

$$(3.3) \quad a \nabla^2 c - m \frac{\partial c}{\partial t} = \gamma_c \nabla^2 \text{div } \bar{u} + d \nabla^2 c.$$

Równania różniczkowe cząstkowe (3.1) - (3.3) przekształcimy do bardziej dogodnej postaci. Podziałamy operatorem div na równanie (3.1), otrzymując

$$(3.4) \quad (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \text{div } \bar{u} = \gamma_\Theta \nabla^2 \Theta + \gamma_c \nabla^2 c.$$

Po uwzględnieniu równania (3.4) wyrugujemy $\nabla^2 \text{div } \bar{u}$ z równania (3.3). Wtedy równania (3.2) i (3.3) sprowadzą się do następującego układu równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu

$$(3.5) \quad \nabla^2 c - \frac{1}{k_c} \frac{\partial c}{\partial t} + \delta_c \frac{\partial \Theta}{\partial t},$$

$$(3.6) \quad \nabla^2 \Theta - \frac{1}{k_T} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \delta_T \frac{\partial c}{\partial t},$$

gdzie

$$k_c = \frac{[(\lambda + 2\mu)(a - d) - \gamma_c^2]}{[m(\lambda + 2\mu) + d\gamma_c \gamma_\Theta] k'}, \quad \delta_c = \frac{n\gamma_c \gamma_\Theta}{[(\lambda + 2\mu)(a - d) - \gamma_c^2] k'}, \quad k_T n = k', \quad \delta_T k' = d.$$

W ten sposób sprowadziliśmy przypadek kwazi-stacjonarny do układu dwóch równań sprzężonych (3.5) i (3.6) oraz równania Naviera (uogólnionego) (3.1). Zagadnienia kwazi-stacjonarne termodyfuzji ośrodków sprężystych były już rozpatrywane w pracach [3, 4] jednak bez uwzględnienia wpływu zmian pól odkształcenia i koncentracji na temperaturę. W pracy [7] pominięto wpływ odkształcenia na pole temperatury i koncentracji.

4. Termodyfuzja przy kontakcie warstwy sprężystej i półprzestrzeni sprężystej

Warstwa sprężysta o grubości h znajduje się w stanie idealnego kontaktu z półprzestrzenią sprężystą. Układ współrzędnych dobieramy w ten sposób, że płaszczyzną kontaktu

jest płaszczyzna $z = 0$, a płaszczyzną swobodną $z = +h$. Zagadnienie nie zależy od współrzędnych x, y . W tym układzie równania różniczkowe cząstkowe (3.1), (3.5) i (3.6) sprowadzą się do następujących równań

$$(4.1) \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \gamma_\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \gamma_c \frac{\partial c}{\partial z},$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - \frac{1}{k_c} \frac{\partial c}{\partial t} = \delta_c \frac{\partial \Theta}{\partial t},$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{1}{k_T} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \delta_T \frac{\partial c}{\partial t}.$$

W dalszym ciągu wartości stałych i składowe rozpatrywanych pól będziemy oznaczać wskaźnikiem „1” dla warstwy i wskaźnikiem „2” dla półprzestrzeni. Zakładamy, że w stanie naturalnym (czyli początkowym) jest brak odkształceń, a pola koncentracji i temperatury przyjmują wartości:

dla $t = 0$

$$(4.4) \quad \Theta_1(z, 0) = \Theta_1^0, \quad \Theta_2(z, 0) = \Theta_2^0,$$

$$(4.5) \quad c_1(z, 0) = c_1^0, \quad c_2(z, 0) = c_2^0.$$

Założmy ponadto, że na swobodnej powierzchni warstwy $z = +h$ działa temperatura i ciśnienie

$$(4.6) \quad \Theta_1(h, t) = q(t), \quad \sigma_{zz}(h, t) = -\sigma(t)$$

strumień dyfundującej materii jest natomiast równy zeru:

$$(4.7) \quad \left[D_{\eta c}^1 \frac{\partial c_1}{\partial z} + D_{\eta T}^1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} + D_{\eta E}^1 \frac{\partial e_1}{\partial z} \right]_{z=h} = 0$$

albo znany jest potencjał chemiczny

$$(4.8) \quad M^1 = -\gamma_c \varepsilon_{kk1} - d^1 \Theta_1 - a^1 c.$$

W płaszczyźnie styku warstwy i półprzestrzeni, tzn. dla $z = 0$, zachodzą warunki ciągłości:

strumienia ciepła

$$(4.9) \quad D_{qT}^1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} + D_{qc}^1 \frac{\partial c_1}{\partial z} + D_{qE}^1 \frac{\partial e_1}{\partial z} = D_{qT}^2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z} + D_{qc}^2 \frac{\partial c_2}{\partial z} + D_{qE}^2 \frac{\partial e_2}{\partial z},$$

strumienia dyfundującej masy

$$(4.10) \quad D_{\eta T}^1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} + D_{\eta c}^1 \frac{\partial c_1}{\partial z} + D_{\eta E}^1 \frac{\partial e_1}{\partial z} = D_{\eta T}^2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z} + D_{\eta c}^2 \frac{\partial c_2}{\partial z} + D_{\eta E}^2 \frac{\partial e_2}{\partial z}$$

ponadto, w przypadku idealnego kontaktu termicznego, równość temperatury

$$(4.11) \quad \Theta_1 = \Theta_2,$$

oraz równość wartości potencjału chemicznego

$$(4.12) \quad d^1 \Theta_1 + a^1 c_1 + \gamma_c^1 e_1 = d^2 \Theta_2 + a^2 c_2 + \gamma_c^2 e_2.$$

Dla $z \rightarrow -\infty$ przyjmujemy, że

$$(4.13) \quad \Theta_2 \rightarrow \Theta_2^0, \quad c_2 \rightarrow c_2^0.$$

We wzorach (4.9) i (4.10) oraz w dalszym ciągu przyjęto następujące oznaczenia

$$(4.14) \quad \begin{aligned} T_0 D_{qc} &= aL_{\eta q}, & T_0 D_{qT} &= dL_{\eta q} - L_{qq}, & T_0 D_{qE} &= \gamma_c L_{\eta q}, \\ T_0 D_{\eta c} &= aL_{\eta \eta}, & T_0 D_{\eta T} &= dL_{\eta \eta} - L_{\eta q}, & T_0 D_{\eta E} &= \gamma_c L_{\eta \eta}. \end{aligned}$$

Przy przyjętych założeniach: $e = \operatorname{div} \bar{u} = \frac{\partial uz}{\partial z}$. Z uogólnionego prawa Hooke'a (2.6), po wykorzystaniu równania równowagi $\sigma_{zz}(z, t) = -\sigma(t)$, otrzymamy

$$(4.15) \quad \dot{e} = \gamma_\Theta^* \Theta + \gamma_c^* c + \sigma^*(t)$$

gdzie

$$(\lambda + 2\mu)\gamma_\Theta^* = \gamma_\Theta, \quad \gamma_c^*(\lambda + 2\mu) = \gamma_c$$

oraz

$$(\lambda + 2\mu)\sigma^*(t) = -\sigma(t).$$

5. Rozwiązanie metodą przekształcenia całkowego Laplace'a

Transformaty Laplace'a będziemy oznaczać wężykiem nad odpowiednią literą. Zastosujemy transformatę Laplace'a do równań (4.2) i (4.3). Otrzymamy wtedy

$$(5.1) \quad \frac{d^2 \check{c}}{dz^2} - \frac{1}{k_c} [s\check{c} - c^0] = \delta_c [s\check{\Theta} - \Theta^0],$$

$$(5.2) \quad \frac{d^2 \check{\Theta}}{dz^2} - \frac{1}{k_T} [s\check{\Theta} - \Theta^0] = \delta_T [s\check{c} - c^0].$$

Równanie charakterystyczne powyższego układu równań przyjmie postać

$$(5.3) \quad \lambda^4 - a_k s \lambda^2 + a_\delta s^2 = 0$$

gdzie

$$a_k = \frac{1}{k_c} + \frac{1}{k_T}, \quad a_\delta = \frac{1}{k_c k_T} - \delta_c \delta_T$$

Pierwiastki równania charakterystycznego przyjmują wartości

$$(5.4) \quad \lambda_1 = \sqrt{sr_+}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{sr_+}, \quad \lambda_3 = \sqrt{sr_-}, \quad \lambda_4 = -\sqrt{sr_-},$$

gdzie $r_{\pm} = \frac{1}{2}(a_k \pm \sqrt{a_k^2 - 4a_\delta})$.

Można udowodnić, że wyróżnik określający pierwiastki równania charakterystycznego jest dodatnio określony

$$(5.5) \quad a_k^2 - 4a_\delta = \left(\frac{1}{k_c} + \frac{1}{k_T}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{k_c k_T} - \delta_c \delta_T\right) = \left(\frac{1}{k_c} - \frac{1}{k_T}\right)^2 + 4\delta_T \delta_c > 0$$

zgodnie z definicją wielkości δ_c i δ_T [5]. Ponadto

$$a_\delta = \frac{1}{k_c k_T} - \delta_c \delta_T = \frac{n}{k'} \frac{m(\lambda + 2\mu)}{[(\lambda + 2\mu)(a - d) - \gamma_c^2]}.$$

Ponieważ stałe wchodzące do powyższego wzoru są dodatnie, wynika że $a_\delta > 0$, a stąd również, że $r_{+-} > 0$.

Całkę ogólną układu równań (5.1) i (5.2) można przedstawić w postaci następującej:

$$(5.6) \quad \tilde{z}(z, s) = \frac{1}{\delta_T k_T} \left[\alpha_+ (A_1 \exp(\sqrt{sr_+} z) + A_2 \exp(-\sqrt{sr_+} z)) + \right. \\ \left. + \alpha_- (A_3 \exp(\sqrt{sr_-} z) + A_4 \exp(-\sqrt{sr_-} z)) \right] + c^0 s^{-1},$$

$$(5.7) \quad \tilde{\Theta}(z, s) = A_1 \exp(\sqrt{sr_+} z) + A_2 \exp(-\sqrt{sr_+} z) + A_3 \exp(\sqrt{sr_-} z) + \\ + A_4 \exp(-\sqrt{sr_-} z) + \Theta^0 s^{-1},$$

gdzie $\alpha_+ = k_T r_+ - 1$, $\alpha_- = k_T r_- - 1$

Zamiast rozwiązania (5.6) i (5.7) możemy przyjąć całkę ogólną układu (5.1) i (5.2) w postaci

$$(5.8) \quad \tilde{z}(z, s) = \frac{1}{\delta_T k_T} \left[\alpha_+ (B_1 \text{Ch}(\sqrt{sr_+} z) + B_2 \text{Sh}(\sqrt{sr_+} z)) + \alpha_- (B_3 \text{Ch}(\sqrt{sr_-} z) + \right. \\ \left. + B_4 \text{Sh}(\sqrt{sr_-} z)) \right] + c^0 s^{-1},$$

$$(5.9) \quad \tilde{\Theta}(z, s) = B_1 \text{Ch}(\sqrt{sr_+} z) + B_2 \text{Sh}(\sqrt{sr_+} z) + B_3 \text{Ch}(\sqrt{sr_-} z) + B_4 \text{Sh}(\sqrt{sr_-} z) + \Theta^0 s^{-1}.$$

W przypadku półprzestrzeni, wykorzystanie warunków w nieskończoności prowadzi do następujących wartości stałych (dla $z \rightarrow -\infty$)

$$(5.10) \quad A_2^0 = A_4^0 = 0, \quad B_1^0 = B_2^0, \quad B_3^0 = B_4^0$$

6. Zagadnienie termodyfuzji w przypadku styku dwóch półprzestrzeni sprężystych

Rozpatrzmy przypadek szczególny, gdy grubość warstwy sprężystej wzrasta nieograniczenie. Warunki początkowe zachowują postać poprzednią (4.4) i (4.5), podobnie warunki brzegowe (4.9) - (4.12). Z warunków w nieskończoności otrzymujemy obecnie dla $z \rightarrow +\infty$ $\Theta_1 \rightarrow \Theta_1^0$, $c_1 \rightarrow c_1^0$

oraz dla $z \rightarrow -\infty$ $\Theta_2 \rightarrow \Theta_2^0$ $c_2 \rightarrow c_2^0$

Warunki te będą spełnione, gdy we wzorach (5.6) i (5.7) podstawimy

$$(6.1) \quad A_1^1 = A_3^1 = 0, \quad A_2^1 = B_1^1 = -B_2^1, \quad A_4^1 = B_3^1 = -B_4^1$$

$$(6.2) \quad A_2^2 = A_4^2 = 0, \quad A_1^2 = B_1^2 = B_2^2, \quad A_3^2 = B_3^2 = B_4^2$$

Otrzymujemy następujący układ równań algebraicznych, z których wyznaczymy pozostałe parametry transformat:

$$(6.3) \quad B_1^1 D_{q+}^1 + B_3^1 D_{q-}^1 + B_1^2 D_{q+}^2 + B_3^2 D_{q-}^2 = 0, \\ B_1^1 D_{q+}^1 + B_3^1 D_{q-}^1 + B_1^2 D_{q+}^2 + B_3^2 D_{q-}^2 = 0, \\ B_1^1 + B_3^1 - B_1^2 - B_3^2 = \frac{1}{s} [(\Theta_2^0 - \Theta_1^0)]$$

$$B_1^1 a_+^1 + B_3^1 a_-^1 + B_1^2 a_+^2 - B_3^2 a_-^2 = \frac{1}{s} [(\hat{\gamma}_\delta^0 \Theta + \hat{\gamma}_c^0 c_2^0) - (\hat{\gamma}_\delta^1 \Theta_1^0 + \hat{\gamma}_c^1 c_1^0)]$$

gdzie

$$\hat{\gamma}_\Theta^k = -(\gamma_c \gamma_\Theta^{*k} + d^k), \quad \hat{\gamma}_c = -(\gamma_c^k \gamma_\Theta^{*k} + a^k), \quad a_\pm^k = \hat{\gamma}_\Theta^k + \frac{\alpha_\pm^k \hat{\gamma}_c^k}{\delta_T^k K_T^k}$$

$$D_{q^{(n)\pm}}^k = \sqrt{r_\pm^k} \left[(D_{q^{(n)T}^k} + \gamma_\Theta^{*k} + \frac{\alpha_\pm^k (D_{q^{(n)C}^k} + \gamma_c^{*k})}{\delta_T^k K_T^k} \right].$$

Oznaczmy wyznacznik podstawowy układu równań

$$(6.4) \quad \Delta^* = \begin{vmatrix} D_{q^+}^1 & D_{q^-}^1 & D_{q^+}^2 & D_{q^-}^2 \\ D_{\eta^+}^1 & D_{\eta^-}^1 & D_{\eta^+}^2 & D_{\eta^-}^2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ a_+^1 & a_-^1 & a_+^2 & a_-^2 \end{vmatrix}$$

Wtedy rozwiązanie układu równań (6.3) możemy zapisać następująco

$$(6.5) \quad B_i^k = \frac{1}{s \Delta^*} [(\Theta_2^0 - \Theta_1^0) A_{ik} + \{(\hat{\gamma}_\Theta^2 \Theta_2^0 + \hat{\gamma}_c^2 C_2^0) - (\hat{\gamma}_\Theta^1 \Theta_1^0 + \hat{\gamma}_c^1 C_1^0)\} C_{ik}.$$

Współczynniki A_{ik} oraz C_{ik} zależą wyłącznie od charakterystyk materiałowych i wyznacza się je z rozwiązania układu równań (6.3). Odpowiednie wyznaczniki oznaczymy następująco

$$(6.6) \quad B_i^k = \frac{P_{ik}}{\Delta^* s}, \quad k = 1, 2, \quad i = 1, 3.$$

Wtedy całka ogólna układu równań (5.6), (5.7) przyjmie postać

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \tilde{c}_1(z, s) &= \frac{1}{\delta_T K_T} [\alpha_+^1 A_2^1 \exp(-\sqrt{sr_+z}) + \alpha_-^1 A_4^1 \exp(-\sqrt{sr_-z})] + \frac{C_1^0}{s}, \\ \tilde{\Theta}_1(z, s) &= A_2^1 \exp(-\sqrt{sr_+z}) + A_4^1 \exp(-\sqrt{sr_-z}) + \frac{\Theta_1^0}{s}, \\ \tilde{c}_2(z, s) &= \frac{1}{\delta_T K_T} [\alpha_+^2 A_1^2 \exp(\sqrt{sr_+z}) + \alpha_-^2 A_3^2 \exp(\sqrt{sr_-z})] + \frac{C_2^0}{s}, \\ \tilde{\Theta}_2(z, s) &= A_1^2 \exp(\sqrt{sr_+z}) + A_3^2 \exp(\sqrt{sr_-z}) + \frac{\Theta_2^0}{s}, \end{aligned}$$

gdzie

$$A_i^1 = -\frac{P_{i1}}{s \Delta^*}, \quad i = 2, 4; \quad A_i^2 = \frac{P_{i2}}{s \Delta^*}, \quad i = 1, 3.$$

Po odwróceniu transformat Laplace'a okazuje się, że rozwiązanie da się wyrazić przez kombinacje współczynników i funkcji błędu:

$$(6.8) \quad C_1(z, t) = C_1^0 - \frac{1}{\delta_T^2 K_T^2 \Delta^*} \left[\alpha_+^1 P_{11} \operatorname{Erf} \left(\frac{z \sqrt{r_+^1}}{2 \sqrt{t}} \right) + \alpha_-^1 P_{31} \operatorname{Erf} \left(\frac{z \sqrt{r_-^1}}{2 \sqrt{t}} \right) \right], \quad z > 0$$

$$(6.9) \quad \Theta_1(z, t) = \Theta_1^0 - \frac{1}{\Delta^*} \left[P_{11} \operatorname{Erf} \left(\frac{z \sqrt{r_+^1}}{2 \sqrt{t}} \right) + P_{31} \operatorname{Erf} \left(\frac{z \sqrt{r_-^1}}{2 \sqrt{t}} \right) \right],$$

$$(6.10) \quad C_2(z, t) = C_2^0 + \frac{1}{\delta_T^2 K_T^2} \left[\alpha_+^2 P_{12} \operatorname{Erf} \left(-\frac{z \sqrt{r_+^2}}{2 \sqrt{t}} \right) + \alpha_-^2 P_{32} \operatorname{Erf} \left(-\frac{z \sqrt{r_-^2}}{2 \sqrt{t}} \right) \right], \quad z < 0$$

$$(6.11) \quad \Theta_2(z, t) = \Theta_2^0 + \frac{1}{\Delta^*} \left[P_{12} \operatorname{Erf} \left(-\frac{z \sqrt{r_+^2}}{2 \sqrt{t}} \right) + P_{32} \operatorname{Erf} \left(-\frac{z \sqrt{r_-^2}}{2 \sqrt{t}} \right) \right],$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 P_{ik} &= (\Theta_2^0 - \Theta_1^0) A_{ik} + [(\hat{\gamma}_\Theta^2 \Theta_2^0 + \hat{\gamma}_c^2 C_2^0) - (\hat{\gamma}_\Theta^1 \Theta_1^0 + \hat{\gamma}_c^1 C_1^0)] C_{ik}, \\
 A_{11} &= a_-^1 (D_{q+}^2 D_{\eta-}^2 - D_{q-}^2 D_{\eta+}^2) + a_+^2 (D_{q-}^1 D_{\eta-}^2 - D_{q-}^2 D_{\eta-}^1) + a_-^2 (D_{\eta-}^1 D_{q+}^2 - D_{q-}^1 D_{\eta+}^2), \\
 A_{31} &= a_+^1 (D_{q-}^2 D_{\eta+}^2 - D_{q+}^2 D_{\eta-}^2) + a_+^2 (D_{q-}^1 D_{\eta+}^1 - D_{q+}^1 D_{\eta-}^2) + a_-^2 (D_{q+}^1 D_{\eta+}^2 - D_{\eta+}^1 D_{q+}^2), \\
 A_{12} &= a_+^1 (D_{q-}^1 D_{\eta-}^2 - D_{\eta-}^1 D_{q-}^2) - a_-^1 (D_{q+}^1 D_{\eta-}^2 - D_{\eta+}^1 D_{q-}^2) - a_-^2 (D_{q+}^1 D_{\eta-}^1 - D_{\eta+}^1 D_{q-}^1), \\
 A_{32} &= a_+^1 (D_{q+}^2 D_{\eta-}^1 - D_{q-}^1 D_{\eta+}^2) + a_+^1 (D_{q+}^1 D_{\eta+}^2 - D_{\eta+}^1 D_{q+}^2) + a_+^2 (D_{q+}^1 D_{\eta-}^1 - D_{q-}^1 D_{\eta+}^1), \\
 C_{11} &= D_{q-}^1 (D_{\eta+}^2 - D_{\eta-}^2) - D_{q+}^2 (D_{\eta-}^2 + D_{\eta-}^1) + D_{q-}^2 (D_{\eta+}^2 + D_{\eta+}^1), \\
 C_{31} &= D_{q+}^1 (D_{\eta-}^2 - D_{\eta+}^2) + D_{q+}^2 (D_{\eta-}^2 + D_{\eta+}^1) - D_{q-}^2 (D_{\eta+}^2 + D_{\eta+}^1), \\
 C_{12} &= D_{q+}^1 (D_{\eta-}^2 + D_{\eta-}^1) + D_{q-}^1 (D_{\eta-}^2 + D_{\eta+}^1) - D_{q-}^2 (D_{\eta-}^1 + D_{\eta+}^1), \\
 C_{32} &= D_{q+}^1 (D_{\eta+}^2 + D_{\eta-}^1) - D_{q-}^1 (D_{\eta+}^2 + D_{\eta+}^1) + D_{q+}^2 (D_{\eta-}^1 + D_{\eta+}^1).
 \end{aligned}$$

7. Rozwiązanie w przypadku styku warstwy z półprzestrzenią

Rozpatrzmy termodyfuzję poprzez płaszczyznę kontaktu warstwy sprężystej z półprzestrzenią sprężystą z warunkami początkowymi (4.4) - (4.7), warunkami brzegowymi na swobodnej powierzchni warstwy (4.6) i (4.7). Ponadto spełnione są warunki ciągłości odpowiednich strumieni (4.9) - (4.12). Wtedy układ równań algebraicznych, z którego wyznaczamy parametry B_k^i przyjmuje postać następującą

$$\begin{aligned}
 B_1^1 \text{Ch}(\sqrt{sr_+^1} h) + B_2^1 \text{Sh}(\sqrt{sr_+^1} h) + B_3^1 \text{Ch}(\sqrt{sr_-^1} h) + B_4^1 \text{Sh}(\sqrt{sr_-^1} h) &= -\Theta_1^0 s^{-1} + \check{q}(s), \\
 a_+^1 B_1^1 \text{Ch}(\sqrt{sr_+^1} h) + a_+^1 B_2^1 \text{Sh}(\sqrt{sr_+^1} h) + a_-^1 B_3^1 \text{Ch}(\sqrt{sr_-^1} h) + \\
 &+ a_+^1 B_4^1 \text{Sh}(\sqrt{sr_-^1} h) = M^*(s) - \frac{1}{s} (\hat{\gamma}_\Theta^1 \Theta_1^0 + \hat{\gamma}_c^1 c_1^0), \\
 B_2^1 D_{q+}^1 + B_4^1 D_{q-}^1 - B_1^2 D_{q+}^2 - B_3^2 D_{q-}^2 &= 0, \\
 B_2^1 D_{\eta+}^1 + B_4^1 D_{\eta-}^1 - B_1^2 D_{\eta+}^2 - B_3^2 D_{\eta-}^2 &= 0, \\
 (7.1) \quad B_1^1 + B_3^1 - B_1^2 - B_3^2 &= \frac{1}{s} (\Theta_2^0 - \Theta_1^0), \\
 B_1^1 a_+^1 + B_3^1 a_-^1 - B_1^2 a_+^2 - B_3^2 a_-^2 &= \frac{1}{s} [\hat{\gamma}_\Theta^2 \Theta_2^0 + \hat{\gamma}_c^2 C_2^0] - (\hat{\gamma}_\Theta^1 \Theta_1^0 + \hat{\gamma}_c^1 C_1^0) + (\gamma_\sigma^2 - \gamma_\sigma^1) \check{\sigma}(s),
 \end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia

$$M^*(s) = \tilde{M}^1(s) - \gamma_\sigma^1 \check{\sigma}(s), \quad \gamma_\sigma^K = -\frac{(\gamma_c^K)^2}{\lambda^K + 2\mu^K}$$

Podstawowy wyznacznik układu (7.1) ma następującą strukturę

$$\begin{aligned}
 (7.2) \quad \Delta(s) &= (a_+^1 - a_-^1) [\Delta_1 \text{Ch}(\sqrt{sr_+^1} h) \text{Ch}(\sqrt{sr_-^1} h) + \Delta_2 \text{Ch}(\sqrt{sr_+^1} h) \text{Sh}(\sqrt{sr_-^1} h) + \\
 &+ \Delta_3 \text{Sh}(\sqrt{sr_+^1} h) \text{Ch}(\sqrt{sr_-^1} h) + \Delta_4 \text{Sh}(\sqrt{sr_+^1} h) \text{Sh}(\sqrt{sr_-^1} h) + \Delta_5 \text{Ch}(\sqrt{sr_-^1} h) \text{Sh}(\sqrt{sr_+^1} h)],
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= a_+^2 (D_{q+}^1 D_{\eta-}^1 - D_{\eta+}^1 D_{q-}^1), \\
 \Delta_2 &= (a_-^2 - a_+^2) (D_{\eta+}^1 D_{q+}^2 + D_{\eta+}^2 D_{q+}^1) - (2a_+^1 + a_+^2 - a_-^1) [D_{q+}^1 + (D_{\eta-}^2 - D_{\eta+}^2) - D_{\eta+}^1 (D_{q-}^2 - D_{q+}^2)], \\
 \Delta_3 &= a_+^2 (D_{\eta+}^2 D_{q-}^2 - D_{q+}^2 D_{\eta-}^2) - (a_+^1 + a_+^2) [D_{q-}^1 (D_{\eta-}^2 - D_{\eta+}^2) - D_{\eta-}^1 (D_{q-}^2 - D_{q+}^2)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= (a_+^1 - a_-^1)[D_{\eta_+}^2(D_{q_-}^2 - D_{q_+}^2) - D_{q_+}^2(D_{\eta_-}^2 - D_{\eta_+}^2)], \\ \Delta_5 &= a_+^2(D_{\eta_+}^2 D_{q_+}^1 - D_{q_+}^2 D_{\eta_+}^1) + (a_-^2 - a_+^2)(D_{\eta_+}^1 D_{q_+}^2 + D_{\eta_+}^2 D_{q_+}^1). \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu (7.1) przyjmuje postać

$$(7.3) \quad B_i^k = \frac{\Delta_i^k}{\Delta(s)} \quad \begin{array}{ll} \text{dla } k = 1, & i = 1, 2, 3, 4, \\ \text{dla } k = 2, & i = 1, 3, \end{array}$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia

$$(7.4) \quad \Delta_i^k = \sum_{m=1}^4 \varphi_{im}^k P_m,$$

oraz

$$(7.5) \quad \begin{aligned} P_1 &= -\frac{1}{s} \Theta_1^0 + \tilde{q}(s), \\ P_2 &= M^*(s) - \frac{1}{s} (\hat{\gamma}_\Theta \Theta_1^0 + \hat{x}_c C_1^0), \\ P_3 &= \frac{1}{s} (\Theta_2^0 - \Theta_1^0), \\ P_4 &= \frac{1}{s} [(\hat{\gamma}_\Theta^2 \Theta_2^0 + \hat{\gamma}_c^2 C_2^0) - (\hat{\gamma}_\Theta^1 + \hat{\gamma}_c^1 C_1^0)] + (\gamma_\sigma^2 - \gamma_\sigma^1) \tilde{\sigma}(s). \end{aligned}$$

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \varphi_{11}^1 &= [\Delta_{11} a_-^1 + \Delta_{14} (a_+^1 - a_-^1)] \text{sh}_+ + a_-^1 \Delta_{12} \text{ch}_- + a_-^1 \Delta_{13} \text{sh}_-, \\ \varphi_{12}^1 &= -[\Delta_{11} \text{sh}_+ + \Delta_{12} \text{ch}_- + \Delta_{13} \text{sh}_-], \\ \varphi_{13}^1 &= (a_+^1 - a_-^1) (\Delta_{15} \text{ch}_- + \Delta_{16} \text{sh}_-) \text{sh}_+, \\ \varphi_{14}^1 &= (a_+^1 - a_-^1) (\Delta_{17} \text{ch}_- + \Delta_{18} \text{sh}_-) \text{sh}_+, \\ \varphi_{21}^1 &= -[\Delta_{21} a_-^1 + \Delta_{24} (a_+^1 - a_-^1)] \text{ch}_+ + a_-^1 (\Delta_{22} \text{ch}_- - \Delta_{23} \text{sh}_-), \\ \varphi_{22}^2 &= \Delta_{21} \text{ch}_+ - \Delta_{22} \text{ch}_- + \Delta_{23} \text{sh}_-, \\ \varphi_{23}^1 &= (a_+^1 - a_-^1) \text{ch}_+ (\Delta_{25} \text{ch}_- - \Delta_{26} \text{sh}_-), \\ \varphi_{24}^1 &= (a_-^1 - a_+^1) \text{ch}_+ (\Delta_{27} \text{ch}_- - \Delta_{18} \text{sh}_-), \\ \varphi_{31}^1 &= [\Delta_{34} (a_-^1 - a_+^1) + a_+^1 \Delta_{33}] \text{sh}_- + a_+^1 (\Delta_{31} \text{ch}_+ - \Delta_{22} \text{sh}_+), \\ \varphi_{32}^1 &= -[\Delta_{31} \text{ch}_+ - \Delta_{32} \text{sh}_+ + \Delta_{33} \text{sh}_-], \\ \varphi_{33}^1 &= (a_+^1 - a_-^1) (\Delta_{35} \text{ch}_+ - \Delta_{36} \text{sh}_+) \text{sh}_-, \\ \varphi_{34}^1 &= (a_-^1 - a_+^1) (\Delta_{37} \text{ch}_+ - \Delta_{38} \text{sh}_+) \text{sh}_-, \\ \varphi_{41}^1 &= -[a_+^1 \Delta_{41} + \Delta_{44} (a_-^1 - a_+^1)] \text{ch}_+ + a_+^1 (\Delta_{42} \text{sh}_+ - \Delta_{43} \text{ch}_-), \\ \varphi_{42}^1 &= \Delta_{41} \text{ch}_+ - \Delta_{42} \text{sh}_+ + \Delta_{43} \text{ch}_-, \\ \varphi_{43}^1 &= (a_-^1 - a_+^1) \text{ch}_+ (\Delta_{45} \text{ch}_+ - \Delta_{46} \text{sh}_+), \\ \varphi_{44}^1 &= (a_-^1 - a_+^1) \text{ch}_+ (\Delta_{47} \text{ch}_+ - \Delta_{48} \text{sh}_+), \\ \varphi_{11}^2 &= a_+^1 (\Delta_{51} \text{ch}_+ - \Delta_{52} \text{sh}_+ + \Delta_{53} \text{ch}_- - \Delta_{54} \text{sh}_-), \\ \varphi_{12}^1 &= -\Delta_{51} \text{ch}_+ + \Delta_{52} \text{sh}_+ - \Delta_{53} \text{ch}_- + \Delta_{54} \text{sh}_-, \\ \varphi_{13}^2 &= (a_-^1 - a_+^1) [(-\Delta_{55} \text{ch}_+ + \Delta_{57} \text{sh}_+) \text{ch}_- + (\Delta_{59} \text{ch}_+ - \Delta_{5,11} \text{sh}_+) \text{sh}_-], \\ \varphi_{14}^2 &= (a_-^2 - a_+^1) [(\Delta_{56} \text{ch}_+ - \Delta_{58} \text{sh}_+) \text{ch}_- - (-\Delta_{5,10} \text{ch}_+ + \Delta_{5,12} \text{sh}_+) \text{sh}_-], \\ \varphi_{31}^2 &= -a_+^1 (\Delta_{61} \text{ch}_+ - \Delta_{62} \text{sh}_+) + a_-^1 (\Delta_{63} \text{ch}_- - \Delta_{64} \text{sh}_-), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{32}^2 &= \Delta_{61} \text{ch}_+ - \Delta_{62} \text{sh}_+ + \Delta_{63} \text{ch}_- - \Delta_{64} \text{sh}_-, \\ \varphi_{33}^2 &= (a_+^1 - a_-^1) [(\Delta_{65} \text{ch}_+ - \Delta_{66} \text{sh}_+ + \Delta_{67} \text{sh}_-) \text{ch}_- - \\ &\quad - (\Delta_{68} \text{ch}_+ - \Delta_{69} \text{sh}_+ + \Delta_{6,10} \text{ch}_-) \text{sh}_-, \\ \varphi_{34} &= (a_-^1 - a_+^1) [(\Delta_{75} \text{ch}_+ - \Delta_{76} \text{sh}_+ + \Delta_{77} \text{sh}_-) \text{ch}_- - \\ &\quad - (\Delta_{78} \text{ch}_+ - \Delta_{79} \text{sh}_+ + \Delta_{7,10} \text{ch}_-) \text{sh}_-], \end{aligned}$$

Przyjeliśmy tu oznaczenia

$$\text{ch}_\pm \equiv \text{Ch}(\sqrt{sr_\pm^2} h) \quad \text{sh}_\pm \equiv \text{Sh}(\sqrt{sr_\pm^2} h)$$

Wielkości Δ_{ki} zależą jedynie od stałych materiałowych warstwy i półprzestrzeni, można je względnie łatwo wyznaczyć z rozwiązania układu równań (7.1) zgodnie ze wzorem (7.4). Z powodu złożoności i dużej liczby wzorów o podobnym charakterze, z braku miejsca nie cytujemy ich. Podstawienie wyznaczonych współczynników B_i^k danych wzorami (7.3) do (5.9) i (5.10) z uwzględnieniem (7.2), (7.4) i (7.5) umożliwia nam napisanie transformat Laplace'a koncentracji masy i temperatury zarówno dla warstwy jak i półprzestrzeni. Wykonanie odwrotnych transformat w przypadku ogólnym, dla dowolnych czasów jest możliwe tylko w sposób przybliżony. Ponieważ w praktycznych przypadkach interesuje nas dyfuzja dla dużych czasów t , wykorzystamy rozwinięcia asymptotyczne. Jako przykład weźmiemy następujące warunki brzegowe

$$(7.7) \quad \sigma(t) = \sigma^* H(t), \quad q(t) = \Theta^* H(t)$$

Przy tych założeniach otrzymujemy dla dużych czasów t następujące wzory na koncentrację masy i temperaturę w półprzestrzeni $z \leq 0$

$$(7.8) \quad C_2(z, t) = C_2^0 + \frac{1}{(r_2 - r_1) \delta_T^2 k_T^2} \left\{ \alpha_+^2 \left[\omega_{11}^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) E^+ + \left(-\frac{\omega_{11}^2}{r_1} + \omega_{12} - r_1 \omega_{13} \right) \psi_1^+ + \left(\frac{\omega_{11}^2}{r_2} - \omega_{12} + r_2 \omega_{13}^2 \right) \psi_2^+ \right] + \alpha_-^2 \left[\omega_{21}^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) E^- + \left(-\frac{\omega_{21}^2}{r_1} + \omega_{22} - r_1 \omega_{23}^2 \right) \psi_1^- + \left(\frac{\omega_{21}^2}{r_2} - \omega_{22} + r_2 \omega_{23}^2 \right) \psi_2^- \right] \right\},$$

$$(7.9) \quad T_2(z, t) = T_2^0 + \omega_{11}^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) E^+ + \left(-\frac{\omega_{11}^2}{r_1} + \omega_{12} - r_1 \omega_{13}^2 \right) \psi_1^+ + \left(\frac{\omega_{11}^2}{r_2} - \omega_{12} + r_2 \omega_{13}^2 \right) \psi_2^+ + \omega_{21}^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) E^- + \left(-\frac{\omega_{21}^2}{r_1} + \omega_{22} - r_1 \omega_{23}^2 \right) \psi_1^- + \left(\frac{\omega_{21}^2}{r_2} - \omega_{22} + r_2 \omega_{23}^2 \right) \psi_2^-,$$

gdzie

$$E^\pm = \text{Erfc} \left(-\frac{z \sqrt{r_\pm^2}}{2\sqrt{t}} \right); \quad \psi_k^\pm = \exp[r_k \sqrt{r_\pm^2} z + (r_k)^2 t] \text{Erfc} \left(-\frac{z \sqrt{r_\pm^2}}{2\sqrt{t}} + r_k \sqrt{t} \right).$$

Wzory opisujące pole temperatury i pole koncentracji dyfundującego składnika w warstwie $0 \leq z \leq h$ można przedstawić w przybliżeniu w następującej postaci

$$(7.10) \quad c_1(z, t) = C_1^0 + \frac{1}{\delta_T^1 k_T^1} \frac{1}{r_2 - r_1} \left[R_{0c} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - R_{0c} \left(\frac{E_1}{r_1} - \frac{E_2}{r_2} \right) + \right. \\ \left. + R_{1c}(z)(E_1 - E_2) - R_{2c}(z)(r_1 E_1 - r_2 E_2) \right],$$

$$(7.11) \quad T_1(z, t) = T_1^0 + \frac{1}{r_2 - r_1} \left[R'_{0T} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - R'_{0T} \left(\frac{E_1}{r_1} - \frac{E_2}{r_2} \right) + \right. \\ \left. + R_{1T}(z)(E_1 - E_2) - R_{2T}(z)(r_1 E_1 - r_2 E_2) \right],$$

gdzie

$$R_{0c} = \alpha_+^1 \omega_{11}^1 + \alpha_-^1 \omega_{31}^1, \quad R_{1c} = \alpha_+^1 (\omega_{12}^1 + \omega_{21}^1 \sqrt{r_+^1} z) + \alpha_-^1 (\omega_{32}^1 + \omega_{41}^1 \sqrt{r_-^1} z),$$

$$R_{2c} = \alpha_+^1 (\omega_{13}^1 + \omega_{22}^1 \sqrt{r_+^1} z + \omega_{11}^1 r_+^1 z^2) + \alpha_-^1 (\omega_{33}^1 + \omega_{43}^1 \sqrt{r_-^1} z + \omega_{31}^1 r_-^1 z^2),$$

$$R'_{0T} = \omega_{11}^1 + \omega_{31}^1, \quad R_{1T} = (\omega_{12}^1 + \omega_{21}^1 \sqrt{r_+^1} z) + (\omega_{32}^1 + \omega_{41}^1 \sqrt{r_-^1} z),$$

$$R_{2T} = \omega_{13}^1 + \omega_{33}^1 + (\omega_{22}^1 \sqrt{r_+^1} + \omega_{42}^1 \sqrt{r_-^1}) z + (\omega_{11}^1 r_+^1 + \omega_{31}^1 r_-^1) z^2,$$

$$E_k = \exp[(r_k)^2 t] \operatorname{Erfc}(r_k \sqrt{t}), \quad k = 1, 2$$

$$r_{1,2} = \frac{[(\Delta_2 + \Delta_5) \sqrt{r_-^1} + \Delta_3 \sqrt{r_+^1}] \pm \sqrt{[(\Delta_2 + \Delta_5) \sqrt{r_-^1} + \Delta_3 \sqrt{r_+^1}]^2 - 4\Delta_1 [\Delta_1 (r_+^1 + r_-^1) + \Delta_4 r_+^1 r_-^1]}}{2[\Delta_1 (r_+^1 + r_-^1) + \Delta_4 r_+^1 r_-^1]},$$

wzory na ω_{ij}^k obliczamy z wyrażeń:

$$(7.12) \quad \sum_{j=1}^4 P_j^k \varphi_{ij}^k = \sum_{l=1}^3 \omega_{il}^k (\bar{s})^{l-1}, \quad \text{gdzie } k = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$P_1 = \Theta^* - \Theta^0, \quad P_2 = M_1^* - (\hat{\gamma}_1^1 \Theta_1^0 + \hat{\gamma}_c^1 C_1^0) - \hat{\gamma}_\sigma \sigma^*,$$

$$P_3 = \Theta_2^0 - \Theta_1^0,$$

$$P_4 = (\hat{\gamma}_\theta^2 \Theta_2^0 + \hat{\gamma}_c^2 C_2^0) - (\hat{\gamma}_\theta^1 \Theta_1^0 + \hat{\gamma}_c^1 C_1^0) + (\gamma_\sigma^2 - \gamma_\sigma^1) \sigma^*.$$

8. Wnioski

1. Wzory (6.8) i (6.10) przedstawiają zależność zmiany koncentracji dyfundującego składnika. Ze wzorów tych wynika, że wykładniki funkcji błędu są wprost proporcjonalne do głębokości rozpatrywanego punktu i odwrotnie proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego czasu, ponadto zależą od stałych materiałowych. Wykładniki funkcji błędu nie zależą od warunków początkowych. Wielkości P_{ik} zależą nie tylko od stałych materiałowych ale również liniowo od początkowych temperatur i początkowych koncentracji.

2. Istotna różnica w porównaniu z dotychczasowymi rozwiązaniami zagadnień termodyfuzji dla ciał stałych polega na uwzględnieniu pola odkształceń i jego wpływu na proces dyfuzji.

3. Otrzymanie wyników liczbowych uzależnione jest od znajomości stałych materiałowych, które określić można tylko na drodze doświadczalnej. Wykonanie obliczeń ma

sens dla konkretnych materiałów i przypadków, na które istnieje zapotrzebowanie usprawiedliwiające poniesienie kosztów obliczeń.

4. W przypadku kontaktu warstwy z półprzestrzenią wykonanie odwrotnych transformacji jest możliwe tylko w sposób przybliżony. Wzory (7.8) - (7.11) dotyczą dużych czasów.

Literatura cytowana w tekście

1. M. A. BIOT, *Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics*, J. Appl. Phys., 27, 1956.
2. JA. S. PIDSTRYHACZ, *Differencjalni riwnnannja zadaczi termodyfuziji w twerdomu izotropnomu tili*, DAN Ukr. RSR, nr. 2, 1961, (w j. ukraińskim).
3. JA. S. PODSTRIGACZ, W. S. PAWLINA, *Diffuzionnyje processy w nierawnomierno nagretom deformirujemom sloje*, Woprosy miechaniki realnego twerdogo tiela, 1, Kijów 1962, (w j. rosyjskim).
4. JA. S. PODSTRIGACZ, W. S. PAWLINA, *Diffuzionnyje processy w nagrewajemom deformirujemom szarie*, 2, Kijów 1964, (po rosyjsku).
5. W. NOWACKI, *Dynamic problems of thermodiffusion in elastic solids*, Proc. Vibr. Problems, 2, 15, 1974
6. W. NOWACKI, *Termodyfuzja w cieple stalym*, Mechanika Teoret. i Stos., t. 13, z. 2, 1975.
7. K. GRYSA, R. SZCZEPAŃSKI, *O płaskim quasi-stacycznym zagadnieniu termodyfuzji dla sprężystego walca kołowego*, Mech. Teoret. i Stos., t. 17, z. 2, 1979.
8. M. J. BUDA, *Zagadnienie termodyfuzji w ciałach stalych*, Biul. WAT, 6, 26, 1977.
9. M. J. BUDA, G. F. PIELAK, *Badania porównawcze efektów dyfuzji i termodyfuzji*, Biul. WAT, 1, 28, 1979.
10. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Oxford 1959, również wyd. rosyjskie Nauka 1964.
11. A. ERDELYI i inni, *Tables of integral transforms*, tom 1 McGraw-Hill, 1954.
12. J. JANKOWSKI, *Wpływ drgań na dyfuzję i termodyfuzję w cieple stalym*, dysertacja doktorska, Politechnika Poznańska 1980.
13. J. STEFANIAK, J. JANKOWSKI, *Płaskie fale harmoniczne i dyfuzja w cieple stalym*, Mech. Teoret. i Stos., t. 18, z. 3, 1980.

Резюме

ТЕРМОДИФФУЗИЯ ПРИ КОНТАКТЕ УПРУГОГО СЛОЯ С ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Рассматривается процесс термодиффузии при контакте двух упругих полупространств, а также в системе состоящим из слоя и полупространства в случае, когда свободная плоскость слоя нагружена некоторым распределением сил и тепла. Для квази-стационарной задачи контакта двух упругих полупространств получено решение в замкнутом виде, а в случае контакта слоя и полупространства приближенное решение для больших значений времени.

Summary

THERMODIFFUSION IN A CONTACT OF AN ELASTIC LAYER WITH A SEMISPAC

A process of thermodiffusion is considered in contact of two elastic semispace and in a system consisting of a layer and a semispace when the free bounding plane of the layer is loaded by a distribution of forces and heat. For quasi-static case the exact solution has been obtained for the contact of two elastic semispace, and an approximate solution for large values of time for the contact of the layer and the semispace.

O WIĘZACH WEWNĘTRZNYCH DLA MATERIAŁÓW TYPU PRĘDKOŚCIOWEGO

ANNA WACHECKA-SKOWRON

*Institut Mechaniki
Uniwersytet Warszawski*

1. Wstęp

W literaturze znane jest pojęcie więzów wewnętrznych dla materiałów prostych [1, 2, 3, 4] jako pewnych ograniczeń na klasę dopuszczalnych deformacji. Ograniczenia te mają postać równań $\Phi(C) = 0$, gdzie C jest miarą deformacji, a $\Phi: R^6 \rightarrow R^k$, $1 \leq k \leq 6$, znaną różniczkowalną funkcją. Tak wprowadzone więzy powodują pewną nieokreśloność naprężeń. Zakłada się, że tensor naprężenia T jest sumą dwóch członów $T = T_0 + T_1$, z których jeden jest dany przez funkcjonal konstytutywny $T_0 = \mathcal{F}(C^{(i)})$, a drugi nazywamy reakcją więzów, [2]. Tak więc z reguły zakłada się, że ograniczeniom dla miar deformacji muszą towarzyszyć stany naprężenia reakcyjnego, utrzymujące te ograniczenia. Jednocześnie zakłada się, że praca tensora reakcji więzów T_1 na dowolnym tensorze prędkości odkształcenia \dot{C} , zgodnym z warunkiem $\Phi(C) = 0$ jest równa 0.

Tematem tego komunikatu jest zagadnienie więzów wewnętrznych w materiałach typu prędkościowego. Będziemy rozważać materiał typu prędkościowego, którego równanie konstytutywne ma postać

$$(1.1) \quad \overset{(n)}{T} = A_{n-1} \overset{(n-1)}{T} + \dots + A_1 \dot{T} + B_m \overset{(m)}{C} + \dots + B_1 \dot{C},$$

gdzie $\overset{(i)}{T}$, $i = 1, 2, \dots, n$ jest i -tą pochodną czasową drugiego tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa, $\overset{(l)}{C}$, $l = 1, 2, \dots, m$, l -tą pochodną prawego tensora odkształcenia Greena, znane operatory A_1, \dots, A_{n-1} , B_1, \dots, B_m działające z R^6 w R^6 mogą zależeć od C i T .

Celem pracy jest wprowadzenie pojęcia więzów wewnętrznych dla materiału zdefiniowanego równaniem (1.1) i analiza przypadku szczególnego tych więzów, który prowadzi do pewnych uogólnień pojęcia nieściśliwości materiału. W pracy korzystamy z ogólnej koncepcji więzów wewnętrznych podanej w [5]. Koncepcja ta polega na uwzględnieniu sytuacji, w których ograniczenia dla miar deformacji są przedstawione w zupełnie ogólnej postaci, tj. postaci, która nie musi wyrażać się przy pomocy układu równań. Obejmuje ona również przypadki, w których mogą nie występować ograniczenia dla miar deformacji, a mimo to, mogą występować reakcje więzów.

2. Podstawowe relacje

Równanie (1.1) napiszemy w postaci

$$(2.1) \quad \sigma = Ae,$$

gdzie $\sigma \equiv \overset{(n)}{T}$, $e = (\overset{(n-1)}{T}, \dots, \overset{(m)}{\dot{T}}, \overset{(m)}{C}, \dots, \overset{(m)}{\dot{C}})$, $A = A(C, T)$ jest znanym operatorem liniowym określonym dla każdej pary C, T na przestrzeni $E \equiv R^k$, $k = 6(n+m-1)$ o wartościach w $\Sigma = R^6$.

Definicja 1. Powiemy, że na własnościach materiału określone przez (2.1) zostały narzucone więzy wewnętrzne, gdy dana jest multifunkcja $\Psi: E \rightarrow 2^E$ o następujących własnościach

1. $K \equiv \text{dom } \Psi \equiv \{e | \Psi(e) \neq \emptyset\}$ jest niepustym, domkniętym podzbiorem E ,
2. $(\forall e \in K)(\Psi(e) = \{s\}) \Rightarrow ((s = 0) \wedge (K = E))$.

Zbiór $\Psi(e)$ jest zbiorem wszystkich możliwych reakcji więzów odpowiadających deformacji $e \in K$, tj. będziemy przyjmować, że

$$(2.2) \quad \sigma = Ae + s, \quad s \in \Psi(e).$$

Materiał, którego własności określone są relacją (2.2) będziemy nazywać materiałem typu prędkościowego z przyrostowymi więzami wewnętrznymi.

Definicja 2. Gdy $K = E$ i $(\exists e \in K)(\Psi(e) \neq \{0\})$, to ograniczenia narzucone na równania konstytutywne (2.1) nazwiemy quasi-więzami.

W przypadku quasi-więzów nie ma ograniczeń na e , a jednak występuje reakcja więzów s . Sytuację taką zilustrujemy na przykładach w następnym paragrafie.

Definicja 3. W przypadku gdy istnieje subróżniczkowalna [6] funkcja $\psi: E \rightarrow \bar{R}$ taka, że dla każdego $e \in K$ zbiór $\Psi(e)$ jest subróżniczką funkcji $-\psi$ w punkcie e , tzn.

$$(2.3) \quad \Psi(e) = -\partial\psi(e), \quad \forall e \in K,$$

więzy nazywamy wtedy subpotencjalnymi, a funkcję ψ nazywamy subpotencjałem więzów.

Relacja (2.2) jest równoważna relacji

$$(2.4) \quad (y-e) \cdot s + \psi(y) - \psi(e) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Kropka w ostatnim wzorze oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni E . Z (2.4) wynika, że

$$(2.5) \quad y \cdot s + \psi(y) \geq e \cdot s + \psi(e), \quad \forall y \in K.$$

Stąd wynika:

Lemat: Jeżeli przyrostowe więzy wewnętrzne w materiale typu prędkościowego są subpotencjalne, to wielkość $e \in K$ realizuje minimum funkcjonału

$$(2.6) \quad J(y) = y \cdot s + \psi(y) \quad \text{na zbiorze } K.$$

na zbiorze K .

Powyższe rozważania ogólne zilustrujemy przypadkiem szczególnym przyrostowych więzów wewnętrznych.

3. O pewnym uogólnieniu pojęcia nieściśliwości

Rozważmy przypadek szczególny równania (1.1), w którym $n = 1$, $m = 1$, tj. równanie postaci

$$(3.1) \quad \sigma = Ae, \quad \text{gdzie } \sigma \equiv \dot{T}, \quad A = B_1, \quad e = \dot{C}.$$

W dalszym ciągu traktujemy więc σ jako tensor przyrostu (prędkości) naprężenia oraz e jako tensor przyrostu (prędkości) odkształcenia. Znany dla danej pary C, T operator A jest określony na przestrzeni $E = R^6$.

Rozłóżmy tensor przyrostu odkształcenia e na część kulistą i dewiator

$$(3.2) \quad e = e^D + 1e^0, \quad \text{gdzie } e^D \in E^D \subset E, \quad e^0 \in R,$$

Analogicznie postąpimy z tensorem przyrostu naprężeń σ

$$(3.3) \quad \sigma = \sigma^D + 1\sigma^0, \quad \text{gdzie } \sigma^D \in E^D \subset E, \quad \sigma^0 \in R.$$

Przyjmujemy równania konstytutywne (3.1) w postaci

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \sigma^D &= A^D e^D, \\ \sigma^0 &= A^0 e^0. \end{aligned}$$

gdzie $A^D: E \rightarrow E$, $A^0: R \rightarrow R$ są znanymi operatorami. Narzucimy na (3.4) więzy dane przez multifunkcję $\Psi = (\Psi_D, \Psi_0)$, $\Psi_D: E^D \rightarrow 2^{E^D}$, $\Psi_0: R \rightarrow 2^R$, które zdefiniowane są następującą relacją

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \sigma^D &= A^D e^D + s^D, \\ \sigma^0 &= A^0 e^0 + p, \end{aligned}$$

gdzie $s^D \in \Psi_D(e^D)$, $p \in \Psi_0(e^0)$.

Przyjmujemy, że $\forall e^D, \Psi_D(e^D) = \{0\}$. Wtedy relacja (3.5) ma postać

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \sigma^D &= A^D e^D, \\ \sigma^0 &= A^0 e^0 + p. \end{aligned}$$

Wielkość p opisują reakcję więzów.

Niech $\psi: R \rightarrow R$ będzie funkcją taką, że

$$\Psi_0(e^0) = -\partial\psi(e^0), \quad \forall e^0 \in R.$$

Wtedy relację (2.4) można zapisać następująco:

$$(3.7) \quad (r - e^0)p + \psi(r) - \psi(e^0) \geq 0, \quad \forall r \in R,$$

gdzie $p \in -\partial\psi(e^0)$.

Rozważmy teraz pewne przypadki szczególne funkcji ψ .

1. Przyjmiemy, że

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r \leq b \\ \alpha(r-b) & \text{dla } r > b, \end{cases} \quad \alpha = \text{const}, \quad \alpha > 0.$$

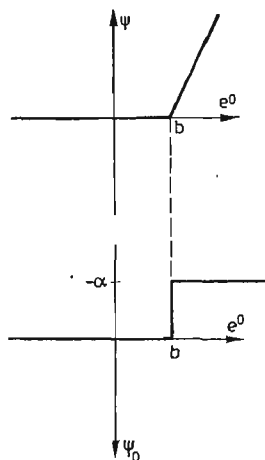
Wtedy

$$\Psi_0(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r < b \\ [-\alpha, 0] & \text{dla } r = b \\ -\alpha & \text{dla } r > b. \end{cases}$$

Wykres funkcji $\psi(\cdot)$ oraz multifunkcji $\Psi_0(\cdot)$ przedstawiono na rys. 1.

Argument e^0 może przybierać dowolne wartości. Reakcja więzów $p \in -\partial\psi(e^0)$ jest stała dla $e^0 > b$.

Jak widać są to quasi-więzy, bo nie ma ograniczeń na dziedzinę multifunkcji Ψ_0 tzn. $K = R$, a jednak jest reakcja więzów. Materiał nie reaguje na więzy, jeżeli przyrost kulistej



Rys. 1

części tensora odkształcenia nie przekracza stanu b . Dla $e^0 \geq b$ występuje reakcja więzów, która ma wartość stałą równą $-\alpha$, jeżeli $e^0 > b$.

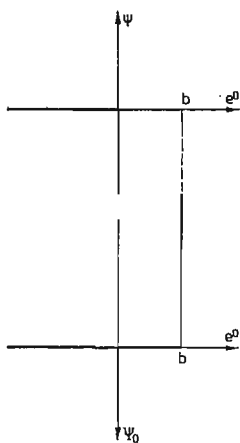
2. Niech teraz

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r \leq b, \\ +\infty & \text{dla } r > b. \end{cases}$$

Wtedy

$$\Psi_0(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r < b, \\ R^- & \text{dla } r = b, \\ \emptyset & \text{dla } r > b. \end{cases}$$

Funkcja $\psi(\cdot)$ oraz multifunkcja $\Psi_0(\cdot)$ są przedstawione na rys. 2. Jeżeli część kulista e^0 przyrostu tensora odkształcenia nie przekracza stanu b , to nie ma reakcji więzów. Przekroczenie stanu b jest fizycznie niemożliwe.



Rys. 2

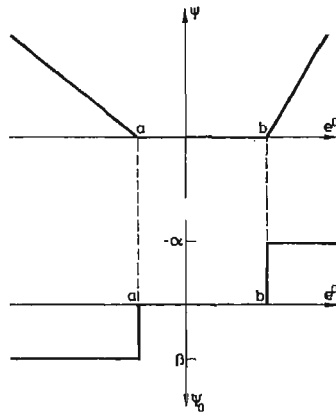
3. Przyjmijmy, że

$$\psi(r) = \begin{cases} \beta(a-r) & \text{dla } r < a, \quad \beta = \text{const}, \quad \beta > 0 \\ 0 & \text{dla } r \in [a, b] \\ \alpha(r-a) & \text{dla } r > b, \quad \alpha = \text{const}, \quad \alpha > 0. \end{cases}$$

Wtedy

$$\Psi_0(r) = \begin{cases} \beta & \text{dla } r < a, \\ [0, \beta] & \text{dla } r = a, \\ [-\alpha, 0] & \text{dla } r \in (a, b), \\ 0 & \text{dla } r = b, \\ -\alpha & \text{dla } r > b. \end{cases}$$

Na rysunku 3 przedstawiono wykresy funkcji ψ i multifunkcji Ψ_0 . W rozpatrywanym przykładzie, podobnie jak w przypadku 1, nie ma ograniczeń na dziedzinę multifunkcji Ψ_0 ; $K = R$ są to więc quasi-więzy. Jeśli $e^0 \in (a, b)$, to nie ma reakcji więzów. Niezerowa reakcja więzów pojawia się, gdy $e^0 \notin (a, b)$.



Rys. 3

4. Materiał „częściowo” nieściśliwy definiujemy następująco:

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r \in [a, b] \\ +\infty & \text{dla } r \notin [a, b]. \end{cases}$$

(ψ jest po prostu funkcją indykatorową przedziału $[a, b]$.)

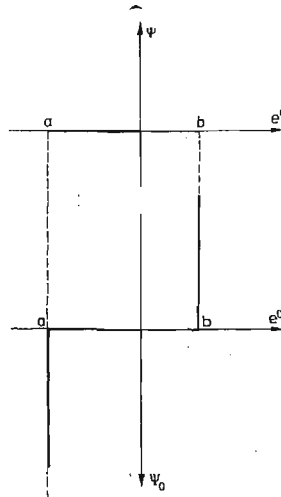
Wtedy

$$\Psi_0(r) = \begin{cases} \emptyset & \text{dla } r < a \\ R^+ & \text{dla } r = a \\ 0 & \text{dla } r \in (a, b) \\ R^- & \text{dla } r = b \\ \emptyset & \text{dla } r > b. \end{cases}$$

Przebieg funkcji $\psi(\cdot)$ oraz multifunkcji $\Psi_0(\cdot)$ ilustruje rys. 4. W tym przypadku nie jest możliwe, by część kulista przyrostu stanu odkształcenia materiału osiągnęła stan e^0 ,

który nie należałby do przedziału $[a, b]$. Uniemożliwiają to reakcje więzów. Rozważane w tym przykładzie więzy są więzami w tradycyjnym znaczeniu tego słowa, gdyż

$$K = [a, b] \neq R.$$



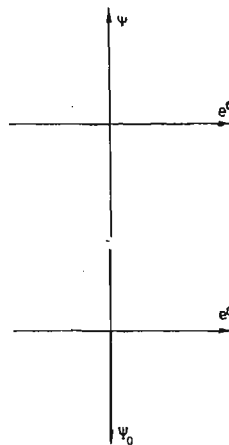
Rys. 4

5. Granicznym przypadkiem dla 4 jest materiał nieściśliwy, [1], dla którego

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r = 0 \\ \emptyset & \text{dla } r \neq 0 \end{cases}$$

oraz

$$\Psi_q(r) = \begin{cases} +\infty & \text{dla } r < 0 \\ R & \text{dla } r = 0 \\ \emptyset & \text{dla } r > 0. \end{cases}$$



Rys. 5

Rysunek 5 przedstawia wykresy funkcji $\psi(\cdot)$ oraz multifunkcji $\Psi_0(\cdot)$. Dla stanu $e^0 = 0$ reakcja więzów p może być równa dowolnej liczbie rzeczywistej. Materiał nieściśliwy nie może osiągnąć stanu $e^0 \neq 0$.

Zauważmy, że ograniczenia (więzy) nakładaliśmy tylko na część kulistą tensora przyrostu odkształcenia, dewiator e^D tego tensora może przebiegać dowolne wartości z przestrzeni E^D .

Literatura cytowana w tekście

1. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik III/3, Berlin—Heidelberg—New York, Springer Verlag (1965).
2. T. MANACORDA, *Zagadnienia elastodynamiki*, Ossolineum (1978).
3. A. SIGNORINI, *Transformazioni termoelastiche finite*, Mem. 3, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 39, 147 (1955).
4. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, J. A. TRAPP, *Thermodynamics of a continuum with internal constraints* Int. J. Engng. Sci. 8, 891, (1970).
5. CZ. WOŹNIAK, *On the non-classical boundary value problems in structural and solid mechanics*, Raport serii PRE nr 3/81, Wrocław (1981).

Резюме

О ВНУТРЕННИХ СВЯЗЯХ МАТЕРИАЛОВ СКОРОСТНОГО ТИПА

Работа посвящена введению понятия внутренних связей для материала определенного уравнением

$$T^{(n)} = A_{n-1} T^{(n-1)} + \dots + A_1 \dot{T} + B_m C + \dots + B_1 \dot{C}$$

Проведенный анализ частного случая этих связей ведёт к некоторому обобщению понятия несжимаемого материала.

Summary

INTERNAL CONSTRAINTS FOR RATE-TYPE MATERIALS

The motion of the internal constraints has been introduced for materials governed by the equation

$$T^{(n)} = A_{n-1} T^{(n-1)} + \dots + A_1 \dot{T} + B_m C + \dots + B_1 \dot{C}$$

A particular case of such constraints leads to a generalization of the motion of incompressible material.

O BŁĘDZIE ROZWIĄZAŃ PRZYBLIŻONYCH W MECHANICE

WIESŁAW NAGÓRKO

*Instytut Mechaniki
Uniwersytet Warszawski*

W pracy rozważa się struktury matematyczne stosowane przy rozwiązywaniu zagadnień brzegowych mechaniki. Rozpatruje się pojęcie rozwiązania przybliżonego oraz formułuje metodę szacowania jego błędu bezwzględnego w stosunku do nieznanego rozwiązania dokładnego. Jako przykład analizowana jest liniowa teoria sprężystości.

1. Rozwiązania przybliżone

Wybrane cechy ciał materialnych mechanika bada i opisuje przy pomocy pewnych przedmiotów matematycznych. W niniejszej pracy przedmiotami takimi będą *struktury* matematyczne następującej postaci

$$(1.1) \quad \mathfrak{M} = \langle X, F, \mu \rangle$$

gdzie X, F są podzbiórmi w przestrzeniach Banacha, zaś μ jest relacją dwuargumentową $\mu \subset X \times F$.

Problemem mechaniki nazywać będziemy poszukiwanie dla ustalonego $f_0 \in F$ takiego elementu $x_0 \in X$, że

$$(1.2) \quad (x_0, f_0) \in \mu.$$

Element x_0 jest wtedy *rozwiązaniem* tego problemu.

Błędem bezwzględnym przyjęcia za rozwiązanie problemu (1.2) pewnego elementu $x \in \text{dom } \mu$ jest

$$(1.3) \quad \varepsilon(x, x_0, f_0) \equiv \max_{f \in \mu_x} (\|x - x_0\|, \|f - f_0\|),$$

gdzie $\mu_x = \{f \in F; (x, f) \in \mu\}$.

Jedną z ogólnych metod rozwiązania problemu (1.2) jest metoda aproksymacji polegająca na określeniu nowej relacji $\tilde{\mu}$ aproksymującej *ex definitione* relację μ .

W niniejszej pracy relację aproksymującą określimy przez ustalenie $a \geq 0$ tak, że dla każdego $(x_0, f_0) \in \mu$ jest

$$(1.4) \quad \varepsilon(x, x_0, f_0) \leq a.$$

Problemem aproksymacyjnym dla problemu (1.2) jest wtedy poszukiwanie dla ustalonego f_0 takiego elementu x , że

$$(1.5) \quad (x, f_0) \in \tilde{\mu}.$$

Rozwiązanie (1.5) nazwiemy *rozwiązaniem przybliżonym* rozwiązania (1.2). Tak określone rozwiązanie przybliżone jest uogólnieniem definicji wprowadzonej w [1].

Jeśli nazwiemy pary $(x, f) \in \mu$ *procesami* zaś x *przyczynami* i f *skutkami* lub *reakcjami* to wtedy warunek (1.4) można wypowiedzieć jako żądanie bliskości w sensie normy różnicy przyczyn i odpowiadających jej różnic skutków.

Sprawdzenie z definicji (1.4), (1.5) czy element x jest rozwiązaniem przybliżonym wymaga znajomości odległości $\|x - x_0\|$ między nieznanym rozwiązaniem dokładnym a elementem x . Odległość ta na ogół nie jest dana. Inaczej z odległością $\|f - f_0\|$ gdyż znając x i μ potrafimy określić f a tym samym $\|f - f_0\|$.

Trudność oszacowania $\|x - x_0\|$ usuniemy zakładając, że możliwa jest konstrukcja funkcjonału

$$(1.6) \quad \delta: X \rightarrow \bar{R}_+,$$

spełniającego warunki

$$(1.7) \quad (\forall x_0, x \in \text{dom } \mu) [\|x - x_0\| \leq \delta(x, (x_0 \in \text{dom } \delta \Rightarrow \delta(x_0) = 0))].^{1)}$$

W przypadku istnienia (1.6) spełniającego (1.7) warunkiem dostatecznym na to, by $x \in \text{dom } \mu$ było rozwiązaniem przybliżonym jest

$$(1.8) \quad \max_{f \in \mu_x} (\delta(x), \|f - f_0\|) \leq a.$$

Funkcjonał δ nazwiemy *funkcjonałem błędu*. Przykłady konstrukcji takiego funkcjonału podamy w punktach 2 i 3.

2. Struktury liniowe

Niech teraz relacja μ występująca w (1.1) jest operatorem $A \in (X \rightarrow F)$ liniowym, ograniczonym i odwracalnym. Operator A^{-1} jest także liniowy i ograniczony. Ustalmy tak jak poprzednio f_0 zaś $x_0 = A^{-1}(f_0)$.

Z definicji normy operatora mamy

$$\|x - x_0\| \leq \|A^{-1}\| \|f - f_0\|$$

dla wszystkich $x \in X$ i $f = A(x)$.

Funkcjonał błędu (1.6) możemy przyjąć w postaci

$$(2.1) \quad \delta(x) = m \|A(x) - f_0\|,$$

gdzie m jest dane i $m \geq \|A^{-1}\|$. Funkcjonał ten określony jest na całej przestrzeni X .

¹⁾ Zapis $f: X \rightarrow Y$ oznacza, że operator f jest określony w przestrzeni X , zaś $f \in (X \rightarrow F)$ na przestrzeni X .

Podstawiając (2.1) do (1.8) otrzymamy warunek dostateczny na to, by dowolne x było rozwiązaniem przybliżonym

$$(2.2) \quad \|A(x) - f_0\| \leq \min\left(\frac{a}{m}, a\right).$$

Dla pewnych operatorów A wielkość $r = A(x) - f_0$ nazywa się czasami *siłami reakcji* [3].

Z (2.2) wynika, że dla operatorów A mających normę $\|A^{-1}\|$ mniejszą od jedności możliwe jest szacowanie błędu bezwzględnego ε przez wielkość sił reakcji. Inaczej mówiąc, jeżeli $m \leq 1$ wtedy z tego, że $\|r\| \leq a$ wynika $\|x - x_0\| \leq a$. W przeciwnym razie, dla $m > 1$ szacowanie takie nie jest prawdziwe. Wynika stąd, że także dla liniowej teorii sprężystości, która jest szczególnym przykładem struktury liniowej szacowanie błędu przez siły reakcji bez obliczenia m nie jest uzasadnione.

3. Struktury w przestrzeniach Hilberta

W poprzednim punkcie podaliśmy przykład funkcjonału błędu zależnego od sił reakcji. Tak skonstruowany funkcjonał pozwala z wielkości sił reakcji wyciągać wnioski o wielkości błędu bezwzględnego rozwiązania przybliżonego. W tym punkcie zajmiemy się inną charakterystyką błędu bezwzględnego.

Ustalmy pewną strukturę $\langle X, F, \mu \rangle$, w której X jest przestrzenią Hilberta oraz $(x_0, f_0) \in \mu$.

W celu określenia dziedziny funkcjonału błędu rozpatrzmy dwie ortogonalne rozmaitości liniowe X_1 i X_2 tak, że dla każdego $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ jest

$$(3.1) \quad (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = 0.$$

Funkcjonał δ określimy dla x zdefiniowanych w następujący sposób

$$(3.2) \quad x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Przyporządkowanie (3.2) jest jednoznaczne.

Równość (3.1) jest równoważna dla x spełniających (3.2) równaniu

$$\|x - x_0\| = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Równoważność ta pozwala na określenie funkcjonału błędu w postaci

$$(3.3) \quad \delta(x) = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

W tym przypadku rozwiązaniem przybliżonym jest każdy element $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ który spełnia

$$(3.4) \quad \max_{f \in \mu_x} \left(\frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \|f - f_0\| \right) \leq a.$$

Przykład konstrukcji ortogonalnych rozmaitości liniowych podamy w następnym punkcie.

4. Przykład struktury w liniowej teorii sprężystości

Zdefiniujmy pewną strukturę liniowej teorii sprężystości $\langle T, F, \lambda \rangle$. W celu skonstruowania elementów tej struktury podamy kilka definicji.

Niech Ω będzie regularnym obszarem w R^3 .

Oznaczmy przez X przestrzeń wszystkich funkcji wektorowych $x \in (\Omega \rightarrow R^3)$ klasy C^2 w Ω i klasy C^1 w $\bar{\Omega}$.

Niech dalej D będzie pewnym niepustym zbiorem w X takim, że wszystkie elementy D są odwracalne. Określmy M jako

$$(4.1) \quad M = \{x: x = i \cdot (d-1), i \in I, d \in D\},$$

gdzie I jest zbiorem wszystkich izometrii przestrzeni R^3 obciętych do codom d a 1 jest identycznością w X . Elementy określone warunkiem (4.1) oznaczmy przez u i nazwiemy przemieszczeniami. Najogólniejszym zbiorem (4.1) jest cała przestrzeń X .

Niech T będzie przestrzenią symetrycznych funkcji tensorowych $t \in (\Omega \rightarrow R^{3 \times 3})$ takich, że zachodzi warunek

$$(4.1) \quad (\forall t \in T) \left(\int_{\Omega} A_{ijkl} t_{ij} t_{kl} dv < \infty \right)$$

gdzie $t \equiv (t_{ij})$, $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij}$, $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Przestrzeń T nazywa się przestrzenią naprężeń.

Wyposażmy przestrzeń T w iloczyn skalarny [2];

$$(4.2) \quad t^1 t^2 = \int_{\Omega} A_{ijkl} t_{ij}^1 t_{kl}^2 dv.$$

Określmy przestrzeń F jako iloczyn kartezjański $B \times P \times Q$ gdzie B jest przestrzenią funkcji wektorowych ciągłych $b \in (\Omega \rightarrow R^3)$ P przestrzenią funkcji wektorowych prawie ciągłych $p \in (\partial_1 \Omega \rightarrow R^3)$ zaś $Q = X|_{\partial_2 \Omega}$. Przyjmuje się, że $\partial_i \Omega$, $i = 1, 2$ są takie, że $\partial_1 \Omega \cup \partial_2 \Omega = \partial \Omega$, $\partial_1 \Omega \cap \partial_2 \Omega = \emptyset$.

Elementy F oznaczać będziemy przez $f = (b, p, q)$. Funkcje b nazywa się siłami masowymi a p obciążeniami powierzchniowymi.

W celu określenia relacji λ przyjmujemy, że dane są operatory $K \in (T \rightarrow B \times P)$ postaci

$$K(t) = (\operatorname{div} t, t|_{\partial_1 \Omega} n)$$

gdzie funkcja wektorowa $n \in (\partial_1 \Omega \rightarrow R^3)$ równa jest wektorowi zewnętrznemu normalnemu do $\partial_1 \Omega$ oraz $L \in (X \rightarrow T)$ postaci

$$L(x) = \frac{1}{2} C(\nabla x + \nabla x^T)$$

gdzie $c = (c_{ijkl})$ są funkcjami skalarnymi określonymi w Ω (stałymi sprężystości) spełniającymi warunki

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

$$A_{ijkl} C_{klmn} = \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}), \quad i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3.$$

Relację λ przyjmujemy jako

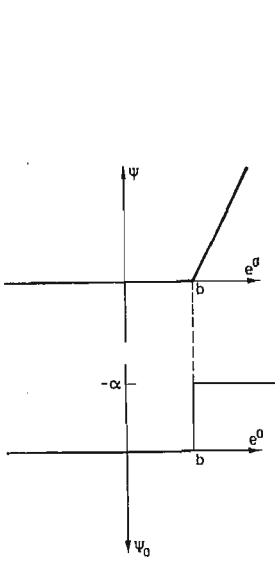
$$(4.3) \quad (t, (b, p, q)) \in \lambda \Leftrightarrow (\exists u \in M) (t = L(u) \wedge K(t) = (b, p) \wedge u|_{\partial_2 \Omega} = q).$$

Dla struktur $\langle T, F, \lambda \rangle$ formułuje się problem (1.2) jako poszukiwanie dla ustalonego (b, p, q) takiego $t \in T$, że

$$(4.4) \quad (t, (b, p, q)) \in \lambda.$$

Oznacza to, że trzeba znaleźć takie $u \in M$, że

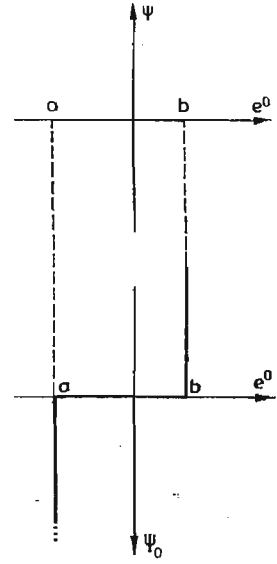
$$(4.5) \quad \begin{aligned} t &= \frac{1}{2} C(\nabla u + \nabla u^T) \\ (\operatorname{div} t, t|_{\partial_1 \Omega} n] &= (b, p) \\ u|_{\partial_2 \Omega} &= q \end{aligned}$$



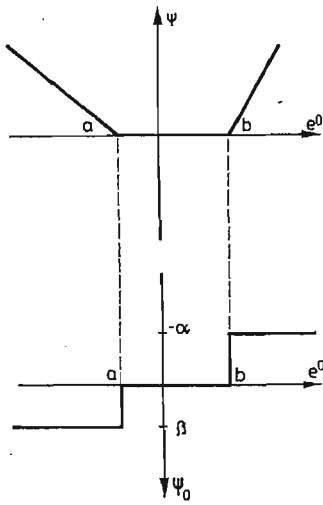
Rys. 1



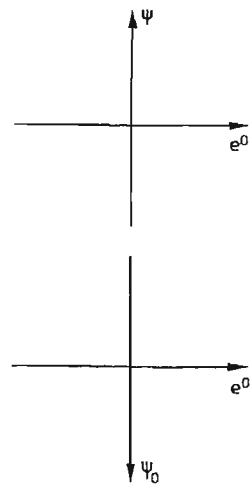
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Poszukiwanie $u \in X$ spełniającego (4.5) nazywa się *mieszanym zagadnieniem brzegowym teorii sprężystości*.

Dla problemu (4.4) sformułować można problem aproksymacyjny.

Zdefiniujmy w tym celu ortogonalne rozmaitości liniowe spełniające (3.1). (Dla uproszczenia pomijamy siły masowe).

Niech t_1 będzie naprężeniem kinematycznym dopuszczalnym

$$(4.6) \quad K(t_1) = (0, p),$$

a t_2 naprężeniem stacannie dopuszczalnym

$$(4.7) \quad (\exists u_2 \in M)(t_2 = L(u_2) \wedge K(t_2) = (0, t_2|_{\partial_1 \Omega} n), \quad u_2|_{\partial_2 \Omega} = q)$$

zaś t_0 rozwiązaniem problemu (4.4).

Wykorzystując (4.2) łatwo sprawdzić, że zachodzi związek

$$(t_1 - t_0)(t_2 - t_0) = 0.$$

Zgodnie więc z p. 3, jeżeli za rozwiązanie przybliżone t problemu (4.4) przyjmiemy średnią arytmetyczną naprężeń spełniających (4.6) i (4.7) oraz, że $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \in \text{dom } \lambda$ wtedy błąd bezwzględny równy jest

$$(4.8) \quad \varepsilon(t, t_0, f_0) = \max \frac{1}{2} (\|t_1 - t_2\|, \|f - f_0\|)$$

$$f = K\left(\frac{1}{2}(t_1 + t_2)\right), \quad f_0 = (0, p)$$

gdzie

Metoda opisana w p. 3 sprowadza się w tym przypadku do zastąpienia poszukiwania rozwiązania (4.4) przez poszukiwanie rozwiązań (4.6) i (4.7) zaś błąd bezwzględny rozwiązania przybliżonego $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ równy jest (4.8).

Literatura cytowana w tekście

1. W. NAGÓRKO, *Sulle soluzioni approssimate in meccanica*, Riv. Mat. Univ. Parma, 4, 7 (1981), 1-8.
2. J. L. SYNGE, *The Hypercircle in Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1957
3. CZ. WOŹNIAK, *Constrained continuous media*, Bull. Acad. Polon. Sci, Série Sci. Techn., 21 (1973).

Резюме

ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ В МЕХАНИКЕ

В статье обсуждаются математические структуры применяемые при решении краевых задач в механике. Рассматривается понятие приближённого решения и формулируется метод оценки его погрешности в сравнении с неизвестным точным решением. Как пример анализируется линейная теория упругости.

S u m m a r y

ON APPROXIMATE SOLUTIONS IN MECHANICS

Mathematical structures applied in solutions of mechanical boundary value problems are considered. A notion of an approximate solution has been formulated as well as a method of estimation of error with respect to unknown exact solution. As an example the linear theory of elasticity has been analyzed.

O PROPAGACJI FAL NAPRĘŻENIA W SPREŻYSTO-PLASTYCZNYM PRZEWODNIKU PODDANYM DZIAŁANIU RUCHOMEJ SIŁY MASOWEJ W OBECNOŚCI POLA MAGNETYCZNEGO

KRZYSZTOF PODOLAK

IPPT PAN

1. Wstęp

Rozwój technik wytwarzania silnych pól magnetycznych [1] spowodował znaczny wzrost zainteresowania badaniami na temat wzajemnego oddziaływania pól natury elektromagnetycznej z polami odkształceń mechanicznych w ciałach stałych. Przyjmuje się, że rozważania nad tematyką określaną jako elektro- i magnetosprężystość zapoczątkowała praca [2]. Od czasu jej ukazania się opublikowano znaczną liczbę prac w tej dziedzinie. W liczbie tej znajdują się również opracowania monograficzne, jak na przykład [3, 4, 9].

Wyniki badań o charakterze poznawczym oraz stosowane procesy technologiczne [1, 5] świadczą o tym, że oddziaływanie pól elektromagnetycznych i mechanicznych w ośrodku może prowadzić do pojawienia się w nim odkształceń trwałych. W badaniach tego rodzaju procesów niezbędne jest korzystanie z teorii plastyczności, stąd też dziedzinę obejmującą te badania nazywa się elektro- i magnetoplastycznością [6]. Dziedzina ta w porównaniu z elektro- i magnetosprężystością charakteryzuje się znacznie mniejszą liczbą publikacji i zupełnym brakiem opracowań monograficznych.

Zależnie od celu, do jakiego służy wytworzone pole elektromagnetyczne, towarzyszące mu odkształcenia plastyczne ośrodka mogą być traktowane jako niepożądany bądź jako zamierzony efekt. Przykładem pierwszego typu działania pola jest wywołane przez nie płynięcie materiału uzwojenia cewek w elektromagnesach służących do wytwarzania pól magnetycznych o dużych natężeniach [1]. Drugi typ działania dotyczy przede wszystkim technologicznych procesów formowania plastycznego [5, 7].

W ostatnim przypadku pole elektromagnetyczne ma dwojakie zastosowanie. W pierwszym zastosowaniu spełnia jedynie rolę pomocniczą, której celem jest uzyskanie pożądanego rozkładu naprężeń w obrabianym plastycznie elemencie. Podstawowym źródłem sił czynnych może być tutaj materiał wybuchowy. W drugim zastosowaniu pola stanowi jedyne źródło sił, za pomocą których realizowany jest proces obróbki plastycznej.

Pole elektromagnetyczne stosowane w procesach obróbki plastycznej ma zwykle charakter impulsowy [5, 7]. Wytworzone przez odpowiednio skonstruowaną cewkę pole wnika do wnętrza obrabianego przedmiotu (będącego przewodnikiem) wzbudzając w nim prądy wirowe. Wzajemne oddziaływanie pola i prądów przejawia się pod postacią sił działających na ten przedmiot.

W przedstawionych niżej rozważaniach zbadano niestacjonarne działanie pola magnetycznego wnikaącego do wnętrza obrabianego elementu przewodzącego, w procesie plastycznego formowania. Działanie pola zmodelowano za pomocą poruszającego się obciążenia masowego o zmiennej intensywności. Uproszczenie to pozwala uniknąć badania złożonego (por. [5] i cytowana tam literatura), nieliniowego zagadnienia dyfuzji pola magnetycznego i jego oddziaływania ze wzbudzonymi prądami oraz polem odkształceń w ośrodku przewodzącym. Z uwagi na to, że w odniesieniu do wymiarów powierzchni obrabianych elementów, głębokości na jakie wnika pole są zwykle małe (por. [5]), można rozpatrywany tu proces traktować jako rozprzestrzenianie się płaskich fal naprężenia w półprzestrzeni przewodzącej, umieszczonej w pierwotnym polu magnetycznym.

Przedstawiony wyżej model oddziaływań, uzupełniony dalszymi założeniami upraszczającymi służy do pełnego sformułowania zagadnienia, które podano w § 2. Paragraf 3 przedstawia rozwiązanie tego zagadnienia w przypadku, w którym występują tylko odkształcenia sprężyste. Rozwiązania te oraz odpowiednie zależności obowiązujące w obszarach odkształceń plastycznych i odciążenia wykorzystano w § 4 do określenia granic obszaru odkształceń plastycznych. Rozważania zawarte w wymienionych dotychczas paragrafach ilustruje przykład liczbowy, który zamieszczono w § 5. Końcowy § 6 poświęcony jest omówieniu wniosków wynikających z przeprowadzonych rozważań.

2. Analityczny opis zagadnienia

2.1. Zbadamy rozprzestrzenianie się fal naprężenia w sprężysto-plastycznym ośrodku przewodzącym, umieszczonym w stałym, pierwotnym polu magnetycznym. Założymy, że badany ośrodek ma postać półprzestrzeni oraz, że pozostałą część przestrzeni stanowi próżnia. Ruch ośrodka spowodowany jest przez przemieszczające się obciążenie masowe, rozłożone wewnątrz warstwy ograniczonej dwoma płaszczyznami odległymi od siebie o odcinek długości \bar{L} i równoległymi do granicy półprzestrzeni.

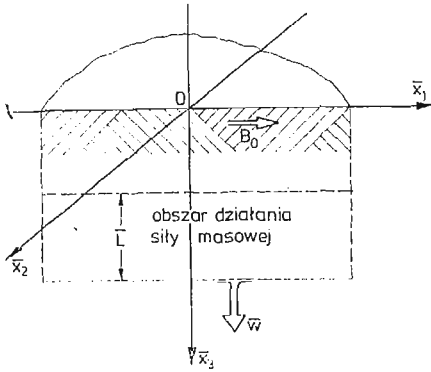
Przebieg powstałego w tych warunkach procesu falowego rozważany jest w ramach teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych. W opisie sprężystego zachowania się ośrodka korzystamy z liniowej teorii sprężystości. Opis ruchu ośrodka w zakresie odkształceń plastycznych oparto na deformacyjnej teorii plastyczności z uwzględnieniem liniowego wzmocnienia. O powstaniu odkształceń plastycznych w ośrodku decyduje spełnienie warunku Hubera-Misesa.

Wprowadzimy układ współrzędnych prostokątnych $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, którego dwie osie \bar{x}_1, \bar{x}_2 leżą na powierzchni granicznej półprzestrzeni, natomiast oś \bar{x}_3 skierowana jest w głąb ośrodka (patrz rys. 1). Przyjmijmy ponadto, że oś \bar{x}_1 ma kierunek zgodny z wektorem pierwotnego pola indukcji magnetycznej \bar{B}_0 .

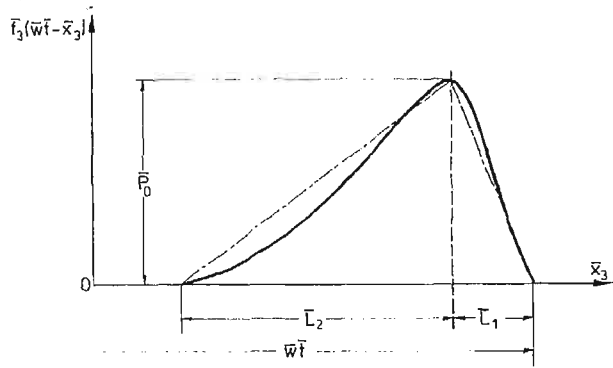
Odnosnie do obciążenia przyjmijmy, że w chwili $\bar{t} = 0$ zaczyna ono wnikać do wnętrza ośrodka a następnie porusza się w dodatnim kierunku \bar{x}_3 ze stałą prędkością \bar{w} . Intensywność $\bar{f}_3(\bar{w}\bar{t} - \bar{x}_3)$ siły wymuszającej zmienia się wzdłuż grubości warstwy (patrz rys. 2), nie zależy natomiast od zmiennych \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Zmienność ta charakteryzuje się występowaniem jednego maksimum w odległości \bar{L}_1 od czoła obciążenia. W utworzonych w ten sposób dwóch przedziałach intensywność zmienia się monotonicznie, jak pokazano na rys. 2.

Przyjmujemy, że w opisywanych warunkach wytworzy się jednoosiowy stan odkształcenia, analogiczny do rozpatrywanego w [8].

Odnosnie do własności elektromagnetycznych ośrodka założymy, że charakteryzuje się on doskonałą przewodnością, nie występują w nim ładunki swobodne oraz prądy



Rys. 1



Rys. 2.

przesunięcia są pomijalne. Jedną z konsekwencji przyjętego tu założenia o powolności ruchu jest to, że efekty oddziaływania mechano-elektromagnetycznego są małe. Dzięki temu można wektor całkowitej indukcji magnetycznej \vec{B} przedstawić w następującej postaci

$$(2.1) \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b},$$

gdzie \vec{b} jest wektorem zaburzenia pola indukcji, spowodowanego przez proces falowy w przewodniku oraz

$$\frac{|\vec{b}|}{|\vec{B}_0|} \ll 1.$$

Związek między wektorem indukcji magnetycznej i wektorem natężenia pola magnetycznego \vec{H} przyjmujemy w postaci

$$(2.2) \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

gdzie μ — współczynnik przenikalności magnetycznej ośrodka.

Z założenia (2.1) korzystamy przy linearyzacji równań (por. [8, 9]), które opisują badane zagadnienie.

2.2 Ogólny układ równań opisujących zjawisko oddziaływania pola elektromagnetycznego z przewodnikiem jest cytowany w licznych publikacjach (np. [8, 9]). Niżej ograniczymy się do podania równań, które uwzględniają tylko oddziaływanie o charakterze dynamicznym występujące w tym zjawisku. Równania te po dokonaniu uproszczeń wynikających z wyszczególnionych wyżej założeń sprowadzają się do następującej postaci ściśle odpowiadającej rozważanemu tu przypadkowi.

Pola w przewodniku spełniają zależności:

$$(2.3) \quad \vec{v}_{3,t} - \vec{A}_\alpha \vec{\sigma}_{33,3} = \vec{F}_3,$$

$$(2.4) \quad \vec{E}_\alpha \vec{v}_{3,3} - \sigma_{33,t} = 0,$$

gdzie

$\bar{v}_3, \bar{\sigma}_{33}$ — składowe wektora prędkości i tensora naprężenia — przecinek użyty w indeksie danej wielkości oznacza jej pochodną czastkową względem zmiennej stojącej po przecinku,

$$\bar{A}_\alpha = \begin{cases} (\bar{E}_s + \bar{\rho} \bar{a}_\lambda^2) / \bar{\rho} \bar{E}_s, & \alpha = s \text{ — zakres odkształceń sprężystych i odciążenia,} \\ (\bar{E}_p + \bar{\rho} \bar{a}_\lambda^2) / \bar{\rho} \bar{E}_p, & \alpha = p \text{ — zakres obciążenia plastycznego,} \end{cases}$$

$$\bar{E}_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{3} (4\bar{G} + 3\bar{K}), & \alpha = s, \\ \frac{1}{3} (4\bar{G}_p + 3\bar{K}), & \alpha = p, \end{cases}$$

$$\bar{K} = \bar{\lambda} + \frac{2}{3} \bar{G},$$

$$\bar{a}_\lambda^2 = \frac{\mu \bar{H}_{01}^2}{4\pi \bar{\rho}}$$

\bar{H}_{01} — składowa wektora natężenia pierwotnego pola magnetycznego w przewodniku, w kierunku osi \bar{x}_1 ,

$\bar{G}, \bar{\lambda}$ — stałe Lamé, \bar{G} — moduł wzmocnienia, $\bar{\rho}$ — gęstość początkowa ośrodka,

$$\bar{F}_3 = \begin{cases} \bar{f}_3(\bar{w}t - \bar{x}_3) \text{ — zakres odkształceń sprężystych i plastycznych,} \\ \frac{4}{3} \frac{\bar{a}_\lambda^2 (\bar{G} - \bar{G}_p)}{\bar{E}_s \bar{E}_p} \frac{d\bar{\sigma}_{33}}{d\bar{x}_3} + \bar{f}_3(\bar{w}t - \bar{x}_3) \text{ — zakres odciążenia,} \end{cases}$$

$\bar{\sigma}_{33}$ — składowa tensora naprężenia na froncie fali odciążenia.

Wektor natężenia pola magnetycznego można przedstawić w postaci analogicznej do (2.1)

$$(2.5) \quad \bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{h},$$

gdzie

$\bar{H}_0 = (\bar{H}_{01}, 0, 0)$, $\bar{h} = (h_1, h_2, h_3)$ — wektor zaburzenia pola magnetycznego.

Wynikają stąd następujące równania pola elektromagnetycznego w przewodniku

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \bar{h}_1 &= -\bar{H}_{01} \varepsilon_{33}, \\ \bar{h}_2 &= \bar{h}_3 = 0, \\ \bar{E}_1 &= \bar{E}_3 = 0, \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad \bar{E}_2 = -\frac{\mu}{c} \bar{v}_3 \bar{H}_{01},$$

gdzie ε_{33} — składowa tensora odkształcenia,

$\bar{E} = (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$ — wektor natężenia pola elektrycznego w przewodniku,

\bar{c} — prędkość światła w próżni,

\bar{v}_3 — składowa wektora prędkości przemieszczenia ośrodka w kierunku osi \bar{x}_3 .

Pole elektromagnetyczne w próżni opisane jest przez równania

$$(2.8) \quad \bar{h}_{1,33}^* - \frac{1}{c^2} \bar{h}_{1,tt}^* = 0, \quad \bar{h}_2^* = \bar{h}_3^* = 0,$$

$$(2.9) \quad \bar{E}_1^* = \bar{E}_3^* = 0, \quad \bar{E}_{2,33}^* - \frac{1}{c^2} \bar{E}_{2,tt}^* = 0,$$

gdzie

$\bar{h}_1^*, \bar{h}_2^*, \bar{h}_3^*$ — składowe wektora zaburzenia pola magnetycznego
 $\bar{E}_1^*, \bar{E}_2^*, \bar{E}_3^*$ — składowe wektora natężenia pola elektrycznego.

Warunki brzegowe dla $\bar{x}_3 = 0$:

$$(2.10) \quad \bar{h}_1 = \bar{h}_1^* = -\bar{H}_{01} \varepsilon_{33},$$

$$(2.11) \quad \bar{E}_2 = \bar{E}_2^* = -\frac{\mu}{c} \bar{H}_{01} \bar{v}_3,$$

$$(2.12) \quad \bar{\sigma}_{33} = 0.$$

Przedstawione równania wraz z warunkami brzegowymi i początkowymi opisują szczególny przypadek propagacji płaskich fal naprężenia (por. [8]). Przy konstrukcji rozwiązania tego układu równań korzystano z metody charakterystyk.

W obliczeniach przyjęto trójkątny rozkład intensywności siły masowej, który na rys. 2 zaznaczono linią przerywaną. Intensywność można wyrazić analitycznie w następujący sposób

$$(2.13) \quad \bar{f}_3(\bar{w}t - \bar{x}_3) = \begin{cases} \frac{\bar{P}_0}{\bar{L}_1} (\bar{w}t - \bar{x}_3) & \text{— dla } \bar{w}t - \bar{L}_1 < \bar{x}_3 \leq \bar{w}t, \\ \frac{\bar{P}_0}{\bar{L}_2} [\bar{L} - (\bar{w}t - \bar{x}_3)] & \text{— dla } \bar{w}t - \bar{L} \leq \bar{x}_3 \leq \bar{w}t - \bar{L}_1. \end{cases}$$

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenie, przydatne przy tworzeniu wielkości bezwymiarowych

$$(2.14) \quad \bar{a}_E^2 = \bar{c}_1^2 + \bar{a}_A^2,$$

gdzie

$$\bar{c}_1^2 = \frac{4\bar{G} + 3\bar{K}}{3\bar{Q}} \quad \text{— prędkość podłużnych fal sprężystych.}$$

2.3 Otrzymane rozwiązania przedstawiono za pomocą układu następujących wielkości bezwymiarowych

$$(2.15) \quad \begin{aligned} v &= \frac{\bar{v}_3}{\bar{a}_E}, & \sigma &= \frac{\bar{\sigma}_{33}}{\bar{\sigma}_0}, & x &= \frac{\bar{x}_3}{\bar{L}}, \\ t &= \frac{\bar{t} \bar{a}_E}{\bar{L}}, & L_1 &= \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}}, & L_2 &= \frac{\bar{L}_2}{\bar{L}}, & w &= \frac{\bar{w}}{\bar{a}_E}, \\ P_0 &= \frac{\bar{p}_0 \bar{L}}{\bar{a}_E^2}, & a_p &= \frac{\bar{a}_p}{\bar{a}_E}, & a_A &= \frac{\bar{a}_A}{\bar{a}_E}, & H_{01}^2 &= \frac{\bar{H}_{01}^2}{\bar{\sigma}_0}, \end{aligned}$$

$$(2.15) \quad G = \frac{\bar{G}}{\bar{\sigma}_0}, \quad G_p = \frac{\bar{G}_p}{\bar{\sigma}_0}, \quad E_s = \frac{\bar{E}_s}{\bar{\sigma}_0}, \quad E_p = \frac{\bar{E}_p}{\bar{\sigma}_0},$$

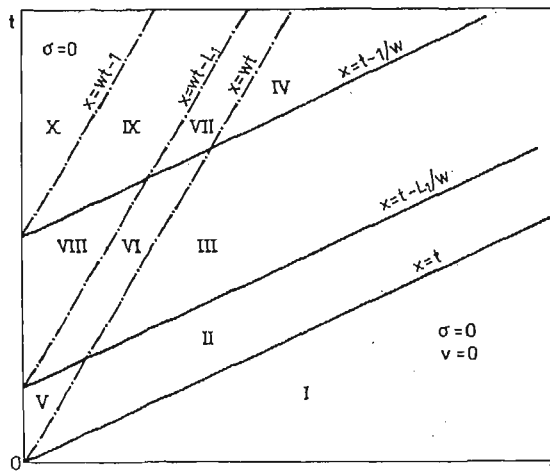
$$A_s = A_s \sigma_0 a_3^{-2}, \quad A_p = A_p \sigma_0 a_E^{-2},$$

gdzie

$\bar{\sigma}_0$ — wartość granicy plastyczności w próbie rozciągania.

3. Rozwiązanie zagadnienia w przypadku sprężystych odkształceń

Na pełne rozwiązanie przedstawionego wyżej problemu składają się dwa elementy (por. [9]): rozwiązanie statyczne zagadnienia magnetosprężystości, wynikającego z istnienia pierwotnego pola indukcji magnetycznej w przewodniku oraz rozwiązanie zagadnienia propagacji fal naprężenia wywołanych przez ruchome obciążenie masowe w sprężysto-plastycznym ośrodku przewodzącym, umieszczonym w polu magnetycznym. W dalszej



Rys. 3

części pracy ograniczymy się do podania rozwiązania zagadnienia dynamicznego, uwzględniając rozwiązanie problemu statycznego jedynie w przypadku formułowania warunku uplastycznienia materiału przewodnika. Z tego względu również rozwiązania przypadku sprężystego zamieszczone w tym paragrafie reprezentują tylko część dynamiczną zagadnienia. Celem ich przedstawienia będziemy posługiwać się schematem podanym na rys. 3, gdzie obszary, w których obowiązuje inna postać rozwiązania oznaczono różnymi cyframi rzymskimi.

Obszar I

$$(3.1) \quad \sigma_1 = 0, \quad v_1 = 0.$$

obszar niezaburzony.

Obszar II

$$(3.2) \quad \sigma_{II} = -\frac{1}{2}\Omega_1 \cdot (x-t)^2, \quad v_{II} = -A_s\sigma_{II},$$

$$\Omega_1 = \frac{P_0}{A_s L_1} \frac{w^2}{1-w^2};$$

intensywność naprężenia jest funkcją rosnącą czasu.

Obszar III

$$(3.3) \quad \sigma_{III} = \frac{1}{2}\Omega_3 \{ [w(x-t) + 1]^2 - L_2 \}, \quad v_{III} = -A_s\sigma_{III},$$

$$\Omega_3 = \frac{P_0}{A_s L_1} \frac{1}{1-w^2};$$

intensywność naprężenia jest funkcją rosnącą czasu.

Obszar IV

$$(3.4) \quad \sigma_{IV} = -\frac{P_0}{2A_s(1-w^2)}, \quad v_{IV} = -A_s\sigma_{IV}.$$

Obszar stałych wartości naprężenia i prędkości przemieszczeń.

Obszar V

$$(3.5) \quad \sigma_V = \frac{1}{2}\Omega_2 [(x-wt) + w(x-t)]x,$$

$$v_V = -\frac{1}{2}A_s\Omega_2 w(x^2-t^2), \quad \Omega_2 = \frac{P_0}{A_s L_1} \frac{1}{1+w};$$

intensywność naprężenia jest funkcją rosnącą czasu.

Obszar VI

$$(3.6) \quad \sigma_{VI} = \frac{1}{2}\Omega_4 \left\{ L_1 w^2 \left(x-t + \frac{1}{w} \right)^2 + L_2 [(x-wt)^2 - L_1] \right\},$$

$$v_{VI} = -A_s\sigma_{VI}, \quad \Omega_4 = \frac{P_0}{A_s L_1 L_2} \frac{1}{1-w^2}.$$

Intensywność naprężenia jest rosnącą funkcją czasu w części obszaru leżącej poniżej prostej o równaniu

$$(3.7) \quad x = mt - b,$$

gdzie

$$m = \frac{w}{wL_1 + L_2}, \quad b = \frac{L_1}{wL_1 + L_2}.$$

W części obszaru położonej powyżej prostej (3.7) (rys. 4) intensywność naprężenia jest malejącą funkcją czasu.

Obszar VII

$$(3.8) \quad \sigma_{VII} = \frac{\Omega_1}{2w^2} [(x-wt)^2 - L_1],$$

$$v_{VII} = -\frac{\Omega_1 A_s}{2w^2} [w(x-wt) - L_1];$$

intensywność naprężenia jest malejącą funkcją czasu.

Obszar VIII

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{\text{VIII}} &= -\frac{P_0 x}{2A_s L_2 (1+w)} \left[x - wt + 1 + w \left(x - t + \frac{1}{w} \right) \right], \\ v_{\text{VIII}} &= \frac{P_0}{2L_2 (1+w)} \left[(x - wt + 1)wt + \left(x - t + \frac{1}{w} \right) wx - (x - wt + L_1) \right]; \end{aligned}$$

intensywność naprężenia jest malejącą funkcją czasu.

Obszar IX

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \sigma_{\text{IX}} &= -\frac{1}{2} \Omega_3 (x - wt + 1)^2, \\ v_{\text{IX}} &= \frac{1}{2} A_s \Omega_3 [w(x - wt + 1)^2 + (1 - w)L_2]; \end{aligned}$$

intensywność naprężenia jest malejącą funkcją czasu.

Obszar X

$$(3.11) \quad \sigma_x = 0, \quad v_x = \frac{P_0}{2(1+w)}.$$

Podane dotychczas rozwiązania stanowią podstawę dalszych badań mających na celu określenie warunków powstawania odkształceń plastycznych, wyznaczenie granic obszaru odkształceń plastycznych i rozwiązań wewnątrz tego obszaru.

4. Analiza rozwiązania w przypadku występowania odkształceń plastycznych

4.1 Jeżeli wielkości charakteryzujące rozpatrywany proces spełniają warunek

$$(4.1) \quad H_{01}^2 < 8\pi(1-\nu)[(1-2\nu+\mu\nu)^2 + 3\mu^2(1-\nu^2)]^{-\frac{1}{2}},$$

to uplastycznienie materiału przewodnika może nastąpić tylko w skutek działania obciążenia masowego. Dalej będziemy zajmować się wyłącznie takim przypadkiem.

* Warunkiem pojawienia się odkształceń plastycznych w tym przypadku jest spełnienie nierówności:

$$\frac{P_0}{1-w^2} \geq \frac{A_s \Theta}{1-2\nu}. \quad (4.2)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Theta &= (1-\nu)(4-3\mu^2\kappa^2)^{\frac{1}{2}} - \kappa(1-2\nu+\mu\nu), \\ \kappa &= \frac{H_{01}^2}{4\pi}. \end{aligned}$$

4.2 Parametry określające obciążenie masowe wpływają na postać obszaru odkształceń plastycznych na płaszczyźnie fazowej x, t . Wpływ ten można najlepiej uwidocznić przez podanie warunków decydujących o występowaniu fal obciążenia plastycznego w poszczególnych obszarach płaszczyzny fazowej przedstawionych na rys. 3. W tym punkcie uwzględ-

nimy jedynie te zależności opisujące falę obciążenia plastycznego, do wyznaczenia których wystarcza znajomość rozwiązania przypadku odkształceń sprężystych.

Warunkiem postania fali obciążenia plastycznego w obszarze II jest spełnienie nierówności

$$(4.3) \quad \frac{P_0 L_1}{1-w^2} > \frac{A_s \Theta}{1-2\nu}.$$

Falę tą reprezentuje prosta opisana równaniem

$$(4.4) \quad x = t - \vartheta_1^{\frac{1}{2}},$$

gdzie

$$\vartheta_1 = \frac{\Theta}{(1-2\nu)\Omega_1}.$$

Przedłużeniem fali (4.4) w obszarze V jest łuk krzywej o równaniu

$$(4.5) \quad t = \frac{1+w}{2w} x + \frac{\vartheta_2}{2wx},$$

gdzie

$$\vartheta_2 = \frac{\Theta}{(1-2\nu)\Omega_2}.$$

Współrzędne punktu początkowego fali (4.5) są następujące:

$$(4.6) \quad x_0 = \left(\frac{\vartheta_2}{1+3w} \right)^{1/2}, \quad t_0 = \frac{1+2w}{w} \left(\frac{\vartheta_2}{1+3w} \right)^{1/2}.$$

Powstanie fali obciążenia plastycznego w obszarze III jest uwarunkowane przez spełnienie następującej nierówności:

$$(4.7) \quad \frac{A_s \Theta}{1-2\nu} < \frac{P_0}{1-w^2} \quad \text{i} \quad \frac{P_0 L_1}{1-w^2} \leq \frac{A_s \Theta}{1-2\nu}.$$

Prosta reprezentująca tą falę opisana jest przez równanie

$$(4.8) \quad x = t + \frac{1}{w} [(L_2 - \vartheta_3)^{1/2} - 1],$$

gdzie

$$\vartheta_3 = \frac{\Theta}{(1-2\nu)\Omega_3}.$$

Przedłużeniem fali (4.8) w obszarze VI jest łuk krzywej opisanej przez równanie

$$(4.9) \quad L_1 w^2 \left(x - t + \frac{1}{w} \right)^2 + L_2 [(x - wt)^2 - L_1] + \vartheta_4 = 0,$$

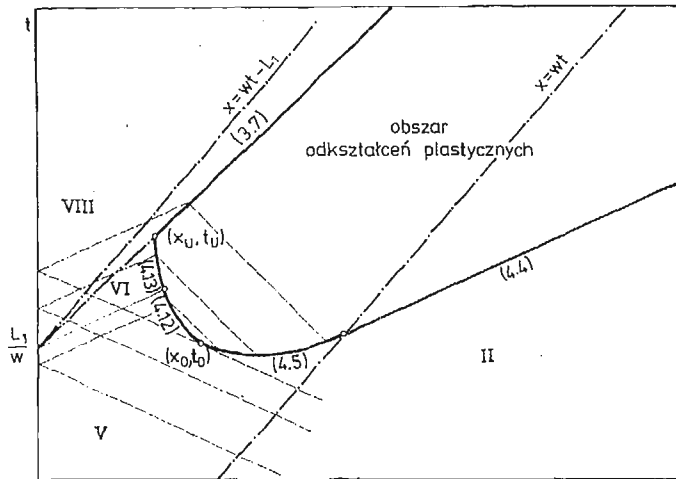
gdzie

$$\vartheta_4 = \frac{\Theta}{(1-2\nu)\Omega_4}.$$

Punkt początkowy fali (4.9) wyznacza się obliczając współrzędne punktu przecięcia krzywej (4.9) z prostą opisaną przez równanie

$$(4.10) \quad x = \frac{(w + wL_1 + L_2)w}{2w^2L_1 + L_2(1+w)} t - \frac{2wL_1}{2w^2L_1 + L_2(1+w)}.$$

4.3 Konstrukcję dalszego przebiegu fali obciążenia plastycznego przedstawimy opierając się na przypadku, w którym spełniona jest nierówność (4.3). Z przypadku tego wynikają pozostałe konfiguracje obszaru odkształceń plastycznych, z jakimi możemy mieć do czynienia w badanym zagadnieniu.



Rys. 4

Krzywoliniowy odcinek fali obciążenia plastycznego, zawarty między punktem początkowym (x_U, t_U) fali odciążenia i punktem o współrzędnych (4.6), wyznaczamy na podstawie związków wzdłuż ujemnych charakterystyk dla obszaru odkształceń plastycznych oraz dodatnich charakterystyk sprężystych (patrz rys. 4). Poszukiwany odcinek fali jest podzielony na dwie części przez charakterystykę o równaniu

$$(4.11) \quad x = t - \frac{L_1}{w}.$$

Każda z tych części jest opisana za pomocą innej zależności. Łuk położony w obszarze V (patrz rys. 4) jest reprezentowany przez równanie

$$(4.12) \quad R_1 x^2 - 2R_2 xt + 2R_3 t^2 + 2R_4(x + a_p t)[w^2(x + a_p t)^2 - U_1 \vartheta_2]^5 + R_5 = 0,$$

gdzie

$$R_1 = (U_1 a_p^{-1})^2 [a_p(1+w) - w(1-a_p)] + 2w^3(1-a_p),$$

$$R_2 = a_p w [(U_1 a_p^{-1})^2 - 2w^2(1-a_p)],$$

$$R_3 = a_p^2 w^3(1-a_p),$$

$$R_4 = w^2(1-a_p),$$

$$R_5 = U_1 [w(1+a_p) + a_p(1+w)] \vartheta_2,$$

$$U_1 = a_p [a_p(1+w) + 2w].$$

Odcinek fali obciążenia plastycznego położony w obszarze VI jest opisany przez równanie

$$(4.13) \quad S_1 x^2 - 2S_2 xt + 2S_3 t^2 + 4S_4(x-t) + 2S_5(x+a_p t)[w^2(x+a_p t)^2 - U_1 \vartheta_2]^{1/2} + S_6 = 0,$$

gdzie

$$S_1 = (a_p^{-1} U_1)^2 \{2a_p^2 w^2 L_1 + [a_p(1+w)(1-w+a_p) - w(1-w)] L_2\} + 2w^3(1-w)(1-a_p^2) L_2,$$

$$S_2 = a_p w \{(a_p^{-1} U_1)^2 [2a_p w L_1 + [a_p(1+w) + (1-w)] L_2] - 2w^2(1-w)(1-a_p^2) L_2\},$$

$$S_3 = a_p^2 w^2 [(a_p^{-1} U_1)^2 + w(1-w)(1-a_p^2) L_2],$$

$$S_4 = w U_1^2 L_1,$$

$$S_5 = w^2(1-w)(1-a_p^2) L_2,$$

$$S_6 = 2U_1^2 L_1^2 + (1-w)(1+a_p) U_1 [a_p^{-1} U_1 - (1-a_p)w] L_2 \vartheta_2.$$

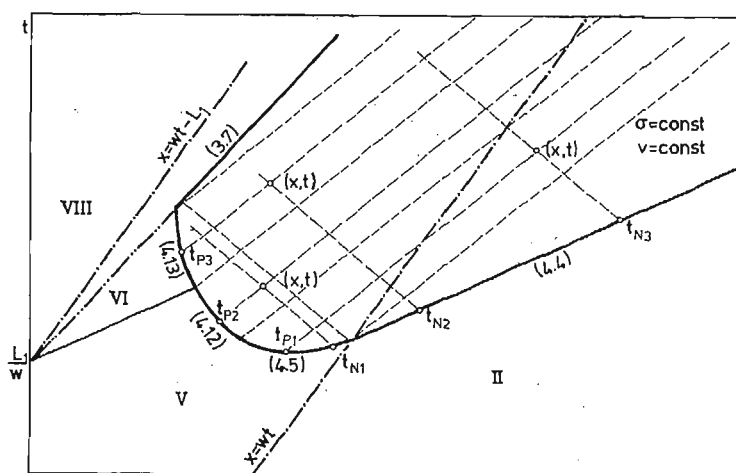
Fala obciążenia plastycznego w omawianym przypadku jest reprezentowana na płaszczyźnie fazowej (patrz rys. 4) przez półprostą (4.4) oraz trzy odcinki krzywoliniowe, opisane równaniami (4.5), (4.12), (4.13). Odcinek krzywej (4.13) ma wspólny punkt z falą odciążenia; współrzędne tego punktu oznaczono symbolem (x_0, t_0) . Analiza wyrażenia (4.13) wskazuje, że punkt ten leży w skończonej odległości od powierzchni półprzestrzeni.

4.4 Znając postać fali obciążenia plastycznego możemy wyznaczyć rozwiązania w części obszaru odkształceń plastycznych. Z uwagi na złożoną strukturę tych rozwiązań oraz dużą liczbę obszarów, w których rozwiązania przyjmują różną postać ograniczymy się do omówienia sposobu ich otrzymywania podając tylko niektóre z nich. Do tego celu wykorzystamy schemat przedstawiony na rys. 5. Będziemy rozważać przypadek

$$(4.14) \quad w < a_p < 1.$$

Procedura wyznaczania pól naprężenia i prędkości przemieszczeń w innych przypadkach ma zbliżony charakter.

Rysunek 5 przedstawia część płaszczyzny fazowej zawierającą fragment fali obciążenia plastycznego położony najbliżej powierzchni przewodnika oraz początkowy odcinek fal



Rys. 5

odciążenia. Oznaczmy przez t_{p1} , t_{p2} i t_{p3} punkty położone na linii reprezentującej falę obciążenia, w których biorą początek dodatnie charakterystyki dla obszaru odkształceń plastycznych. Odpowiednio w punktach t_{N1} , t_{N2} , t_{N3} mają początek charakterystyki ujemne. Poszukujemy rozwiązań w punktach (x, t) leżących wewnątrz obszaru odkształceń plastycznych powstałych przez przecięcie wymienionych charakterystyk. Korzystamy w tym celu ze znanych wielkości naprężenia i prędkości przemieszczeń na fali obciążenia plastycznego oraz scałkowanych związków wzdłuż charakterystyk dla obszaru odkształceń plastycznych.

W części obszaru odkształceń plastycznych ograniczonej przez falę obciążenia plastycznego (4.4) i charakterystykę dodatnią opisaną równaniem

$$(4.15) \quad x = a_p t - \frac{a_p - w}{1 - w} \vartheta_1^{1/2}$$

wartości składowych naprężenia i prędkości przemieszczeń są stałe i równe tym, jakie występują na fali (4.4).

Rozwiązanie w punkcie (x, t) przecięcia charakterystyk zaczynających się w t_{p1} i t_{N1} , położonym w obszarze przyległym do krzywej (4.5), ma następującą postać

$$(4.16) \quad \sigma(x, t) = -\frac{a_p}{2A_p} \left[v_V(t_{p1}) - \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{p1}) \right] + \frac{a_p}{2A_p} \left[v_V(t_{N1}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{N1}) \right] - \\ - \frac{P_0 a_p}{4A_p L_1} [2a_p t^2 + (a_p - w)t_{p1}^2 + (a_p + w)t_{N1}^2 + 2(C_p t_{p1} - C_N t_{N1})],$$

$$(4.17) \quad v(x, t) = \frac{1}{2} \left[v_V(t_{p1}) - \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{p1}) \right] + \frac{1}{2} \left[v_V(t_{N1}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{N1}) \right] + \\ + \frac{P_0}{4L_1} [2wt^2 - 4xt + (a_p - w)t_{p1}^2 - (a_p + w)t_{N1}^2 + 2(C_p t_{p1} + C_N t_{N1})]$$

gdzie

$$v_V(t_{p1}) - \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{p1}) = -\frac{P_0}{2A_s L_1 a_p (1+w)} \{c_p^2 [(1+w)A_p + a_p w A_s] + \\ + 2C_p t_{p1} [(a_p + a_p w - w)A_p + a_p^2 w A_s] + t_{p1}^2 a_p [(a_p + a_p w - 2w)A_p + w(a_p^2 - w)A_s]\},$$

$$v_V(t_{N1}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{N1}) = \frac{P_0}{2A_s L_1 a_p (1+w)} \{C_N^2 [(1+w)A_p - a_p w A_s] + \\ - 2C_N t_{N1} [(a_p + a_p w + w)A_p - a_p^2 w A_s] + t_{N1}^2 a_p [(a_p + a_p w + 2w)A_p - w(a_p^2 - w)A_s]\},$$

$$C_p = x - a_p t, \quad C_N = x + a_p t,$$

$$t_{p1} = U_2^{-1} \{ -C_p Q_2 - [(wC_p)^2 - U_2 \vartheta_2]^{1/2} \},$$

$$t_{N1} = U_1^{-1} \{ C_N Q_1 - [(wC_N)^2 - U_1 \vartheta_2]^{1/2} \},$$

$$Q_1 = a_p(1+w) + w,$$

$$U_2 = a_p[a_p(1+w) - 2w],$$

$$Q_2 = a_p(1+w) - w.$$

Podobnie rozwiązanie w punkcie (x, t) powstałym z przecięcia charakterystyk zaczynających się w t_{p1} i t_{N2} przyjmuje postać

$$(4.18) \quad \sigma(x, t) = -\frac{a_p}{2A_p} \left[v_V(t_{p1}) - \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{p1}) \right] + \frac{a_p}{2A_p} \left[v_{II}(t_{N2}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_{II}(t_{N2}) \right] - \\ - \frac{P_0 a_p}{2A_p L_1} \left[2a_p t^2 + (a_p - w)t_{p1}^2 + 2C_p t_{p1} - \frac{C_N^2}{a_p + w} \right],$$

$$(4.19) \quad v(x, t) = \frac{1}{2} \left[v_V(t_{p1}) - \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{p1}) \right] + \frac{1}{2} \left[v_{II}(t_{N2}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_{II}(t_{N2}) \right] + \\ + \frac{P_0}{4L_1} \left[[2wt^2 - 4xt + (a_p - w)t_{p1}^2 + 2C_p t_{p1} + \frac{C_N^2}{a_p + w}] \right],$$

gdzie

$$v_{II}(t_{N2}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_{II}(t_{N2}) = \frac{a_p A_s - A_p}{2a_p} \frac{\Theta}{1 - 2\nu}.$$

Rozwiązanie w punkcie (x, t) przecięcia charakterystyk zaczynających się w t_{p1} i t_{N3} ma następującą postać

$$(4.20) \quad \sigma(x, t) = -\frac{a_p}{2A_p} \left[v_V(t_{p1}) - \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{p1}) \right] + \frac{a_p}{2A_p} \left[v_{II}(t_{N3}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_{II}(t_{N3}) \right] - \\ - \frac{P_0 a_p}{4A_p L_1} \left[\frac{C_p^2}{a_p - w} + (a_p - w)t_{p1}^2 + 2C_p t_{p1}^2 \right].$$

$$(4.21) \quad v(x, t) = \frac{1}{2} \left[v_V(t_{p1}) - \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{p1}) \right] + \frac{1}{2} \left[v_{II}(t_{N3}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_{II}(t_{N3}) \right] + \\ + \frac{P_0}{4L_1} \left[\frac{C_p^2}{a_p - w} + (a_p - w)t_{p1}^2 + 2C_p t_{p1} \right],$$

gdzie

$$v_{II}(t_{N3}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_{II}(t_{N3}) = \frac{a_p A_s - A_p}{2a_p} \frac{\Theta}{1 - 2\nu}.$$

Rozwiązania w pozostałych częściach obszaru odkształceń plastycznych mają zbliżony charakter do tych, które przedstawiono wyżej.

4.5 W punktach 4.2 i 4.3 podano zależności opisujące falę obciążenia plastycznego. Łączy się ona z falą odciążenia w punkcie (x_U, t_U) przecięcia krzywej (4.13) i prostej (3.7). Na podstawie rozważań opisanych w [10] można wykazać, że początkowy odcinek fali odciążenia leży na prostej (3.7) (przy założeniu $a_p > m$). Wyznaczając zależności określające stan naprężenia i prędkości przemieszczeń w punktach należących do tej prostej korzystamy ze związków wzdłuż dodatnich charakterystyk dla obszaru odciążenia i ujemnych charakterystyk dla obszaru odkształceń plastycznych (patrz rys. 4). Otrzymane tą drogą wyrażenia dla wymienionych wielkości przyjmują postać

$$(4.22) \quad \sigma^u(x) = -\frac{2a_A^2(G-G_p)\Theta}{(1-2\nu)A} + \left[v_V(t_{N1}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{N1}) \right] \frac{3E_s E_p}{A} - \\ - \frac{3P_0 E_s E_p}{2L_1 L_2 (1-w^2)A} \left\{ 2L_1 L_2 - (1+w)L_2(x-wt)^2 - 2L_1 [w(x-t)+1]^2 - \right. \\ \left. - (1-w^2)L_2[(a_p+w)(t^2-t_{N1}^2) - 2C_N(t-t_{N1})] \right\},$$

$$(4.23) \quad v_3^u(x) = \frac{2a_A^2 A_p (G-G_p)\Theta}{(1-2\nu)a_p A} + \\ + \frac{3E_p + 4a_A^2(G-G_p)}{A} \left\{ v_V(t_{N1}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{N1}) + \frac{P_0}{2L_1} [(a_p+w)(t^2-t_{N1}^2) - 2C_N(t-t_{N1})] \right\} + \\ + \frac{3P_0 a_p E_s}{2L_1 L_2 (1-w^2)A} \left\{ 2L_1 L_2 - (1+w)L_2(x-wt)^2 - 2L_1 [w(x-t)+1]^2 \right\},$$

gdzie

$$t = \frac{x+b}{m},$$

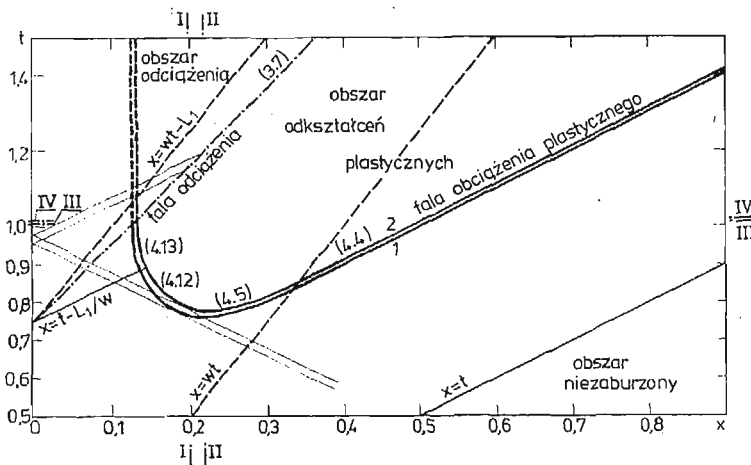
$$A = 3(a_p E_s + E_p) + 4a_A^2(G-G_p);$$

pozostałe oznaczenia jak we wzorach wyżej.

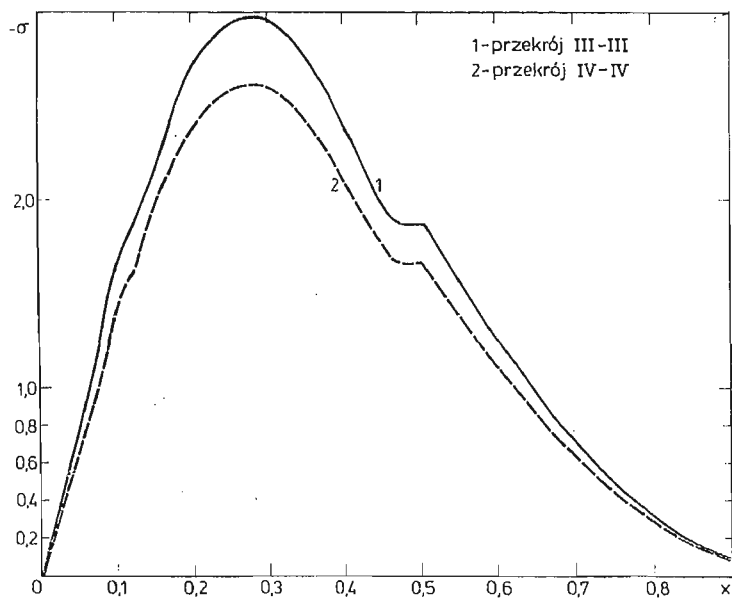
Korzystając ze znanych na podstawie (4.22) i (4.23) wartości naprężenia i prędkości przemieszczeń ośrodka wzdłuż początkowego odcinka (3.7) fali odciążenia jesteśmy w stanie wyznaczyć, w sposób wyżej opisany, zarówno rozwiązania w części obszaru odkształceń plastycznych, przyległej do tego odcinka, jak i dalszy przebieg fali odciążenia.

5. Wyniki rozwiązania przykładu liczbowego

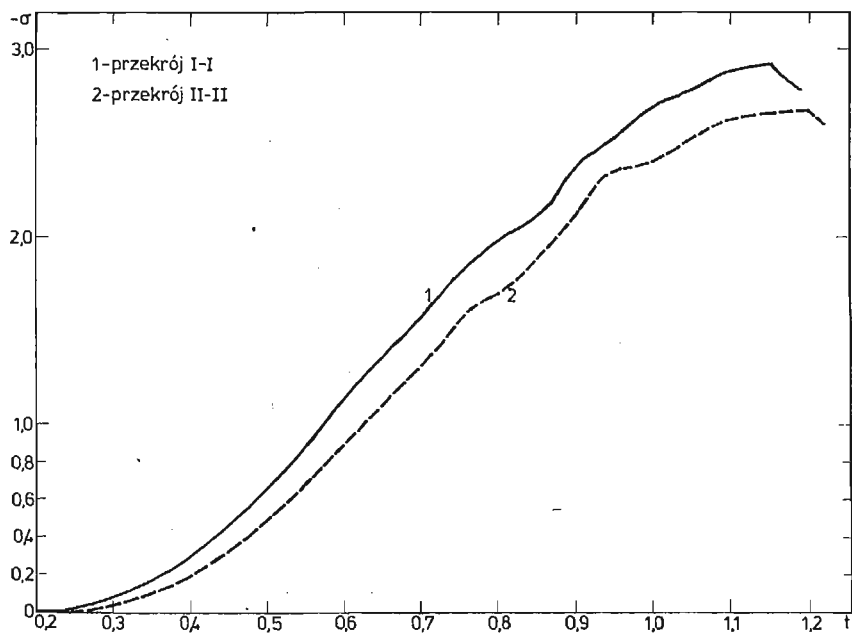
Podane niżej rezultaty obliczeń numerycznych służą do zilustrowania rozważań przedstawionych w poprzednich paragrafach. W rozwiązany przykładzie wykorzystano dane



Rys. 6



Rys. 7

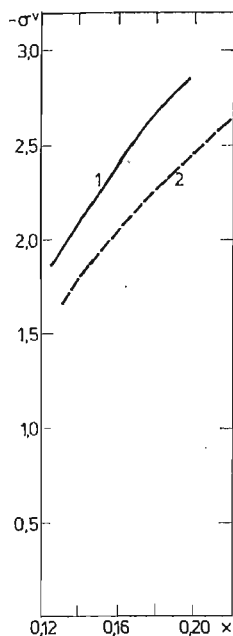


Rys. 8

materiałowe dla miedzi (Cu): $\bar{E}_y = 1,18 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ (moduł Younga), $\bar{\sigma}_0 = 2,45 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2}$, $\bar{G}_p = 9,81 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2}$, $\bar{\rho} = 8,93 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\nu = 0,33$ (współczynnik Poissona), $\mu = 1$.

Obliczenia wykonano dla dwóch wartości natężenia pierwotnego pola magnetycznego w przewodniku: $H_{01}^{(1)} = 1,11$, $H_{01}^{(2)} = 1,82$. W obu przypadkach przyjęto różne maksymalne wartości intensywności siły masowej, tj. odpowiednio $P_0^{(1)} = 3,3 \cdot 10^{-2}$, $P_0^{(2)} = 2,8 \cdot 10^{-2}$. Pozostałe parametry charakteryzujące wymuszenie są w obu przypadkach jednakowe i mają następujące wartości: $w = 0,4$, $L_1 = 0,3$, $L_2 = 0,7$.

Na rys. 6 przedstawiono granice obszarów odkształceń plastycznych, odpowiadające obu przypadkom oraz zaznaczono przekroje, w których obliczono przebieg naprężenia σ . Rysunek 7 pokazuje zmienność naprężenia w funkcji odległości x od powierzchni przewodnika, w wybranych chwilach czasu. Na rys. 8 zilustrowano przebieg zmian naprężenia w czasie dla ustalonych wartości x . Rysunek 9 przedstawia zmienność naprężenia wzdłuż początkowego odcinka (3.7) fali odciążenia. Cyfry 1 i 2 używane do oznaczenia linii na wykresach przyporządkowują te linie odpowiednim wartościom natężenia pierwotnego pola magnetycznego.



Rys. 9

6. Uwagi końcowe

Przedstawione w pracy rozważania należy traktować jako wstępny etap w badaniu efektów towarzyszących wnikananiu pola magnetycznego do wnętrza sprężysto-plastycznego przewodnika. Przyjęty sposób modelowania działania pola magnetycznego przez ruchome obciążenie masowe jest daleko idącym uproszczeniem i nie uwzględnia w szczególności oddziaływań natury elektromagnetycznej, jakie mają miejsce w rzeczywistym przypadku.

Dalsze zatem rozwinięcie tych badań będzie zmierzać do uwzględnienia wnikającego pola magnetycznego, jako czynnika wywołującego propagację fal naprężenia w przewodniku. W tym przypadku może być ono wyznaczone niezależnie, na podstawie rozwiązania odpowiedniego problemu elektrodynamiki a następnie traktowane jako wielkość dana w zagadnieniu magnetosprężystości i magnetoplastyczności.

Istotne ograniczenie stosowalności przedstawionych tu rozważań wynika z założenia o jednowymiarowości stanu odkształcenia, które należy pominąć w przyszłych badaniach. Powoduje ono, że rezultaty tej pracy są nieprzydatne w przypadku często przyjmowanego założenia o nieściśliwości materiału w stanie odkształceń plastycznych.

Przyjęty model, mimo wymienionych wad, pozwolił uzyskać rezultaty obserwowane w technologicznych procesach obróbki plastycznej za pomocą pola magnetycznego.

Pierwszym z efektów, który jest wyraźnie widoczny na podstawie rys. 6 i 7, jest występowanie warstwy ośrodka nieodkształconego plastycznie, przyległej do powierzchni, przez którą wnika pole magnetyczne (por. [5]).

Kolejnym efektem jest stwierdzenie rozprzestrzeniania się obszaru plastycznego w głąb przewodnika. Wyprzedza on strefę, w której występuje impulsowe pole magnetyczne. Potwierdza to sugestie szeregu autorów (patrz [5]), że uplastycznienie materiału elementów obrabianych, jakie obserwuje się po zaniknięciu impulsu pola magnetycznego jest rezultatem działania procesu dynamicznego.

Literatura cytowana w tekście

1. H. KOLM, A. FREEMAN, *Intense magnetic fields*, Scientific American, 212 (4), 66, 1965.
2. L. КНОПФ, *The interaction between elastic wave motion and a magnetic field in electrical conductors*—J. Geophys. Res., 60, 1955, (441).
3. W. F. BROWN, *Magnetoelastic Interactions*, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 9, Springer, Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1966.
4. H. PARKUS, *Magneto-thermoelasticity*, CISM, Courses and Lectures — No. 118, Springer-Verlag, Wien—New York, Udine 1972.
5. J. DOBROGOWSKI, Z. KOŁACZKOWSKI, F. ТУСНОВСКИ, *Tłoczenie metali impulsowym polem magnetycznym*, PWN, Warszawa—Poznań, 1979.
6. В. П. Демущкий, Р. В. Половин, *О магнитоупругом течении*, ПММ, т. 33, вып. 6, 1969.
7. R. W. WANIEK, *High-energy-rate forming*, z „New Trends in Materials Processing”, Detroit, 1974.
8. G. PARRA, *The propagation of magneto-thermo-elastic plane waves*, Proc. Camb. Phil. Soc., 58, 1962, (527 - 531).
9. С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, *Магнитоупругость тонких оболочек и пластин*, Изд. „Наука”, Глав. Ред. Физ.-Мат. Лит., Москва, 1977.
10. K. PODOLAK, *Propagation of plane stress waves, produced by a moving load in an elastic-plastic medium*, Proc. Vibr. Probl. 3, 8, 1967, (251 - 271).

Резюме

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ПРОВОДНИКЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ МАССОВОЙ СИЛЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В статье рассматривается вопрос распространения плоских волн напряжения в упруго — пластическом идеальном проводнике находящимся в начальном постоянном магнитном поле. Действие

мгновенного магнитного поля вызывающего волновое движение моделируется движущейся массовой силой. Производится анализ точного решения полученного методом характеристик. Показано, что в проводнике существует слой касающийся его поверхности, в котором нет пластической деформации, и что распространение пластической области опережает движение массовой силы. Таковы эффекты являются сходными к тем которые встречаются в процессе электромагнитного формообразования металлов.

S u m m a r y

ON PROPAGATION OF STRESS WAVES PRODUCED BY A MOVING BODY FORCE IN AN ELASTIC-PLASTIC CONDUCTOR SUBJECT TO A MAGNETIC FIELD

The propagation of plane stress waves in an elastic-plastic perfect conductor placed in a constant primary magnetic field is considered. The action of an instantaneous magnetic field, which generates the wave motion in the conductor, is modelled by means of a moving body force. An analysis of an exact form solution obtained by the method of characteristics is performed. It is shown that a boundary layer free of plastic deformations appears at the outer surface of the conductor and that the propagation of a plastic zone precedes the motion of a body force. These effects are similar to those observed in a process of electromagnetic forming of metals.

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 sierpnia 1980 roku.

NIELINIOWA TEORIA STATECZNOŚCI POWŁOK PRZEKŁADKOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM POPRZECZNEJ ODKSZTAŁCALNOŚCI RDZENIA

FRANCISZEK R O M A N Ó W, J E R Z Y C Z M O C H O W S K I

Wrocław

W pracy rozpatrzono zagadnienie stateczności sprężystej małowyniosłych walcowych powłok trójwarstwowych z miękkim rdzeniem, odkształcalnym w kierunku prostopadłym do powłoki. Zagadnienie to w zakresie liniowym rozwiązano w pracy [1] dla powłok ściskanych i w pracy [2] dla powłok ścinanych. Zgodnie z teorią cienkich jednorodnych powłok przyjmuje się dla warstw zewnętrznych hipotezę przemieszczeniową Kirchhoffa-Love'a (K—L). W stosunku do rdzenia zastosowano metodę przedstawioną w pracy [1, 2], uwzględniającą poprzeczną odkształcalność rdzenia. Z zasady prac wirtualnych wyprowadzono równania równowagi sił i zespół naturalnych warunków brzegowych. Układ pięciu równań równowagi wyrażonych w przemieszczeniach, po wprowadzeniu funkcji naprężeń i funkcji przemieszczeń sprowadzono do trzech równań różniczkowych cząstkowych, które rozwiązano przybliżoną metodą Bubnowa-Galerkina.

Celem ilustracji zjawisk występujących w stanie zakrytycznym oraz wpływu początkowych imperfekcji podano prosty przykład w którym rozwiązano zadanie stateczności sprężystej swobodnie podpartej otwartej powłoki walcowej przy osiowym ściskaniu. Wyniki obliczeń przedstawiono w formie wykresu siła — ugięcie (rys. 3). Natomiast wpływ poprzecznej odkształcalności rdzenia na stateczność początkową przedstawiono na wykresie siły krytycznej w funkcji grubości rdzenia.

Wstęp

W większości prac dotyczących teorii stateczności sprężystej powłok trójwarstwowych zakłada się stałą wartość ugięcia na grubości rdzenia. Założenie to jest słuszne jedynie dla powłok cienkich, natomiast jest błędne dla powłok o stosunkowo grubym rdzeniu, gdzie decydujące znaczenie mają odkształcenia w kierunku prostopadłym do powierzchni powłoki. Poprzeczne odkształcenia rdzenia uwzględnił już E. REISSNER [3], gdzie przy założeniu w rdzeniu liniowej zmiany naprężeń normalnych do płyty wyprowadził równania równowagi sił płyty trójwarstwowej. W ten sam sposób badali stateczność płyt V. DUNDROVA, V. KOVARIK, P. SLAPAK [4], a A. L. POTASZ [7] i KARAVANOV [10] badali skończone ugięcia płyt ortotropowych. Inna grupa prac uwzględniających ściśliwość poprzeczną rdzenia opiera się na linearyzacji ugięć w warstwie lekkiej Ju. N. NOVICKOV [5], E. I. GRIGOLJUK, P. P. CULKOV [6], L. POMAZI [15]. W pracy [14] autorzy wychodząc z równości

odkształceń przy ściskaniu rdzenia i okładziny, określili krytyczne obciążenie tylko dla cylindrycznie ściskanej tarczy o dowolnej grubości. Jednak ze względu na zawyżone wartości naprężeń krytycznych w tarczach o średniej grubości, teoria ta ma ograniczone zastosowanie.

Zagadnieniem nieliniowym stateczności sprężystej cienkich powłok trójwarstwowych i stanami zakrytycznymi zajmowało się wielu autorów, co przedstawiono w pracy [13].

Z krajowych publikacji zasługuje na uwagę praca W. SZYCA [8], gdzie autor określił wpływ początkowych imperfekcji oraz udział rdzenia w przenoszeniu obciążeń ściskających stycznych do powłoki.

Natomiast J. G. Ronan i J. S. Kao [9] zbadali wpływ sztywności rdzenia na górną i dolną wartość obciążenia krytycznego ściskanych powłok walcowych trójwarstwowych.

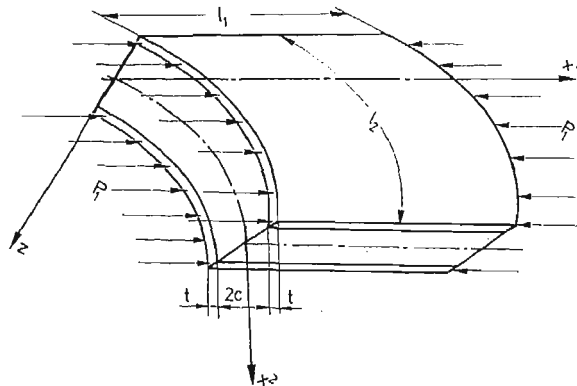
1. Podstawowe założenia

Rozpatrzmy zagadnienie stateczności powłoki trójwarstwowej typu sandwich tzn. złożoną z dwóch warstw „sztywnych” grubości t , zwanych dalej okładzinami, pomiędzy którymi znajduje się warstwa o znacznie mniejszej sztywności, o grubości $2c$, zwanej dalej rdzeniem.

Przyjmujemy, że okładziny pracują jak cienkie powłoki, dla których słuszna jest hipoteza Kirchhoffa-Love'a. Dla rdzenia istotne znaczenie mają odkształcenia w kierunku normalnym do powierzchni środkowej i odkształcenia od poprzecznego ścinania. Siły podłużne przenoszą tylko warstwy zewnętrzne. Dla miękkich rdzeni ($Et/E_n c > 10$) przyjmuje się, że naprężenia normalne i tnące w płaszczyźnie rdzenia są pomijalnie małe w stosunku do pozostałych naprężeń. Dla rdzenia przyjmujemy hipotezę przemieszczeniową zgodnie z [1].

Powłokę warstwową odnosimy do ortogonalnego układu współrzędnych x^1, x^2 , z rys. 1. Przemieszczenia dla okładzin zgodnie z hipotezą K—L przyjmują postać

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_\alpha^f &= u_\alpha^{0f} + \left(z \pm c \pm \frac{t}{2} \right) \varphi_\alpha, \\ u_3^f &= w, \end{aligned}$$



Rys. 1. Schemat powłoki walcowej.

gdzie

$f \equiv g$ — dla górnej okładziny; $-(c+t) < z < -t$,

$f \equiv d$ — dla dolnej okładziny; $c < z < c+t$; (znak minus w nawiasie)

u_α^0 — przemieszczenie powierzchni środkowej okładziny,

φ_α^f — kąt obrotu płaszczyzny prostopadłej do powierzchni środkowej okładziny
(zgodnie z hipotezą K—L $\varphi_\alpha = -w_{,\alpha}$),

w — ugięcie okładzin.

Przemieszczenia w rdzeniu przyjmujemy w postaci [1, 2]

$$(1.2) \quad \begin{cases} u_\alpha^c = u_\alpha^+ - \frac{u_\alpha^-}{c} z - \frac{t}{2c} \varphi_\alpha z f(z), \\ w^c = w f(z), \end{cases}$$

gdzie:

$$(1.3) \quad u_\alpha^+ = \frac{1}{2}(u_\alpha^{0g} + u_\alpha^{0d}), \quad u_\alpha^- = \frac{1}{2}(u_\alpha^{0g} - u_\alpha^{0d}),$$

$f(z)$ — funkcja zależna tylko od współrzędnej prostopadłej do powłoki.

Odształcenia okładzin zgodnie z nieliniową teorią powłok przyjmujemy w postaci:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^f &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^f + u_{\beta,\alpha}^f + w_{,\alpha} w_{,\beta} + w_{,\alpha} w_{,\beta}^0 + w_{,\alpha}^0 w_{,\beta}) - k_{\alpha\beta} w, \\ \varepsilon_{\alpha 3}^f &= q_\alpha = \varphi_\alpha + w_{,\alpha}, \end{aligned}$$

gdzie:

w^0 — początkowe nieregularności powierzchni okładzin (początkowe imperfekcje),

$k_{\alpha\beta}$ — główne krzywizny powierzchni środkowej okładzin.

W dalszej części wprowadzimy odształcenia sprowadzone do powierzchni środkowej powłoki

$$(1.5) \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^f = e_{\alpha\beta}^+ \pm e_{\alpha\beta}^- + \left(z \pm c \pm \frac{t}{2} \right) \kappa_{\alpha\beta},$$

gdzie:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} e_{\alpha\beta}^+ &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^+ + u_{\beta,\alpha}^+ + w_{,\alpha} w_{,\beta} + w_{,\alpha} w_{,\beta}^0 + w_{,\alpha}^0 w_{,\beta}) - k_{\alpha\beta} w, \\ e_{\alpha\beta}^- &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^- + u_{\beta,\alpha}^-), \\ \kappa_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha}). \end{aligned}$$

Odształcenia w rdzeniu określamy w następujący sposób

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha 3}^c &= u_{\alpha,3}^c + w_{,\alpha}^c = -\frac{u_\alpha^-}{c} - \frac{t}{2c} \left(f + z \frac{df}{dz} \right) \varphi_\alpha + f w_{,\alpha} \\ \varepsilon_{33}^c &= \frac{df}{dz} w. \end{aligned}$$

Zgodnie z prawem Hooke'a naprężenia w warstwach przyjmują postać

$$(1.8) \quad \sigma_{\alpha\beta}^f = \frac{E}{1-\nu^2} \{ (1-\nu)\varepsilon_{\alpha\beta}^f + \nu\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\gamma}^f \},$$

$$\sigma_{\alpha 3}^c = G_c \varepsilon_{\alpha 3}^c,$$

$$\sigma_{33}^c = E_c \varepsilon_{33}^c,$$

gdzie: E, ν — moduł Younga i liczba Poissona materiału okładzin,
 E_c, G_c — moduł Younga i moduł Kirchhoffa materiału rdzenia.

2. Równania równowagi

Równania równowagi powłoki trójwarstwowej znajdujemy wykorzystując zasadę prac wirtualnych, zgodnie z którą energia odkształcenia sprężystego układu jest równa pracy sił zewnętrznych na wirtualnych przemieszczeniach

$$(2.1) \quad \delta II = \delta W_z,$$

gdzie: δII oznacza wariację energii odkształcenia sprężystego powłoki

$$(2.2) \quad II = II^g + II^d + II^c,$$

$II^{g,d,c}$ — są odpowiednio energią odkształcenia sprężystego warstwy górnej, dolnej i rdzenia,

δW_z — oznacza wariację sił pracy zewnętrznych

$$(2.3) \quad W_z = W_\Omega + W_s,$$

W_Ω — praca sił działających na powierzchnię Ω powłoki,

W_s — praca sił przyłożonych do brzegów powłoki.

Wariację energii sprężystej możemy przedstawić w postaci:

$$(2.4) \quad \delta II = \int_{\Omega} \left[\int_{-(c+t)}^{-c} \sigma_{\alpha\beta}^g \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^g dz + \int_{-c}^c \sigma_{i3}^c \delta \varepsilon_{i3}^c dz + \int_c^{c+t} \sigma_{\alpha\beta}^d \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^d dz \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left[N_{\alpha\beta}^+ \delta e_{\alpha\beta}^+ + \right. \\ \left. + N_{\alpha\beta}^- \delta e_{\alpha\beta}^- + M_{\alpha\beta} \delta \chi_{\alpha\beta} + Q_{\alpha 3} \delta q_{\alpha} - Q_{\alpha 3}^c \delta \left(\frac{u_{\alpha}^-}{c} \right) - \frac{t}{2c} S_{\alpha 3}^c \delta \varphi_{\alpha} + T_{\alpha 3}^c \delta w_{,\alpha} + T_{33}^c \delta w \right] d\Omega,$$

Ω — powierzchnia środkowa powłoki ($\Omega: 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2$), gdzie siły zdefiniowano w następujący sposób:

$$(2.5) \quad N_{\alpha\beta}^+ = N_{\alpha\beta}^g + N_{\alpha\beta}^d;$$

$$N_{\alpha\beta}^- = c(N_{\alpha\beta}^g - N_{\alpha\beta}^d);$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^g + M_{\alpha\beta}^d;$$

$$Q_{\alpha 3} = Q_{\alpha 3}^g + Q_{\alpha 3}^d;$$

$$S_{\alpha 3}^c = T_{\alpha 3}^c + V_{\alpha 3}^c;$$

$$\begin{aligned}
 N_{\alpha\beta}^g &= \int_{-(c+t)}^{-c} \sigma_{\alpha\beta}^g dz; & N_{\alpha\beta}^d &= \int_c^{c+t} \sigma_{\alpha\beta}^d dz; \\
 M_{\alpha\beta}^g &= \int_{-(c+t)}^{-c} \sigma_{\alpha\beta}^g \left(z+c+\frac{t}{2} \right) dz; & M_{\alpha\beta}^d &= \int_c^{c+t} \sigma_{\alpha\beta}^d \left(z-c-\frac{t}{2} \right) dz; \\
 Q_{\alpha 3}^g &= \int_{-(c+t)}^{-c} \sigma_{\alpha 3}^g dz; & Q_{\alpha 3}^d &= \int_c^{c+t} \sigma_{\alpha 3}^d dz; & Q_{\alpha 3}^c &= \int_{-c}^c \sigma_{\alpha 3}^c dz; \\
 T_{\alpha 3}^c &= \int_{-c}^c \sigma_{\alpha 3}^c f(z) dz; & T_{33}^c &= \int_{-c}^c \sigma_{33}^c \frac{df}{dz} dz; \\
 V_{\alpha 3}^c &= \int_{-c}^c \sigma_{\alpha 3}^c z \frac{df}{dz} dz.
 \end{aligned}$$

W ten sposób zagadnienie przestrzenne sprowadzimy do płaskiego. Wariację pracy sił przyłożonych do powierzchni powłoki obliczamy w następujący sposób

$$(2.6) \quad \delta W_{\Omega} = \iint_{\Omega} (p_{\alpha} \delta u_{\alpha}^+ + p_3 \delta w) dx_1 dx_2,$$

gdzie: p_{α}, p_3 — składowe obciążenia powierzchniowego w kierunku osi x_{α}, z .

Natomiast wariacja pracy sił brzegowych $\bar{N}_{\alpha\beta}^+, \bar{N}_{\alpha\beta}^-, \bar{M}_{\alpha\beta}, \bar{Q}_{\alpha}$ ma postać

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad \delta W_s &= \int_0^{l_1} \left[\bar{N}_{\alpha 2}^+ \delta u_{\alpha}^+ + \bar{N}_{\alpha 2}^- \delta \left(\frac{u_{\alpha}^-}{c} \right) + \bar{N}_{\alpha 2}^+ w_{,\alpha} \delta w^0 - \bar{M}_{22} \delta w_{,2} + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{Q}_2 \delta w \right]_0^{l_1} dx_1 + \int_0^{l_2} \left[\bar{N}_{\alpha 1}^+ \delta u_{\alpha}^+ + \bar{N}_{\alpha 1}^- \delta \left(\frac{u_{\alpha}^-}{c} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{N}_{\alpha 1}^+ w_{,\alpha} \delta w^0 - \bar{M}_{11} \delta w_{,1} + \bar{Q}_1 \delta w \right]_0^{l_1} dx_2 - 2 \bar{M}_{12} \delta w \Big|_0^{l_1} \Big|_0^{l_2}
 \end{aligned}$$

Wykorzystując wzory (2.5) obliczamy siły działające na powłokę w funkcji przemieszczeń

$$\begin{aligned}
 N_{\alpha\beta}^+ &= 2B[(1-\nu)e_{\alpha\beta}^+ + \nu\delta_{\alpha\beta}e_{\gamma\gamma}^+], \\
 N_{\alpha\beta}^- &= 2Bc^2[(1-\nu)e_{\alpha\beta}^- + \nu\delta_{\alpha\beta}e_{\gamma\gamma}^-], \\
 M_{\alpha\beta} &= 2D[(1-\nu)\kappa_{\alpha\beta} + \nu\delta_{\alpha\beta}\kappa_{\gamma\gamma}], \\
 Q_{\alpha 3}^c &= -2G_c(u_{\alpha}^- - \Theta_{16}w_{,\alpha}), \\
 T_{\alpha 3}^c &= -2G_c(I_1 u_{\alpha}^- - \Theta_{37}w_{,\alpha}), \\
 V_{\alpha 3}^c &= -2G_c(I_6 u_{\alpha}^- - \Theta_{78}w_{,\alpha}), \\
 S_{\alpha 3}^c &= T_{\alpha 3}^c + V_{\alpha 3}^c, \\
 T_{33}^c &= \frac{E_c I_5}{c} w,
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

gdzie:

$$(2.9) \quad \Theta_{IJ} = \left(c + \frac{t}{2} \right) I_I + \frac{t}{2} I_J$$

Wartości parametrów I_I dla przemieszczeń w rdzeniu określonych funkcją (1.2) [1] i dla przemieszczeń zgodnych z hipotezą prostej łamanej $f(z) = 1$ podano w tabeli 1.

Po podstawieniu powyższych zależności do (2.1) i całkowaniu przez części otrzymamy równania równowagi powłoki wyrażone w przemieszczeniach (2.10) oraz zespół naturalnych warunków brzegowych (2.12).

$$(2.10) \quad (1-\nu)(u_{\alpha,\beta}^+ + u_{\beta,\alpha}^+ + w_{,\alpha} w_{,\beta} + w_{,\alpha} w_{,\beta}^0 + w_{,\alpha}^0 w_{,\beta} - 2k_{\alpha\beta} w)_{,\beta} + \\ + 2\nu \delta_{\alpha\beta} (u_{\gamma,\gamma}^+ + \frac{1}{2} w_{,\gamma} w_{,\gamma} + w_{,\gamma} w_{,\gamma}^0 - k_{\gamma\gamma} w)_{,\beta} = -\frac{p_{\alpha}}{B}, \\ \frac{cB}{G_c} \left[\frac{1-\nu}{2} (u_{\alpha,\beta}^- + u_{\beta,\alpha}^-) + \nu \delta_{\alpha\beta} u_{\gamma,\gamma} \right]_{,\beta} - u_{\alpha}^- + \Theta_{16} w_{,\alpha} = 0, \\ -2D w_{,\alpha\alpha\beta\beta} - 2B\Theta_{16} u_{\alpha,\beta\beta}^- + 2G_c \frac{\Theta}{c} w_{,\alpha\alpha} - \frac{E_c I_5}{c} w + \\ + N_{\alpha\beta}^+ (k_{\alpha\beta} + w_{,\alpha\beta} + w_{,\alpha\beta}^0) + p_3 - p_{\alpha} (w + w^0)_{,\alpha} = 0,$$

gdzie:

$$(2.11) \quad \Theta = \left(c + \frac{t}{2} \right) \Theta_{37} + \frac{t}{2} \Theta_{78} - \Theta_{16}^2$$

$$(2.12) \quad \int_0^{l_1} \left\{ (N_{\alpha 2}^+ - \bar{N}_{\alpha 2}^+) \delta u_{\alpha}^+ + (N_{\alpha 2}^- - \bar{N}_{\alpha 2}^-) \delta \left(\frac{u_{\alpha}^-}{c} \right) + \right. \\ \left. + (N_{\alpha 2}^+ w_{,\alpha} - \bar{N}_{\alpha 2}^+ w_{,\alpha}) \delta w^0 - (M_{22} - \bar{M}_{22}) \delta w_{,\alpha} + \right. \\ \left. + \left[M_{22,2} + 2M_{12,1} + N_{\alpha 2}^+ (w + w^0)_{,\alpha} + \frac{t}{2c} S_{23}^c + T_{23}^c - \bar{Q}_2 \right] \delta w \right\}_0^{l_1} dx_1 + \\ + \int_0^{l_2} \left\{ (N_{\alpha 1}^+ - \bar{N}_{\alpha 1}^+) \delta u_{\alpha}^+ + (N_{\alpha 1}^- - \bar{N}_{\alpha 1}^-) \delta \left(\frac{u_{\alpha}^-}{c} \right) + \right. \\ \left. + (N_{\alpha 1}^+ w_{,\alpha} - \bar{N}_{\alpha 1}^+ w_{,\alpha}) \delta w^0 - (M_{11} - \bar{M}_{11}) \delta w_{,\alpha} + \right. \\ \left. + \left[M_{11,1} + 2M_{12,2} + N_{\alpha 1}^+ (w + w^0)_{,\alpha} + \frac{t}{2c} S_{13}^c + \right. \right. \\ \left. \left. + T_{13}^c - \bar{Q}_1 \right] \delta w \right\}_0^{l_1} dx_2 - 2(M_{12} - \bar{M}_{12}) \delta w \Big|_0^{l_1} \Big|_0^{l_2} = 0.$$

3. Stateczność osiowo ściskanej powłoki cylindrycznej

Obecnie przedstawimy rozwiązanie zadania stateczności sprężystej swobodnie podpartej otwartej powłoki walcowej przy osiowym ściskaniu. Siły zewnętrzne \bar{N}_{11}^+ są równo-

miernie rozłożone na krawędziach $x_1 = 0$ i $x_1 = l_1$. Warunki brzegowe otrzymujemy zgodnie z powyższymi założeniami z naturalnych warunków brzegowych (2.12). Mianowicie dla $x_1 = 0$ i $x_1 = l_1$ mamy

$$(3.1) \quad \begin{aligned} N_{11}^+ &= \bar{N}_{11}^+, \\ N_{21}^+ &= 0, \\ N_{11}^- &= 0 \Rightarrow (1-\nu)e_{11}^- + \nu(e_{11}^- + e_{22}^-) = 0 \Rightarrow u_{1,1}^- = 0 \quad \text{i} \quad u_{2,2}^- = 0, \\ u_{2,1}^- &= 0, \\ M_{11} &= 0 \Rightarrow (1-\nu)\kappa_{11} + \nu(\kappa_{11} + \kappa_{22}) = 0 \Rightarrow w_{,11} = 0 \quad \text{i} \quad w_{,22} = 0, \\ w &= 0, \end{aligned}$$

dla brzegu $x_2 = 0$ i $x_2 = l_2$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} N_{12}^+ &= 0, \\ N_{22}^+ &= 0, \\ u_{1,1}^- &= 0, \\ N_{22}^- &= 0 \Rightarrow (1-\nu)e_{22}^- + \nu(e_{11}^- + e_{22}^-) = 0 \Rightarrow u_{1,1}^- = 0 \quad \text{i} \quad u_{2,2}^- = 0, \\ M_{22} &= 0 \Rightarrow (1-\nu)\kappa_{22} + \nu(\kappa_{11} + \kappa_{22}) = 0 \Rightarrow w_{,11} = 0 \quad \text{i} \quad w_{,22} = 0, \\ w &= 0. \end{aligned}$$

Przy badaniu stateczności sprężystej osiowo ściskanej powłoki cylindrycznej zakładamy, że siły przyłożone są tylko do brzegów powłoki, $p_\alpha = p_3 = 0$.

Pierwsze dwa równania równowagi będą spełnione tożsamościowo, jeśli siły wyrazimy przy pomocy tzw. funkcji naprężeń (funkcji Airy'ego) $F(x_1, x_2)$

$$(3.3) \quad N_{\alpha\beta}^+ = \delta_{\alpha\beta} F_{,\gamma\gamma} - F_{,\alpha\beta}.$$

Wyrażając odkształcenia $e_{\alpha\beta}^+$ przy pomocy funkcji naprężeń i wykorzystując równanie nierozdzielności przemieszczeń

$$(3.4) \quad (e_{\alpha\beta}^+ - \delta_{\alpha\beta} e_{\gamma\gamma}^+),_{\alpha\beta} = (\delta_{\alpha\beta} w_{,\gamma\gamma} - w_{,\alpha\beta}) \left[k_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (w + 2w^0)_{,\alpha\beta} \right],$$

otrzymamy równanie na funkcję naprężeń

$$(3.5) \quad F_{,\alpha\alpha\beta\beta} = -2B(1-\nu^2)(\delta_{\alpha\beta} w_{,\gamma\gamma} - w_{,\alpha\beta}) \left[k_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (w + 2w^0)_{,\alpha\beta} \right].$$

Dalej definiując funkcję przemieszczeń $\psi(x_1, x_2)$

$$(3.6) \quad \psi = u_{\alpha,\alpha}^-$$

z trzeciego i czwartego równania równowagi (2.10) otrzymamy

$$(3.7) \quad \psi_{,\alpha\alpha} - \frac{G_c}{cB} \psi + \frac{\Theta_{16} G_c}{cB} w_{,\alpha\alpha} = 0.$$

Z kolei ostatnie równanie równowagi (2.10) możemy napisać w następujący sposób

$$(3.8) \quad -2Dw_{,\alpha\alpha\beta\beta} - 2B\Theta_{16} \psi_{,\alpha\alpha} + \frac{2G_c \Theta}{c} w_{,\alpha\alpha} - \frac{E_c I_5}{c} w + (\delta_{\alpha\beta} F_{,\gamma\gamma} - F_{,\alpha\beta}) [k_{\alpha\beta} + (w + w^0)_{,\alpha\beta}] = 0.$$

W ten sposób sprowadziliśmy układ 5 równań równowagi do 3 równań w funkcji w , F i ψ (3.5), (3.7) i (3.8).

Powyższy układ trzech równań równowagi rozwiążemy przybliżoną metodą Bubnowa-Galerkina.

Przyjmujemy, że funkcja aproksymująca ugięcie „w” powłoki ma postać

$$(3.9) \quad w = W \sin \alpha x_1 \sin \beta x_2,$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{m\pi}{l_1}, \quad \beta = \frac{n\pi}{l_2},$$

podobnie przyjmujemy postać początkowych nieregularności kształtu

$$(3.10) \quad w^0 = W^0 \sin \alpha x_1 \sin \beta x_2$$

Tak dobrane funkcje spełniają warunki brzegowe swobodnego podparcia (3.1), (3.2). Wprowadzenie przyjętej funkcji ugięcia do równań (3.5) i (3.7) umożliwia niezależne od siebie rozwiązanie tych równań, tzn. określenie funkcji naprężeń i przemieszczeń

$$(3.11) \quad F = \mathbf{B}(1-\nu^2) \left[\frac{1}{16} W(W+2W^0) \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cos 2\alpha x_1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cos 2\beta x_2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{2(k_{22}\alpha^2 + k_{11}\beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} W \sin \alpha x_1 \sin \beta x_2 + \frac{4k_{12}\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} W \cos \alpha x_1 \cos \beta x_2 \right] - \\ - \frac{\bar{N}_{11}x_2^2}{2} - \frac{\bar{N}_{22}x_1^2}{2} + \bar{N}_{12}x_1x_2$$

$$(3.12) \quad \psi = - \frac{\Theta_{16} G_c (\alpha^2 + \beta^2)}{c\mathbf{B}(\alpha^2 + \beta^2) + G_c} W \sin \alpha x_1 \sin \beta x_2.$$

Trzecie równanie (3.8) rozwiązujemy metodą ortogonalizacji Bubnowa-Galerkina

$$(3.13) \quad \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} X \delta W dx_1 dx_2 = 0$$

gdzie: X jest lewą stroną równania (3.8).

Po scałkowaniu otrzymamy równanie algebraiczne na siłę ściskającą:

$$(3.14) \quad \hat{N}_{11} = \frac{a_1 \zeta + a_2 \zeta(\zeta + \zeta^0) + a_3 \zeta(\zeta + 2\zeta^0) + a_4 \zeta(\zeta + \zeta^0)(\zeta + 2\zeta^0)}{a_5 + a_6(\zeta + \zeta^0)},$$

gdzie

$$(3.15) \quad a_1 = \frac{\pi^6 \lambda^3}{24 k^3} (m^2 + n^2 \gamma^2)^2 + \frac{\pi^6 \lambda \hat{\Theta}_{16}^2 \Gamma(m^2 + \gamma^2 n^2)^2}{2k^2 [\pi^2 (m^2 + \gamma^2 n^2) + \Gamma k^2]} + \\ + \frac{\pi^4 \lambda \hat{\Theta} \Gamma(m^2 + \gamma^2 n^2)}{2k^2} + \frac{\pi^2 p^*(1-\nu^2) I_5}{4} + \\ + \frac{\pi^2 \lambda (1-\nu^2)^2}{2(m^2 + \gamma^2 n^2)^2} [(\eta_{22} m^2 + \gamma^2 \eta_{11} n^2)^2 + 4m^2 n^2 \gamma^2 \eta_{12}^2],$$

$$a_2 = - \frac{16\pi^2 \gamma^2 mn \lambda (1-\nu^2)}{3k^2 (m^2 + \gamma^2 n^2)^2} (\eta_{22} m^2 + \gamma^2 \eta_{11} n^2),$$

$$a_3 = - \frac{\pi^2 \lambda (1-\nu^2)}{3mnk^2} (\eta_{11} m^2 + \gamma^2 \eta_{22} n^2),$$

$$(3.15) \text{ [c.d.]} \quad \begin{aligned} a_4 &= \frac{\pi^6 \lambda (1 - \nu^2)}{32k^4} (m^4 + \gamma^4 n^4), \\ a_5 &= -\frac{4\lambda}{mn} (\eta_{11} + \xi_{22} \eta_{22} + 2\xi_{12} \eta_{12}), \\ a_6 &= \frac{\pi^4 \lambda}{4k^2} (m^2 + n^2 \gamma^2 \xi_{22}). \end{aligned}$$

Tabela 1. Wartości parametru I_i w przypadku uwzględnienia poprzecznej ściśliwości rdzenia i bez uwzględnienia ($f(z) = 1$)

	$f(z) = \frac{\cosh pz}{\cosh pc}$	$f(z) = 1$
$2cI_1 = \int_{-c}^c f(z) dz$	$I_1 = \frac{\operatorname{tgh} pc}{pc}$	$I_1 = 1$
$2cI_3 = \int_{-c}^c f^2(z) dz$	$I_3 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{tgh} pc}{pc} - \operatorname{tgh}^2 pc \right)$	$I_3 = 1$
$\frac{I_5}{c} = \int_{-c}^c \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz$	$I_5 = p^2 c^2 \left(\operatorname{tgh}^2 pc + \frac{\operatorname{tgh} pc}{pc} - 1 \right)$	$I_5 = 0$
$2cI_6 = \int_{-c}^c z \frac{df}{dz} dz$	$I_6 = 1 - \frac{\operatorname{tgh} pc}{pc}$	$I_6 = 0$
$2cI_7 = \int_{-c}^c z f \frac{df}{dz} dz$	$I_7 = \frac{1}{4} \left(\operatorname{tgh}^2 pc - \frac{\operatorname{tgh} pc}{pc} + 1 \right)$	$I_7 = 0$
$2cI_8 = \int_{-c}^c z^2 \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz$	$I_8 = \frac{1}{2} \left[\left(p^2 c^2 + \frac{1}{2} \right) \frac{\operatorname{tgh} pc}{pc} + \left(\frac{p^2 c^2}{3} - \frac{1}{2} \right) \operatorname{tgh}^2 pc - \frac{p^2 c^2}{3} - \frac{1}{2} \right]$	$I_8 = 0$

$$\rho^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2} \right) \psi^2; \quad \psi^2 = \frac{1 - 2\nu_c}{2(1 - \nu_c)}$$

Tutaj wprowadzono następujące bezwymiarowe parametry

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \zeta &= \frac{W}{c}, \quad \zeta^0 = \frac{W^0}{c}, \quad \lambda = \frac{t}{c}, \quad k = \frac{a}{c}, \quad \gamma = \frac{a}{b}, \\ \eta_{\alpha\beta} &= ck_{\alpha\beta}, \quad \Gamma = \frac{G_c c}{B}, \quad p^* = \frac{E_c}{E}, \quad \hat{N}_{\alpha\beta} = \frac{\bar{N}_{\alpha\beta}}{B}, \\ \xi_{22} &= \frac{N_{22}}{N_{11}}, \quad \xi_{12} = \frac{\bar{N}_{12}}{N_{11}}, \quad \hat{\Theta}_{IJ} = \frac{\Theta_{IJ}}{c}, \quad \hat{\Theta} = \frac{\Theta}{c^2}. \end{aligned}$$

Z równania (3.14) możemy uzyskać górną krytyczną¹ wartość obciążenia ściskającego wzdłuż tworzącej powłoki walcowej ($\eta_{11} = \eta_{22} = 0$), bez wstępnego ugięcia ($\zeta^0 = 0$), jeśli ugięcie ζ jest nieskończenie bliskie zeru ($\zeta \rightarrow 0$). Powłoka obciążona jest siłami rozłożonymi w sposób ciągły \bar{N}_{11} na brzegach $x_1 = 0$ i $x_1 = l_1$, wobec czego $\xi_{22} = \xi_{12} = 0$. Zgodnie z tymi założeniami górne obciążenie krytyczne możemy obliczyć w następujący sposób

$$(3.17) \quad \hat{N}^u = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \hat{N}_{11} = \frac{a_1}{a_6}.$$

Otrzymana wielkość \hat{N}^u zależy od ilości półfal m i n . Z praktycznego punktu widzenia interesuje nas wartość najmniejsza tej wielkości

$$(3.18) \quad \hat{N}_{kr}^u = \min_{m,n} \hat{N}^u = \hat{N}^u(m_k, n_k),$$

m_k i n_k — określa liczbę półfal tworzących się w chwili utraty stateczności.

W dalszym ciągu zbadamy zachowanie się powłoki walcowej po wyboczeniu. Bieżące obciążenie ściskające będziemy odnosić do obciążenia krytycznego \hat{N}_{kr}^u .

$$(3.19) \quad \hat{p} = \frac{\hat{N}_{11}}{\hat{N}_{kr}^u} = \frac{b_1 \zeta + b_2 \zeta^2 + b_3 \zeta^3}{b_4 + b_5 \zeta} \cdot \frac{a_6(m_k, n_k)}{a_1(m_k, n_k)},$$

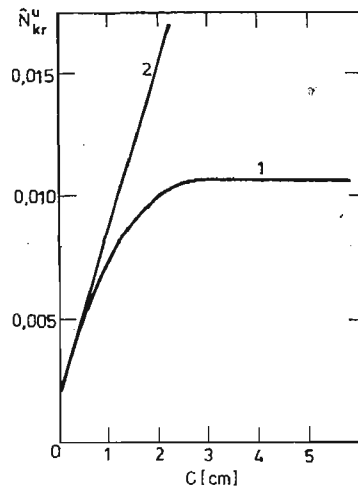
gdzie: $b_1 = a_1 + (a_2 + 2a_3 + 2a_4 \zeta^0) \zeta^0$,

$$b_2 = a_2 + a_3 + 3a_4 \zeta^0,$$

$$b_3 = a_4,$$

$$b_4 = a_6 \zeta^0,$$

$$b_5 = a_6.$$



Rys. 2. Zależność krytycznych obciążeń w funkcji grubości rdzenia. Krzywa 1 — bez uwzględnienia poprzecznej ścisłości rdzenia; krzywa 2 — z uwzględnieniem poprzecznej ścisłości.

Podobnie jak wyżej szukamy wartości minimalnej $\hat{P}(m, n)$ ze względu na ilość półfal m i n , dla każdej wartości ugięcia ζ

$$(3.20) \quad \hat{P}_m = \min_{m, n} \hat{P}(m, n) = \hat{P}(m_1, n_1),$$

m_1, n_1 — określają liczbę półfal odpowiadających najmniejszej sile ściskającej dla danej wartości ugięcia.

4. Obliczenia i wnioski

Obliczenia przeprowadzono dla powłoki trójwarstwowej o następujących parametrach geometrycznych i fizycznych:

- długości powłoki wzdłuż tworzącej $l_1 = 0,6$ m,
- szerokość powłoki po obwodzie $l_2 = 0,4$ m,
- promień zakrzywienia powierzchni podstawowej $R = 1$ m,
- grubość okładzin $t = 1$ mm,
- moduł sprężystości podłużnej materiału okładzin $E = 70\,534$ MPa,
- liczba Poissona materiału okładzin $\nu = 0,3$,
- moduł sprężystości podłużnej materiału rdzenia $E_c = 53$ MPa,
- liczba Poissona materiału rdzenia $\nu_c = 0$.

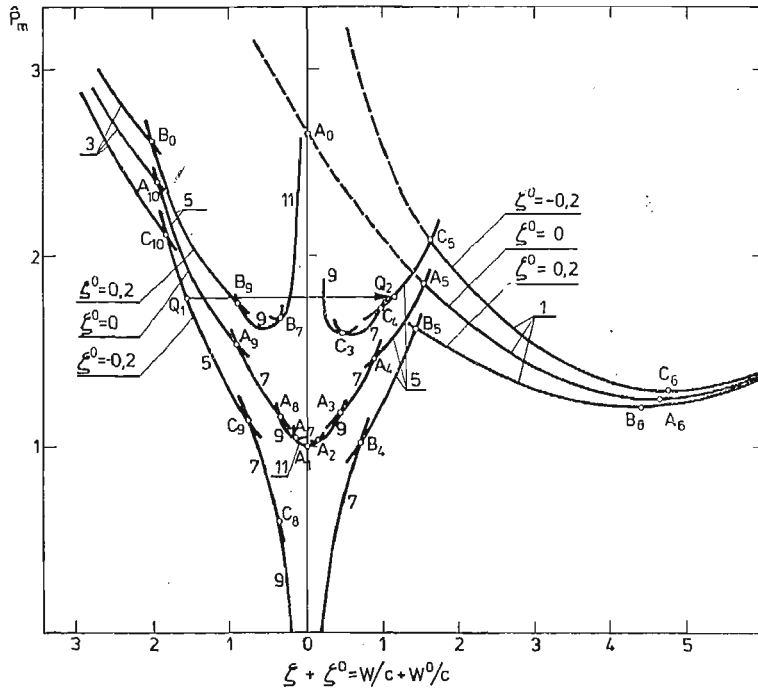
Na rys. 2 przedstawiono krzywe obrazujące utratę stateczności powłoki przy małych ugięciach w funkcji grubości rdzenia. Krzywa 1 przedstawia zależność siły krytycznej przy pominięciu ściśliwości rdzenia, $f(z) = 1$, natomiast krzywa 2 z uwzględnieniem ściśliwości rdzenia. W tabeli 2 podano wartości liczbowe naprężeń krytycznych \hat{N}_{kr}^u i odpowiadające im ilości półfal sfałdowania powłoki wzdłuż tworzącej „ m ” i po obwodzie „ n ”. Jak widać nie uwzględnianie poprzecznej ściśliwości jest dopuszczalne jedynie dla dostatecznie cienkich powłok.

Tabela 2. Obciążenia krytyczne i ilość półfal m i n w zależności od grubości rdzenia. Grupa danych Nr 1 odpowiada obliczeniom bez uwzględnienia ściśliwości rdzenia i grupy danych Nr 2 z uwzględnieniem ściśliwości rdzenia.

Lp	c cm	krzywa 1			krzywa 2		
		m	n	\hat{N}_{kr}^u	m	n	\hat{N}_{kr}^u
1	0,0	8	1	0,00221	8	1	0,00221
2	0,5	11	1	0,00517	11	1	0,00523
3	1,0	14	1	0,00821	11	1	0,00870
4	1,5	22	1	0,00996	11	1	0,01218
5	2,0	26	1	0,01048	12	1	0,01566
6	2,5	27	1	0,01063	12	1	0,01913
7	3,0	27	1	0,01067	12	1	0,02260
8	3,5	27	1	0,01068	12	1	0,02607
9	4,0	28	1	0,01068	13	1	0,02954
10	5,0	28	1	0,01068	13	1	0,03646

¹⁾ Pojęcie górnego i dolnego obciążenia krytycznego określił Vol'mir A. S. [11].

Na rys. 3 przedstawiono wykres „siła-ugięcie”, dla różnych wartości parametru początkowych imperfekcji ζ^0 . Liczba przy krzywej podaje ilość półfal sfałdowania powłoki wzdłuż tworzącej. W pracach [8], [9] przy założeniu jedynie globalnego wybożenia w postaci jednej półfali określa się tzw. górne obciążenie krytyczne odpowiadające punktowi A_0 (rys. 3) i dolne obciążenie krytyczne — punkt A_6 . Natomiast jak wynika z przeprowa-



Rys. 3. Wykres „siła — ugięcie” dla różnych wartości parametru początkowych imperfekcji ζ^0 (Liczba w kółku określa ilość półfal powstających wzdłuż tworzącej powłoki walcowej).

dzonej tutaj analizy powłoka ulega sfałdowaniu z dużą ilością półfal przy znacznie niższej sile, odpowiadającej punktowi A_1 . Wartość siły odpowiadającej temu punktowi, otrzymuje się z analizy liniowej zagadnienia stateczności powłok trójwarstwowych [12], jest to tzw. pierwszy punkt bifurkacji. Dalszy wzrost obciążenia jak widać nie powoduje utraty nośności powłoki. W punktach A_2 , A_3 , A_4 występują ponowne rozwidlenia krzywej „siła-ugięcie”, są to kolejne punkty bifurkacji, gdzie następują „przeskoki” z pierwotnej postaci do nowej odpowiadającej mniejszej liczbie półfal sfałdowania powłoki. W punkcie A_5 powłoka osiąga tzw. punkt graniczny tzn. traci stateczność przy utracie nośności, linia $A_5 - A_6$ określa stany niestateczne. Dopiero za punktem A_6 powłoka staje się ponownie stateczna. W praktyce jednak przekroczenie punktu A_5 oznacza zniszczenie powłoki. Na rys. 3 przedstawiono również zachowanie się powłoki przy ugięciu w stronę przeciwną.

Powłoka przechodzi wówczas przez punkty bifurkacji A_7, A_8, A_9, A_{10} bez utraty nośności. Jednak należy sobie zdawać sprawę, że przy obciążeniach bliskich obciążeniu odpowiadającemu punktowi A_5 może nastąpić, przy działaniu pewnego impulsu, przeskok na krzywą $A_0 - A_6$, odpowiadającym stanom niestatecznym. Tak zachowuje się podczas obciążenia powłoka o idealnym kształcie. W rzeczywistości mamy zawsze do czynienia z powłokami o nieregularnym kształcie. Nieregularności te określiliśmy przy pomocy parametru ζ^0 . Na rys. 3 pokazano również krzywe „siła-ugięcie” przy początkowej imperfekcji $\zeta_0 = 0,2$ i $\zeta_0 = -0,2$. Dla $\zeta_0 = 0,2$ powłoka ugina się od samego początku obciążenia, przechodząc przez punkt bifurkacji B_4 , do punktu B_5 odpowiadającemu obciążeniu granicznemu. Krzywa $B_5 - B_6$ określa stany niestateczne. Teoretycznie możliwe stany stateczne przy ugięciu w stronę przeciwną określa krzywa $B_8 - B_9 - B_{10}$, a stany niestateczne krzywa $B_8 - B_7 - \infty$. Dla $\zeta_0 = -0,2$ powłoka również ugina się od samego początku obciążenia, przechodząc przez kolejne punkty bifurkacji C_8, C_9, C_{10} , bez utraty nośności. Jednak przy obciążeniu wyższym od obciążenia odpowiadającemu punktowi C_3 możliwy jest przeskok, np. jak pokazano na rys. 3 z punktu Q_1 do Q_2 . Wtedy dalszy wzrost obciążenia powodują utratę nośności w punkcie C_5 . Z praktycznego punktu widzenia największe znaczenie, jak widać ma określenie obciążeń odpowiadającym kolejnym punktom bifurkacji, a szczególnie pierwszego punktu bifurkacji A_1 , punktu granicznego A_5, B_5, C_5 oraz tzw. dolne obciążenie krytyczne A_6, B_6, C_6 .

Literatura cytowana w tekście

1. FR. ROMANÓW, *Obciążenia krytyczne konstrukcji wielowarstwowych*, Prace Naukowe IKiEM, Politechniki Wrocławskiej, Seria: Monografie 36, 8, Wrocław 1979.
2. FR. ROMANÓW, J. CZMOCHOWSKI, *Energia sprężysta i stateczność ścinanych trójwarstwowych powłok o odkształcalnych rdzeniach*, III Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Referaty, Łódź 26 - 27.X.1979 r., s. 219 - 228.
3. E. REISSNER, *Finite Deflections of Sandwich Plates*, Journal of the Institute of Aeronautical Sciences, vol. 15, July 1948, pp. 435 - 440.
4. V. DUNĐROVA, V. KOVARIK, P. SLAPAK, *Nichtlineare Biegunstheorie von Sandwich-Platten*, Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 57 (1 - 2), pp. 19 - 33 (1967).
5. JU. N. NOVIČKOV, *Nelinejnaja teorija i ustojčivost' tolstych mnogoslojnych obloček*, Prikladnaja matematika i mechanika, 1973, 37, No 3, 532 - 543.
6. E. I. GRIGOLJUK, P. P. ČULKOV, *Teorija trechslajnych oboloček s žestkim zapolnitelem*, Izvestija AN SSSR, OTN, Mechnika i Maszynostroenie, No 2, 1963.
7. A. L. POTASZ, *Uravenija obščej teorii izgiba ortotropnych trechslajnych plastin konecnogo progiba s legkim zapolnitelem*, Izvestija VUZ, Stroitel'stvo i Architektura, 1979, No 1, s. 46 - 52.
8. W. SZYC, *Nieliniowe zagadnienie stateczności sprężystej trójwarstwowej otwartej powłoki walcowej*, Rozpr. Inżyn., 19, 4, 1971.
9. G. RONAN JESUS, JAO-SHIUN KAO, *Nonlinear Equations for Shallow Sandwich Shells with Orthotropic Cores*, AIAA Journal, vol. 13, No 7, pp. 961 - 963, July 1975.
10. V. F. KARAVANOV, *Uravenija pologich trechslajnych oboloček s legkim zapolnitelem pri kónečnych smeščenijach*, Izv. VUZ, Aviacionnaja technika, No 1 (1958), s. 69 - 77.
11. A. S. VOL'MIR, *Ustojčivost' deformiruemych sistem*, Izd. „Nauka”, Moskva 1967.
12. E. I. GRIGOLJUK, P. P. ČULKOV, *Ustojčivost i kolebanija trechslajnych oboloček*, M., „Maszynostroenie”, 1973.
13. E. I. GRIGOLJUK, P. P. ČULKOV, *Teorija uprugich trjochslajnych konstrukcij v nielinieinoj postanovke*, Sb. Rascety elementov aviacionnych konstrukcij, Vyp. 4. M., Maszynostroenie 1965, 99 - 133.

14. J. N. GOODIER, J. M. NEOU, *The evaluation of theoretical critical compression in sandwich plates*, J. Aeron Sci., 18, No 10 (1951).
15. L. POMAZI, *On post-buckling behaviour of regularly multilayered rectangular elastic plates.*, Acta techn. Acad. Sci. Hung., 1978 (1979), 87, No 1 - 2, 111 - 120.

Р е з ю м е

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЁХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ ЗАПОЛНИТЕЛЯ

В работе обсуждён вопрос упругой устойчивости пологих трёхслойных цилиндрических оболочек с мягким заполнителем, деформируемым в перпендикулярном направлении. Для наружных слоёв, согласно теории тонких однородных оболочек, принято гипотезу Кирхгофа-Лява (К-Л). По отношению к заполнителю применён метод, представленный в работах [1,2], учитывающий поперечную деформируемость заполнителя. Из принципа виртуальных работ выведены дифференциальные уравнения равновесия сил, которые после введения функции напряжений и функции перемещений были решены приближённым методом Бубнова-Галеркина. Приведены графики: сжимающей силы, соответствующей первой точке бифуркации, в функции толщины заполнителя, а также сжимающей силы в функции прогиба оболочки для различных начальных значений имперфекции.

S u m m a r y

NON-LINEAR THEORY OF THE STABILITY OF SANDWICH SHELLS WITH TRANSVERSE DEFORMABILITY OF THE CORE

The elastic stability of a cylindrical three layer-shell with soft core is considered. The deformation of a core occurs vertically to the shell surface.

For the external layers according to the theory of thin homogeneous shells the hypothesis of Kirchhoff-Love displacement was assumed. For the core, the methods given in papers [1, 2] taking into account the transverse deformability of the core — were considered. The differential equation of the equilibrium of the forces was established. With the introduction of the stresses and displacement functions the equation was solved by approximate Bubnov-Galerkin method. The diagrams of compressing force as a function of the core with were presented. The force is connected with the first point of bifurcation. Also the diagrams of compressive force as a function of shell deflection — for different values of initial imperfections were given.

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 lipca 1981 roku.

ANALIZA STANU ZAKRYTYCZNEGO TARCZY PROSTOKĄTNEJ PODDANEJ
DZIAŁANIU MIMOŚRODOWEGO ŚCISKANIA I JEJ ZASTOSOWANIE DO
PRZYBLIŻONEGO OBLICZANIA CIENKOŚCIENNEGO DŹWIGARA
SKRZYNKOWEGO

SEWER J A K U B O W S K I

*Institut Mechaniki Stosowanej
Politechnika Łódzka*

Spis najważniejszych oznaczeń

- a, b — wymiary tarczy
 h — grubość tarczy
 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — sztywność płytowa zginania
 E — moduł Younga
 ν — liczba Poissona
 u, v, w — przemieszczenia powierzchni środkowej tarczy
 $\lambda = a/b$ — współczynnik kształtu tarczy

1. Wstęp

Przy projektowaniu konstrukcji cienkościennych — w tym także dźwigarów o przekroju skrzynkowym — jednym z podstawowych problemów jest zagadnienie stateczności. Najczęściej problem ten jest rozwiązywany poprzez obliczenie obciążenia krytycznego dla konstrukcji idealnej (pozbawionej niedoskonałości kształtu, przypadkowych obciążeń itp.) i ustalenie wartości współczynnika bezpieczeństwa w stosunku do tegoż obciążenia [1, 7, 8].

Postępowanie takie prowadzi na ogół do niepełnego wykorzystania konstrukcji, która w większości wypadków może pracować bezpiecznie w zakresie obciążeń większych od krytycznego. Ponadto, jak wykazują liczne badania doświadczalne obciążenie krytyczne dla konstrukcji idealnej nie stanowi prawidłowej oceny wytrzymałości konstrukcji rzeczywistej, która pracuje na ogół w stanie wyobczonym już od początku obciążenia.

Z powyższych powodów prowadzone są liczne badania teoretyczne w zakresie stanów zakrytycznych dźwigarów skrzynkowych lub ich elementów [2, 3, 5, 9].

W pracy niniejszej przeprowadzono ogólną i numeryczną analizę stanu zakrytycznego swobodnie podpartej tarczy prostokątnej poddanej działaniu ściskania (bądź rozciągania) i jednoczesnego zginania w tym samym kierunku.

Analizę tę przeprowadzono pod kątem przydatności uzyskanych rezultatów do przybliżonego obliczania cienkościennego dźwigara skrzynkowego, którego środniki utraciły stateczność. Otrzymane wyniki poddano weryfikacji doświadczalnej, uzyskując na ogół dobrą zgodność z przewidywaniami teoretycznymi.

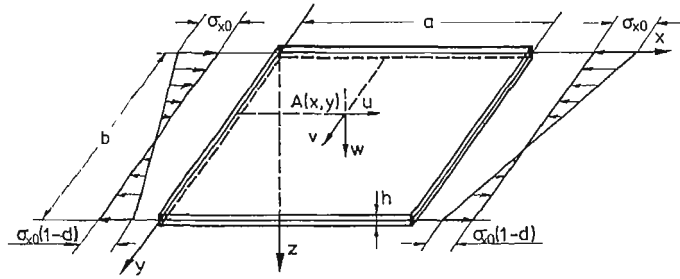
W celu zastosowania rezultatów badań teoretycznych do analizy pracy wspomnianego dźwigara skrzynkowego poddanego zginaniu i ścisnaniu zaproponowano odpowiednią przybliżoną metodę obliczeniową.

W pracy przedstawiono także wybrane wyniki badań doświadczalnych dużego dźwigara skrzynkowego, porównując je z rezultatami obliczeń opartych o wspomnianą metodę przybliżoną.

Analliza stanu zakrytycznego swobodnie podpartej tarczy prostokątnej poddanej zginaniu i ścisnaniu (bądź rozciąganiu)

Analizie poddano cienką izotropową tarczę prostokątną o stałej grubości h i długościach krawędzi $a \times b$, podpartą swobodnie wzdłuż obwodu.

Przyjęto dalej, że rozważana tarcza jest obciążona w sposób pokazany na rys. 1.



Rys. 1

Zmienność normalnych naprężeń obciążających wzdłuż odpowiednich krawędzi tarczy opisano następującą liniową funkcją współrzędnej y :

$$(1) \quad \sigma_x(y) = -\sigma_{x0} \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right).$$

Współczynnik liczbowy α charakteryzuje tu sposób obciążenia tarczy. I tak przykładowo dla $\alpha = 0$ wzór (1) opisuje czyste ścisnienie tarczy, zaś dla $\alpha = 2$ przypadek czystego zginania tarczowego. Opisanemu sposobowi obciążenia płaskiej tarczy odpowiada następująca biharmoniczna funkcja naprężeń Airy'ego

$$(2) \quad \Phi_0(x, y) = -\frac{\sigma_{x0} y^2}{2} \left(1 - \frac{\alpha y}{3b} \right).$$

Funkcję $w(x, y)$ opisującą ugięcia tarczy w stanie zakrytycznym założono w postaci następującego szeregu trygonometrycznego o nieznanach współczynnikach ξ_{mn} :

$$(3) \quad w(x, y) = h \sin \frac{m\pi x}{a} \sum_{n=1}^3 \xi_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

gdzie $m = 1$ lub 2 .

Tak przyjęta funkcja ugięcia spełnia w sposób tożsamościowy warunki swobodnego podparcia wszystkich krawędzi tarczy. Współczynnik m opisuje liczbę półfal wybożenia tarczy w kierunku zginania. O tym, czy w konkretnym przypadku nastąpi wybożenie z jedną półfalą ($m = 1$) czy też z dwiema ($m = 2$), rozstrzygnąć można na podstawie odpowiedniej analizy stanu krytycznego tarczy [1, 2, 6]. Dobór powyższej postaci funkcji $w(x, y)$ poprzedzony był analizą literatury [1, 2, 3, 4, 5] oraz analizą wpływu długości szeregu (3) na otrzymane wartości obciążenia krytycznego tarczy. Okazało się, że przy nieskrępowanym doborze wartości współczynników ξ_{mm} , trójskładnikowa postać (3) tegoż szeregu z zadawalającą dokładnością opisuje ugięcia rozważanej tarczy. Funkcję naprężeń Airy'ego $\Phi(x, y)$ dla zakrytycznego stanu tarczy wyznaczono z równania nierozdzielności odkształceń. Dla dużych ugięć tarczy równania to przyjmuje następującą postać [1, 3, 4]

$$(4) \quad \frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Po wstawieniu do równania (4) funkcji ugięcia $w(x, y)$ danej zależnością (3), równanie to rozwiązano wyznaczając jego całkę szczególną $\phi_1(x, y)$. Sumując uzyskane rozwiązanie z rozwiązaniem szczególnym (2) równania jednorodnego (biharmonicznego), uzyskano funkcję naprężeń $\phi(x, y)$ dla rozważanego przypadku obciążenia tarczy. Dana jest ona następującym wzorem:

$$(5) \quad \begin{aligned} \phi(x, y) = & \frac{Eh^2 m^2}{4} \left\{ \left[2M(4m^2, 0)(\xi_{m1}^2 + 4\xi_{m2}^2 + 9\xi_{m3}^2) + \right. \right. \\ & + M(4m^2, 1)(9\xi_{m1}\xi_{m2} + 25\xi_{m2}\xi_{m3}) \cos \frac{\pi y}{b} + 16M(4m^2, 4)\xi_{m1}\xi_{m3} \cos \frac{2\pi y}{b} + \\ & - M(4m^2, 9)\xi_{m1}\xi_{m3} \cos \frac{2\pi y}{b} - 4M(4m^2, 16)\xi_{m1}\xi_{m3} \cos \frac{4\pi y}{b} - \\ & \left. + M(4m^2, 25)\xi_{m1}\xi_{m3} \cos \frac{5\pi y}{b} \right] \cdot \cos \frac{2m\pi x}{b} + \\ & - M(0, 1)(\xi_{m1}\xi_{m2} + \xi_{m2}\xi_{m3}) \cos \frac{\pi y}{b} + 2M(0, 4)(\xi_{m1}^2 - 2\xi_{m1}\xi_{m3}) \cdot \cos \frac{2\pi y}{b} + \\ & + 9M(0, 9)\xi_{m1}\xi_{m2} \cos \frac{3\pi y}{b} + 8M(0, 16)(\xi_{m2}^2 + 2\xi_{m1}\xi_{m3}) \times \\ & \times \cos \frac{4\pi y}{b} + 25M(0, 25)\xi_{m2}\xi_{m3} \cos \frac{5\pi y}{b} + \\ & \left. + 18M(0, 36)\xi_{m3}^2 \cdot \cos \frac{6\pi y}{b} + \frac{6x_0 y^2}{2} \left(1 - \frac{y\alpha}{3b} \right) \cdot \frac{b^2 h}{\pi^2 D} \right\}, \end{aligned}$$

gdzie $m = 1, 2$

W powyższym wyrażeniu symbolem $M(p, q)$ oznaczono wartość wyrażenia

$$(6) \quad M(p, q) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\lambda} + q\lambda\right)^2},$$

zależnego od parametrów p i q oraz współczynnika kształtu tarczy $\lambda = a/b$.

Wyznaczone w ten sposób funkcje: ugięcia (3) i naprężeń (5) zawierają trzy nieznanne współczynniki bezwymiarowe ξ_{m1} , ξ_{m2} i ξ_{m3} . Jednocześnie obie te funkcje opisują w sposób ogólny stan zakrytyczny tarczy — tj. występujące w niej pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń.

Przed przystąpieniem do wyznaczania wartości współczynników ξ_{mn} przeprowadzona zostanie ogólna analiza pól przemieszczeń, naprężeń i odkształceń. Jest to możliwe na tym etapie rozważań, gdyż daje się sformułować szereg wniosków niezależnych od tego, jakie wartości przyjmą współczynniki ξ_{mn} .

Przemieszczenia punktów powierzchni środkowej tarczy oznaczono przez u , v i w . Funkcja $w(x, y)$ dana jest wzorem (3), zaś funkcje $u(x, y)$ i $v(x, y)$ wyznaczono wychodząc z zależności między przemieszczeniami i odkształceniami. Dla dużych ugięć płyt zależności te mają charakter nieliniowy i przedstawiają się następująco [1, 4]:

$$(7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{xb} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{yb} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xyb} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

Odształcenia ε_{xb} , ε_{yb} i γ_b powierzchni środkowej tarczy, dzięki prawu Hooke'a dają się wyrazić poprzez naprężenia σ_{xb} , σ_{yb} i τ_b działające w tejże powierzchni. Te ostatnie zaś, zgodnie z nieliniową teorią płyt wiotkich [1, 3, 4] wyrażają się poprzez funkcję naprężeń $\Phi(x, y)$:

$$(8) \quad \begin{aligned} \sigma_{xb} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \\ \sigma_{yb} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \\ \tau_b &= - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe w równaniach (7) otrzymuje się układ trzech równań różniczkowych względem nieznanych funkcji przemieszczeń $u(x, y)$ i $v(x, y)$. Równania te rozwiązano, wyznaczając obie szukane funkcje z dokładnością do trzech stałych całkowania, odpowiadających przemieszczeniu tarczy jako ciała sztywnego. Z kolei stałe te obliczono unieruchamiając (w sensie przesunięcia i obrotu) punkt tarczy o współrzędnych $x = a/2$, $y = 0$.

Ze względu na bardzo złożoną budowę wyrażenia opisujące wartości funkcji $u(x, y)$ i $v(x, y)$ nie zostaną tu przytoczone.

Na ich podstawie wyznaczono dalej przemieszczenia normalne wzdłuż wszystkich krawędzi tarczy. Określone są one następującymi zależnościami:

$$(9) \quad \begin{aligned} u(0, y) &= -\frac{\alpha\sigma_{x0}\lambda}{2E}y + \frac{\pi^2 m^2}{16a}h^2(\xi_{m1}^2 + \xi_{m2}^2 + \xi_{m3}^2) - \frac{\sigma_{x0}a}{2E}, \\ u(a, y) &= -u(0, y) \\ v(x, 0) &= \frac{\alpha\sigma_{x0}}{2Eb} \left(-x^2 + ax - \frac{a^2}{4} \right), \\ v(x, b) &= v(x, 0) - \frac{\pi^2 h^2}{8b} (\xi_{m1}^2 + 4\xi_{m2}^2 + 9\xi_{m3}^2) + \nu \frac{\sigma_{x0}b}{E} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Obliczone tak przemieszczenia przedstawiono na rys. 2, który w sposób poglądowy ilustruje kształt tarczy po utracie stateczności. Jak wynika z rysunku, krawędzie obciążone tarczy pozostają prostoliniowe, zaś krawędzie nieobciążone przyjmują kształt równoodległych parabol.

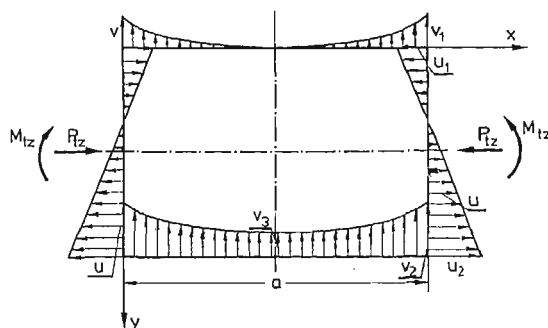
Należy zaznaczyć, że otrzymane tu warunki deformacji tarczy stają się dodatkowym założeniem leżącym u podstaw uzyskanego rozwiązania. Jednocześnie warunki te z dużym przybliżeniem są zgodne z tymi, w jakich pracują elementy tarczowe w rzeczywistych belkach cienkościennych.

Naprężenia wewnątrz tarczy podzielić można na składowe błonowe i zgięciowe. Dla uogólnienia dalszych rozważań w miejsce poszczególnych składowych stanu naprężenia wprowadzono odpowiadające im współczynniki bezwymiarowe, oznaczone gwiazdką. Zachodzi przy tym relacja:

$$(10) \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{R}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{R} \quad \text{gdzie } R = \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$$

Naprężenia stanu zgięciowego wyrażają się poprzez odpowiednie pochodne funkcji ugięcia $w(x, y)$ [4], zaś naprężenia stanu błonowego zależą od funkcji Airy'ego $\Phi(x, y)$ zgodnie ze wzorami (8).

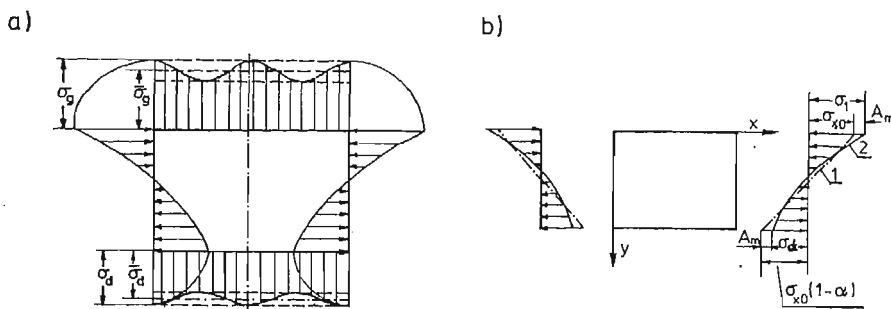
Wobec znajomości obu funkcji $w(x, y)$ i $\Phi(x, y)$ można wyprowadzić ogólne wzory opisujące wszystkie sześć składowych stanu naprężenia w tarczy [6]. Szczególnie interesująca jest zmienność naprężeń błonowych w kierunku x . Wyraża się ona następującym wzorem:



Rys. 2

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \sigma_{xb}^* = & -3m^2(1-\nu^2) \left\{ \left[M(4m^2, 1)(9\xi_{m1}\xi_{m2} + 25\xi_{m2}\xi_{m3}) \cos \frac{\pi y}{b} + \right. \right. \\
 & + 64M(4m^2, 4)\xi_{m1}\xi_{m3} \cos \frac{2\pi y}{b} - 9M(4m^2, 9)\xi_{m1}\xi_{m2} \cos \frac{3\pi y}{b} + \\
 & \left. \left. - 64M(4m^2, 16)\xi_{m1}\xi_{m3} \cos \frac{4\pi y}{b} - 25M(4m^2, 25)\xi_{m2}\xi_{m3} \cos \frac{5\pi y}{b} \right] \cos \frac{2m\pi x}{a} + \right. \\
 & - M(0, 1)(\xi_{m1}\xi_{m2} + \xi_{m2}\xi_{m3}) \cos \frac{\pi y}{b} + \\
 & + 8M(0, 4)(\xi_{m1}^2 - 2\xi_{m1}\xi_{m2}) \cos \frac{2\pi y}{b} + 81M(0, 9)\xi_{m1}\xi_{m2} \cos \frac{3\pi y}{b} + \\
 & + 128M(0, 16)(\xi_{m2}^2 + 2\xi_{m1}\xi_{m3}) \cos \frac{4\pi y}{b} + 625M(0, 25)\xi_{m2}\xi_{m3} \cos \frac{5\pi y}{b} + \\
 & \left. + 648M(0, 36)\xi_{m3}^2 \cos \frac{6\pi y}{b} \right\} - \sigma_{x0}^* \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right),
 \end{aligned}$$

Ogólny przebieg zmienności tychże naprężeń wzdłuż wszystkich krawędzi tarczy dla przypadku dwu półfal wybočenja ($m = 2$) pokazano na rys. 3a. Na rys. 3b przedstawiono szczegółowo rozkłady omawianych naprężeń σ_{xb} wzdłuż obciążonych krawędzi tarczy.



Rys. 3a, b

Jak wynika z rysunków, przy przyjętych założeniach zarówno zginanie tarczy jak i jej ściskanie w kierunku x powodują powstanie w niej nieliniowo zmiennych rozkładów naprężeń obciążających. Wnioski te pokrywają się całkowicie z rezultatami prac [2, 4, 5].

Na podstawie wzoru (11) wyznaczono wartości naprężeń σ_g^* i σ_d^* działających w narożnikach tarczy oraz naprężenia średnie $\bar{\sigma}_g^*$ i $\bar{\sigma}_d^*$ wzdłuż krawędzi nieobciążonych (rys. 3a)

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \sigma_g^* &= A_m^* + B_m^* - \sigma_{x0}^*, \\
 \sigma_d^* &= A_m^* + G_m^* - \sigma_{x0}^*(1-\alpha), \\
 \bar{\sigma}_g^* &= A_m^* - \sigma_{x0}^*, \\
 \bar{\sigma}_d^* &= A_m^* - \sigma_{x0}^*(1-\alpha).
 \end{aligned}$$

Współczynniki A_m^* , B_m^* i G_m^* zależą od kształtu tarczy λ oraz jej stanu obciążenia [6]. Współczynnik A_m^* dany jest np. wzorem:

$$(13) \quad A_m^* = -\frac{3m^2(1-\nu^2)}{2\lambda^2} (\xi_{m1}^2 + \xi_{m2}^2 + \xi_{m3}^2).$$

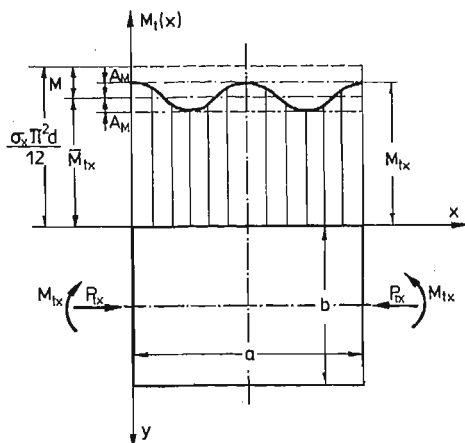
Obliczmy dalej wartości momentu zginania tarczowego $M_t(x)$ oraz siły osiowej $P_t(x)$, działających w kierunku x w kolejnych przekrojach $x = \text{const}$ przez tarczę. W tym celu należy scałkować nieliniowe rozkłady naprężeń σ_{xb} danych wzorem (11) przy zmiennej wartości współrzędnej x . Jeśli jednocześnie zamiast wymiarowych wartości momentu i siły wprowadzić odpowiadające im współczynniki bezwymiarowe $M_t^*(x)$ i $P_t^*(x)$ wg formuły

$$(14) \quad M_t^* = \frac{M_t}{D} \quad \text{i} \quad P_t^* = \frac{P_t b}{D},$$

to wynik tego obliczenia będzie następujący:

$$(15) \quad \begin{aligned} P_t^*(x) &= \frac{b}{D} \int_0^b h \sigma_{xb}^* R dy = \pi^2 \sigma_{x0}^* \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \text{const} = P_{tx}^*, \\ M_t^*(x) &= \frac{1}{D} \left[\int_0^b h R \sigma_{xb}^* y dy - P_{tx} \frac{b}{2} \right] = \\ &= \frac{\sigma_{x0}^* \pi^2 \alpha}{12} + 6(1-\nu^2)m^2 \left\{ \left[[9M(4m^2, 1) - M(4m^2, 9)] \xi_{m1} \xi_{m2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [25M(4m^2, 1) - M(4m^2, 25)] \xi_{m2} \xi_{m3} \right] \cdot \cos \frac{2m\pi x}{a} + \right. \\ &\quad \left. + [M(0,3) - M(0,1)] \xi_{m1} \xi_{m2} + [M(0,5) + M(0,1)] \xi_{m2} \xi_{m3} \right\}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że siła osiowa pozostaje we wszystkich przekrojach stała, moment $M_t^*(x)$ podlega natomiast oscylacjom. Jego zmienność wzdłuż tarczy przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4

Wartość momentu obciążającego tarczę z zewnątrz oznaczono tu przez $M_{ix}^*(M_{ix})$. Lokalne zmniejszenie wartości momentu wewnątrz tarczy wynika z przejęcia części tegoż momentu przez żebra wzmocniające krawędzie nieobciążone [6].

Zależność między momentem M_{ix}^* przenoszonym przez tarczę a współczynnikami $\sigma_{x_0}^*$ i α jest następująca:

$$(16) \quad M_{ix}^* = \frac{\sigma_{x_0}^* \pi^2 \alpha}{12} + 6(1-\nu^2)m^2 \{ [M(0,3) - M(0,1) + \\ + 9M(4m^2, 1) + M(4m^2, 9)] \xi_{m1} \xi_{m2} + [M(0,5) - M(0,1) + \\ + 25(M(4m^2, 1) + M(4m^2, 25))] \xi_{m1} \xi_{m3} \}.$$

Jak wynika z rysunku 3 oraz wzorów (12) i (13) w stanie zakrytycznym tarczy współczynniki $\sigma_{x_0}^*$ i α tracą prostą interpretację fizyczną. Współczynniki te nie definiują bowiem bezpośrednio ani wartości naprężeń w narożnikach tarczy (σ_g^* i σ_d^*) ani wartości średnich tychże naprężeń ($\bar{\sigma}_g^*$ i $\bar{\sigma}_d^*$).

Z analizy rys. 4 oraz wzoru (16) wynika, że znając wartości $\sigma_{x_0}^*$ i α nie można obliczyć bezpośrednio (nie znając współczynników ξ_{mn}) wartości momentu zginania tarczowego M_{ix}^* , jaki tarcza przenosi. W szczególności zaś obliczenie odwrotne, tj. wyznaczenie wartości $\sigma_{x_0}^*$ i α gdy dane są moment M_{ix}^* i siła P_{ix}^* , jest praktycznie niemożliwe.

Reasumując powyższe, można stwierdzić, że współczynniki $\sigma_{x_0}^*$ i α nie nadają się praktycznie do opisu stanu obciążenia tarczy po jej wyboczeniu. Z tego powodu w dalszej części rozważań stan obciążenia tarczy opisywany będzie poprzez podanie wartości momentu M_{ix}^* i siły P_{ix}^* . W funkcji tych dwu wielkości podane zostaną także wyniki obliczeń numerycznych.

Na zakończenie analizy pola naprężeń należy zauważyć pewną jego własność istotną z punktu widzenia sformułowania warunków współpracy analizowanej tarczy z innymi elementami.

Otóż jeśli obliczyć średnie całkowe odkształcenie względne $\bar{\epsilon}_g$ w kierunku x wzdłuż górnej krawędzi $y = 0$ tarczy z uwzględnieniem panującego tam dwukierunkowego stanu naprężenia, to otrzymuje się

$$(17) \quad \bar{\epsilon}_g = \frac{1}{a} \int_0^a \epsilon_{xb} \Big|_{y=0} dx = \frac{\bar{\sigma}_g}{E}.$$

Analogicznie obliczyć można średnie odkształcenie wzdłuż krawędzi dolnej

$$(18) \quad \bar{\epsilon}_d = \frac{1}{a} \int_0^a \epsilon_{xb} \Big|_{y=b} dx = \frac{\bar{\sigma}_d}{E}.$$

Wzory (17) i (18) stwierdzają, że średnie odkształcenie w kierunku osi x wzdłuż obu nieobciążonych krawędzi tarczy otrzymać można traktując te krawędzie jako obciążone jednokierunkowe naprężeniem średnim odpowiednio $\bar{\sigma}_g$ lub $\bar{\sigma}_d$. Zostanie to wykorzystane w przybliżonej metodzie obliczania dźwigara skrzynekowego.

Na podstawie przedstawionych powyżej rezultatów ogólnej analizy stanu zakrytycznego tarczy dokonano odpowiednich obliczeń szczegółowych. Kluczem do numerycznego rozwiązania problemu są wartości trzech współczynników ξ_{mn} , na podstawie których

można obliczyć wszystkie parametry stanu zakrytycznego tarczy, tj. m.in. ugięcia, naprężenia, deformacje itp.

Wartości współczynników ξ_{mn} wyznaczono metodą minimalizacji całkowej energii potencjalnej U tarczy. Energia ta jest sumą trzech składników:

$$(19) \quad U = V_a + V_b - L,$$

gdzie V_a i V_b są to energie odpowiednio stanu błonowego i zgięciowego tarczy, zaś L oznacza pracę sił zewnętrznych. Oba składniki energii sprężystej wyrażają się dla dużych ugięć tarczy następującymi wzorami [4]:

$$(20) \quad V_a = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

$$V_b = \frac{h}{2E} \int_0^a \int_0^b \left\{ (\nabla^2 \Phi)^2 - 2(1+\nu) \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy.$$

Pracę sił zewnętrznych wyznaczono metodą wariacyjną, wynosi ona

$$(21) \quad L = \frac{\pi^2 m^2 h^3 \sigma_{x0}}{8\lambda} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) (\xi_{m1}^2 + \xi_{m2}^2 + \xi_{m3}^2) + C,$$

gdzie C jest stałą dowolną.

Po zsumowaniu wszystkich składników otrzymuje się energię potencjalną U jako funkcję postaci

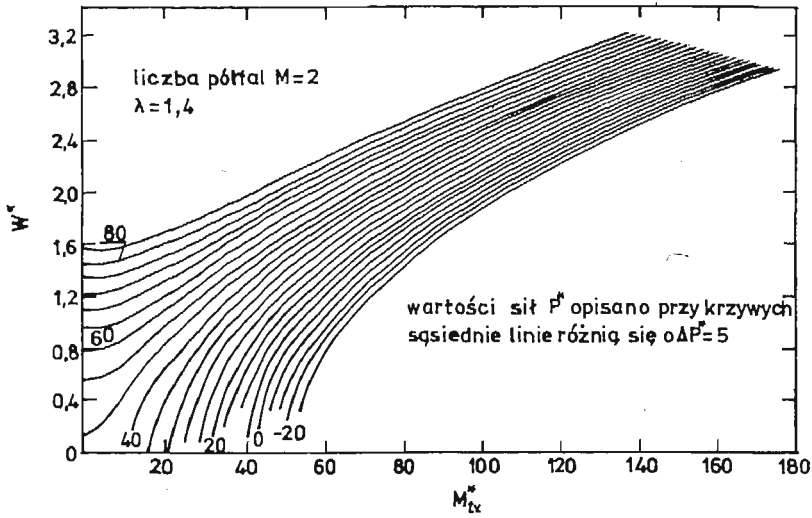
$$(22) \quad U = U(a, b, \lambda, h, E, \nu, \sigma_{x0}, \alpha, \xi_{m1}, \xi_{m2}, \xi_{m3}).$$

Względem zmiennych ξ_{mn} funkcja ta jest trzynastowyrazowym wielomianem 4-go stopnia.

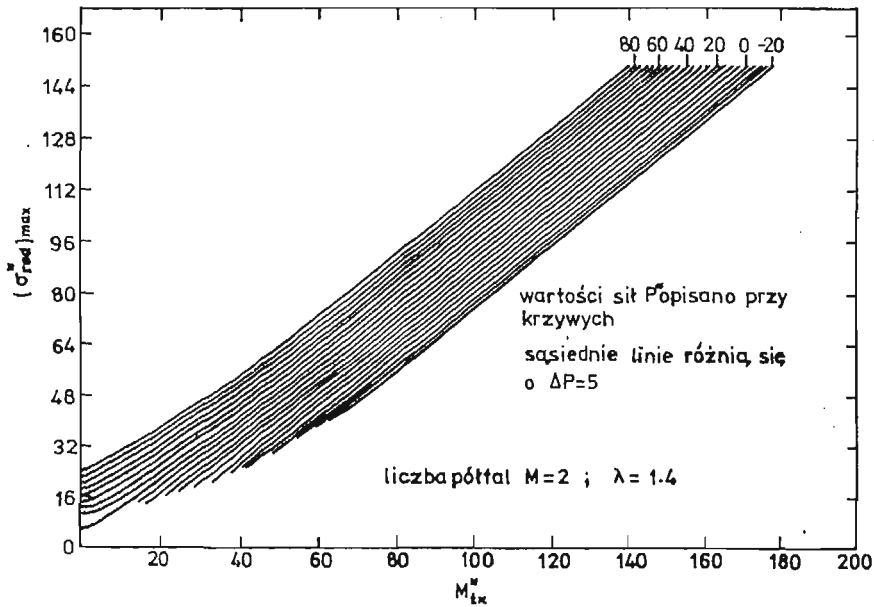
Funkcję (22) minimalizowano numerycznie względem zmiennych ξ_{mn} przy ustalonych pozostałych parametrach. Znalezione wartości współczynników ξ_{mn} pozwoliły następnie określić: obciążenie tarczy (M_{ix}^* i P_{ix}^* , wg wzorów (15) i (16)), największe bezwymiarowe ugięcie tarczy $W_{max}^* = w_{max}/h$, największe naprężenie zredukowane [5] $\sigma_{red\ max}^*$ oraz wszystkie inne interesujące wartości, w szczególności zaś σ_θ^* i σ_θ^* . Obliczeń dokonano w szerokim zakresie zmienności parametrów, zestawiając wyniki w postaci tablic i wykresów. Przykładowe wykresy przedstawiające zmienność ugięcia maksymalnego w_{max}^* , największych naprężeń zredukowanych $\sigma_{red\ max}^*$ i naprężeń σ_θ^* w funkcji momentu M_{ix}^* przy różnych wartościach siły osiowej P_{ix}^* przedstawiono na rys. 5, 6 i 7. Przedstawione na wykresach ujemne wartości siły P_{ix}^* odpowiadają rozciąganiu tarczy.

Dla oceny poprawności otrzymanych rezultatów przeprowadzono weryfikacyjne badania doświadczalne. Przebadano dwie tarcze stalowe o wymiarach 315×350 ($\lambda = 0,9$) oraz 384×350 mm ($\lambda = 1,1$) poddane czystemu zginaniu, wyznaczając ugięcia (9 czujników zegarowych) i naprężenia (202 tensometry oporowe). Tarcza pierwsza wybaczała się w kształcie jednej półfali sinusoidy ($m = 1$), zaś druga — w kształcie dwu półfal ($m = 2$). Przykładowe rezultaty badań doświadczalnych dla tarczy o współczynniku kształtu $\lambda = 1,1$ przedstawiono w formie wykresów na rys. 8 i 9.

Na rys. 8 pokazano zmienność maksymalnych ugięć zmierzonych i przewidywanych tarczy w funkcji obciążenia mierzonego siłą Q w maszynie wytrzymałościowej. Rys. 9



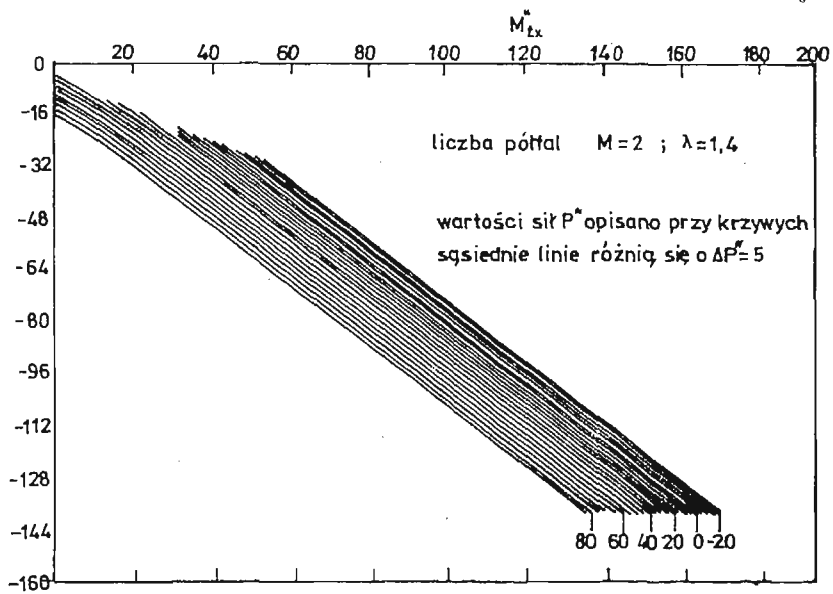
Rys. 5



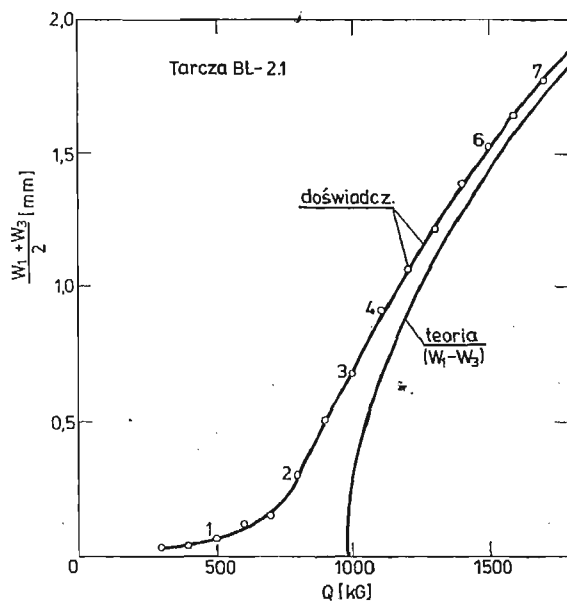
Rys. 6

pokazuje przykładowe rozkłady błonowych i zgięciowych naprężeń normalnych w przekroju pionowym $x = 0,3a$ przez tarczę, przebiegającym w pobliżu miejsca najsilniejszego jej wybruszenia. Na rys. 10 przedstawiono względne i bezwzględne różnice między ugięciami zmierzonymi i przewidywanymi teoretycznie w funkcji przecięcia tarczy ponad stan krytyczny:

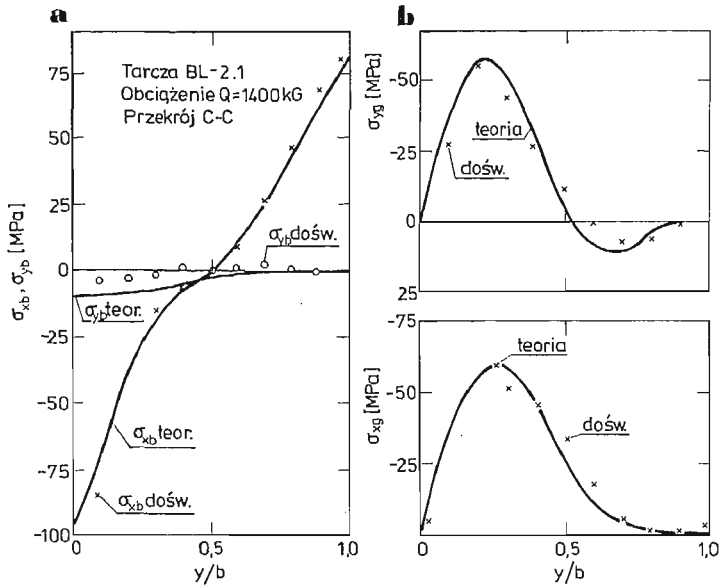
$$n = \frac{Q}{Q_{kr}}$$



Rys. 7

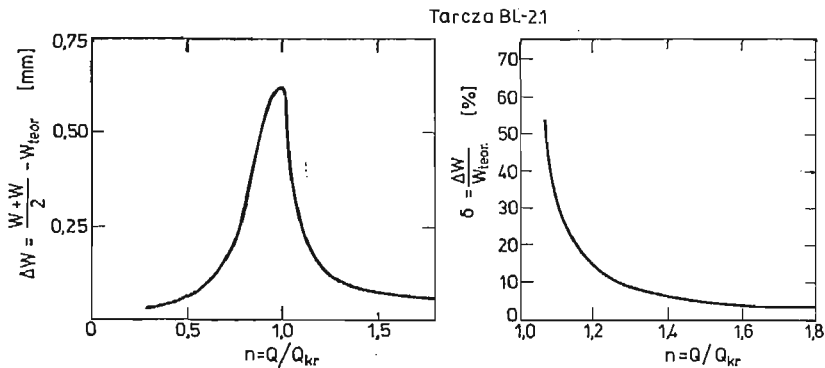


Rys. 8



Rys. 9

W podsumowaniu badań doświadczalnych można stwierdzić, że eksperyment potwierdził całkowicie przewidywania teoretyczne w sensie jakościowym. W ujęciu ilościowym zanotowano pewne rozbieżności między wynikami doświadczenia a przewidywaniami teoretycznymi dla ugięć i naprężeń zgięciowych przy małych obciążeniach. Tłumaczą się one istnieniem przypadkowych ugięć wstępnych w badanych tarczach. W miarę wzrostu przeciążenia tarczy ponad stan krytyczny wspomniane różnice maleją jednak dość szybko — czego przykładem mają być wykresy zamieszczone na rys. 10. Stwierdzenie powyższe pozwala przypuszczać, że zastosowanie przedstawionych tu rezultatów analizy teoretycznej do obliczania rzeczywistych konstrukcji cienkościennych obciążonych niewielkim ugięciem wstępnym nie prowadzi do zbyt wielkich błędów.



Rys. 10

3. Przybliżona metoda obliczania cienkościennego dźwigara skrzynkowego poddanego zginaniu i ścisaniu przy utracie stateczności środników

Fragment rozważanego dźwigara oraz jego przekrój poprzeczny przedstawiono na rys. 11.

Przedstawione parametry, charakteryzujące przekrój poprzeczny dźwigara oznaczono następującymi symbolami literowymi:

F_d — pole powierzchni przekroju poprzecznego pasa dolnego

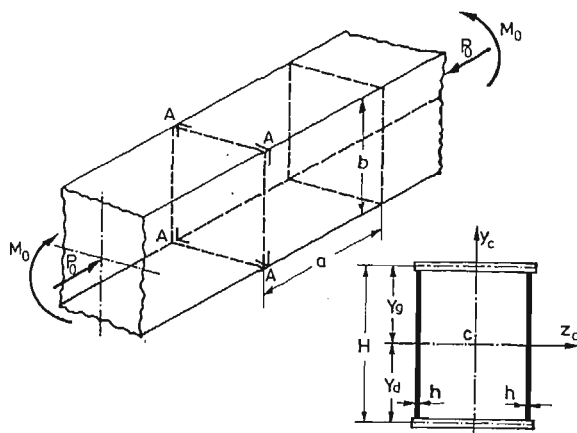
F_g — pole powierzchni przekroju poprzecznego pasa górnego

J — moment bezwładności przekroju poprzecznego dźwigara względem głównej osi centralnej z_c

F — pole powierzchni przekroju poprzecznego całego dźwigara,

M_0 — moment zginający dźwigar,

P_0 — siła osiowa, obciążająca dźwigar.



Rys. 11

Proponowana metoda obliczania dźwigara opiera się na następujących przybliżonych założeniach:

- środnik dźwigara na odcinku między przeponami pracuje jak tarcza swobodnie podparta na obwodzie,
- pasy górny i dolny pozostają płaskie i podlegają jednokierunkowemu stanowi naprężenia,
- odkształcenia względne pasów i średnie odkształcenia względne środników na wszystkich krawędziach styku — w kierunku osi dźwigara — są sobie równe.

Obliczenie dźwigara sprowadza się zatem do znalezienia takiego rozkładu naprężeń w jego przekroju poprzecznym, który spełnia przyjęte wyżej założenia. Proponowana metoda ma charakter iteracyjny. Pod rozwagę należy wziąć np. przekrój $A-A-A-A$ dźwigara (rys. 11), położony w bezpośrednim sąsiedztwie przepony. W pierwszym przybliżeniu wyznacza się rozkład naprężeń w dźwigarze na gruncie liniowej teorii zginania belek. Odpowiednie naprężenia w skrajnych górnych i dolnych włóknach środnika wynoszą:

$$(23) \quad \text{oraz} \quad \begin{aligned} \sigma'_g &= - \left(\frac{M_0}{J} Y_g + \frac{P_0}{F} \right), \\ \sigma'_d &= \left(\frac{M_0}{J} Y_d - \frac{P_0}{F} \right). \end{aligned}$$

Indeks „prim” oznacza tu pierwszą iterację.

Dla tak określonego liniowego rozkładu naprężeń w przekroju poprzecznym dźwigara wyznaczyć można wartość bezwymiarowego momentu zginania tarczowego $M_{tx}' = M_{tx}^{*}'$, przenoszonego w pierwszym i drugim przybliżeniu przez pojedynczy środnik. Wartość ta wyraża się zależnością:

$$(24) \quad M_{tx}' = M_{tx}^{*}' = \frac{M_{tx}''}{D} = - \frac{\sigma'_g}{R} \frac{\pi^2}{12} \left(1 - \frac{\sigma'_d}{\sigma'_g} \right)$$

Bezwymiarowa siła osiowa $P_{tx}' = P_{tx}^{*}'$, przenoszona przez pojedynczy środnik, w pierwszym i drugim przybliżeniu wynosi:

$$(25) \quad P_{tx}' = P_{tx}^{*}' = \frac{\pi^2 \sigma'_g}{2R} \left(1 + \frac{\sigma'_d}{\sigma'_g} \right).$$

W zależnościach (24) i (25) symbolami D i R oznaczono płytową sztywność zginania oraz współczynnik redukcji naprężeń (10) dla fragmentu środnika na odcinku między przeponami. W przypadku gdy środnik dźwigara pracuje w stanie zakrytycznym, w oparciu o obliczone wartości współczynników P_{tx}^{*}'' i M_{tx}^{*}'' wyznaczyć można kolejne przybliżenie rozkładu naprężeń w przekroju $A-A-A-A$, z uwzględnieniem teorii nieliniowej. Rozważany przekrój $A-A-A-A$ poprowadzony przez środnik (rys. 11) można utożsamiać z przekrojem kryńcowym $x = 0$ dla tarczy prostokątnej. Wówczas, na podstawie rozwiązania cyfrowego zagadnienia pracy zakrytycznej odpowiedniej tarczy (fragmentu środnika), poddanej obciążeniu M_{tx}^{*}'' i P_{tx}^{*}'' , wyznaczyć można parametry charakterystyczne nieliniowego rozkładu naprężenia w przekroju $A-A-A-A$ tegoż środnika. Parametrami tymi będą m.in. wartości naprężeń σ_g'' i σ_d'' (lub σ_g^{*}'' i σ_d^{*}'') w skrajnych włóknach środnika. Na mocy założenia o jednokierunkowym stanie naprężenia w pasach oraz w wyniku wcześniejszej analizy odkształceń ε_x na krawędziach $y = 0$ i $y = b$ tarczy wzory (17) i (18), można założyć, że naprężenia w pasach: górnym i dolnym wynosić będą odpowiednio σ_g'' i σ_d'' . Założono przy tym jednakowy moduł Younga dla pasów i środników dźwigara. W drugim przybliżeniu otrzymuje się więc nieliniowy rozkład naprężeń w przekroju $A-A-A-A$ dźwigara, przedstawiony na rys. 12. Otrzymany rozkład naprężeń zastąpić można statycznie równoważnym układem sił i momentów, przedstawionych na rys. 12. Wartości sił P_g'' i P_d'' w pasach wyrażają się przy tym wzorami:

$$(26) \quad \text{oraz} \quad \begin{aligned} P_g'' &= \sigma_g'' F_g = \sigma_g^{*}'' R F_g, \\ P_d'' &= \sigma_d'' F_d = \sigma_d^{*}'' R F_d. \end{aligned}$$

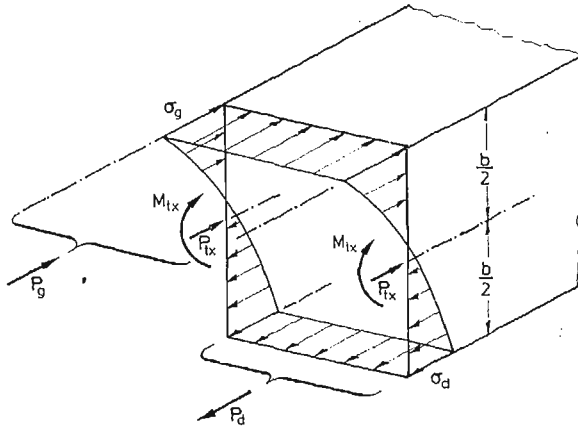
Otrzymany układ sił i momentów nie jest jednak statycznie równoważny sile P_0 i momentowi M_0 , obciążającym dźwigar. Wynika to m.in. z faktu, że odpowiednie naprężenia σ_g'' i σ_d'' nie są sobie na ogół równe. Globalna siła osiowa P_0'' dla dźwigara zredukowana do środka ciężkości przekroju poprzecznego oraz globalny moment gnący M_0'' , w drugim przybliżeniu wynoszą odpowiednio:

$$(27) \quad \text{oraz} \quad \begin{aligned} P_0'' &= 2P_{tx}^{*''} \frac{D}{b} - R(\sigma_g^{*''} F_g - \sigma_d^{*''} F_d), \\ M_0'' &= 2DM_{tx}^{*''} + R(-\sigma_g^{*''} F_g Y_g + \sigma_d^{*''} F_d Y_d) - 2 \frac{D}{b} P_{tx}^{*''} \left(\frac{H}{2} - Y_g \right) \end{aligned}$$

Po obliczeniu wartości P_0'' i M_0'' należy oszacować, jak dalece różnią się one od zadanego obciążenia P_0 i M_0 dla dźwigara. Zazwyczaj bowiem, otrzymuje się

$$(28) \quad P_0'' > P_0 \quad \text{i} \quad M_0'' \neq M_0.$$

Jeżeli różnice $M_0 - M_0''$ oraz $P_0 - P_0''$ będą zbyt duże, należy do następnej iteracji przyjąć nowe wartości $P_{tx}^{*'''}$ i $M_{tx}^{*'''}$, nie różniące się zbyt od $P_{tx}^{*''}$ i $M_{tx}^{*''}$. Proces iterowania należy kontynuować aż do osiągnięcia zadawalająco małych różnic $P_0 - P_0^{(n)}$ i $M_0 - M_0^{(n)}$, przy czym zbieżności iteracji jest zagwarantowana. Po zakończeniu iteracji otrzymuje się wyznaczony dla przekroju $A-A-A-A$ rozkład naprężeń w dźwigarze i jednocześnie wartości $P_{tx}^{(n)}$ i $M_{tx}^{(n)}$, charakteryzujące obciążenie środnika. Pozwala to na określenie — na podstawie odpowiednich tablic i wykresów — takich interesujących wielkości charakteryzujących jego pracę, jak: maksymalne ugięcie, naprężenia zredukowane itp.



Rys. 12

Należy zaznaczyć, że dla częstego przypadku czystego zginania dźwigara ($P_0 = 0$), omówiona metoda prowadzi do wniosku, że środniki podlegają zginaniu tarczowemu i jednoczesnemu rozciąganiu ($P_{tx} < 0$). Rozciąganie środników jest bowiem konieczne dla zachowania warunku znikania siły osiowej w całym dźwigarze, gdyż w rozważanym przypadku obciążenia, jak wynika z wcześniejszej analizy, zachodzi relacja

$$(29) \quad |\sigma_g''| > |\sigma_d''|,$$

a co za tym idzie, na ogół

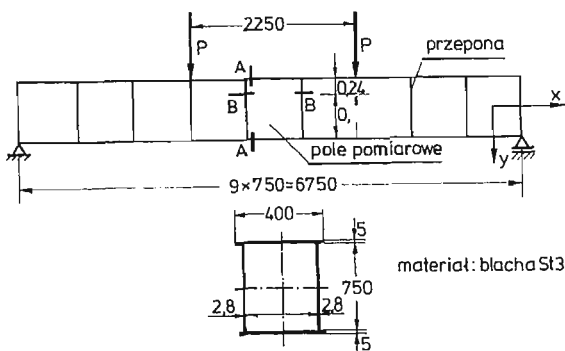
$$(30) \quad P_g'' > P_d''.$$

Omawiana metoda obliczeniowa poddana została częściowej weryfikacji doświadczalnej. Badaniom poddano dwa duże dźwigary stalowe, wykonane jako modele belek pod-

suwnicowych. Skala zmniejszenia badanych dźwigarów w stosunku do typowych konstrukcji rzeczywistych zawierała się w granicach $1,5 \div 3$.

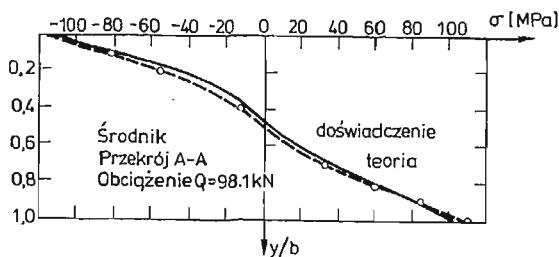
Badane dźwigary oraz schemat ich obciążenia pokazano na rys. 13.

Przy przedstawionym sposobie obciążenia trzy środkowe sektory dźwigara poddane były czystemu zginaniu. Badaniom podlegały m.in. środniki sektora centralnego. Miały one wymiary 750×750 mm, a więc ich współczynnik kształtu wynosił $\lambda = 1$. W trakcie badań dokonywano pomiarów ugięć (wybrzuszeń) środników — za pomocą czujników zegarowych oraz naprężeń w wybranych przekrojach tychże środników za pomocą tensometrów elektrooporowych. Na rys. 14 przedstawiono wyznaczone teoretycznie oraz doświadczalnie rozkłady normalnych naprężeń błonowych $\sigma_{x,b}$, równoległych do osi dźwigara, w przekroju A—A (rys. 13) — położonym w bezpośrednim sąsiedztwie przepony.



Rys. 13

Jak wynika z rysunku, w rozważanym przekroju uzyskano dobrą zgodność wyników doświadczenia z rezultatami otrzymanymi przy zastosowaniu przedstawionej wcześniej przybliżonej metody obliczeniowej. Wyniki badań wykazały także zgodny z przewidywaniami teoretycznymi udział poszczególnych elementów dźwigara (pasów i środników) w przenoszeniu momentu gnącego. Jednocześnie okazało się, że pominięcie ugięcia wstępnego oraz warunków współpracy ścianek i przepon dźwigara powoduje pewne różnice między wyznaczonymi teoretycznie i doświadczalnie wartościami ugięć oraz składowych zgięciowego stanu naprężeń w badanych środnikach. Zakres przeprowadzonych w tej dziedzinie badań jest jednak zbyt skromny dla wyciągnięcia pełnych i ostatecznych wniosków.



Rys. 14

Literatura cytowana w tekście

1. S. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej* Arkady, W-wa 1963.
2. WŁ. WALCZAK, *Analiza stanu naprężenia tarczy prostokątnej po utracie stateczności wywołanej zginaniem w płaszczyźnie tarczy*. Arch. Budowy Maszyn, 1965, Nr 1, s. 3 - 30.
3. J. DJUBEK, R. KODNAR, *Riesenie nielinearnych uloh teorie stihlych stien variacnymi metodami*, Vydavatelstvo Slovenskej Akademie Vied, Bratislava 1965.
4. A. S. WOLMIR, *Gibkije plastinki i obloczki*, Gosudartwiennoje izdatielstwo techniko-teoreticzeskoj literatury, Moskwa 1956.
5. W. WALCZAK, S. JAKUBOWSKI, *The stability and post-buckling state of a rectangular disk under unidirectional bending and simultaneous shear*, Rozprawy Inżynierskie, 1979, 27 nr 4, s. 633 - 649.
6. S. JAKUBOWSKI, *Analiza stanu zakrytycznego tarczy prostokątnej poddanej działaniu mimośrodkowego ściskania*. Praca doktorska wykonana w Instytucie Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej, 1981 r.
7. T. R. GRAVES SMITH, *The local buckling of box girdes under bending stresses*. Int. J. Mech. Sci, 1969, Vol. 11, s. 603 - 612.
8. W. PROTTE, *Zur Beulung versteifter Kastenträger mit symmetrischem Trapez-Querschnitt unter Biegemomenten —, Normalkraft — und Querkraftbeanspruchung*. Techn. Mitt. Krupp. Forsch. Ber. 1976, Band 34, Heft 2, s. 57 - 79.
9. T. R. GRAVES SMITH, *The post-buckled behaviour of a thin walled box beam in pure bending*, Int. J. Mech Sci, 1972, Vol 14, s. 711 - 722.

Резюме

АНАЛИЗ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ НАГРУЖЕННОЙ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ СЖИМАЮЩЕЙ СИЛОЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ПРИБЛИЖЕННОЙ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТОНКОСТЕННОЙ БАЛКИ

В работе представлен анализ послекритической стадии прямоугольной пластинки, свободно опертой по краям. Пластика нагружена сжимающей силой и изгибающим моментом действующими в её плоскости.

В статье приведены зависимости между прогибами, изгибающими и мембранными напряжениями и перемещениями и нагружением пластинки. Приведен также приближенный метод вычисления напряжений в тонкостенной балке прямоугольного сечения, когда её вертикальные стенки работают в послекритической стадии.

Summary

THE POST-BUCKLING STATE ANALYSIS OF A RECTANGULAR PLATE SUBJECTED TO AN ECCENTRIC COMPRESSION AND ITS APPLICATION IN AN APPROXIMATE CALCULATIONS OF THIN WALLED BOX GIRDER

The post-buckling state analysis is considered of a rectangular plate, simply supported along their edges, subjected to the bending and compression. The deflection has been determined as well as bending and membrane stresses and in-plane displacements of a plate by means of compressive force and in-plane bending moment values. The approximate method which allows to determine the stresses distribution in thin walled girders is described. The method is based upon the fact, that the webs work as simply supported rectangular plates subjected to the bending and compression.

O JEDNOWYMIAROWYM ZAGADNIENIU IDENTYFIKACJI STRUMIENIA CIEPŁA NA BRZEGU WARSTWY PŁASKIEJ

KRZYSZTOF GRYSA,

ZBIGNIEW KOZŁOWSKI

Politechnika Poznańska

Wstęp

Identyfikacja obciążeń termicznych na powierzchniach warstwy płaskiej na podstawie pewnych danych termicznych lub mechanicznych pochodzących z punktów wewnętrznych warstwy, przy — jednocześnie — znanych warunkach mechanicznych na obu powierzchniach warstwy i warunkach początkowych jest problemem, zaliczanym do tzw. zagadnień odwrotnych pól temperatur, [1]. Podobne problemy były rozważane na gruncie teorii wymiany ciepła, [2, 3, 4 i in.], a także na gruncie teorii naprężeń cieplnych, [5, 6]. W niniejszej pracy problem identyfikacji strumienia ciepła i temperatury otoczenia rozważany jest na gruncie termosprężystości, przy założeniu, iż w równaniach ruchu pomijalnie mały jest człon inercyjny.

Poszczególne prace, traktujące o zagadnieniach odwrotnych pól temperatur różnią się, często dość znacznie, tak w podejściach do problemu, jak i w rozumieniu samego pojęcia „zagadnienie odwrotne”. Szersze uwagi dotyczące tego tematu można znaleźć w pracy [1].

Metoda badawcza, oparta na zagadnieniach odwrotnych, która łączy ze sobą pomiary, aparat matematyczny oraz inżynierskie wyczucie, jest często jedyną, umożliwiającą określenie obciążeń termicznych brzegu ciała, na którym to brzegu umieszczenie czujników jest niemożliwe bądź niewskazane (np. ściana komory spalania silnika spalinowego, wewnętrzne ściany silnika odrzutowego, powierzchnie łopatek turbin, wewnętrzna ściana lufy itp.).

Identyfikacja strumienia ciepła na powierzchni odgrywa istotną rolę tam, gdzie należy określić ilość ciepła pochłanianego czy odprowadzanego z ośrodka, a więc np. w procesach stygnięcia odlewu, czy też równomiernego nagrzewania lub chłodzenia. Tam, gdzie mogą występować duże gradienty temperatury, oprócz efektów czysto termicznych pojawiają się także efekty termomechaniczne, których wielkość może być nie do pominięcia podczas rozważań dotyczących takiego właśnie procesu termosprężystego. Ponieważ określone obciążenia termiczne brzegów wywołują w ciele termosprężystym określone reakcje typu termicznego i mechanicznego, więc można pokusić się o rozważenie zagadnienia, w którym dane są przebiegi pewnych wielkości termicznych lub mechanicznych w punktach wewnętrznych ciała (tzw. wewnętrzne odpowiedzi, w skrócie WO), a wielkościami identyfikowanymi są przyczyny np. typu termicznego, które je wywołały, czyli termiczne warunki brzegowe. Przy tak postawionym zagadnieniu trzeba wszakże wiedzieć, jakiego typu warunki termiczne należy przyjąć na brzegach, na których się je identyfikuje. W niniejszej

pracy przyjmuje się, że na jednym brzegu panują warunki termiczne II rodzaju, zaś na brzegu przeciwnym rozważanej warstwy — warunki III rodzaju.

1. Postawienie zagadnienia

Wiele elementów konstrukcyjnych można w pierwszym przybliżeniu uważać za ciała o nieskomplikowanej geometrii. Rozważana warstwa płaska może być takim właśnie pierwszym przybliżeniem wielu konstrukcji bądź części konstrukcji.

Rozważamy warstwę płaską o grubości h . Niech dolna powierzchnia tej warstwy będzie płaszczyzną Oyz prostokątnego układu współrzędnych o osi Ox skierowanej do góry. W rozważanej warstwie ma miejsce quasi-statyczny proces termosprężysty. W procesie tym wielkościami nieznanymi, podlegającymi wyznaczeniu, będą niektóre warunki brzegowe.

Aby móc w sposób pełny określić problem postawiony w tytule pracy trzeba najpierw wypisać układ równań i warunków, opisujących tzw. zagadnienie proste (brzegowo-początkowe). Na równania te, w przypadku zagadnienia jednowymiarowego i ciała izotropowego, przy pominięciu źródeł ciepła i sił masowych, składają się [7]:

— równanie przewodnictwa cieplnego

$$(1.1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) T(x, t) - \eta \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} U(x, t) = 0,$$

— przemieszczeniowe równanie ruchu z pominiętym członem inercyjnym

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) - k \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) = 0,$$

— warunki początkowe

$$(1.3) \quad T(x, 0) = 0, \quad U(x, 0) = 0,$$

— warunki brzegowe

$$(1.4) \quad \lambda \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) \Big|_{x=h} = Q(t), \quad U(h, t) = U_g(t),$$

$$(1.5) \quad \lambda \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) \Big|_{x=0} = -\alpha [T_d(t) - T(0, t)], \quad \sigma_{xx}(0, t) = N_d(t)$$

gdzie $T(x, t)$ — temperatura względna, mierzona względem temperatury odniesienia T_0 , $U(x, t)$ — przemieszczenie w kierunku osi Ox , t — czas, κ — dyfuzyjność temperaturowa, $\eta = \alpha_t T_0 E / [\lambda(1 - 2\nu)]$ — współczynnik sprzężenia termomechanicznego, E — moduł Younga, α_t — współczynnik rozszerzalności cieplnej, ν — liczba Poissona, λ — współczynnik przewodnictwa cieplnego, $k = \alpha_t(1 + \nu)/(1 - \nu)$, $Q(t)$ — strumień ciepła, $U_g(t)$ — przemieszczenie punktów górnego brzegu warstwy, α — współczynnik wnikania, $T_d(t)$ — temperatura otoczenia dolnego brzegu warstwy, $\sigma_{xx}(x, t)$ — współrzędna tensora naprężenia, $N_d(t)$ — obciążenie dolnego brzegu warstwy.

W pracy rozpatruje się jednowymiarowy jednoosiowy stan odkształcenia, w którym naprężenie σ_{xx} jest powiązane z przemieszczeniem U związkiem konstytutywnym

$$(1.6) \quad \sigma_{xx} = \frac{2G(1 - \nu)}{1 - 2\nu} \left[\frac{\partial U}{\partial x} - kT \right].$$

Rozwiązanie zagadnienia prostego polega — jak wiadomo — na wyznaczeniu funkcji $T(x, t)$ i $U(x, t)$ dla $x \in (0, h)$ oraz $t > 0$. Natomiast rozważając zagadnienie identyfikacji warunków brzegowych zakłada się, że znane są WO w pewnych punktach wewnętrznych warstwy, zaś wielkościami poszukiwanymi są prawe strony związków (1.4) i (1.5). Z formalnego punktu widzenia możliwe jest odtworzenie wszystkich czterech funkcji, charakteryzujących obciążenie brzegu, tzn. $Q(t)$, $U_g(t)$, $T_d(t)$ oraz $N_d(t)$. Wówczas jednakże potrzebne są cztery WO ; przypadek taki prowadzi do skomplikowanych, a jednocześnie pozabawionych większego znaczenia technicznego, obliczeń. Dlatego też w pracy ograniczymy się do wyznaczenia dwóch spośród tych funkcji, przyjmując, że dwie pozostałe są dane. Takie postawienie sprawy prowadzi do wielu możliwych do rozwiązania zadań. Niektóre spośród nich przedstawiono w tabeli 1, gdzie ε_{xx} oznacza współrzędną tensora odkształcenia.

Tabela 1

Warianty warunków brzegowych				Możliwe pary WO	
Nr	Dane	Szukane	Nr	Para WO	
I	N_d, U_g	Q, T_d	1°	$T(x_1, t) = T_1(t), T(x_2, t) = T_2(t)$	
II	N_d, T_d	Q, U_g	2°	$\varepsilon_{xx}(x_1, t) = E_1(t), \varepsilon_{xx}(x_2, t) = E_2(t)$	
III	N_d, Q	T_d, U_g	3°	$T(x_1, t) = T_1(t), \varepsilon_{xx}(x_2, t) = E_2(t)$	
IV	U_g, Q	T_d, N_d	4°	$U(x_1, t) = U_1(t), T(x_2, t) = T_2(t)$	
V	U_g, T_d	Q, N_d	5°	$U(x_1, t) = U_1(t), \varepsilon_{xx}(x_2, t) = E_2(t)$	
VI	T_d, Q	N_d, U_g	6°	$U(x_1, t) = U_1(t), U(x_2, t) = U_2(t)$	

Funkcje, opisujące WO , nie mogą być funkcjami dowolnymi. Muszą one spełniać pewne ograniczenia, wynikające tak z kształtu równań opisujących proces, jak i z fizyki zagadnienia, [5]. Problem ten omówimy w trzeciej części pracy.

Wszystkie możliwe warianty zagadnień odwrotnych, wynikające z tabeli 1, rozwiązuje się w zasadzie jednakowo. Z tego też powodu w pracy zostanie przedstawione szczegółowo rozwiązanie tylko jednego zagadnienia, a mianowicie wariantu I-3°. Dla uproszczenia obliczeń przyjmuje się, że $N_d = 0$.

Wprowadźmy współrzędne i wielkości bezwymiarowe, opisane następująco:

$$(1.7) \quad \xi = x/h, \quad \tau = \kappa t/h^2, \quad \Theta = T/T_0, \quad u = U/h, \quad q = Qh/\lambda T_0,$$

$$Bi = \alpha h/\lambda, \quad \Theta_d = T_d/T_0, \quad a = \eta\kappa/T_0, \quad b = kT_0, \quad u_g = U_g/h.$$

Wykorzystując (1.7) i (1.6) otrzymujemy następujący zespół równań i warunków opisujących zagadnienie identyfikacji strumienia ciepła na obu brzegach warstwy:

$$(1.8) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \Theta(\xi, \tau) - a \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} u(\xi, \tau) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\xi, \tau) - b \frac{\partial}{\partial \xi} \Theta(\xi, \tau) = 0,$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \quad u(\xi, 0) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \Theta(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = q(\tau), \quad u(1, \tau) = u_g(\tau),$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Theta(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} &= -\text{Bi}[\Theta_d(\tau) - \Theta(0, \tau)], \\ \left. \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} &= b\Theta(0, \tau) \end{aligned}$$

$$(1.9) \quad \Theta(\xi_1, \tau) = \Theta_1(\tau), \quad \varepsilon_{xx}(\xi_2, \tau) = E_2(\tau)$$

Funkcjami danymi są $\Theta_1(\tau)$, $E_2(\tau)$ oraz $u_q(\tau)$. Funkcjami poszukiwanymi są $q(\tau)$ oraz $\Theta_d(\tau)$; przy znanej funkcji Θ_d wyznaczenie strumienia ciepła na powierzchni $\xi = 0$ nie przedstawia już żadnej trudności. Zauważmy, że po wyznaczeniu q i Θ_d staje się możliwe uzyskanie pełnego opisu procesu termosprężystego w warstwie.

Rozwiązywanie problemu będzie przebiegać na następującej, opisanej w pracy [5], drodze:

- w pierwszym etapie zostanie rozwiązany w transformatach Laplace'a problem brzegowo-początkowy (1.8) przy założeniu, że funkcje q i Θ_d są znane,
- w sposób formalny zostaną określone transformaty funkcji q i Θ_d ,
- ustalone zostaną warunki, decydujące o tym, jakie funkcje mogą opisywać W_0 , Θ_1 i E_2 ,
- odwrócone zostaną transformaty Laplace'a i wyznaczone zostanie przybliżone i ściśle rozwiązanie zagadnienia identyfikacji
- otrzymane wyniki zostaną zweryfikowane numerycznie.

2. Formalna konstrukcja transformat Laplace'a rozwiązań zagadnienia identyfikacji

Stosując przekształcenie Laplace'a do równań (1.8) przy założeniu, że funkcje $q(\tau)$ i $\Theta(\tau)$ są transformowalne, łatwo otrzymuje się związki określające transformaty bezwymiarowych przemieszczeń i temperatury:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \bar{\Theta}(\xi, s) &= \frac{\bar{q}(s)}{\beta \sqrt{s} M(s)} [\beta \sqrt{s} \cosh(\beta \xi \sqrt{s}) + \text{Bi} \sinh(\beta \xi \sqrt{s})] + \\ &+ \frac{\bar{\Theta}_d(s)}{M(s)} \text{Bi} \cosh[\beta(1-\xi)\sqrt{s}], \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \bar{u}(\xi, s) &= \bar{u}_q(s) - \frac{\bar{\Theta}_d(s) b \text{Bi}}{\beta \sqrt{s} M(s)} \sinh[\beta(1-\xi)\sqrt{s}] + \\ &+ \frac{\bar{q}(s) b}{\beta^2 s M(s)} [\beta \sqrt{s} \sinh(\beta \xi \sqrt{s}) + \text{Bi} \cosh(\beta \xi \sqrt{s}) - M(s)], \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.3) \quad M(s) = \beta \sqrt{s} \sinh(\beta \sqrt{s}) + \text{Bi} \cosh(\beta \sqrt{s}),$$

$\beta^2 = 1 + ab = 1 + \kappa \eta k$; nadkreśleniami oznaczono transformaty Laplace'a poszczególnych funkcji, zaś s jest parametrem transformacji.

Do wykorzystania związków (1.9) i wyznaczenia na ich podstawie transformat q i $\bar{\Theta}_d$ brakuje jeszcze wyrażenia na transformatę odkształcenia, $\bar{\varepsilon}_{xx}$. Korzystając ze znanego wzoru, definiującego ε_{xx} w teorii małych odkształceń, oraz ze wzoru (2.2), znajdujemy

$$(2.4) \quad \bar{\varepsilon}_{xx}(\xi, s) = \frac{\bar{q}(s)b}{\beta\sqrt{s}M(s)} [\beta\sqrt{s} \cosh(\beta\xi\sqrt{s}) + \text{Bisinh}(\beta\xi\sqrt{s})] + \\ + \frac{\bar{\Theta}_d(s)b}{M(s)} \text{Bicosh}[\beta(1-\xi)\sqrt{s}].$$

Transformując następnie związki (1.9) oraz wykorzystując (2.1) i (2.4) można w sposób zupełnie formalny wyznaczyć transformaty $\bar{q}(s)$ i $\bar{\Theta}_d(s)$:

$$(2.5) \quad \bar{q}(s) = \frac{\beta\sqrt{s}}{\sinh[\beta(\xi_1 - \xi_2)\sqrt{s}]} \left\{ \bar{\Theta}_1(s) \cosh[\beta(1-\xi_2)\sqrt{s}] - \right. \\ \left. - \frac{\bar{E}_2(s)}{b} \cosh[\beta(1-\xi_1)\sqrt{s}] \right\},$$

$$(2.6) \quad \bar{\Theta}_d(s) = \bar{E}_2(s) \frac{\beta\sqrt{s} \cosh(\beta\xi_1\sqrt{s}) + \text{Bisinh}(\beta\xi_1\sqrt{s})}{b \text{Bisinh}[\beta(\xi_2 - \xi_1)\sqrt{s}]} - \\ - \bar{\Theta}_1(s) \frac{\beta\sqrt{s} \cosh(\beta\xi_2\sqrt{s}) + \text{Bisinh}(\beta\xi_2\sqrt{s})}{\sinh[\beta(\xi_2 - \xi_1)\sqrt{s}]}.$$

Warunek brzegowy na przemieszczenia nie wchodzi do tych równań, więc $u_q(\tau)$ może być dowolną funkcją dopuszczalną przez fizykę zagadnienia (niekoniecznie równą zero).

Zauważmy, że wobec warunku, narzuconego na naprężenia σ_{xx} , z którego — po przyjęciu $N_d = 0$ — wynika ostatni związek spośród równań (1.8), punkty ξ_1 i ξ_2 nie mogą się pokrywać. Stąd ograniczenie na dobór tych punktów:

$$(2.7) \quad \xi_1 \neq \xi_2, \quad \xi_1, \xi_2 \in (0, 1).$$

3. Warunki ograniczające dla wewnętrznych odpowiedzi

Jak już wspomniano w pierwszej części pracy, nie każda funkcja może opisywać *WO*. Funkcje te muszą spełniać następujące warunki, [5]:

- 1° Muszą mieć skończone wartości dla $\tau \rightarrow 0_+$ oraz dla $\tau \rightarrow \infty$
- 2° Muszą być ograniczone dla $\tau \in (0, \infty)$
- 3° Transformaty $\bar{q}(s)$ i $\bar{\Theta}_d(s)$ muszą być odwracalne.

Przyjmując dodatkowo, iż transformaty będą odwracane metodą residuów otrzymuje się następujące ograniczenia na transformaty \bar{q} i $\bar{\Theta}_d$, [5]:

$$(3.1) \quad \left| \begin{matrix} \bar{q}(s) \\ \bar{\Theta}_d(s) \end{matrix} \right|_{|s|=R_n} \leq \begin{Bmatrix} k_n^q \\ k_n^\theta \end{Bmatrix}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{Bmatrix} k_n^q \\ k_n^\theta \end{Bmatrix} = 0,$$

gdzie $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$. Ponadto od obu transformat wymagana jest ciągłość dla $|s| = R_n$.

Warunek 2^o prowadzi do wniosku, że wykładnik wzrastania (odcięta zbieżności) funkcji $q(\tau)$ i $\Theta_d(\tau)$ jest równy zero, [8, s. 78]. Konsekwencją tego faktu jest analityczność transformat Laplace'a tych funkcji dla $\text{Re } s > 0$.

W celu wyznaczenia warunków ograniczających dla WO wykorzystamy w pierwszym rzędzie nierówność (3.1). Dla transformat $\bar{\Theta}_1(s)$ i $\bar{E}_2(s)$ wynikają stąd, dla dużych $|s|$, następujące nierówności:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} |\bar{\Theta}_1(s)| &\leq K_\Theta |s^{-\gamma-\frac{1}{2}}| |\exp(-\beta D_\Theta \sqrt{s})|, \\ |\bar{E}_2(s)| &\leq K_E |s^{-\gamma-\frac{1}{2}}| |\exp(-\beta D_E \sqrt{s})|, \end{aligned}$$

gdzie $D_\Theta = \max(2\xi_2 - \xi_1, 1 - \xi_1)$, $D_E = \max(1 + \xi_2 - 2\xi_1, \xi_2)$, zaś K_Θ , K_E i γ — stałe dodatnie.

Podobnie jak w pracy [5], można łatwo wykazać, że nierówności (3.2) są wystarczające także dla spełniania warunku 1^o.

4. Wyznaczenie funkcji $q(\tau)$ i $\Theta_d(\tau)$

Samo określenie nierówności (3.2) jeszcze nie wystarczy dla odwrócenia transformat (2.5) i (2.6). Wynika to stąd, że transformaty WO , $\bar{\Theta}_1$ i \bar{E}_2 , są przemnożone przez funkcje, których nie da się odwrócić bezpośrednio metodą residuów z uwagi na to, iż na ogół nie są to transformaty dystrybucji wykładniczych. Funkcje te dają się bez trudności odwrócić tylko wtedy, gdy $\xi_2 - \xi_1 > 1 - \xi_2$ lub gdy $\xi_2 - \xi_1 > \xi_1$ — tym niemniej nawet w tym przypadku tylko niektóre spośród składników definiujących prawe strony związków (2.5) i (2.6) dają się odwrócić. W związku z tym zastosujemy tu procedurę przybliżonego odwracania transformat, dzięki której „kłopotliwe” funkcje zostaną przemnożone przez czynniki, dające w wyniku tego przemnożenia funkcje odwracalne metodą residuów.

Jak wykazano w pracy [5], przybliżenie WO przez funkcje schodkowe jest dopuszczalne w sensie warunków (3.2). Jest to procedura uzasadniona także wówczas, jeśli wziąć pod uwagę ewentualne zastosowanie otrzymanych w pracy wyników. Zwykle bowiem WO dane są w postaci zbiorów danych dyskretnych, z pomiarów — a na podstawie takiego zbioru danych najłatwiej buduje się właśnie funkcje schodkowe.

Przyjmijmy zatem, że WO , $\Theta_1(\tau)$ i $E_2(\tau)$, dane są w postaci zbiorów danych dyskretnych, $\{\Theta_k\}_{k=1, \dots, n}$ i $\{E_l\}_{l=1, 2, \dots, m}$, gdzie $\Theta_k = \Theta_1(k\Delta_1)$, $E_l = E_1(l\Delta_2)$, Δ_1 , Δ_2 — kroki czasowe przy próbkowaniu funkcji Θ_1 i E_2 ; zakładamy, że $n\Delta_1 = m\Delta_2$. Oznaczając funkcje schodkowe, zbudowane na podstawie tych zbiorów danych, jako $S\Theta_1(\tau)$ i $SE_2(\tau)$, mamy

$$(4.1) \quad \begin{aligned} S\Theta_1(s) &= \sum_{k=0}^n \Theta_k [\eta(\tau - k\Delta_1) - \eta(\tau - (k+1)\Delta_1)], \\ SE_2(\tau) &= \sum_{k=0}^m E_k [\eta(\tau - k\Delta_2) - \eta(\tau - (k+1)\Delta_2)], \end{aligned}$$

gdzie $\eta(x)$ — funkcja Heaviside'a. Funkcje te są dopuszczalne w sensie warunków (3.2). Transformaty Laplace'a tych funkcji mają postać

$$(4.2) \quad \overline{S\Theta}_1(s) = \frac{\Theta_0}{s} + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{n+1} (\Theta_k - \Theta_{k-1}) e^{-sk\Delta_1}, \quad \text{gdzie } \Theta_{n+1} = \Theta_n,$$

$$\overline{SE}_2(s) = \frac{E_0}{s} + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{m+1} (E_k - E_{k-1}) e^{-sk\Delta_2}, \quad \text{gdzie } E_{m+1} = E_n.$$

Wobec warunków początkowych znajdujemy, iż $\Theta_0 = 0$; również o odkształceniu zakładamy, że w chwili początkowej było równe zero, skąd mamy $E_0 = 0$. Warunki na E_{n+1} i Θ_{n+1} związane są z brakiem informacji o funkcjach Θ_1 i E_2 dla $\tau > n\Delta_1$ — tak więc $S\Theta_1(\tau)$ i $SE_2(\tau)$ są określone tylko dla $\tau \in (0, n\Delta_1)$, a poza tym przedziałem równe swoim wartościom w chwili $n\Delta_1$.

Wstawiając transformaty $\overline{S\Theta}_1$ i \overline{SE}_2 do wzorów (2.5) i (2.6) w miejsce $\overline{\Theta}_1$ i \overline{E}_2 otrzymujemy transformaty, określające w przybliżeniu \bar{q} i $\bar{\Theta}_d$. Oznaczmy te transformaty $\overline{Aq}(s)$ i $\overline{A\Theta}_d(s)$. Tak więc mamy

$$(4.3) \quad \overline{Aq}(s) = -\frac{\beta}{\sqrt{s}} \sum_{l=1}^{n+1} (\Theta_l - \Theta_{l-1}) \frac{\cosh[\beta(1-\xi_2)\sqrt{s}]}{\sinh[\beta(\xi_2-\xi_1)\sqrt{s}]} e^{-sl\Delta_1} +$$

$$+ \frac{\beta}{b\sqrt{s}} \sum_{l=1}^{m+1} (E_l - E_{l-1}) \frac{\cosh[\beta(1-\xi_1)\sqrt{s}]}{\sinh[\beta(\xi_2-\xi_1)\sqrt{s}]} e^{-sl\Delta_2},$$

$$(4.4) \quad \overline{A\Theta}_d(s) = \sum_{l=1}^{n+1} (\Theta_l - \Theta_{l-1}) \frac{\beta\sqrt{s} \cosh(\beta\xi_2\sqrt{s}) + \text{Bisinh}(\beta\xi_2\sqrt{s})}{s \sinh[\beta(\xi_2-\xi_1)\sqrt{s}]} e^{-sl\Delta_1} -$$

$$- \sum_{l=1}^{m+1} (E_l - E_{l-1}) \frac{\beta\sqrt{s} \cosh(\beta\xi_1\sqrt{s}) + \text{Bisinh}(\beta\xi_1\sqrt{s})}{sb \text{Bisinh}[\beta(\xi_2-\xi_1)\sqrt{s}]} e^{-sl\Delta_2}.$$

Odwracając transformaty (4.3) i (4.4) metodą residuów otrzymujemy

$$(4.5) \quad A\Theta_d(\tau) = \sum_{l=1}^{n+1} \left\{ (\Theta_l - \Theta_{l-1}) \left[\frac{1 + \text{Bi}\xi_2}{\text{Bi}(\xi_2 - \xi_1)} + \right. \right.$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\cos \frac{\pi k \xi_2}{\xi_2 - \xi_1}}{\text{Bi}(\xi_2 - \xi_1)} + \frac{\sin \frac{\pi k \xi_2}{\xi_2 - \xi_1}}{\pi k} \right) e^{-s_k(\tau - l\Delta_1)} \left. \right\} \eta(\tau - l\Delta_1) -$$

$$- \frac{1}{b} \sum_{l=1}^{m+1} \left\{ (E_l - E_{l-1}) \left[\frac{1 + \text{Bi}\xi_1}{\text{Bi}(\xi_2 - \xi_1)} + \right. \right.$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\cos \frac{\pi k \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}}{\text{Bi}(\xi_2 - \xi_1)} + \frac{\sin \frac{\pi k \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}}{\pi k} \right) e^{-s_k(\tau - l\Delta_2)} \left. \right\} \eta(\tau - l\Delta_2),$$

$$(4.6) \quad \begin{aligned} [cd.] \quad Aq(\tau) = & -\frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \left(\sum_{l=1}^{n+1} \left\{ (\Theta_l - \Theta_{l-1}) \left[1 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{\pi k (1 - \xi_2)}{\xi_2 - \xi_1} e^{-s_k(\tau - l\Delta_1)} \right] \eta(\tau - l\Delta_1) \right\} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{b} \sum_{l=1}^{m+1} \left\{ (E_l - E_{l-1}) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{\pi k (1 - \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} e^{-s_k(\tau - l\Delta_2)} \right] \eta(\tau - l\Delta_2) \right\} \right), \end{aligned}$$

gdzie $s_k = \left[\frac{\pi k}{\beta(\xi_2 - \xi_1)} \right]^2$, $\tau > 0$.

Powyższe wzory są słuszne nie tylko dla odwrotnych zagadnień termosprężystości. Można je stosować także w teorii naprężeń cieplnych przyjmując $\beta = 1$. Wzór (4.5) można wykorzystać ponadto do wyznaczania liczby Biota, Bi , o ile znana jest temperatura otoczenia, Θ_d , a więc również i $A\Theta_d$. Po przekształceniach otrzymujemy związek następujący:

$$(4.7) \quad Bi \cong \frac{AL(\xi_1, \xi_2, \tau)}{A\Theta_d(\tau) - AM(\xi_1, \xi_2, \tau)},$$

gdzie

$$(4.8) \quad \begin{aligned} AL(\xi_1, \xi_2, \tau) = & \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \left(\sum_{l=1}^{n+1} \left\{ (\Theta_l - \Theta_{l-1}) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times \cos \frac{\pi k \xi_2}{\xi_2 - \xi_1} e^{-s_k(\tau - l\Delta_1)} \right] \eta(\tau - l\Delta_1) \right\} - \frac{1}{b} \sum_{l=1}^{m+1} \left\{ (E_l - E_{l-1}) \left[1 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{\pi k \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} e^{-s_k(\tau - l\Delta_2)} \right] \eta(\tau - l\Delta_2) \right\} \right), \end{aligned}$$

$$(4.9) \quad \begin{aligned} AM(\xi_1, \xi_2, \tau) = & \sum_{l=1}^{n+1} \left\{ (\Theta_l - \Theta_{l-1}) \left[\frac{\xi_2}{\xi_2 - \xi_1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \sin \frac{\pi k \xi_2}{\xi_2 - \xi_1} e^{-s_k(\tau - l\Delta_1)} \right] \eta(\tau - l\Delta_1) \right\} - \frac{1}{b} \sum_{l=1}^{m+1} \left\{ (E_l - E_{l-1}) \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{\xi_1}{\xi_2 - \xi_1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} \sin \frac{\pi k \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} e^{-s_k(\tau - l\Delta_2)} \right] \eta(\tau - l\Delta_2) \right\}. \end{aligned}$$

Na podstawie związków (4.5) i (4.6) można także otrzymać ściśle rozwiązania $\Theta_d(\tau)$ i $q(\tau)$. Zwiększając mianowicie m i n oraz zmniejszając jednocześnie Δ_1 i Δ_2 w ten sposób, aby $m\Delta_2 = n\Delta_1 = \text{const}$, otrzymujemy w granicy dla $m, n \rightarrow \infty$ i $\Delta_1, \Delta_2 \rightarrow 0$ następujące wzory:

$$(4.10) \quad \Theta_d(\tau) = \frac{d\Theta_1(\tau)}{d\tau} \times \left[\frac{1 + \text{Bi}\xi_2}{\text{Bi}(\xi_2 - \xi_1)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\cos \frac{\pi k \xi_2}{\xi_2 - \xi_1}}{\text{Bi}(\xi_1 - \xi_2)} + \frac{\sin \frac{\pi k \xi_2}{\xi_2 - \xi_1}}{\pi k} e^{-s_k \tau} \right) \right] - \frac{1}{b} \frac{dE_2(\tau)}{d\tau} \times \left[\frac{1 + \text{Bi}\xi_1}{\text{Bi}(\xi_2 - \xi_1)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\cos \frac{\pi k \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}}{\text{Bi}(\xi_2 - \xi_1)} + \frac{\sin \frac{\pi k \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}}{\pi k} e^{-s_k \tau} \right) \right],$$

$$(4.11) \quad q(\tau) = -\frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \left\{ \frac{d\Theta_1(\tau)}{d\tau} \times \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{\pi k (1 - \xi_2)}{\xi_2 - \xi_1} \times e^{-s_k \tau} \right] - \frac{1}{b} \frac{dE_2(\tau)}{d\tau} \times \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{\pi k (1 - \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} e^{-s_k \tau} \right] \right\}$$

gdzie \times oznacza splot, [8].

Na zakończenie tej części pracy zauważmy, że znajomość funkcji $\Theta_d(\tau)$ i $q(\tau)$ (ew. $A\Theta_d(\tau)$ i $Aq(\tau)$) pozwala wyznaczyć rozwiązania zagadnienia brzegowo-początkowego (1.8). Tym samym staje się możliwe określenie pochodnej $\partial\Theta/\partial\xi$ na brzegu $\xi = 0$, jak również określenie — na podstawie prawa Fouriera — strumienia ciepła na tym brzegu. Tak więc znajomość funkcji $q(\tau)$ i $\Theta_d(\tau)$ wystarcza dla identyfikacji strumienia ciepła także na tym brzegu warstwy, na którym panują warunki brzegowe III rodzaju dla temperatury.

5. Analiza otrzymanych wyników

Wzory (4.5) i (4.6) zawierają szeregi nieskończone. Może się zdarzyć, że przy odpowiednim doborze parametrów sumy tych szeregów będą wnosiły pomijalnie małe poprawki do wyników obliczeń prawych stron. Przyjmijmy, że sumę szeregu można pominąć, jeśli wartość jej pierwszego wyrazu wynosi 1/200 wartości składnika, stanowiącego wraz z szeregiem zawartość odpowiedniego nawiasu kwadratowego. W przypadku wzoru (4.6) prowadzi to — przy założeniu, że wartości $Aq(\tau)$ wylicza się tylko dla chwil $\tau_i = l\Delta + \frac{\Delta}{2}$, $l = 0, 1, \dots$ — do następującego ograniczenia na kroki czasowe Δ :

$$(5.1) \quad \exp \left[-s_k \frac{\Delta_i}{2} \right] \leq 0.005, \quad i = 1, 2.$$

Stąd w przybliżeniu wynika następujący warunek na Δ_i :

$$(5.2) \quad \Delta_i \geq \frac{12}{\pi^2} \beta^2 (\xi_2 - \xi_1)^2, \quad i = 1, 2.$$

Ponieważ w zagadnieniach termosprężystości dotyczących metali zwykle β bardzo niewiele różni się od jedności, więc prawa strona nierówności (5.2) jest wówczas w przybliżeniu równa $1,2 \cdot (\xi_2 - \xi_1)^2$.

Gdy warunek (5.2) jest spełniony, wówczas przybliżoną wartość strumienia ciepła $Aq(\tau)$ można wyznaczyć z uproszczonego wzoru

$$(5.3) \quad Aq(\tau_k) = -\frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \left\{ \sum_{l=1}^{n+1} (\Theta_l - \Theta_{l-1}) \eta(\tau_k - l\Delta_1) - \frac{1}{b} \sum_{l=1}^{m+1} (E_l - E_{l-1}) \eta(\tau_k - l\Delta_2) \right\},$$

gdzie $\tau_k = k\Delta + \Delta/2$, $\Delta = \frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2)$.

W przypadku, gdy $\Delta_1 = \Delta_2$, wzór (5.3) przyjmuje szczególnie prostą postać, a mianowicie

$$(5.4) \quad Aq(\tau_k) = -\frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \left(\Theta_k - \frac{E_k}{b} \right)$$

Wykonując analogiczne szacowanie dla bezwymiarowych kroków czasowych Δ_1 i Δ_2 we wzorze (4.5), otrzymujemy uproszczony wzór na przybliżone wartości funkcji $A\Theta_d(\tau_k)$,

$$(5.5) \quad A\Theta_d(\tau_k) = \frac{1}{\text{Bi}(\xi_2 - \xi_1)} \left\{ (1 + \text{Bi} \xi_2) \sum_{l=1}^{n+1} (\Theta_l - \Theta_{l-1}) \eta(\tau_k - l\Delta_1) - \frac{1 + \text{Bi} \xi_1}{b} \sum_{l=1}^{m+1} (E_l - E_{l-1}) \eta(\tau_k - l\Delta_2) \right\},$$

który dobrze tę funkcję opisuje, jeśli zachodzi nierówność

$$(5.6) \quad \Delta_i \leq C(\xi_1, \xi_2, \text{Bi}) (\xi_2 - \xi_1)^2, \quad i = 1, 2,$$

gdzie

$$C(\xi_1, \xi_2, \text{Bi}) = \frac{12}{\pi^2} \beta^2 \max_{i=1,2} \left(\left[\frac{\cos \frac{\pi \xi_i}{\xi_2 - \xi_1}}{\text{Bi}(\xi_2 - \xi_1)} + \frac{\sin \frac{\pi \xi_i}{\xi_2 - \xi_1}}{\pi} \right]^{-1} \right)$$

W przypadku, gdy $\Delta_1 = \Delta_2$, wzór (5.5) przyjmuje szczególnie prostą postać, a mianowicie

$$(5.7) \quad A\Theta_d(\tau_k) = \frac{1}{\text{Bi}(\xi_2 - \xi_1)} \left[(1 + \text{Bi} \xi_2) \Theta_k - (1 + \text{Bi} \xi_1) \frac{E_k}{b} \right]$$

Wzory (5.4) i (5.7) mają jedną istotną cechę, różniącą je od wyrażeń (4.5) i (4.6) czy (5.3) i (5.5). Jest nią fakt, że występują w nich tylko wielkości mierzone w tej chwili, w której odtwarzamy funkcje q i Θ_d . W przypadku, gdyby chodziło o identyfikację strumienia ciepła i temperatury otoczenia na podstawie pomiarów, to wyższość wzorów (5.4) i (5.7) nad dokładniejszymi od nich wzorami (4.5), (4.6), (5.3) i (5.5) polega na tym, że w zasadzie nie trzeba znać chwili, w której proces termosprężysty się rozpoczął. W takim ujęciu wa-

runki (5.2) i (5.6) stają się warunkami ograniczającymi od dołu chwilę pierwszego pomiaru w stosunku do chwili rozpoczęcia się procesu: $\tau \geq 1.5\Delta$. Zwróćmy uwagę, iż wzór (4.10), czy też (4.5), pozwala także wyznaczyć termiczne obciążenie brzegu warstwy w przypadku warunków I lub II rodzaju. Przechodząc bowiem z liczbą Biota Bi do nieskończoności znajdujemy wzór na temperaturę brzegu $\xi = 0$ (warunek brzegowy I rodzaju):

$$(5.8) \quad \Theta_d^I(\tau) = \frac{d\Theta_1(\tau)}{d\tau} * \left[\frac{1}{\xi_2 - \xi_1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} \sin \frac{\pi k \xi_2}{\xi_2 - \xi_1} e^{-s_k \tau} \right] - \\ - \frac{1}{b} \frac{dE_2(\tau)}{d\tau} * \left[\frac{1}{\xi_2 - \xi_1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} \sin \frac{\pi k \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} e^{-s_k \tau} \right],$$

zaś przechodząc z Bi do zera i jednocześnie oznaczając $q_d(\tau) = \lim_{Bi \rightarrow 0} Bi \Theta_d(\tau)$ (warunek brzegowy II rodzaju), otrzymujemy

$$(5.9) \quad q_d(\tau) = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \left\{ \frac{d\Theta_1(\tau)}{d\tau} * \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{\pi k \xi_2}{\xi_2 - \xi_1} e^{-s_k \tau} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{b} \frac{dE_2(\tau)}{d\tau} * \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{\pi k \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} e^{-s_k \tau} \right] \right\}.$$

Widać, że wzory (4.11) i (5.9) mają analogiczną budowę.

Z analizy wzoru (4.10) lub (4.5) wynika, iż istnieją pewne punkty, ξ_1 i ξ_2 , dla których wzór ten nieco się upraszcza. Zachodzi to mianowicie dla takich punktów wewnętrznych, które są powiązane zależnością

$$(5.10) \quad \xi_2 = \frac{n+1}{n} \xi_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wówczas $\sin \frac{\pi k \xi_i}{\xi_2 - \xi_1} = 0$ dla $i = 1, 2$ $\cos \frac{\pi k \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = (-1)^{kn}$ oraz $\cos \frac{\pi k \xi_2}{\xi_2 - \xi_1} = (-1)^{k(n+1)}$,

a wzór (4.10) przyjmuje postać

$$(5.11) \quad \Theta_d(\tau) = \frac{1}{Bi(\xi_2 - \xi_1)} \left\{ \frac{d\Theta_1(\tau)}{d\tau} * \left[1 + Bi \xi_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k \left(\frac{\xi_2}{\xi_2 - \xi_1} + 1 \right)} e^{-s_k \tau} \right] - \frac{1}{b} \frac{dE_2(\tau)}{d\tau} * \left[1 + Bi \xi_1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{\frac{k \xi_2}{\xi_2 - \xi_1}} e^{-s_k \tau} \right] \right\}.$$

6. Weryfikacja numeryczna otrzymanych wyników

W celu zweryfikowania otrzymanych wyników pod kątem ich dokładności zastosujemy następującą procedurę. Przyjmijmy najpierw pewne wartości funkcji $q(\tau)$ i $\Theta_d(\tau)$ jako dane i na ich podstawie obliczymy wartości temperatury $\Theta(\xi, \tau)$ i odkształceń $\varepsilon_{xx}(\xi, \tau)$ w pew-

nych punktach wewnętrznych warstwy. Następnie przyjmujemy obliczone wartości jako WO i na ich podstawie będziemy odtwarzali funkcje $q(\tau)$ i $\Theta(\tau)$ zgodnie z procedurą podaną wyżej.

Przyjmując, że $\Theta(\tau)$ oraz $q(\tau)$ są stałe, tzn. $\Theta_d(\tau) = \Theta_d$, $q(\tau) = q$ dla $\tau > 0$, oraz odwracając transformaty dane wzorami (2.1) i (2.4) otrzymujemy

$$(6.1) \quad \Theta(\xi, \tau) = q \left(\frac{1}{Bi} + \xi \right) + \Theta_d - 2 \sum_{k=1}^{\infty} [qA_k(\xi, Bi) + \Theta_d B_k(\xi, Bi)] e^{-r_k \tau},$$

$$(6.2) \quad \varepsilon_{xx}(\xi, \tau) = b\Theta(\xi, \tau),$$

gdzie

$$(6.3) \quad A_k(\xi, Bi) = \frac{1}{\beta^2 r_k} \cdot \frac{\beta \sqrt{r_k} \cos(\beta \xi \sqrt{r_k}) + Bi \sin(\beta \xi \sqrt{r_k})}{\beta \sqrt{r_k} \cos(\beta \sqrt{r_k}) + (1 + Bi) \sin(\beta \sqrt{r_k})},$$

$$B_k(\xi, Bi) = \frac{Bi}{\beta(\sqrt{r_k})} \cdot \frac{\cos[\beta(1 - \xi)\sqrt{r_k}]}{\beta \sqrt{r_k} \cos(\beta \sqrt{r_k}) + (1 + Bi) \sin(\beta \sqrt{r_k})},$$

zaś r_r są kolejnymi pierwiastkami równania

$$(6.4) \quad \operatorname{ctg} \beta \sqrt{r} = \frac{\beta \sqrt{r}}{Bi}.$$

Obliczenia numeryczne wykonano dla następujących danych liczbowych: $Q(\tau) = 100$ W/m², $T_d(\tau) = 1^\circ$, $h = 0.01$ m, $\lambda = 40$ W/m deg, $T_0 = 1^\circ$, $\eta = 10^{-5}$ deg s/m², $\kappa = 10^{-4}$ m²/s, $k = 0.22286 \cdot 10^{-4}$ 1/deg, a ponadto dla czterech różnych liczb Biota, $Bi = 0.1, 1.0, 10, 100$, dla dwóch różnych kroków czasowych $\Delta t = 0.01$ i 1.0 s, oraz dla różnych par punktów $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ i dla chwil czasu $t \in (0, 30)$. Przy wykorzystywaniu wzorów (4.5) i (4.6) obliczano wartość funkcji $A\Theta_d$ i Aq w chwilach $\tau_k = k\Delta t + \Delta t/2$.

Nierówności (5.2) i (5.6) przyjmują w tym przypadku — dla $Bi = 1.0$, $\xi_1 = 0.1$ i $\xi_2 = 0.9$ — następującą postać (prawe strony zaokrąglano do góry):

$$\Delta \geq 0.7 \text{ w przypadku } Aq(\ddagger), \quad \Delta \geq 0.65 \text{ w przypadku } A\Theta_d(\tau).$$

Celem sprawdzenia o ile bardziej dokładne są wzory (4.5) i (4.6) od wzorów (5.4) i (5.7) wykonano obliczenia dotyczące Aq i $A\Theta_d$, przy czym we wzorach (4.5) i (4.6) przyjęto $\Delta = 0.01$, zaś we wzorach (5.4) i (5.7) $\Delta = 1$. Wyniki obliczeń, dokonanych dla $Bi = 1$, $\xi_1 = 0.1$ i $\xi_2 = 0.9$ zestawiono w tabeli 2.

Tabela 2

czas s	$A\Theta_d(\tau)$		$Aq(\tau)$	
	wg (4.5)	wg (5.7)	wg (4.6)	wg (5.4)
1.5	0.95847	0.81736	-112.59	-685.66
2.5	0.98017	0.91277	-152.50	-272.81
3.5	0.99053	0.95832	51.514	-78.030
4.5	0.99548	0.98019	76.846	14.985
5.5	0.99784	0.99057	88.941	59.404
6.5	0.99897	0.99554	94.716	80.615
7.5	0.99951	0.99782	97.479	90.741
8.5	0.99976	0.99896	98.793	95.587
9.5	0.99989	0.99951	99.424	97.893

Przyjmując, że dokładność odtwarzania termicznych obciążeń brzegu powinna wynosić co najmniej 95%, to wariant „dokładny” (wzory (4.5) i (4.6)) daje ten wynik średnio o 2 s szybciej, niż wariant „uproszczony”. Trzeba jednak zaznaczyć, że wariant „uproszczony” można było łatwo obliczyć „ręcznie”, podczas gdy wariant „dokładny” zajął 30 min pracy EMC. Przemawia to zdecydowanie na korzyść wariantu „uproszczonego” — dlatego też w dalszych obliczeniach posługiwano się tylko wzorami (5.4) i (5.7).

Kolejnym etapem analizy numerycznej było ustalenie, jaki wpływ na dokładność identyfikacji obciążeń termicznych brzegu ma zmiana odległości między punktami ξ_1 i ξ_2 , gdy ich środek ciężkości pozostaje w tym samym miejscu. W tabeli 3 zebrano wyniki obliczeń dla trzech par punktów o środku ciężkości równym 0.5 (liczba Biota $Bi = 0.1$).

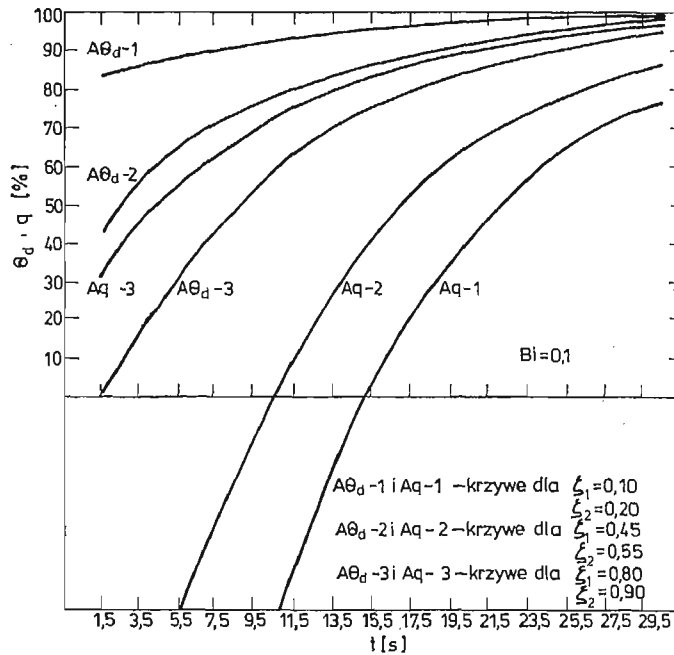
Tabela 3

Czas s	$A\Theta_d(\tau)$			$Aq(\tau)$		
	$\xi_1 = 0.45$	$\xi_1 = 0.30$	$\xi_1 = 0.10$	$\xi_1 = 0.45$	$\xi_1 = 0.30$	$\xi_1 = 0.10$
	$\xi_2 = 0.55$	$\xi_2 = 0.70$	$\xi_2 = 0.90$	$\xi_2 = 0.55$	$\xi_2 = 0.70$	$\xi_2 = 0.90$
1.5	0.43983	0.44158	0.38482	-124.30	-124.17	-123.74
3.5	0.53850	0.54000	0.53629	-84.800	-84.698	-84.341
5.5	0.61977	0.62098	0.62957	-52.250	-52.167	-51.874
7.5	0.68674	0.68773	0.69084	-25.439	-25.367	-25.127
9.5	0.74191	0.74273	0.74315	-3.344	-3.286	-3.200
11.5	0.78735	0.79103	0.79299	14.861	14.905	14.941
13.5	0.82481	0.82537	0.82591	29.853	29.893	29.932
15.5	0.85565	0.85613	0.85709	42.213	42.241	42.356
17.5	0.88105	0.88146	0.88191	52.397	52.417	52.447
19.5	0.90200	0.90234	0.90271	60.781	60.797	60.807
21.5	0.91277	0.91306	0.91339	67.680	67.701	67.813
23.5	0.93348	0.93372	0.93498	73.377	73.389	73.391
25.5	0.94518	0.94539	0.94553	78.072	78.078	78.086
27.5	0.95484	0.95500	0.95520	81.930	81.940	81.951
29.5	0.96277	0.96293	0.96316	85.119	85.120	85.122

Jak widać rozrzut punktów nie ma praktycznie żadnego wpływu na dokładność odtwarzania. Można więc osłabić warunki (6.5) przez przyjęcie punktów ξ_1 i ξ_2 jak najbliżej siebie.

Następnym krokiem analizy numerycznej było zbadanie, czy zmieniając położenie środka ciężkości punktów ξ , $i = 1, 2$, można w krótszym czasie znaleźć przebiegi nieznanymi warunków brzegowych. Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono wykresy obrazujące funkcje $Aq(t)$ i $A\Theta(t)$ dla czterech różnych wartości liczby Biota, $Bi = 0.1, 1.0, 10$ i 100 . Na osi rzędnych zaznaczono dokładność identyfikacji q i Θ_d w procentach. Analizując te wykresy można dojść do następujących wniosków:

- 1° wszystkie krzywe mają charakter krzywych wykładniczych
- 2° temperatura Θ_d jest znacznie lepiej odtwarzana niż strumień ciepła
- 3° im większa jest liczba Biota, tym krótszy czas potrzebny jest do odtworzenia z daną dokładnością nieznanymi warunków brzegowych
- 4° im środek ciężkości punktów ξ_1 i ξ_2 znajduje się bliżej któregoś z brzegów warstwy,



Rys. 1

tym lepiej odtwarzane jest obciążenie termiczne tego brzegu i tym gorzej odtwarzane jest obciążenie termiczne brzegu przeciwnego.

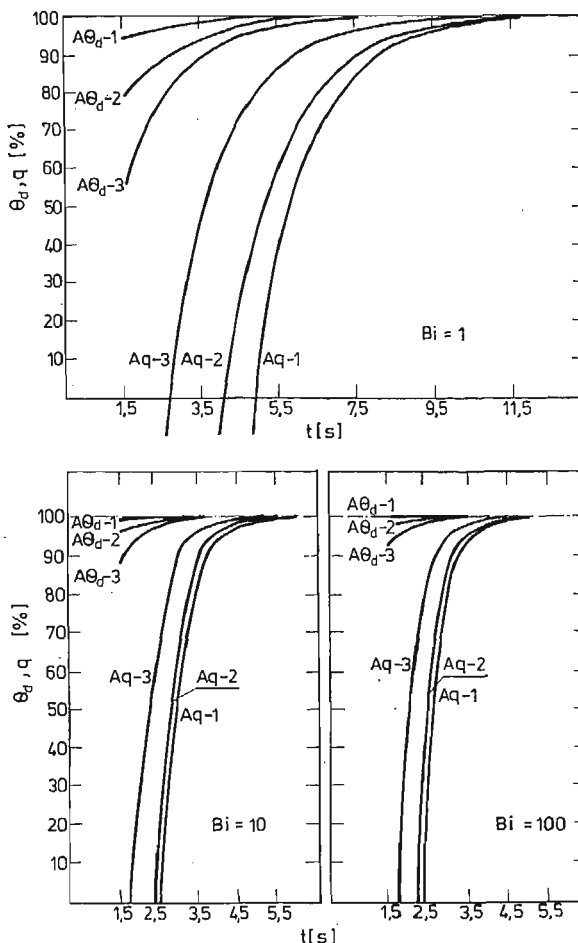
Spróbujmy wyjaśnić, skąd się biorą takie cechy omawianych wykresów. Wniosek 1° stanie się oczywisty, gdy do wyrażeń (5.4) i (5.7) wstawić prawe strony wzorów (6.1) i (6.2), określone odpowiednio w punktach ξ_1 i ξ_2 . Otrzymamy bowiem zależności o charakterze wykładniczym:

$$(6.5) \quad Aq(\tau) = q + \frac{2}{\xi_2 - \xi_1} \sum_{k=1}^{\infty} q [A_k(\xi_1, Bi) - A_k(\xi_2, Bi)] + \\ + \Theta_d [B_k(\xi_1, Bi) - B_k(\xi_2, Bi)] \left\} e^{-r_k \tau},$$

$$(6.6) \quad A\Theta_d(\tau) = \Theta_d + \frac{2}{\xi_2 - \xi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ q \left[A_k(\xi_2, Bi) \left(\frac{1}{Bi} + \xi_1 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - A_k(\xi_1, Bi) \left(\frac{1}{Bi} + \xi_2 \right) \right] + \Theta_d \left[B_k(\xi_2, Bi) \left(\frac{1}{Bi} + \xi_1 \right) - B_k(\xi_1, Bi) \left(\frac{1}{Bi} + \xi_2 \right) \right] \right\} e^{-r_k \tau}.$$

Jeśli ograniczymy się tylko do pierwszego wyrazu szeregu nieskończonego, to zależności te można zapisać w postaci

$$(6.7) \quad \frac{Aq(\tau)}{q} - 1 = \frac{e^{-r_1 \tau}}{\xi_2 - \xi_1} \left\{ A_1(\xi_1, Bi) - A_1(\xi_2, Bi) + \frac{\Theta_d}{q} [B_1(\xi_1, Bi) - B_1(\xi_2, Bi)] \right\},$$



Rys. 2

$$(6.7) \quad \frac{A\Theta_d(\tau)}{\Theta_d} - 1 = \frac{e^{-r_1\tau}}{\xi_2 - \xi_1} \left\{ B_1(\xi_2, Bi) \left(\frac{1}{Bi} + \xi_1 \right) - \right. \\ \left. - B_1(\xi_1, Bi) \left(\frac{1}{Bi} + \xi_2 \right) + \frac{q}{\Theta_d} \left[A_1(\xi_2, Bi) \left(\frac{1}{Bi} + \xi_1 \right) - A_1(\xi_1, Bi) \left(\frac{1}{Bi} + \xi_2 \right) \right] \right\}.$$

Przy ustalonych punktach ξ_1 i ξ_2 oraz danej liczbie Biota, Bi , wartości lewych stron związków (6.7) zależą będą w danej chwili czasu tylko od ilorazu q/Θ_d . Zbadajmy, dla jakich wartości ilorazu q/Θ_d lepiej jest identyfikowany strumień ciepła, $Aq(\tau)$, a dla jakich — temperatura $A\Theta_d(\tau)$. Wymaga to rozwiązania nierówności

$$(6.8) \quad \left| \frac{Aq(\tau)}{q} - 1 \right| < \left| \frac{A\Theta_d(\tau)}{\Theta_d} - 1 \right|.$$

Obliczenia, przeprowadzone dla $\xi_1 = 0.3$, $\xi_2 = 0.7$ i $Bi = 1.0$ wskazują, że obszar, w którym lepiej jest odtwarzana temperatura Θ_d scharakteryzowany jest nierównością $-1.337 < q/\Theta_d < 4.558$, albo — wracając do zmiennych wymiarowych —

$$(6.9) \quad -5548 < Q/T_d < 18232.$$

W praktyce zdecydowana większość ilorazów Q/T_d zawiera się w przedziale, w którym lepiej jest odtwarzana temperatura $A\Theta_d(\tau)$.

Wniosek 3° można łatwo wyjaśnić w oparciu o wartości pierwszych pierwiastków równania (6.4) dla różnych liczb Biota. Dla $Bi = 0.1$ mamy $r_1 = 0.09675$, dla $Bi = 1.0$ $r_1 = 0.74012$, dla $Bi = 10$ $r_1 = 2.04175$, oraz dla $Bi = 100$ $r_1 = 2.41884$. We wzorach (6.7) człon wykładniczy tym szybciej wygasza, im wartość pierwiastka r_1 jest większa. Dlatego dla dużych liczb Biota już po kilku sekundach człon ten ma wartość pomijalnie małą i dokładność odtwarzania jest niemal stuprocentowa.

Ostatni wniosek nie da się tak łatwo wyjaśnić matematycznie jak poprzednie. Jednakże jego interpretacja fizyczna jest prosta. Wpływ obciążenia termicznego danego brzegu warstwy tym silniej uwidacznia się w wartościach WO im bliżej tego brzegu leży środek ciężkości punktów ξ_1 i ξ_2 . Stąd też łatwiej jest odtworzyć obciążenie termiczne tego właśnie brzegu.

Uwagi końcowe

Przedstawiona w pracy metoda identyfikacji daje się bezpośrednio przenieść na przypadki ciał o innych kształtach jak i na innego typu jednowymiarowe zagadnienia identyfikacji. Wykorzystane w pracy dla przedstawienia funkcji opisujących WO funkcje schodkowe nie są jedynym przedstawieniem dopuszczalnym. Funkcjami dopuszczalnymi są np. splajny n -tego rzędu (funkcje, których n -te pochodne są funkcjami schodkowymi). Jednakże zwiększenie dokładności opisu WO prowadzi do skomplikowania wyników, podczas gdy wybór funkcji schodkowych pozwolił na otrzymanie bardzo prostych formuł przybliżonych (5.4) i (5.7).

Główną zaletą przedstawionej metody identyfikacji wydaje się być jej stosunkowo duża dokładność przy nieskomplikowanych wzorach, opisujących wielkości identyfikowane. Z uwagi na to metoda dobrze nadaje się do weryfikacji doświadczalnej.

Na odrębną uwagę zasługuje fakt, iż niejako przy okazji otrzymano związek określający w przybliżeniu liczbę Biota (wzór (4.7)). Wzór ten także można sprowadzić do prostszej postaci, jeśli spełnione są ograniczenia (5.2) i (5.6); jeśli ponadto $\Delta_1 = \Delta_2$, wówczas otrzymujemy związek

$$Bi \cong \frac{\Theta_k - E_k/b}{(\xi_2 - \xi_1)A\Theta_d(\tau_k) - \Theta_k\xi_2 + E_k\xi_1/b},$$

gdzie $\tau_k = k\Delta + \frac{\Delta}{2}$, $\Theta_k = \Theta_1(k\Delta)$, $E_k = E_2(k\Delta)$.

Przedstawiona w pracy technika odwracania transformat Laplace'a pozwala ominąć te trudności, które stały się przyczyną niepowodzeń przy wielu innych, wcześniejszych próbach rozwiązywania zagadnień odwrotnych wymiany ciepła, [1]. Wydaje się, że wymagają dalszego rozwoju techniki obliczeniowe, związane z transformacją Laplace'a jak i z ra-

chunkiem operatorów Mikusińskiego, [9], gdyż pojawiające się w toku obliczeń dotyczących zagadnień odwrotnych funkcje zmiennej zespolonej s (parametru transformacji) mają charakter operatorów Mikusińskiego, czy też transformat dystrybucji typu odmiennego niż wykładnicze.

Analiza numeryczna potwierdziła poprawność otrzymanych wyników, jak również pozwoliła prześledzić ich dokładność i wrażliwość na dobór punktów ξ_1 i ξ_2 , jak również różnych liczb Biot. Szczególnego podkreślenia wymaga fakt, iż obliczenia te można wykonać nawet posługując się prostym kalkulatorem czy suwakiem.

Literatura cytowana w tekście

1. K. GRYSA, M. J. CIAŁKOWSKI, *Zagadnienia odwrotne pól temperatur — przegląd literatury*, Mech. Teoret. Stos., **18**, 4, 535 - 554, (1980).
2. J. V. BECK, *Surface Heat Flux Determination Using an Integral Method*, Nucl. Eng. Design, **7**, 170 - 178, (1968).
3. C. J. CHEN, D. M. THOMSEN, *On Transient Cylindrical Surface Heat Flux Predicted from Interior Temperature Response*, AIAA Journal, **13**, 697 - 699, (1975).
4. G. STOLZ, Jr. *Numerical Solution to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes*, Trans. ASME, s. C: J. Heat Transfer, **82**, 20 - 26, (1960).
5. K. GRYSA, M. J. CIAŁKOWSKI, H. KAMIŃSKI, *An Inverse Temperature Field Problem of the Theory of Thermal Stresses*, Nucl. Eng. Design, **64**, 169 - 184, (1981).
6. M. J. CIAŁKOWSKI, K. GRYSA, *On a Certain Inverse Problem of Temperature and Thermal Stress Fields*, Acta Mechanica, **36**, 169 - 185, (1980).
7. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN Warszawa, 1970, s. 673.
8. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT Warszawa, 1972.
9. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa, 1957.

Резюме

О ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСКОГО СЛОЯ

В работе представлено приближенное и точное решение задачи идентификации теплового потока. Задача рассмотрена на основе сопряженной теории тепловых напряжений. Чтобы определить тепловой поток на одной поверхности слоя и температуру окружающей среды для второй поверхности, избрано температуру и деформацию как так называемые внутренние ответы. Нумерический анализ иллюстрирует точность теоретических результатов и влияние выбора внутренних точек ξ_1 и ξ_2 и числа Био на точность идентификации.

Summary

ON AN ONE-DIMENSIONAL HEAT FLUX IDENTIFICATION PROBLEM AT A SURFACE OF A PLANE SLAB

In the paper an analytical approximate and exact solution of an heat flux identification problem is shown. The problem is considered on the ground of the theory of thermoelasticity. To determine the heat flux at one surface of the slab and a surrounding temperature at the another one the temperature and strain were chosen as the so-called internal response. Numerical analysis illustrates the accuracy of the theoretical results as well as an influence of the choice of the interior points, ξ_1 and ξ_2 , and the Biot number for the accuracy of the identification.

WYKORZYSTANIE METOD ANALIZY WRAŻLIWOŚCI DO BADANIA UKŁADÓW MECHANICZNYCH OPISYWANYCH LINIOWYMI I NIELINIOWYMI RÓWNANIAMİ MATHIEU

BOGUSŁAW SKIERCZYŃSKI

Lublin

We wszystkich naukach przyrodniczych i w technice ważna jest idea modelowania. Sformułowanie teorii (proponowanej koncepcji badanego zjawiska) można z całą słuszością nazwać „tworzeniem modelu”. Teoria występuje tu jako werbalny lub matematyczny model rzeczywistości. Dla naszych celów definiujemy model jako opis zasadniczych cech istniejącego lub projektowanego układu, dostarczający wiedzy o nim w formie użytecznej.

Podstawowym wymaganiem względem modelu jest to bowiem, by wiedza o procesie realizowanym przez niego była przedstawiona w formie użytecznej, ponieważ musi on dostarczyć wniosków do dalszej analizy. Jeżeli model jest zbyt złożony jego użyteczność staje się wątpliwa. Pociąga to za sobą konieczność odpowiedzenia na szereg trudnych pytań takich jak np.:

- Jak ocenić jakość modelu?
- Jak zawrzeć w nim całą najistotniejszą wiedzę?
- Jak potraktować nieliniowości?
- Jak można rozważany układ przedstawić w sposób przybliżony za pomocą prostego modelu?
- itp.

Na niektóre z tych pytań metody analizy wrażliwości są w stanie udzielić odpowiedzi.

Literatura dotycząca metod analizy wrażliwości nie podaje konkretnych metod nadających się do wykorzystania w analizie układów nieliniowych. Podane są ogólne definicje wrażliwości oraz ich zastosowanie do układów liniowych. Zastosowanie tych metod do układów nieliniowych prowadzi do konieczności rozwiązywania równań liniowych o zmiennych współczynnikach, przy założeniu, że rozwiązanie równania różniczkowego nieliniowego jest znane.

Istnieją różne koncepcje i definicje pojęcia wrażliwości oraz jej miary. Jednym z wariantów zagadnienia wrażliwości jest zagadnienie wrażliwości ilościowej rozwiązania na zmiany parametrów, które poglądowo można przedstawić w następujący sposób. [2]

Niech model pewnego zjawiska fizycznego będzie opisywany równaniem różniczkowym w ogólnym przypadku nieliniowym.

$$(1) \quad \begin{aligned} \phi &= \ddot{x} - f(t, x, \dot{x}, p) = 0, \\ x(t_0) &= x_0, \dot{x}(t_0) = v_0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (1) uważamy za znane. Zagadnienie które chcemy zbadać to zmiana wartości rozwiązania równania gdy parametr p zmieni się o Δp .

Jeżeli zmiana parametru nie zależy od czasu to funkcję wrażliwości można określić następująco:

$$(2) \quad w(t, p) = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{x(t, p + \Delta p) - x(t, p)}{\Delta p} = \frac{\partial x}{\partial p},$$

dla p dostatecznie małego zależność (2) można przedstawić w postaci:

$$(3) \quad x(t, p + \Delta p) - x(t, p) \cong w(t, p) \cdot \Delta p.$$

Jak widać z przedstawionej zależności (3) jeżeli wyznaczmy lub oszacujemy funkcję wrażliwości $w(t, p)$ to możemy wyznaczyć lub oszacować zmianę funkcji $x(t, p)$ wynikłą ze zmiany parametru p , lub jeżeli mamy zmianę funkcji $x(t, p)$ i wyznaczmy lub oszacujemy funkcję wrażliwości to możemy wyznaczyć zmianę parametru p .

Równanie różniczkowe na funkcję wrażliwości $w(t, p)$ otrzymujemy różniczkując równanie (1) względem parametru p .

$$(4) \quad \frac{\partial \phi}{\partial p} = \frac{\partial \phi}{\partial \ddot{x}} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

stąd na podstawie definicji funkcji wrażliwości (2) otrzymujemy:

$$(5) \quad \dot{w} + \alpha(t, p)\dot{w} + \beta(t, p)w = \gamma(t, p),$$

gdzie:

$$(6) \quad \alpha(t, p) = -\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \quad \beta(t, p) = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \gamma(t, p) = \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Jeżeli znamy rozwiązanie równania (1) to znamy również współczynniki α , β , γ , i funkcja wrażliwości jest rozwiązaniem równania (5) różniczkowego o zmiennych współczynnikach. Funkcje wrażliwości wyższych rzędów można otrzymać różniczkując równanie (1) względem p^2, p^3, \dots, p^n .

Tak więc widać z przedstawionego schematu czy też metody otrzymywania funkcji wrażliwości dla równań nieliniowych, że zachodzi konieczność rozwiązania w pierwszym rzędzie równania różniczkowego a następnie równania liniowego o zmiennych współczynnikach.

Drugim wariantem wrażliwości jest tzw. „ λ lub μ -wrażliwość” — wrażliwość rozwiązania na zmiany struktury równań opisujących model. Definicja ta jest bardzo ogólna i można w niej wyodrębnić cztery główne przypadki:

- wrażliwość na zmiany rzędu modelu matematycznego,
- wrażliwość na zmianę ilości stopni swobody,
- wrażliwość na zmianę modelu ciągłego na dyskretny,
- analizę wpływu wyrazów funkcyjnych, z których zbudowany jest model matematyczny.

Szczególnym przypadkiem wrażliwości strukturalnej rozumianej jako analizę wpływu wyrazów funkcyjnych jest wrażliwość na zmianę parametrów.

Weźmy pod uwagę model opisywany układem równań różniczkowych w postaci:

$$(7) \quad \dot{x} = Ax + ef(t, x, \varepsilon),$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \text{col}[x_1, \dots, x_n], \\ \mathbf{A} &= [a_{ij}] \quad (i, j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

ε — mały parametr

f — funkcja nieliniowa

Równanie różniczkowe na funkcje wrażliwości dla parametru jest postaci:

$$(8) \quad \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \varepsilon \frac{\partial f(t, \mathbf{x}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + f(t, \mathbf{x}, \varepsilon),$$

gdzie:

$$\mathbf{w} = \text{col}[w_1, \dots, w_n], \quad w_n = \frac{\partial x_n}{\partial \varepsilon}.$$

Przyjmijmy, że parametr $\varepsilon = 0$. Wtedy równanie (8) przybiera postać:

$$(9) \quad \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w} + f(t, \tilde{\mathbf{x}}, \varepsilon)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{x}}$ jest rozwiązaniem równania:

$$(10) \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}.$$

Wprowadzone funkcje $w_i(t, \varepsilon = 0)$ ($i = 1, \dots, n$) są to funkcje wrażliwości określające zmianę rozwiązania równania (10) gdy w równaniu tym pojawią się funkcje nieliniowe $f_i(t, x_i, \varepsilon)$.

Zgodnie z definicją (3) można napisać:

$$(11) \quad \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{w}(t, \varepsilon = 0) \cdot \varepsilon,$$

stąd rozwiązanie równania różniczkowego nieliniowego jest postaci:

$$(12) \quad \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{w}(t, \varepsilon = 0) \cdot \varepsilon$$

Powyżej przedstawioną metodę można wykorzystać do badania równań różniczkowych liniowych o zmiennych współczynnikach — do wyznaczania ich rozwiązań i obszarów stateczności. W ostatnim czasie krąg zagadnień których rozwiązanie sprowadza się do badania równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach a w szczególności do badania równania Mathieu szybko się powiększa. Spotykamy się z nim nie tylko w fizyce i technice lecz także w biologii, biofizyce, medycynie itp.

W związku z tym zachodzi konieczność podania efektywnej metody rozwiązywania równania liniowego i nieliniowego Mathieu. Wydaje się, że taką metodą jest metoda przedstawiona powyżej.

Jako przykład rozważmy równanie Mathieu w postaci:

$$(13) \quad \ddot{z} + (a - 2q \cos 2t)z = 0.$$

W zależności od parametrów a i q rozwiązanie równania Mathieu może być okresowe lub nieokresowe, stateczne lub niestateczne.

Przyjmijmy, że a jest określone zależnością:

$$(14) \quad a = \omega^2 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots +$$

Podstawiając (14) do równania (13) otrzymujemy:

$$(15) \quad \ddot{z} + (\omega^2 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots - 2q \cos 2t)z = 0.$$

Równanie różniczkowe na funkcje wrażliwości dla parametru q jest postaci:

$$(16) \quad \dot{w} + (\omega^2 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots - 2q \cos 2t)w = -a_1 z - 2a_2 q z - \dots + 2z \cos 2t,$$

gdzie: $w = \frac{\partial z}{\partial q}$

Równanie różniczkowe na funkcje wrażliwości drugiego rzędu dla parametru q przybiera postać:

$$(17) \quad \ddot{w}_2 + (\omega^2 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots - 2q \cos 2t)w_2 = -a_1 w - 2qa_2 w - \dots - a_1 w - 2a_2 z - \dots + 4z \cos 2t,$$

gdzie: $w_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}$

Przyjmujemy, że $q = 0$ i otrzymujemy:

$$(18) \quad \ddot{z}_0 + \omega^2 z_0 = 0,$$

$$(19) \quad \dot{w}_1 + \omega^2 w_1 = -a_1 z_0 + 2z_0 \cos 2t,$$

$$(20) \quad \ddot{w}_{20} + \omega^2 w_{20} = 2(-a_1 w_1 - a_2 z_0 + 2w_1 \cos 2t).$$

Rozwiązanie równania (18) jest postaci:

$$(21) \quad z_0(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t,$$

gdzie:

C_1, C_2 — stałe określone przez warunki początkowe.

Podstawiając (21) do (19) otrzymujemy:

$$(22) \quad \ddot{w}_1 + \omega^2 w_1 = -C_2 a_{1c} \cos \omega t - C_1 a_{1s} \sin \omega t + C_2 \cos(\omega - 2)t + C_2 \cos(\omega + 2)t + C_1 \sin(\omega + 2)t + C_1 \sin(\omega - 2)t.$$

Z postaci równania (22) wynika, że wyrazy sekularne pojawiają się w rozwiązaniu gdy $\omega = 0, 1, 2$

Przyjmijmy, że $\omega = 1$. Wtedy równanie (22) przybiera postać:

$$(23) \quad \ddot{w}_1 + w_1 = -C_2 a_{1c} \cos t - C_1 a_{1s} \sin t + C_2 \cos t + C_2 \cos 3t + C_1 \sin 3t + C_1 \sin t.$$

Usuwaając wyrazy sekularne otrzymujemy dwa nietrywialne alternatywne warunki,

$$(14) \quad \begin{array}{ll} \text{I. } a_{1c} = 1 & \text{i } C_1 = 0 \\ \text{II. } a_{1s} = -1 & \text{i } C_2 = 0 \end{array}$$

gdzie:

a_{1s} — oznacza stałą a_1 przy rozwiązaniu w postaci funkcji sinus.

a_{1c} — oznacza stałą a_1 przy rozwiązaniu w postaci funkcji cosinus.

Rozwiązanie równania (23) po usunięciu przybiera postać:

$$(25) \quad w_1(t) = -\frac{C_2}{8} \cos 3t - \frac{C_1}{8} \sin 3t$$

Podstawiając (25) i (21) do równania (20) oraz usuwając wyrazy wiekowe otrzymujemy także dwa warunki. A mianowicie:

$$(26) \quad \text{I. } a_{2c} = -\frac{1}{8} \quad \text{i} \quad C_1 = 0$$

$$(27) \quad \text{II. } a_{2s} = -\frac{1}{8} \quad \text{i} \quad C_2 = 0$$

Rozwiązanie równania (20) jest postaci:

$$(28) \quad w_{20}(t) = -\frac{1}{32} C_2 \cos 3t + \frac{1}{32} C_1 \sin 3t + \frac{1}{96} C_2 \cos 5t + \frac{1}{96} C_1 \sin 5t.$$

Chcąc znaleźć dokładniejsze rozwiązanie równania (13) oraz dokładniejsze obszary stateczności należy wyznaczyć funkcje wrażliwości rzędu trzeciego, czwartego itp., co nie nastręcza dużych trudności jak widać z przedstawionego schematu.

Rozwiązanie równania (13) w ogólnej postaci określone jest zależnością:

$$(29) \quad z(t) = z_0(t) + w_1(t, q = 0) \cdot q + \frac{1}{2} w_{20}(t, q = 0) \cdot q^2 + \dots$$

Ograniczając się do funkcji wrażliwości drugiego rzędu oraz uwzględniając wyznaczone warunki (24), (26) i (27) otrzymujemy dwa przypadki okresowego rozwiązania równania Mathieu (13) dla $\omega = 1$.

I.

$$(30) \quad z(t) = C_2 \cos t - \frac{1}{8} C_2 q \cos 3t - \frac{1}{64} C_2 q^2 \cos 3t + \frac{1}{192} C_2 q^2 \cos 5t + \dots$$

przy czym,

$$(31) \quad a_c = 1 + q - \frac{1}{8} q^2 + \dots$$

II.

$$(32) \quad z(t) = C_1 \sin t - \frac{1}{8} C_1 q \sin 3t + \frac{1}{64} C_1 q^2 \sin 3t + \frac{1}{192} C_1 q^2 \sin 5t + \dots$$

przy czym,

$$(33) \quad a_s = 1 - q - \frac{1}{8} q^2 + \dots$$

Jak widać z postaci rozwiązania równania Mathieu i krzywych rozdzielających obszary stateczności i niestateczności otrzymanych przy pomocy funkcji wrażliwości na pojawianie się wyrazów x funkcyjnych w równaniu liniowym o stałych współczynnikach są one takie same jak uzyskane przy pomocy innych metod [1, 3]. Przyjmując, że $\omega = 2, 3$ i postępując w sposób przedstawiony powyżej otrzymujemy inne rozwiązania równania Mathieu. Metoda ta wydaje się być mniej skomplikowana w zastosowaniu w porównaniu z metodami klasycznymi.

W wielu zagadnieniach pojawiają się nieliniowe równania Mathieu. W tym przypadku metoda przedstawiona powyżej wyraźniej uwypukla swoje zalety. Wyznaczenie rozwiązania i obszarów stateczności jest dużo łatwiejsze w porównaniu z innymi metodami.

Jako przykład rozważmy nieliniowe równanie Mathieu postaci:

$$(34) \quad \ddot{z} + (a - 2q \cos 2t)z + \mu z^3 = 0.$$

Podstawiając,

$$(35) \quad \mu = qb,$$

$$(36) \quad a = \omega^2 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots$$

do równania (34) otrzymujemy:

$$(37) \quad \ddot{z} + (\omega^2 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots - 2q \cos 2t)z + qb z^3 = 0.$$

Równanie różniczkowe na funkcje wrażliwości pierwszego rzędu dla parametru q jest postaci:

$$(38) \quad \ddot{w} + (\omega^2 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots - 2q \cos 2t)w + 3qbz^2 w = -a_1 z - 2a_2 q z + 2 \cos 2t \cdot z - \\ - bz^3 - \dots$$

Równanie różniczkowe na funkcje wrażliwości rzędu drugiego dla parametru q przybiera postać:

$$(39) \quad \ddot{w}_2 + (\omega^2 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots - 2q \cos 2t)w_2 + 3qbz^2 w_2 + 6qbz w^2 = -2a_1 w - 2a_2 q w + \\ + 4w \cos 2t - 6bz^2 w - 2a_2 z - 2a_2 q w - \dots$$

Przyjmujemy, że $q = 0$ i $\omega = 1$. Wtedy równania (39), (38), (37) są postaci:

$$(40) \quad \ddot{z}_0 + z_0 = 0$$

$$(41) \quad \ddot{w}_1 + w_1 = -a_1 z_0 - b z_0^3 + 2z_0 \cos 2t,$$

$$(42) \quad \ddot{w}_{20} = w_{20} = 2(-a_1 w_1 + 2w_1 \cos 2t - a_2 z_0 - 3b z_0^2 w_1).$$

Rozwiązanie równania (40) jest postaci:

$$(43) \quad z_0(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Podstawiając (43) do równania (41) oraz usuwając wyrazy sekularne otrzymujemy dwa warunki:

I.

$$(44) \quad a_{1c} = 1 - \frac{3}{4} C_2^2 b \quad \text{i} \quad C_1 = 0$$

II.

$$(45) \quad a_{1s} = -1 - \frac{3}{4} C_1^2 b \quad \text{i} \quad C_2 = 0$$

Rozwiązanie równania (41) po usunięciu wyrazów wiekowych jest postaci:

$$(46) \quad w_1(t) = -\frac{1}{8} \left(C_1^3 + \frac{1}{4} C_1^3 b - \frac{3}{4} C_2^2 C_1 b \right) \sin 3t - \frac{1}{8} \left(C_2 + \frac{3}{4} C_1^2 C_2 b - \frac{1}{4} C_2^3 b \right) \cos 3t$$

Usuwając wyrazy wiekowe w równaniu (42) po podstawieniu do niego (43) i (46) otrzymujemy warunki:

I.

$$(47) \quad a_{2c} = -\frac{1}{8} + \frac{4}{32} C_2^2 b + \frac{3}{128} C_2^4 b^2 \quad \text{i} \quad C_1 = 0,$$

II.

$$(48) \quad a_{2s} = -\frac{1}{8} - \frac{4}{32} C_1^2 b - \frac{3}{138} C_1^4 b^2 \quad \text{i} \quad C_2 = 0.$$

Ograniczając się do funkcji wrażliwości drugiego rzędu oraz uwzględniając warunki (48), (47), (45), (44) otrzymujemy dwa przypadki rozwiązania okresowego nieliniowego równania Mathieu (34),

I.

$$(49) \quad z(t) = C_2 \cos t - \frac{1}{8} C_2 q \cos 3t + \frac{1}{32} C_2^3 b q \cos 3t + \frac{1}{64} C_2 q^2 \cos 3t - \\ - \frac{1}{128} C_2^3 q^2 \cos 3t + \frac{3}{1024} C_2^5 b^2 q^2 \cos 3t - \frac{1}{192} C_2 q^2 \cos 5t + \\ + \frac{1}{192} C_2^3 b q^2 \cos 5t - \frac{3}{3072} C_2^5 b^2 q^2 \cos 5t + \dots$$

przy czym,

$$(50) \quad a_c = 1 + q - \frac{3}{4} C_2^2 b q - \frac{1}{8} q^2 + \frac{1}{8} C_2^2 b q^2 + \frac{3}{128} b^2 C_2^4 q^2 + \dots$$

II.

$$(51) \quad z(t) = C_1 \sin t - \frac{1}{8} C_1 q \sin 3t - \frac{1}{32} C_1^3 q b \sin 3t + \frac{1}{64} C_1 q^2 \sin 3t - \\ - \frac{1}{128} C_1^3 b q^2 \sin 3t - \frac{3}{1024} C_1^5 b^2 q^2 \sin 3t + \frac{1}{192} C_1 q^2 \sin 5t + \\ + \frac{1}{192} C_1^3 b q^2 \sin 5t + \frac{3}{3072} C_1^5 b^2 q^2 \sin 5t + \dots$$

przy czym,

$$(52) \quad a_s = 1 - q - \frac{3}{4} C_1^2 b q - \frac{1}{8} q^2 - \frac{1}{8} C_1^2 b q^2 - \frac{3}{128} C_1^2 b^2 q^2 + \dots$$

Wyniki uzyskane przy pomocy proponowanej metody zgadzają się z wynikami uzyskanymi przy pomocy innych metod np.: (4).

Efektywność proponowanej metody jest tym większa im bardziej skomplikowana jest postać funkcji nieliniowej występującej w rozważanym równaniu. Metoda ta pozwala na uniknięcie bardzo kłopotliwego podnoszenia szeregu potęgowego do potęgi w jakiej występuje nieliniowość w równaniu, a przy bardziej skomplikowanych nieliniowościach do uniknięcia mnożenia szeregów potęgowych wcześniej podnoszonych do określonych potęg.

Literatura cytowana w tekście

1. E. GOŁOSKOKOW, A. FILIPOPOW, *Niestacjonarnyje kolebania mechaniczeskich sistem* „Naukowa Dumka” Kijów 1966.
2. R. GUTOWSKI, B. RADZISZEWSKI, A. OLAS, *Stateczność i wrażliwość w układach mechanicznych*. Ossolineum 1978.
3. W. JAKUBOWSKI, W. STARŻYŃSKI, *Liniejnyje differencjalnyje urawnienia s pieriodiczeskimi koeficientami i ich priloženija*. Iz. „Nauka” Moskwa 1972.
4. J. MITROPOLSKIJ, J. KOZUBOWSKAJA, *O wlijanij nieliniejnosti na zony ustojczivosti dlja urawnienija Mathieu*. Сб. „Analiticeskije metody issledowanija nieliniejnych kolebanij” Kijew 1980.
5. R. TOMOWICZ, M. VUKOBRAHOWICZ, *Obszczaja teorija czuwstwitielnosti*. Iz. „Sowietskoje Radio” Moskwa 1972.

Р е з ю м е

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ К МЕХАНИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ ОПИСЫВАЕМЫМ ЛИНЕЙНЫМИ И НЕЛИНЕЙНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ МАТЬЕ

В работе представлено метод определения зон уптойчивости для линейных и нелинейных уравнений Матье при использовании методов анализа чувствительности — функции чувствительности на введение нелинейных членов в дифференциальные уравнения.

S u m m a r y

METHOD OF SENSITIVITY ANALYSIS APPLIED TO MECHANICAL SYSTEMS GOVERNED BY LINEAR AND NONLINEAR MATHIEU EQUATIONS

The method of determination of the regions of parametric instability in linear and nonlinear Mathieu equations has been presented by applying the sensitivity analysis, the sensitivity function has been used to introduce non-linear terms into differential equations.

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1982 roku

PARAMETRY FUNKCJI OPISUJĄCYCH RELAKSACJĘ NAPRĘŻEŃ JAKO WSKAŹNIKI USZKODZENIA STRUKTURY MATERIAŁU

G. MILEWSKI,
W. RYCHWAŁSKI

*Institut Mechaniki
i Podstaw Konstrukcji
Maszyn Politechniki Krakowskiej*

1. Wstęp

„Aktualny stan badań w dziedzinie fizyki polimerów wskazuje na konieczność podejmowania prac eksperymentalnych i teoretycznych poświęconych wyjaśnianiu mechanizmu degradacji polimerów, który jest praktycznie nieznanym, a także niszczeniu polimerów w warunkach naprężeń mechanicznych. Do bardzo aktualnych zagadnień należy badanie zmian własności tworzyw w szczególnie trudnych warunkach użytkowania” [1].

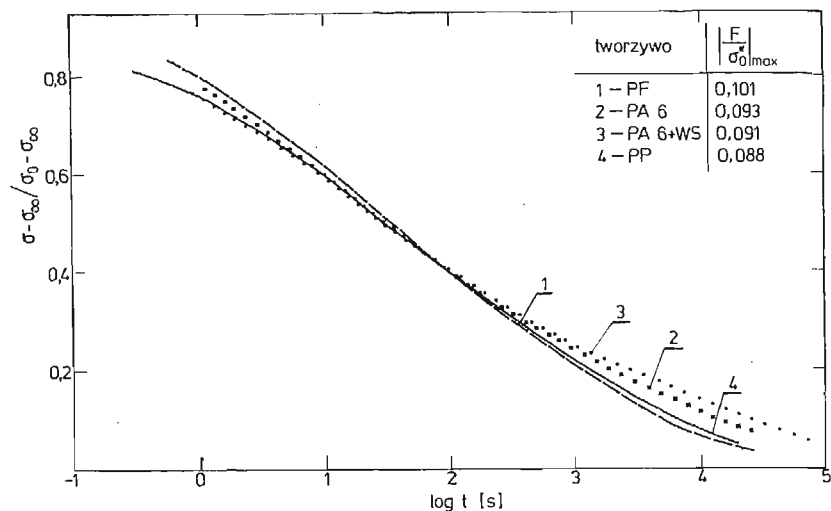
W ostatnich latach, w scharakteryzowanym zakresie, podejmowane były badania dla ustalenia jakie wielkości opisują uszkodzenie struktury wynikające z przenoszenia obciążeń [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Zbadano takie wielkości jak: temperaturę samowzbudną, dynamiczne wielkości mechaniczne, propagowanie się szczeliny, wielkości dielektryczne, wytrzymałość, itp. Badania te dotyczą przede wszystkim obciążeń długotrwałych, wielokrotnie zmiennych.

Celem pracy jest wskazanie na możliwość wykorzystania parametrów występujących w opisach relaksacji naprężeń jako wskaźników uszkodzenia struktury materiału.

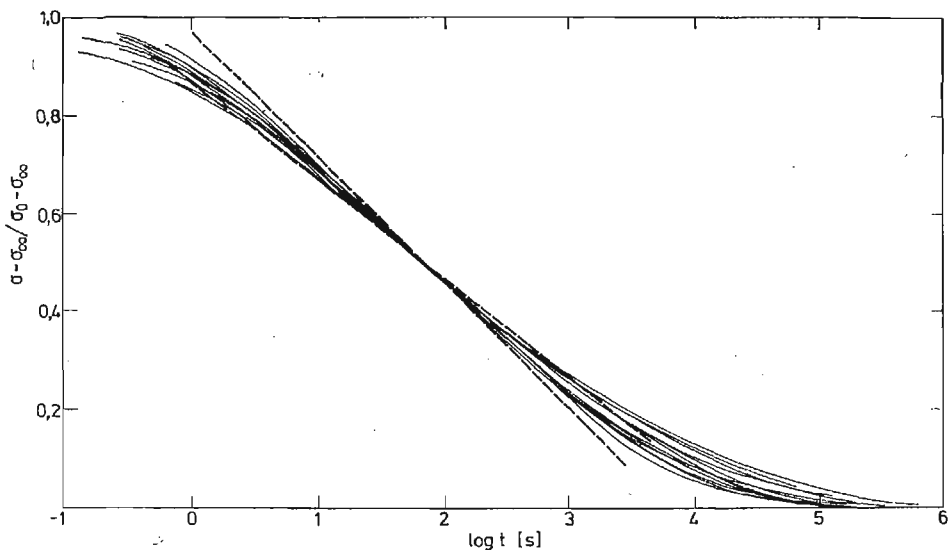
2. Relaksacja naprężeń przy jednoosiowym rozciąganiu jako proces uniwersalny

Jak wynika z badań prostej ($\epsilon = \text{const}$) relaksacji naprężeń przy jednoosiowym rozciąganiu, dla wielu metalicznych i niemetalicznych materiałów konstrukcyjnych, przebieg jest podobny.

Na rysunkach 1 i 2 pokazano odpowiednio: krzywe doświadczalne uzyskane w Laboratorium Instytutu Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Krakowskiej dla poliformaldehydu, poliamidu 6, poliamidu 6 wzmocnionego krótkociętym włóknem szklanym i dla polipropylenu oraz krzywe uzyskane w innych ośrodkach (głównie Laboratorium Instytutu Materiałów Konstrukcyjnych II, Uniwersytetu Technicznego w Göteborgu) dla następujących materiałów: miedź, ind, molibden, kadm, stop Lipowitza, fluorek litu, wysoko i niskociśnieniowy polietylen, poliizobutylen, celuloza, alkohol cetylowy, szkło żaroodporne. Jak z powyższego wynika charakterystyczną cechą krzywych



Rys. 1. Relaksacja naprężeń dla poliformaldehydu, poliamidu 6, poliamidu 6 wzmocnionego krótkociętym włóknem szklanym, polipropylenu (próby przeprowadzono w Laboratorium IMiPKM PK).



Rys. 2. Relaksacja naprężeń dla szeregu materiałów metalicznych i niemetalicznych (próby przeprowadzono w CTH w Göteborgu). Na rysunku liniami przerywanymi zaznaczono uzyskiwane maksymalne i minimalne nachylenia najbardziej stromej części krzywej.

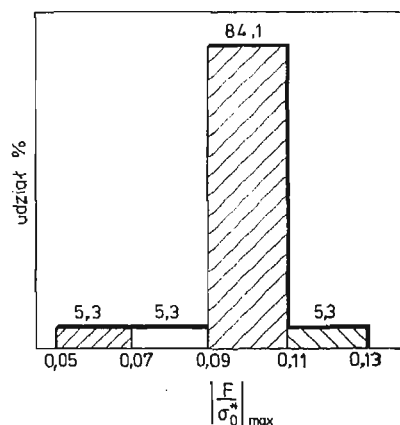
doświadczalnych jest niemal jednakowe nachylenie (w układzie współrzędnych $\sigma^*/\sigma_0^* vs \lg t$) najbardziej stromej części krzywej relaksacji wynoszące: $\left| \frac{F}{\sigma_0^*} \right|_{\max} = 0,1 \pm 0,01$, gdzie $F = \frac{d\sigma^*}{d(\ln t)}$, natomiast $\sigma_0^* = \sigma_0 - \sigma_\infty$ i $\sigma^* = \sigma - \sigma_\infty$ oznaczają odpowiednio efektywne naprężenia początkowe i bieżące (σ_∞ — naprężenie równowagowe jakie się ustala po

dostatecznie długim czasie). Prawidłowość ta została opublikowana przez J. Kubata w pracy [11]. Na rysunku 2 liniami przerywanymi zaznaczono graniczne wartości uzyskiwanych

nachyleń $\left(0,09 \leq \left| \frac{F}{\sigma_0^*} \right|_{\max} \leq 0,11 \right)$.

Z wszystkich znanych autorom przebiegów relaksacji naprężeń odstępstwa od powyższej prawidłowości wykazują jedynie: ołów (0,119), stal Cr—Mo—W (0,081), polimetaakrylan metylu (0,063).

Histogram dla całej wymienionej populacji przedstawia się jak na rys. 3.



Rys. 3 Udział procentowy różnych nachyleń w zbadanej populacji tworzyw konstrukcyjnych.

3. Modele relaksacji naprężeń

Dla scharakteryzowania przydatności różnych modeli opisujących relaksację naprężeń dla celu postawionego w tej pracy, kierowano się sensem fizykalnym modelu i spełnieniem przez model, omówionego w rozdziale 2, charakterystycznego nachylenia.

I tak:

- proste modele mechaniczne: wykazują zbyt duże nachylenie, nie opisują rzeczywistych przebiegów, mają bardzo uproszczone podstawy fizykalne,
- uogólnione modele mechaniczne: praktycznie stosowane przy schematyzacji dystrybucji czasów relaksacji rozkładem prostokątnym lub gaussowskim, podstawy fizykalne podobnie jak modele poprzednie,
- model potęgowy (Nortona-Bailey'a): w zasadzie dobrze opisują tylko końcową część krzywej relaksacji tj. dla bardzo długich czasów. Stanowi to poważne utrudnienie w praktycznym używaniu tego opisu dla celu wyszczególnionego w tytule pracy.

Modelami natomiast użytecznymi dla badania zniszczenia struktury, poprzez parametry opisujące relaksację, są modele eksponencjalne i kooperatywne.

3.1 Model eksponencjalny. Jest to model, który dobrze opisuje wysoko i średnionaprężeniowy (w stosunku do naprężenia początkowego) zakres relaksacji.

Prawo eksponencjalne opisuje reologiczne zachowanie się defektów krystalicznych ciał stałych, a także płynięcie segmentów makromolekuł w polimerach. Może więc to prawo być stosowane w przypadku relaksacji i naprężeń zarówno w metalach, jak i tworzywach sztucznych. Prawo eksponencjalne jest konsekwencją teorii termicznej aktywacji, czy też termicznej aktywacji wspomaganej naprężeniowo. Procesy te są opisywane równaniem Arrheniusa:

$$(3.1) \quad \dot{\sigma} = -A \exp(-\Delta G/kT),$$

gdzie:

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} \text{ oznacza prędkość relaksacji,}$$

$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ oznacza swobodną energię Gibbsa,

ΔH — energię aktywacji, T — temperaturę, ΔS — entropię aktywacji,

k — oznacza stałą Boltzmanna, A — współczynnik.

Normalnie zakłada się, że energia występująca w równaniu (3.1) zmienia się liniowo z naprężeniem efektywnym i wówczas:

$$(3.2) \quad \dot{\sigma} = -B \exp\left(\frac{v\sigma^*}{kT}\right),$$

gdzie: v — oznacza objętość aktywacji, opisuje zależność energii od naprężenia (w fizyce ciała stałego określa się tę objętość jako iloczyn powierzchni tworzącej się przy uruchamianiu się dyslokacji w zdarzeniu elementarnym i wektora Burgersa [15]).

Zakładając, że „jednostki płynące” mogą przekraczać barierę potencjału w obu kierunkach, wówczas równanie (3.2) należy zapisać:

$$(3.3) \quad \dot{\sigma} = -b \sinh(v\sigma^*/kT), \text{ — równanie Eyringa.}$$

Innym zapisem tutaj stosowanym jest:

$$(3.4) \quad \dot{\sigma} = -b \left(e^{\frac{v\sigma^*}{kT}} - 1 \right), \text{ — równanie Kubata.}$$

Wykorzystując w obu ostatnich równaniach zależność:

$$(3.5) \quad \frac{1}{F} = \frac{v}{kT},$$

gdzie: $F = \frac{d\sigma^*}{d(\ln t)}$, oznacza nachylenie stycznej do krzywej relaksacji w układzie współrzędnych $\sigma^*vs \ln t$,

otrzymamy ostatecznie następujące, często stosowane, zapisy dla relaksacji naprężeń w wysoko i średnionaprężeniowym zakresie:

$$(3.6) \quad \dot{\sigma} = -b \sinh\left(\frac{\sigma^*}{F}\right),$$

oraz

$$(3.7) \quad \dot{\sigma} = -b \left(e^{\frac{\sigma^*}{F}} - 1 \right).$$

Występujący w obu równaniach parametr F oznaczający charakterystyczne nachylenie lub pozostający z nim w związku parametr v oznaczający objętość aktywacji wykorzystamy jako wskaźnik uszkodzenia struktury badanego materiału.

Należy tu podkreślić, że parametr v nie jest stały dla całego procesu relaksacji. Dla końcowej części relaksacji naprężeń, gdzie nie można dobrze opisywać przebiegu modelem eksponencjalnym, a trzeba stosować model potęgowy, parametr v zmienia się z naprężeniem. Dlatego też parametr v będziemy badać i porównywać tylko w zakresie eksponencjalnym, gdzie nachylenie F pozostaje niemal stałe. Należy także dodać, że istnieje możliwość wykorzystania, dla większości materiałów, następującego równania dla obliczania v :

$$(3.8) \quad \left. \frac{F}{\sigma_0^*} \right|_{\max} = 0,1 \pm 0,01 = \frac{kT}{v\sigma_0^*},$$

skąd otrzymujemy:

$$(3.9) \quad v = (10 \pm 1)kT \cdot \frac{1}{\sigma_0^*}.$$

3.2. Model kooperatywny. Wobec stwierdzonego dużego podobieństwa w przebiegu relaksacji naprężeń w ciałach stałych o różnej budowie i składzie wydaje się, że istnieje potrzeba budowania modeli na bazie teorii niezależnej od specyfiki materiału. W takiej sytuacji użyteczna jest teoria kooperacji.

Zakłada się, że w materiale można zidentyfikować tzw. jednostki płynące. Mogą nimi być zespoły atomów, dyslokacji, defektów, molekuł, fononów, itp. Istota kooperacji polega na współoddziaływaniu, poprzez energię kooperatywną, sąsiednich jednostek będących w różnych stanach relaksacji. Prawdopodobieństwo, że pojedyncza jednostka, która nie kooperuje z sąsiednimi jednostkami, pokona barierę potencjalną w czasie t jest proporcjonalne do $e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdzie τ jest czasem relaksacji pojedynczej jednostki.

W trakcie jednak gdy pojedyncza jednostka „przeskakuje” barierę energetyczną może zaindukować podobne zdarzenie dla sąsiedniej jednostki. Nastąpi zatem podwójnie sprzężony proces, a czas relaksacji wyniesie $\frac{\tau}{2}$. Podobnie, czas relaksacji dla s — sprzężonego procesu, wyniesie $\frac{\tau}{s}$. Jest oczywiste także, że jednostka płynąca może uczestniczyć w procesie relaksacji wielokrotnie lub też może zostać zablokowana.

Pierwszą pracą, która ujęła zderzenia molekularne w myśl teorii kooperacji była praca Gilmana [12]. Były też inne próby formułowania teorii płynięcia jako zjawisko kooperatywne. Wymienić tu należy prace: Gotliba, Ptitsyna, Adama, Borodina, Sharanova, Bohlina i innych. Wszystkie te prace pochodzą z lat 70-tych. Ostatnimi pracami (brał w nich udział także autor) są prace kierowane przez J. Kubátę z CTH w Göteborgu. Model ten zakłada, że za efekt kooperatywny odpowiedzialne są fonony, a samo zjawisko kooperacji jest realizowane tylko w jednym kierunku, tj. takim jak kierunek przepływu fononów. Kinetyka procesu relaksacji jest rozumiana jako przejście (zbliżenie) do pewnego ustalonego stanu. Model bazuje na statystycznym rozkładzie Bosego-Einsteina. Fonony podlegają temu rozkładowi, gdyż zachowują się jak cząstki Bosego, jako że dowolna ich ilość może przebywać w tym samym stanie.

W oparciu o powyższe wyprowadzona została formuła kooperatywnego ujęcia procesu relaksacji, tzw. ψ — model (od funkcji digamma Eulera):

$$(3.10) \quad -w\kappa\sigma = \frac{1}{\beta} \left[\psi \left(1 + \frac{wt}{\beta} \right) - \psi \left(\frac{1}{\beta} + \frac{wt}{\beta} \right) \right],$$

gdzie:

$$w = \frac{1}{\tau},$$

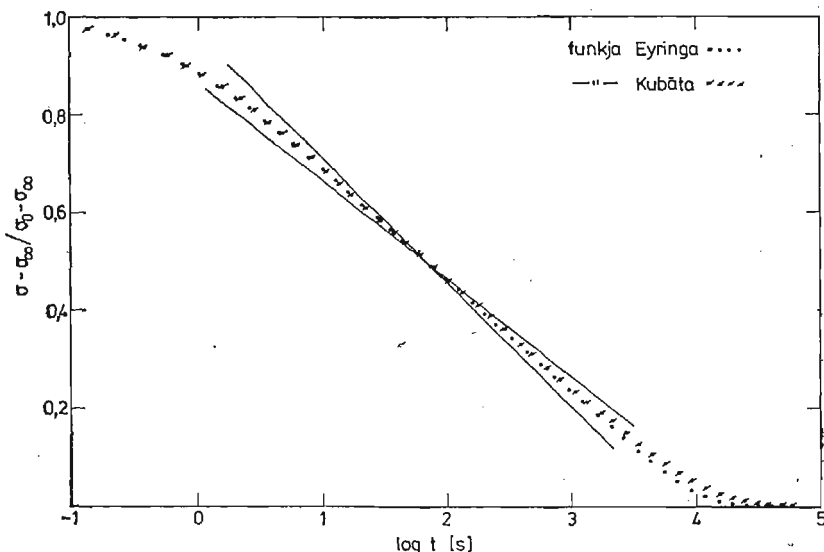
$$\beta = \sqrt{-\frac{\pi^2}{6\kappa\sigma_0}},$$

oznaczają parametry.

Występujący tu parametr β lub pozostający z nim w związku parametr $(-\kappa\sigma_0)$ oznaczający liczbę fononów uderzających cząsteczkę podczas czasu koherencji dla $t = 0$, wykorzystamy jako wskaźnik uszkodzenia struktury badanego materiału.

3.3. Opis krzywych doświadczalnych modelami eksponencjalnymi i kooperatywnymi. Na rys. 4 i 5 przedstawiono przebieg opisów Eyringa, Kubãta i ψ . Liniami ciãgłymi zaznaczono graniczne nachylenia $\left| \frac{F}{\sigma_0^*} \right|_{\max}$. Zdecydowana wiãkszość przebiegów relaksacji mieści siã w zakresie ograniczonym tymi liniami, tj. pomiãdzy 0,09 i 0,11.

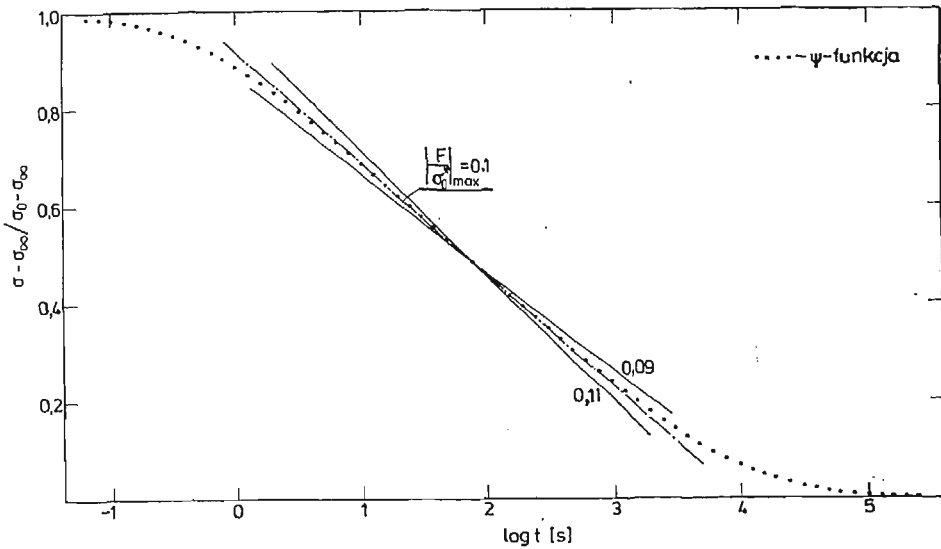
Jak wynika z rys. 4 i 5 zastosowane modele dobrze opisujã przebieg relaksacji naprãżeń.



Rys. 4. Relaksacja naprãżeń dla modeli eksponencjalnych Eyringa i Kubãta.

4. Doœwiadczenie

Jak wiadomo zmiany w strukturze mogã byã wywoãane rãżnymi dziaãaniami fizykochemicznymi. W niniejszych badaniach ograniczono siã wyããcznie do zmiany struktury wywoãanej mechanicznie (quasistatycznym rozciãganiem).

Rys. 5. Relaksacja naprężeń dla kooperatywnego modelu Ψ .

Polipropylen jest jednym z tworzyw, w którym zniszczenie mechaniczne struktury można zaobserwować w postaci powstania siatki mikropęknięć po przekroczeniu pewnego granicznego naprężenia R_v .

Dla zbadania wpływu zniszczenia struktury na zmianę parametru opisującego relaksację, rozpoznano na podstawie literatury [13], jaki wpływ mają inne warunki próby relaksacji, a to: wartość naprężenia początkowego σ_0 , temperatura T , prędkość rozciągania do stałego odkształcenia $\dot{\epsilon}$.

I tak, poziom naprężenia σ_0 wpływa jedynie na położenie krzywej relaksacji, tzn. przesuwa ją równolegle wzdłuż osi czasu; im mniejszy jest poziom naprężenia początkowego tym dalej, w stronę dłuższych czasów, przesuwa się krzywa relaksacji naprężeń. Podobny wpływ ma temperatura T . Obie te wielkości wpływają więc tylko na parametr „ b ” oraz „ w ”, nie zmieniając parametru „ v ” i „ $(-\kappa\dot{\sigma}_0)$ ”. Prędkość odkształcenia ϵ ma minimalny wpływ na parametry „ v ” i „ $(-\kappa\dot{\sigma}_0)$ ”. Nachylenie $\left. \frac{F}{\sigma_0^*} \right|_{\max}$ w miejscu największej stromizny wzrasta o około 30% dopiero przy 10^4 -krotnym wzroście prędkości odkształcenia.

Próby relaksacji przeprowadzono na maszynie wytrzymałościowej „Instron”. Stosowano zakresy pomiarowe sił 100 i 200 kG przy dokładności wskazań $\pm 0,5$. Prędkość rozciągania była dla wszystkich prób jednakowa i wynosiła 10 cm/min. Komora termiczna zapewniła ustaloną temperaturę $26^\circ\text{C} \pm 1^\circ\text{C}$; wilgotność była niekontrolowana.

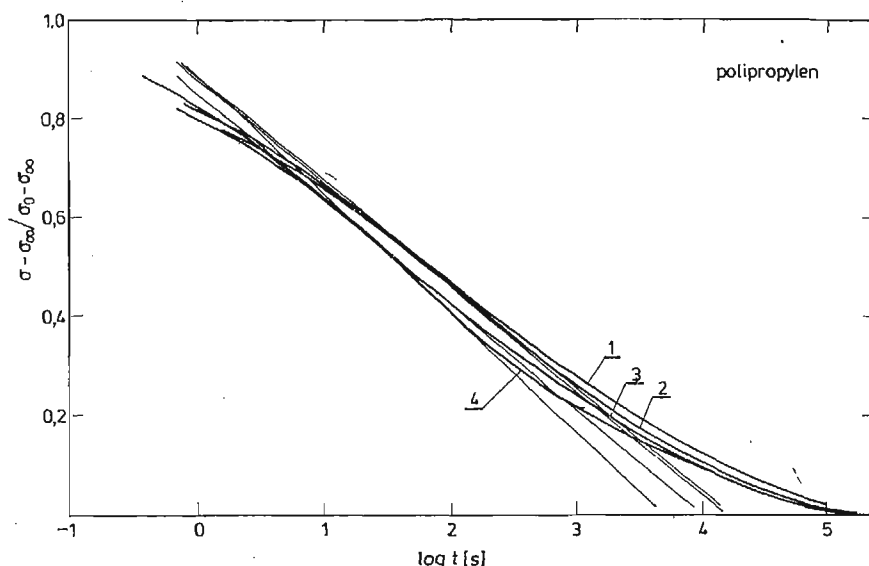
Dla pierwszych 100 s pomiaru stosowano prędkość przesuwu papieru 30 cm/min, następnie do 20 minut 3 cm/min. Pozostała część krzywej relaksacji była rejestrowana, bądź przy prędkości przesuwu papieru 0,333 cm/min, bądź odczytywano poziom siły notując czas odczytu (przy zatrzymanym przesuwie papieru).

W doświadczeniu użyte zostały próbki typ II do statycznej próby rozciągania wg PN,

wykonane w Zakładach Azotowych w Tarnowie przy parametrach wtrysku normalnie stosowanych dla tego typu tworzywa.

Siatka mikropęknięć w materiale była wprowadzana w wyniku 3-krotnego rozciągnięcia do naprężenia R_v . Wyrzewanie i odpuszczanie przeprowadzano w komorze termicznej w temperaturze 85°C przez 24 h i prędkości schładzania 8°C/h . Część prób relaksacji była przeprowadzana bezpośrednio po wprowadzeniu siatki mikropęknięć, część natomiast po 5 dobach.

Na rys. 6 i w tabl. 1 pokazano wyniki badań. Naprężenie równowagowe σ_∞ wyznaczone



Rys. 6. Zmiana maksymalnego nachylenia $\left| \frac{F}{\sigma_0^*} \right|_{\max}$ w zależności od stanu mechanicznego zniszczenia struktury dla polipropylenu.

Tabl. 1. Wpływ uszkodzenia struktury materiału na wartość parametrów funkcji opisujących relaksację naprężeń (dla PP)

Nr krzywej	Stan polipropylenu	v $\left[\frac{\text{J}}{\text{MPa}} \right]$	$(-\kappa \dot{\sigma}_0)$	σ_0 [MPa]	σ_∞ [MPa]
1	dziewiczy	0,0928 kT	$9,549 \cdot 10^8$	18,3	6,1
2	z mikropęknięciami, odpuszczony w temp. 85°C , próba relaksacji po 120 h	0,0915 kT	$9,120 \cdot 10^8$	21,0	8,7
3	z mikropęknięciami, nieodpuszczony, próba relaksacji po 120 h	0,073 kT	$7,943 \cdot 10^8$	20,6	7,0
4	z mikropęknięciami, próba relaksacji bezpośrednio po wprowadzeniu mikropęknięć	0,0464 kT	$2,511 \cdot 10^8$	32,6	11,1

Errata

Strona 167 zeszyt 1—2 tom 20 w druku został pominięty tytuł i nazwisko Autora: powinno być:

List do Redakcji

O PEWNYCH ROZWIĄZANIACH RÓWNIANIA DYFUZJI W PRZESTRZENI DYSTRYBUCJI

J. WACŁAWIK



było dla odpowiednio dużych czasów (asymptotyczne zmierzanie do ustalonej wartości), bądź metodą Li [14].

5. Wnioski

Na przykładzie dwu wybranych modeli (teorii) relaksacji naprężeń, eksponencjalnego i kooperatywnego pokazano, że w każdym z tych modeli jeden z parametrów występujących w opisie relaksacji może służyć jako deskryptor, wywołanego przez naprężenie, uszkodzenia materiału. Spośród wielu modeli przyjmowanych do opisu relaksacji naprężeń nie wszystkie mogą temu celowi służyć. Modele, które nie opisują najbardziej stromej części krzywej relaksacji w układzie półlogarytmicznym lub nie posiadają podstaw fizycznych odnoszących się do struktury nie mogą tutaj być użyte. Jako przykładowego materiału doświadczalnego użyto polipropylenu. Parametr v (objętość aktywacji), czy też parametr $(-\kappa\dot{\sigma}_0)$ (liczba fononów uderzających cząsteczkę podczas czasu koherencji dla $t = 0$) wyraźnie zależą od stanu zniszczenia struktury polipropylenu.

Literatura cytowana w tekście

1. M. KRYSZEWSKI, *Fizyka polimerów*, II Kongres Nauki Polskiej.
2. J. P. BAREŠIS, A. V. STINSKAS, *Upročene poliamida pri cikličeskom nagruženju*, *Mechanika polimerov* nr 5, 1973.
3. A. J. GOLDMAN, E. G. MATJUŠIN, V. N. ZAHAROV, *K issledovanju ustalostnyh svoystv žestkich polimerov primenyaemyh v konstrukcyach valnovych peredač*, *Mechanika polimerov* nr 6, 1970.
4. J. KALWAK, E. ŚWIĄTEK, J. ZAWADZKI, *Doraźne i zmęczeniowe charakterystyki wytrzymałościowe wybranych polimerów*, *Prace Naukowe Instytutu Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej Politechniki Wrocławskiej*, 14/1973.
5. V. A. KARGIN, G. ŚLONIMSKII, *O mechanizmye utomlenya polimerov*, *Dokl. AN SSSR*, t. 105, nr 4, 1955.
6. S. B. RATNER, *O kryteriach samorozgrzewania i zlonu tworzyw termoplastycznych przy cyklicznych obciążeniach*, *Prace Naukowe Inst. Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej Politechniki Wrocławskiej*, ns 20/1974.
7. S. ZBROJA, *Wskaźniki zmęczenia tworzyw sztucznych*, *Zagadnienia Tarcia, Zużycia i Smarowania*, zeszyt 7/1974.
8. S. ZIEMBA, B. RYSIŃSKI, *Badanie uszkodzenia materiału w procesie zmęczenia na podstawie zmian własności dynamicznych*, *Prace IPPT PAN* 23/1973.
9. W. RYCHWAŁSKI, *Zmiany dynamiczne własności mechanicznych PA 6 w procesie zmęczenia*, *Praca doktorska*, Politechnika Krakowska, 1979.
10. W. KARMOWSKI, A. LITAK, *Zmiany odporności na pękanie w procesie zmęczenia dla wybranych termoplastów*, *Materiały Konf. Met. Badań Odporności na Pękanie (org. przez PAN i PG)*, Wisła 1979.
11. J. KUBÀT, *A similarity of stress relaxation behaviour of high polymers and metals*, *Praca doktorska*, Stockholm 1965.
12. J. J. GILMAN, A. S. ARGON, *Physics of strength and plasticity*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass. 3, 1969.
13. J. KUBÀT, R. SELDÈN, M. RIGDAHL, *Influence of strain rate on the stress relaxation behaviour of polyethylene and cadmium*, *Materials Science and Engineering*, 34/1978.
14. J. C. M. II, *A method for describing internal stresses in materials*, *Can. J. Phys.* 45, 493, 1967.
15. R. SELDÈN, *Internal stresses and activation volumes in stress relaxation of polyethylene and other solids*, *Praca doktorska*, CTH Göteborg 1979.

Summary

PARAMETERS OF FUNCTIONS DESCRIBING STRESS RELAXATION AS INDICATORS OF A STRUCTURE DAMAGE

On the basis of exponential and cooperative rheological models it has been shown that the parameters appearing in these models when describing the stress relaxation are good indicators of a structure damage. As an example the stress relaxation in tensile uniaxial state in polypropylene has been used. The stress relaxation descriptions realized by different models (also newly introduced cooperative models) in metallic and nonmetallic materials has been compared.

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 lipca 1981 roku

ZASTOSOWANIE PÓLBEZMOMENTOWEJ TEORII POWŁOK
W OBLICZENIACH STATYCZNYCH ORTOTROPOWYCH
LINIOWO-SPRĘŻYSTYCH PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH
PRYZMATYCZNYCH O PRZEKROJU WIELOBWODOWYM
ZAMKNIĘTYM

ZENON GÓRECKI

Politechnika Gdańska

1. Wstęp

Badania nad zastosowaniem funkcji kształtu do obliczeń statycznych prętów cienkościennych o zamkniętym profilu zapoczątkował W. Z. WŁASOW w latach trzydziestych naszego wieku [9]. Podstawą Jego ogólnej teorii pryzmatycznych i cylindrycznych konstrukcji cienkościennych składających się z płyt i powłok jest zaproponowana w 1931 roku metoda wariacyjna umożliwiająca sprowadzać złożone równania różniczkowe cząstkowe opisujące zachowanie się tego typu konstrukcji do równań różniczkowych zwyczajnych.

Teoria ta znajduje różnorodne zastosowanie, a szczególnie w lotnictwie [2], [7]. W końcu lat sześćdziesiątych pojawiają się prace gdzie zastosowano teorię powłok Własowa do obliczeń statków i doków pływających [1].

Począwszy od 1974 roku w Instytucie Okrętowym Politechniki Gdańskiej prowadzone są prace nad zastosowaniem półbezmomentowej teorii powłok do obliczeń kadłubów statków bezgrodziowych [4].

W niniejszej pracy przedstawiono metodę obliczania naprężeń i przemieszczeń dla prętów pryzmatycznych cienkościennych o przekrojach składających się z dowolnej ilości wielokątów dowolnego kształtu.

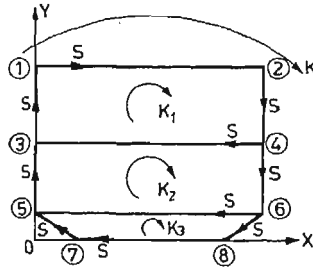
Zdaniem autora nowością jest rozszerzenie teorii do obliczeń konstrukcji wykonanych z materiałów ortotropowych oraz przystosowanie teorii do prowadzenia obliczeń na EMC.

2. Założenia półbezmomentowej teorii powłok

W ramach teorii półbezmomentowej poprzeczny przekrój np. kadłuba statku jest zastąpiony przekrojem cienkościennym wielobwodowym odcinkami prostym. Przekrój jest wyznaczony przez podanie współrzędnych (x, y) punktów załamania w dowolnym kartezjańskim układzie odniesienia OXY oraz tablicy połączeń wszystkich węzłów. Ograniczymy się wyłącznie do pręta pryzmatycznego, a więc współrzędne x, y poszczególnych

węzłów są niezależne od zmiennej z . Przykład przekroju wieloobwodowego oraz jego zapis w tablicy połączeń węzłów podano na rys. 1 i w tablicy 1.

Na każdym konturze zamkniętym K_i przekroju wprowadzamy współrzędną krzywoliniową s według obiegu w prawo mierzoną po długości konturu oraz układ trzech wersorów $\bar{l}_i, \bar{n}_i, \bar{b}_i$ lewoskrętny taki, że \bar{l}_i — zgodny jest z kierunkiem wzrostu współrzędnej s , \bar{n}_i — wersor normalnej zewnętrznej do konturu, \bar{b}_i — wersor prostopadły do dwóch pozostałych i skierowany zgodnie ze skrętnością wzdłuż osi z (rys. 1).



Rys. 1

Tablica 1

współrzędna X	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
współrzędna Y	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8
Nr węzła	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0	0	0
3	1	0	0	1	1	0	0	0
4	0	1	1	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	0	1	1	0
6	0	0	0	1	1	0	0	1
7	0	0	0	0	1	0	0	1
8	0	0	0	0	0	1	1	0

Obciążenia powłoki dajemy w postaci wektora $\bar{p}(z, s)$ funkcji dwóch zmiennych z, s i rozkładamy w bazie lokalnej $\bar{l}, \bar{n}, \bar{b}$

$$(2.1) \quad \bar{p}(z, s) = p_n(z, s) \cdot \bar{n} + p_s(z, s) \cdot \bar{l} + p_b(z, s) \cdot \bar{b},$$

gdzie:

z — współrzędna wzdłuż pręta

s — współrzędna w kierunku obwodowym

Przemieszczenia powłoki dajemy w postaci wektora przemieszczenia $\bar{R}(z, s)$ funkcji dwóch zmiennych z, s i rozkładamy w bazie lokalnej $\bar{n}, \bar{l}, \bar{b}$

$$(2.2) \quad \bar{R}(z, s) = u(z, s) \cdot \bar{b} + v(z, s) \cdot \bar{l} + w(z, s) \cdot \bar{n}.$$

2.1. Postulat deformacji i naprężenia w powłoce. Rozpatrujemy pręt pryzmatyczny cienkościenny posiadający w przekroju skończoną liczbę zamkniętych konturów (rys. 1). Na

przemieszczenia nakładamy więzy postulujące, że współrzędne wektora przemieszczenia wyrazić można w formie sum iloczynów dwóch funkcji o zmiennych rozdzielonych

$$(2.3.1) \quad u(z, s) = \sum_{i=1}^n U_i(z) \cdot \varphi_i(s),$$

$$(2.3.2) \quad v(z, s) = \sum_{k=1}^m V_k(z) \cdot \psi_k(s),$$

$$(2.3.3) \quad w(z, s) = \sum_{l=1}^r W_l(z) \cdot \chi_l(s),$$

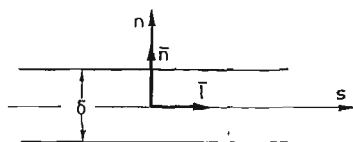
w których funkcje zmiennej z : $U_i(z)$, $V_k(z)$, $W_l(z)$ są funkcjami poszukiwanymi, zaś funkcje współrzędnej obwodowej s : $\varphi_i(s)$, $\psi_k(s)$, $\chi_l(s)$ stanowią bazy w których rozłożone są przemieszczenia $u(z, s)$, $v(z, s)$, $w(z, s)$.

Wektor przemieszczenia $\bar{R}(z, s)$ opisuje jedynie deformację powierzchni środkowej powłoki. Do opisu deformacji elementów powłoki wprowadzamy w przekroju współrzędną n normalną do s jak na rys. 2 i przyjmujemy hipotezę Kirchhoffa. Przemieszczenia elementów powłoki przedstawiamy w następującej postaci:

$$(2.4.1) \quad \check{u}(z, s, n) = u(z, s) - \frac{\partial w}{\partial z} \cdot n,$$

$$(2.4.2) \quad \check{v}(z, s, n) = v(z, s) - \frac{\partial w}{\partial s} \cdot n,$$

$$(2.4.3) \quad \check{w}(z, s, n) = w(z, s),$$



Rys. 2

gdzie: \check{u} , \check{v} , \check{w} — oznaczają przemieszczenia elementów powłoki w zależności od odległości od powierzchni środkowej.

Przyjmując zlinearyzowaną teorię i uwzględniając relacje (2.4) składowe tensory deformacji Greena-St. Venanta są:

$$(2.5.1) \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \check{u}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \cdot n,$$

$$(2.5.2) \quad \varepsilon_s = \frac{\partial \check{v}}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \cdot n,$$

$$(2.5.3) \quad \gamma_{zs} = \frac{\partial \check{u}}{\partial s} + \frac{\partial \check{v}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} - 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} \cdot n,$$

$$(2.5.4) \quad \varepsilon_n = \frac{\partial \check{w}}{\partial n} = 0,$$

$$(2.5.5) \quad \gamma_{ns} = \frac{\partial \check{w}}{\partial s} + \frac{\partial \check{v}}{\partial n} = 0,$$

$$(2.5.6) \quad \gamma_{nz} = \frac{\partial \check{w}}{\partial z} + \frac{\partial \check{u}}{\partial n} = 0.$$

Na podstawie zależności (2.5) widać, że stan deformacji w powłoce jest jedynie zależny od dwóch współrzędnych z, s .

Rozważania prowadzimy dla powłoki wykonanej z materiału sprężystego i ortotropowego o osiach ortotropii $\bar{l}, \bar{n}, \bar{b}$. Wtedy przyjmujemy związki fizyczne postaci:

$$(2.6.1) \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E_1} \sigma_z - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_s,$$

$$(2.6.2) \quad \varepsilon_s = \frac{1}{E_2} \sigma_s - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_z,$$

$$(2.6.3) \quad \gamma_{zs} = \frac{1}{G} \tau_{zs}.$$

Dla przypadku materiałów sprężystych jest:

$$(2.7) \quad \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2},$$

gdzie:

E_1, E_2 — moduły Younga

ν_{12}, ν_{21} — stałe Poissona

G — moduł ścinania (Kirchhoffa)

Relacje odwrotne do (2.6) są:

$$(2.8.1) \quad \sigma_s = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_s \nu_{12} + \varepsilon_z),$$

$$(2.8.2) \quad \sigma_z = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_z \nu_{21} + \varepsilon_s),$$

$$(2.8.3) \quad \tau_{zs} = G \gamma_{zs}.$$

Siły i momenty wewnętrzne określamy wzorami:

$$(2.9) \quad N_z = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_z dn, \quad N_s = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_s dn, \quad S = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{zs} dn,$$

$$M_s = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_s n dn, \quad M_z = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_z n dn, \quad H = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{zs} n dn$$

Podstawiając (2.5) i (2.6) do (2.9) otrzymujemy związki pomiędzy siłami i przemieszczeniami

dla sił normalnych

$$(2.10.1) \quad N_z = \frac{E_1 \delta}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial s} \right),$$

$$(2.10.2) \quad N_s = \frac{E_2 \delta}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

dla siły stycznej

$$(2.10.3) \quad S = G \delta \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

dla momentów gnących

$$(2.10.4) \quad M_s = - \frac{E_2 \delta^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right),$$

$$(2.10.5) \quad M_z = - \frac{E_1 \delta^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \nu_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right),$$

dla momentu skręcającego

$$(2.10.6) \quad H = - \frac{G \delta^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s}$$

2.2. Związki zachodzące pomiędzy siłami wewnętrznymi w półbezmomentowej teorii powłok. Równania równowagi nieskończenie małego elementu płyty przy braku obciążeń zewnętrznych powierzchniowych można wyrazić za pomocą momentów gnących i skręcających w sposób następujący ([9] s. 266)

$$(2.11) \quad \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial s} = 0.$$

Zakładając, że naprężenia normalne podłużne i naprężenia styczne są równomiernie rozłożone na grubości płyty to wtedy otrzymujemy

$$(2.12) \quad M_z = H = 0.$$

Ze związków (2.11) i (2.12) mamy

$$(2.13) \quad \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} = 0.$$

Zgodnie z otrzymanymi wynikami w półbezmomentowej teorii powłok przyjmujemy:

1. pomijamy moment skręcający ($H = 0$)
2. pomijamy moment gnący ($M_z = 0$)
3. we wzorze (2.10.4) pomijamy wyrażenie $\nu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ przyjmując

$$(2.14) \quad M = M_s = -D \frac{\partial^2 w}{\partial s^2},$$

gdzie:

$$D = \frac{E_2 \delta^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}.$$

2.3. Energia sprężysta powłoki. Energia sprężysta odkształcenia jednostki powierzchni środkowej powłoki jest

$$(2.15) \quad \Phi = \frac{1}{2} (N_z \cdot \varepsilon_z|_{n=0} + N_s \cdot \varepsilon_s|_{n=0} + S \cdot \gamma_{zs}|_{n=0} + M \cdot \varkappa|_{n=0}),$$

gdzie: $\varkappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$

Całkując wyrażenie (2.15) otrzymujemy wzór określający całkowitą energię sprężystą

$$(2.16) \quad \pi = \int_0^L \left(\oint_K \Phi ds \right) dz,$$

gdzie:

K — zamknięty kontur

L — długość powłoki

Po podstawieniu (2.15) do (2.16), wprowadzeniu oznaczeń

$$(2.17.1) \quad \check{E}_i = \frac{E_i \delta}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (i = 1, 2),$$

$$(2.17.2) \quad \check{G} = G \delta,$$

wykorzystaniu założeń półbezmomentowej teorii powłok i wykorzystaniu relacji (2.7) otrzymujemy

$$(2.18) \quad \pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\oint_K \left\{ \check{E}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \check{E}_2 \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + 2\check{E}_1 \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. + G \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 \right\} ds \right] dz.$$

Ponieważ praca sił zewnętrznych jest postaci

$$(2.19) \quad A = \int_0^L \left[\oint_K \bar{p}(z, s) \cdot \bar{R}(z, s) ds \right] dz = \int_0^L \left[\oint_K (u \cdot p_b + v \cdot p_s + w \cdot p_n) ds \right] dz,$$

całkowitą energię mechaniczną układu możemy zapisać w postaci

$$(2.20) \quad \Omega = \pi - A.$$

3. Założenia teorii ramowo-powłokowej

3.1. Siły i deformacje

- Moment gnący M_s w dowolnym przekroju ramy wyznaczamy na podstawie teorii zgięcia ramy o kształcie przekroju poprzecznego powłoki przy założeniu, że następuje tylko zginanie prętów ramy (efekt zgięcia podłużnego pomija się)
- Węzły ramy przemieszczają się zgodnie z przyjętą hipotezą deformacji
- Na ramę działa obciążenie normalne $p_n(z, s)$

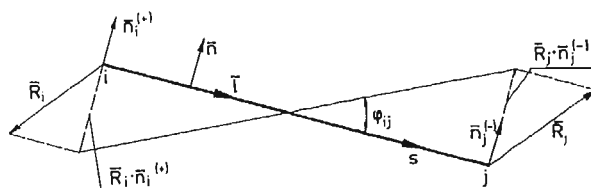
3.2. Wpływ przemieszczeń węzłów na momenty gnące w ramie. Dany jest pręt „ ij ” łączący węzły „ i ”, „ j ”. Zwrot „osi” s przyjmujemy od węzła „ i ” do węzła „ j ”. Niech \bar{R}_i, \bar{R}_j oznaczają wektory przemieszczenia węzłów (rys. 3). Momenty w ramie mogą powstać jedynie na skutek obrotów węzłów i obrotu prostej łączącej węzły po deformacji. Niech dodatni zwrot kąta φ_{ij} będzie zgodny ze skrętnością układu $(\bar{n}, \bar{l}, \bar{b})$, to wtedy

$$(3.1) \quad \varphi_{ij} = \frac{\bar{R}_j \cdot \bar{n}_j^{(-)} - \bar{R}_i \cdot \bar{n}_i^{(+)}}{l_{ij}}$$

gdzie: l_{ij} — jest długością pręta przed deformacją

Niech $m_{ij}(s)$ będzie momentem gnącym w ramie wywołanym obrotem pręta „ ij ” o kąt $\varphi_{ij} = 1$. Moment gnący na całej ramie $M_{ij}(s)$ spowodowany wyłącznie kątem obrotu φ_{ij} według wzoru (3.1) wyraża się wzorem

$$(3.2) \quad M_{ij}(s) = m_{ij}(s) \frac{\bar{R}_j \bar{n}_j^{(-)} - \bar{R}_i \bar{n}_i^{(+)}}{l_{ij}}$$



Rys. 3

Całkowity moment gnący do przemieszczeń węzłów zapiszemy w postaci

$$(3.3) \quad M_F = \sum_{(ij) \in J} m_{ij} \cdot \varphi_{ij}$$

gdzie: J — zbiór wszystkich par „ ij ” numerujących węzły.

3.3. Wyznaczanie momentów gnących w ramie od obciążeń $p_n(z, s)$. Niech M_g jest momentem gnącym od obciążenia $p_n(z, s)$ działającego na ramę przy nieprzesuwnych ale obracających się swobodnie węzłach. Gęstość energii sprężystej wskutek zginania ramy w przekroju $z = \text{const}$ jest

$$(3.4) \quad \frac{d\pi_M}{dz} = \oint_K \frac{1}{2D} (M_F + M_g)^2 ds.$$

Obliczenia momentu M_g przeprowadzamy następująco:

- rozcinamy ramę w węzłach i liczymy kąty ugięcia od obciążeń zewnętrznych na podporach oraz momenty gnące na podporach,
- piszemy równania do wyznaczania momentów podporowych i wyznaczamy te momenty z warunku zgodności kątów obrotu,
- dla każdego pręta znajdujemy sumę momentów gnących od obciążeń normalnych p_n przy rozciągniętych węzłach i momentów podporowych.

3.4. Całkowita energia mechaniczna układu. Energię sprężystą π powłoki zgodnie z równaniami (2.14) i (2.18) zapiszemy w postaci

$$(3.5) \quad \pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\oint_K \left\{ V(u, v) + \frac{M^2}{D} \right\} ds \right] dz,$$

gdzie:

$$V(u, v) = \check{E}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \check{E}_2 \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + 2\check{E}_1 \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial s} + \check{G} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2,$$

$$M = M_F + M_\theta.$$

Dla $z = \text{const}$ przemieszczenie w kierunku n jest

$$(3.6) \quad w(z, s) = w_1(z, s) + w_2(z, s),$$

gdzie:

$w_1(z, s)$ — przemieszczenie w kierunku n spowodowane przemieszczeniami \bar{R}_i, R_j poszczególnych węzłów,

$w_2(z, s)$ — ugięcie prętów ramy przy węzłach nieprzesuwnych i przegubach umieszczonych w węzłach.

Niech

$w_2^0(z, s)$ — ugięcie od obciążenia p_n

$w_2^1(z, s)$ — ugięcie od obrotów przekrojów węzłowych

to wtedy

$$(3.7) \quad w_2 = w_2^0 + w_2^1.$$

Pracę sił zewnętrznych (2.19) po uwzględnieniu (3.6) i (3.7) przepisujemy w postaci

$$(3.8) \quad A = \int_0^L \left[\oint_K (u \cdot p_b + v \cdot p_s) ds \right] dz + \int_0^L \left[\oint_K (w_1 + w_2^0 + w_2^1) p_n ds \right] dz,$$

Ponieważ M_θ oraz w_2^0 nie zależą od poszczególnych funkcji $U_i(z), V_k(z), W_l(z)$ to pomijamy je w wyrażeniu na energię. Ostatecznie wyrażenie na całkowitą energię mechaniczną układu przyjmuje postać

$$(3.9) \quad \Omega = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\oint_K \left\{ V(u, v) + \frac{M_F^2}{D} + 2 \frac{M_F M_\theta}{D} \right\} ds \right] dz -$$

$$- \int_0^L \left[\oint_K (u \cdot p_b + v \cdot p_s) ds \right] dz - \int_0^L \left[\oint_K (w_1 + w_2^1) p_n ds \right] dz.$$

3.5. Wnioski wypływające z przyjęcia teorii ramowo-powłokowej. Dane jest naroże w węzle „i” łączącym dwa pręty (co najmniej dwa) jak na rys. 4. Para $\bar{l}_i^{(-)}, \bar{l}_i^{(+)}$ oraz para $\bar{n}_i^{(-)}, \bar{n}_i^{(+)}$ tworzą bazę (na ogół nieortogonalną). Możemy napisać, że

$$(3.10.1) \quad \bar{n}_i^{(-)} = \alpha_{1i} \bar{l}_i^{(-)} + \alpha_{2i} \bar{l}_i^{(+)},$$

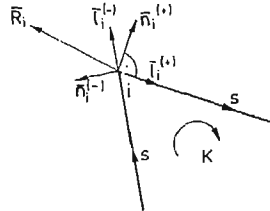
$$(3.10.2) \quad \bar{n}_i^{(+)} = \beta_{1i} \bar{l}_i^{(-)} + \beta_{2i} \bar{l}_i^{(+)}. \quad \square$$

Mnożąc te zależności obustronnie przez $\bar{n}_i^{(+)}$, a następnie przez $\bar{n}_i^{(-)}$ otrzymujemy układ równań do wyznaczenia α_{1i} , α_{2i} , β_{1i} , β_{2i} . Rzuty przemieszczeń na kierunek wersorów $\bar{n}_i^{(-)}$, $\bar{n}_i^{(+)}$ są

$$(3.11.1) \quad w_i^{(-)} = \bar{R}_i \bar{n}_i^{(-)} = \alpha_{1i} v_i^{(-)} + \alpha_{2i} v_i^{(+)},$$

$$(3.11.2) \quad w_i^{(+)} = \bar{R}_i \bar{n}_i^{(+)} = \beta_{1i} v_i^{(-)} + \beta_{2i} v_i^{(+)}. \quad .$$

Stąd wynika, że ugięcia w_i jak i moment M_F mogą być uzależnione od funkcji $v(z, s)$



Rys. 4

Wynikają stąd następujące wnioski:

1. W teorii ramowo-powłokowej hipotezy deformacji można narzucić na funkcje $u(z, s)$, $v(z, s)$, a mianowicie

$$(3.12.1) \quad u(z, s) = \sum_{l=1}^n U_l(z) \cdot \varphi_l(s)$$

$$(3.12.2) \quad v(z, s) = \sum_{k=1}^m V_k(z) \cdot \psi_k(s)$$

2. Funkcje $w(z, s) = \sum_{l=1}^r W_l(z) \cdot \chi_l(s)$ nie są potrzebne do pełnego opisu przemieszczeń gdyż są jednoznacznie określone przez funkcje $v(z, s)$.

W dalszej części pracy posługiwać będziemy się teorią ramowo-powłokową.

4. Równania równowagi

Ogólne zasady energetyczne prowadzą do równań równowagi w postaci równań różniczkowych. W przypadku continuum dwuwymiarowego są to równania różniczkowe cząstkowe albo układy tych równań.

Jeżeli na układ mechaniczny nałożymy więzy i wykorzystamy zasady energetyczne do wyprowadzenia równań równowagi, to wtedy przy określonych więzach mają one postać równań różniczkowych zwyczajnych. Fakt ten wykorzystano dalej w pracy sprowadzając zagadnienie do równań równowagi w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych.

4.1. Metoda funkcji kształtu w opisie deformacji pręta. Całkowitą energię mechaniczną powłoki zgodnie z (3.9) zapisujemy w postaci wygodnej do dalszych rozważań

$$(4.1) \quad \Omega = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int_K \left\{ \check{V}(u, v) + \frac{M_F^2}{D} \right\} ds \right] dz + \int_0^L \left[\int_K \left\{ \frac{M_F M_g}{D} - u \cdot p_b - v \cdot p_s - (w_1 + w_2) p_n \right\} ds \right] dz$$

Pierwsza całka jest formą kwadratową, a druga całka jest formą liniową względem przemieszczeń u, v .

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcjonału Ω otrzymujemy z całki pierwszej — operator różniczkowy równań równowagi, z całki drugiej — wyrazy wolne które są uogólnionymi siłami zewnętrznymi.

Zajmiemy się pierwszym składnikiem formy kwadratowej

$$(4.2) \quad \oint_K \check{V}(u, v) ds$$

Wyrażenie podcałkowe zapisujemy w postaci

$$(4.3) \quad \check{V}(u, v) = \check{E}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \check{E}_2 \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \check{G} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \check{G} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \\ + 2\check{E} \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + 2\check{G} \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial v}{\partial z},$$

gdzie:

$$2\check{E} = \check{E}_2 \nu_{12} + \check{E}_1 \nu_{21}.$$

Wykorzystując hipotezę deformacyjną określoną wzorami (3.12) gdzie funkcje $\varphi_i(s)$ przyjmujemy jako ciągłe na całym konturze K , funkcje $\psi_k(s)$ jako ciągłe na odcinkach międzywęzłowych oraz stosując konwencję sumacyjną Einsteina to wtedy całkę (4.2) możemy zapisać następująco

$$(4.4) \quad \oint_K \check{V}(u, v) ds = U'_i U'_j \oint_K \check{E}_i \varphi_i \varphi_j ds + V'_k V'_l \oint_K \check{G} \psi_k \psi_l ds + \\ + V'_k \cdot V'_l \oint_K \check{E}_2 \psi'_k \psi'_l ds + U'_i U'_j \oint_K \check{G} \varphi'_i \varphi'_j ds + \\ + 2U'_i V'_k \oint_K \check{E} \varphi_i \psi'_k ds + 2U'_i V'_k \oint_K \check{G} \varphi'_i \psi_k ds.$$

gdzie: $()'$ — oznacza różniczkowanie funkcji U_i i V_k względem zmiennej z oraz różniczkowanie funkcji φ_i i ψ_k względem zmiennej s .

Do wyznaczenia współczynników pierwszego składnika formy kwadratowej (4.4) trzeba obliczyć następujące całki

$$(4.5) \quad \oint_K \check{E}_1 \varphi_i \varphi_j ds, \quad \oint_K \check{G} \psi_k \psi_l ds, \quad \oint_K \check{E}_2 \psi'_k \psi'_l ds, \\ \oint_K \check{G} \varphi'_i \varphi'_j ds, \quad \oint_K \check{E} \varphi_i \psi'_k ds, \quad \oint_K \check{G} \varphi'_i \psi_k ds.$$

Drugim składnikiem formy kwadratowej jest całka $\oint_K \frac{M_F^2}{D} ds$. Jeżeli J jest zbiorem par „ ij ” numerujących odcinki ramy pomiędzy węzłami i i j , m_{ij} — jest momentem na ramie (kontur pręta) spowodowany jednostkowym kątem obrotu pręta „ ij ” to wtedy zgodnie z (3.1), (3.3), (3.11) otrzymujemy

$$(4.7) \quad \oint_K \frac{M_F^2}{D} ds = \frac{\gamma_{ij} \gamma_{rs}}{l_{ij} l_{rs}} \oint_K \frac{m_{ij} m_{rs}}{D} ds,$$

gdzie:

$$(4.8.1) \quad \gamma_{ij} = \alpha_{2j}v_j^{(+)} + (\alpha_{1j} - \beta_{2j})v_j^{(-)} - \beta_{1i}v_i^{(+)},$$

$$(4.8.2) \quad \gamma_{rs} = \alpha_{2s}v_s^{(+)} + (\alpha_{1s} - \beta_{2s})v_s^{(-)} - \beta_{1r}v_r^{(+)}.$$

Do wyznaczenia współczynników drugiego składnika formy kwadratowej trzeba obliczyć całki

$$(4.9) \quad \oint_K \frac{m_{ij}m_{rs}}{D} ds,$$

dla wszystkich par wskaźników $[(ij), (rs)] \in J$

Teraz rozpatrzmy składnik, który jest formą liniową całkowej energii mechanicznej Ω . Wyrażenie zawierające składowe obciążenia binormalnych p_b i stycznych p_s po wykorzystaniu (3.12) zapiszemy w postaci

$$(4.10.1) \quad \oint_K u \cdot p_b ds = \sum_{i=1}^n U_i b_i,$$

gdzie:

$$(4.10.2) \quad b_i = \oint_K \varphi_i p_b ds \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

oraz

$$(4.11.1) \quad \oint_K v \cdot p_s ds = \sum_{k=1}^m V_k \cdot t_k,$$

gdzie:

$$(4.11.2) \quad t_k = \oint_K \psi_k p_s ds \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Zgodnie z (3.7) funkcje w_1 i w_2^1 przedstawimy w postaci

$$(4.12.1) \quad w_1 = \sum_{k=1}^m V_k w_{1k},$$

$$(4.12.2) \quad w_2^1 = - \sum_{k=1}^m V_k w_{2k}^1,$$

Składnik zawierający składowe normalne p_n obciążenia zewnętrznego zapiszemy teraz w postaci

$$(4.13.1) \quad \oint_K (w_1 + w_2^1) D_n ds = \sum_{k=1}^m V_k N_k,$$

gdzie:

$$(4.13.2) \quad N_k = \oint_K [w_{1k} - w_{2k}^1] p_n ds \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Kolejnym składnikiem formy liniowej jest wyrażenie zawierające momenty M_F i M_g . Sposób liczenia momentu M_g podano w p. 3:3 pracy, natomiast M_F zapisujemy w postaci

$$(4.14.1) \quad M_F = - \sum_{k=1}^m V_k m_k,$$

gdzie:

$$(4.14.2) \quad V_k m_k = \frac{V_k}{l_k} m_k = \varphi_k m_k,$$

k — oznacza parę „ ij ” ze zbioru J , φ — kąt obrotu pręta.

Stąd otrzymujemy

$$(4.15.1) \quad \oint_K \frac{M_F M_G}{D} ds = \sum_{k=1}^m V_k \cdot P_k,$$

gdzie:

$$(4.15.2) \quad P_k = \oint_K \frac{m_k M_G}{D} ds \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Składając wyrażenia na składniki formy liniowej otrzymujemy

$$(4.16) \quad \oint_K \left\{ \frac{M_F M_G}{D} - u p_b - v p_s - (w_1 + w_2) p_n \right\} ds = - \sum_{l=1}^n U_l b_l - \sum_{k=1}^m V_k a_k$$

gdzie: $a_k = t_k + N_k + P_k$, ($i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, m$).

4.2. Wybór funkcji kształtu. Funkcji $\varphi(s)$. Funkcje $\varphi_i(s)$ określają przemieszczenia prostopadłe do płaszczyzny konturu — muszą być zatem ciągłe na całym konturze K . Stosować będziemy funkcje $\varphi_i(s)$ pierwszego rodzaju (rys. 5), to znaczy takie, które są znormalizowane w taki sposób, że w wybranych węzłach mają wartość 1 (jeden) i zmieniają się liniowo do zera w węzłach najbliższych. Można również rozważać funkcje $\varphi_i(s)$ drugiego rodzaju skonstruowane z wielomianów Legendre'a P_4 tak by funkcje pierwszego i drugiego rodzaju były ortogonalne (rys. 6).

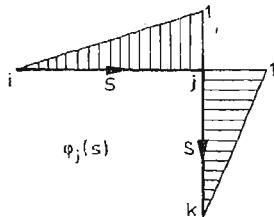
Jeżeli odcinek „ ij ” przyjęć jako przedział domknięty $\langle 0, 1 \rangle$ to funkcja pierwszego rodzaju jest

$$(4.17) \quad \varphi_i^{(1)}(s) = P_2(s) = s,$$

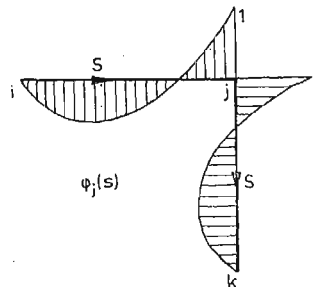
a drugiego rodzaju

$$(4.18) \quad \varphi_i^{(2)}(s) = P_4(s) = \frac{1}{2} (5s^3 - 3s).$$

Liczba funkcji φ_i pierwszego lub drugiego rodzaju jest osobno równa liczbie węzłów.



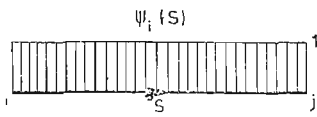
Rys. 5



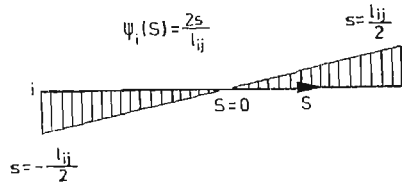
Rys. 6

Funkcje $\psi(s)$. Funkcje $\psi_k(s)$ określają przemieszczenia styczne do konturu, muszą być zatem ciągłe na każdym odcinku prostym między węzłami. Rozważać można funkcje $\psi_k(s)$ pierwszego rodzaju (rys. 7) nie uwzględniające wpływu sił osiowych w przecię między węzłami oraz drugiego rodzaju (rys. 8) uwzględniające ten wpływ.

Przyjęcie funkcji kształtu φ i ψ pierwszego i drugiego rodzaju zwiększa liczbę stopni swobody układu, a tym samym liczbę równań różniczkowych równowagi. Wpływ części odkształcenia pochodzący od funkcji φ i ψ drugiego rodzaju na całkowitą energię mechaniczną układu jest mały i może być zaniedbany w opisie deformacji pręta. Stąd w dalszej części pracy uwzględniać będziemy funkcje $\varphi(s)$ i $\psi(s)$ tylko pierwszego rodzaju.



Rys. 7



Rys. 8

4.3. Macierzowa postać równowagi. Na wstępie weźmy pod uwagę wyrażenie $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ występujące w (4.3). Uwzględniając (3.12.1) oraz przyjmując że funkcje φ_i są ciągłe możemy napisać

$$(4.19) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{i=1}^n U_i(z) \cdot \varphi_i(s) \right) \right]^2 = \left[\sum_{i=1}^n U_i'(z) \varphi_i(s) \right]^2,$$

stąd

$$(4.20) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \{u_i'\}^T [\varphi_i \varphi_j] \{U_j'\},$$

gdzie: symbolami $\{ \}$ i $[\]$ oznaczono wektory i macierze, natomiast literą **T** oznaczono operację transpozycji.

Stąd mamy

$$(4.21) \quad \oint_K \check{E}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 ds = \{U_i'\}^T [M_{\varphi\varphi}] \{U_j'\},$$

gdzie: $[M_{\varphi\varphi}]$ — jest macierzą o elementach $\int_K \check{E}_1 \varphi_i \varphi_j ds$

Postępując analogicznie ze wszystkimi składnikami formy kwadratowej otrzymujemy zapis pierwszego składnika energii

$$(4.22) \quad \Omega_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\{U_i'\}^T [M_{\varphi\varphi}] \{U_j'\} + \{V_k'\}^T [M_{\varphi\psi}] \{V_l'\} + \right. \\ \left. + \{V_k'\}^T ([M_{\psi\psi}] + [M_{FF}]) \{V_l'\} + \{U_i\}^T [M_{\varphi\psi}] \{U_j\} + \right. \\ \left. + 2 \{V_k\}^T [M_{\varphi\psi}] \{U_j\} + 2 \{V_k'\}^T [M_{\varphi\psi}] \{U_j\} \right) dz.$$

Macierz $[M_{FF}]$ jest wynikiem z rozważań $\oint_K \frac{M_k^2}{D} ds$

Macierze $[M_{\varphi\varphi}]$ i $[M_{\varphi'\varphi'}]$ mają wymiar $n \times n$, macierze $[M_{FF}]$, $[M_{\psi\psi}]$ i $[M_{\psi'\psi'}]$ mają wymiar $m \times m$, natomiast macierze $[M_{\varphi'\psi}]$ i $[M_{\psi\varphi}']$ mają wymiar $n \times m$. Elementy tych macierzy są całkami.

Z warunku ekstremum funkcjonału całkowitej energii mechanicznej (4.1) otrzymujemy

$$(4.23.1) \quad [M_{\varphi\varphi}] \{U_j'\} - [M_{\varphi'\varphi'}] \{U_j\} + ([M_{\psi\psi}]^T - [M_{\psi'\psi'}]^T) \{V_l'\} = \{b_j\},$$

$$(4.23.2) \quad [M_{\psi\psi}] \{V_l'\} - ([M_{\psi'\psi'}] + [M_{FF}]) \{V_l\} + ([M_{\psi'\varphi'}] - [M_{\varphi\psi'}]) \{u_l'\} = \{a_l\},$$

Równania te zapiszemy w postaci jednego równania macierzowego. Wprowadzając macierz kolumnę niewiadomych funkcji T_r

$$(4.24) \quad \{T_r\} = \begin{cases} U_i & i = 1, 2, \dots, n \\ V_k & k = 1, 2, \dots, m \\ & r = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m \end{cases}$$

wektor sił uogólnionych w postaci

$$(4.25) \quad \{b_1, b_2, \dots, b_n, a_1, a_2, \dots, a_m\}^T = \{q_1, q_2, \dots, q_{n+m}\}^T = \{q_r\}^T,$$

to po przekształceniach otrzymujemy układ równań różniczkowych

$$(4.26) \quad \begin{bmatrix} [M_{\varphi\varphi}] & 0 \\ 0 & [M_{\psi\psi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix}'' + \begin{bmatrix} 0 & [M_{\psi\psi}]^T - [M_{\psi'\psi'}]^T \\ [M_{\varphi'\psi}] - [M_{\psi\varphi}'] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix}' - \begin{bmatrix} [M_{\varphi'\varphi'}] & 0 \\ 0 & [M_{\psi'\psi'}] + [M_{FF}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{Bmatrix},$$

Przyjęte funkcje ψ pierwszego rodzaju są stałe na odcinkach międzywęzłowych, a zatem ich pochodne względem s są zerami. Stąd wszystkie współczynniki w macierzach zawierające ψ' są zerami i układ równań (4.26) sprowadza się do postaci

$$(4.27) \quad \begin{bmatrix} [M_{\varphi\varphi}] & 0 \\ 0 & [M_{\psi\psi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix}'' + \begin{bmatrix} 0 & -[M_{\psi'\psi'}]^T \\ [M_{\varphi'\psi}] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix}' - \begin{bmatrix} [M_{\varphi'\varphi'}] & 0 \\ 0 & [M_{FF}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{Bmatrix}.$$

Przyjmując funkcje $\varphi_i(s)$ i $\psi_k(s)$ pierwszego rodzaju możemy w sposób automatyczny budować układy równań różniczkowych dla dowolnych prętów cienkościennych pryzmatycznych o przekroju wieloobwodowym zamkniętym składającym się z wielokątów dowolnego kształtu.

5. Warunki brzegowe

Przyjęcie hipotezy deformacyjnej (3.12) prowadzi do układu równań różniczkowych zwyczajnych liniowych (4.27) rzędu

$$(5.1) \quad R = 2(n+m)$$

gdzie: n — ilość węzłów w przekroju równa liczbie znanych funkcji $\varphi_i(s)$

m — liczba stopni swobody w płaszczyźnie przekroju poprzecznego pręta równa liczbie przyjętych funkcji $\psi_k(s)$

Do rozwiązania układu (4.27) potrzebna jest znajomość R wartości funkcji U_i , V_k i ich pochodnych względem zmiennej z w jednym lub dwu różnych przekrojach pręta.

Warunek brzegowy zapiszemy w postaci

$$(5.2) \quad [M] \{T\}_{z=0} + [P] \{T\}_{z=L} + \{S\} = \{0\}$$

przy czym:

$[M]$ — jest macierzą kwadratową rzędu R podaną dla przekroju $z = 0$

$[P]$ — jest macierzą kwadratową rzędu R podaną dla przekroju $z = L$

$\{T\}$ — jest wektorem R -wymiarowym zawierającym funkcje U_i i V_k

$\{S\}$ — jest stałym wektorem R -wymiarowym

Tak zapisany warunek brzegowy umożliwia wykorzystanie warunków danych w przemieszczeniach, w naprężeniach lub mieszanych.

Występujące w wyrażeniu na energię mechaniczną składniki formy liniowej równania (4.1) zawierają wielkości

$$(5.3.1) \quad b_i = \oint_K \varphi_i p_b ds,$$

$$(5.3.2) \quad t_k = \oint_K \psi_k p_s ds,$$

które są uogólnionymi siłami zewnętrznymi w przekroju $z = \text{const}$.

Rozpatrując te wielkości jako siły wewnętrzne i korzystając z zasady prac przygotowanych możemy napisać

$$(5.4.1) \quad b_i^0(z) = \oint_K \varphi_i \sigma_z ds,$$

$$(5.4.2) \quad t_k^0(z) = \oint_K \psi_k \tau_{zs} ds.$$

Podstawiając wyrażenie na σ_z i τ_{zs} według wzorów (2.8), po dalszych przekształceniach otrzymamy

$$(5.5.1) \quad b_i^0(z) = \sum_{j=1}^n U_j'(z) \oint_K \check{E}_1 \varphi_i \varphi_j ds,$$

$$(5.5.2) \quad t_k^0(z) = \sum_{i=1}^n U_i'(z) \oint_K \check{G} \varphi_i \psi_k ds + \sum_{r=1}^m V_r'(z) \oint_K \check{G} \psi_k \psi_r ds,$$

Rozpatrując teraz równowagę powłoki w przekroju $z = \text{const}$ i zakładając, że $p_b^0(z, s)$ i $p_s^0(z, s)$ są odpowiednio wzdłużnymi i stycznymi siłami działającymi na jednostkę długości konturu na podstawie (5.3) i (5.5) otrzymujemy następujące związki równowagi uogólnionych sił zewnętrznych i wewnętrznych

$$(5.6.1) \quad \int_K \varphi_i p_b^0 ds = \sum_{j=1}^n U_j'(z) \int_K \check{E}_i \varphi_i \varphi_j ds,$$

$$(5.6.2) \quad \int_K \varphi_k p_s^0 ds = \sum_{r=1}^m V_r'(z) \int_K \check{G} \varphi_k \varphi_r ds + \sum_{i=1}^n U_i(z) \int_K \check{G} \varphi_i' \varphi_k' ds.$$

Wprowadzając zapis macierzowy i porównując z (4.22) zapiszemy

$$(5.7.1) \quad \{b_i^0\} = [M_{\varphi\varphi}] \{U_i'\},$$

$$(5.7.2) \quad \{t_k^0\} = [M_{\varphi'\varphi'}] \{U_i'\} + [M_{\varphi\varphi'}] \{V_k'\}.$$

Zatem dla dowolnego przekroju $z = \text{const}$ warunki (5.7) mają postać

$$(5.8) \quad \begin{bmatrix} [M_{\varphi\varphi}] & & & \\ & & & \\ & & [M_{\varphi\varphi'}] & [M_{\varphi\varphi'}] \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i' \\ U_i \\ V_k' \\ V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i^0 \\ 0 \\ t_k^0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

W miejsca niewypełnione należy wstawić macierze zerowe.

Dla przykładu jak na rys. 9 otrzymujemy warunki brzegowe tylko w przemieszczeniach co zapisujemy następująco

$$(5.9) \quad \begin{bmatrix} & & & \\ & [I] & & \\ & & & \\ [E] & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i' \\ U_i \\ V_k' \\ V_k \end{bmatrix}_{z=0} + \begin{bmatrix} & & & [I] \\ & & & \\ & & & \\ & & & [E] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i' \\ U_i \\ V_k' \\ V_k \end{bmatrix}_{z=L} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie: $[I]$ — macierz jednostkowa $n \times n$

$[E]$ — macierz jednostkowa $m \times m$



Rys. 9

6. Rozwiązywanie równań różniczkowych — przykłady zastosowań półbezmomentowej teorii ramowo-powłokowej. Obliczenia numeryczne

Równania różniczkowe równowagi powłok wynikające z zastosowań półbezmomentowej teorii ramowo-powłokowej sprowadzają się do całkowania równań różniczkowych rzędu drugiego dających się sprowadzić w prosty sposób do równań rzędu pierwszego przez odpowiednie podstawienie. Ogólna postać macierzowa jest

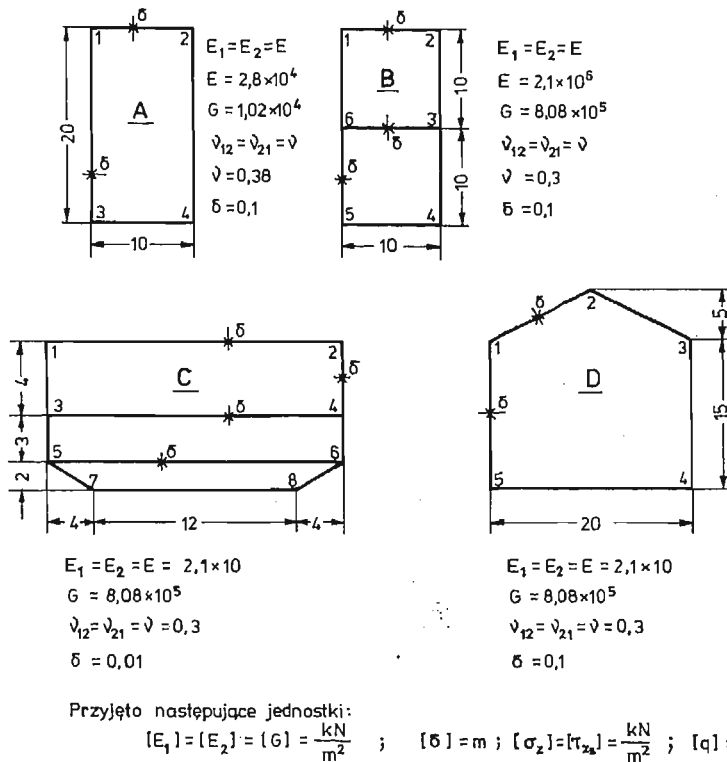
$$(6.1) \quad [A] \{T''\} + [B] \{T'\} + [C] \{T\} = \{Q\},$$

gdzie: $[A]$, $[B]$, $[C]$ — stałe macierze kwadratowe, $\{T\}$ — oznacza wektor kolumny nie-
wiadomych.

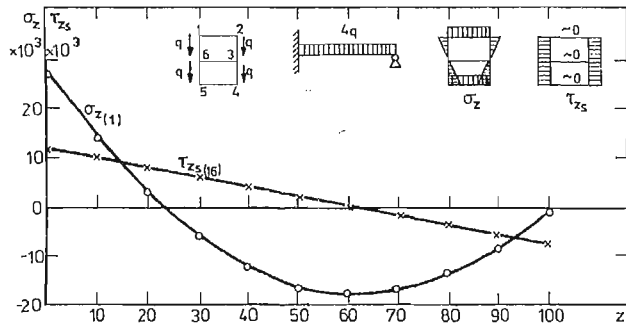
Trudność rozwiązania sprowadza się głównie do znalezienia dokładnej metody wyznaczania bazy w przestrzeni rozwiązań tego równania, tak aby można było dokonać odpowiedniego złożenia elementów bazy i uzyskać rozwiązanie spełniające warunki graniczne o technicznym znaczeniu. Okazuje się, że znane metody całkowania układów równań różniczkowych typu Rungego-Kutty i inne opisane w [5], [6] okazały się dla tego układu nieefektywne (niezadawalająca dokładność i długi czas obliczeń). Efektywna okazała się dopiero metoda opisana w [4] polegająca na wykorzystaniu i uogólnieniu metody zaproponowanej przez Oluremi-Olaofe [8] dla jednego równania różniczkowego. Istotą metody jest rozwijanie funkcji $T(z)$ w szereg wielomianów Czebyszewa. Szczegółowy opis metody i sposób całkowania równań podano w [4] i [10].

Na podstawie wyżej przedstawionych rozważań autor opracował program na maszynie cyfrową ICL-4-70 w języku FORTRAN. Szczegółowy opis programu zamieszczono w [3].

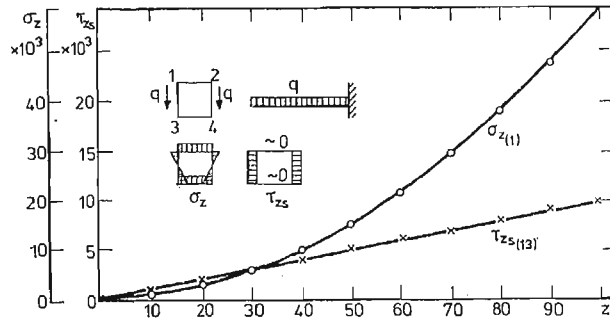
Jako przykład rozważono pręty pryzmatyczne o przekrojach podanych na rys. 10. Dla wszystkich prętów przyjęto długość $L = 100$ m. Pozostałe charakterystyki geometryczne i materiałowe oraz schematy obciążenia podano na rys. 11, 12, 13, 14, 15, 16. W dziesięciu różnych przekrojach dla każdego pręta podano rozkłady naprężeń stycznych i naprężeń normalnych. Dla przejrzystości rysunków w poszczególnych przekrojach naniesiono wartość naprężenia w jednym węźle.



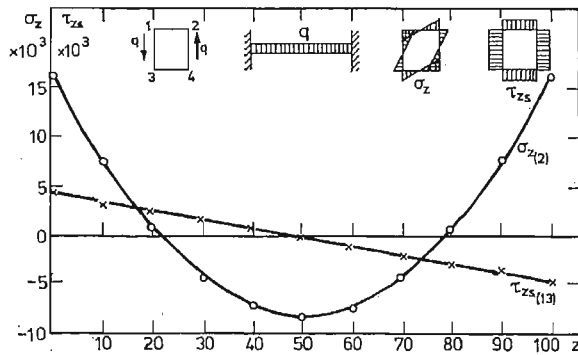
Rys. 10



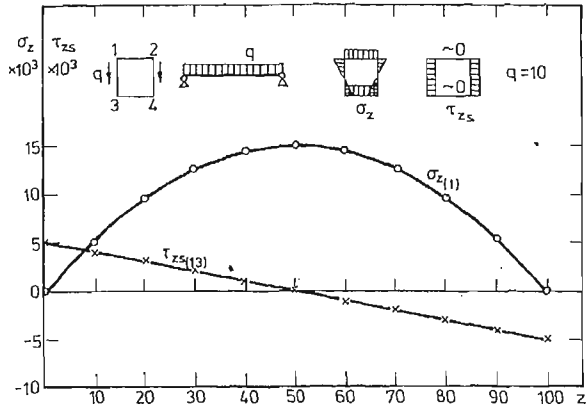
Rys. 11



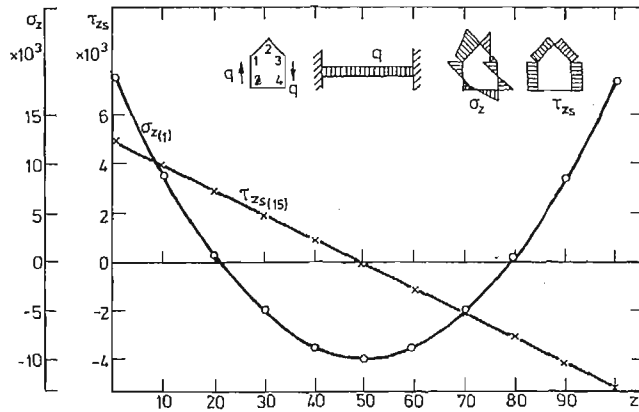
Rys. 12



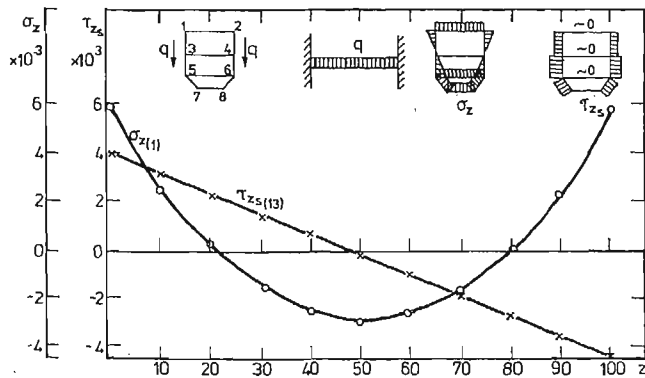
Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15



Rys. 16

7. Wnioski

Z zastosowań półbezmomentowej teorii powłok do obliczeń statycznych ortotropowych liniowo-sprężystych prętów cienkościennych pryzmatycznych o przekroju wieloobwodowym zamkniętym z niniejszej pracy wynikają następujące wnioski.

1. Opracowana metoda pozwala w sposób automatyczny budować macierze współczynników układu równań różniczkowych dla prętów pryzmatycznych cienkościennych o przekrojach zamkniętych wieloobwodowych składających się z wielokątów dowolnego kształtu.
2. W wyniku opracowanego programu na maszynę cyfrową można obliczać naprężenia w dowolnym przekroju pręta.
3. Porównanie opracowanej metody w niniejszej pracy z metodą elementów skończonych wykazuje na znacznie szybszy wzrost czasu pracy maszyny cyfrowej wraz ze stopniem skomplikowania przekroju dla metody elementów skończonych. Dla ilości węzłów w przekroju 3 - 12 i długości kadłuba statku 100 metrów czas obliczeń według metody przedstawionej w pracy wynosi od 1.5 min. do 10 minut pracy maszyny cyfrowej ICL-4-70. W metodzie elementów skończonych czas ten jest kilkakrotnie większy dla tych samych przypadków co było potwierdzone informacjami z przemysłu okrętowego gdzie wykonano obliczenia kontrolne.
4. Rozwiązanie podanego w pracy układu równań różniczkowych stało się efektywne (nakład pracy, czas obliczeń) po wykorzystaniu metody podanej w [8] polegającej na rozwijaniu funkcji niewiadomej w sumy wielomianów Czebyszewa, a mało efektywne w przypadku stosowania znanych metod całkowania typu np. Rungego-Kutty.
5. W celu zwiększenia zakresu stosowalności metody należy prowadzić dalsze badania nad znalezieniem odpowiedniego sposobu całkowania układu równań różniczkowych równowagi, gdyż metoda przedstawiona w [8] i opisana w [4] jest efektywna dla układów równań różniczkowych do rzędu 40 tj. dla prętów o przekroju składającym się z 10 - 12 węzłów.

Literatura cytowana w tekście

1. W. S. CZUWIKOWSKII, *Problemy procznosti sudow*, Sudostrojenie Leningrad 1975.
2. A. F. FIEOFANOW, *Stroitel'naja miechanika awiacyjnych konstrukcji*, Maszynostrojenie Moskwa 1969.
3. Z. GÓRECKI, *Zastosowanie półbezmomentowej teorii powłok do obliczeń kadłubów bezgrodziowych*, Praca doktorska. Instytut Okrętowy Politechniki Gdańskiej 1980 (niepublikowana).
4. Z. GÓRECKI, M. SPERSKI, J. WIĘCKOWSKI, *Wdrożenie półbezmomentowej teorii powłok do obliczeń kadłubów bezgrodziowych*. Praca badawcza Instytut Okrętowy Politechniki Gdańskiej. Gdańsk 1976 cz. I, Gdańsk 1977, cz. II, Gdańsk 1979, cz. III, (niepublikowana).
5. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, Wyd. Nauk. Techn. Warszawa 1974.
6. K. MOSZYŃSKI, *Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych na maszynach cyfrowych*, Wyd. Nauk Techn. Warszawa 1971.
7. J. F. OBRACZOW, *Mietydy Raczota na proczność kesonnych konstrukcji tipa kryla*, Obornigiz 1960.
8. G. OLUREMI-OLAOFI, *On the Tchebyschew method of solution of ordinary differential equations*, J. of Math. Anal. and Aplic. Vol. 60, No 1 August 1977.
9. W. Z. WŁASOW, *Tonkostiennye uprugije stierżni*, Gosud. Izdat. Fiz.-Mat. Lit. Moskwa 1959.
10. J. WIĘCKOWSKI, M. SPERSKI, J. DREWKO, *Równania równowagi i obliczenia numeryczne powłok liniowo-sprężystych o wielospójnym prostokątnym przekroju*, II Konferencja „Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowanie” Gołun 6 - 10 XI 1978.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУ-БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК К СТАТИЧНОМУ РАСЧЁТУ ОРТОТРОПНЫХ ЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЗАКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

В работе представлено метод расчёта напряжений и перемещений ортотропных линейно-упругих тонкостенных призматических стержней произвольного закрытого профиля состоящегося из многоугольников произвольного очертания. Приведено предположения полу-безмоментной теории оболочек на основании теории оболочек В. З. Власова. Эту теорию расширено и приспособлено к расчётам на вычислительных машинах (ЭВМ). Приведенный метод применено к статическому расчёту без-переборковых судовых корпусов. Даны примеры вычислений на ЭВМ стержней с произвольных очертаниях в произвольных краевых условиях.

Summary

THE APPLICATION OF SEMI-MOMENTLESS THEORY OF SHELLS IN STATIC COMPUTATION OF ORTOTROPIC LINEAR ELASTIC BARS WITH MULTICIRCUIT CLOSED SECTION

In the paper a method of computation of stresses and displacements for ortotropic linear-elastic thin-walled prismatic bars with multicircuit section consisted of polygon with arbitrary form is presented. The assumption of semi-momentless theory of shells is based on V. Z. Vlasov a shell theory. The theory is developed and adopted for computation on a digital computer. The described method is applied in static computation for hulls of unbulkhead ships. Examples of numerical computations for bars with different cross-sections and different boundary conditions conclude the paper.

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 listopada 1981 roku.

MINIKOMPUTEROWE WSPOMAGANIE BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH W MECHANICE

KONSTANTY DRZEWIŃSKI,
REINHOLD KALUŻA,

OSWALD MATEJA,

KRZYSZTOF SKRZYPULEC

Opole
WSI

1. Wstęp

Mimo intensywnego rozwoju analitycznych i numerycznych metod badawczych, stosowanych w mechanice konstrukcji, rola metod doświadczalnych jest w dalszym ciągu duża. I tak, np. badania doświadczalne służą udoskonaleniu i budowie nowych modeli fizycznych i matematycznych opisujących zjawiska w mechanice. W wielu dziedzinach postęp techniki nie może czekać na rozwiązania teoretyczne. W sukces muszą tu przyjść badania doświadczalne [7, 8, 9, 10, 13, 14, 20].

Ostatnio rozwijane są metody wykorzystujące zalety techniki cyfrowej i zalety metod doświadczalnych [18, 19]. Komputer (minikomputer) wykorzystywany jest coraz częściej do wspomagania prac eksperymentalnych. Stało się to możliwe dzięki postępowi w elektronice, głównie mikroelektronice.

W niniejszym artykule, autorzy — po krótkim wstępie zawierającym informacje ogólne — zamierzają przedstawić swoje doświadczenia zdobyte w czasie stosowania minikomputera do wspomagania badań doświadczalnych z mechaniki.

Należy podkreślić, iż w krótkim opracowaniu nie sposób omówić wszystkich podstawowych wiadomości z zakresu stosowania minikomputerów w badaniach eksperymentalnych. Z zakresu tego dostępne są jednak opracowania monograficzne, które zasługują na uwagę (np. [5, 6, 13, 14, 15, 18, 23, 25, 32]).

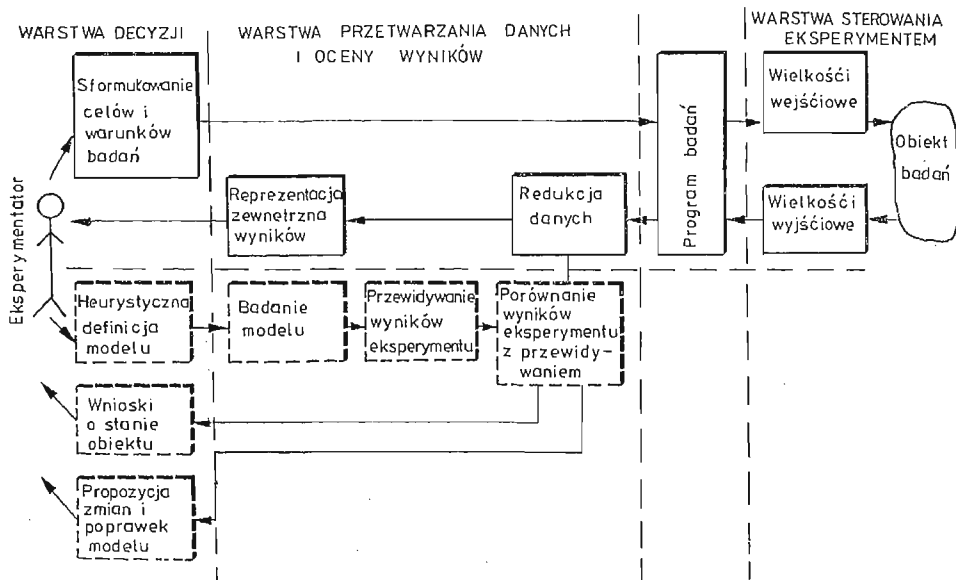
2. Ogólne zasady organizacji prac eksperymentalnych

Organizację czynności związanych z przeprowadzaniem eksperymentu można podzielić na trzy następujące warstwy [25] (rys. 2.1):

- warstwa decyzji, w której badacz — eksperymentator dokonuje, na podstawie wyników częściowych, korekt dalszego przebiegu eksperymentu, zmian w modelu i w obiekcie;
- warstwa przetwarzania danych polegająca na analizie wyników dla otrzymania wielkości mierzalnych pośrednio oraz na obliczeniu charakterystyk statystycznych;

— warstwa sterowana eksperymentem, polegająca na uzmiennianiu wielkości wejścia i wykonania pomiarów zgodnie z programem badań.

Planowanie prac eksperymentalnych, gromadzenie i budowa środków pomiaru jest domeną intelektualną człowieka i nie może być przedmiotem automatyzacji. Automatyzacji winien podlegać natomiast sam proces pomiarowy. Do jego automatyzacji wykorzystywane są coraz częściej specjalizowane układy (systemy) pomiarowe [14, 15, 18, 19, 25, 28, 32]. Układy te pracować mogą w sposób niezależny lub też mogą być wspomagane przez komputer. Poprzez połączenie układu pomiarowego z minikomputerem uzyskuje się system pomiarowo-informacyjny, znajdujący obecnie coraz to szersze zastosowanie w pracach eksperymentalnych [23, 25, 28, 29]. Przewaga takiego systemu nad dotychczas



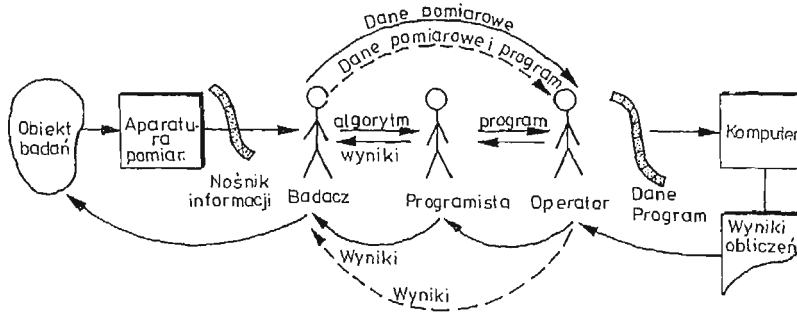
Rys. 2.1. Ogólny schemat organizacji prac eksperymentalnych

stosowanymi układami pomiarowymi (wyposażonymi w pamięć czy nawet mikrokomputer) polega przede wszystkim na jego uniwersalności. Minikomputer może sterować i obsługiwać kilka układów pomiarowych, a ponadto może być również wykorzystywany do obliczeń numerycznych. Zapewnia to jego efektywniejsze wykorzystanie (praca w systemie abonenckim) [1, 28, 29].

Rozróżnia się dwa sposoby korzystania z techniki komputerowej w pracach eksperymentalnych:

- tryb off-line (pośredni),
- tryb on-line (o działaniu bezpośrednim).

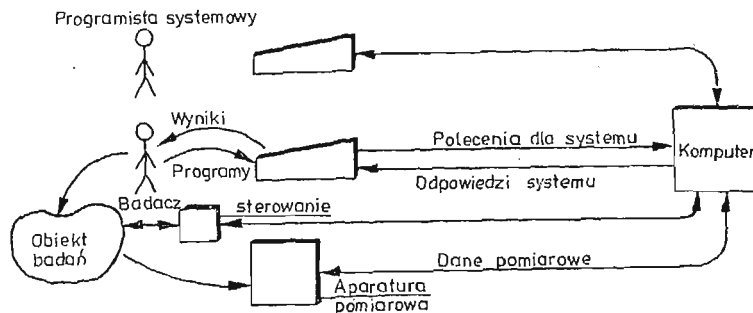
W trybie off-line (rys. 2.2) wyniki pomiarów odczytane lub zarejestrowane podczas badań są utrwalane na nośnikach informacji (np. papierowa taśma perforowana) a następnie wprowadzane do komputera. Wyniki pomiarów utrwalone na taśmie perforowanej mogą być wprowadzone do komputera w sposób bezpośredni lub pośredni po ich retransmisji, czyli przystosowaniu do kodu komputera. Wyniki obliczeń, na ogół po dość długim



Rys. 2.2. Schemat korzystania z techniki komputerowej w pracach eksperymentalnych; klasyczny tryb pośredni (off-line)

czasie, wracają do eksperymentatora. Szybszą, a zarazem mniej pracochłonną realizację badań według trybu off-line uzyskać można poprzez zastosowanie do rejestracji wyników pomiarów urządzeń rejestrujących zawierających pamięć kasetową lub dyskową przystosowaną do bezpośredniej współpracy z komputerem.

W trybie bezpośrednim (rys. 2.3) badacz sam formułuje program aplikacyjny, który wprowadza do komputera. Dane pomiarowe są wprowadzone do komputera bezpośrednio poprzez sprzężenie z aparaturą pomiarową, czyli tak zwany interfejs. Badacz korzysta na ogół z wielu programów opracowanych przez programistów systemowych. Komputer będąc tu integralną częścią stanowiska badawczego, może poza gromadzeniem i analizowaniem danych nadzorować względnie nawet sterować samym procesem wymuszania obciążeń lub przemieszczeń.



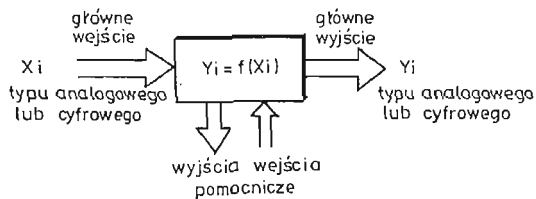
Rys. 2.3. Schemat korzystania z techniki komputerowej w pracach eksperymentalnych; system o działaniu bezpośrednim (on-line)

3. System pomiarowy oraz jego elementy składowe

Układem pomiarowym określany jest zbiór technicznych środków, który to zbiór, poprzez odpowiedni dobór jego elementów i ich wzajemne sprzężenie, przystosowany jest do realizacji określonej operacji pomiarowej, tzn. do pomiaru, do rejestracji, do przetwarzania lub do odtwarzania określonych wartości przebiegu (funkcji) [14, 15]. Zdolność realizacji określonej operacji pomiarowej danego układu pomiarowego podyktowana jest

własnościami zastosowanych elementów oraz zależy od rodzaju sprzężeń między tymi elementami, czyli od struktury układu pomiarowego. Elementy składowe układu pomiarowego w najogólniejszym modelu są „czarną skrzynką” z wejściami głównymi X_i i wyjściami głównymi Y_i oraz wejściami i wyjściami pomocniczymi (rys. 3.1) [14, 15, 23, 25].

Wejścia i wyjścia główne opisywane są sygnałami pomiarowymi, to jest sygnałami przenoszącymi informacje o wielkościach mierzonych, przetwarzanych lub odtwarzanych (por. [1, 14, 15, 32]).



Rys. 3.1. Model elementu (systemu) pomiarowego

Podstawy matematycznego modelowania sygnałów informacyjnych oraz urządzeń i systemów pomiarowych omówione jest między innymi w monografiach [14, 15].

Odpowiednio do dwóch typów informacyjnych sygnałów głównych — analogowych i cyfrowych, przenoszących informacje o wielkościach mierzonych (przetwarzanych lub odtwarzanych) rozróżnia się następujące cztery typy przetworników znajdujących zastosowanie w układach pomiarowych [14, 23]:

- przetworniki analogowo-analogowe (A/A), przetwarzające sygnały analogowe w sygnały analogowe (np. czujnik pomiarowy, wzmacniacz),
- przetworniki cyfrowo-analogowe (C/A), przetwarzające sygnały cyfrowe w sygnały analogowe (np. konwertory),
- przetworniki analogowo-cyfrowe (A/C), przetwarzające sygnały analogowe w sygnały cyfrowe (np. woltomierz, omomierz cyfrowy),
- przetworniki cyfrowo-cyfrowe (C/C), przetwarzające sygnały cyfrowe w sygnały cyfrowe (np. translatory).

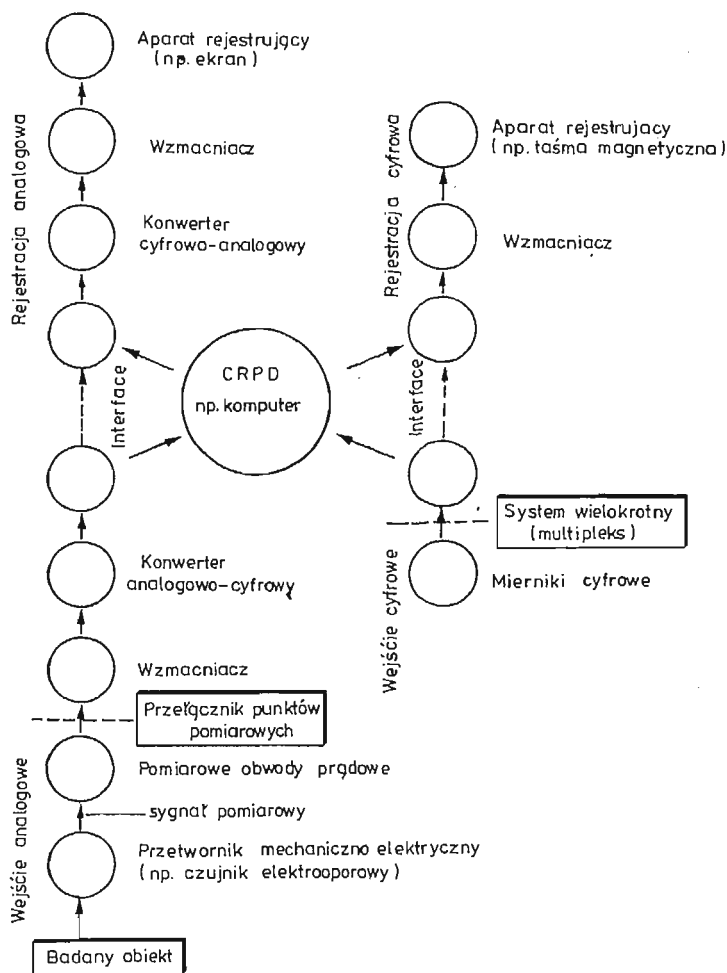
W cyfrowej technice pomiarów, dogodnej dla maszyn cyfrowych, podstawową rolę odgrywają przetworniki cyfrowe zwane konwertorami typu C/A, A/C i C/C. Przetworniki te umożliwiają także zmechanizowanie procesu odczytu graficznych przebiegów analogowych uzyskiwanych z oscylografów lub rejestratorów.

Układy pomiarowe, systemu pomiarowo-przetwarzającego, którego schemat przedstawiono na rys. 3.2, zestawiane są z reguły z przyrządów pomiarowych, przetworników typu A/A, konwertorów, komutatorów, rejestratorów, wzmacniaczy oraz układów dopasowujących sygnały, a więc translatorów lub interfejsów.

Każdy ciąg systemu pomiarowo-analizującego przystosowany jest w zasadzie do obsługi jednego zewnętrznego urządzenia. Układ pomiarowy w większości realizacji jest więc równoległym zwielokrotnieniem układów mono informacyjnych. Zwielokrotnienie punktów pomiarowych w tym przypadku wymagałoby zwielokrotnienia układów pomia-

rowych a przede wszystkim przetworników pomiarowych typu A/A, A/C lub C/A. Przetworniki te, jak dotychczas, są stosunkowo kosztowne, dlatego stosuje się — w celu lepszego ich wykorzystania — komutację sygnału [13, 14, 18, 23].

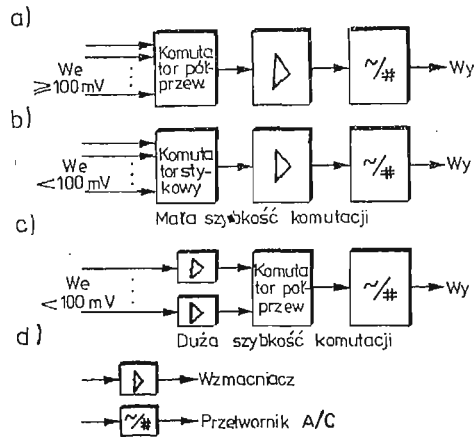
Współcześnie stosuje się dwie odmiany komutatorów: stykowe i półprzewodnikowe. Bardziej nowoczesne i niezawodne są komutatory półprzewodnikowe; napotyka się jednak



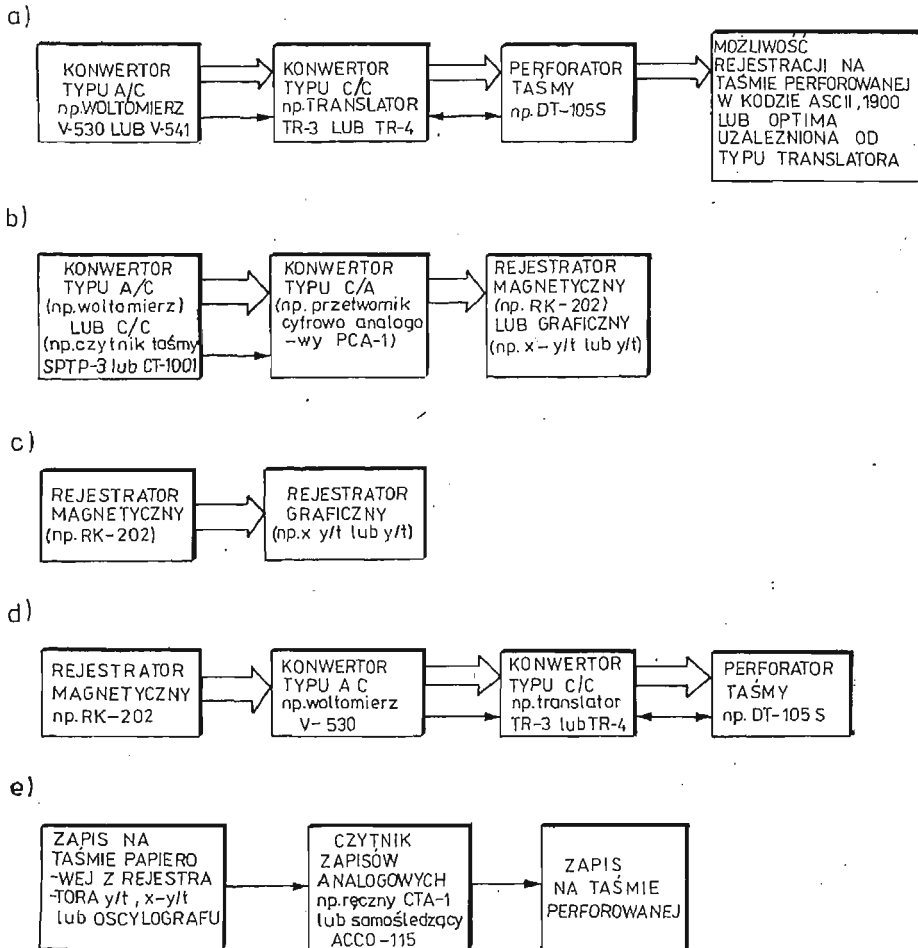
Rys. 3.2. Schemat systemu pomiarowo-przetwarzającego; CRPD — centralna rejestracja i przetwarzanie danych

na trudności przy budowie komutatorów dla sygnałów o niskich napięciach. Z tego też względu obecnie najczęściej znajdują rozwiązania przedstawione na rysunku 3.3 [23].

Komutator w badaniach wykorzystywany może być również jako przetwornik do zapisu sygnału analogowego w postaci sygnału dyskretnego, czyli sprowadzany może być do funkcji urządzenia przekształcającego (dyskretyzującego) sygnał pomiarowy.

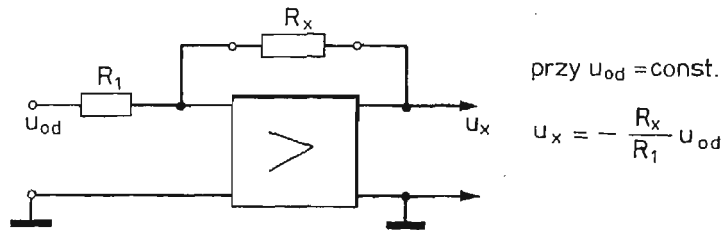


Rys. 3.3. Stosowane sposoby komutacji sygnału pomiarowego [23]



Rys. 3.4. Przykładowe rozwiązania końcówek pomiarowo-rejestrujących stosowanych w badaniach typu off-line

Szerszego omówienia wymagają urządzenia umożliwiające pomiar, jak i zapis sygnału pomiarowego w postaci dogodnej dla maszyny cyfrowej oraz prowadzącego badania. Urządzenia te, jak przetworniki pomiarowe (mierniki, rejestratory graficzne względnie magnetyczne) lub konwertory (woltomierze cyfrowe, omomierze cyfrowe, czytniki zapisów analogowych, częstotściomierze i fazomierze cyfrowe względnie translatory) umożliwiają przez odpowiednie połączenie budowanie końcówek pomiarowo-rejestrujących, znajdujących zastosowanie w badaniach typu off-line. Przykładowe realizacje niektórych końcówek, możliwe do uzyskania na bazie krajowej aparatury przedstawiono na rys. 3.4. Układ przedstawiony na rys. 3.4a, wyposażony w translator TR-3, umożliwia rejestrację wyników pomiarów na taśmie perforowanej w kodzie Optima lub ASCII dogodnym odpowiednio do Odry 1204 lub minikomputerów SM-3 i SM-4. Układ ten przy zastosowaniu translatora TR-4 umożliwia uzyskanie rejestracji wyników pomiarów w kodzie ASCII lub 1900 dogodnym do minikomputerów SM-3 i SM-4 oraz komputera Odra 1305, pracującego w kodzie 1900. Układ ten można stosować również do cyfrowego pomiaru rezystancji, czyli sprowadzić do funkcji omomierza cyfrowego poprzez dodanie dodatkowego układu w postaci wzmacniacza operacyjnego z oporowym sprzężeniem zwrotnym (rys. 3.5).



Rys. 3.5. Schemat strukturalny wzmacniacza dodatkowego, stosowanego przy pomiarze rezystancji woltomierzem cyfrowym

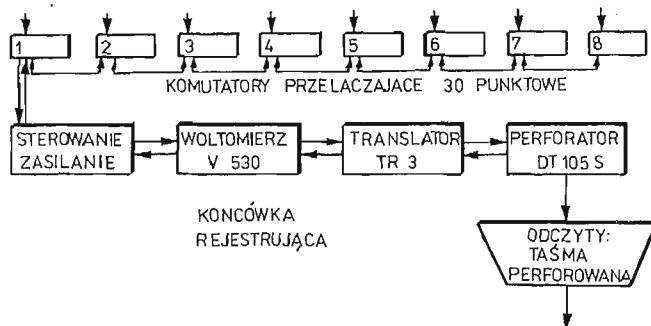
Układy przedstawione na rys. 3.4b, c, d, i e umożliwiają realizację następujących zmian postaci zarejestrowanego sygnału pomiarowego:

- odtworzenie zapisu na taśmie perforowanej w postaci przebiegu graficznego — układ z rys. 3.4b,
- zapis sygnału dyskretnego w postaci analogowej na taśmie magnetycznej lub w postaci graficznej — układ z rys. 3.4b,
- przekształcenie w postać graficzną sygnału zapisanego na rejestratorze magnetycznym — układ z rys. 3.4c,
- zapisanie na taśmie perforowanej sygnału zarejestrowanego na taśmie magnetofonowej — układ z rys. 3.4d,
- zapisanie na taśmie perforowanej oscylogramu względnie graficzny przebieg — układ z rys. 3.4e.

Możliwy do zastosowania w układzie z rys. 3.4e czytnik zapisów analogowych (ręczny CTA-1 lub samośledzący ACCQ-15) omówiony jest między innymi w pracach [11, 24 27].

4. Systemy pomiarowe typu off-line stosowane w badaniach własnych

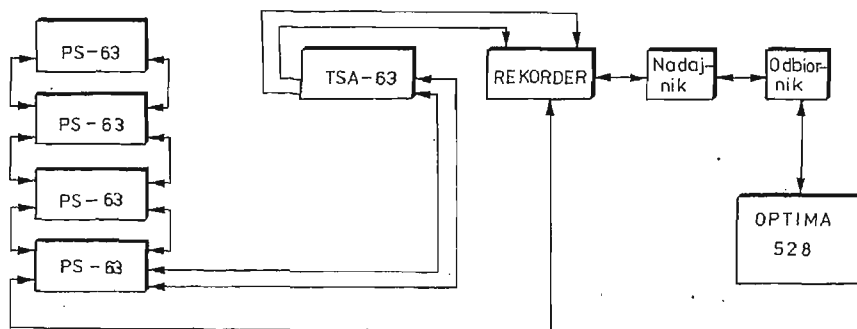
4.1. Układ przełączająco-rejestrujący. Układ ten, którego schemat blokowy przedstawiono na rys. 4.1, zastosowano do pomiaru rozkładu pola temperatury w powłokowej chłodni kominowej [31]. W skład układu wchodzi osiem 30 punktowych komutatorów mechanicznych, blok sterujący oraz końcówka rejestrująca składająca się z woltomierza cyfrowego V530, dzielnika napięcia, translatora TR-3, perforatora taśmy DT-105-S i bloku sterującego (rys. 4.1).



Rys. 4.1. Schemat blokowy aparatury zastosowanej do pomiaru (rejestracji) temperatury w powłoce chłodni kominowej

4.2. Układ tensometryczny. Posiadane trzy standardowe układy pomiarowe składające się z automatycznego mostka tensometrycznego TSA-63 oraz czterech 25-cio punktowych skrzynek przełączających produkcji MIKROTECHNA przystosowano do współpracy z automatem organizacyjnym OPTIMA-528, (rys. 4.2). Zastosowany tu układ sprzęgający wyposażono w nadajnik oraz odbiornik. Umożliwia to przesyłać informacje pomiarowe drogą łączności przewodowej od stanowiska badawczego do automatu organizacyjnego OPTIMA-528, umieszczonego w bezpośrednim sąsiedztwie minikomputera SM-3.

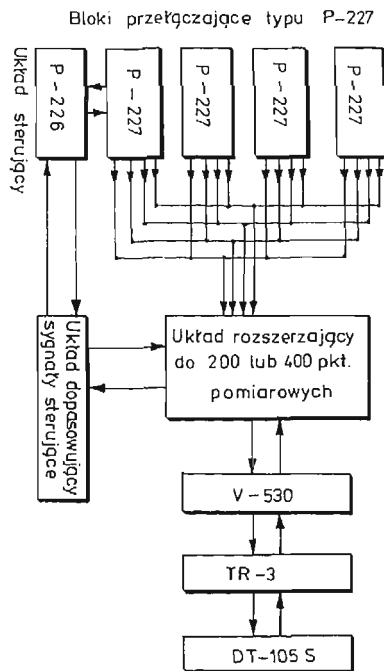
Zastosowane połączenie pomiarowego zestawu tensometrycznego z automatem organizacyjnym OPTIMA-528 umożliwia prowadzenie badań w trybie off-line z komputerem Odra 1204 oraz minikomputerami SM-3 i SM-4. Realizację współpracy z minikomputerami SM-3 i SM-4 umożliwia opracowany program tłumaczący informacje zapisaną w kodzie OPTIMA na kod ASCII.



Rys. 4.2. Schemat blokowy układu tensometrycznego TSA-63 połączonego z automatem organizacyjnym Optima-528

4.3. Układ pomiarowo-rejestrujący wykonany na bazie bloków P-226 i P-227. Układ ten stosowany obecnie w badaniach modelowych wykonany został na bazie bloków przełączających P-227, bloku sterującego P-226 produkowanych przez MERATRONIK oraz z końcówki rejestrującej. Układ ten, (rys. 4.3), rejestrujący wyniki pomiarów na taśmie perforowanej z szybkością 10-ciu pomiarów na sekundę przystosowano również do bezpośredniej współpracy z minikomputerem SM-3. Przy współpracy z minikomputerem, realizowanej w trybie on-line, stosowana jest maksymalna szybkość rejestracji układu, wynosząca 100 pomiarów na sekundę.

Układ ten szczegółowo omówiony jest w pracy [3].

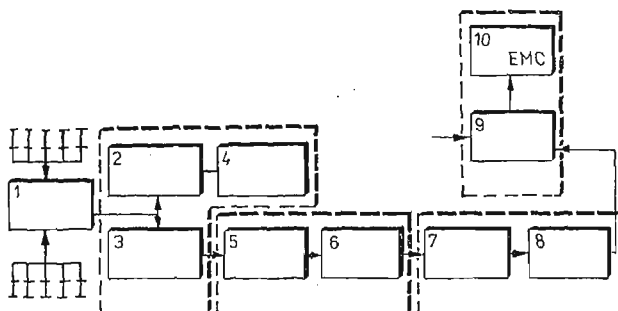


Rys. 4.3. Schemat blokowy układu pomiarowo-rejestrującego

4.4 Aparatura strunowa PAS. Aparatura strunowa PAS produkowana jest przez Zakład Aparatury Naukowej Uniwersytetu Jagiellońskiego w wersji cyfrowej i analogowej. Dostępne są mierniki analogowe SAM-10 oraz cyfrowe SMC-10 (SMC-2) przystosowane do zdalnych automatycznych pomiarów częstotliwości drgań strun dziesięciu czujników podłączonych do miernika z chwilową rejestracją wskazań i stałą rejestracją na taśmie perforowanej.

Schemat blokowy aparatury strunowej PAS przedstawiono na rys. 4.4. Mierniki SAM-10 i SMC-10 współpracować mogą z czujnikami do pomiaru: odkształceń, temperatury, przemieszczeń, ciśnienia (parcia) oraz odchylenia kątowych.

Miernik cyfrowy SMC-10 przystosowany jest do współpracy z drukarką taśmy perforowanej DT-105S, czyli również do pośredniej współpracy z komputerem. Szczegółowe dane techniczne miernika SAM-10 i SMC-10 jak i czujników pomiarowych podane są między innymi w pracy [30].

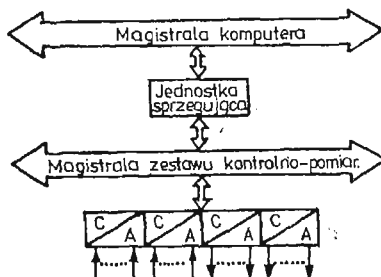


Rys. 4.4. Schemat blokowy strunowej aparatury cyfrowej; 1 — komutator, 2 — sterowanie ręczne, 3 — sterowanie automatyczne, 4 — wskaźnik numeracji czujników, 5 — wzmacniacz układu pomiarowego, 6 — czasomierz liczący, 7, 8 — układ rejestrujący, 9 — czytelnik, 10 — EMC

5. Systemy pomiarowe typu on-line — kanały procesowe

Kanał procesowy uzyskuje się poprzez sprzężenie układu pomiarowego z komputerem. Połączenia te realizowane są za pomocą urządzenia łączności, czyli urządzenia (interfejsy) dopasowujące sygnały pomiędzy magistralą komputera a magistralą układu pomiarowego (rys. 5.1).

Interfejsy stosowane w układach pomiarowych oraz w systemach komputerowych oparte są najczęściej na standardach: UNIBUS, CAMAC, IEC, PI, V24, IEC, SII. Zasady ich organizacji omówione są pracach [23, 25].



Rys. 5.1. Schemat realizacji połączenia układu pomiarowego z komputerem

Urządzenia łączności umożliwiają korespondencję pomiędzy magistralami komputera oraz dołączonymi zewnętrznymi urządzeniami (rys. 3.2). Urządzenia sprzęgające komputer z obiektem muszą zatem, ogólnie biorąc, spełniać następujące zadania, [23]:

- izolować zestaw komputerowy od zakłóceń i uszkodzeń mogących wystąpić w obiekcie lub w sieci przewodów,
- dopasowywać poziomy napięciowe i energetyczne występujące na obiekcie do występujących w zestawie komputerowym,
- dopasowywać chwile czasowe występowania sygnałów na obiekcie do chwil czasowych przetwarzania sygnałów w zestawie komputerowym (tzw. pamięci buforowe),

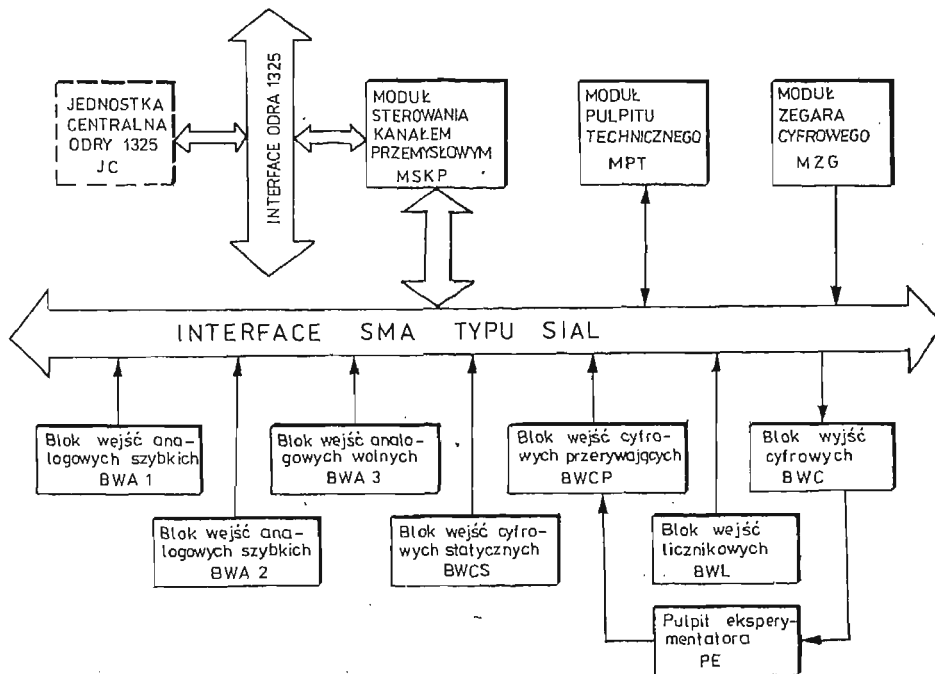
— przetwarzać postać sygnałów (np. analogowe w cyfrowe, kodowane liczbą sygnałów na kodowane liczbami dwójkowymi itd.).

W zależności od sposobu realizacji, kanały procesowe podzielić można na następujące trzy grupy, [23]:

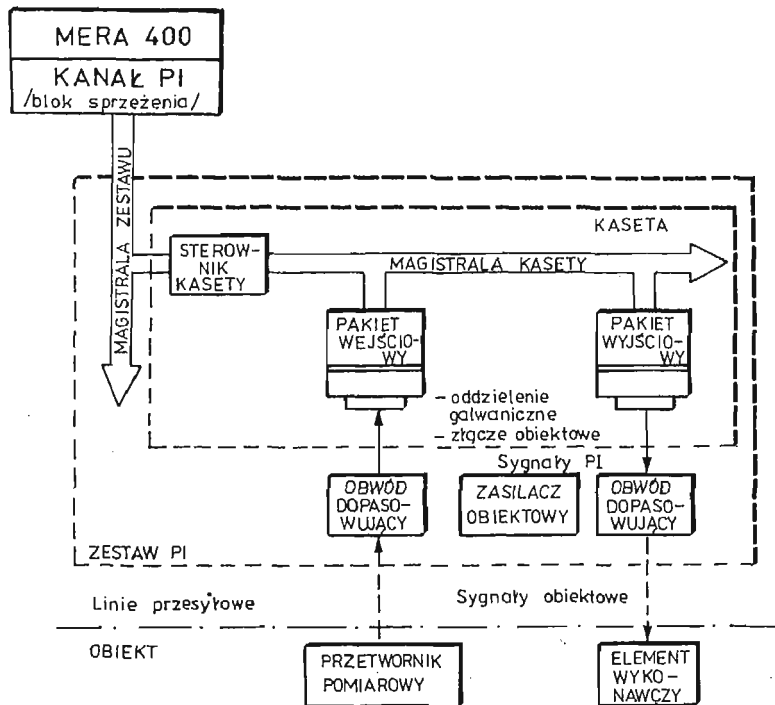
- kanał procesowy opracowany dla określonego komputera lub rodziny komputerów,
- kanał procesowy typu uniwersalnego łączony z komputerem przy użyciu jednostek sprzęgających,
- unikalny kanał procesowy zaprojektowany i wykonany przez użytkownika.

Kanały procesowe pierwszej grupy dostarczone są razem z komputerem jako jedno z urządzeń zewnętrznych. Kanał taki charakteryzuje się kompleksowością, kompletnością oraz dobrymi parametrami technicznymi i eksploatacyjnymi. Do grupy tej zaliczyć należy kanały procesowe produkcji ZSRR [28, 29], przystosowane do współpracy z minikomputerami: M-6000, M-7000, SM-1, SM-2, SM-3 i SM-4. Do grupy drugiej zaliczyć można: krajową aparaturę standardu CAMAC [23], system mikrokomputerowy MERA-60, czy też kanał automatyki INTEL DLIGHT—PI [23]. Na podkreślenie zasługuje fakt, że wszystkie minikomputery rodziny SM mogą być wyposażone w urządzenie sprzęgające, umożliwiające współpracę z krajową aparaturą standardu CAMAC.

Konkretną realizację kanału procesowego ODRA 1325-SMA wdrożonego na bazie komputera Odra 1325 i Systemu Modułowej Automatyki SMA w Laboratorium Dynamiki Instytutu Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej Politechniki Wrocławskiej omówiono między innymi w pracy [4]. Schemat tego układu przedstawiono na rys. 5.2.



Rys. 5.2. Schemat blokowy zestawu SMA-Odra 1325



Rys. 5.3. Schemat blokowy zestawu MERA-400-PI

Z krajowej aparatury na uwagę zasługują również urządzenia peryferyjne standardu PI, mogące współpracować między innymi z komputerami MERA-400 oraz ODRA 1325. Schemat blokowy kanału procesowego zestawionego na standardzie INTEL DLIGIT-PI przedstawiono na rys. 5.3. Zestaw PI, stanowiący dla komputera jedno urządzenie wejścia-wyjścia, obejmuje: jeden blok sprzęgający i od 1 do 16 kaset ze sterownikami kaset. Maksymalna pojemność zestawu PI wynosi 256 stanowisk adresowanych.

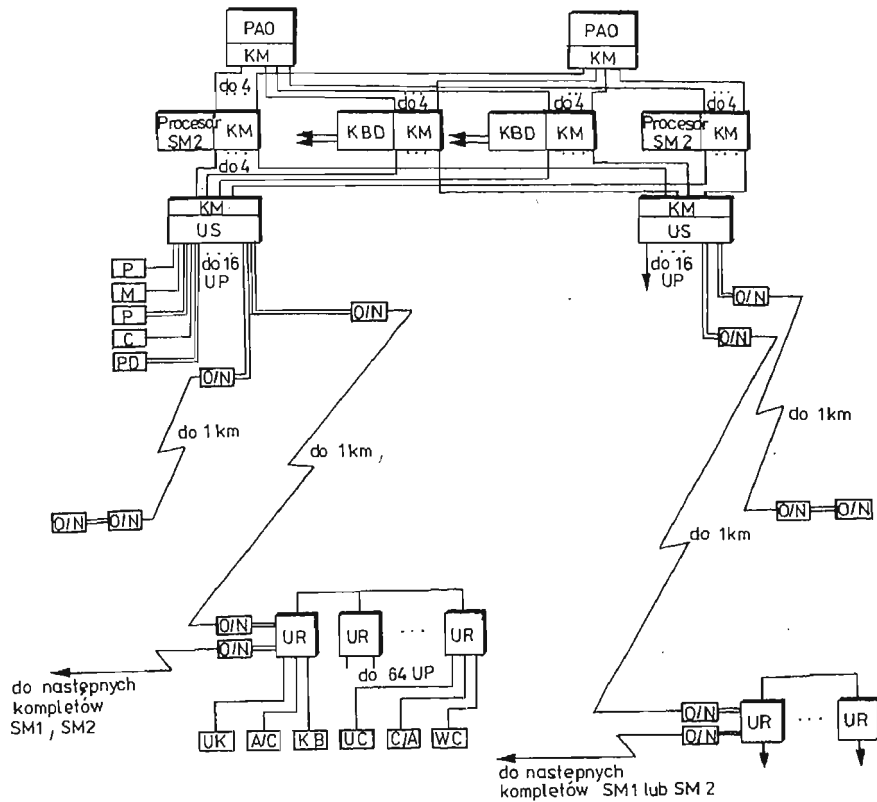
Przykładową organizację sprzężenia kanału procesowego z minikomputerem rodziny SM (SM-2) przedstawiono na rys. 5.4.

Podstawowymi blokami, przedstawionego na rys. 5.4, kanału procesowego o interfejsie 2K są [28, 29]:

- układ sterujący kanałami wejścia — wyjścia,
- kanał bezpośredniego dostępu do pamięci,
- multipleksowy kanał wejścia/wyjścia,
- przetwornik analogowo-cyfrowy typu A612-10 lub A612-11.

Kanał ten charakteryzuje się następującymi parametrami eksploatacyjnymi:

- maksymalna liczba połączeń urządzeń zewnętrznych 1764 — przy dwustopniowej adresacji oraz 56 — przy adresacji jednostopniowej,
- zakres pomiarowy ± 10 V i ± 5 V,
- rozdzielczość 2^{-11} ,
- czas przetwarzania do $10\mu\text{s}$,

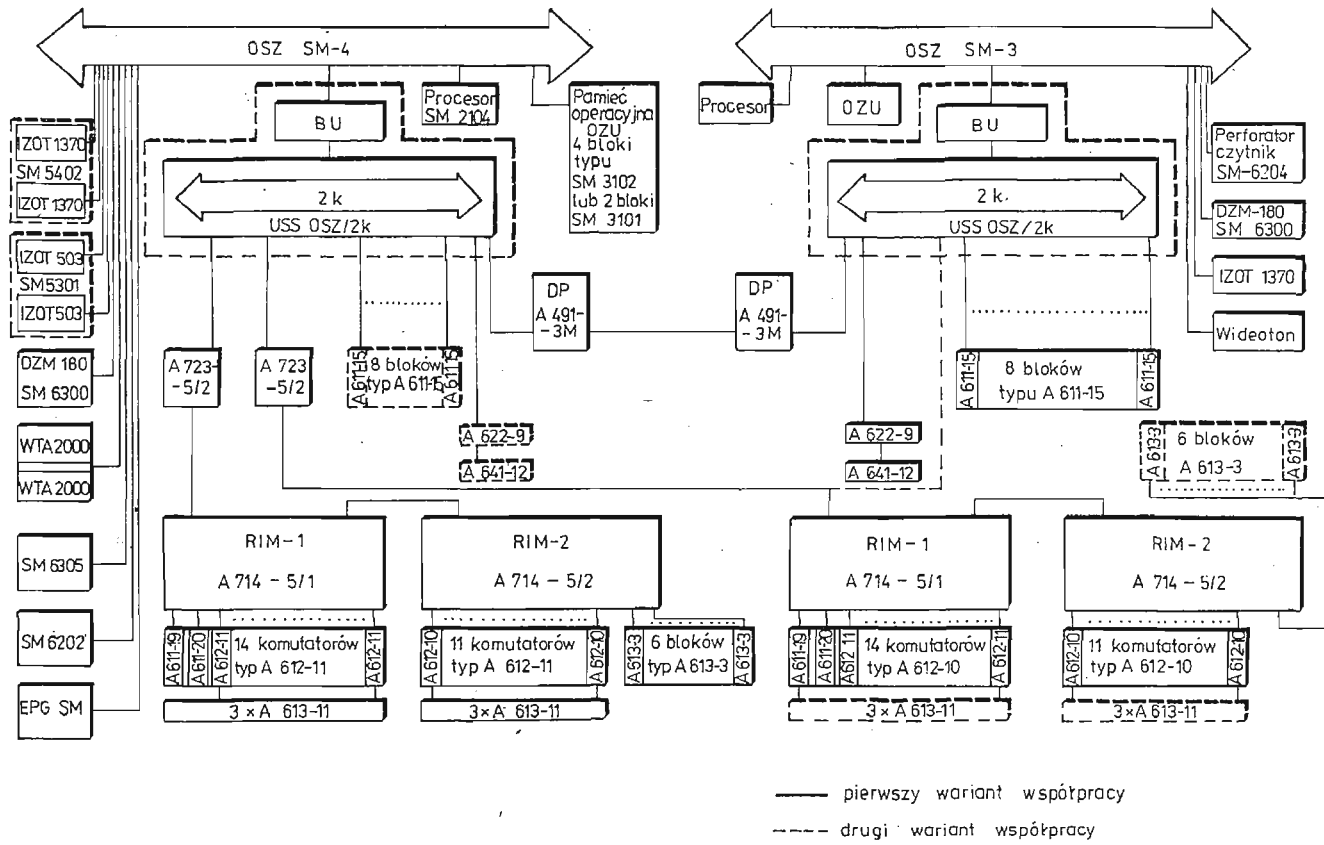


- PAO – pamięć operacyjna 32k słów
- KM – komutator systemu obsługujący urząd. standardowe systemu
- KBD – kanał bezpośredniego dostępu do pamięci
- US – układ wej./wyj.
- O/N – układy odbiorczo-nadawcze stosowane w systemie gdzie urząd. kanału są oddalone od części centralnej systemu
- M – monitor
- P – perforator
- D – drukarka
- C – czytnik
- PD – pamięć dyskowa
- UR – urządzenia rozszerzające ilość podłączanych urządzeń peryferyjnych
- UP – urządzenia peryferyjne
- UK – komparator
- A/C – przetwornik analog.-cyfrowy
- KB – komutator bezkontaktowy
- C/A – przetwornik cyfr. analogowy
- WC – wejście cyfrowe
- UC – układ sterowania cyfrowego

Rys. 5.4. Kanał procesowy zrealizowany na bazie minikomputera SM-2 oraz urządzeń peryferyjnych SM-1, SM-2

- czas komutacji komutatora A611-10 — 100 μ s,
- czas komutacji komutatora A612-11 — 4 μ s.

Konfigurację kompletowanego w Laboratorium, przez autorów, kanału procesowego na bazie minikomputerów SM-3 i SM-4 oraz urządzeń peryferyjnych SM-1 i SM-2 (por.

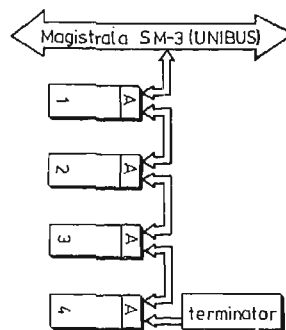


Rys. 5.5. Kanał procesowy zrealizowany na bazie minikomputerów SM-3 i SM-4 oraz urządzeń peryferyjnych SM-1, SM-2

rys. 5.4) przedstawiono na rys. 5.5. Kanał ten składał się z minikomputerów SM-3 i SM-4 sprzężonych między sobą poprzez dwustronny rejestr DP typu A491-3M. Współpraca minikomputera SM-4 jak i SM-3 z urządzeniami peryferyjnymi SM-1 i SM-2 zapewniona będzie poprzez interfejs zrealizowany w postaci bloku łączącego interfejs OSZ i 2K typu USSOSZ/2K, [28]. Minikomputer SM-4 wchodzący w skład kanału procesowego wyposażony będzie ponadto w: procesor SM2104, pamięć operacyjną SM3102, pamięć dyskową SM5402 ($2 \times I20T1370$), pamięć taśmową SM5301 ($2 \times I20T503$), drukarki znakowo-mozaikowej DZM180-SM6300, wideotermina WTA2000, drukarki wierszowej SM6305, urządzenia wyjścia, wejścia taśmy perforowanej SM-6202, grafoskopu EPG-SM oraz bloku rozszerzającego system BRS.

Kanał procesowy skompletowany na bazie urządzeń peryferyjnych SM-1 i SM-2 składa się z dwustronnego rejestru DP A491-3M, urządzeń rozszerzających ilość podłączonych urządzeń peryferyjnych RIM-A714 w składzie RIM-1 typu A714-5/1 oraz RIM-2 typu A714-5/2, modułów wewnątrzsystemowej łączności MSW A723-5/2, modułów przetworników analogowo-cyfrowych A611-19, modułów przetworników analogowo-cyfrowych porównujących A-611-20, komutatorów bezstykowych typu A612-10 i A612-11, modułów podłączenia pomiarowych urządzeń cyfrowych A611-15, modułów wejścia-wyjścia sygnałów dyskretnych A641-12, modułów wybierania i zapamiętywania A613-3, modułów galwanicznego rozłączenia A622-9, modułów normalizacji i filtracji A613-11 oraz modułów sygnałów kontrolnych typu IS-1 oraz IS-2.

Typowym przykładem uniwersalnego kanału procesowego jest aparatura standardu CAMAC [23]. Dzięki jej uniwersalności znalazła one duże rozpowszechnienie w różnego rodzaju systemach stosowanych w pracach eksperymentalnych. Układ ten wyposażony w interfejs SM-3-CAMAC typu 106A może być bezpośrednio połączony z magistralą minikomputera SM-3. Interfejs ten umożliwia łańcuchowe podłączenie czterech kaset do magistrali komputera (rys. 5.6). Interfejs SM-3 CAMAC jest specjalizowanym kontrolerem przeznaczonym do sterowania kasetami CAMAC z minikomputera SM-3 w reżimie pracy programowej, zapewniającym dwukierunkową wymianę informacji między minikomputerem a systemem CAMAC.



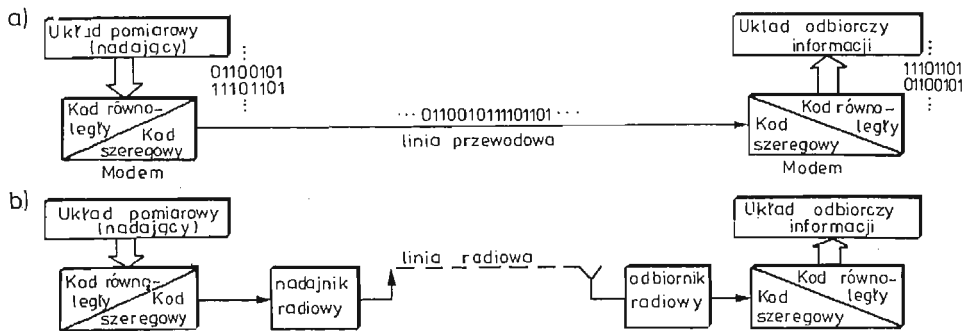
Rys. 5.6. Schemat zestawu wielokasetowego CAMAC przystosowanego do współpracy z minikomputerem SM-3, SM-4; A — blok sterujący

Kompletowany w naszym laboratorium kanał procesowy składający się z czterech kaset CAMAC sprzężonych z minikomputerem SM-3 charakteryzuje się następującymi parametrami eksploatacyjnymi:

- liczba możliwych połączeń — 600,
- zakresy pomiarowe ± 50 mV, ± 100 mV, ± 500 mV, ± 1 V, ± 5 V, ± 10 V,
- rozdzielność — 2^{-11} ,
- czas przetwarzania — 20 ms,
- czas komutacji do 100 Hz.

Szczegółowe informacje na temat organizacji jak i konstrukcji systemu CAMAC podane są między innymi w opracowaniach [23]

Na rys. 5.7 pokazano schemat transmisji danych stosowanej przy pośrednim podłączeniu układu pomiarowego z komputerem. Przesyłanie danych cyfrowych realizowane może być jedno względnie wieloprzewodowymi liniami typu telefonicznego względnie drogą radiową. Zagadnienie realizacji sieci telekomunikacyjnej do obsługi komputerów obszernie omówione jest w monografii [1].



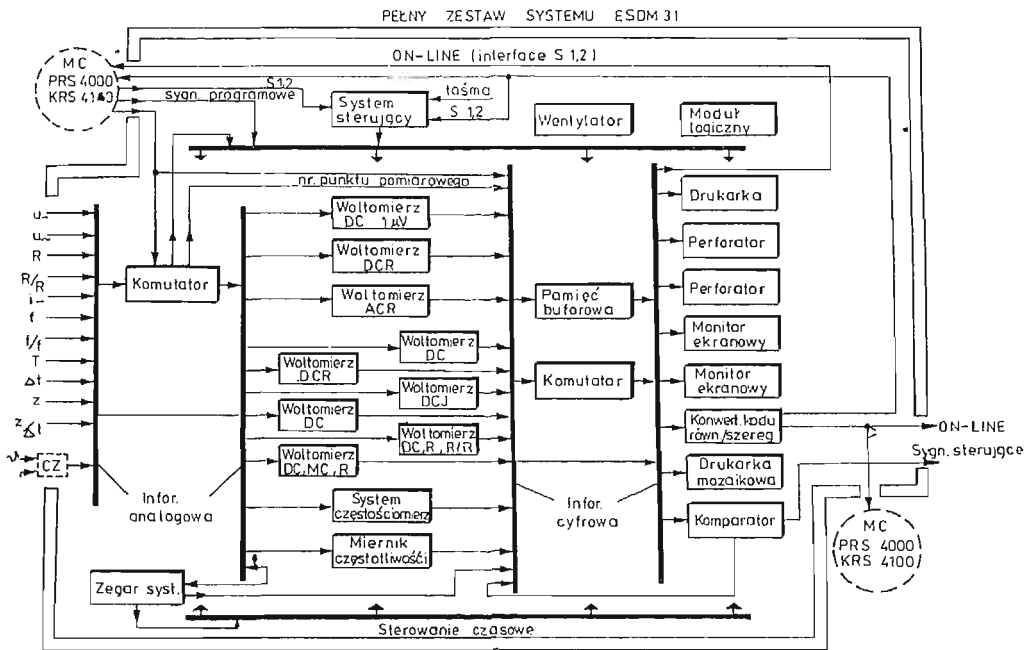
Rys. 5.7. Szeregowe przesyłanie danych cyfrowych; a) przewodowe, b) bezprzewodowe

6. System pomiarowy typu on-line stosowany w pracach własnych

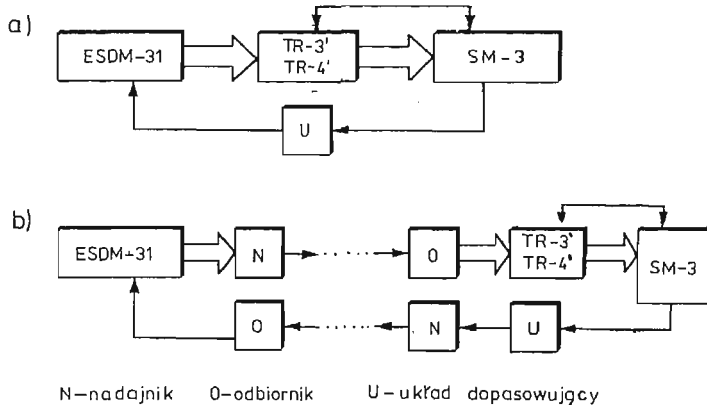
Będący do naszej dyspozycji kanał procesowy uzyskano poprzez podłączenie do minikomputera SM-3 układu pomiarowego typu ESD-31 produkcji NRD. Schemat blokowy układu pomiarowego przedstawiono na rys. 6.1. Na rys. 6.2 przedstawiono natomiast schemat blokowy pośredniego oraz bezpośredniego podłączenia układu ESDM-31 do minikomputera SM-3. Zastosowane tu urządzenia łączności wykonane zostały we własnym zakresie na bazie translatorów TR-3 i TR-4. Szczegółowy opis realizacji zastosowanego połączenia SM-3 ESDM-31 omówiono w pracy [2].

Wykonany kanał procesowy charakteryzują następujące parametry eksploatacyjne:

- maksymalna liczba połączeń urządzeń zewnętrznych 100, 200 lub 400,
- zakres pomiarowy: $\pm 0,2$ V, ± 2 V, ± 20 V, ± 200 V, ± 1 kV,
- rozdzielność od 1 V do 100 nV stosownie do zakresu.



Rys. 6.1. Schemat blokowy systemu pomiarowo-informacyjnego ESDM-31 oraz kanału procesowego zrealizowanego na bazie minikomputera PRS-4000 lub KRS-4100 i układu ESDM-31



Rys. 6.2. Kanał procesowy ESDM-31-SM-3 przy bezpośrednim (a) oraz pośrednim (b) sprzężeniu z minikomputerem SM-3 lub SM-4

- czas przetwarzania 80 ms,
- czas komutacji 100 Hz.

Układ pomiarowy ESDM-31 ma możliwość bezpośredniego jak i pośredniego połączenia z minikomputerem PRS4000 lub KRS4100 produkcji NRD (por. rys. 6.1). Układ ten w ramach prac własnych przystosowano do współpracy z minikomputerem SM-3 i SM-4. Połączenie to, o dwukierunkowym przesyłaniu informacji stwarza możliwość zastosowania

w pełni skomputeryzowanego procesu badań modelowych, tzn. poza zbieraniem i opracowywaniem wyników pomiarów, pozwala także sterować odpowiednio skonstruowanym układem obciążającym. Pośrednie połączenie zrealizowano jako połączenie przewodowe oraz radiowe, wykorzystując posiadane radiotelefony. Aktualnie opracowywany jest wielokanałowy układ do radiowego przesyłu informacji.

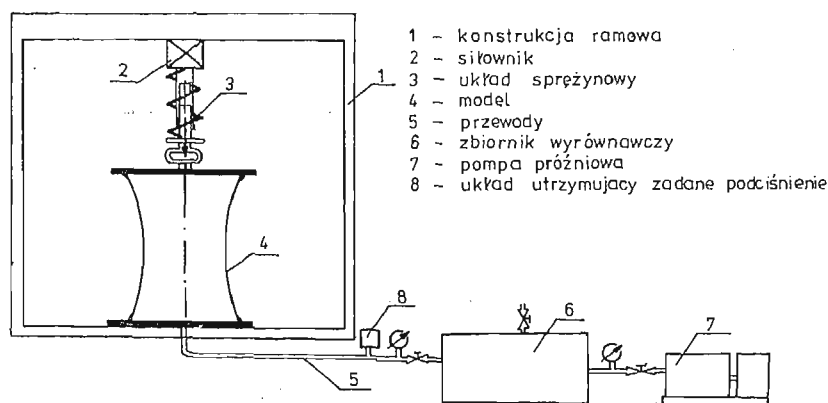
7. Przykłady zastosowań komputera SM-3 w badaniach własnych

7.1. Pomiar rozkładu temperatury w powłoce żelbetowej hiperboloidalnej chłodni kominowej.

Badania te przeprowadzono w latach 1974 - 79. Pomiarom poddano powłokę hiperboloidalnej chłodni kominowej w Elektrowni Rybnik. Do pomiaru temperatury powłoki zastosowano termistory NTC 110 rozmieszczając je na 5-ciu poziomach wzdłuż 8-miu południków. W każdym punkcie pomiarowym zastosowano po 5 termistorów równomiernie rozmieszczonych po grubości powłoki. Badania przeprowadzono trybem off-line stosując układ przełączająco-rejestrujący, skompletowany w własnym zakresie (por. rys. 4.1). Obszerne omówienie realizacji jak i wyników tych badań przedstawiono w pracy [31]. Autor w ramach badań opracował kompleksowy system programów na komputer do opracowywania wyników badań oraz do ustalania prognozy rozkładu temperatury w powłoce chłodni kominowej, położonej w dowolnym miejscu, w określonym dniu roku oraz w określonej godzinie doby. Uzyskane wyniki wykorzystane są w analizie statycznej nowo realizowanych obiektów a pozyskane doświadczenia przy planowaniu kompleksowych badań wieloprzewodowego komina oraz chłodni kominowej Elektrowni Opole.

7.2. **Badania modelowe stateczności powłok hiperboloidalnych chłodni kominowych.** Badania te prowadzone są w trybie off-line na dwukrzyżwiznowych modelach wykonanych z żywicy epoksydowej przy zastosowaniu uprzednio omówionych układów pomiarowych (por. rys. 4.2, 4.3 i 6.1). Schemat zastosowanego stanowiska badawczego przedstawiono na rys. 7.1.

Modele powłoki, o ujemnej krzywiznie GAUSSA, poddane są obciążeniom osiowo-symetrycznym. Obciążenia te realizowane są wywołanym podciśnieniem oraz siłą pionową



Rys. 7.1. Schemat stanowiska badawczego; 1 — konstrukcja ramowa, 2 — siłownik, 3 — układ sprężynowy, 4 — model, 5 — przewody, 6 — zbiornik wyrównawczy, 7 — pompa próżniowa, 8 — układ utrzymujący zadane podciśnienie

przyłożoną do brzegów modelu. Niektóre z uzyskanych wyników badań omówione zostały między innymi w pracach [16, 17].

Zasadniczym celem tych badań jest określenie dolnych obciążeń krytycznych. Badania realizowane są również na modelach hiperboloidy jednopowłokowej o powłoce gładkiej, wzmocnionej uźebrowaniem oraz wykonanej w wersji powłoki trójwarstwowej, to znaczy powłoki składającej się z zewnętrznego oraz wewnętrznego płaszcza połączonego żebrami.

Uzyskane dotychczas wyniki badań utwierdziły nas w konieczności pełnej ich komputeryzacji jako że aktualnie stosowanie techniki badań w zdecydowany sposób wpływają na wielkość obciążeń krytycznych. Uzyskiwane siły krytyczne, posiadające z reguły zawyżone wartości, zdaniem autorów osiągać mogą inny charakter w przypadku zastosowania sterowanego obciążenia (niezależnego od stanu deformacji badanego modelu) czyli obciążenia nadającego za deformującym się modelem. Z tego też względu prowadzone są obecnie prace związane z realizacją wymienionych badań według trybu on-line. W tym celu wykonywany jest układ sterujący systemem obciążającym model. W skład układu wchodzi sterowany zawór do wywoływania podciśnienia oraz sterowany siłownik do pionowego obciążenia modelu. Układ ten charakteryzuje się tym, że umożliwia utrzymywanie stałego oddziaływania na model w trakcie jego deformacji.

7.3. Badania komina Elektrowni Opole. Badania te prowadzone są w skali modelowej, w trybie off-line oraz w naturze w trybie on-line. Zasadniczym celem tych badań jest ustalenie rzeczywistych, zmiennych w czasie obciążeń od wiatru, działających na obiekt jak też odpowiedzi obiektu na te oddziaływania. W trakcie badań prowadzone będą pomiary profilu prędkości oraz rozkładu ciśnienia wiatru na badany obiekt. Prowadzony będzie także jednoczesny pomiar odkształceń, przemieszczeń oraz rozkładu pola temperatury. Odkształcenia mierzone będą w zbrojeniu jak i betonie a całością pomiarów sterować będzie minikomputer na podstawie analizy wyników pomiarów prędkości wiatru uzyskiwanych z anemometru. Anemometr ten spełniał będzie więc funkcję tak zwanego czujnika próbkującego. W badaniach tych wykorzystywana jest aparatura omówiona w punkcie 6 niniejszego opracowania, oraz kanał procesowy CAMAC sprzężony z minikomputerem SM-3. Komin Elektrowni Opole o wysokości 250 m i średnicy 24 m wyposażono zatem w czujniki do pomiaru: temperatury, odkształceń, przemieszczeń oraz ciśnienia wiatru. Jako przetworniki pomiarowe zastosowano tu termistory, tensometry półprzewodnikowe czujniki strunowe oraz czujniki do pomiaru ciśnienia własnej konstrukcji. Łącznie na obiekcie zamontowano 600 przetworników pomiarowych rozmieszczonych wzdłuż 12-tu południków. Wyniki pomiarów przesyłane będą drogą przewodową lub radiową do minikomputera SM-3 lub SM-4 usytuowanego w laboratorium.

Podjęcie kompleksowych badań komina Elektrowni Opole podyktowane zostało między innymi prototypowością obiektu, jego bliskością (kilkanaście km od Opolą) oraz dużą średnicą trzonu, istnieje możliwość uzyskania wyników dla dużych liczb Reynoldsa.

8. Wnioski i zakończenie

W produkowanej obecnie aparaturze pomiarowej dominującą rolę odgrywa technika cyfrowa. Technika ta pozwala przystosować (połączyć) aparaturę do współpracy z komputerem stała się możliwa dzięki:

- automatyzacji procesu pomiarowego,
- automatyzacji przetwarzania i opracowywania informacji pomiarowych,
- przystosowaniu układów pomiarowych do współpracy z innymi urządzeniami, a zwłaszcza z układami automatycznej kontroli i regulacji procesów,
- wprowadzenia komputera jako nadrzędnej jednostki kontroli i regulacji procesu pomiarowego,
- wprowadzeniu urządzeń łączności przystosowanych do przesyłania informacji cyfrowych.

Wprowadzanie nowych technik pomiarowych do prac eksperymentalnych napotyka jednak na szereg utrudnień natury obiektywnej. Wymienić tu należy przede wszystkim braki aparaturowe na rynku, tradycyjność w podejmowanych metodach badawczych, nieznaczne angażowanie specjalistów elektroników w zespołach badawczych.

Utrudnienia te możliwe są do przewyciężenia, względnie ich złagodzenia, jedynie na drodze tworzenia wyspecjalizowanych zespołów badawczych, w skład których wchodzić będą specjaliści elektronicy. Obecność ich w zespołach badawczych przyczyni się do tworzenia indywidualnej, specjalizowanej aparatury naukowo-badawczej, przystosowanej do podejmowanych problemów badawczych, a nie odwrotnie.

Na podkreślenie zasługuje także fakt, że wprowadzenie do badań specjalizowanej aparatury pomiarowej sprzężonej z minikomputerem, poza przyspieszeniem samych badań, stwarza nowe możliwości w samym procesie badawczym, jak i opracowywaniu wyników pomiarów.

Literatura cytowana w tekście

1. N. ABRAMSON, F. F. KUO, *Sieci telekomunikacyjne komputerów*, WNT, Warszawa, 1978.
2. W. ANTOSZAK, K. DRZEWIŃSKI, R. KALUŻA, K. SKRZYPULEC, *System pomiarowo-analizujący ESDM-31-SM-3*, Zeszyty Naukowe WSI w Opolu — (praca w druku).
3. W. ANTOSZAK, K. DRZEWIŃSKI, R. KALUŻA, K. SKRZYPULEC, *Układ pomiarowo-rejestrujący wykonany na bazie bloków P-226, P-227 oraz końcówki rejestrującej V-530 i DT105S*, Zeszyty Naukowe WSI w Opolu — (praca w druku).
4. K. BARANOWSKI, J. DZIKIEWICZ, M. SZATA, *System ODRA 1325-SMA w laboratorium badawczym*, V Konferencja Naukowa na temat Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji, Karpacz—Wrocław, 6-9 maja 1981.
5. A. BEKEYG, W. J. KARPLUS, *Obliczenia hybrydowe*, WNT, W-wa 1976.
6. J. BENAT, A. G. PIERSOL, *Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych*, PWN, Warszawa, 1976.
7. R. CIESIELSKI, *O badaniach doświadczalnych zrealizowanych konstrukcji inżynierskich*, Materiały konferencyjne z Konferencji „Metody doświadczalnych badań własności mechanicznych zrealizowanych konstrukcji”, Kraków—Janowice, 1977.
8. R. CIESIELSKI, *Eksperymentalne badania konstrukcji*, Raport podstawowy w Sekcji VIII, II Kongresu Nauki Polskiej, Wyd. Pol. Krakowskiej, Zeszyt 1, Kraków, 1973.
9. R. CIESIELSKI, W. ZIOBRON, *Stan i perspektywy rozwojowe konstrukcji inżynierskich, mostowych i hydrotechnicznych*, Referat zbiorczy Podsekcji 1, Sekcji VIII na II Kongres Nauki Polskiej, Materiały Kongresowe T. VIII, Wyd. PAN, Warszawa, 1973.
10. C. EIMER, Z. WASZCZYŹYŃ, *Kierunki rozwoju teorii Konstrukcji inżynierskich*, Inżynieria i Budownictwo, 2, 1973.

11. A. DOMAGAŁA, *Przystosowanie rejestratora kompensacyjnego typu EKB do śledzenia zapisów*, Pomiary Automatyka Kontrola, Zesz. 4, 1975.
12. E. J. FILINOW, U. P. CJEPIK, *Programnoje obespjeczenije UWK SM-3*, Pribory i sistemy uprawljenija, 1977, nr 10.
13. H. HOSSDORF, *Statyka modelowa*, Arkady, Warszawa, 1975.
14. J. JAWORSKI, *Matematyczne podstawy metrologii*, WNT, W-wa, 1979.
15. M. KRAUSS, E. G. WOSCHNI, *Systemy pomiarowo-informacyjne*, PWN, Warszawa, 1979.
16. O. MATEJA, R. KALUŻA, A. LANGOSZ, *Doświadczalna analiza stateczności powłoki chłodni kominowej*, XXVI Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZiTB w Krynicy, Wrocław—Krynica, 1980.
17. O. MATEJA, R. KALUŻA, A. LANGOSZ, *Doświadczalna analiza stateczności powłoki chłodni kominowej*, Archiwum Inżynierii Łądowej XXVII, z. 2/81
18. Materiały z Konferencji Naukowo-Technicznej pt. „Komputerowa Technika Pomiarowa”, zorganizowanej przez Oddz. Warszawski Elektroniki i Telekomunikacji SEP, Warszawa, 1978.
19. Materiały z Konferencji Naukowo-Technicznej pt. „Doświadczenia z wdrożenia komputerowych systemów sterowania procesami przemysłowymi” zorganizowanej przez SIiT Przem. Hutniczego w Polsce, Katowice, październik, 1976.
20. M. MAZUR, *Cybernetyka i charakter*, PAN, Warszawa, 1976.
21. B. N. NAUMOW, *Mieźdunarodnaja sistema malych EWM*, Pribory i sistemy uprawljenija 1977, nr 10
22. N. B. NAUMOW, A. N. KABALJEWSKIJ, J. N. GŁUCHOW, M. A. OSTROWSKI, *Uprawljajuszczij wyzczislitelnyj kompleks SM-4*, Pribory i sistemy uprawljenija, 1979, nr 3.
23. H. ORŁOWSKI, *Komputerowe układy automatyki*, WNT, Warszawa, 1980.
24. W. ORZECHOWSKI, W. TRAPP, *Czytnik taśm z przetwarzaniem na zapis cyfrowy*, Sympozjum „Komputeryzacja badań doświadczalnych w mechanice konstrukcji”, Opole, 24 - 26 listopada 1977.
25. R. S. OŻAROWSKI, S. KORNACKI, *Minikomputery w pracach eksperymentalnych*, WNT, Warszawa, 1980.
26. B. I. ROSTOKIN, *Operacjonnyje sistemy realnego wsjemjeni UWK SM-3 i SM-4*, Pribory i sistemy uprawljenija 1977, nr 12.
27. M. DADKOWSKI, A. SZUBERT, *Czytnik oscylogramów typ ACCO-115*, IV Konferencja Naukowo-Techniczna w Inst. Lotnictwa, Warszawa 10 - 12 listopada 1976.
28. S. I. SAMARSKIJ, *Organizacija efektiwnych sistem uprawljenija na bazie UWK SM-3 i SM-4 s ispolowanijem periferii UWK-M-6000, M-7000, SM-1, SM-2*, Pribory i sistemy uprawljenija 1980, nr 12.
29. A. J. SOKOŁOW, E. W. KESZEK, *Principy postrojenija sriedstw swjazi s obiektem UWK SM-3*, Pribory i sistemy uprawljenija 1977, nr 11.
30. Z. ŚNIADKOWSKI, *Zastosowanie metod tensometrii elektrooporowej do pomiarów wielkości mechanicznych w budownictwie*, Prace naukowe Instytutu Techniki Budowlanej, seria Monografie, Wyd. ITB, W-wa 1978.
31. L. TARCYŃSKI, *Analiza rozkładu temperatury w powloce żelbetowej hiperboloidalnej chłodni kominowej*, Raport nr PRE-38/80 Instytutu Inż. Łąd. Pol. Wrocławskiej, Wrocław, 1980.
32. C. WEITZMAN, *Systemy minikomputerowe — struktura i zastosowanie*, WNT, Warszawa, 1979.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МИНИКОМПЮТЕРА В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ОПЫТАХ
В МЕХАНИКЕ

В работе показано общие принципы организации измерений и информационных систем. Кроме того представлено собственный опыт выработанный во время применения миникомпютера в экспериментальных дмерениях в механике.

S u m m a r y

MINICOMPUTER APPLICATION IN EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS IN
MECHANICS

In the paper general principles of organization of measurement and information systems have been presented.

Also own experience gained during minicomputer application in experimental investigations in mechanics has been shown.

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 października 1981 roku.

STATYCZNE CIŚNIENIE NISZCZĄCE MEMBRANĘ Z PROMIENIOWYMI KARBAMI

DANIEL BUGAJNY,
MARIAN OSWALD,
WACŁAW SZYC

Poznań

1. Wprowadzenie

Wyznaczanie obciążeń niszczących dla cienkich membran utwierdzonych na brzegach i obciążonych równomiernym jednostronnym ciśnieniem było przedmiotem licznych badań teoretycznych i doświadczalnych. Rozwiązania teoretyczne budowane były na bazie dużych odkształceń plastycznych membran z uwzględnieniem wzmocnienia materiału, zmiany grubości membrany w procesie deformacji oraz różnych związków fizycznych teorii plastyczności.

Jedną z podstawowych prac w tym zakresie przedstawił A. GLEYZAL [1]. Podał on numeryczną metodę rozwiązania równań plastyczności i równowagi opisujących zachowanie się cienkiej okrągłej membrany w oparciu o eksperymentalnie określoną funkcję uzależniającą oktaedryczne naprężenia styczne od kąta odkształcenia postaciowego dla konkretnego materiału (stali) w próbie rozciągania. Analizę A. Gleyzala rozwinęli N. A. WEIL i N. N. NEWMARK [2] wprowadzając nowe, udoskonalone prawo opisujące zależność między odkształceniami i przemieszczeniami dla dużych ugięć plastycznych. Wymienione prace zmierzały do określenia warunków kształtowania wytłoczek metodą tłoczenia hydraulicznego. W pracy [3] uwzględniono dodatkowo anizotropowe wzmocnienie materiału membrany w procesie deformacji. W. M. TRUSZINA [4] wprowadziła do rozważań niejednorodne własności materiału wzdłuż promienia membrany. Z analizy wyników powyższych prac wynika wniosek, że powierzchnia membrany w procesie deformacji przyjmuje kształt w przybliżeniu kulisty. Analizie plastycznej małowyniosłej powłoki sferycznej poświęcona jest praca M. DUSZEK [5], w której m.in. wykazano, że obszar stanu błonowego w cienkiej powłoce przy dużych ugięciach obejmuje praktycznie całą jej powierzchnię z wyjątkiem małego obszaru brzegowego. Na podstawie omówionych wyżej prac można ustalić wartości ciśnień niszczących gładkie membrany.

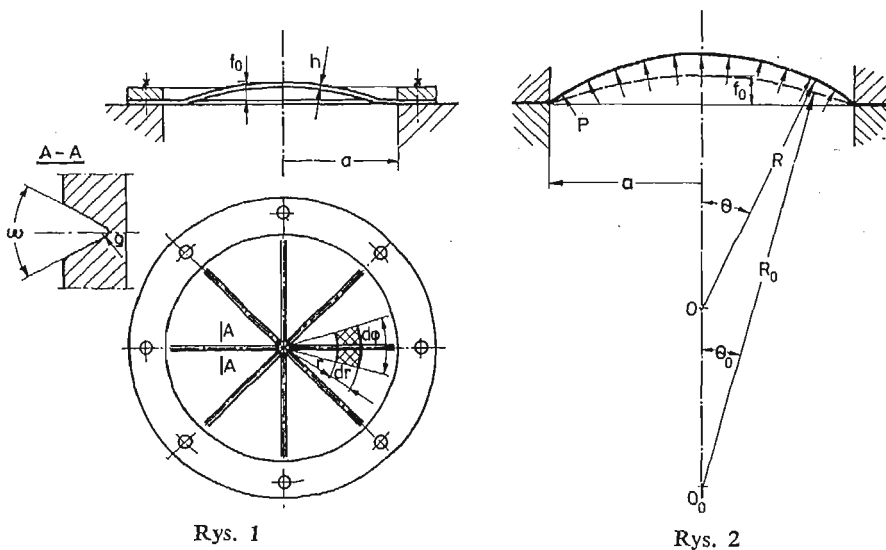
W niniejszej pracy zaproponowano nieskomplikowany sposób określania statycznego ciśnienia niszczącego dla membran posiadających układ promieniowych karbów (rowków). Membrany takie mają zastosowanie w zabezpieczeniach dekompresyjnych urządzeń i pomieszczeń zagrożonych wybuchem pyłów lub gazów. Wartości statycznych ciśnień niszczą-

cych membrany stanowią podstawę do prawidłowego i funkcjonalnego zaprojektowania układów dekompresyjnych [6, 7].

Membrany z rowkami zapewniają właściwy mechanizm otwarcia-odsłonięcia otworu dekompresyjnego, umożliwiając swobodny wypływ produktów spalania wybuchowego nie dopuszczając do nadmiernego wzrostu ciśnienia wewnątrz chronionego obiektu. Praca zużyta na zniszczenie takiej membrany jest znacznie mniejsza od pracy niszczenia analogicznych membran gładkich, gdyż ugięcia membran z rowkami są ograniczone działaniem karbów.

2. Teoretyczne wyznaczenie wartości statycznego ciśnienia niszczącego

Przedmiotem rozważań jest cienka membrana wykonana z materiału plastycznego (np. stopy aluminium, mosiądz, miękka stal). Membrana ma kształt kołowy z układem promieniowych rowków o stałej głębokości i profilu trójkątnym. W wyniku zastosowania technologii wykonania rowków metodą wygniatania, membrana przyjmuje kształt pokazany na rys. 1. Środkowa część membrany (z wyjątkiem małego obszaru brzegowego)



Rys. 1

Rys. 2

posiada kształt zbliżony do czaszy kulistej o niewielkiej wyniosłości f_0 . W miarę wzrostu ciśnienia wyniosłość czaszy powiększa się i w granicznym przypadku promień osiąga wartość R . Przyjęty do rozważań schemat przedstawiono na rys. 2.

Założono, że membrana posiada wstępną krzywiznę kulistą o promieniu R_0 , a jej brzegi są utwierdzone bez możliwości przemieszczeń w kierunku promieniowym. Wynikają stąd następujące zależności geometryczne:

$$(2.1) \quad R_0 = \frac{1}{2f_0} (a^2 + f_0^2), \quad \theta_0 = \arcsin \frac{a}{R_0},$$

$$R = \frac{a}{\sin \theta}.$$

Południk czaszy o długości początkowej $\Theta_0 R_0$ pod wpływem ciśnienia niszczonego osiąga graniczną długość ΘR , stąd wydłużenie względne określone jest zależnością:

$$(2.2) \quad \varepsilon_r = \frac{\Theta R}{\Theta_0 R_0} - 1.$$

Podstawiając tu R określone z (2.1) otrzymujemy po przekształceniach związek

$$(2.3) \quad \sin \Theta = C \cdot \Theta,$$

gdzie

$$(2.4) \quad C = \frac{a}{(1 + \varepsilon_r) \Theta_0 R_0}.$$

Ponieważ graniczny kąt Θ nie osiąga dużych wartości (nie przekracza $\pi/6$) można z wystarczającą dokładnością przyjąć przybliżony związek

$$(2.5) \quad \sin \Theta \cong \Theta - \frac{\Theta^3}{6}.$$

Biorąc pod uwagę (2.3) otrzymuje się

$$(2.6) \quad \Theta = \sqrt{6(1 - C)}.$$

W czaszy kulistej obciążonej ciśnieniem p występują naprężenia stanu błonowego

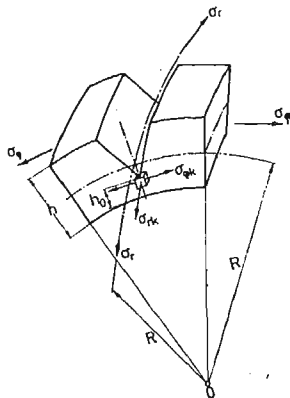
$$(2.7) \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{pR}{2h},$$

stąd po uwzględnieniu związków (2.1), (2.4) i (2.6) otrzymamy

$$(2.8) \quad p = \frac{2h}{a} \sigma_\varphi \sin \sqrt{6 \left(1 - \frac{a}{(1 + \varepsilon_r) \Theta_0 R_0} \right)}.$$

W powyższym wzorze określenia wymagają jeszcze σ_φ i ε_r dla stanu granicznego.

Wybermy do rozważań element membrany wskazany na rys. 1 zawierający fragment karbu (rys. 3). Na dnie karbu wystąpi efekt spiętrzenia naprężeń, przy czym założono, że stan naprężenia jest płaski a karb wpływa jedynie na wartość składowej obwodowej:



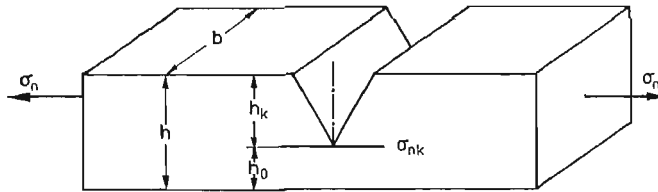
Rys. 3

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{\varphi k} &= \sigma_{\varphi} \frac{h}{h_0} \alpha_k, \\ \sigma_{rk} &= \sigma_{\varphi} \frac{h}{h_0}, \end{aligned}$$

gdzie α_k jest efektywnym współczynnikiem koncentracji naprężeń.

Graniczną wartość naprężeń obwodowych można uzyskać doświadczalnie w wyniku próby rozciągania płaskiej próbki z poprzecznym karbem o identycznej geometrii (rys. 4). W próbce tej wyznacza się wartość σ_n , przy czym naprężenie na dnie karbu wynosi

$$(2.10) \quad \sigma_{nk} = \sigma_n \frac{h}{h_0} \alpha_k.$$



Rys. 4

Przyjmując, że graniczną wartość naprężenia w strefie dna karbu określa naprężenie zredukowane wyznaczone wg hipotezy maksymalnej energii odkształcenia postaciowego, otrzymuje się zależność:

$$(2.11) \quad \sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{\varphi k}^2 + \sigma_{rk}^2 - \sigma_{\varphi k} \sigma_{rk}} = \sigma_{nk}.$$

Wprowadzając do (2.11) zależności (2.9) i (2.10) otrzymujemy związek pomiędzy naprężeniami granicznymi (niszczącymi) w membranie i w rozciąganej próbce:

$$(2.12) \quad \sigma_{\varphi} = \sigma_n \frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2 - \alpha_k + 1}}.$$

Współczynnik α_k wyznaczyć można w oparciu o granicę wytrzymałości R_m wyznaczonej w próbce rozciągania próbki bez karbu:

$$(2.13) \quad \alpha_k = \frac{R_m}{\sigma_n}.$$

Związek fizyczny między odkształceniami i naprężeniami przy jednoosiowym rozciąganiu przyjmujemy wg [8] w postaci:

$$(2.14) \quad \varepsilon(\sigma) = \left[1 + a_n \left(\frac{\sigma}{E} \right)^{n-1} \right] \frac{\sigma}{E},$$

gdzie a_n jest stałą materiałową, natomiast n — nieparzystą liczbą naturalną; obie te wielkości można określić doświadczalnie dla konkretnego materiału.

W płaskim stanie naprężenia występującym w powłoce sferycznej ($\sigma_r = \sigma_{\varphi}$) zależność (2.14) przyjmuje postać:

$$(2.15) \quad \varepsilon_r = \varepsilon_{\varphi} = \left[1 - \nu + \frac{a_n}{2} \left(\frac{\sigma_{\varphi}}{E} \right)^{n-1} \right] \frac{\sigma_{\varphi}}{E}.$$

W powyższych związkach E jest modułem sprężystości wyznaczanym w początkowym, prostoliniowym odcinku krzywej rozciągania, ν jest liczbą Poissona.

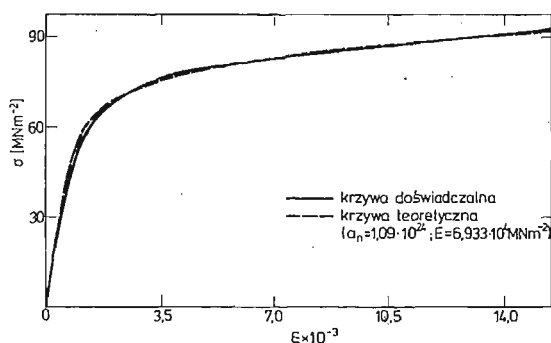
Wyznaczenie ciśnienia niszczącego ze wzoru (2.8) poprzedzone musi być wyznaczeniem stałych materiałowych n , a_n , E , ν oraz σ_n i R_m w oparciu o statyczną próbę rozciągania, a następnie określenie wartości α_k ze wzoru (2.13), σ_p z (2.12) oraz ε_r z (2.15).

3. Badania własności materiału

Przedmiotem badań była blacha aluminiowa PA1r, walcowana na zimno, o grubości nominalnej 1 mm, w stanie rekrytalizowanym. W pierwszej kolejności przeprowadzono próby rozciągania pięciu typowych próbek płaskich wyznaczając charakterystyki $\sigma-\varepsilon$ z pomiarów tensometrycznych oraz wartości granicy wytrzymałości na rozciąganie R_m . W wyniku badań ustalono następujące średnie wartości stałych materiałowych:

$$R_m = 115,5 \text{ MN/m}^2, \quad E = 6,933 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2, \quad \nu = 0.34.$$

Średnia charakterystyka $\sigma-\varepsilon$ przy rozciąganiu przedstawiona została na rys. 5 linią ciągłą.



Rys. 5

Charakterystykę $\sigma-\varepsilon$ aproksymuje się wzorem (2.14) odpowiednio określając wartości stałych a_n i n . Wyznaczono w ten sposób:

$$n = 9, \quad a_n = 1,09 \cdot 10^{24}.$$

Przebieg funkcji (2.14) dla tych wartości przedstawiony jest na rys. 5 linią przerywaną.

Z kolei przeprowadzono próby rozciągania dla próbek płaskich posiadających poprzeczny karb, którego profil określają wartości $\omega = \pi/6$, $\rho = 0,15$ mm. Badane były trzy rodzaje karbów o głębokościach $h_k = 0,4; 0,5; 0,6$ mm. W wyniku tych badań wyznaczono wartości naprężeń niszczących. Średnie z pięciu pomiarów wynoszą odpowiednio:

$$\sigma_n = 90,1; 79,9 \text{ i } 73,7 \text{ MN/m}^2.$$

4. Przykłady obliczeń

Dla przykładowego obliczenia ciśnienia niszczącego przyjęto następujące dane geometryczne membran:

Tablica I

1.	h_k [mm]	0,4	0,5	0,6
2.	σ_n [MN/m ²]	90,1	79,9	73,7
3.	α_k wzór (2.13)	1,282	1,445	1,567
4.	σ_φ [MN/m ²] (2.12)	98,992	90,072	84,038
5.	ε_r (2.15)	$14,39 \cdot 10^{-3}$	$6,60 \cdot 10^{-3}$	$3,88 \cdot 10^{-3}$
6.	f_0 [mm]	7,1	8,0	8,8
7.	R_0 [mm]	1696	1505	1354
8.	Θ_0 (2.1)	0,0915	0,1032	0,1147
9.	p [MN/m ²]	0,3612	0,2421	0,1930

— membrana okrągła o promieniu $a = 155$ mm, grubości $h = 0,94$ mm, z szesnastoma korbami o głębokościach 0,4; 0,5 i 0,6 mm i wstępnymi wyniosłościami f_0 odpowiednio 7,1; 8,0 i 8,8 mm,

— membrana kwadratowa o boku $b = 230$ mm, grubości, ilości korbów i ich głębokościach jak poprzednio, oraz o wstępnych wyniosłościach odpowiednio 6,7; 7,6 i 8,4 mm.

Wyniki obliczeń dla membrany okrągłej zestawiono w tablicy I.

Rozważania teoretyczne przedstawione w rozdziale 2 dotyczyły wyłącznie membran okrągłych. W odniesieniu do membran kwadratowych zastosowano tą samą metodykę obliczeń wprowadzając zamiast wymiaru a promień zastępczy a_z wynikający z równoważności pól powierzchni membrany kwadratowej i okrągłej:

$$a_z = b\pi^{-\frac{1}{2}} = 129,8 \text{ mm.}$$

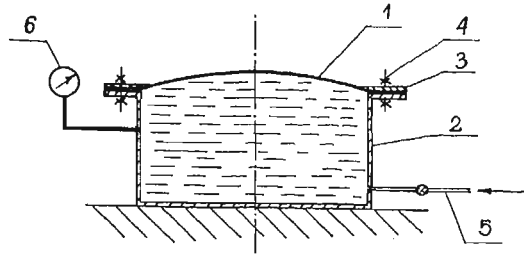
Wyniki obliczeń dla membran kwadratowych zestawiono w tablicy II.

Tablica II

Pozycje 1-5 jak w tablicy I.				
6.	f_0 [mm]	6,7	7,6	8,4
7.	R_0 (2.1)	1261	1112	1007
8.	Θ_0 (2.1)	0,1031	0,1170	0,1292
9.	p [MN/m ²]	0,4362	0,2975	0,2412

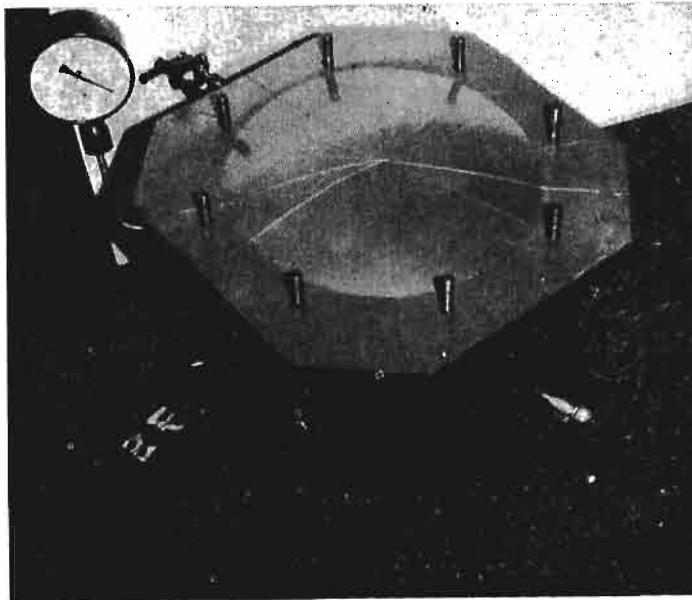
5. Badania doświadczalne membran

Badania przeprowadzono dla serii membran wykonanych z blachy aluminiowej PA1r o parametrach mechanicznych i geometrycznych podanych w rozdziałach 3 i 4 niniejszej pracy. Badano po 5 sztuk membran dla każdej głębokości karbu, w ogólnej ilości 30 sztuk. Schemat stanowiska badawczego pokazano na rys. 6. Badana membrana 1 zamocowana jest na obwodzie do kołnierza zbiornika 2 przy pomocy pierścienia 3 i śrub 4. Ciśnienie wewnątrz zbiornika mierzone jest manometrem 6, a olej doprowadzany jest przewodem 5.

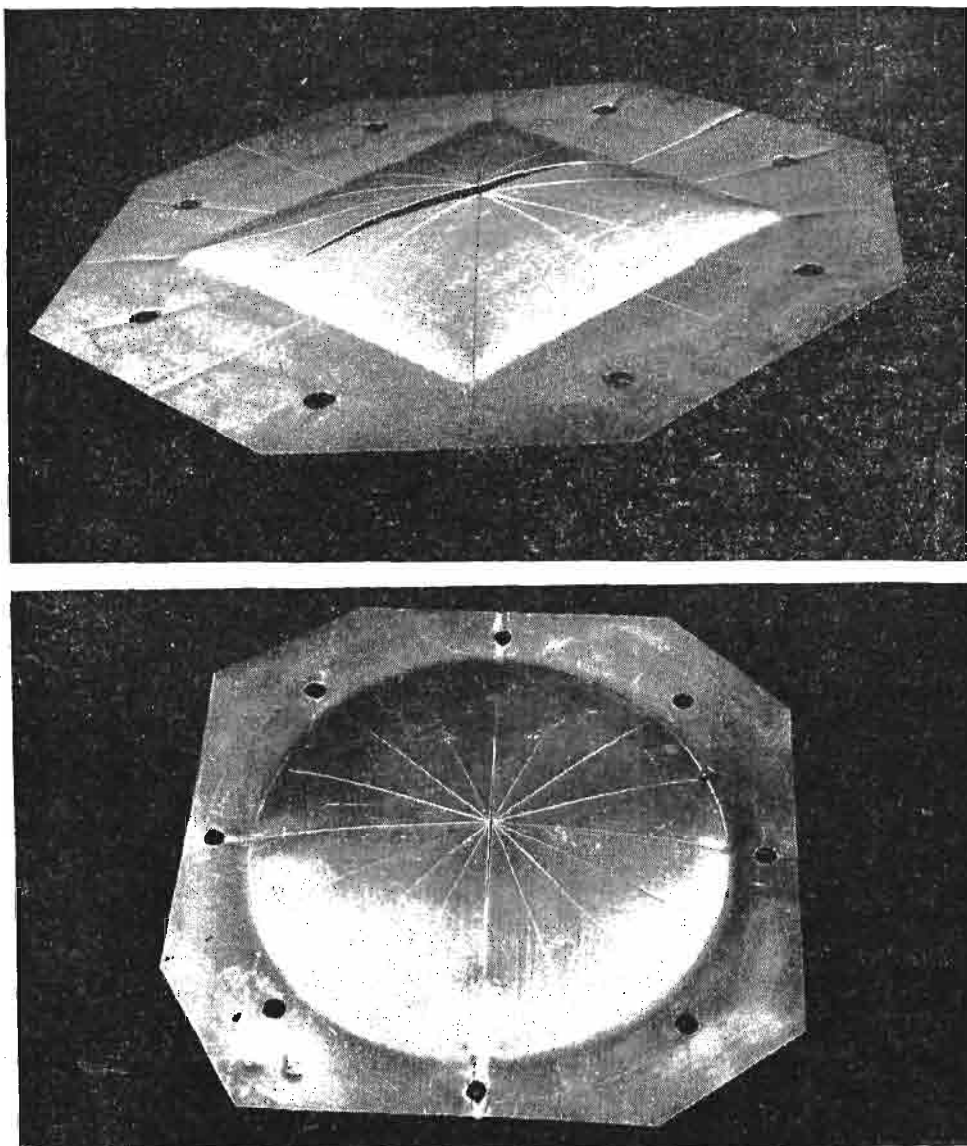


Rys. 6

Do wnętrza zbiornika przewodem doprowadzającym 5 tłoczony jest olej, powodując powolny wzrost ciśnienia we wnętrzu zbiornika mierzony manometrem 6. Prędkość wzrostu ciśnienia nie przekraczała wartości $0,03 \text{ MPas}^{-1}$. W wyniku badań rejestrowano maksymalne ciśnienie odpowiadające zniszczeniu membrany. Ogólny widok stanowiska badawczego z założoną membraną i zdemontowanym pierścieniem mocującym pokazano na fotografii (rys. 7). Zniszczenie membrany następowało każdorazowo w ten sposób, że w środ-



Rys. 7



Rys. 8

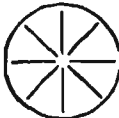

kowej części czaszy inicjowane były promieniowe szczeliny propagujące się wzdłuż jednego lub kilku karbów. Wygląd zewnętrzny zniszczonych membran pokazano na fotografiach (rys. 8).

Wyniki przeprowadzonych badań zestawiono w tablicy III.

6. Porównanie wyników

Rezultaty obliczeń ciśnień niszczących p przedstawione w tablicach I i II zestawiono z wartościami ciśnień p_{st} wyznaczonymi doświadczalnie i podanymi w tablicy III. Po-

Tablica III

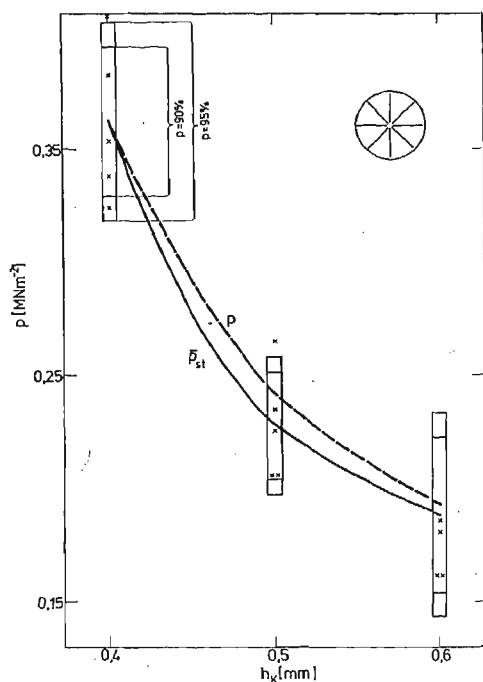
Kształt membrany	Powierzchnia membrany [m ²]	h_k [mm]	Ciśnienie niszczące p_{st} [kGcm ⁻²] ($\Delta p_{st} = 0,05$ kGcm ⁻²)					Średnie ciśn. niszczące \bar{p}_{st} [MPa]		Przedział ufności dla prawdopodobieństwa	
			1	2	3	4	5	[kGcm ⁻²]	[MPa]	90%	95%
	0,075	0,4	3,30	3,60	3,90	4,20	3,45	3,69	0,362	0,329 ± 0,395	0,318 ± 0,406
			2,10	2,10	2,70	2,30	2,40	2,32	0,228	0,204 ± 0,251	0,197 ± 0,258
			1,90	1,65	1,85	1,65	2,55	1,92	0,188	0,154 ± 0,223	0,143 ± 0,233
	0,053	0,4	4,40	4,20	4,40	3,80	4,50	4,26	0,418	0,391 ± 0,444	0,383 ± 0,452
			2,90	3,00	2,75	2,75	2,85	2,85	0,280	0,270 ± 0,289	0,267 ± 0,292
			2,20	2,35	2,25	2,45	2,45	2,34	0,230	0,219 ± 0,240	0,216 ± 0,243

h_k — głębokość karbu.

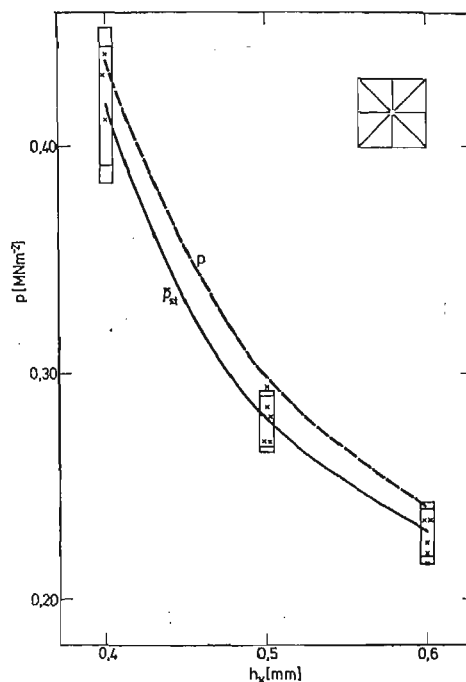
równanie wyników zilustrowano graficznie dla membran okrągłych (rys. 9) i dla membran kwadratowych (rys. 10).

Na rysunkach tych zaznaczono gwiazdkami wyniki poszczególnych prób doświadczalnych oraz naniesiono granice przedziałów ufności. Linie ciągłe ilustrują zależność średniego ciśnienia niszczącego \bar{p}_{st} określonego doświadczalnie od głębokości karbu h_k . Dla porównania przedstawiono linią przerywaną krzywą obrazującą tę samą zależność dla ciśnienia obliczeniowego p .

Zadawalająca zgodność krzywych teoretycznych z doświadczalnymi świadczy o poprawności przyjętego modelu teoretycznego bazującego na nieliniowym związku $\sigma-\epsilon$ oraz na hipotezie maksymalnej energii odkształcenia postaciowego.



Rys. 9



Rys. 10

W trakcie prób zaobserwowano dość duży rozrzut wyników doświadczalnych, szczególnie dla membran okrągłych. Rozrzut ten spowodowany jest niejednorodnością i anizotropowością materiału (blachy walcowanej), a także sposobem mocowania brzegów membrany umożliwiającym nieznaczne wysuwanie się materiału w kierunku dośrodkowym w czasie próby.

Zgodność teorii przyjętej w zasadzie dla membran okrągłych z wynikami badań membran kwadratowych wskazuje na prawidłowość przyjęcia promienia zastępczego wynikającego z równoważności powierzchni.

Mając na uwadze praktyczne zastosowanie membran w otworach dekompresyjnych, należy przeprowadzić także dodatkowe badania dynamiczne, które ostatecznie określą przydatność i zakres stosowania membran.

Literatura cytowana w tekście

1. A. GLEYZAL, *Plastic Deformation of a Circular Diaphragm Under Pressure*, J. of Applied Mechanics 1948, vol. 15, no. 33.
2. N. A. WEIL and N. N. NEWMARK, *Large Plastic Deformations of Circular Membranes*, J. of Applied Mechanics, 1955, vol. 22, no. 4.
3. ТРАН ЛЬЮ ЧИОНГ, *Жестко пластический анализ мембран с учетом упрочнения*, Изв. АН СССР, Механика, 4, 1965.
4. В. М. ТРУШИНА, *Большие деформации круглой мембраны из пластически неоднородного материала*, Труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ростов-на-Дону, 1971, 189—194, „Наука”, 1973.
5. M. DUSZEK, *Plastic Analysis of Shallow Spherical Shells at Moderately Large Deflections*, Proceedings Second IUTAM Symposium on the Theory of Thin Shells, Copenhagen, September 1967, Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York 1969.
6. W. BARTKNECHT, *Explosionen*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1978.
7. VDI — RICHTLINIEN, *Druckentlastung von Staubexplosionen*, VDI 3673, Juni 1979.
8. H. KAUDERER, *Nichtlineare Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958.

Резюме

СТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ РАЗРУШАЮЩИЕ МЕМБРАНУ С РАДИАЛЬНЫМИ ПАЗАМИ

В работе представлено теоретическую модель использованную для определения давления разрушающего круглые и квадратные мембраны с начальной малой выпучиной и радиальными пазами. Используется экспериментально определенную нелинейную характеристику материала и гипотезу энергии изменения формы. Эффективный коэффициент концентрации напряжений определяется из испытаний на растяжение. Результаты вычислений сравнены с разрушающими давлениями определёнными экспериментально гидравлическом методом.

Summary

STATIC BURSTING PRESSURE FOR THE MEMBRANE WITH RADIAL GROOVES

The theoretical model for evaluating bursting pressure for circular and quadratic squared membranes with small initial deflection and radial grooves is presented. The use is made of experimentally obtained nonlinear material characteristic and distortion energy theory. The effective stress concentration factor is developed on the basis of tension material tests. The results are compared with bursting pressures obtained experimentally by hydraulic method.

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 października 1981 roku

UOGÓLNIONY PRZEPIY W POISEUILLE'A PLYNU MIKROPOLARNEGO DRUGIEGO RZĘDU W SZCZELINIE MIĘDZY DWOMA WSPÓŁOSIOWYMI WALCAMI

EDWARD WALICKI,
JANUSZ ZACHWIEJA

Bydgoszcz

Wstęp

Skomplikowane przepływy cieczy newtonowskich i nienewtonowskich w kanałach, mające miejsce w rozmaitych procesach przemysłowych, nie są jak dotąd szczegółowo zbadane. Dotyczy to zwłaszcza płynów mikropolarnych Eringena ze względu na cechującą je mikrobezładność oraz dodatkowy moment masowy i naprężenie momentowe. Tym samym, celem wyznaczenia wielkości opisujących pole przepływu, należy rozwiązywać układ równań wynikających z zasad zachowania: masy, energii, pędu oraz momentu pędu pierwszego a w szczególnych przypadkach również wyższych rzędów. Stwarza to problemy zarówno natury czysto matematycznej jak również fizycznej wobec konieczności wyznaczenia wartości dodatkowych współczynników lepkości.

Pierwszej próby konstrukcji ogólnej teorii ośrodka z mikrostrukturą dokonali bracia E. i F. Cosserat w 1909 roku, jednakże dopiero w ostatnim dwudziestolecu problem ten został podjęty na nowo, skupiając uwagę badaczy. Współczesne poglądy odnośnie płynów mikropolarnych bazują głównie na założeniach teorii naprężeń momentowych oraz teorii mikropłynów Eringena [1]. Tenże [2] wraz z Suhubim [3] rozwinął ogólną teorię ośrodka mikropolarnego, dyskutując w [4] termodynamiczne ograniczenia wartości współczynników lepkości dla płynów mikropolarnych. Podobne problemy były przedmiotem rozważań Kazakii i Arimana [5]. Ciekawy przegląd prac na temat płynów z mikrostrukturą został dokonany przez Arimana, Turka i Sylvestra [6, 7].

Porównanie założeń fizycznych stanowiących podstawę modeli płynów Stokesa oraz Eringena prowadzi do wniosku, że ten ostatni wierniej opisuje przepływy zawiesin, co potwierdziły badania Kline'a, Allena i De Silvy [8] nad mechanicznymi i reologicznymi własnościami zawiesin, emulsji, płynnych kryształków oraz krwi i płynów fizjologicznych. Ahmadi, Koh i Goldschmidt [9, 10] uogólnili teorię płynów mikropolarnych na przypadek ośrodka w którym mikroruch opisywany jest dodatkowo wektorem mikrorotacji drugiego rzędu. Równania ruchu tych płynów wyprowadzone w pracach [11, 12] nie zostały dotąd rozwiązane dla przypadków bardziej złożonych przepływów.

Celem niniejszej pracy jest analiza uogólnionego przepływu Poiseuille'a płynu mikropolarnego drugiego rzędu w przestrzeni między dwoma współosiowymi cylindrami, ze szczególnym uwzględnieniem wpływu wielkości szczeliny na kształt profili prędkości i mikrorotacji.

1. Równania ruchu

Równania ruchu nieściśliwego płynu mikropolarnego drugiego rzędu, wyprowadzone w oparciu o zasady zachowania masy, pędu oraz momentu pędu pierwszego i drugiego rzędu mają postać [11, 12]

$$(1.1) \quad \operatorname{div} V = 0,$$

$$(1.2) \quad \rho \frac{dV}{dt} = \rho f - \operatorname{grad} p + (\lambda_v + \mu_v) \operatorname{grad}(\operatorname{div} V) + k_v \operatorname{rot} v (\mu_v + k_v) \operatorname{rot}(\operatorname{rot} V),$$

$$(1.3) \quad \rho \left(j \frac{dv}{dt} + \frac{dV}{dt} \times i \right) = \rho f_1 - \gamma_v \operatorname{rot}(\operatorname{rot} v) + (\alpha_v + \beta_v + \gamma_v) \operatorname{grad}(\operatorname{div} v) + k_v \operatorname{rot} V - \\ - 2k_v v - \beta_0 \operatorname{rot} \mu,$$

$$(1.4) \quad \frac{3}{2} j \rho \frac{dV}{dt} = \rho f_2 + 2(\beta_0 - \eta_v) \mu + (\gamma_v - \beta_v) \operatorname{rot} v + \\ + 3[(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mu) - \alpha_2 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mu)],$$

gdzie:

V — wektor prędkości przepływu

ρ — gęstość

p — ciśnienie

v — wektor mikrorotacji pierwszego rzędu

μ — wektor mikrorotacji drugiego rzędu

f — wektor sił masowych jednostkowych

f_1 — wektor jednostkowych momentów masowych pierwszego rzędu

f_2 — wektor jednostkowych momentów masowych drugiego rzędu

i — wektor mikrobezładności

j — gęstość mikrobezładności

λ_v — współczynnik lepkości objętościowej

k_v — współczynnik lepkości sprzężenia

μ_v — współczynnik lepkości ścinania

$\alpha_v, \beta_v, \delta_v$ — współczynniki lepkości obrotowych

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \eta_v$ — dodatkowe współczynniki lepkości

Pomiędzy wartościami współczynników lepkości istnieją wzajemne związki. Warunki termodynamiczne nakładają na nie następujące ograniczenia [11]

$$(1.5) \quad \begin{aligned} 3\lambda_v + 2\mu_v + k_v &\geq 0, & 2\mu_v + k_v &\geq 0, & k_v &\geq 0, \\ 3\alpha_v + 2\gamma_v &\geq 0, & -\gamma_v &\leq \beta_v \leq \gamma_v, & \gamma_v &\geq 0, \\ 3\alpha_0 + 2\alpha_1 &\leq 0, & -\alpha_2 &\leq \alpha_1 \leq \alpha_2, & \alpha_2 &\geq 0, \\ \eta_v + \beta_0 &\leq 0, & 8\gamma_v(\beta_0 + \eta_v) &\leq (\beta_0 + \gamma_v - \beta_v)^2. \end{aligned}$$

2. Konfiguracja przepływu

Rozważony zostanie przepływ płynu mikropolarnego drugiego rzędu w szczelinie pomiędzy dwoma współosiowymi cylindrami przy użyciu równań (1.1 - 1.4). W tym celu wprowadzimy układ współrzędnych walcowych czyniąc jednocześnie założenia stacjonar-

ności przepływu oraz dopuszczalności pominięcia sił i momentów masowych. W obranym układzie współrzędnych wektory V, v, μ posiadają następujące składowe:

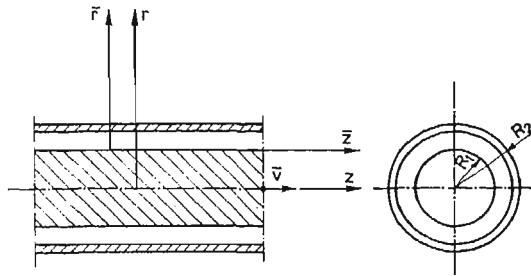
$$(2.1) \quad V \sim v_z(r) \quad v \sim v_\theta(r) \quad \mu \sim \mu_z(r).$$

Równania ruchu (1.2 - 1.4) wobec nałożonych warunków, oraz po uwzględnieniu równania (1.1) sprowadzają się do układu:

$$(2.2) \quad -\frac{dp}{dz} + (\mu_v + k_v) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) + k_v \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta) = 0,$$

$$(2.3) \quad \gamma_v \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta) \right] - k_v \frac{dv_z}{dr} - 2k_v v_\theta + \beta_0 \frac{d\mu_z}{dr} = 0,$$

$$(2.4) \quad 2(\beta_0 - \eta_v) \mu_z + (\gamma_v - \beta_v) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta) + 3\alpha_2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mu_z}{dr} \right) = 0.$$



Rys. 1. Schemat układu geometrycznego przepływu

Rozwiązania równań (2.2 - 2.4) podlegają następującym warunkom brzegowym:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} v_z &= V & \text{dla } r &= R_1, \\ v_z &= 0 & \text{dla } r &= R_2, \\ v_z &= \mu_z = 0 & \text{dla } r &= R_1 \quad \text{ i } \quad r = R_2. \end{aligned}$$

przy czym $R_2 > R_1$.

3. Rozwiązanie równań ruchu

W celu rozważenia wpływu wielkości szczeliny $R_2 - R_1$ na kształt profili prędkości i mikrorotacji wprowadzono następujące zmienne bezwymiarowe:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}, & \bar{z} &= \frac{z}{R_2 - R_1}, \\ \bar{v}_z &= \frac{v_z}{u}, & \bar{v}_\theta &= \frac{v_\theta}{u} (R_2 - R_1), & \bar{\mu}_z &= \frac{\mu_z}{u} (R_2 - R_1)^2, \\ \bar{p} &= \frac{p}{\rho u^2}. \end{aligned}$$

Zgodnie z przyjętymi zmiennymi bezwymiarowymi (3.1), liczby podobieństwa wyrażające stosunki wielkości charakterystycznych występujących w rozważanym przepływie do stałych materiałowych dają się wyrazić jako:

$$\begin{aligned}
 \text{Re} &= \frac{\rho u (R_2 - R_1)}{\mu} && \text{--- newtonowska liczba Reynoldsa,} \\
 \text{Rem} &= \frac{\rho u (R_2 - R_1)}{\mu_v + k_v} && \text{--- mikropołarna liczba Reynoldsa,} \\
 \text{Rint} &= \frac{\rho u (R_2 - R_1)}{k_v} && \text{--- liczba Reynoldsa oddziaływania pomiędzy} \\
 &&& \text{prędkością przepływu i mikrorotacją,} \\
 \text{Rw} &= \frac{\rho u (R_2 - R_1)^3}{\gamma_v} && \text{--- mikrorotacyjna liczba Reynoldsa} \\
 \text{Lp1} &= \frac{3\rho u (R_2 - R_1)^3}{4(\nu_0 - \beta_0)} \\
 \text{Lp2} &= \frac{3\rho u (R_2 - R_1)^3}{2(\gamma_v - \beta_v)} \\
 \text{Lp3} &= \frac{\rho u (R_2 - R_1)^5}{2\alpha_2} \\
 \text{Lp4} &= -\frac{\rho u (R_2 - R_1)^3}{\beta_0}
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

— dodatkowe liczby podobieństwa.

Występująca w związkach (3.2) wielkość U posiada sens pewnej charakterystycznej prędkości, którą jest średnia prędkość przepływu płynu newtonowskiego o tej samej liczbie Reynoldsa, w identycznym układzie geometrycznym. W celu przeanalizowania wpływu warunków Couette'a i Poiseuille'a na przepływ uogólniony wprowadzono wielkości bezwymiarowe α i β . Dzięki temu rozpatrywaną prędkość średnią można wyrazić w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 v_{sr} &= -\frac{1}{8\mu} \frac{1}{\alpha} \frac{dp}{dz} (R_2^2 - R_1^2) \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} + \frac{1}{\ln k} \right), \\
 v_{sr} &= -\frac{V}{\beta} \left(\frac{k^2}{1-k} + \frac{1}{2\ln k} \right),
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

gdzie:

$$k = \frac{R_1}{R_2} \quad \alpha = \frac{dp}{dz} \bigg/ \left(\frac{dp}{dz} \right)_m \quad \beta = V/V_m
 \tag{3.4}$$

Jeżeli przyjmiemy stały wydatek cieczy, wówczas $\alpha + \beta = 1$. W zależnościach (3.4) wielkości $\left(\frac{dp}{dz} \right)_m$ i v_m są odpowiednio gradientem ciśnienia w przepływie Poiseuille'a oraz prędkością przemieszczania się wewnętrznego walca w przepływie Couette'a.

Rozwiązanie układu równań (2.2-2.4) w postaci bezwymiarowej ma formę:

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_z &= C_1 I_0 \left[\varphi \left(\bar{r} + \frac{k}{1-k} \right) \right] + C_2 I_0 \left[\psi \left(\bar{r} + \frac{k}{1+k} \right) \right] + C_3 K_0 \left[\varphi \left(\bar{r} + \frac{k}{1-k} \right) \right] + \\
 &+ C_4 K_0 \left[\psi \left(\bar{r} + \frac{k}{1-k} \right) \right] + C_5 \ln \left(\bar{r} + \frac{k}{1-k} \right) + C_6 -
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

$$(3.5) \quad \text{[cd.]} \quad - \frac{2\alpha(1-k)^2}{\left[(1+k^2) + \frac{1-k^2}{\ln k}\right]} \left(\bar{r} + \frac{k}{1-k}\right)^2,$$

$$(3.6) \quad \bar{v}_\theta = \frac{\text{Rint}}{\text{Rem}} \left\{ -C_1 \varphi I_1 \left[\varphi \left(\bar{r} + \frac{k}{1-k} \right) \right] - C_2 \psi I_1 \left[\psi \left(\bar{r} + \frac{k}{1-k} \right) \right] + \right. \\ \left. + C_3 \varphi K_1 \left[\varphi \left(\bar{r} + \frac{k}{1-k} \right) \right] + C_4 \psi K_1 \left[\psi \left(\bar{r} + \frac{k}{1-k} \right) \right] \right\} + \\ + \frac{C_5}{2} \frac{1}{\bar{r} + \frac{k}{1-k}} + \frac{2\alpha(1-k)^2}{\left[(1+k^2) + \frac{1-k^2}{\ln k}\right]} \left(\bar{r} + \frac{k}{1-k} \right),$$

$$(3.7) \quad \bar{\mu}_z = \frac{\text{Lp4}}{\text{Rw}} \frac{\text{Rint}}{\text{Rem}} \left\{ (a^2 - \varphi^2) C_1 I_0 \left[\varphi \left(\bar{r} + \frac{k}{1-k} \right) \right] + \right. \\ \left. + (a^2 - \psi^2) C_2 I_0 \left[\psi \left(\bar{r} + \frac{k}{1-k} \right) \right] + (a^2 - \varphi^2) C_3 K_0 \left[\varphi \left(\bar{r} + \frac{k}{1-k} \right) \right] + \right. \\ \left. + (a^2 - \psi^2) C_4 K_0 \left[\psi \left(\bar{r} + \frac{k}{1-k} \right) \right] \right\} + \frac{\text{Lp1}}{\text{Lp2}} \frac{4\alpha(1-k)^2}{\left[(1+k^2) + \frac{1-k^2}{\ln k}\right]},$$

przy czym:

$$(3.8) \quad \varphi^2 = \frac{1}{2} \{ a^2 + b^2 - d^2 + [(a^2 + b^2 - d^2)^2 - 4a^2 b^2]^{\frac{1}{2}} \}, \\ \psi^2 = \frac{1}{2} \{ a^2 + b^2 - d^2 - [(a^2 + b^2 - d^2)^2 - 4a^2 b^2]^{\frac{1}{2}} \},$$

gdzie:

$$a^2 = \frac{\text{Rw}}{\text{Rint}} \left(2 - \frac{\text{Rem}}{\text{Rint}} \right) \quad b^2 = \frac{\text{Lp3}}{\text{Lp1}} \quad d^2 = \frac{\text{Rw} \cdot \text{Lp3}}{\text{Lp2Lp4}}.$$

Stałe całkowania $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ można wyznaczyć z warunków brzegowych (2.5), które we współrzędnych bezwymiarowych mają postać:

$$(3.9) \quad \bar{v}_z = 0 \quad \text{dla } \bar{r} = 1, \\ \bar{v}_z = - \frac{\beta}{\frac{k^2}{1-k^2} + \frac{1}{2 \ln k}} \quad \text{dla } \bar{r} = 0, \\ \bar{v}_\theta = \bar{\mu}_z = 0 \quad \text{dla } \bar{r} = 0; 1.$$

W równaniach (3.5 - 3.7) I_0, I_1, K_0, K_1 , są odpowiednio: zmodyfikowanymi funkcjami Bessela zerowego i pierwszego rzędu oraz funkcjami MacDonalda także zerowego i pierwszego rzędu.

Łatwo zauważyć, że uzyskane rozwiązania słuszne są jedynie dla $k > 0$, wówczas bowiem spełniony jest warunek ograniczonej wartości v_z, v_θ, μ_z w punkcie o współrzędnej $r = 0$. Przypadek rozwiązań dla $k = 0$ należy rozpatrzyć osobno. Odpowiada on warunkom

przepływu Poiseuille'a w rurze kołowej. Tym samym rozwiązanie układu równań (2.2 - 2.4) przy warunkach brzegowych

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \bar{v}_z = \bar{v}_\theta = \bar{\mu}_z = 0 & \quad \text{dla } \bar{r} = 1 \\ \bar{v}_z, \bar{v}_\theta, \bar{\mu}_z & \quad \text{skończone dla } r = 0, \end{aligned}$$

przedstawiają się następująco:

$$(3.11) \quad \bar{v}_z = 2(1 - \bar{r}^2) + \frac{\text{Rem}}{\text{Rint}} \left\{ \frac{A}{\varphi} [I_0(\varphi) - I_0(\varphi\bar{r})] + \frac{B}{\psi} [I_0(\psi) - I_0(\psi\bar{r})] \right\},$$

$$(3.12) \quad \bar{v}_\theta = A I_1(\varphi\bar{r}) + B I_1(\psi\bar{r}) + 2\bar{r},$$

$$(3.13) \quad \bar{\mu}_z = \frac{\text{Lp4}}{\text{Rw}} \left\{ \frac{A}{\varphi} (a^2 - \varphi^2) [I_0(\varphi) - I_0(\varphi\bar{r})] + \frac{B}{\psi} (a^2 - \psi^2) [I_0(\psi) - I_0(\psi\bar{r})] \right\},$$

gdzie:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} B &= 4 \frac{\frac{\psi}{2} I_0(\varphi)(a^2 - \varphi^2) + \frac{\text{Lp1}}{\text{Lp2}} \frac{\text{Rw}}{\text{Lp4}} \varphi \psi I_1(\varphi)}{\varphi(a^2 - \psi^2) I_0(\psi) I_1(\varphi) - \psi(a^2 - \varphi^2) I_0(\varphi) I_1(\psi)}, \\ A &= \frac{-2 - B I_1(\psi)}{I_1(\varphi)}. \end{aligned}$$

Ponieważ przy $R_1 \rightarrow 0$ $\bar{r} \rightarrow \frac{r}{R_2}$ tym samym ulegną odpowiednio zmianie określenia pozostałych wielkości bezwymiarowych.

Warunki (1.5) dyktują związki pomiędzy liczbami podobieństwa:

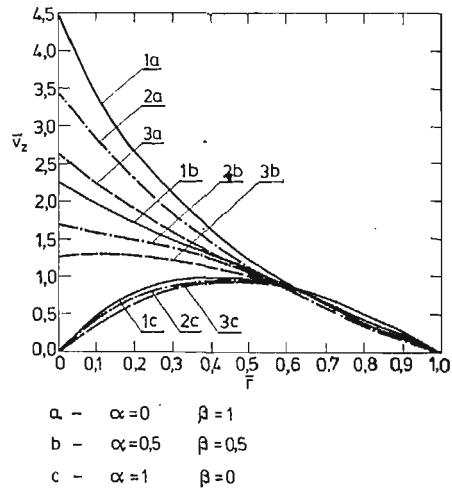
$$(3.15) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\text{Lp1}} &\geq \frac{\text{Rw}}{6} \left(\frac{3}{2\text{Lp2}} - \frac{1}{\text{Lp4}} \right)^2 + \frac{8}{3\text{Lp4}}, \\ \frac{1}{\text{Lp2}} &\leq \frac{4}{3\text{Rw}}. \end{aligned}$$

Wartości liczb podobieństwa Rem , Rint , Rw zostały przyjęte w oparciu o wyniki prac ALLENA i KLINE'A [13] oraz ARIMANA, TURKA i SYLVESTRA [14]. Wartości dodatkowych liczb podobieństwa Lp1 , Lp2 , Lp3 , Lp4 wynikają bezpośrednio z ograniczeń termodynamicznych.

Rys. 2 - 4 ilustrują wpływ wielkości szczeliny na kształt profili bezwymiarowych prędkości: liniowej prędkości przepływu oraz mikrorotacji pierwszego i drugiego rzędu określonych zależnościami (3.1). Dokonano również analizy wpływu wartości dodatkowych liczb podobieństwa na kształt profilu bezwymiarowej mikrorotacji drugiego rzędu dla przepływu w szczelinie oraz przepływu Poiseuille'a w kanale walcowym. Wyniki przedstawiono na rys. 5 - 6.

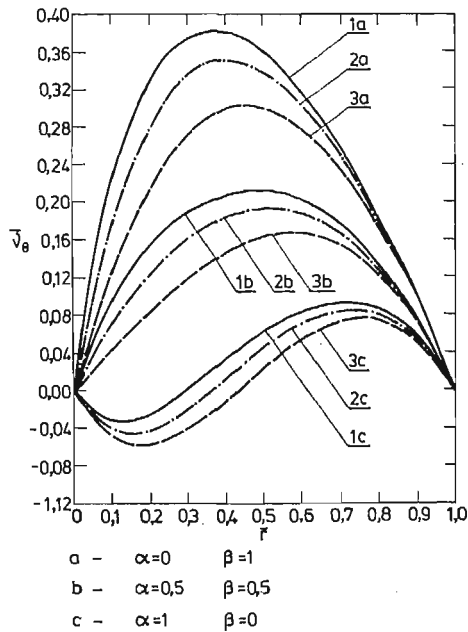
4. Wnioski

Dyskusja formuł (3.5 - 3.7) oraz (3.11 - 3.14) jak również analiza prezentowanych wykresów prowadzi do następujących wniosków:



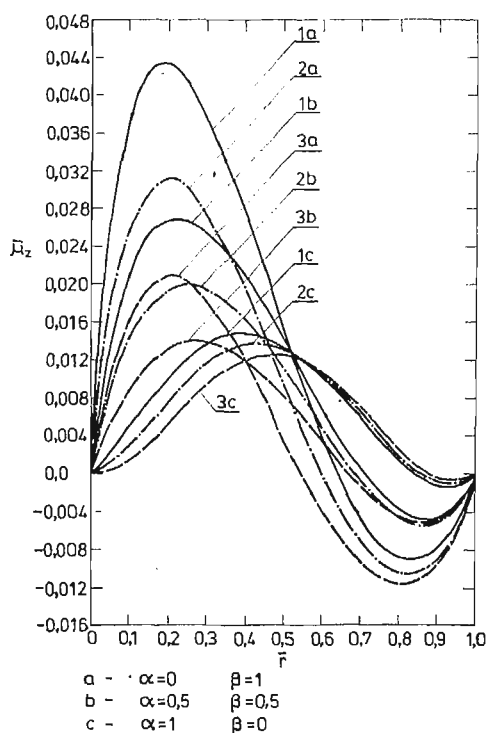
Nr	R _{int}	R _w	Re _m	Lp1	Lp2	Lp3	Lp4	k
1	0,0833	0,1	0,0625	0,01	0,1	0,1	0,1	0,125
2								0,250
3								0,500

Rys. 2. Wpływ wielkości szczeliny na kształt profili prędkości przepływu płynu mikropolarnego drugiego rzędu



Nr	R _{int}	R _w	Re _m	Lp1	Lp2	Lp3	Lp4	k
1	0,0833	0,1	0,0625	0,01	0,1	0,1	0,1	0,125
2								0,250
3								0,500

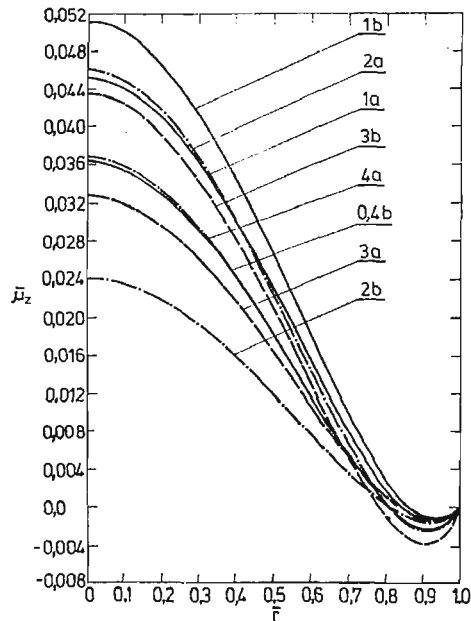
Rys. 3. Wpływ wielkości szczeliny na kształt profili mikrorotacji pierwszego rzędu



Nr	Rint	Rw	Rem	Lp1	Lp2	Lp3	Lp4	k
1								0,125
2	0,0833	0,1	0,0625	0,01	0,1	0,1	0,1	0,250
3								0,500

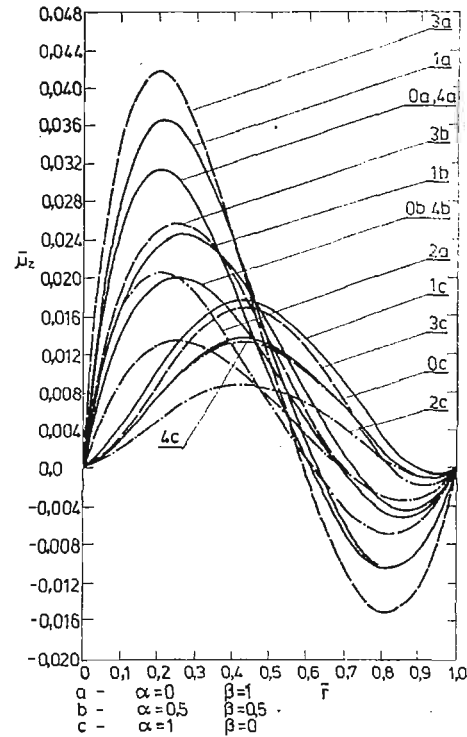
Rys. 4. Wpływ wielkości szczeliny na kształt profili mikrorotacji drugiego rzędu

1. Wzrost wymiaru szczeliny pociąga za sobą zmniejszenie się wartości \bar{v}_z zarówno w przepływie Couette'a jak i przepływie Poiseuille'a. Podobnie rzecz się ma z bezwymiarową mikrorotacją pierwszego rzędu \bar{v}_θ .
2. Wartość liczbowa bezwymiarowej mikrorotacji drugiego rzędu maleje ze wzrostem wielkości szczeliny w przypadku przepływu Couette'a. W przepływie Poiseuille'a w sąsiedztwie oraz pewnej odległości od wewnętrznej powierzchni walcowej istnieją obszary w których wzrost wymiaru szczeliny wywołuje zmniejszenie liczbowej wartości bezwymiarowej mikrorotacji drugiego rzędu. W okolicach zewnętrznej powierzchni efekt jest odwrotny.
3. W sąsiedztwie zewnętrznej powierzchni walcowej następuje zmiana znaku wartości bezwymiarowej mikrorotacji drugiego rzędu.
4. W rozpatrywanym zakresie zmian wartości dodatkowych liczb podobieństwa wzrostowi Lp3 w przepływie Poiseuille'a i Couette'a w szczelinie towarzyszy wzrost bezwzględnej wartości bezwymiarowej mikrorotacji drugiego rzędu, a wzrostowi Lp2 jej spadek. Większym liczbom Lp1 odpowiadają większe wartości bezwymiarowej mikrorotacji



Nr	Rint	Rw	Rem	Lp1	Lp2	Lp3	Lp4
0				0,01	0,1	0,1	0,1
1a				0,015	0,1	0,1	0,1
1b				0,02	0,1	0,1	0,1
2a				0,01	0,08	0,1	0,1
2b	0,0833	0,1	0,0625	0,01	0,15	0,1	0,1
3a				0,01	0,1	0,08	0,1
3b				0,01	0,1	0,15	0,1
4a				0,01	0,1	0,1	0,08
4b				0,01	0,1	0,1	0,15

Rys. 6. Wpływ wartości dodatkowych liczb podobieństwa na kształt profili mikrorotacji drugiego rzędu dla przepływu Poiseuille'a w kanale walcowym



Nr	Rint	Rw	Rem	Lp1	Lp2	Lp3	Lp4
0				0,01	0,1	0,1	0,1
1				0,02	0,1	0,1	0,1
2	0,0833	0,1	0,0625	0,01	0,15	0,1	0,1
3				0,01	0,1	0,15	0,1
4				0,01	0,1	0,1	0,15

a - $\alpha=0$ $\beta=1$
 b - $\alpha=0,5$ $\beta=0,5$
 c - $\alpha=1$ $\beta=0$

Rys. 5. Wpływ wartości dodatkowych liczb podobieństwa na kształt profili mikrorotacji drugiego rzędu

drugiego rzędu, natomiast wpływ Lp_4 okazał się nieznaczny. Analogiczne zmiany zachodzą w przypadku przepływu Poiseuille'a w kanale walcowym.

Wnioski tak sformułowane są słuszne dla prawie wszystkich punktów płaszczyzny przepływu przechodzącej przez normalną do obu powierzchni walcowych.

Literatura cytowana w tekście

1. A. C. ERINGEN, Int. J. Engng. Sci. **2**, 205, 1964.
2. A. C. ERINGEN, Int. J. Engng. Sci. **8**, 819, 1970.
3. A. C. ERINGEN, E. ŞUHUBI, Int. J. Engng. Sci. **2**, 189, 1964.
4. A. C. ERINGEN, J. Math. Mech. **16**, 1, 1966.
5. Y. KAZAKIA, T. ARIMAN, Reol. Acta, **10**, 319, 1971.
6. T. ARIMAN, M. A. TURK, N. D. SYLVESTER, Int. J. Engng. Sci. **11**, 905, 1973.
7. T. ARIMAN, M. A. TURK, N. D. SYLVESTER, Int. J. Engng. Sci. **12**, 273, 1974.
8. K. A. KLINE, S. J. ALLEN, C. N. DE SILVA, Biorheology, **5**, 111, 1968.
9. G. AHMADI, S. L. KOH, V. W. GOLDSCHMIDT, Recent Adv. Engng. Sci. Part 2, **5**, 9, 1970.
10. G. AHMADI, S. L. KOH, V. W. GOLDSCHMIDT, Iranian J. Sci. and Techn. **1**, 233, 1971.
11. G. AHMADI, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, **6**, 15, 1977.
12. G. AHMADI, Rheol. Acta, **14**, 710, 1975.
13. S. J. ALLEN, K. A. KLINE, Trans. Soc. Rheol. **12**, 4457, 1968.
14. M. A. TURK, N. D. SYLVESTER, T. ARIMAN, J. Biomech, **5**, 185, 1973.

Резюме

ОБОБЩЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ ПУАСЕЙЛЯ ВТОРОГО РЯДА МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

В работе представлено решение уравнений изображающих движение микрополярной жидкости второго порядка в обобщённом течении Пуасейля в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами. Проведен анализ влияния добавочных коэффициентов вязкости и величины зазора на форму профиля скорости и микроротации. Результаты иллюстрированы графиками.

Summary

THE GENERALIZED POISEUILLE FLOW OF A SECOND ORDER MICROPOLAR FLUID IN THE CLEARANCE BETWEEN TWO CYLINDERS

The solution is presented of the set of equations describing a generalized Poiseuille flow of a second order micropolar fluid in the clearance between the cylinders of the same axis. The effect is discussed of additional coefficients of viscosities and the width of clearance between the cylinders on the shapes of profiles of linear and micropolar velocities. The results are given in the form of diagrams and tables.

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 kwietnia 1981 roku

BIULETYN INFORMACYJNY

ROZSTRZYGNĘCIE KONKURSÓW NAUKOWYCH:

- A. Konkurs na najlepszą pracę z dziedziny mechaniki teoretycznej organizowany przez Oddział Łódzki PTMTS w roku 1981. Dnia 23 lutego 1982 roku, po zapoznaniu się z nadesłanymi pracami Sąd konkursowy postanowił:
1. nie przyznawać nagrody I stopnia,
 2. przyznać jedną nagrodę II stopnia w wysokości 9.000.— doktorowi Krzysztofowi Grysie i magistrovi Zbigniewowi Kozłowskiemu (Poznań) za pracę „O jednowymiarowym zagadnieniu identyfikacji strumienia ciepła na brzegu warstwy płaskiej”,
 3. przyznać dwie równorzędne nagrody stopnia III, po 6.500.— każda, doktorowi Bogusławowi Skierczyńskiemu (Lublin), za pracę „Wykorzystanie metod analizy wrażliwości do badania układów mechanicznych opisywanych liniowymi i nieliniowymi równaniami Mathieu”, oraz doktorowi Sewerowi Jakubowskiemu (Łódź), za pracę „Analiza stanu zakrytycznego swobodnie podpartej tarczy prostokątnej poddanej działaniu mimośrodowego ściskania i jej zastosowanie do przybliżonego obliczenia cienkościennego dźwigara skrzynkowego”,
 4. przyznać wyróżnienie w wysokości 3.500.—, doktorowi Krzysztofowi Grysie (Poznań), za pracę „O metodach teorii potencjałów w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych wymiany ciepła”,
- Na konkurs wpłynęło 5 prac.
- B. III Ogólnopolski Konkurs na prace z mechaniki płynów organizowany przez Częstochowski Oddział PTMTS w roku 1982. Dnia 28 grudnia 1982 roku, po zapoznaniu się z 4 pracami, które wpłynęły na Konkurs Sąd Konkursowy postanowił:
1. nie przyznać nagrody I stopnia,
 2. przyznać nagrodę II stopnia w wysokości 10.000.— doktorowi Piotrowi Kubskiemu i doktorowi Witoldowi Lewandowskiemu (Gdańsk), za pracę „Komorkowo-kominowy charakter konwekcji swobodnej od izotermicznych, poziomych powierzchni wymieniających ciepło w przestrzeni nieograniczonej”,
 3. przyznać nagrodę III stopnia w wysokości 8.000.— doktorowi Jackowi Zielińskiemu (Częstochowa), za pracę „Procesy turbulentnego transportu pędu i ciepła w przepływie zapaliskowym”,
 4. przyznać wyróżnienie w wysokości 5.000.— doktorowi Janowi Kołodziejowi i magistrovi Sławomirowi Grobelnemu (Poznań), za pracę „Zastosowanie metody kolokacji do wyznaczania poprzecznego opływu walca przy małych liczbach Reynoldsa”.

OGÓLNOKRAJOWY KONKURS**na prace teoretyczne z mechaniki technicznej**

Łódzki Oddział PTMTS organizuje w 1983 roku Ogólnokrajowy Konkurs na prace teoretyczne z zakresu mechaniki technicznej.

W konkursie tym mogą brać udział osoby nie posiadające tytułu profesora, docenta lub doktora habilitowanego.

Prace konkursowe zawierające elementy nowości w stosunku do obecnego stanu wiedzy prosimy przesłać do

Sekretariatu Oddziału PTMTS
90—924 Łódź, ul. Żeromskiego 116
Instytut Maszyn i Urządzeń Politechniki Łódzkiej

w terminie do 30 października 1983 r

Praca nie może być przed tą datą opublikowana ani zgłoszona do druku. Jej maszynopis należy przesłać w trzech egzemplarzach w formie nadającej się do druku, w objętości nie przekraczającej 20 stron. Stronę tytułową należy opatrzyć godłem, a nazwisko, imię i adres wraz z podaniem miejsca pracy przesłać w zamkniętej kopercie.

Konkurs prowadzony będzie zgodnie z regulaminem konkursów PTMTS. Prace oceniać będzie Sąd Konkursowy powołany przez Zarząd Oddziału w porozumieniu z Zarządem Głównym. Sąd Konkursowy określi kolejność i wysokość nagród.

Nagrodzone prace Autorzy zreferują na publicznym zebraniu naukowym w terminie określonym przez Zarząd Oddziału. Zostaną one ponadto przekazane do opublikowania w czasopiśmie *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*.

Prace nie nagrodzone będą zwrócone Autorom po zatrzymaniu jednego egzemplarza w archiwum Oddziału.

Sekretarz
Oddziału Łódzkiego PTMTS
Dr inż. Leon Kowalczyk

Przewodniczący
Oddziału Łódzkiego PTMTS
Doc. dr hab. Waldemar Kobza

OGÓLNOKRAJOWY KONKURS**Na prace doświadczalne z mechaniki ciała stałego**

Częstochowski Oddział PTMTS w porozumieniu z Zarządem Głównym PTMTS organizuje w 1983 roku Ogólnokrajowy Konkurs na prace doświadczalne z mechaniki ciała stałego.

W konkursie tym mogą brać udział tylko członkowie PTMTS nie posiadający tytułu profesora, docenta lub doktora habilitowanego.

Prace konkursowe zawierające elementy nowości w stosunku do obecnego stanu wiedzy prosimy przesłać na adres:

Sekretariat Oddziału PTMTS
Aleja A. Zawadzkiego 21
42—200 Częstochowa
Instytut Maszyn Ciepłych

w terminie do dnia 31 października 1983 r.

Praca nie może być przed tą datą opublikowana ani zgłoszona do druku. Jej maszynopis należy przesłać w trzech egzemplarzach w formie nadającej się do druku, w objętości nie przekraczającej 20 stron. Stronę tytułową należy opatrzyć godłem, a nazwisko i imię oraz adres z podaniem miejsca pracy i zaświadczeniem o członkostwie PTMTS przesłać w zamkniętej kopercie.

Konkurs prowadzony będzie zgodnie z regulaminem konkursów PTMTS. Prace oceniać będzie Sąd Konkursowy powołany przez Zarząd Oddziału w porozumieniu z Zarządem Głównym. Sąd Konkursowy określi kolejność i wysokość nagród.

Nagrodzone prace Autorzy referują na publicznym zebraniu naukowym w terminie określonym przez Zarząd Oddziału. Zostaną one ponadto przekazane do opublikowania w czasopiśmie *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*.

Prace nie nagrodzone będą zwrócone Autorom po zatrzymaniu jednego egzemplarza w archiwum Oddziału.

Sekretarz
Oddziału Częstochowskiego PTMTS
doc. dr inż. R. Wolański

V-przewodniczący
Oddziału Częstochowskiego PTMTS
doc. dr hab. inż. R. Parkitny

W następnym zeszycie ukażą się prace:

- Z. WASZCZYŻYŃ, Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji.
Метод конечных элементов в устойчивости сооружений,
Finite element method in structural stability,
- M. KLEIBER, A. ZACHARSKI, Nieliniowa analiza powłok cienkich dowolnego kształtu metodą elementów skończonych.
Эффективный нелинейный анализ тонких оболочек произвольной формы.
Effective nonlinear, analysis of arbitrary thin shells by simple finite elements.
- J. MARCINOWSKI, Zginanie powłoki konoidalnej
Изгиб коноидальной оболочки
Bending of a conoidal shell
- St. SUWAJ, St. WOJCIECH, Pierwszorzędowe obszary niestateczności drgań wałów wykonujących ruch obrotowo-oscylacyjny.
Первичные области неустойчивости колебаний валов совершающих вращательно — осцилляционное движение.
First order non-stability fields for vibrating shaft performing swing-like motion.
- J. PIETRALA, Metoda wyznaczania momentów skupionych działających na tyczkę podczas skoku.
Метод определения сосредоточенных моментов действующих на шест во время прыжка с местом
The method of evaluating the moment applied to the pole during the pole-vault
- W. BACHMACZ, J. PISAREK, Pomiary przemieszczeń normalnych do powierzchni obiektu metodą fotografii plamkowej w świetle białym.
Анализ перемещений методом спеклов (пятнистых структур) в белом свете.
Displacement of surface by white speckle photography.
- B. KUŹNICKA, Wpływ parametrów programowanego przebiegu obciążenia na trwałość zmęczeniową.
Влияние параметров программы нагружения на усталостную долговечность.
The effect of programmed load spectrum parameters on the fatigue life

- G. MILEWSKI, W. RYCHWAŁSKI *Parametry funkcji opisujących relaksację naprężeń jako wskaźniki uszkodzenia struktury materiału*
Параметры функции описывающих релаксацию напряжений как указатели повреждения структуры материала
Parameters of functions describing stress relaxation as indicators of a structure damage 329
- Z. GÓRCECKI *Zastosowanie półbezmomentowej teorii powłok w obliczeniach statycznych ortotropowych liniowo-sprężystych prętów cienkościennych o przekroju wieloobwodowym zamkniętym*
Применение полу-безмоментной теории оболочек к статическому расчету ортотропных линейно-упругих тонкостенных призматических стержней произвольного закрытого профиля
The application of semi-momentless theory of shells in static computation of orthotropic linear elastic bars with multicircuit closed section 339
- K. DRZEWIŃSKI, R. KAŁUŻA, O. MATEJA, K. SKRZYPULEC *Minikomputerowe wspomaganie badań doświadczalnych w mechanice*
Применение миникомпьютера в экспериментальных опытах в механике
Minicomputer application in experimental investigations in mechanics 361
- D. BUGAJNY, M. OSWALD, W. SZYC *Statyczne ciśnienie niszczące membranę z promieniowymi korbami*
Статические давление разрушающие мембрану с радиальными пазами
Static bursting pressure for the membrane having radial grooves 383
- E. WALICKI, J. ZACHWIEJA *Uogólniony przepływ Poiseuille'a płynu mikropolarnego drugiego rzędu w szczelinie między dwoma współosiowymi walcami*
Обобщенное течение Пуассейля второго ряда микрополярной жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами
The generalized Poiseuille flow of a second order micropolar fluid in the clearance between two cylinders 395
- BIULETYN INFORMACYJNY 405

Cena zł 120.—

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 240.—
półrocznie zł 120.—

Prenumeratę **na kraj** przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch”, oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do 10 czerwca na I półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki społecznej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki **za granicę** przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona—Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland; Please send payments to the account of Ars Polona—Ruch in Bank Handlowy S. A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
