

74 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

PL ISSN 0079-3201

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK
TOM 20 ZESZYT 1-2



WARSZAWA 1982

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

531

SPIS TREŚCI

- Jubileusz Profesora Witolda Nowackiego 3
Юбилей Профессора Витольда Новацкого
Professor Witold Nowacki's Jubilee
- W. NOWACKI Zagadnienia termosprężystości 5
Проблемы термоупругости
Problems of thermoelasticity
- D. ROGULA Pola sprzężone i nieklasyczne ośrodki ciągłe 19
Сопряженные поля и неклассические сплошные среды
Coupled fields and nonclassical continuous media
- J. LEMAITRE Zniszczenie w zakresie lepkoplastycznym 29
Разрушение при условиях ползучести
Fracture in creep conditions
- K. GRYSA O zagadnieniu odwrotnym dla równania falowego 49
Некоторая обратная задача для волнового уравнения
On an inverse problem for wave equation
- H. KAMIŃSKI Metoda oznaczania współczynników charakteryzujących procesy opisane równaniem parabolicznym 61
Метод определения коэффициентов которые характеризуют процессы изображенные уравнением параболического типа
Method of determination of a coefficients characterizing the processes described by parabolic equation
- K. GRYSA Metody określania liczby Biota i współczynnika przejmowania ciepła 71
Метод определения числа Био и коэффициента теплообмена
Methods of determination of the Biot number and the heat transfer coefficient
- W. KARMOWSKI, S. MAZURKIEWICZ Wyznaczanie płaskiego pola naprężenia z obrazu izodyn uzyskiwanych metodą światła rozproszonego 87
Новый метод интерпретирования изображения изодин
Determination of plane state of stress from the image of isodynes obtained by a method of scattered light
- J. KOMOROWSKI, J. STUPNICKI Skośne prześwietlanie w metodzie warstwy elastoptycznej 97
Метод неклонного просвечивания фотоупругих покрытий
Oblique incidence in photo-stress method
- J. WOJNAROWSKI, St. ZAWIŚLAK O klasach 2-drzew w syntezy dyskretnych układów mechanicznych 117
О классах 2-деревьев в синтезе дискретных механических систем
On the classes of 2-trees in the synthesis of discrete mechanical systems
- Z. BASISTA Optymalne kształtowanie belki trójwarstwowej w procesie ustalonych, harmonicznycy drgań wymuszonych 127
Оптимальное формирование трехслойной балки в процессе установившихся, гармонических вынужденных колебаний
Optimal design of the three-layer sandwich beam under stable harmonical excitation
- J. WŁASNY Analiza stateczności przyrmatycznych łuków o osi odkształcalnej 141
Анализ устойчивости призматических балок с растяжимой осью
Stability of extensible prismatic arches
- P. WRZECIONARZ Stateczność eulerowska prętów przekładkowych z rdzeniem o zmiennej charakterystyce 159
Эйлерова устойчивость трёхслойных стержней с заполнителем о переменной характеристике
Overall instability of sandwich struts with a core of variable characteristic
- List do redakcji J. Waclawik O pewnych rozwiązaniach równania dyfuzji w przestrzeni dystrybucji 167
- Biuletyn informacyjny 172

ERRATA

do zeszytu Przeglądu Geofizycznego nr 1 z 1978 r. ..

Str.	Wiersz		Jest	Powinno być
	do góry	od dołu		
5	3	11	$\delta\alpha \leq 1$	$\delta\alpha = 1$
31			$G_s(t_o, t_k) =$	$G(t_o, t_k) =$
31		6	$G_s(t_o, t_k) =$	$G(t_o, i_k) =$
60		20	od Rostoku	od Rostocku
62		20	w Rostoku	w Rostocku

4 11 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 2 0 • Z E S Z Y T 1-2

W A R S Z A W A 1 9 8 2

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych.

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

MAREK DIETRICH—PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,
JÓZEF WIĘCKOWSKI,
ZBIGNIEW OLESIK—REDAKTOR NACZELNY,
JACEK STUPNICKI—REDAKTOR,
ANDRZEJ SZANIAWSKI—REDAKTOR,
CZESŁAW WOŹNIAK—REDAKTOR,
MONIKA WĄGROWSKA—REDAKTOR,
ELŻBIETA OLSZEWSKA—SEKRETARZ

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 520. Ark. wydawniczych 12,0. Ark. drukarskich 10,75. Papier druk. b. sat. kl. IV, 71 g. 70×100.
Oddano do składania 17.VIII.1982 r. Druk ukończono w kwietniu 1983 r. Zam. 2816/82. Cena zł 120.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

JUBILEUSZ PROFESORA WITOLDA NOWACKIEGO



Dnia 25 czerwca odbyło się w Warszawie w sali Okrągłego Stołu w Pałacu Śtaszica plenarne zebranie Komitetu Mechaniki Polskiej Akademii Nauk poświęcone przedstawieniu sylwetki i działalności naukowej Profesora Witolda Nowackiego w związku z jubileuszem Jego 70 lecia. W porządku dziennym znalazły się wystąpienia kilku uczonych i referat Profesora W. Nowackiego. Słowo wstępne wygłosił i otworzył zebranie przewodniczący Komitetu Mechaniki PAN prof. Antoni Sawczuk.

Profesor Jerzy Litwiniszyn w swoim wystąpieniu przypomniał działalność Jubilata w czasach przedwojennych i w obozie jenieckim w Woldenbergu, a następnie omówił Jego zasługi w rozwoju badań naukowych oraz jako organizatora nauki w całym okresie powojennym.

Profesor Zbigniew Kączkowski w swoim wystąpieniu wiele uwagi poświęcił działalności naukowej i organizacyjnej Profesora W. Nowackiego na Politechnice Gdańskiej. Omówił również rolę Profesora jako inicjatora różnych poczynań rozwijających życie naukowe na uczelni oraz opiekuna i promotora zdolnej młodzieży i kierownika biura konstrukcyjnego przy katedrze. W latach pięćdziesiątych, działając już w Warszawie,

w charakterze Sekretarza Wydziału IV — Nauk Technicznych PAN Profesor W. Nowacki był inicjatorem powołania Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, nieco później PTETiS i innych towarzystw naukowych przy IV Wydziale, a następnie patronował powstaniu naszego kwartalnika Mechanika Teoretyczna i Stosowana. Następnie prof. Z. Kączkowski omówił działalność naukową Jubilata.

Profesor Dominik Rogula wygłosił referat pt. „Pola sprzężone i nieklasyczne ośrodki ciągłe”. Referat ten drukujemy jako pracę przeglądową w dalszym ciągu niniejszego numeru MTiS. Profesor W. Nowacki wniósł znaczny wkład do rozwoju pól sprzężonych w mechanice ciała stałego.

Profesor Marek Sokołowski wygłosił referat problemowy pt. „Teoria sprzężystości i termosprężystość”. Omówił w nim ciekawy sposób osiągnięcia naukowe Profesora Witolda Nowackiego, w szczególności w teorii sprzężystości i termosprężystości oraz w mechanice budowli.

W obszernej wypowiedzi Profesor W. Nowacki podziękował Komitetowi Mechaniki PAN, a przede wszystkim swoim przedmówcom za zorganizowanie zebrania i przygotowanie referatów. Następnie wygłosił referat przeglądowy na temat termosprężystości i jej perspektyw rozwojowych. Referat ten publikuje poniżej.

Dnia 3 lipca 1982 w Pałacu Kazimierzowskim w Warszawie odbyło się uroczyste posiedzenie Senatu Uniwersytetu Warszawskiego, na którym Profesor Witold Nowacki otrzymał doktorat honoris causa. Na Uczelni tej wykładał przez ponad ćwierć wieku, będąc kierownikiem Katedry Teorii Sprężystości i Plastyczności w latach 1955 - 69, następnie pierwszym Dyrektorem Instytutu Mechaniki w latach 1969 - 78.

Dyplom Doktora Honoris Causa wręczył Jubilatowi J. M. Rektor Uniwersytetu Warszawskiego profesor Henryk Samsonowicz, promotorem był prof. Zbigniew Olesiak. Godzi się wspomnieć, że był to już ósmy doktorat honoris causa przyznany Profesorowi W. Nowackiemu. Wpłynęły liczne gratulacje i życzenia od władz i osób prywatnych, a chór akademicki Uniwersytetu wykonał kilka uroczystych pieśni.

Również Politechnika Warszawska uhonorowała Profesora Witolda Nowackiego doktoratem honorowym. Z Uczelnią tą Profesor W. Nowacki był związany w latach 1952 - 55, pełniąc obowiązki kierownika katedry. W kameralnej uroczystości dnia 16 grudnia 1981 dyplom Doktora Honoris Causa Politechniki Warszawskiej wręczył J.M. Rektor Profesor Władysław Findeisen, promotorem był prof. Jerzy Mutermilch.

ZAGADNIENIA TERMOSPREŻYSTOŚCI

WITOLD NOWACKI

PAN

Mechanika ciała stałego odkształcalnego XIX wieku, to głównie teoria sprężystości, traktowana jako dział fizyki matematycznej.

Równoległe z teorią sprężystości rozwijały się jej zastosowania techniczne w ramach tzw. nauki o wytrzymałości materiałów, teorii płyt i powłok oraz mechaniki konstrukcji.

W okresie powojennym zaczęły się rozwijać nowe działy mechaniki ciała odkształcalnego, mianowicie teoria plastyczności, lepkosprężystość i reologia. Jednocześnie nastąpił renesans klasycznej teorii sprężystości. Z powodzeniem rozwijano jej wariant nieliniowy. W liniowej teorii sprężystości na plan pierwszy wysunęły się zagadnienia szczelin, znaczną rolę odgrywające w fizyce pęknięcia materiału.

Jednocześnie obserwujemy burzliwy rozwój teorii pól sprzężonych ciał sprężystych. Pod tym mianem rozumiemy wiązanie co najmniej dwu działów fizyki fenomenologicznej, dotąd oddzielnie rozwijanych. Typowym przykładem takiego wiązania pól jest termosprężystość. Wiążemy tu klasyczną teorię sprężystości i teorię przewodnictwa ciepła w ciałach stałych w jedną, syntetyczną dziedzinę. Badamy wpływ zmiany temperatury na odkształcenie ciała jak i wpływ odkształcenia na zmianę temperatury.

Impuls do badania pól sprzężonych przyszedł od techniki; w związku z rozwojem konstrukcji lotniczych i maszynowych a przede wszystkim z rozwojem inżynierii chemicznej (zwłaszcza jądrowej). Coraz częściej elementy konstrukcyjne narażone są na podwyższone temperatury, wyższe ciśnienie; pracują w warunkach radiacji, dyfuzji oraz w silnym polu magnetycznym.

W niniejszym referacie ograniczymy się do przedstawienia jednego tylko pola sprzężonego — termosprężystości. W tej bowiem dziedzinie mechanika polska ma szczególne osiągnięcia.

Wiadomo, że w klasycznej teorii sprężystości stosuje się odmienne założenia termodynamiczne w elastostatyce i elastodynamice. Jeszcze inne założenia stoją u podstaw teorii naprężeń cieplnych.

W elastostatyce przyjmuje się, że w czasie powolnego narastania obciążeń, a co za tym idzie i odkształceń, występuje pełna wymiana ciepła z otoczeniem. Zakłada się, że w całym ciele panuje stała temperatura T_0 , temperatura stanu naturalnego. Wiadomo, że wektor przemieszczenia \mathbf{u} , którego pochodne opisują deformację ciała, spełnia równania różniczkowe

$$(1) \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mathbf{X} = 0,$$

gdzie

$$(2) \quad \mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0.$$

Tutaj \mathbf{u} jest wektorem sił masowych, a μ , λ stałymi materiałowymi Lamé'go dla stanu izotermicznego. Nierówności (2) wynikają ze stwierdzenia, że energia odkształcenia jest formą kwadratową, dodatnio zdefiniowaną.

Natomiast w klasycznej elastodynamice zakłada się, że wymiana ciepła, odbywająca się za pośrednictwem przewodnictwa cieplnego następuje w sposób bardzo powolny, oraz że w ciele brak jest źródeł ciepła.

Powyższe założenie odpowiada warunkom procesu adiabatycznego. Przemieszczenie \mathbf{u} spełnia tu równanie ruchu

$$(3) \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}}.$$

Tutaj ρ oznacza gęstość a $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ jest siłą bezwładności. Stałe Lamé'go μ , λ występujące w równaniu (3) odnoszą się do stanu adiabatycznego. Również i one spełniają nierówności

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0.$$

Innego typu założenia przyjmuje się w teorii naprężeń cieplnych. Uwzględnia się działanie źródeł ciepła oraz ogrzanie powierzchni ciała, ale pomija się wpływ odkształcenia ciała na zmianę pola temperatury.

Odształcenie całkowite ε_{ij} składamy z dwu części, z dystorsji termicznej $\varepsilon_{ij} = \alpha_t \Theta \delta_{ij}$ oraz z odkształcenia sprężystego ε_{ij} . W rezultacie otrzymamy

$$(4) \quad \varepsilon_{ij} = \alpha_t \Theta \delta_{ij} + 2\mu' \sigma_{ij} + \lambda' \delta_{ij} \sigma_{kk},$$

gdzie

$$2\mu' = \frac{1}{2\mu} \quad \lambda' = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

Zależność $\varepsilon_{ij}^0 = \alpha_t \Theta \delta_{ij}$ opisuje znane zjawisko fizyczne: proporcjonalność dystorsji termicznej do wzrostu temperatury $\Theta = T - T_0$, gdzie T jest temperaturą bezwzględną a T_0 stałą temperaturą stanu naturalnego. Przez α_t oznaczono współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej. Ze związków (4) otrzymamy tzw. związki Duhamela-Neumanna.

$$(5) \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon_{kk} - \gamma \Theta) \delta_{ij}.$$

Wstawiając powyższe do równań ruchu, dochodzimy do równań przemieszczeniowych teorii naprężeń cieplnych

$$(6) \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \gamma \text{grad } \Theta, \\ \mu > 0, \quad (3\lambda + 2\mu) > 0, \quad \gamma = (3\lambda + 2\mu) \alpha_t > 0, \quad \alpha_t > 0.$$

Pole temperatury opisane jest tu klasycznym równaniem przewodnictwa cieplnego

$$(7) \quad (k \nabla^2 - c \rho \partial_t) \Theta = -\rho h, \quad k > 0, \quad c > 0.$$

W równaniu tym h jest ilością generowanego ciepła, odniesionego do jednostki masy, c jest ciepłem właściwym, odniesionym do jednostki masy (przy ustalonym odkształceniu), wreszcie k jest współczynnikiem przewodzenia ciepła.

Równanie przewodnictwa cieplnego (7) nie uwzględnia wpływu odkształcenia ciała na zmianę temperatury. W tym stanie rzeczy wyznaczamy temperaturę z równania przewodnictwa cieplnego i wstawiamy do prawej strony równania ruchu (6). Możemy zatem z rozwiązania równania ruchu wyznaczyć pole przemieszczenia wywołane ogrzaniem (czy oziębieniem) ciała. Nie możemy jednak rozwiązać zagadnienia odwrotnego, wyznaczenia zmiany temperatury wywołanej odkształceniem ciała.

W rozpatrywanych tu przypadkach otrzymaliśmy trzy różne równania przemieszczeniowe, uwzględniające różne założenia termodynamiczne. Dążenie do uzyskania jednego układu równań różniczkowych opisujących wszelkie procesy termodynamiczne stoi u podstaw sprzężonej termośprężystości.

Sprężenie pola deformacji i temperatury postulował już J. M. C. DUHAMEL [1]. Dołączył on do klasycznego równania przewodnictwa cieplnego człon dylatacyjny. Tak rozszerzone równanie przewodnictwa cieplnego miała postać

$$(8) \quad D\Theta = \xi \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = -\rho h, \quad D = k\nabla^2 - c\rho\partial_t,$$

nie zostało jednak uzasadnione termodynamicznie. Zanotujmy dalsze usiłowania uzasadnienia termodynamicznego równania (8) podjęte przez W. VOIGTA [2] i H. JEFFREYS'A [3]. Jednak dopiero w 1956 r. M. A. BIOT [4] opierając się na termodynamicie procesów nieodwracalnych, podał pełne uzasadnienie termodynamiczne równania [8].

Podstawą dalszych rozważań są: bilans energii oraz nierówność Clausius'a-Duhema

$$(9) \quad \rho \dot{\varepsilon} = \sigma_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} + \rho h,$$

$$(10) \quad \rho \dot{\eta} + \left(\frac{q_k}{T} \right)_{,k} - \frac{\rho h}{T} \geq 0$$

Tutaj ε jest energią wewnętrzną, odniesioną do jednostki masy, η jest entropią odniesioną do jednostki masy. Kropka na η i ε oznacza materialną pochodną czasową. Wreszcie \mathbf{q} jest wektorem przepływu ciepła. Człon $\sigma_{kl} v_{l,k}$ jest przyrostem energii odkształcenia, pominiętym przy wyprowadzaniu klasycznego równania przewodnictwa cieplnego.

Z bilansu energii wewnętrznej uzyskuje się równania konstytutywne, związki między naprężeniami i entropią a odkształceniami i przyrostem temperatury

$$(11) \quad \sigma_{IJ} = 2\mu \varepsilon_{IJ} - (\lambda \varepsilon_{kk} - \gamma \Theta) \delta_{IJ},$$

$$(12) \quad S = \gamma \varepsilon_{IJ} + \frac{c_s}{T_0} \Theta.$$

Nierówność Clausiusa-Duhema prowadzi nas do prawa Fouriera przewodnictwa cieplnego

$$(13) \quad q_i = -k\Theta_{,i}.$$

Z bilansu entropii oraz z równania ruchu otrzymuje się równanie przewodnictwa cieplnego oraz równanie przemieszczeniowe

$$(14) \quad \nabla^2 \Theta - \frac{1}{\kappa} \dot{\Theta} - \xi \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = -\frac{Q}{\kappa},$$

$$(15) \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \gamma \operatorname{grad} \Theta.$$

Powyższe równania stanowią komplet równań termosprężystości. Równania te są ze sobą sprzężone. Równanie (15) jest dla $\gamma = 0$ równaniem hiperbolicznym; równanie (14) dla $\xi = 0$ równaniem parabolicznym. Układ równań (14) (15) jest złożonym układem równań hiperboliczno-parabolicznym.

Przyczynami wywołującymi odkształcenie ciała i zmianę temperatury są tu siły masowe i źródła ciepła, zadane warunki brzegowe oraz warunki początkowe.

Termosprężystość staje się uogólnieniem i syntezą dwu dotąd oddzielnie rozwijających się dziedzin, przewodnictwa cieplnego w ciałach stałych oraz teorii sprężystości. Termosprężystość ma fundamentalne znaczenie tam, gdzie głównym celem badań jest określenie energii dysypacji. Znaczenie termosprężystości polega przede wszystkim na jej walorach poznawczych; pozwala ona głębiej wniknąć w mechanizm procesu odkształcenia, powiązanego z efektami termicznymi w ciele stałym.

Równania (14) (15) zawierają cały szereg przypadków szczególnych. Jeżeli przyczyny wywołujące odkształcenie i zmianę temperatury zmieniają się bardzo wolno w czasie, to można pominąć w równaniu (15) człon inercyjny $\rho\ddot{u}$. Równania (14) (15) pozostają nadal sprzężone. Rozprężenie równań termosprężystości następuje jedynie w przypadku procesu stacjonarnego. W tym przypadku równanie przewodnictwa cieplnego staje się równaniem Poissona; równanie przemieszczeniowe jest równaniem typu eliptycznego.

Jeśli przyjąć, że $\dot{S} = 0$, co pociąga za sobą $\mathbf{q} = 0$, $h = 0$ oraz

$$(16) \quad \Theta = -\frac{\xi}{c\varrho} \operatorname{div} \mathbf{u};$$

to równania (14) (15) przechodzą na równania klasycznej elastodynamiki (3). Jeśli mamy do czynienia z zagadnieniem statycznym, to przy $\Theta = 0$, $T = T_0$ oraz $h = 0$, otrzymamy równania (1). Wreszcie pominięcie członu dylatacyjnego $\eta \operatorname{div} \mathbf{u}$ w równaniu (14) prowadzi do równań teorii naprężeń termicznych.

Równania termosprężystości są bardzo złożone i trudne do rozwiązania. Rozseparowanie równań termosprężystości polega na zastosowaniu dekompozycji wektora przemieszczenia sił masowych na część potencjalną i solenoidalną.

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \Psi & \mathbf{X} &= \varrho(\operatorname{grad} \vartheta + \operatorname{rot} \chi) \\ \square_1^2 \Phi &= m\Theta - \frac{1}{c_1^2} \vartheta & D\Theta - \eta \nabla^2 \Phi &= \frac{Q}{\kappa}, & \square_2^2 \Psi &= -\frac{1}{c_2^2} \chi. \end{aligned}$$

W ten sposób równanie termosprężystości zastąpimy układem równań (H. DEREŚIEWICZ, H. ZORSKI [5] [6]):

$$(18) \quad (\square_1 D - \eta \gamma \partial_t \nabla^2) \Phi = -\varrho D \vartheta - \gamma \varrho h,$$

$$(19) \quad \square_2 \Psi = -\varrho \chi,$$

gdzie

$$\square_1 = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varrho \partial_t^2 \quad \square_2 = \mu \nabla^2 - \varrho \partial_t^2, \quad D = k \nabla^2 - c_\varrho \partial_t.$$

Równanie (19) opisuje falę poprzeczną. W nieskończonej przestrzeni termosprężystej fala podłużna jest generowana przez część potencjalną sił masowych i przez pole temperatury; fala poprzeczna przez część solenoidalną sił masowych. Fala poprzeczna jest niezaburzona przez pole temperatury.

Zauważmy, że funkcja Θ spełnia równanie

$$(20) \quad (\square_1 D - \eta\gamma\partial_t \nabla^2)\Theta = -\frac{1}{\kappa}\square_1^2 Q - \frac{1}{c_1^2}\eta\partial_t \nabla^2 \vartheta \quad c_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}.$$

Budowa tego równania jest identyczna z równaniem (18); różnica polega na prawych stronach tego równania.

Równanie jednorodne fali podłużnej (18) daje się przedstawić jak to wykazali L. BRUN [7] i J. IGNACZAK [8] w sposób analogiczny do rozwiązania T. BOGGIO [9] w elastodynamice klasycznej.

Wróćmy do równań termosprężystości. Przedstawmy jednorodne równanie przewodnictwa cieplnego (14) w ten sposób, aby człon zawierający pochodną czasową dylatacji znalazł się po prawej stronie tego równania. Funkcję $\eta \operatorname{div} \dot{u}$ potraktujemy jako źródło ciepła w klasycznym równaniu przewodnictwa cieplnego. Rozwiązanie tego równania w nieskończonej przestrzeni termosprężystej przedstawimy w następującej postaci

$$(21) \quad \Theta(x, t) = \int_0^t dt \int_V G(x', x, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \operatorname{div} u(x', \tau) dV(x'),$$

gdzie

$$G(x, x', t) = -\frac{\eta}{8c_e(\pi\kappa)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{R^2}{4\kappa t}\right),$$

$$R = |x' - x|, \quad \kappa = \frac{c_e}{k}.$$

Wstawienie funkcji Θ ze wzoru (21) do równania przemieszczeniowego (15) prowadzi do układu równań różniczkowo-całkowych w przemieszczeniach (H. ZORSKI [10]).

Analogon do rozwiązania Cauchy-Kowalewskiej-Somigliano został w termosprężystości podany niezależnie od siebie przez S. KALISKIEGO [11], J. PODSTRIGACZA [12] i D. RÜDIGERA [13].

Wprowadzając funkcję wektorową φ i skalarną τ przyjmujemy następującą reprezentację przemieszczenia u i wzrostu temperatury Θ

$$(22) \quad u = \Omega\varphi - \operatorname{grad} \operatorname{div}(\Gamma\varphi) + \gamma \operatorname{grad} \tau,$$

$$(23) \quad \Theta = \gamma\eta \operatorname{div} \square_2 \dot{\varphi} + \square_1 \tau,$$

gdzie

$$\Omega = \square_1 D - \eta\gamma\partial_t \nabla^2, \quad \Gamma = (\lambda + \mu)D - \gamma\eta\partial_t.$$

Wstawienie powyższe reprezentacji do równań termosprężystości (14) (15) prowadzi do równań falowych

$$(24) \quad \square_2 \Omega\varphi + X = 0,$$

$$(25) \quad \Omega\tau + \rho h = 0.$$

Powyższe równania są bardzo wygodne do wyznaczenia funkcji Greena w nieskończonej przestrzeni termosprężystej.

Obecnie termosprężystość stanowi już rozwiniętą teorię polowa. Sformułowane zo-

stały metody rozwiązania układu równań (14) (15) oraz niektóre podstawowe ogólne twierdzenia.

Z tych ogólnych twierdzeń na plan pierwszy wysuwa się zasada prac wirtualnych, sformułowana przez M. A. BIOTA [14]. Zasada ta stanowi kombinację zasady prac wirtualnych Lagrange'a dla teorii sprężystości (z członem termicznym) z zasadą wariacyjną dla zjawiska przewodnictwa cieplnego. M. A. Biot w sformułowanej przez siebie zasadzie wprowadza funkcję wektorową \mathbf{H} , związaną z entropią oraz z wektorem przepływu ciepła następującymi zależnościami

$$(26) \quad S = -\operatorname{div} \mathbf{H}, \quad \mathbf{q} = T_0 \dot{\mathbf{H}}.$$

Zasada prac wirtualnych termosprężystości ma postać (przy $h = 0$)

$$(27) \quad \delta(\mathcal{W} + \mathcal{P} + \mathcal{D}) = \int_V (X_i - \varrho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_A p_i \delta u_i dA - \int_A \Theta_{n_i} \delta H_i dA.$$

Tutaj \mathcal{W} jest pracą odkształcenia, \mathcal{P} potencjałem cieplnym, a \mathcal{D} funkcją charakteryzującą dysypację energii.

Znane są jeszcze inne sformułowania zasad wariacyjnych. Zwrócić należy uwagę na twierdzenie wariacyjne G. HERMANN [15], D. IEŞANA [16], R. E. NIKELL'A i J. L. SACKMANN'A [17] oraz P. RAFALSKIEGO [18]. Są to uogólnienia znanych z elastodynamiki klasycznej twierdzeń wariacyjnych. Twierdzenie wariacyjne dla kwazistatycznych zagadnień termosprężystych podali V. IONESCU-CAZIMIR [19] oraz H. BEN-AMOUZ [20].

Wróćmy do zasady prac wirtualnych M. A. Biota (27) i założmy, że przyrosty δu_i , $\delta \varepsilon_{ij}$, δH_i pokrywają się z przyrostami rzeczywistymi występującymi przy przejściu od chwili t do $t+dt$. W tym przypadku otrzymamy z zasady prac wirtualnych twierdzenie energetyczne

$$(28) \quad \frac{d}{dt} (\mathcal{K} + \mathcal{P} + \mathcal{W}) + \chi_T = \int_V X_i v_i dV + \int_A p_i v_i dA + \frac{k}{T_0} \int_A \Theta \Theta_{,n} dA.$$

W powyższym wyrażeniu \mathcal{K} przedstawia energię kinetyczną, \mathcal{W} pracę odkształcenia a χ_T jest funkcją dysypacji

$$(29) \quad \chi_T = k T_0 \int_V \left(\frac{\Theta_{,c}}{T_0} \right)^2 dV.$$

Równanie (28) przedstawia bilans energii w ujęciu globalnym (przy $h = 0$). Podstawowe twierdzenie energetyczne wykorzystał J. H. WEINER [21] do określenia jednoznaczności rozwiązań równań termosprężystości. Zagadnieniem tym zajmowali się jeszcze R. J. KNOPS i L. E. PAYNE [22] oraz L. BRUN [23].

Ważną rolę, tak przy rozwiązywaniu równań termosprężystości przy użyciu funkcji Greena jak i w twierdzeniu o istnieniu rozwiązania odgrywa twierdzenie o wzajemności prac. Zostało ono obmyślane przez V. IONESCU-CAZIMIR [24]. Twierdzenie to, w którym występują dwa niezależne od siebie układy przyczyn i skutków, ma następującą postać

$$(30) \quad \eta \kappa \left\{ \int_V (X_i \odot u'_i - X'_i \odot u_i) dV + \int_A (p_i \odot u'_i - p'_i \odot u_i) dA \right\} = \\ = \gamma \int_V (Q^* \Theta' - Q' \Theta) dV + \gamma \kappa \int_A (\vartheta' \Theta_{,n} - \vartheta \Theta'_{,n}) dA.$$

W równaniu tym wprowadziliśmy następujące oznaczenia spłotowe

$$(31) \quad X_i \odot u_i' = \int_0^t X_i(x, t-\tau) \frac{\partial u_i'(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

$$(32) \quad Q * \Theta' = \int_0^t Q(x, t-\tau) \Theta'(x, \tau) d\tau, \text{ i.t.d.}$$

Twierdzenie o wzajemności prac zawiera szereg przypadków szczególnych, między innymi twierdzenie O. GRAFFIEGO [25] dla elastodynamiki i twierdzenie o wzajemności prac dla klasycznego równania przewodnictwa cieplnego.

W. NOWACKI [26] wychodząc z twierdzenia o wzajemności prac podał uogólnione na termosprężystość twierdzenie Somigliana i Greena; podał wreszcie rozszerzone na termosprężystość twierdzenie Mayziela.

Zagadnienie mieszanych warunków dla termosprężystości zostało rozwiązane przez W. NOWACKIEGO [26] poprzez sprowadzenie zagadnienia do rozwiązania układu równań całkowo-różniczkowych. Zaslugą W. NOWACKIEGO [27] jest wreszcie wykorzystanie rozwiązań teorii naprężeń cieplnych do rozwiązania zagadnień termosprężystości.

Ważnym zagadnieniem osobliwych równań całkowych termosprężystości zajęli się we wspólnej pracy J. IGNACZAK i W. NOWACKI [28]. Uzyskane równania całkowe są osobliwymi równaniami całkowymi Fredholma drugiego rodzaju. Przedstawiono proces budowania przybliżonych rozwiązań równań termosprężystości przez wykorzystanie tzw. kanonicznych, funkcjonalnych równań całkowych.

Ważnym zagadnieniem stało się przekształcenie falowych równań różniczkowych dla potencjałów sprężystych Φ , Ψ i temperatury Θ w postaci wyrażeń całkowych (rozszerzenie znanych z elastodynamiki twierdzeń Kirchhoffa, Webera, Poissona i Volterry). Uzyskanie tak uogólnionych twierdzeń było przedmiotem prac W. NOWACKIEGO [29, 30].

Podstawowe zagadnienie termosprężystości, dowód twierdzenia o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych termosprężystości stał się przedmiotem kilku prac. I tak W. D. KUPRADZE i T. W. BURCZUŁADZE [31] przedstawili dowód istnienia rozwiązań dla przypadku drgań ustalonych i czterech podstawowych typów warunków brzegowych. Zagadnienia brzegowe zostały doprowadzone do osobliwych równań całkowych przy pomocy alternatywy Fredholma dowiedziono istnienie ich rozwiązań. Rozpatrzono zagadnienie wewnętrzne i zewnętrzne. Ostatnio, w znakomitej monografii autorów: W. D. KUPRADZE, T. G. GEGELIA, M. D. BASZELISZWILI i T. W. BURCZUŁADZE [32], poświęconej przestrzennym zagadnieniom teorii sprężystości i termosprężystości, ukazał się obszerny rozdział dotyczący dowodu istnienia dla zagadnień dynamicznych periodycznych i również aperiodycznych. Na uwagę zasługuje również praca C. M. DAFERMOSA [33] poświęcona dowodowi istnienia oraz asymptotycznej stabilności rozwiązań w odniesieniu do ciała anizotropowego i niejednorodnego.

Liczne są prace dotyczące propagacji fal harmonicznycch w nieograniczonym i ograniczonym obszarze sprężystym. Kluczowe znaczenie ma tu praca P. CHADWICKA i I. N. SNEDDONA [34]. W pracy tej autorzy zanalizowali w sposób bardzo szczegółowy wpływ powiązanych ze sobą zmian objętościowych i cieplnych na postać fal harmonicznycch. Wykazali,

że fale poprzeczne nie mają wpływu na efekty termiczne. Istnieją dwie odrębne fale podłużne, z których jedna w swej naturze jest podobna do czysto podłużnej fali rozpraszanej i pochłanianej przez ośrodek, druga zaś jest podobna do fali czysto termicznej.

Zagadnienie propagacji naprężeń termicznych w prętach metalowych, wywołanych bądź wzbudzeniem termicznym, bądź mechanicznym, zostało rozpatrzone przez I. N. SNEDDONA [35]. Analogiczne zagadnienie dla półprzestrzeni sprężystej i warstwy sprężystej zostało opracowane przez W. NOWACKIEGO [36]. Zagadnienie propagacji harmonicznych fal kulistych i walcowych w nieskończonej przestrzeni termosprężystej rozwiązane zostało przez W. NOWACKIEGO [37]. Ważne zagadnienie rozwiązań podstawowych (funkcje Greena) dla sił i źródeł ciepła zmieniających się w sposób harmoniczny w czasie, zostało opracowane przez W. NOWACKIEGO [38] oraz G. EASONA i I. N. SNEDDONA [39].

Zagadnieniem propagacji fal powierzchniowych Rayleigha w ośrodku termosprężystym przy swobodnej wymianie ciepłej w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń zajął się F. J. LOCKETT [40]. Zagadnienie propagacji fal termosprężystych harmonicznych w warstwie sprężystej przedyskutowali W. NOWACKI i M. SOKOŁOWSKI [41].

Fale harmoniczne podłużne rozprzestrzeniające się w pełnych i wydrążonych walcach stały się przedmiotem pracy F. J. LOCKETTA [42]. J. IGNACZAK i W. NOWACKI [43] rozwiązali zagadnienie drgań wymuszonych harmonicznych w walcach o przekroju prostokątnym, wywołanych ich różgrzaniem oraz drganiami wymuszonymi płyt średniej grubości. J. IGNACZAK [44] podał odmienną drogę rozwiązania zagadnienia propagacji fal w przecie półnieskończonym, dogodną w przypadku jednorodnych warunków brzegowych ale niejednorodnych warunków początkowych.

Zagadnienie osiowo-symetryczne, odnoszące się do koncentracji naprężeń, wywołanych płaskim przepływem ciepła (przepływ ten zmienia się w sposób harmoniczny w czasie) wokół pustki walcowej i kulistej, było przedmiotem pracy J. IGNACZAKA i W. NOWACKIEGO [45].

Zagadnienie propagacji naprężeń w półprzestrzeni termosprężystej, ogrzanej na powierzchni lub pobudzonej do drgań siłami mechanicznymi, ma już obszerną literaturę. Zagadnienie osiowo-symetryczne i płaskie Lamba, dla przyczyn harmonicznie zmiennych w czasie, zostało opracowane przez W. NOWACKIEGO [47]. Zagadnienie nierównomiernego ogrzania płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń sprężystą zostało opracowane przez G. EASONA i J. N. SNEDDONA [39] i W. NOWACKIEGO [40].

Dodać jednak należy, że uzyskane tu ogólne rozwiązania mają w dużej mierze charakter rozwiązań formalnych; na tym etapie nie udało się nawet dla najprostszych przypadków uzyskać wyników w postaci zamkniętej przy użyciu znanych funkcji przeważnie wyniki uzyskano w postaci całek niewłaściwych.

Zanotować należy tu kilka prac odnoszących się do przybliżonego rozwiązania tzn. problemu W. I. DANIŁOWSKIEJ [49]. Problem polega na nagłym przyłożeniu temperatury do powierzchni półprzestrzeni sprężystej. Został on rozwiązany przez W. I. Daniłowską w ramach teorii naprężeń cieplnych. Rozszerzenie tego problemu na termosprężystość jest owocem prac kilku uczonych (LESSEN [50], R. B. HETNARSKI [51], [52], MUKI i BRAUER [53]) którzy podali swe rozwiązania stosując metodę małych perturbacji oraz stosując transformację Laplace'a dla małych czasów.

Jak z powyższego przeglądu prac wynika, rozwiązane zostały dotąd zagadnienia naj-

prostsze ale i najważniejsze. Tym niemniej mamy do czynienia już ze spójną syntezą pola temperatury i pola odkształceń.

Powyżej przedstawiona termosprężystość bazowała na klasycznym modelu teorii sprężystości. Podstawowymi funkcjami pola były przemieszczenia u i przyrost temperatury θ . W latach 60-tych renesansu doznała mikropolarna teoria sprężystości, obmyślona na początku tego wieku przez braci Cosseratów (podstawowe ich dzieło „*Theorie des corps deformables*” pochodzi z 1909 roku). Materiały mikropolarne są z grubsza mówiąc materiałami klasycznymi z dodatkowymi niezależnymi stopniami swobody dla lokalnych obrotów. Materiały te przejmują działanie sił i momentów masowych: przez element kontaktowy przenoszą działanie naprężeń siłowych i naprężeń momentowych. Obok przemieszczenia u wystąpi niezależny wektor obrotu φ .

Teoria termosprężystości ośrodka mikropolarnego została opracowana przez W. NOWACKIEGO [54]. Dotyczy to nie tylko twierdzeń podstawowych (twierdzenie wariacyjne, twierdzenie energetyczne, twierdzenie o wzajemności prac, jednoznaczność rozwiązań itd.) ale i rozwiązań równań falowych (fale płaskie, kuliste i walcowe, rozwiązania podstawowe, zagadnienia brzegowe).

Wyniki prac W. Nowackiego zostały zebrane w IV-tym rozdziale monografii „*Teoria niesymetrycznej sprężystości*” PWN Warszawa, 1972.

W ostatnich latach rozwinięto termosprężystość liniową ciał bardziej złożonych niż ciało mikropolarne Cosseratów. Mam tu na myśl ośrodki hemitropowe mikropolarne (niecentrosymetryczne) oraz ośrodki mikromorficzne. Pełna teoria termosprężystości ośrodków mikropolarnych hemitropowych została obmyślona przez W. NOWACKIEGO [55], J. P. NOWACKIEGO [56], i J. LENTZA [57].

Omówmy pokrótce inne dziedziny o szerszym sprzężeniu. I tak w piezoelektryczności sprzęga się quasistatyczne pole elektryczne z polem odkształcenia i temperatury. Powstaje nowa dziedzina: piezo-termo-elektryczność. Teoria tej dziedziny została obmyślona przez R. D. MINDLINA [58] [59]; szereg twierdzeń i rozwiązań, rozszerzających tę dziedzinę podali K. MAJORKOWSKA-KNAP, L. MÜLLER, W. NOWACKI, J. P. NOWACKI, St. BRZEZIŃSKI.

Magneto-sprężystość rozwinięta przez S. KALISKIEGO i J. PETYKIEWICZA [60] rozszerzona została na magnetotermosprężystość przez W. NOWACKIEGO [61].

Obszerne omówienie wyników uzyskanych przez polskich uczonych w tej dziedzinie podane zostało przez G. MAUGINA w jego artykule przeglądowym w *Int. J. Eng. Sci.* [62], 1981.

Dodać należy, że termosprężystość, piezotermosprężystość oraz magneto-termosprężystość zostały obszernie omówione w monografii W. Nowackiego „*Dynamic Problems of Thermoelasticity*” 1966, pierwszej monografii w tej dziedzinie.

W ostatnich latach rozwinęła się dyskusja nad fizyczną zawartością klasycznego równania przewodnictwa cieplnego, które dopuszcza jedynie nieskończoną prędkość rozchodzenia się ciepła. Wielu badaczy podaje w wątpliwość to stwierdzenie i dąży do modyfikacji klasycznego równania przewodnictwa cieplnego.

W gronie osób zajmujących się tym problemem nie zabrakło badaczy polskich. Wymienić tu należy pracę S. KALISKIEGO [63].

Na uwagę wreszcie zasługują liczne prace Cz. WOŹNIAKA [64], odnoszące się do zagadnień termosprężystości ciał z więzami i ciał z mikrostrukturą.

O ile badania nasze w dziedzinie naprężeń cieplnych były liczne i skupiały wielu badaczy, w dziedzinie termosprężystości były mniej liczne i absorbowwały mniejszą grupę badaczy. Były to badania na wyższym poziomie. Dotyczyły twierdzeń i metod. Co więcej podstawowe równania różniczkowe termosprężystości okazały się nowym typem równań różniczkowych fizyki matematycznej. Interesujące jest to, że typ równań hiperboliczno-parabolicznych termosprężystości występuje również w innych polach sprzężonych, w termodyfuzji ciał stałych, w magnetotermosprężystości. Tematyka badań stawiała się zatem ciekawą zarówno dla mechaników jak i dla matematyków.

Interesująca była też konstrukcja syntezy dwu dziedzin fizyki fenomenologicznej. Otrzymano twierdzenie o większej ogólności. Degradacja sprzężeń prowadziła do znanych wyników.

Żałować należy, że badania w dziedzinie termosprężystości rozpoczęto o kilka lat później niż w innych ośrodkach naukowych świata, gdy część pola badań została już wyeksploatowana.

Planowanie badań było typowym planowaniem w obrębie dyscypliny.

Badania rozpoczynano od sformułowania twierdzeń podstawowych (twierdzenia wariacyjne, energetyczne, o wzajemności prac, o jednoznaczności rozwiązań i ich istnieniu). Następnie przechodzono do rozpatrzenia propagacji w ciele nieskończonym (fala płaska, walcowa i kulista) propagacji fal w ciałach ograniczonych (fale powierzchniowe) dalej funkcje Greena dla przemieszczeń i temperatury oraz zagadnienia brzegowe.

Problematykę termosprężystości rozwijano u nas intensywnie w latach 1957-1967. Okres 10-ciu lat okazał się wystarczający do spenetrowania i wyeksploatowania tej dziedziny. Oczywiście obowiązywał tu wymóg maksymalnej koncentracji badań.

Prace wykonywane były przez grono pracowników naukowych IPPT—PAN, Instytutu Mechaniki UW oraz Wojskowej Akademii Technicznej. Byli to głównie samodzielni pracownicy nauki (profesorowie i docenci) oraz doktoranci. Miejscem spotkań i dyskusji były seminaria prowadzone w wymienionych instytucjach oraz corocznie organizowane konferencje krajowe mechaniki. Własnymi siłami zorganizowaliśmy dwa międzynarodowe sympozja, sympozjum Euromech VIII w Jabłonie w 1967 r. oraz sympozjum termomechaniki w CISM w Udine w 1973 roku.

Zorganizowano ponadto dwie szkoły letnie (krajowe), na których prezentowano te wyniki, które mogły znaleźć bezpośrednie zastosowanie.

Stymulatorem badań było również współzawodnictwo międzynarodowe. Nawiązaliśmy kontakty z centrami badań w Glasgow (prof. I. N. Sneddon) w Wiedniu (prof. H. Parkus) w Providence (prof. E. Sternberg) w Kijowie (akad. AN Kowalenko) i Tbilisi (prof. W. D. Kupradze). Istniała stała wymiana profesorów i stażystów jak i pełna informacja o pracach i wynikach naukowych.

Dążono do możliwie rychłej dokumentacji wyników. Większość prac ukazywała się w Biuletynie Zagranicznym PAN (seria nauk technicznych) a to ze względu na krótki okres (4 miesiące) między oddaniem pracy do redakcji i jej opublikowaniem.

Szereg prac opublikowano w „Archive of Mechanics” oraz w „Proceedings of Vi-

brations Problems". Liczne prace ukazały się we wiodących czasopismach zagranicznych (np. Journal of Elasticity, Journal of Thermal Stresses.).

Dążono do możliwie rychłego podsumowania wyników w postaci monografii. W naszym szczególnym przypadku termosprężystości, termopiezoelektryczności i termomagnetosprężystości była to monografia W. Nowackiego p.t. „Dynamiczne zagadnienia termosprężystości” 1966 r., przełożona później na język rosyjski w 1970 r. oraz na język angielski w 1975 r.

Interesujący jest fakt, że nasze prace z termosprężystości nie figurowały w planie prac rządowych i węzłowych. Badania nie były dodatkowo finansowane.

Organem koordynującym badania naukowe i wytyczającym kierunki rozwoju mechaniki w Polsce jest Komitet Mechaniki PAN. Stanowi on krajową reprezentację naukową mechaniki, jest najbardziej autorytatywnym organem stymulującym jej rozwój. Ostatnie wytyczne dotyczące rozwoju mechaniki zostały podjęte przez Komitet w 1973 r., podczas Kongresu Nauki Polskiej.

Obecnie punkt ciężkości badań nad termosprężystością przesunął się na pola sprzężone, w których ważną rolę odgrywa pole temperatury. Atakowane są problemy magneto-termosprężystości, problemy oddziaływania pola temperatury w stałych dielektrykach i ferromagnetykach oraz zagadnienia termodyfuzji w ciałach stałych.

Dalszy rozwój termosprężystości (w związku z polami połączonymi) jest w naszej mechanice zapewniony. Została wypracowana interesująca tematyka, istnieje znakomite grono badaczy. Powstały ośrodki krajowe, specjalizujące się w różnych kierunkach termomechaniki. Wzrosło znaczenie mechaniki polskiej w skali międzynarodowej.

Jestem szczęśliwy, że w rozwoju termosprężystości danem mi było z Wami (kolegami i współpracownikami) uczestniczyć, a w pewnej mierze na rozwój ten oddziaływać.

Literatura cytowana w tekście

1. H. C. DUHAMEL, *Second memoire sur les phenomenes thermomecaniques*. J. de l'Ecole Polytechn. 15 (1837) 1.
2. W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik*. Teubner, (1910).
3. H. JEFFREYS, *The thermodynamics of an elastic solid*. Proc. Camb. Phil Soc. 26 (1930) 101.
4. M. A. BIOT, *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*. J. appl. Phys. 27, (1956) 240.
5. H. DERESIEWICZ, *Solution of the equation of thermoelasticity*; in Proc. Third U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1958.
6. H. ZORSKI, *Singular solutions for the thermoelastic media*. Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Techn. 6, 1958, 331.
7. L. BRUN, *L'onde simple thermoelastique lineaire*. Journal de Mecanique. 14, 5 (1975), 863.
8. J. IGNACZAK, *Thermoelastic counter part to Boggio's theorem of linear elastodynamics*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. 24, 3 (1976), 129.
9. T. BOGGIO, *Sull integrazione di alcuna equationi lineari alle derivate parziale*. Ann. Mat. ser. III, 8 (1903), 181.
10. H. ZORSKI, *On a certain property of thermoelastic media*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. 6, 6, (1958).
11. S. KALISKI, *Some boundary value problems of the dynamical theory of elasticity*. Warszawa, W.A.T., 1957.

12. Y. S. PODSTRIHACZ, *General solution of the non-steady thermoelastic problem*. Pryklad. Mekh. **6**, (1960), 215.
13. D. RÜDIGER, *Bemerkung zur Integration der thermo-elastischen Grundgleichungen*. Osterr. Ing. Arch. **18**, (1964), 1.
14. M. A. BIOT, *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*. J. appl. Phys. **27**, (1956), 240.
15. G. HERMANN, *On variational principles in thermoelasticity and heat conduction*. Quart. Appl. Mech. **21**, 2, (1963).
16. D. IEȘAN, *Principles variationelles dans la theorie de la thermoelasticité couple*. An. Stiint. Univ. Iasi, Seca, **12**, 2, (1966), 439.
17. R. E. NICKELL, J. L. SACKMAN, *Variational principles for linear coupled thermoelasticity*, Quart. Appl. Math. **26**, 1 (1968).
18. V. IONESCU-CAZIMIR, *O theorema variatională pentru problema thermoelasticității cuplate*. An. Univ. Bucuresti. Ser. stiint. Natur. Mat.-mech. **15**, 2 (1966), 33.
19. P. RAFALSKI, *A variational principle for the coupled thermoelastic problem*. Intern. J. Engng. Sci. **6**, 8 (1968), 465.
20. M. BEN-AMAZ, *On a variational theorem in coupled thermoelasticity*. Trans. ASME E **32**, 4 (1965), 243.
21. J. H. WEINER, *A uniqueness theorem for the coupled thermoelastic problem*. Q. appl. Math. **15**, (1957), 102.
22. R. J. KNOPS, L. E. PAYNE, *On uniqueness and continuous dependence in dynamical problems of linear thermoelasticity*. Int. J. Solids Structs **6**, (1970).
23. L. BRUN, *Sur l'unicité et thermoelasticité dynamique et diverses expressions analogues a la formule de Clapeyron*. Compt. rend. Acad. Sci. Paris **261**, (1965), 2584.
24. V. IONESCU-CAZIMIR, *Problem of linear coupled thermoelasticity -I*. Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Tech. **12**, (1964), 473.
25. D. GRAFFI, *Sui teoremi di reciprocità nei fenomeni non stazionari*. Atti Acad. Sci. Bologna **10**, Ser. **11**, (1963), 33.
26. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*. P.W.N. Warszawa, 1966.
27. W. NOWACKI, *Dynamic Problems of thermoelasticity*. P.W.N. — Nordhoff. Int. Publ. — Leyden, (1975).
28. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *Równania całkowite sprzężonej termosprężystości*. Rozprawy Inżynierskie, **4**, 13, (1965).
29. W. NOWACKI, *A dynamical problem of Thermoelasticity*. Arch. Mech. Stos. **3**, 9, (1957).
30. W. NOWACKI, *Thermoelastic waves in unbounded medium*. Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1969.
 1. W. D. KUPRADZE i T. W. BURCZULADZE, *Graniczne zadaczi termouprugosti*, Differencjalnyje urawniene. **5**, 1 (1969), 3.
32. W. D. KUPRADZE, T. G. GEGELIA, M. O. BASZELEISZWILI, T. W. BURCZULADZE, *Trechmiernyje zadaczi matematycznej teorii uprugosti i termouprugosti*. Izd. „Nauka“, Moskwa, (1976).
33. C. M. DAFERMOS, *On the existence and the asymptotic stability of solution in the equation of linear thermoelasticity*. Arch. Rational Mech. Anal. **29**, (1968), 241.
34. P. CHADWICK, I. N. SNEDDON, *Plane waves in elastic solid conducting heat*. J. Mech. Phys. of Solids. **6**, (1958), 223.
35. I. N. SNEDDON, *On the propagation of thermal stresses in the metallic rods*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sec. A, **65**, 9, (1959).
36. W. NOWACKI, *Some dynamic problems in thermoelasticity*. Arch. Mech. Stos. **1**, 11, (1059).
37. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*. PWN Warszawa (1966). Rozdziały 2.3 i 2.4.
38. W. NOWACKI, *Green functions for the thermoelastic medium*, I, II. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn. **12**, 6 (1964).
39. G. EASON, I. N. SNEDDON, *The dynamic stresses produced in elastic bodies, by uneven heating*. Proc. Roy. Sci. Edinburgh **65**, Ser. A. (1959).

40. F. J. LOCKETT, *Effect of thermal properties of a solid on the velocity of Rayleigh waves*. J. Mech. Phys., **7**, (1958).
41. W. NOWACKI, M. SOKOŁOWSKI, *Propagation of thermoelastic waves in plates*. Arch. Mech. Stos. **9**, 6 (1959).
42. F. J. LOCKETT, *Longitudinal elastic waves in cylinders and tubes including thermoelastic effects*. Proc. Edinburgh Math. Soc., part **3**, 11 (1959).
43. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *The plane dynamic problem of thermoelasticity*. Proc. Vibr. Probl. **4**, 2 (1961).
44. J. IGNACZAK, *Note on the propagation of thermal stresses in a long metallic rod*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech. **7**, 5 (1959).
45. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *The problem of concentration of periodic thermal stresses at cylindrical and spherical cavities in uniform plane heat flow*. Arch. Mech. Stos. **6**, 13 (1961).
47. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*. PWN — Warszawa (1966). Rozdział 2.9 i 2.10.
48. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*. PWN — Warszawa (1966). Rozdział 2.11.
49. W. DANIŁOWSKAJA, *Temperaturnyje napriazhenija w uprugom poluprostranstwie woznikajuszczyje w sledstwie wniezapnogo nagriewa granicy*. Prikl. Mat. Mech. **14**, 3 (1950).
50. M. LESSEN, *The motion of a thermoelastic solid*. Quart. Appl. Math. **15**, (1957).
51. R. B. HETNARSKI, *Coupled thermoelastic problem for the half-space*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. **12**, 1 (1964).
52. R. B. HETNARSKI, *Solution of the coupled thermoelastic problem in the form of series of functions*. Arch. Mech. Stos. **6**, 4 (1964).
53. R. MUKI, S. BRAUER, *Coupling effects in transient thermoelastic problems*. Österr. Ing. Archiv., **16**, (1962).
54. W. NOWACKI, *Couple stresses in the theory of thermoelasticity (III)*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. **14**, 8, (1966).
55. W. NOWACKI, *Some theorems of assymetric thermoelasticity*. J. Math. Phys. Sciences, **2**, 2 (1968).
56. J. P. NOWACKI, W. NOWACKI, *Some problems of hemitropic micropolar continuum*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech. **25**, 4 (1977).
57. J. LENTZ, *Das von einer punktformigen Warmequelle erzeugte Verschiebungs und Drehvektor in Cosserat-Kontinuum*. Acta Mech. **24** (1976), 25.
58. R. D. MINDLIN, *On the equations of motion of piezoelectric crystals*. In Problems of Continuum Mechanics. SIAM. Philadelphia, Pennsylvania (1961).
59. R. D. MINDLIN, *Elasticity piezoelectricity and lattice dynamics*. J. of Elasticity **2**, 4, (1972), 217.
60. S. KALISKI, PETRYKIEWICZ, *Equations of motion coupled with the field of temperature in an magnetic field, involving mechanical and electromagnetic relaxation for anisotropic bodies*. Proc. Vibr. Problems, **1**, 4 (1959).
61. W. NOWACKI, *The problems of linear coupled magnetothermoelasticity*. I, II. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. **13**, 4, (1965) oraz **13**, 6, (1965).
62. G. MAUGIN, *Wave motion in magnetizable solids*. Int. J. Engng. Sci. **19**, (1981), 321.
63. S. KALISKI, *Wave equation of heat conduction*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. **13**, (1965), 211.
64. CZ. WOŹNIAK, *Thermoelasticity of bodies with microstructure*. Arch. Mech. Stos. **19**, 3, (1967), 335.

POLA SPRĘŻONE I NIEKLASYCZNE OŚRODKI CIĄGŁE

DOMINIK ROGULA

IPPT PAN
Warszawa

1. Wstęp

Inspiracją badań naukowych rozważanych w niniejszej pracy była refleksja nad podstawowymi problemami mechaniki ciał deformowalnych i jej związkami z innymi zjawiskami fizycznymi. Podstawowe pojęcia mechaniki ośrodków ciągłych, w postaci odpowiedniej do opisu deformowalnych ciał stałych były prawie całkowicie sformułowane w pierwszej połowie XIX wieku, a ściślej w latach 1820 - 1840, w historycznych pracach Naviera, Cauchy'ego i Greena. Pojęcia te do dnia dzisiejszego stanowią podstawę mechaniki ciał odkształcalnych i jej ogromnych osiągnięć w pobudzaniu i kształtowaniu ludzkiej działalności technologicznej. Idee te okazały się tak żywotne, że przez półtora wieku były i pozostają nadal bogatym źródłem inspiracji w stosowanych gałęziach mechaniki.

Sytuacja taka jest dla naukowców niekwestionowanym powodem do satysfakcji. Z wyjątkiem może elektrodynamiki Maxwella, trudno byłoby znaleźć teorię naukową o porównywalnych osiągnięciach praktycznych.

Z drugiej jednak strony sytuacja ta była powodem do nie zawsze łatwego do odparcia zarzutu pewnej stagnacji w mechanice, przynajmniej jeśli chodzi o jej głębszy rozwój. Bez wątplenia można dowodzić, że mechanika klasyczna daje sobie radę w prawie wszystkich praktycznie interesujących problemach mechanicznych, nie jest więc usprawiedliwione ani pogłębianie jej rozwoju, ani rewolucjonizowanie podstaw, jako że takie próby będą przypominały przysłowiowe szukanie dziury w całym. Obrona taka jednakże nie wytrzymała próby historii. We wczesnych latach sześćdziesiątych pojawiła się fala prac przedstawiających nowe idee w dziedzinie mechaniki ośrodków materialnych. Zrewolucjonizowały one podstawy mechaniki ośrodków ciągłych i odstąpiły perspektywy dalszego rozwoju i poszerzenia zakresu jej zastosowań. Idee te pojawiły się niezależnie w wielu ośrodkach naukowych całego świata, w tym również i Polski. Udział polskiej nauki związany jest w przeważającej części albo z profesorem Nowackim osobiście, albo z jego uczniami, a większość tych prac dotyczyła problemów sprężonych pól mechanicznych, termicznych i elektromagnetycznych i (lub) nieklasycznych modeli ośrodków materialnych ze wzbogaconą strukturą kinematyczną lub dynamiczną. Czytelnikowi głębiej zainteres-

Referat wygłoszony na zebraniu Komitetu Mechaniki PAN z okazji 70-lecia profesora Witolda Nowackiego.

sowanemu tą problematyką radzimy sięgnąć do monografii Nowackiego [1 - 5] i podanej w nich literatury.

2. Klasyczny ośrodek ciągły.

Wprawdzie interesujemy się tutaj nieklasyczną, uogólnioną teorią ośrodków ciągłych, przedstawimy jednak krótko podstawowe założenia klasycznej mechaniki kontynuów. Będziemy się dalej na nie powoływali. Zamierzeniem danego tu sformułowania założeń jest przedstawienie idei stanowiących podstawową architekturę mechaniki ośrodków ciągłych, bez wdawania się w szczegóły czy formalizację.

1. Podstawowe założenie kinematyczne: ciało materialne jest ciągłym zbiorem bezstrukturalnych obiektów zachowujących się jak punkty materialne.

Kinematyka ciała jest w pełni określona przez funkcję

$$(2.1) \quad x: B \times T \rightarrow E,$$

gdzie B , T i E przedstawiają odpowiednio materialny ośrodek ciągły, czas fizyczny i przestrzeń fizyczną. Odwzorowanie to przedstawia konfigurację ciała w funkcji czasu.

2. Podstawowe założenia dynamiczne: oddziaływania wewnętrzne w materii są w każdej chwili jednoznacznie określone przez pole symetrycznego tensora naprężeń. Dokładniej mówiąc jest to czteropoziomowa hierarchia następujących stwierdzeń:

- (i) istnieją tylko oddziaływania kontaktowe,
- (ii) oddziaływania te są dane przez wektory sił,
- (iii) wektory sił są określone przez tensor naprężeń,
- (iv) tensor naprężeń jest symetryczny.

Mówiąc bardziej szczegółowo znaczenie założenia (i) polega na dopuszczeniu tylko „dwuciałowych” lub „binarnych” wzajemnych oddziaływań pomiędzy nieskończenie bliskimi cząstkami materialnymi. Przy tym założeniu ma sens pojęcie „oddziaływania przez element powierzchni”. O oddziaływaniu przez rozłączone obszary powierzchni zakłada się, że jest addytywne.

Zgodnie z założeniem (iii) siły oddziaływania działającego przez elementy powierzchni mogą być wyprowadzone z wektora p_i danego wzorem:

$$(2.2) \quad p_k = \sigma_{ik} n_i,$$

gdzie tensor naprężeń σ_{ik} nie zależy od elementu powierzchni. W szczególności oznacza to, że wektor naprężeń p_i zależy od wektora normalnego n_k . Założenie (iv) mówi, że od oddziaływań między cząstkami nie może pochodzić żaden moment sił działający na cząstkę.

3. Podstawowe założenie konstytutywne: tensor naprężeń w punkcie materialnym X może być całkowicie określony na podstawie tensora deformacji w tym samym punkcie.

Opierając się na powyższych założeniach mechanika ośrodków ciągłych osiągnęła wiele sukcesów w rozwiązywaniu rozmaitych problemów. Jednak w wielu okolicznościach niektóre z tych założeń są całkowicie lub częściowo naruszone. Można tu przytoczyć następujące przykłady: Koncentracje naprężeń w pobliżu mikrodefektów, drgania o wysokiej częstotliwości i bardzo małej fali, efektywne własności kompozytów i innych ma-

teriałów posiadających mezostrukturę, materiały makromolekularne, oddziaływanie z polem elektromagnetycznym poprzez silną polaryzację elektryczną lub magnetyczną itd.

Efektorem szeregu prób usunięcia tych braków teorii klasycznej było powstanie wielu uogólnionych, nieklasycznych modeli ośrodków materialnych.

Autorzy kierowali się różnymi koncepcjami. Wiele z nich, jak np. oddziaływania przez momenty kontaktowe lub siły nielokalne, czy też uogólniona kinematyka z dodatkowymi stopniami swobody może być wyprowadzone z klasycznych prac Cauchy'ego, Voigta, i Duhema.

3. Nieklasyczne ośrodki ciągłe

Dopuszczając pewną swobodę wyrażen, przez nieklasyczny ośrodek ciągły będziemy rozumieć matematyczny model ciała materialnego, który narusza (lub przynajmniej nie w pełni honoruje) jedno lub więcej założeń klasycznych, pozostawiając jednakże ideę ciągłego rozkładu materii. Zależnie od rodzaju i stopnia naruszania tych założeń powstają różne nieklasyczne teorie materialnych ośrodków ciągłych.

1. Założenie kinematyczne można naruszyć przez obdarzenie ośrodka rodzajem struktury lokalnej definiowanej dla każdej cząstki ciała. Struktura taka, a priori niezależna od konfiguracji (2.1), do przedstawienia stanu kinematycznego ciała wymaga pewnych dodatkowych definiowanych nad nim pól. Ze względu na dodatkowe wynikające z takiej struktury stopnie swobody pole wektora przemieszczeń nie wystarcza już do tego celu. Przez specyfikację określonych struktur lokalnych można otrzymać różne teorie nieklasyczne.

W znanej pracy COSSERATÓW [6] każdy punkt materialnego ośrodka ciągłego został wyposażony w sztywną prostokątną triadę, której osie zależą od punktu materialnego i mogą zmieniać się w czasie, definiując w ten sposób lokalną strukturę z dodatkowymi stopniami swobody typu rotacyjnego.

We współczesnej historii problemu niektórzy autorzy, kierowani ideami fizycznymi, wyprowadzili nieklasyczne ośrodki ciągłe takie jak ciecz wirująca WAYSSENHOFFA i RAA-BE'EGO [7] lub ciecz cząsteczek dwuatomowych ŻELAZNEGO [8].

Z fenomenologicznego punktu widzenia najprostsza fizycznie spójna struktura lokalna polega na przyjęciu mikrorotacji, niezależnych od lokalnych rotacji pochodzących od pola przemieszczeń. Idea ta prowadzi do tzw. teorii mikropolarniej, omówionej szerzej w następnym rozdziale.

Następnym krokiem w uogólnieniu kinematyki materialnego ośrodka ciągłego jest dopuszczenie deformowalnej mikrostruktury, w przeciwieństwie do sztywnej mikrostruktury w teorii mikropolarnej. Tutaj najlepiej znane są: teoria multipolarna Greena i Rivlina [9] oraz Toupin'a teoria kontinuum obdarzonego dowolnym układem wektorów kierunkowych [10].

Dalsze uogólnienie polega na traktowaniu cząstek materialnego ośrodka ciągłego jako oddzielnych mikrokontinuów, niezależnych kinematycznie od przemieszczeń w zwykłym makro-poziomie kontinuum. Na takiej idei oparta jest mikromorficzna teoria ERINGENA i SUHUBI'EGO [1]. Przy takim podejściu każdy punkt materialnego kon-

tinuum posiada nieskończenie wiele lokalnych stopni swobody. Jednakże często trzeba ograniczyć mikrokontinuum do skończonej wartości liczbę lokalnych stopni swobody, co efektywnie redukuje ten przypadek do poprzedniego.

Ogólnie, stan wzbogaconej struktury kinematycznej materialnego kontinuum może być przedstawiony przez funkcję o następującej postaci

$$(3.1) \quad \chi: B \rightarrow E \times Y$$

gdzie Y oznacza odpowiednią przestrzeń struktury lokalnej. Chociaż w najprostszych przypadkach Y jest przestrzenią wektorową, w ogólności założenie takie nie jest konieczne. Nawet więcej: istnieje wiele fizycznie uzasadnionych przykładów przestrzeni struktur lokalnych które nie mogą być wyposażone w sensowną strukturę wektorową, jak świadczą o tym przykłady skończonych rotacji, nasyconego spinu czy przestrzeni sieci Bravaisa rozważana w pracy [12].

2. Najprostsza możliwa modyfikacja założenia dynamicznego polega na odrzuceniu stwierdzenia (iv) przy pozostawieniu trzech poprzednich (i - iii). Tym sposobem dopuszcza się niesymetryczne tensory naprężeń. Podejście takie, na gruncie czysto mechanicznym proponował BODASZEWSKI [66]. Bardziej konsekwentne wydaje się jednak wprowadzenie asymetrycznego tensora naprężeń przez połączenie tej modyfikacji z inną, kinematyczną lub konstytutywną.

Następna modyfikacja mogłaby polegać na odrzuceniu stwierdzenia (iii), przy pozostawieniu (i - ii). W tym kierunku nie wykonywano jednak żadnych badań. Idea ta może prowadzić do zaleźnego od krzywizny przenoszenia sił przez elementy powierzchni.

Jeśli bowiem założy się, że przekazywanie sił nie zależy od zakrzywienia, wtedy przy pomocy podręcznikowych argumentów wnioskuje się, że zależność przekazywanej siły od wektora normalnego do elementu powierzchni jest liniowa. W konsekwencji powinien istnieć tensor naprężeń i założenie (iii) byłoby spełnione.

Przy modyfikacji stwierdzenia (ii) można stworzyć wiele nieklasycznych modeli ośrodków ciągłych. Najprostsza modyfikacja tego typu polega na pozostawieniu założenia (i) i modyfikacji (ii) przez dopuszczenie, oprócz oddziaływania przez wektory sił, dodatkowych oddziaływań przez wektory momentów sił. Prowadzi to do tzw. teorii n a p r ę ż e ń m o m e n t o w y c h. Zgodnie z tą teorią oddziaływania kontaktowe pochodzą od ogólniejszego stanu naprężeń, który może być opisany przez dwa pola tensorów: zwykły tensor naprężeń siłowych σ_{ik} i dodatkowy tensor naprężeń momentowych μ_{ik} .

Wektor naprężeń momentowych dany jest wzorem

$$(3.2) \quad m_i = \mu_{ki} n_k,$$

a tensor μ_{ki} wchodzi do bilansu momentu pędu. Ani σ_{ik} , ani μ_{ik} nie muszą być symetryczne.

Wprowadzone powyżej dodatkowe oddziaływania mogą być założone w sposób ogólniejszy. Można mianowicie wprowadzać h i p e r n a p r ę ż e n i a coraz wyższych rzędów, opisujących nieklasyczne oddziaływania przez multipole sił wyższych rzędów. Jako przykład można wskazać teorię TOUPINA [10], nieprostych materiałów z hipernaprężeniami najniższego rzędu.

Hipernaprężenia w węższym sensie definiują oddziaływania kontaktowe, które nie wchodzi bezpośrednio do bilansu sił i pędów. Jednakże zawsze wchodzi one do bilansu energii.

Również stwierdzenie (i) może być modyfikowane. Daje to pewien rodzaj nielokalnych dynamicznie modeli typu całkowego [14, 15].

3. Klasyczne założenie konstytutywne również może być naruszane w sposób różny. Można je modyfikować przez branie tensora naprężeń zależnego nie tylko od tensora deformacji, ale również od jego gradientu, lub nawet gradientów wyższych rzędów. W teoriach ze strukturą lokalną w odpowiednich związkach konstytutywnych mogą również pojawiać się odpowiednie dodatkowe stopnie swobody, jak np. w sprężystości mikropolarnej. Można również założyć, że tensor naprężeń zależy od temperatury i/lub pola elektromagnetycznego, co prowadzi do teorii pól sprzężonych. Nie mniej ważna jest możliwość odrzucenia zasady lokalności zawartej w klasycznym założeniu konstytutywnym, przez przyjęcie, że tensor naprężeń w punkcie X zależy od sytuacji w punkcie Y położonym w skończonej odległości od X. W ten sposób otrzymano modele kontinuum z nielokalnym związkiem naprężeń z odkształceniami [16 - 19].

4. Możliwe, a czasem nawet konieczne są również odpowiednie kombinacje powyższych modyfikacji, z należyтым wszakże uwzględnieniem ich wzajemnych zależności. Następne rozdziały będą poświęcone kilku przykładom.

4. Ośrodki mikropolarne

Jak wspomnieliśmy poprzednio pomysł ośrodka mikropolarnego był wynikiem dopuszczenia lokalnie sztywnej mikrostruktury z niezależnymi mikro-rotacyjnymi stopniami swobody. Oznacza to, że klasyczne założenie kinematyczne zmodyfikowano przez wprowadzenie zamiast (2.1) następującej postaci funkcji

$$(4.1) \quad x \times \vartheta: B \times T \rightarrow E \times \vartheta,$$

gdzie ϑ przedstawia przestrzeń mikrorotacji. Element tej przestrzeni może być reprezentowany matematycznie jako *triedre trirectangle* Cosseratów, sztywna triada Toupina, czy macierz ortogonalna, lub inny równoważny sposób. W liniowej teorii mikropolarnej naturalne jest zastąpienie przestrzeni skończonych mikrorotacji ϑ przez liniową, trójwymiarową przestrzeń wektorową, której elementy reprezentują nieskończenie małe mikrorotacje. W rozdziale tym ograniczymy się do przypadku liniowego. Wektor mikrorotacji będzie oznaczony przez φ_i , a odpowiedni moment bezwładności (dla uproszczenia założono izotropowość) przez J .

Aby istniało oddziaływanie między mikrorotacjami w różnych punktach konieczne jest wprowadzenie pola przedstawiającego przekazywanie odpowiednich sił uogólnionych. Najprostszym rozwiązaniem są tutaj naprężenia momentowe. Podobnie, aby zapewnić oddziaływanie między mikrorotacjami, a polem przemieszczenia, konieczna jest antysymetryczna część tensora naprężeń. Aby otrzymać nietrywialną teorię trzeba więc modyfikację (4.1) założenia kinematycznego uzupełnić przez odpowiednie modyfikacje założenia dynamicznego.

Przy tych założeniach bilanse pędu i momentu pędu przybierają postać

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{j1,j} + x_1 &= \rho \ddot{u}_1, \\ \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{j1,j} + \gamma_1 &= J \ddot{\varphi}_1, \end{aligned}$$

gdzie μ_{ji} , γ_i , i φ_i oznaczają odpowiednio tensor naprężeń momentowych, momenty masowe i infinitezymalne mikrorotacje.

W przypadku liniowego izotropowego sprężystego ośrodka mikropolarnego gęstość energii sprężystości może być wyrażona jako

$$(4.3) \quad U = \mu\gamma_{\langle ij \rangle}\gamma_{\langle ij \rangle} + \alpha\gamma_{\langle ij \rangle}\gamma_{\langle ij \rangle} + \frac{\lambda}{2}\gamma_{kk}\gamma_{mm} + \gamma\kappa_{\langle ij \rangle}\kappa_{\langle ij \rangle} + \varepsilon\kappa_{\langle ij \rangle}\kappa_{\langle ij \rangle} + \frac{\beta}{2}\kappa_{ii}\kappa_{jj},$$

gdzie wprowadzono następujące skrótory:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \gamma_{ji} &= u_{i,j} - \varepsilon_{kji}\varphi_k, \\ \kappa_{ji} &= \varphi_{i,j}, \end{aligned}$$

Wtedy

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{\langle ij \rangle} &= 2\mu\gamma_{\langle ij \rangle} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}, \\ \sigma_{\langle ij \rangle} &= 2\alpha\gamma_{\langle ij \rangle}, \\ \mu_{\langle ij \rangle} &= 2\gamma\kappa_{\langle ij \rangle} + \beta\kappa_{kk}\delta_{ij}, \\ \mu_{\langle ij \rangle} &= 2\varepsilon\kappa_{\langle ij \rangle}, \end{aligned}$$

i, w podstawieniu tych wyrażen do (4.2), otrzymuje się następujący układ równań dla pól przemieszczeń i mikrorotacji

$$(4.6) \quad (\mu + \alpha)\nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu - \alpha)\text{grad div } \mathbf{u} + 2\alpha \text{rot } \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}},$$

$$(4.7) \quad (\gamma + \varepsilon)\nabla^2 \boldsymbol{\varphi} + (\beta + \gamma - \varepsilon)\text{grad div } \boldsymbol{\varphi} + 2\alpha \text{rot } \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{Y} = J \ddot{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Układ ten stanowi podstawę do formułowania i rozwiązywania szczegółowych problemów teorii mikropolarnej. Wiele z nich zostało już rozwiązanych lub w pełni zbadanych, jak podstawowe związki, twierdzenia wariacyjne, równania naprężeniowe, potencjały uogólnione, różne problemy statyczne i dynamiczne, powstawanie i rozchodzenie się fal, warunki promieniowania, jednoznaczność rozwiązań i inne [3, 4, 20 - 38]. Badany był również przypadek związanych mikrorotacji [39]; skonstruowano uogólnienia włączające efekty cieplne [40 - 46], pola elektromagnetyczne [47 - 53] i defekty [54 - 56].

5. Pola sprzężone. Magneto-termo-sprężystość

Rozwój dziedziny pól sprzężonych w ośrodkach materialnych motywowany jest podstawowymi przesłankami. Z jednej strony wzajemna zależność między zjawiskami w przyrodzie jest zasadniczym problemem wiedzy ludzkiej, z drugiej strony związki między zjawiskami cieplnymi i mechanicznymi, lub mechanicznymi i elektromagnetycznymi stanowią fundament nowoczesnej technologii. Wiele szczególnych zjawisk z dziedziny pól sprzężonych jest znanych w przyrodzie i wykorzystywanych w technice. Można tu wymienić magnetohydrodynamikę (pompa metalu ciekłego, generator MHD), zjawisko piezoelektryczne, elektro- i magnetostrykcję, magnetoakustykę, zjawiska elektro-akustyczne, wzmacniacze elektromechaniczne, efekt żyromagnetyczny i wiele innych.

Jako przykład rozważmy dziedzinę znaną jako magneto-termosprężystość [57 - 62, 5], w przypadku stałego ośrodka o skończonym przewodnictwie elektrycznym λ_0 w pierwotnym polu magnetycznym \mathbf{H} . Zlinearyzowane równania pola przybierają postać

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu_0}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{h} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \operatorname{div} \mathbf{h} &= 0. \end{aligned}$$

gdzie \mathbf{h} oznacza zaburzenie pola magnetycznego (całkowite natężenie pola magnetycznego jest równe $\mathbf{H} + \mathbf{h}$). Dla gęstości prądu elektrycznego otrzymuje się następujące wyrażenie

$$\mathbf{j} = \lambda_0 \left[\mathbf{E} + \frac{\mu_0}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right) \right],$$

Równanie ruchu ma ogólną postać

$$(5.2) \quad \sigma_{H_i, J} + T_{J_i, J} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

gdzie tensor T_{ij} przedstawia dodatkowe naprężenia pochodzenia elektromagnetycznego. Może on być przedstawiony przez zlinearyzowane wyrażenie Maxwella

$$(5.3) \quad T_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} (H_i h_j + H_j h_i - \delta_{ij} H_k h_k).$$

Po wyeliminowaniu z powyższego równania pola elektrycznego i po wzięciu pod uwagę przewodzenia ciepła dochodzi się do następującego układu równań

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{h} - \beta \dot{\mathbf{h}} &= -\beta \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{H}), \\ \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot}(\mathbf{h} \times \mathbf{H}) + \mathbf{X} &= \gamma \operatorname{grad} \Theta, \\ k \nabla^2 \Theta - c_e \dot{\Theta} - \eta \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} &= -W, \end{aligned}$$

gdzie współczynniki przedstawiają stałe materiałowe. Ten układ równań może być uogólniony dla ośrodka mikropolarnego przez wprowadzenie mikrorotacji. Podobnie dla ośrodków polaryzowanych elektrycznie lub magnetycznie. Szczególnie ciekawa sytuacja powstaje, gdy wektor polaryzacji lub magnetyzacji jest kinematycznie niezależny od pola elektromagnetycznego lub makro-ruchu. Wtedy ośrodek jest obdarzony strukturą lokalną bezpośrednio czułą na pole magnetyczne. W przypadku polaryzacji magnetycznej podstawowe równania pól sprzężonych, włączające dynamikę spinów magnetycznych, są wyprowadzone w pracy [63] przez wykorzystanie odpowiednio zmodyfikowanej techniki nawiasów Poissona.

Dla ogólnie nieliniowych równań pól sprzężonych przy włączeniu dowolnej skończonej wymiarowej struktury lokalnej pokazana jest w pracy [64] technika Lagrange'a. W szczególności technika ta jest odpowiednia do rozpatrywania dynamiki polaryzacji elektrycznej.

Oprócz wielu zjawisk wynikających z pojedynczych sprzężeń takich jak wspomniane na początku tego rozdziału, znane są zjawiska związane z bardziej skomplikowanymi układami sprzężeń. Jako przykład możemy podać wzmocnienia ultradźwiękowe w półmetalach [65], gdzie fala ultradźwiękowa przenosi się w skrzyżowanych polach magnetycznym i elektrycznym \mathbf{H} i \mathbf{E} w kierunku $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$.

Przy założeniu, że nośniki prądu są sprzężone z falą dźwiękową przez potencjał deformacji wynika wzmocnienie ultradźwięku, pod warunkiem, że

$$(5.5) \quad Ec > Hs$$

gdzie e i s oznaczają odpowiednio prędkość światła i dźwięku. Ilościowo efekt ten jest dość silny: w sprzyjających warunkach może osiągnąć 300 db/cm. Efekt znika gdy nie ma pola elektrycznego lub magnetycznego, albo nośników, albo sprzężenia między falą dźwiękową i nośnikami, lub wreszcie gdy dryf nośników w kierunku $E \times H$ jest słaby. Pouczający jest fakt, że interesujące zjawisko może wynikać z dość skomplikowanego układu pól i sprzężeń.

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, Oxford 1962 American edition: Reading, Mass. Addison, Wesley 1962.
2. W. NOWACKI, *Dynamic problems of thermoelasticity*, Nordhof Publ., Leyden 2975 Polish edition: PWN, Warszawa 1966, Russian translation: Mir, Moscow 1970.
3. W. NOWACKI, *Theory of asymmetric elasticity* [in Polish], PWN, Warszawa 1970 [second edition: 1981].
4. W. NOWACKI, *Theory of micropolar elasticity*, CISM, Courses and Lectures, 25, Springer, Wien 1970.
5. W. NOWACKI, *Foundations of linear piezoelectricity*, Magnetoelasticity, in: CISM Courses and Lectures, 257, Elektromagnetic Interactions, in Elastic Solids, Ed. H. Parkus, Springer, Wien—New York 1979.
6. E. COSSERAT, F. COSSERAT, *Theorie des corps deformables*, Hermann 1909.
7. J. W. WEYSSENHOF, A. RAABE, *Relativistic dynamics of spin fluids and spin particles*, Acta Phys. Polon., 9, 1947.
8. R. ŻELAZNY, *Derivation of hydrodynamic equations of quantum system of diatomic molecules*, Phys. Rev., 117, 1, 1960.
9. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *Multipolar continuum mechanics*, ARMA, 17, 113, 1964.
10. R. A. TOUPIN, *Theories of elasticity with couple-stress*, ARMA, 17, 85, 1964.
11. A. C. ERINGEN, E. C. SUHUBI, *Nonlinear theory of simple microelastic solids*, I, II, IJES, 2, 189, 389, 1964.
12. D. ROGULA, *Large deformations of crystals, homotopy and defects*, in: Trends in Application of Pure Mathematics to Mechanics, Proc. Conf. Lecce 1975, Ed. G. Fichera, Pitman Publ., London 1976.
13. D. ROGULA, *Continuum models of structured media*, in: Study No 12, Continuous Models of Discrete Systems, Proc. Symp. Mont Gabriel 1977; Ed. J. W. Provan, Univ. of Waterloo Press, 1978.
14. I. A. KUNIN, *Model of simple elastic medium with spatial disperton* [in Russian], Prikl. Math., 30, 542 1966.
15. E. KRÖNER, *Elasticity theory of materials with long-range cohesive forces*, IJSS, 3, 731, 1967.
16. E. KRÖNER, B. K. DATTA, *Nichtlokale Elastostatik*. Ableitung aus der Gittertheorie, Z.F. Physik, 196, 203, 1966.
17. D. G. B. EDELEN, A. E. GREEN, N. LAWS, *Nonlocal continuum mechanics*, ARMA, 43, 36, 1971.
18. A. C. ERINGEN, D. G. B. EDELEN, *On nonlocal elasticity*, IJES, 10, 233, 1972.
19. A. C. ERINGEN, *Nonlocal polar elastic continua*, IJES, 10, 1, 1972.
20. A. C. ERINGEN, *Foundations of micropolar elasticity*, CISM Courses, 23, Springer Verlag 1970.
21. R. STOJANOVIĆ, *Mechanics of polar continua*, CISM Courses, Voline 1970.
22. J. STEFANIAK, *Reflection of a plane longitudinal wave from a free plane in a Cosserat medium*, Arch. Mech., 21, 745, 1969.
23. J. IGNACZAK, *Radiation conditions in asymmetric elasticity*, J. of Elasticity, 2, 307, 1972.

24. J. IGNACZAK, *Theorems of Boggio's type in asymmetric elastodynamics*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 25, 139, 1977.
25. W. NOWACKI, *Plane problems in micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci. Serie Sci. techn., 19, 525, 1971.
26. W. NOWACKI, *Zweidimensionale Probleme der mikropolaren Elastostatik*, Z. Angew. Math. Mech., 52, 268, 1972.
27. W. NOWACKI, *Three-dimensional problem of micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 22, 363, 1974.
28. A. WACHECKA-SKOWRON, *Uniqueness for plane crack problems in micropolar theory of elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 25, 825, 1977.
29. S. MATYSIAK, A. WACHECKA-SKOWRON, *On the uniqueness of some two-dimensional boundary value problems in micropolar theory of elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 25, 845, 1977.
30. S. M. KHAN, R. S. DHALIVAL, *Axisymmetric problem for a halfspace in the micropolar theory of elasticity*, J. Elast., 7, 13, 1977.
31. S. M. KHAN, R. S. DHALIVAL, *Effects due to body-forces and body couples in the interior of micropolar elastic halfspace*, J. Elast., 7, 33, 1977.
32. J. DYSZLEWICZ, S. MATYSIAK, *Singularity of stresses in a micropolar elastic semi-space due to discontinuous boundary load*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 21, 975, 1973.
33. J. DYSZLEWICZ, S. MATYSIAK, *Singularity of stresses in a micropolar elastic semi-space due to concentrated load*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 21, 763, 1973.
34. D. IESAN, *The plane micropolar strain of ortotropic elastic solids*, Arch. Mech., 25, 547, 1973.
35. D. IESAN, *On the existence and uniqueness of the solutions of the dynamic theory of the linear elasticity microstructure*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 22, 329, 1974.
36. D. IESAN, *Almansi's problem in micropolar elasticity*, IJES, 12, 361, 1974.
37. D. IESAN, *Torsion of anisotropic micropolar elastic cylinders*, Z. Angew. Math. Mech., 54, 773, 1974.
38. D. IESAN, *Saint-Venants problem for inhomogeneous and anisotropic elastic solids with microstructure*, Arch. Mech., 419, 29, 1977.
39. M. SOKOŁOWSKI, *Theory of couple stresses in bodies with constrained relations*, CISM Courses, 26, Udine 1970.
40. W. NOWACKI, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*, Proc. IUTAM Symp. Vienna 1966, Springer Verlag, Wien 1968.
41. A. C. ERINGEN, *Foundations of micropolar thermoelasticity*, CISM Courses, 27, Springer Verlag 1970.
42. J. STEFANIAK, *A generalization of Galerkin's functions for asymmetric thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 16, 391, 1968.
43. W. NOWACKI, *Green functions for micropolar thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn. 16, 11 - 12, 1968.
44. E. RUSU, *On some theorems in a generalized theory of linear micropolar thermoelasticity*, Bull. Inst. Politechn. Iasi, A22, 87, 1976.
45. T. R. TAUCHERT, W. D. CLAUSS JR., A. ARIMAN, *The linear theory of micropolar thermoelasticity*, IJES, 6, 37, 1968.
46. K. L. CHOWDHURY, P. G. GLOCKNER, *On the matrix method in micropolar thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 23, 511, 1975.
47. W. NOWACKI, *Some problems of micropolar magneto-elasticity*, Proc. Vibr. Probl., 12, 105, 1971.
48. S. KALISKI, *Thermo-magneto-microelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 16, 7, 1968.
49. S. KALISKI, W. NOWACKI, *Wave-type equations of thermo-magneto-microelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 18, 277, 1970.
50. C. E. POUGH, M. SINGH, *Couple stresses in elastic dielectrics*, Indian J. Pure Appl. Math., 5, 530, 1974.
51. CZ. RYMARZ, W. NIEPORĘT, *Micro-structural electrohydrodynamic model of a continuous medium*, J. Techn. Phys., 17, 195, 1976.
52. E. C. ERINGEN, R. C. DIXON, *A dynamical theory of polar elastic dielectrics*, IJES, 3, 359, 1965.
53. R. D. MINDLIN, *A continuum theory of diatomic dielectrics*, IJES, 8, 7, 1972.

54. J. P. NOWACKI, *The linear theory of dislocation in Cosserat elastic continuum*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 22, 611, 1974.
55. J. P. NOWACKI, *Theory of disclinations in elastic Cosserat media*, Arch. Mech., 29, 531, 1977.
56. S. MINAGAWA, *Elastic fields of dislocations and dislocations in a isotropic micropolar continuum*, Lett. Appl. Engng. Sci., 5, 85, 1977.
57. W. NOWACKI, *Two-dimensional problem of magneto-thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 10, 2, 1962.
58. S. KALISKI, W. NOWACKI, *Combined elastic and electromagnetic waves produced by thermal shock in the case of medium of finite electric conductivity*, Bull. Acad. Polon. Sci. Serie Sci. techn., 10, 5, 1962.
59. W. NOWACKI, *Problem of linear couple magneto-thermoelasticity I. Energetic theorem and uniqueness theorem of solution, II. Variation theorems*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 13, 4, 6, 1965.
60. W. NOWACKI, *Coupled fields in elasticity*, in: Trends in Applications of Pure Math. to Mechanics, Ed. G. Fischera, Pitman Publ., London 1976.
61. H. PARKUS, *Variational principles in thermo- and magneto-elasticity*, Courses and Lectures, 58, Udine 1970.
62. H. PARKUS, *Magneto-thermoelasticity*, Courses and Lectures, 118, Springer Verlag, Udine, 1972.
63. S. KALISKI, Z. PŁOCHOCKI, D. ROGULA, *Asymmetric stress tensor and the angular momentum conservation law in the equations of combined mechanical and electromagnetic field in a continuous medium*, Proc. Vibr. Probl., 3, 253, 1962.
64. D. ROGULA, *Noether theorem for a continuous medium interacting with external fields*, Proc. Vibr. Probl., 7, 337, 1966.
65. W. P. DUMKE, R. R. HEARING, *Ultrasonic amplification in semimetals*, Phys., Rev., 126, pp. 1974, 1962.
66. S. BODASZEWSKI, *On non-symmetric state of stress and its application in mechanics of continuous media*, Arch. Mech. 5, 351, 1953.

ZNISZCZENIE W ZAKRESIE LEPKOPLASTYCZNYM ¹⁾

JEAN LEMAITRE

*Professeur a l'Université Paris VI
Laboratoire de Mécanique et Technologie
61, Avenue du Président Wilson
CACHAN, France*

1. Wstęp

Wzrastająca liczba konstrukcji metalowych, poddanych działaniu wysokich temperatur, stanowi główną przyczynę studiów na temat metod przewidywania zachowania się takich konstrukcji w warunkach ich eksploatacji. Przy tym istotną rolę odgrywają zagadnienia ekonomiczne i wymagania bezpieczeństwa, narzucające bardzo ostre warunki.

Rozwój współczesnej termodynamiki [1] i analizy funkcjonalnej [2] umożliwia budowanie związków konstytutywnych odnoszących się do złożonych zjawisk. Ponadto możliwe jest formułowanie metod obliczania konstrukcji nieliniowych. Dzięki temu rozwojowi otrzymuje się zasady pozwalające sformułować, przy ograniczającym założeniu izotropii, związki konstytutywne plastyczności, lepko-plastyczności, pęknięcia oraz związki opisujące zjawisko uszkodzenia materiału. Anizotropia pozostaje nadal zagadnieniem otwartym.

Jeśli chodzi o obliczanie konstrukcji, potrafimy formułować zagadnienia plastycznej nośności granicznej oraz pewne zadania ewolucji, ale jedynie w przypadku uproszczonych związków konstytutywnych. Jednym z wielkich tematów mechaniki ciała stałego na lata 80-te jest bez wątpienia wprowadzenie do obliczeń większej dawki fizyki.

Drugi korzystny punkt to możliwość znalezienia na maszynach liczących przybliżonych rozwiązań numerycznych tych zagadnień, których nie można rozwiązać na drodze analitycznej. Silne nieliniowości, z jakimi mamy do czynienia w zjawiskach pełzania i zniszczenia powodują, że zagadnienia można rozwiązywać jedynie krok po kroku na drodze linearyzacji. Każdy postęp w zakresie szybkości maszyn liczących wnosi możliwość rozwiązywania nowych zadań.

Obliczenia dotyczące przewidywania zachowania się konstrukcji, znajdującej się pod działaniem podwyższonych temperatur, można schematycznie ująć w następujące etapy:

1. Zdefiniowanie geometrii konstrukcji.
2. Zdefiniowanie historii obciążeń zewnętrznych.
3. Wyznaczenie pola temperatur.

¹⁾ Referat problemowy wygłoszony na XXII-jej Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego w Golinie, wrzesień 1980 r.

4. Ustalenie związków konstytutywnych lepkoplastyczności dla rozpatrywanych materiałów.
5. Wyznaczenie pól naprężeń i odkształceń w warunkach stabilizacji względem cyklicznego wzmocnienia lub osłabienia materiału oraz redystrybucji naprężeń, spowodowanej lepkoplastycznością.
6. Określenie punktu, lub punktów, najbardziej narażonych na zniszczenie.
7. Ustalenie praw opisujących proces uszkodzenia i mających na celu przewidywanie pojawienia się lokalnego zniszczenia w postaci elementarnej szczeliny makroskopowej.
8. Określenie czasu (lub liczby cykli), po którym pojawia się taka makroszczelina.
9. Ustalenie praw wzrostu szczeliny.
10. Określenie procesu ewolucji powstałej szczeliny, lub szczelin, aż do zupełnego zniszczenia na skutek niestateczności konstrukcji.

Powyższe zestawienie obejmuje praktycznie całą mechanikę materiałów i konstrukcji. W naszej pracy ograniczymy się do części dotyczącej zniszczenia, tzn. punktów 7 - 10, przy czym nacisk położymy na sformułowanie i ustalenie związków opisujących uszkodzenie i pękanie. Podstawowym narzędziem będzie termodynamika procesów nieodwraconalnych, a dla opisu uszkodzenia uogólnimy pojęcie naprężenia efektywnego, wprowadzone przez KACZANOWA [3, 4]. Uogólnienie pojęcia prędkości uwalniania energii, wprowadzonego pierwotnie przez GRIFFITHA [5, 6], pozwoli opisać pękanie.

Praca zorientowana jest zasadniczo na przedstawienie zagadnienia zniszczenia konstrukcji poddanych działaniu podwyższonych temperatur, gdy lepkoplastyczność odgrywa istotną rolę. Chodzi tutaj o temperatury w przybliżeniu wyższe od 1/3 absolutnej temperatury topnienia rozpatrywanego metalu.

2. Rozpoczynanie się szczelin

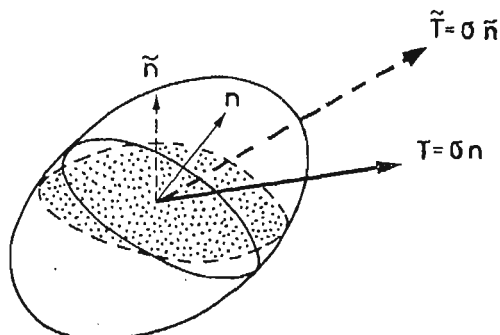
Uważa się, że szczelina pojawia się w ciele stałym wtedy gdy w elemencie o reprezentatywnej objętości pojawia się nieciągłość materialna pewnej wartości. Chodzi tu o taki wymiar charakterystyczny, począwszy od którego nie można stosować mechaniki ośrodków ciągłych bez uwzględnienia geometrii tej nieciągłości. Dla metali wymiar ten w praktyce wynosi 0,1 - 1 mm.

Aby, przy wykorzystaniu równań mechaniki ośrodków ciągłych, przewidzieć pojawienie się szczeliny makroskopowej koniecznym jest zdefiniowanie parametru uszkodzenia, opisującego deteriorację materiału począwszy od jego stanu pierwotnego, aż do utworzenia się szczeliny. Metalurgia fizyczna pozwala zidentyfikować mechanizmy powstawania i wzrostu mikropustek i mikroszczelin składających się na uszkodzenie materiału [7]. Matematyczne metody homogenizacji zagadnień w mechanice pozwalają zbudować modele teoretyczne zachowania się makroskopowego; modele takie schematycznie uwzględniają wspomniane mikrodefekty, jednakże bez zdefiniowania makroskopowego parametru uszkodzenia [8]. W ramach termodynamiki można natomiast określić zbiór makroskopowych parametrów, koniecznych do opisu zjawisk reologicznych oraz można podać równania ewolucji tych parametrów. Jednakże termodynamika maskuje część rzeczywis-

tości fizycznej, która wchodzi do rozważań jedynie na poziomie hipotez. Mimo to obieramy właśnie taką drogę.

2.1. Makroskopowy parametr uszkodzenia. Po raz pierwszy koncepcja mechanicznego parametru uszkodzenia pojawiła się w 1958 roku w pracach KACZANOWA, dotyczących zniszczenia w warunkach pełzania przy rozciąganiu, por. [3]. Idea ta opiera się na pojęciu naprężenia efektywnego, którego uogólnienie na przypadek trójwymiarowej anizotropii stanowi nadal nierozwiązany problem podstawowy.

Rozpatrzmy przekrój S , o normalnej n , rozpatrywanego elementu o objętości V , na który działa wektor naprężenia T związany z tensorem naprężenia Cauchy'ego σ , por. rys. 1.



Rys. 1. Definicja wektora naprężeń efektywnych

Jeśli w elemencie istnieją uszkodzenia w postaci mikropustek lub mikroszczelin, to jedynie część \tilde{S} przekroju przenosi naprężenia T . Związek

$$(2.1) \quad \tilde{S} = (1-D)S$$

określa parametr uszkodzenia D , przedstawiający nieciągłości powierzchniowe istniejące w przekroju S .

W przypadku gdy uszkodzenie ma charakter izotropowy, D jest skalarzem niezależnym od n i bez trudu określa się wektor \tilde{T} oraz tensor naprężeń efektywnych $\tilde{\sigma}$ pisząc

$$(2.2) \quad \tilde{S}\tilde{T} = ST,$$

gdzie $\tilde{T} = (1-D)^{-1}T$, przy czym $\tilde{T} = \tilde{\sigma}n$ oraz

$$(2.3) \quad \tilde{\sigma}n = (1-D)^{-1}\sigma n,$$

$$(2.4) \quad \tilde{\sigma} = (1-D)^{-1}\sigma.$$

Jeśli uszkodzenie ma charakter anizotropowy, D zależy od normalnej n . Parametrowi uszkodzenia można nadać sens tensorowy na kilka sposobów. Mianowicie uszkodzenie można tłumaczyć nie tylko osłabieniem przekroju, ale również jego obrotem [9], któremu jednakże trudno nadać sens fizyczny

$$S \rightarrow \tilde{S} \quad n \rightarrow \tilde{n}.$$

Mamy wówczas zależność:

$$(2.5) \quad \tilde{S}\tilde{n} = S[1-D]n,$$

w której $\llbracket 1-D \rrbracket$ oznacza tensor drugiego rzędu. Prowadzi to do następujących związków

$$(2.6) \quad \tilde{T} = \llbracket 1-D \rrbracket^{-1} T,$$

$$(2.7) \quad \tilde{\sigma} = \sigma \llbracket 1-D \rrbracket^{-1}.$$

W ogólnym przypadku tensor naprężeń efektywnych nie jest symetryczny. Dlatego więc aby spełnić na przykład związek fizyczny sprężystości, trzeba zdefiniować inny tensor efektywny, otrzymamy przez symetryzację tensora σ .

Dla przykładu, w pracy [9] przyjęto

$$(2.8) \quad \tilde{\sigma}' = \frac{1}{2} [\llbracket 1-D \rrbracket^{-1} \sigma + \sigma \llbracket 1-D \rrbracket^{-1}],$$

podczas gdy w [10] rozpatruje się następujący tensor

$$(2.9) \quad \tilde{\sigma}'' = \llbracket 1-D \rrbracket^{-\frac{1}{2}} \sigma \llbracket 1-D \rrbracket^{-\frac{1}{2}}.$$

Istnieją i inne możliwości, ale jaki jest ich sens fizyczny?

Inne podejście polega na zapisaniu potencjału termodynamicznego Ψ_e jako funkcji odkształceń sprężystych ε^e i tensora \tilde{a} określającego własności sprężyste materiału uszkodzonego

$$(2.10) \quad \rho \psi_e = \frac{1}{2} \tilde{a} \varepsilon^e \varepsilon^e.$$

Parametr uszkodzenia rozpatruje się jako operator, który działając na tensor naprężenia σ , celem określenia naprężeń efektywnych $\tilde{\sigma}$, pozwala zapisać związek fizyczny sprężystości w zależności od tensora sprężystości a materiału nieuszkodzonego [11].

$$(2.11) \quad \tilde{\sigma} = a \varepsilon^e.$$

Korzystając z potencjału termodynamicznego otrzymujemy

$$(2.12) \quad \sigma = \tilde{a} \varepsilon^e,$$

skąd

$$(2.13) \quad \tilde{\sigma} = \tilde{a} \tilde{a}^{-1} \sigma = \Delta \sigma.$$

Tensor Δ jest więc tensorem czwartego rzędu, trudnym do zidentyfikowania; punktem wyjścia do jego określenia jest przypadek szczególny sprężystości.

Teoria reprezentacji funkcji tensorowych pozwala formułować różne związki anizotropowe [12]; ale i przy takim podejściu trudno wyprowadzić nadające się do zastosowania przypadki szczegółowe.

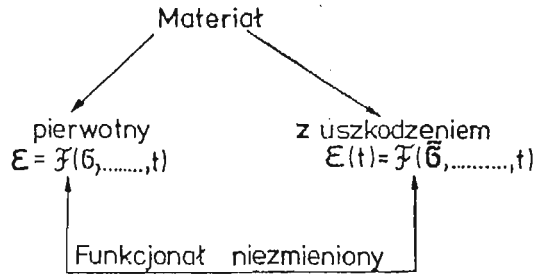
Prostsze sformułowania można podać ograniczając się do szczególnych przypadków anizotropii, lub nawet do obciążeń radialnych [13]. Jednakże nie rozwiązuje to podstawowego problemu anizotropii, który nadal pozostaje otwarty.

Do dalszych rozważań przyjmujemy hipotezę uszkodzenia izotropowego. Wynika stąd, że skalar D określa naprężenia efektywne, czyli mamy

$$(2.14) \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D}.$$

Ponadto, przyjmujemy następującą fundamentalną hipotezę: „Każdy związek konstytutywny materiału z uszkodzeniami otrzymuje się zastępując zwykłe naprężenia, naprężę-

niami efektywnymi w związku fizycznym, opisującym materiał pierwotny”. Założenie to ilustruje rys. 2.



Rys. 2

2.2. Sformułowanie termodynamiczne. 2.2.1. Zmienne termodynamiczne. Wartość zmiennej D charakteryzuje więc uszkodzenie materiału; pomiary mikrograficzne powierzchni mikroszczelin i przekroi mikropustek wystarczają do określenia stanu uszkodzenia. Na poziomie związku konstytutywnego, tzn. zależności opisującej proces uszkodzenia w zależności od obciążeń, wielkość D jest zmienną stanu w sensie termodynamiki. Zmienną tę traktuje się jako parametr wewnętrzny, ponieważ nie jest ona mierzalna bezpośrednio, przy pomocy zwykłych środków termomechaniki.

Jeśli oprócz zniszczenia uwzględnia się sprężysto-lepkoplastyczność, to do rozważań należy wprowadzić dalsze zmienne stanu. Są nimi: odkształcenie sprężyste ε^e występujące w pracy odwracalnej, temperatura T oraz parametry wewnętrzne α_p opisujące wzmocnienie [11, 14].

Zmiennymi stowarzyszonymi są następujące wielkości:

1. tensor naprężenia σ stowarzyszony z ε^e ,
2. entropia s , stowarzyszona z T ,
3. prędkość uwalniania energii uszkodzenia Y , stowarzyszona z D ,
4. zmienne A_p , stowarzyszone z α_p .

Otrzymujemy je z potencjału termodynamicznego jako funkcji wszystkich zmiennych stanu.

Jeśli ε oznacza tensor odkształcenia, to tensor odkształceń plastycznych zdefiniowany jest następująco

$$(2.15) \quad \varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e.$$

Tablica 1. Tablica zmiennych termodynamicznych

Zmienne stanu		Zmienne stowarzyszone
Obserwowalne	Wewnętrzne	
ε^e	-----	σ
T	-----	s
	D -----	Y
	α_p -----	A_p

2.2.2. Potencjał termodynamiczny. Biorąc za potencjał termodynamiczny energię swobodną i przyjmując, że funkcja ta jest wypukła względem wszystkich zmiennych stanu [1]

$$\psi(\varepsilon^e, T, D, \alpha_P)$$

równania stanu zapisują się w postaci zależności

$$(2.16) \quad \sigma = \varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e},$$

$$(2.17) \quad s = - \frac{\partial \psi}{\partial T},$$

gdzie ϱ jest gęstością na jednostkę objętości.

Zmienne stanu stowarzyszone z parametrami wewnętrznymi są określone przez związki

$$(2.18) \quad Y = \varrho \frac{\partial \psi}{\partial D},$$

$$(2.19) \quad A_P = \varrho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_P}.$$

Pokażemy jak pierwsza z tych dwu zależności prowadzi do kryterium rodzenia się szczeliny. Dla metali rozsądnie jest przyjąć hipotezę, że nie ma sprzężenia pomiędzy sprężystością i uszkodzeniem a wzmocnieniem. Oznacza to, że energia swobodna ma postać

$$(2.20) \quad \psi = \psi_e(\varepsilon^e, T, D) + \psi_r(\alpha_P, T).$$

W przypadku izotermicznej sprężystości liniowej, ψ_e jest dodatkowo określoną formą kwadratową odkształceń sprężystych ε^e , liniową względem $(1-D)$, a to z uwagi na wprowadzoną definicję naprężenia efektywnego. Mamy więc

$$(2.21) \quad \varrho \psi_e = \frac{1}{2} (1-D) a \varepsilon^e \varepsilon^e,$$

gdzie a oznacza tensor modułów sprężystych. W rezultacie otrzymujemy

$$(2.22) \quad \sigma = (1-D) a \varepsilon^e,$$

$$(2.23) \quad Y = \varrho \frac{\partial \psi}{\partial D} = - \frac{1}{2} a \varepsilon^e \varepsilon^e.$$

Widzimy, że wartość Y jest równa połowie zmiany energii sprężystej W_e , spowodowanej zmianą uszkodzenia przy stałych naprężeniach i stałej temperaturze.

Wyznaczamy $dW_e = \sigma d\varepsilon^e$, biorąc $d\varepsilon^e$ z wyrażenia $d\sigma = 0$.

Mamy więc

$$(2.24) \quad d\sigma = (1-D) a d\varepsilon^e - a \varepsilon^e dD = 0,$$

skąd otrzymujemy

$$(2.25) \quad dW_e = \sigma \varepsilon^e \frac{dD}{1-D},$$

czyli

$$(2.26) \quad \frac{dW_e}{dD} = \frac{1}{1-D} \sigma \varepsilon^e = a \varepsilon^e \varepsilon^e = -2Y.$$

Ostatecznie otrzymujemy następującą zależność

$$(2.27) \quad Y = - \frac{1}{2} \frac{dW_e}{dD} \Big|_{\sigma, T = \text{const.}}$$

Rezultat ten jest analogiczny z definicją prędkości uwalniania energii w mechanice zniszczenia [15].

Przez analogię z odpornością G_c materiału, kryterium rodzenia się szczeliny definiuje się następująco

$$|Y| = Y_c \rightarrow \text{istnieje szczelina makroskopowa (2.8)}$$

Podany warunek można również zapisać w zależności od parametru uszkodzenia D . Jeśli W_e^R oznacza energię sprężystą przy zniszczeniu

$$(2.28) \quad W_e^R = \frac{1}{2} \sigma_R \varepsilon_R^e = \frac{1}{2} (1-D_c) a \varepsilon_R^e \varepsilon_R^e = (1-D_c) Y_c,$$

to dochodzimy do zależności

$$(2.29) \quad D_c = 1 - \frac{W_e^R}{Y_c}.$$

Doświadczenie pokazuje, że dla metali najczęściej można przyjąć

$$(2.30) \quad D_c \cong 1.$$

2.2.3. Potencjał dyssypacji. Związki opisujące ewolucję parametrów wewnętrznych wy-
prowadza się z potencjału dyssypacji. Postulujemy istnienie takiego potencjału [1]. Za-
piszmy gęstość dyssypacji w postaci nierówności Clausiusa-Duhema

$$(2.31) \quad \sigma \dot{\varepsilon} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - q \frac{\text{grad } T}{T} \geq 0,$$

gdzie q oznacza wektor strumienia ciepła, stowarzyszony z $\frac{\text{grad } T}{T}$.

Funkcja ψ , jako funkcja zmiennych stanu, przyjmuje postać

$$(2.32) \quad \dot{\psi} = -s\dot{T} + \frac{1}{\rho} (\sigma \dot{\varepsilon}^e + Y\dot{D} + A_P \dot{\alpha}_P),$$

gdzie $\varepsilon^P = \varepsilon - \varepsilon^e$. Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$(2.33) \quad \sigma \dot{\varepsilon} - Y\dot{D} - A_P \dot{\alpha}_P - q \frac{\text{grad } T}{T} \geq 0.$$

Wielkości $\dot{\varepsilon}^P$, \dot{D} , $\dot{\alpha}_P$, q , oznaczają odpowiednio prędkości zmiennych dyssypatywnych. Natomiast σ , Y , A_P , $\frac{\text{grad } T}{T}$ są odpowiednimi zmiennymi dwoistymi (siłami) [16].

Zakłada się więc, że istnieje funkcja skalarna φ , wypukła względem zmiennych dualnych, przy czym zmienne stanu traktujemy jako parametry. Jest to więc hipoteza uogólnionej normalności [17] (stowarzyszone prawo płynięcia w przestrzeni sił termodynamicznych σ , Y , A_P , $\frac{\text{grad } T}{T}$ — tłum). Z funkcji

$$\varphi \left(\sigma, Y, A_P, \frac{\text{grad } T}{T}; \quad \varepsilon^e, T, D, \alpha_P \right)$$

otrzymujemy więc

— równania konstytutywne lepkoplastyczności

$$(2.34) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}, \\ \dot{\alpha}_p &= -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial A_p}, \end{aligned}$$

— prawo Fouriera

$$(2.35) \quad \mathbf{q} = - \frac{\partial \varphi}{\partial \left(\frac{\text{grad } T}{T} \right)}$$

— równanie ewolucji opisujące proces uszkodzenia

$$(2.36) \quad \dot{D} = -\lambda_D \frac{\partial \varphi}{\partial D}$$

Funkcje skalarne λ i λ_D oznaczają odpowiednio mnożnik lepkoplastyczny i mnożnik uszkodzenia.

Termodynamika nie pozwala pójść dalej. Jednakże rozważania fenomenologiczne i badania doświadczalne prowadzą do modelowania i identyfikacji przedstawionych równań konstytutywnych.

2.3. Pomiar uszkodzenia. Chcąc modelować potencjał φ , tzn. nadać mu możliwie najprostsza postać analityczną, należy przede wszystkim wyłowić zmienne odgrywające istotną rolę, a tym samym wyeliminować zmienne, których wpływ jest znikomy. Następnie należy zastanowić się, w jakiej postaci analitycznej występują zmienne istotne. Tym samym doszliśmy do delikatnej części metody fenomenologicznej; chodzi bowiem o wykorzystanie jak największej liczby danych doświadczalnych: obserwacji występujących mechanizmów fizycznych i pomiarów zmiennych w przypadkach szczególnych. Na tym etapie mamy do czynienia z pracą niezbyt ścisłą, gdzie intuicja, sens fizyczny i rodzaj rozpatrywanych zastosowań odgrywają wielką rolę.

Pomiary uszkodzenia są więc niezbędne. Bezpośrednich pomiarów powierzchni dekohezji w materiale przy pomocy mikroskopii jakościowej nie można brać — poza badaniami podstawowymi — pod uwagę, ponieważ są długotrwałe i należą do badań niszczących, jako że trzeba badać przekroje materiału [18]. Dzięki sprzężeniu deformacji z uszkodzeniem pojęcie naprężeń efektywnych prowadzi w naturalny sposób do oszacowań, drogą pośrednią, stanu uszkodzenia.

2.3.1. Sprężystość sprzężona z uszkodzeniem. Wiemy, że potencjał termodynamiczny, będący funkcją kwadratową odkształceń sprężystych ε^e , jest liniowy względem $(1-D)$. W rezultacie otrzymuje się związek konstytutywny sprężystości

$$(2.37) \quad \sigma = (1-D) a \varepsilon^e.$$

Jeśli rozpatrzmy przypadek sprężystości izotropowej, stosującej się dobrze do metali, to dla zagadnienia jednowymiarowego równanie (2.37) redukuje się do zależności

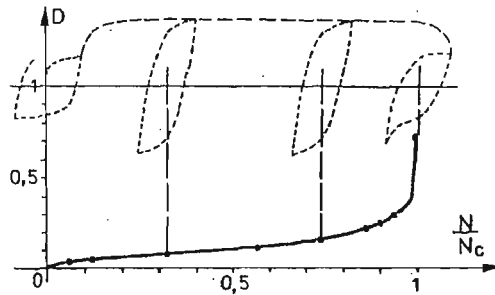
$$(2.38) \quad \sigma = (1-D) E \varepsilon^e,$$

gdzie E oznacza moduł Younga materiału pierwotnego. Przy okazji można sprawdzić podstawową hipotezę dotyczącą naprężeń efektywnych.

Wyrażenie $(1-D)E$ ma sens modułu sprężystości materiału z uszkodzeniami [19]; znając moduł Younga E materiału pierwotnego, każdy pomiar wielkości σ/ε_e pozwala wyznaczyć parametr uszkodzenia z wzoru

$$(2.39) \quad D = 1 - \frac{1}{E} \frac{\sigma}{\varepsilon_e}$$

Przykład podano na rys. 3. Dotyczy on próbki poddanej rozciąganiu i ścisaniu w podwyższonych temperaturach, przy czym cykle odkształceń mają dosyć niską częstotliwość, tak aby uszkodzenia wywołane zmęczeniem i pełzaniem występowały jednocześnie. Ewolucję procesu uszkodzenia opisuje wzór (2.39), w którym wielkość σ/ε_e obliczano na podstawie nachylenia pętli naprężenie-odkształcenie. Na rys. 3 pętle oznaczono linią przerywaną.



Rys. 3. Ewolucja uszkodzenia podczas próby na obciążenia cykliczne. Stal ASI 316, $T = 550^\circ\text{C}$, $\varepsilon = \pm 10^{-2}$

2.3.2. Lepkoplastyczność sprzężona z uszkodzeniem. Dla materiałów bez uszkodzeń jedna z prostych specyfikacji potencjału φ prowadzi do modelu HOFFA-LEMAITRE'A [20] izotropowej lepkoplastyczności. Model ten, dla drugiego stadium pełzania, redukuje się do prawa ODQVISTA [21]; to ostatnie stanowi uogólnienie jednowymiarowego prawa NORTONA [22]

$$(2.40) \quad \dot{\varepsilon}_p = \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^N,$$

gdzie $\dot{\varepsilon}_p$ oznacza prędkość odkształceń plastycznych, zaś λ i N są współczynnikami charakteryzującymi pełzanie danego materiału.

Podstawowa hipoteza o naprężeniach efektywnych pozwala zapisać następującą zależność dla materiału z uszkodzeniami

$$(2.41) \quad \dot{\varepsilon}_p = \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\lambda} \right)^N = \left[\frac{\sigma}{(1-D)\lambda} \right]^N.$$

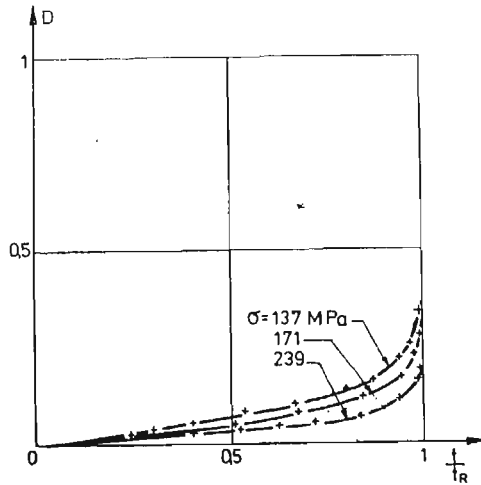
Tutaj też, znając λ i N dla materiału pierwotnego, każdy pomiar wielkości $\dot{\varepsilon}_p$ i σ dla stanów z uszkodzeniami (np. trzeciego stadium pełzania), przy wykorzystaniu zależności

$$(2.42) \quad D = 1 - \frac{\sigma}{\lambda \dot{\varepsilon}_p^{1/N}},$$

pozwała ocenić to uszkodzenie. W przypadku próby pełzania przy stałych naprężeniach zakładając, że w drugim stadium pełzania uszkodzenie jest pomijalne, czyli $\dot{\epsilon}_P^* = \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^N$, dla trzeciego etapu pełzania mamy

$$(2.43) \quad D = 1 - \left(\frac{\dot{\epsilon}_P^*}{\dot{\epsilon}_P}\right)^{1/N}.$$

Przykład zastosowania tej metody do oceny uszkodzenia przy pełzaniu przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Ewolucja uszkodzenia w czasie próby cyklicznego pełzania. Stop IN 100, $T = 1000^\circ\text{C}$.

2.4. Modelowanie i identyfikacja. 2.4.1. Model ogólny. Wyposażeni w możliwość przeprowadzenia pośrednich pomiarów uszkodzenia, możemy zaproponować rozsądne równanie ewolucji parametru D

$$(2.44) \quad \dot{D} = -\lambda_D \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \left(\sigma, Y, A_P, \frac{\text{grad} T}{T}; \quad \epsilon^e, T, D, \alpha_P \right).$$

Należy zaznaczyć, że pojawia się tu nowa trudność. Aktualnie możliwe pomiary dotyczą zagadnień jednowymiarowych, a obliczać trzeba konstrukcje dwu- i trójwymiarowe. Nawet przy przyjęciu hipotezy uszkodzenia izotropowego, istnieje szerokie pole badań teoretycznych i doświadczalnych. Jednakże można uprościć wyrażenie na funkcję φ , przeprowadzając następujące rozważania:

- rozsprzężenie efektów mechanicznych i termicznych,
- rozsprzężenie efektów lepkoplastyczności i uszkodzenia czyli

$$\varphi = \varphi_{vP}(\sigma, A_P; \epsilon^e, T, D, \alpha_P) + \varphi_D(Y; \epsilon^e, T, D, \alpha_P) + \varphi_{Th} \left(\frac{\text{grad} T}{T}; T, D, \alpha_P \right).$$

- W wyrażeniu na φ_D można zastąpić ϵ^e przez σ , korzystając ze związku fizycznego

sprężystości. Z hipotezy izotropii uszkodzenia wynika ponadto, że funkcja φD zależy od niezmienników skalarnych tensora naprężenia

$$(2.45) \quad \sigma_I = \text{tr } \sigma, \quad \sigma_{II} = \text{tr } S^2,$$

gdzie S oznacza dewiator tensora naprężenia. Podobnie jak i w plastyczności pomijamy wpływ trzeciego niezmiennika tensora naprężenia.

— Oprócz szczególnych przypadków efektów pamięci, takich jak korzystny wpływ przeciążeń na uszkodzenie przy zmęczeniu [23], można pominąć wpływ parametrów wzmocnienia na uszkodzenie.

— Jeśli założymy, że funkcja φ_D jest liniowa względem Y to otrzymujemy następujące równanie ewolucji

$$(2.46) \quad \dot{D} = -\lambda_D \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = -\lambda_D \frac{\partial \varphi_D}{\partial Y} = \lambda_D f(\sigma_I, \sigma_{II}, T, D).$$

2.4.2. Pojęcie naprężenia równoważnego przy uszkodzeniu. Obserwacje metalurgiczne upoważniają do stwierdzenia, że naprężenie średnie ma silny wpływ na powstanie i rozwój mikropustek

$$(2.47) \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr } \sigma.$$

Natomiast jeśli chodzi o mikroszczeliny, to raczej naprężenie równoważne Misesa $\bar{\sigma}$ odgrywa zasadniczą rolę,

$$(2.48) \quad \bar{\sigma} = \left[\frac{3}{2} \text{tr}(\sigma - \sigma_m \mathbf{1})^2 \right]^{1/2},$$

gdzie $\mathbf{1}$ oznacza tensor jednostkowy. Stąd idea wprowadzenia naprężenia równoważnego σ^* , odpowiadającego powstaniu uszkodzenia, jako kombinacji liniowej wielkości σ_m i $\bar{\sigma}$

$$(2.49) \quad \sigma^* = \langle 3\sigma_m + (1-C)\bar{\sigma} \rangle.$$

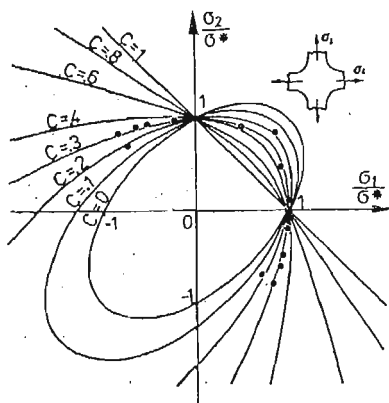
C oznacza współczynnik wrażliwości na tworzenie pustek lub szczelin, który należy zidentyfikować dla każdego materiału. Do rozważań bierzemy jedynie część dodatnią tzn. $\langle x \rangle = x$, jeśli $x > 0$; $\langle x \rangle = 0$ jeśli $x \leq 0$, aby przynajmniej w przybliżeniu spełnić warunki zamykania się mikroszczelin. I wreszcie σ^* dobieramy w ten sposób aby wielkość ta była identyczna z jednowymiarowym naprężeniem przy rozciąganiu. Przedstawione wyrażenie na naprężenie równoważne jest przypadkiem szczególnym, a zarazem znacznie prostszym, wyrażenia zaproponowanego pierwotnie przez BURZYŃSKIEGO [24] w 1928 roku. HAYHURST [25, 26] podjął ten problem na nowo, ale w innej formie.

Na rys. 5 przedstawiono identyfikację współczynnika C ($C \cong 0,25$) na podstawie wyników próby zniszczenia w zakresie pełzania dwuosiowego, zgodnie z rezultatami pracy [25]. Każdy punkt reprezentuje wartości naprężeń σ_1 i σ_2 w momencie zniszczenia, odniesionych do naprężenia równoważnego σ^* .

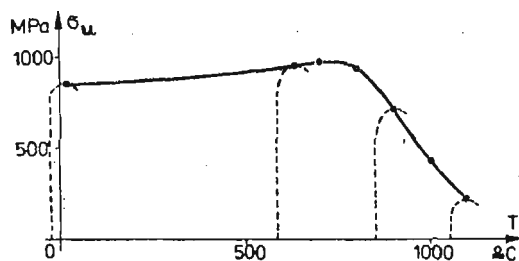
2.4.3. Wpływ temperatury. Bardzo liczne wyniki badań doświadczalnych nad zniszczeniem przy pełzaniu i zmęczeniu pokazują, że efekt temperaturowy można opisać z dobrą dokładnością, wprowadzając pojęcie naprężenia zredukowanego przy pomocy ilorazu [11, 27]

$$(2.50) \quad \frac{\sigma^*}{\sigma_u(T)}$$

We wzorze (2.50) wielkość $\sigma_u(T)$ oznacza naprężenie końcowe, w zakresie zniszczenia statycznego, w zależności od temperatury. Chodzi tutaj o rezultat empiryczny zasługujący na głębsze zbadanie od strony termodynamicznej. Przykład funkcji $\sigma_u(T)$ podano na rys. 6.



Rys. 5. Próba na zniszczenie przy pełzaniu dla stanu dwuosiowego. Stopy ogniotrwałe.



Rys. 6. Ewolucja naprężenia końcowego jako funkcji temperatury. Stop ogniotrwały IN 100.

2.4.4. **Przypadki szczególne.** Uwzględniając koncepcje naprężenia równoważnego i zredukowanego, ogólne równanie ewolucji parametru uszkodzenia sprowadza się do postaci

$$(2.51) \quad \dot{D} = \lambda_D f\left(\frac{\sigma^*}{\sigma_u(T)}, D\right).$$

Wychodząc z tego związku można otrzymać wiele różnych modeli szczegółowych, z których każdy posiada ograniczony zakres stosowalności [28]. Dla przykładu rozpatrzmy dwa modele pełzania i zmęczenia.

Pierwszy z nich to model uszkodzenia w zakresie pełzania, wyprowadzony z modelu KACZANOWA, uwzględniający nieliniową kumulację efektów [29]

$$(2.52) \quad \dot{D}_c = \left[\frac{\sigma^*(C)}{a(1-D)\sigma_u(T)} \right]^r (1-D)^{r-k(\sigma^*)}$$

Model taki scharakteryzowany jest przez pięć parametrów materiałowych: a , σ_u , r , k i C . Można je określić doświadczalnie; przeprowadzając mianowicie próby pełzania aż do zniszczenia, jak o tym wspomniano w podrozdziale 2.3.2. Ponadto należy przeprowadzić

kilka doświadczeń dla przypadku dwuwymiarowego, celem wyznaczenia współczynnika C , por. rys. 5.

Drugi to model opisujący stan uszkodzenia spowodowanego zmęczeniem; również w tym przypadku uwzględniona jest nieliniowość kumulacji efektów, bowiem mamy [30]

$$(2.53) \quad \frac{\delta D_f}{\delta N} = [1 - (1 - D)^{\beta+1}]^\alpha \left[\frac{\Delta \sigma^*}{(1 - D) \sigma_u M(\hat{\sigma}^*)} \right]^\beta.$$

W zależności (2.53) $\frac{\delta D_f}{\delta N}$ jest przyrostem zniszczenia na cykl obciążenia; zaś $\Delta \sigma^*$ i $\hat{\sigma}^*$ oznaczają odpowiednio amplitudę i wartość średnią naprężenia σ^* — również dla cyklu.

Cztery charakterystyczne parametry materiałowe: β , $\alpha \left(\frac{\sigma^*}{\sigma_u} \right)$, $M(\hat{\sigma}^*)$, $\sigma_u(T)$ (oraz współczynnik C) określa się korzystając z próby zmęczeniowej na rozciąganie — ściskanie przy stałej amplitudzie naprężeń, przy przeprowadzeniu pomiaru uszkodzenia.

W przypadku konstrukcji znajdujących się w podwyższonych temperaturach istotną rolę odgrywa wzajemne oddziaływanie pomiędzy zmęczeniem a pełzaniem. Z konstrukcjami tego typu mamy do czynienia w inżynierii reaktorowej, chemicznej oraz w przypadku turbin. Kombinacja obydwu przedstawionych poprzednio modeli szczegółowych pozwala opisać proces uszkodzenia wywołany pełzaniem i zmęczeniem jednocześnie.

Niech więc dla jednego cyklu o okresie Δt zachodzi zależność

$$(2.54) \quad \frac{\delta D}{\delta N} = \int_{\Delta t} \dot{D}_c dt + \frac{\delta D_f}{\delta N}.$$

Równanie (2.54) rozwiązuje się metodą krok po kroku, przy następującym warunku początkowym: $N = 0 \rightarrow D = D_0$ (uszkodzenie początkowe), albo $D = 0$ aż do warunku końcowego: $D = D_c \cong 1 \rightarrow N = N_R$ (zapoczątkowanie szczeliny makroskopowej w rozpatrywanym punkcie).

Zastosowanie tego rodzaju obliczeń w celu przewidywania daje wyniki o współczynniku dokładności ± 2 .

3. Wzrost szczelin

Interesować nas teraz będzie rozwój powstałej szczeliny makroskopowej. Możliwe są dwa podejścia:

- a). Podejście lokalne, oparte na mechanice procesu uszkodzenia — takiej, jaką przedstawiono w rozdziale drugim. W tym przypadku należy obliczyć w każdym punkcie parametr uszkodzenia $D(M)$, przy istnieniu szczeliny makroskopowej, która staje się zbiorem punktów M_c tzn. punktów o krytycznej wartości parametru uszkodzenia, równej D_c . Możemy więc napisać

$$(3.1) \quad D(M_c) = D_c \rightarrow M_c \in \text{szczeliny}.$$

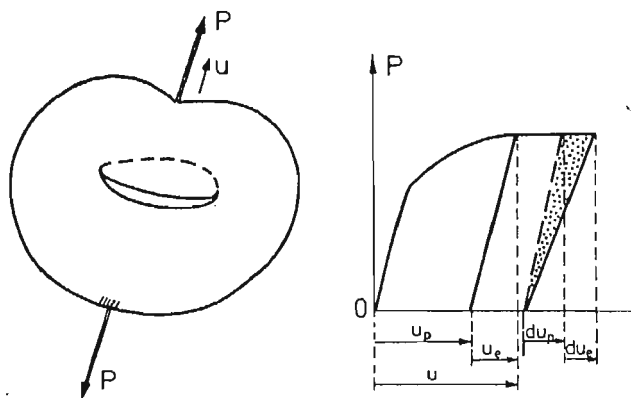
Nasza praca zawiera formalizm właśnie takiej metody. Jednakże realizacja tej metody napotyka na problemy numeryczne, które stanowiąc będą dziedzinę badania przez kilka lat!

b). Inne podejście, określane jako globalne, polega na uogólnieniu pojęć liniowej mechaniki pęknięcia na przypadek nieliniowej lepkoplastyczności. Jak wiadomo, liniową mechanikę pęknięcia stosowano z powodzeniem w badaniu zachowania się szczelin w ośrodkach sprężystych. Właśnie takie podejście przedstawimy obecnie, ale ograniczymy się do obciążeń „prostych” w sensie plastyczności.

3.1. Sformułowanie termodynamiczne. 3.1.1. Zmienne termodynamiczne. Rozpatrzmy ciało trójwymiarowe, sprężyste — lepkoplastyczne w przypadku izotermicznym. Załóżmy, że w ciele istnieje szczelina, której ewolucja zależy tylko od jednego parametru, a mianowicie od powierzchni szczeliny A . Na ciało działa obciążenie jednoparametrowe o parametrze P , zgodne z geometrią szczeliny; np.: może to być szczelina wywołana obciążeniem P . Niech u oznacza przemieszczenie stowarzyszone z P . Zakładamy, że u można przedstawić w postaci sumy przemieszczeń sprężystych u_e i przemieszczeń plastycznych u_p , czyli mamy, por. rys. 7.

$$(3.2) \quad u = u_e + u_p$$

Dla rozpatrywanego ciała można skonstruować termodynamikę, zupełnie podobną do tej jaką dla elementu objętości przedstawiono w podrozdziale 2.2 [31, 32].



Rys. 7. Mechanizm wzrostu szczeliny.

Zmienne stanu termodynamicznego to zmienne obserwowalne: przemieszczenie sprężyste u_e i temperatura T oraz parametry wewnętrzne: powierzchnia A szczeliny i uogólniony parametr wzmocnienia α_p . Zmiennymi stowarzyszonymi są odpowiednio obciążenie P , określona dla całego ciała entropia s , zmienna G oraz dualna zmienna wzmocnienia π . Okazuje się, że G jest prędkością uwalniania energii w sensie GRIFFITH'a. Tablica 2.

3.1.2. Potencjał termodynamiczny. Jako potencjał termodynamiczny można wziąć energię swobodną, tym razem określoną dla całego ciała

$$\psi(u_e, T, A, \alpha_p).$$

Tym samym zmienną G określa zależność

$$(3.3) \quad G = - \frac{\partial \psi}{\partial A}.$$

Tablica 2. Tablica zmiennych termodynamicznych

Zmienne stanu		Zmienne stowarzyszone
Obserwowalne	Wewnętrzne	
u_e		P
T		s
	A	G
	α_p	π_p

Wykażemy, że wielkość G jest równa połowie zmiany energii sprężystej W_e wywołanej przyrostem szczeliny, przy stałym obciążeniu i stałej temperaturze.

Założenie o obciążeniu jednoparametrowym pozwala dokonać rozsprzężenia efektów sprężystych i lepkoplastycznych w wyrażeniu na energię swobodną, czyli mamy

$$(3.4) \quad \psi = \psi_e(u_e, T, A) + \psi_p(\alpha_p, T)$$

Rozpatrując przypadek sprężystości liniowej można wprowadzić sztywność R ciała przy pomocy wzoru

$$(3.5) \quad P = Ru_e$$

i przyjąć następujące wyrażenie za energię swobodną ψ_e

$$(3.6) \quad \psi_e = \frac{1}{2} R(A, T) u_e^2.$$

Wnioskujemy stąd, że

$$(3.7) \quad G = -\frac{\partial \psi}{\partial A} = -\frac{1}{2} u_e^2 \frac{dR}{dA},$$

czyli

$$(3.8) \quad dR = -P \frac{du_e}{u_e^2}, \quad \text{jeśli } P = \text{const.}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$(3.9) \quad G = \frac{1}{2} P \frac{du_e}{dA} = \frac{1}{2} \frac{dW_e}{dA} \Big|_{P, T = \text{const.}}$$

Rezultat ten, dobrze znany w liniowej mechanice pęknięcia pokazuje, że wielkość G , wprowadzona jako zmienna stowarzyszona z powierzchnią szczeliny, jest po prostu prędkością uwalniania energii sprężystej. W ten sposób pojęcie to zostało rozszerzone na przypadek sprężysto — lepkoplastyczności [15].

3.1.3. Potencjał dyssypacji. Nierówność Clausiusa-Duhema, w której ψ wyrażono przez zmienne stanu, przyjmuje postać

$$(3.10) \quad P\dot{u}_p - G\dot{A} - \dot{\alpha}_p \pi \geq 0.$$

W nierówności (3.10) wyrażenie $G\dot{A}$ oznacza energię dyssypowaną w procesie pęknięcia.

Założmy ponadto, że istnieje potencjał dyssypacji φ

$$\varphi(P, G, \pi; u_e, T, A, \alpha_p),$$

tym razem określony dla całego spękanego ciała.

Z potencjału φ otrzymujemy stowarzyszone prawo ewolucji szczeliny

$$(3.11) \quad \dot{A} = \lambda_f \frac{\partial \varphi}{\partial G}.$$

gdzie λ_f jest mnożnikiem skalarnym.

Przedstawione proste wywody opierają się na istotnym założeniu o obciążeniu jedno-parametrowym, z którego wynika, że wzrost szczeliny zależy również tylko od jednego parametru. Rozszerzenie takiego formalizmu na przypadek obciążeń złożonych, których ewolucja zależy od więcej niż jednego parametru, pozostaje problemem otwartym. Chociaż zaproponowano już kilka kryteriów postaciowych [15, 33, 34], to jednak pozostaje do rozwiązania problem zakresu ważności tych kryteriów.

3.2. Modelowanie i Identyfikacja. Rozwój szczelin, spowodowany pełzaniem i zmęczeniem, w metalach poddanych podwyższonym temperaturom, gdzie lepkoplastyczność odgrywa istotną rolę, jest jeszcze dziedziną mało zbadaną, bowiem trudną i to zarówno z punktu widzenia teoretycznego jak doświadczalnego.

Można wybrać taką samą metodologię jak w przypadku uszkodzenia, a mianowicie:

— rozsprzężenie efektów lepkoplastycznych i pęknięcia, czyli

$$(3.12) \quad \varphi = \varphi_{vp}(P, \pi; u_e, T, A, \alpha_p) + \varphi_f(G; u_e, T, A, \alpha_p),$$

— eliminację zmiennych, które mają znikomy wpływ na pęknięcie, czyli

$$(3.13) \quad \dot{A} = \frac{\partial \varphi_f(G, T)}{\partial G} = \lambda_f g(G, T).$$

Następujący przykład pozwala lepiej utrwalić podstawowe idee:

— Model zmęczenia: równanie PARISA [35], zmodyfikowane w pracy [36] celem uwzględnienia częstotliwości f obciążenia

$$(3.14) \quad \frac{\delta A}{\delta N} = C_f G_M^{\eta_f} f^{-b}.$$

G_M oznacza wartość maksymalną wielkości G , osiąganą podczas cyklu obciążenia. C_f , η_f i b są trzema współczynnikami, które należy zidentyfikować dla każdego materiału i dla każdej temperatury na podstawie badań pęknięcia przy dość wysokich częstotliwościach (5 - 10 Hz); np. na próbkach poddanych ścisłaniu-rozciąganiu.

— Model pełzania, skonstruowany w pracy [36]

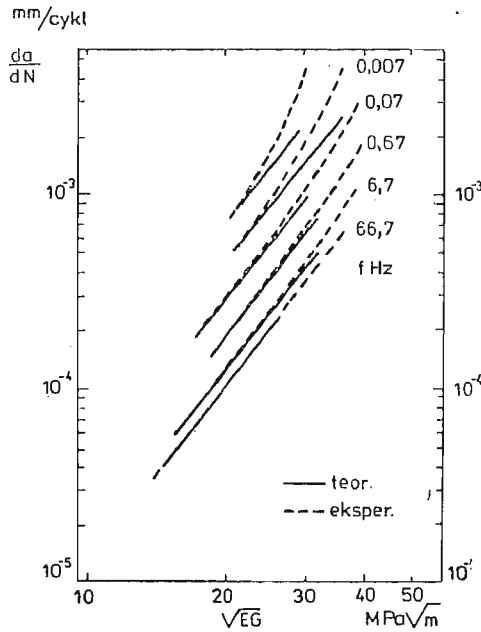
$$(3.15) \quad \dot{A} = C_c \dot{G}^{\eta_c}$$

C_c i η_c oznaczają charakterystyczne dla danego materiału współczynniki, które można otrzymać z próby pęknięcia przy stałym obciążeniu.

Na rys. 8 przedstawiono porównanie wyników teoretycznych z doświadczalnymi, w odniesieniu do przypadku gdy wzajemne oddziaływanie pomiędzy zmęczeniem a peł-

zaniem ma postać wyraźnego wpływu częstotliwości na prędkość wzrostu. W tym przypadku prędkość wzrostu szczeliny oblicza się ze wzoru

$$(3.16) \quad \frac{\delta a}{\delta N} = (\sqrt{EG_M})^{n_f} C'_f f^{-b} + \int_{\text{I okres}} (\sqrt{EG})^{n_c} C'_c dt.$$



Rys. 8. Porównanie badań teoretycznych z doświadczalnymi nad wzrostem szczeliny w przypadku zmęczenia i pełzania. Stop AISI 304, $T = 538^{\circ}\text{C}$.

3.3. Obliczanie wzrostu szczeliny. W zakresie wymienionych hipotez o obciążeniu jednoparametrowym i rozsprzężeniu efektów sprężystych i lepkoplastycznych w wyrażeniu na energię swobodną, zmienną G można wyznaczyć przy pomocy analizy sprężystej, stosując na przykład metodę elementów skończonych. Znając kolejne postacie szczeliny, określonej przez A , wystarczy przeprowadzić obliczenia dotyczące energii sprężystej W_e , odpowiadającej różnym wartościom powierzchni A , przy obciążeniu jednostkowym $P = 1$. Wówczas można wyznaczyć prędkość uwalniania energii zredukowanej G_r , [6] metodą interpolacji funkcji $W_e(A)$

$$(3.17) \quad G_r(A) = \frac{1}{2} \frac{dW_e}{dA} (A, P = 1).$$

Ponieważ G jest proporcjonalne do P^2 , więc jeśli obciążenie jest dane jako funkcja czasu w postaci $P(t)$, to G otrzymujemy z zależności

$$(3.18) \quad G(A, t) = G_r(A) \cdot P^2(t).$$

Funkcję tę wystarczy następnie wprowadzić do równania opisującego wzrost szczeliny;

na przykład do modelu uwzględniającego oddziaływanie pomiędzy zmęczeniem a pełzaniem,

$$(3.19) \quad \frac{\delta A}{\delta N} = C_f G_M^m(A, N) f^{-b} + \int_{\Delta t} C_c G(A, t) dt.$$

Równanie (3.19) można rozwiązać metodą krok po kroku dla każdego cyklu o okresie Δt , przy warunku początkowym

$$N = 0 \rightarrow A = A_0, \quad (\text{na przykład } A_0 = 1 \text{ mm}^2).$$

W ten sposób otrzymujemy opis wzrostu szczeliny $A(N)$ aż do warunku kruchego zniszczenia na skutek niestateczności, zdefiniowanego przez zależność

$G = G_c$ — odporność materiału w rozpatrywanej temperaturze.

A oto zbiorcze przedstawienie „życia” konstrukcji aż do zniszczenia

Materiał	Rozpoczynanie się	Wzrost	Zniszczenie
pierwotny	szczeliny	szczeliny	konstrukcji

$$D = 0 \rightsquigarrow D_c = 1, \quad A = A_0 \rightsquigarrow A(t) \rightsquigarrow A \rightarrow \infty, \quad \text{dla } G = G_c$$

Podziękowanie. Autor, J. Lemaître, znający zaledwie kilka słów w języku polskim, pragnie gorąco podziękować swojemu przyjacielowi, Prof. A. Sawczukowi, za inicjatywę napisania tego artykułu oraz J. J. Teledze za przetłumaczenie z języka francuskiego na język polski.

Literatura cytowana w tekście

1. P. GERMAIN, *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, Masson, Paris 1973.
2. G. DUVAUT, J. L. LIONS, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris 1972.
3. L. M. KACZANOV, Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Techn. Nauk, No 8, (1958), 26 - 31.
4. J. LEMAITRE, J. L. CHABOCHE, *Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement*, Journ. de Méc. Appl., 3, 2, (1978).
5. A. A. GRIFFITH, *The phenomena of rupture and flow in solids*, Phil. Trans. of Roy. Soc. London, A221 (1920), 163 - 197.
6. J. LEMAITRE, *Phenomenological approach of crack growth prediction in structures* (ukaze się w Journal of Fatigue in Engineering Materials and Structures, 1981).
7. D. MCLEAN, A. PINEAU, *Grain boundary sliding as correlating concept for fatigue hold times*, Metal Science, (1978), 313 - 316.
8. E. SANCHEZ-PALENCIA, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer-Verlag, (1980), Berlin.
9. S. MURAKAMI, N. OHNO, *A continuum theory of creep and creep damage*, Euromech Colloquium 111, Marienbad (1978).
10. J. P. CORDEBOIS, F. SIDOROFF, *Damage induced elastic anisotropy*. Euromech Colloquium 115, Villars de Lans, (1979) (w druku).
11. J. L. CHABOCHE, *Description thermodynamique et phénoménologique de la visco-plasticité cyclique avec endommagement*. Thèse, Université Paris VI, (1978).
12. J. P. BOEHLER, A. SAWCZUK, *On yielding of oriented solids*. Acta Mech., 27 (1977), 185 - 204.
13. F. LECKIE, E. T. ONAT, *Tensorial nature of damage measuring internal variables*, IUTAM Symposium on Physical Non-linearities in Structural Analysis, Senlis, France 1980. Editors: J. Hult and J. Lemaître, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg (1981).
14. Z. MRÓZ, *On generalized kinematic hardening rule with memory of maximal prestress*, Journ. de Méc. Appl., 3, 5 (1981).

15. J. LEMAITRE, *Extension de la notion de taux d'énergie de fissuration aux problèmes tridimensionnels et non-linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, **282** (1976), B157.
16. P. PERZYNA, *Thermodynamics of rheological materials with internal changes*, J. de Méc., **10** (1971).
17. Q. S. NGUYEN, *Matériaux élasto-plastiques écrouissables. Lois de comportement et problèmes d'évolution*, Symp. Franco-Polonais, Nice (1974). PWN, Warszawa (1977).
18. J. J. JONAS, B. BAUDELET, *Effect of crack and cavity generation on tensile stability*, Acta Metallurg., **25**, (1977), 43 - 50.
19. J. LEMAITRE, J. P. CORDEBOIS, J. DUFFAILLY, *Sur le couplage endommagement-élasticité*, C. R. Acad. Sci. Paris, **288** (1979), B391.
20. J. LEMAITRE, *Sur la détermination des lois de comportement des matériaux élasto-visco-plastiques*. Thèse, Université Paris XI, (1971).
21. F. K. J. ODQVIST, J. HULT, *Kriechfestigkeit Metallischer Werkstoffe*, Springer-Verlag, Berlin (1962).
22. F. H. NORTON, *Creep of Steel at High Temperatures*, Mc Graw-Hill Comp., (1929).
23. P. RAINE, *Sur l'endommagement de fatigue et les effets bénéfiques de l'écroutissage dans l'acier 316 à température ambiante*. Thèse de 3-ème cycle, Université Paris VI-Enset, (1980).
24. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w Teorii Plastyczności*, PWN, Warszawa (1973).
25. D. R. HAYHURST, *Creep rupture under multiaxial state of stress*, J. Mech. Phys. Sol., **6**, **20** (1972).
26. K. DANG VAN, *Sur la résistance à la fatigue des métaux*, Sc. et Techn. de l'Armement, **3**, **47** (1973).
27. M. CHRZANOWSKI, *Use of the damage concept in describing creep-fatigue interaction under prescribed stress*, Int. J. Mech. Sci., **18** (1976).
28. E. KREMPL, *Workshop on a continuum mechanics approach to damage and life prediction*. National Science Foundation Engineering Division, 1980.
29. J. LEMAITRE, J. L. CHABOCHE, *A non-linear model of creep fatigue damage cumulation and interaction*. Symposium IUTAM „Mechanics of Viscoelastic Media and Bodies”, Göteborg, Springer-Verlag, Berlin (1974).
30. J. L. CHABOCHE, *Une lois différentielle d'edommagement de fatigue avec cumulation non-linéaire*, Rev Franç. de Méc., No 50 - 51, (1974), T.P. ONERA 1975-5.
31. J. LEMAITRE, *Aspect phénoménologique de la rupture par fissuration*. Séminaire de Mécanique, Université Paris VI, (1978).
32. Q. S. NGUYEN, *Normal dissipativity and energy criteria in fracture*; w: „IUTAM Symp. on Variational Methods in the Mechanics of Solids”, edited by Nemat-Nasser, Pergamon Press, Oxford—New York (1980).
33. G. SIF, *Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems*, Int. Fracture. T.R. Lehigh University, (1972).
34. R. LABOURDETTE, J. PELLAS, *A new approach to the problem of three-dimensional crack growth*, Int. J. Fract., **14**, (1978).
35. J. MASOUNAVE, J. P. BAILON, J. J. DICKSON, *Les lois de fissuration par fatigue*; w: „La Fatigue des Matériaux et des Structures”, C. Bathias, J. P. Bailon, E. D. Maloine (redaktorzy), (1980).
36. J. Y. GUINEMER, *Etude phénoménologique de la propagation des fissure de fatigue dans les métaux à chaud*, Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI- Enset, (1980).

Резюме

РАЗРУШЕНИЕ ПРИ УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Расчеты прогноста сооружений на разрушение в общем проводится в двух этапах: порождение щелей и их распространение.

В первой части работы рассматривается теоретическая задача механики разрушения основанной на идеи эффективных напряжений. При помощи термодинамики необратимых процессов вводится непрерывный параметр разрушения приходя к эволюционным уравнениям и к сопряжению деформации с разрушением. Это сопряжение используется до посредственных измерений разрушения при ползучести и в последствии способствует идентифицированию модели эволюции.

Во второй части предлагается обобщения понятия скорости освобождения энергии, известного с линейной механики разрушения, на нелинейные задачи вязкопластичности. Также и в этом случае термодинамические исследования ведут к модели описующей возраст щели за счет усталости и разрушения с включением их взаимодействия.

Summary

FRACTURE IN CREEP CONDITIONS

Determination of structure resistance to fracture generally takes place in two stages: initiation of cracks and their propagation. In the first part of the paper we develop the mechanical theory of fracture, based upon the notion of effective stress. Using the thermodynamics of irreversible processes, a continuous variable of fracture-deformation coupling. This coupling enables to develop indirect measurements of creep and fatigue fracture, and hence to identify the models of evolution.

In the second part we present a generalization of the notion of the rate of energy release, well-known in the linear fracture mechanics, to problems of nonlinear viscoplasticity. Also in this case thermodynamical considerations lead to models of a crack growth due to fatigue and fracture, the interaction being taken into account.

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 października 1981 roku.

O ZAGADNIENIU ODWROTNYM DLA RÓWNIANIA FALOWEGO

KRZYSZTOF GRYSA (POZNAŃ)

*Institut Mechaniki Technicznej
Politechniki Poznańskiej*

Wstęp

Równanie falowe jest w literaturze naukowej chyba najbardziej znanym równaniem. Rozwiązanie tego równania w przypadku jednowymiarowym, gdy $x \in (a, b)$, gdzie a i b są liczbami skończonymi, bądź są równe nieskończoności, są powszechnie znane i opisane (por. [1, 2, 3] i in.). Mało natomiast spotyka się w literaturze rozwiązań tzw. zagadnień odwrotnych dla równania falowego.

Warto tu nadmienić, że samo określenie „zagadnienie odwrotne” jest dosyć niejednoznaczne. I tak np. szkoła radziecka rozumie pod tym hasłem zagadnienia wyznaczania nieznanymi, stałymi lub zmiennymi współczynników równań różniczkowych, [4, 11], bądź funkcji źródła [21, 5] przy znanym rozwiązaniu tych równań, bądź też problem wyznaczania rozwiązania zagadnienia dynamicznego dla $t < t_0$ przy znanym rozwiązaniu w chwili $t = t_0$, [6]. Dla odmiany szkoła amerykańska używa tego określenia w przypadku zagadnień dynamicznych, w których na podstawie znajomości rozwiązania równania różniczkowego jako funkcji czasu w pewnych punktach obszaru określoności tego rozwiązania, poszukuje się warunków brzegowych, które powodują taką właśnie zmienność w czasie rozwiązania w tych punktach (por. [12, 13, 14, 15] i in.). Można zatem z grubsza podzielić zagadnienia odwrotne na zagadnienia identyfikacji funkcji źródła, zagadnienia identyfikacji współczynników, zagadnienia odtwarzania historii procesu oraz zagadnienia identyfikacji obciążeń brzegu obszaru. Zwykle zagadnienia brzegowo-początkowe nazywane są — w odróżnieniu od wspomnianych wyżej — zagadnieniami prostymi lub bezpośrednio.

Rozważania na temat zagadnień odwrotnych dla równania falowego spotyka się w literaturze radzieckiej, (np. [7, 8, 21]), są to jednakże głównie zagadnienia identyfikacji współczynników lub funkcji źródła bądź zagadnienia odtwarzania historii procesu. Natomiast brak jest prac traktujących o identyfikacji obciążeń brzegu obszaru, w którym rozważa się zagadnienie propagacji fal. O takim właśnie zagadnieniu traktuje niniejsza praca.

Problem identyfikacji dynamicznych obciążeń brzegu sprowadza się w niniejszej pracy do zagadnienia rozwiązania równań całkowych pierwszego rodzaju, typu splotowego, [9]. Zagadnienia tego typu należą do tzw. zagadnień źle postawionych, [10]. W pracy pokazany jest sposób rozwiązania tego typu zagadnienia w przypadku równania falowego.

Podano również ograniczenia, których spełnienie warunkuje otrzymanie rozwiązania stabilnego w sensie TICHONOWA, [10].

1. Sformułowanie problemu

Rozważmy jednowymiarowe zagadnienie propagacji fal w ośrodku sprężystym. Równanie rozchodzenia się fali ma w tym wypadku analogiczną postać jak np. równanie struny, czy np. równanie rozchodzenia się dźwięku. Jest to mianowicie równanie hiperboliczne. Dynamiczne obciążenie brzegu obszaru oznacza w przypadku ośrodka sprężystego zadanie zmiennych w czasie przemieszczeń czy obciążeń siłowych na brzegu, podczas gdy np. w przypadku struny skończonej będzie to zadane, zmienne w czasie przemieszczenie końców struny.

Rozważany w pracy problem będziemy — dla ustalenia uwagi — utożsamiać z problemem drgań struny ograniczonej. Tym niemniej otrzymane wyniki będą funkcjonowały i dla innych zagadnień fizycznych, o ile tylko zespół równań i warunków opisujących te zagadnienia będzie się pokrywał z zespołem związków podanych niżej.

Niech w stanie niewymuszonym struna pokrywa się z osią Ox . Wychylenie struny będziemy charakteryzowali przesunięciem $u(x, t)$ punktu x w chwili t , prostopadłym do osi Ox . Przyjmiemy, że napięcie p struny jest stałe, podobnie jak i jej gęstość liniowa ρ . Niech $f_1(x, t)$ oznacza rzut na oś Ou siły działającej na jednostkę długości struny. Wprowadzając współrzędne bezwymiarowe $\xi = x/l$, gdzie l jest długością struny, oraz $\tau = t\sqrt{p}/(l\sqrt{\rho})$, możemy opisać drgania struny równaniem

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) u(\xi, \tau) = f(\xi, \tau), \quad (1.1)$$

gdzie $f(\xi, \tau) = f_1(\xi, \tau)l^2/p$. O funkcji $f(\xi, \tau)$ zakładamy, iż jest funkcją lokalnie sumowalną [3] ze względu na obie zmienne. Przyjmujemy, że w chwili początkowej przemieszczenia i prędkości punktów struny są znanymi funkcjami zmiennej ξ . Ponadto zakładamy, że zadane są przemieszczenia końców struny jako funkcje czasu. Prowadzi to do warunków

$$\begin{aligned} u(\xi, 0) &= p_0(\xi), \\ \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} &= p_1(\xi), \end{aligned} \quad (1.2)$$

gdzie $p_i(\xi) \in C(0, 1)$, $i = 0, 1$, oraz

$$\begin{aligned} u(0, \tau) &= u_d(\tau), \\ u(1, \tau) &= u_g(\tau). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Równanie (1.1) z warunkami (1.2) i (1.3) stanowi dla rozważanej struny zagadnienie proste (brzegowo-początkowe). Rozwiązanie tego zagadnienia w transformatach Laplace'a ma postać

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi, s) &= \bar{u}_d(s) \frac{\sinh[s(1-\xi)]}{\sinh s} + \bar{u}_g(s) \frac{\sinh(s\xi)}{\sinh s} - \\ &- \frac{1}{s} \left\{ \frac{\sinh(s\xi)}{\sinh s} \int_0^1 g_1(\xi, s) \sinh[s(1-\xi)] d\xi - \int_0^\xi g_1(\xi, s) \sinh[s(\xi-x)] dx \right\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Tutaj nadkreślenie oznacza transformatę Laplace'a funkcji, s jest parametrem transformacji, oraz

$$g_1(\xi, s) = \overline{f}(\xi, s) - sp_0(\xi) - p_1(\xi). \quad (1.5)$$

Jeśli przedłużymy funkcje $p_0(\xi)$, $p_1(\xi)$ i $f(\xi, \tau)$ na całą prostą $O\xi$ w ten sposób, że [16]

$$\begin{aligned} p_i(\xi) &= -p_i(-\xi), & p_i(\xi+2) &= p_i(\xi), & i &= 0, 1, \\ f(\xi, \tau) &= -f(-\xi, \tau), & f(\xi+2, \tau) &= f(\xi, \tau), \end{aligned} \quad (1.6)$$

to możemy wówczas przepisać rozwiązanie (1.4) w postaci

$$\bar{u}(\xi, s) = \bar{u}_d(s) \frac{\sinh[s(1-\xi)]}{\sinh s} + \bar{u}_g(s) \frac{\sinh(s\xi)}{\sinh s} + \bar{g}(\xi, s), \quad (1.7)$$

gdzie funkcja $g(\xi, \tau)$, dana wzorem

$$g(\xi, \tau) = \frac{1}{2} [p_0(\xi+\tau) + p_0(\xi-\tau)] + \frac{1}{2} \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} p_1(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_{\xi-(\tau-t)}^{\xi+(\tau-t)} f(x, t) dx dt, \quad (1.8)$$

jest znanym rozwiązaniem d'Alemberta zagadnienia drgań struny ograniczonej o końcach unieruchomionych.

Założmy teraz, że znana jest zmienność funkcji $u(\xi, \tau)$ w punktach ξ_1 i ξ_2 , gdzie $0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 < 1$. Funkcje

$$u_1(\tau) \equiv u(\xi_1, \tau) \quad \text{oraz} \quad u_2(\tau) \equiv u(\xi_2, \tau), \quad (1.9)$$

nazywać będziemy wewnętrznymi odpowiedziami struny (w skrócie WO) na działanie sił $f(\xi, \tau)$, warunków na brzegach, oraz na warunki początkowe. Funkcje te muszą spełniać warunki zgodności

$$u_1(0) = p_0(\xi_1), \quad u_2(0) = p_0(\xi_2). \quad (1.10)$$

Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie funkcji $u_d(\tau)$ i $u_g(\tau)$, opisujących przemieszczenia końców struny, przy znanych WO, oraz przy znanych funkcjach $f(\xi, \tau)$, $p_0(\xi)$ i $p_1(\xi)$.

Zwykle stosowane metody rozwiązywania zagadnień identyfikacji warunków brzegowych (dynamicznych obciążeń brzegu) polegały na rozwiązaniu zagadnienia brzegowo-początkowego dla $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, a następnie na ekstrapolacji tak otrzymanego rozwiązania poza ten przedział (por. [12, 13, 17] i in.). Jak widać, przy takim podejściu WO traktowane są wstępnie jako warunki brzegowe. W pracy niniejszej stosuje się podejście odmienne od wyżej wspomnianego. Punktem wyjścia jest tu związek (1.7).

2. Układ równań typu splotowego

Jeśli znane są funkcje opisujące WO, $u_1(\tau)$ i $u_2(\tau)$, i jeśli są to funkcje typu wykładniczego, [18], to można — na podstawie równania (1.7) — napisać następujący układ równań na transformaty $\bar{u}_d(s)$ i $\bar{u}_g(s)$:

$$\bar{u}_j(s) = u_d(s) \frac{\sinh[s(1-\xi_j)]}{\sinh s} + \bar{u}_g(s) \frac{\sinh(s\xi_j)}{\sinh s} + \bar{g}(\xi_j, s), \quad j = 1, 2. \quad (2.1)$$

Po odwróceniu transformat występujących po obu stronach równań (2.1) otrzymujemy

$$u_j(\tau) = \frac{d}{d\tau} [u_d(\tau) * K_1(\xi_j, \tau) + u_\rho(\tau) * K_2(\xi_j, \tau)] + g(\xi_j, \tau), \quad j = 1, 2, \quad (2.2)$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_1(\xi_j, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \eta(\tau - \xi_j - 2n) - \sum_{n=1}^{\infty} \eta(\tau + \xi_j - 2n), \\ K_2(\xi_j, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \eta(\tau + \xi_j - 2n - 1) - \sum_{n=1}^{\infty} \eta(\tau - \xi_j - 2n + 1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Tu $*$ oznacza mnożenie splotowe, [2, 18], zaś $\eta(x)$ jest funkcją Heaviside'a. Sposób przejścia od równań (2.1) do (2.2) powiązany jest ze specjalną techniką sumowania szeregów trygonometrycznych, którą krótko przedstawiono w Dodatku.

Równania (2.2) stanowią układ równań całkowych typu splotowego, [10]. Ponieważ wyznaczenie poszukiwanych funkcji, $u_d(\tau)$ i $u_\rho(\tau)$, na podstawie tych równań jest bardzo kłopotliwe, w niniejszej pracy wyznacza się je na podstawie równań (2.1). Jak zatem widać, zamiast równań całkowych rozpatruje się układ równań w postaci przetransformowanej. Natomiast na podstawie związku (2.2), zapisanego dla dowolnego $\xi \in [0, 1]$, łatwo jest wyznaczyć rozwiązanie zagadnienia brzegowo-początkowego. Ma ono postać

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} [u_d(\tau - 2n - \xi)_+ + u_\rho(\tau - 2n - 1 + \xi)_+] - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} [u_d(\tau - 2n + \xi)_+ + u_\rho(\tau - 2n + 1 - \xi)_+] + g(\xi, \tau), \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdzie [1]

$$u(x)_+ = \begin{cases} u(x) & \text{gdy } x \geq 0, \\ 0 & \text{gdy } x < 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

3. Warunki ograniczające dla funkcji opisujących wewnętrzne odpowiedzi

Traktując układ równań (2.1) w sposób formalny, jak układ dwóch równań algebraicznych z niewiadomymi $\bar{u}_d(s)$ i $\bar{u}_\rho(s)$, można łatwo je wyznaczyć. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{u}_d(s) &= \frac{\sinh(s\xi_2)}{\sinh(sL)} [\bar{u}_1(s) - \bar{g}(\xi_1, s)] - \frac{\sinh(s\xi_1)}{\sinh(sL)} [\bar{u}_2(s) - \bar{g}(\xi_2, s)], \\ \bar{u}_\rho(s) &= \frac{\sinh[s(1 - \xi_1)]}{\sinh(sL)} [\bar{u}_2(s) - \bar{g}(\xi_2, s)] - \frac{\sinh[s(1 - \xi_2)]}{\sinh(sL)} [\bar{u}_1(s) - \bar{g}(\xi_1, s)], \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdzie $L = \xi_2 - \xi_1$.

Widoczne jest, iż nie każda funkcja $u_j(\tau)$ może opisywać WO. Wynika to z faktu, iż ułamki, występujące po prawej stronie wzorów (3.1), są transformatami Laplace'a dystrybucji singularnych, [3]. W ogólności, aby formalne rozwiązanie (3.1) było odwracalne i aby po odwróceniu miało sens fizyczny, muszą być spełnione następujące warunki:

- 1° WO muszą mieć skończoną granicę dla $\tau \rightarrow 0_+$ oraz dla $\tau \rightarrow \infty$
 2° WO muszą być ograniczone dla $\tau \in [0, \infty)$
 3° Transformaty $\bar{u}_d(s)$ i $\bar{u}_g(s)$ muszą być odwracalne w zbiorze funkcji rzeczywistych. Oznacza to, że jeśli pewna funkcja $F(\tau)$ ma opisywać WO, to

$$|\lim_{\tau \rightarrow 0_+} F(\tau)| = |\lim_{s \rightarrow \infty} s\bar{F}(s)| < +\infty, \quad (3.2)$$

$$|\lim_{\tau \rightarrow \infty} F(\tau)| = |\lim_{s \rightarrow 0} s\bar{F}(s)| < +\infty, \quad (3.3)$$

przy czym zakłada się, że te granice istnieją, oraz

$$\bigvee_{M > 0} \bigwedge_{\tau \in [0, \infty)} |F(\tau)| < M, \quad M \text{ — stała dodatnia.} \quad (3.4)$$

Ponadto, jeśli $u(\tau)$ jest funkcją opisującą przemieszczenie któregoś końca struny, to z warunku 3° wynika, że musi być spełniony warunek (por. [18], str. 102 i 117)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \bar{u}(s) = 0 \quad \text{dla} \quad \text{Res} > x_z + \delta, \quad \delta > 0, \quad (3.5)$$

gdzie Res oznacza część rzeczywistą liczby zespolonej s , zaś x_z jest odcięta zbieżności funkcji $u(\tau)$. W omawianym przypadku z (3.4) wynika, że $x_z = 0$.

Zamiast warunku (3.5) wykorzystamy warunek silniejszy, związany z odwracaniem transformat metodą residuów. Warunkiem koniecznym odwracalności transformaty metodą residuów jest spełnienie przez nią założeń lematu Jordana, [18]. Wynika stąd, że aby $\bar{F}(s)$ była transformata, odwracalną metodą residuów, musi istnieć taki ciąg k_n liczb dodatnich, że

$$|\bar{F}(s)|_{|s|=R_n} \leq k_n, \quad (3.6)$$

gdzie $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = +\infty$, a ponadto funkcja $\bar{F}(s)$ musi być ciągła dla $|s| = R_n$, $\text{Res} > x_z$ (w naszym przypadku $\text{Res} > 0$).

Nierówność (3.6) można zapisać w postaci równoważnej, a mianowicie

$$|\bar{F}(s)| \leq \frac{K}{|s|^\gamma} \quad \text{dla dużych } |s|, \quad (3.7)$$

gdzie $K, \gamma > 0$, γ — dowolnie mała liczba dodatnia.

W rozważanym przypadku żądanie spełnienia dla dużych $|s|$ nierówności (3.7) przez poszczególne składniki prawych stron wzorów (3.1) prowadzi do następujących ograniczeń na $\bar{u}_j(s)$ oraz $\bar{g}(\xi_j, s)$, $j = 1, 2$:

$$|\bar{u}_j(s) - \bar{g}(\xi_j, s)| \leq \frac{K_j}{|s|^\gamma} |e^{-sD_j}|, \quad j = 1, 2, \quad (3.8)$$

gdzie K_1, K_2, γ — stałe dodatnie, $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$, oraz

$$D_1 = \max(\xi_1, 1 + \xi_1 - 2\xi_2), \quad D_2 = \max(1 - \xi_2, 2\xi_1 - \xi_2). \quad (3.9)$$

W szczególnym przypadku, gdy $\xi_2 > 0.5$ oraz $\xi_1 < 0.5$, otrzymujemy

$$D_1 = \xi_1, \quad D_2 = 1 - \xi_2. \quad (3.10)$$

Nierówności (3.8) będą spełnione, jeśli dla $\tau \in [0, D_j]$, $j = 1, 2$, będą miały miejsce następujące związki:

$$u_j(\tau) - \frac{1}{2} \left\{ p_0(\xi_j + \tau) + p_0(\xi_j - \tau) + \int_{\xi_j - \tau}^{\xi_j + \tau} p_1(x) dx - \int_0^{\tau} \int_{\xi_j - (\tau - t)}^{\xi_j + (\tau - t)} f(x, t) dx dt \right\} = 0. \quad (3.11)$$

Zwróćmy uwagę na fakt, iż dla $\tau = 0$ powyższe równania przechodzą w związki zgodności (1.10).

Równania (3.11) określają związki pomiędzy WO a funkcjami $p_0(\xi)$, $p_1(\xi)$ i $f(\xi, \tau)$ w czasie od chwili początkowej do chwili, w której do punktu, w którym rejestrujemy WO, dotrze zaburzenie, wywołane przez warunki na brzegach. Jest oczywiste, że możliwość identyfikacji funkcji $u_j(\tau)$ i $u_d(\tau)$ na podstawie WO pojawia się dopiero po czasie D_j , jako że dopiero wtedy ujawni się wpływ warunków brzegowych na WO. WO będą zatem opisane funkcjami czasu o przesuniętym argumente; również w przypadku funkcji g należy rozważać jej wartości tylko dla $\tau > D_j$.

Wobec powyższego transformaty $\bar{u}_j(s)$ oraz $\bar{g}(\xi_j, s)$, $j = 1, 2$, dla których mają sens związki (3.1), muszą mieć taką postać, aby zawartości nawiasów kwadratowych we wspomnianych związkach miały postać

$$\bar{u}_j(s) - \bar{g}(\xi_j, s) = G(s)e^{-sP}, \quad P \geq D_j, \quad j = 1, 2. \quad (3.12)$$

Funkcja $G(s)$ musi spełniać warunek

$$|G(s)| \leq K_3 |s|^{-\gamma} \quad \text{dla} \quad \text{Re } s > x_0 > 0, \quad (3.13)$$

gdzie $K_3 > 0$, $\gamma > 0$. Jeśli dodatkowo $G(s)$ jest funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie $\text{Re } s > x_0$ (gdzie x_0 jest dobrane tak, aby spełniona była nierówność (3.8)), to jest ona wtedy transformatą Laplace'a dystrybucji typu wykładniczego (por. [2], str. 309). Jest to szeroka klasa dystrybucji, do której należą m.in. wszystkie funkcje transformowalne.

Gdy WO spełniają ograniczenia podane wyżej, wówczas rozwiązanie jednowymiarowego odwrotnego problemu falowego jest stabilne w sensie Tichonowa (por. [10], str. 40).

4. Ścisłe rozwiązanie zagadnienia odwrotnego

Do odwrócenia transformat danych wzorami (3.1) wykorzystamy następujące przedstawienie funkcji $\bar{u}_j(s)$ oraz $\bar{g}_j(\xi_j, s)$:

$$\begin{aligned} \bar{u}_j(s) &= \bar{u}_j(s)e^{-sD_j} + \int_0^{D_j} e^{-s\tau} u_j(\tau) d\tau, \\ \bar{g}(\xi_j, s) &= \bar{g}(\xi_j, s)e^{-sD_j} + \int_0^{D_j} e^{-s\tau} g(\xi_j, \tau) d\tau, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{u}_j(\tau) &= u_j(\tau + D_j)\eta(\tau), \\ g(\xi_j, \tau) &= g(\xi_j, \tau + D_j)\eta(\tau), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Wobec (4.1) zachodzą — na mocy (3.11) — równości

$$\bar{u}_j(s) - \bar{g}(\xi_j, s) = [\bar{u}_j(s) - \bar{g}(\xi_j, s)] e^{-sD_j}, \quad j = 1, 2. \quad (4.3)$$

Oczywiście muszą być także spełnione nierówności

$$|\bar{u}_j(s)| \leq \frac{K_j}{|s^\nu|}, \quad |\bar{g}(\xi_j, s)| \leq \frac{K_j}{|s^\nu|}, \quad j = 1, 2. \quad (4.4)$$

W miejsce równań (3.1) możemy zatem napisać równania

$$\begin{aligned} \bar{u}_d(s) &= \frac{\sinh(s\xi_2)}{\sinh(sL)} e^{-sD_1} [\bar{u}_1(s) - \bar{g}(\xi_1, s)] - \frac{\sinh(s\xi_1)}{\sinh(sL)} e^{-sD_2} [\bar{u}_2(s) - \bar{g}(\xi_2, s)], \\ \bar{u}_g(s) &= \frac{\sinh[s(1-\xi_1)]}{\sinh(sL)} e^{-sD_2} [\bar{u}_2(s) - \bar{g}(\xi_2, s)] - \\ &\quad - \frac{\sinh[s(1-\xi_2)]}{\sinh(sL)} e^{-sD_1} [\bar{u}_1(s) - \bar{g}(\xi_1, s)]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Odwroćenie transformat danych wzorami (4.5) prowadzi do następujących wyników:

$$\begin{aligned} u_d(\tau) &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \sin \frac{\pi n \xi_2}{L} \int_{D_1}^{\tau} \sin \left[\frac{\pi n}{L} (\tau - t) \right] [u_1(t) - \right. \\ &\quad \left. - g(\xi_1, t)] dt - \sin \frac{\pi n \xi_1}{L} \int_{D_2}^{\tau} \sin \left[\frac{\pi n}{L} (\tau - t) \right] [u_2(t) - g(\xi_2, t)] dt \right\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} u_g(\tau) &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \sin \left[\frac{\pi n}{L} (1 - \xi_1) \right] \int_{D_2}^{\tau} \sin \left[\frac{\pi n}{L} (\tau - t) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times [u_2(t) - g(\xi_2, t)] dt - \sin \left[\frac{\pi n}{L} (1 - \xi_2) \right] \int_{D_1}^{\tau} \sin \left[\frac{\pi n}{L} (\tau - t) \right] [u_1(t) - g(\xi_1, t)] dt \right\}. \end{aligned}$$

Prawe strony wzorów (4.6) można przedstawić również w innej postaci, posługując się bądź techniką sumowania szeregów trygonometrycznych, przedstawioną w Dodatku, bądź bezpośrednio odwracając transformaty (4.5) na gruncie teorii dystrybucji, [20]. Wykorzystując wzory zawarte w tablicy B.2 cytowanej monografii otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_d(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} [u_1(\tau + \xi_1 - 2nL)_+ - g(\xi_1, \tau + \xi_1 - 2nL)_+ + \\ &\quad + u_2(\tau - \xi_2 - 2nL)_+ - g(\xi_2, \tau - \xi_2 - 2nL)_+] - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} [u_1(\tau - \xi_1 - 2nL)_+ - g(\xi_1, \tau - \xi_1 - 2nL)_+ + \\ &\quad + u_2(\tau + \xi_2 - 2nL)_+ - g(\xi_2, \tau + \xi_2 - 2nL)_+], \\ u_g(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} [u_1(\tau - 1 + \xi_1 - 2nL)_+ - g(\xi_1, \tau - 1 + \xi_1 - 2nL)_+ + \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
& + u_2(\tau + 1 - \xi_2 - 2nL)_+ - g(\xi_2, \tau + 1 - \xi_2 - 2nL)_+] - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} [u_1(\tau + 1 - \xi_1 - 2nL)_+ - g(\xi_1, \tau + 1 - \xi_1 - 2nL)_+ + \\
& + u_2(\tau - 1 + \xi_2 - 2nL)_+ - g(\xi_2, \tau - 1 + \xi_2 - 2nL)_+].
\end{aligned}$$

Tutaj

$$g(\xi, t)_+ = \begin{cases} g(\xi, t) & \text{gdy } t \geq 0, \\ 0 & \text{gdy } t < 0. \end{cases}$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że sumy, występujące po prawych stronach wzorów (4.7), są w rzeczywistości sumami skończonymi, gdyż dla każdej chwili czasu τ liczba funkcji, których argument jest dodatni, jest skończona. Jest to cecha wspólna rozwiązań (4.7) oraz (3.4). W przypadku szczególnym, gdy $\xi_1 = 0$, otrzymujemy związek

$$u_d(\tau) = u_1(\tau) - g(0, \tau), \quad (4.8)$$

który koresponduje z (2.4), oraz

$$\begin{aligned}
u_g(\tau) = & \sum_{n=0}^{\infty} [u_d(\tau - 1 - 2n\xi_2)_+ + u_2(\tau + 1 - (2n+1)\xi_2)_+ - \\
& - g(\xi_2, \tau + 1 - (2n+1)\xi_2)_+] - \sum_{n=1}^{\infty} [u_d(\tau + 1 - 2n\xi_2)_+ + \\
& + u_2(\tau - 1 - (2n-1)\xi_2)_+ - g(\xi_2, \tau - 1 - (2n-1)\xi_2)_+].
\end{aligned} \quad (4.9)$$

Podobnie upraszczają się związki (4.7), gdy $\xi_2 = 1$, a $\xi_1 \in (0, 1)$.

5. Inne możliwości stawiania problemu odwrotnego dla równania falowego

W miejsce warunków brzegowych (1.3) można sformułować inne warunki. I tak — w przypadku, gdy równanie falowe opisuje falę podłużną, przemieszczającą się w nieskończonej warstwie sprężystej o grubości l od jednego jej brzegu do drugiego, przy czym fala ta wywołana jest zmiennym w czasie obciążeniem jednego, czy też obu brzegów warstwy, to zamiast warunków (1.3) można sformułować warunki

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} &= S_d(\tau), \\
\left. \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} &= S_g(\tau).
\end{aligned} \quad (5.1)$$

Zagadnienie odwrotne oznaczałoby w tym wypadku problem wyznaczenia funkcji $S_d(\tau)$ i $S_g(\tau)$ na podstawie WO, przy czym te ostatnie mogłyby być zadane zarówno wzorami (1.9) jak i innymi. Jeśli w dwóch punktach wewnętrznych warstwy (o której — jak wynika z powyższych uwag — zakłada się, że jest w jednoosiowym jednowymiarowym stanie naprężenia lub odkształcenia) znane będą funkcje opisujące zmianę w czasie odkształceń, wówczas one właśnie mogą stanowić WO. Oczywiście należy powtórzyć rozumowanie z części 3 pracy w celu ustalenia ograniczeń, jakim podlegałyby tego typu WO.

Możliwe jest również wyznaczenie obciążeń dynamicznych brzegu przy pomocy WO, których charakter jest inny niż charakter tych obciążeń dynamicznych. Na przykład można odtwarzać obciążenie brzegu warstwy przy znanych przemieszczeniach w dwóch punktach wewnętrznych, lub przy znanych funkcjach, opisujących np. zmiany w czasie przemieszczenia i prędkości w jednym punkcie warstwy.

Należy podkreślić, iż niezależnie od rodzaju warunków brzegowych otrzymane rozwiązania odwrotnego problemu falowego mają postać zbliżoną do (4.7).

6. Wnioski

Przedstawiona metoda rozwiązywania zagadnień odwrotnych, dotyczących identyfikacji obciążeń brzegu, może być zastosowana bez zmian do rozwiązywania problemów odwrotnych, w których równanie różniczkowe opisujące zmiany badanej wielkości fizycznej jest typu odmiennego niż hiperboliczny. Jednakże w przypadku równań hiperbolicznych otrzymane rozwiązanie ma postać szczególnie przydatną dla celów eksperymentalnych. Jeśli bowiem znany jest zbiór danych dyskretnych, opisujących odpowiedzi wewnętrzne dwóch punktów wewnętrznych, to odtworzenie zmienności w czasie obciążenia brzegu obszaru jest szczególnie proste. Wystarczy na podstawie tych danych zbudować funkcje, opisujące w sposób przybliżony WO, a następnie wykorzystać wzór (4.7), który idealnie nadaje się do obliczeń numerycznych. W przypadku ciągłego zapisu danych pomiarowych, dotyczących wewnętrznych odpowiedzi, (gdy zapis ten odzwierciedla przebieg pewnego pomiaru), identyfikacja obciążeń brzegu może być niemal natychmiastowa, o ile dane te będą bezpośrednio poddawane obróbce numerycznej wg wzoru (4.7). Oczywiście konieczna jest przy tym znajomość warunków początkowych oraz obciążenia $f(\xi, \tau)$; to ostatnie zwykle jest bądź stałe, bądź pomijalnie małe.

Wydaje się, że przedstawione rozwiązanie jednowymiarowego odwrotnego zagadnienia falowego mogłoby być przydatne wszędzie tam, gdzie zachodzi potrzeba określenia dynamicznego obciążenia brzegu obszaru, w którym można dokonać pomiarów wewnętrznej odpowiedzi, podczas gdy niemożliwy jest bezpośredni pomiar poszukiwanej wielkości na brzegu.

Dodatek

Występujące we wzorze (2.1) ułamki są postaci $\sinh(sx)/\sinh s$. Po pomnożeniu i podzieleniu takiego ułamka przez s otrzymuje się wyrażenie $sf(s)$, dla którego można łatwo wyznaczyć retransformatę

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(\bar{f}(s))(\tau) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sinh(sx)}{s \sinh s}\right)(\tau) = \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin[\pi n(\tau+x)] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin[\pi n(\tau-x)]. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Szeregi występujące po prawej stronie wzoru (D.1) mają argumenty funkcji trygono-

metrycznych spoza przedziału $(0, 1)$, przez co niemożliwe jest bezpośrednie wykorzystanie odpowiednich wzorów sumacyjnych, zawartych np. w pracy [19]. Jednakże wykorzystując związek

$$\sin(\pi ny) = (-1)^{nE(y)} \sin[\pi n(y - E(y))], \quad (\text{D.2})$$

gdzie $E(y)$ jest funkcją o wartościach równych części całkowitej argumentu, można sprowadzić argumenty funkcji występujących po prawej stronie wzoru (D.1) do przedziału $(0, 1)$. Dokonując przejścia granicznego z x do 1 we wzorze (5.3) z pracy [19], oraz wykorzystując (D.2) można wyprowadzić następujący związek:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(\pi ny) = -\frac{y}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta(y - 2n - 1), \quad y \in (-1, \infty). \quad (\text{D.3})$$

Podstawienie prawej strony wzoru (D.3) do wzoru (D.1), a następnie wykorzystanie faktu, iż operator s jest transformatą operatora różniczkowego $\partial/\partial\tau$ prowadzi bezpośrednio do wzoru (2.2).

Literatura cytowana w tekście

1. A. N. TICHONOV, A. A. SAMARSKI, *Równania fizyki matematycznej*, PWN Warszawa, 1963.
2. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN Warszawa, 1957.
3. Z. SZMYDT, *Transformacja Fouriera i równania różniczkowe liniowe*, PWN Warszawa, 1972.
4. A. G. TEMKIN, *Obratnyje metody teploпроводности*, Izd. Energia, Moskwa, 1963.
5. M. M. LAVRENTEV, W. G. ROMANOV, W. G. VASILIEV, *Mnogomernyje obratnyje zadači dla differencjalnych uravnenii*, Novosybirsk, Izd. Nauka, 1969.
6. M. I. IMANALIEV, *Metody rešenija nelinejnych obratnych zadač i ich prilozhenia*, Izd. Ilim, Frunze, 1977.
7. M. M. LAVRENTEV, *Ob odnoj obratnoj zadače dla volnovogo uravnenia*, DAN SSSR, 157, 3, (1964).
8. W. G. ROMANOV, *Nekotoryje obratnyje zadači dla uravnenia giperboličeskogo tipa*, Novosybirsk, Izd. Nauka, 1972.
9. F. D. GACHOV, Ju. I. ČERSKIJ, *Uravenia tipa svertki*, Izd. Nauka, Moskwa, 1978.
10. A. N. TICHONOV, W. Ja. ARSENIN, *Metody rešenija nekorrektnych zadač*, Izd. Nauka, Moskwa, 1979.
11. H. Ja. BEZNOŠČENKO, A. I. PRILEPKO, *Obratnyje zadači dla uravnenia paraboličeskogo tipa*. w: *Problemy matematičeskoi fiziki i vyčislitelnoi matematiki*, Izd. Nauka, Moskwa, 1977.
12. E. M. SPARROW, A. HAJI-SHEIKH, T. S. LUNDGREN, *The Inverse Problem In Transient Heat Conduction*, Trans. of the ASME, J. of Applied Mech. 86E, (1966).
13. M. IMBER, *Temperature Extrapolation Mechanism for Two-Dimensional Heat Flow*, AIAA Journal, 12, 8, (1974).
14. R. G. HILLS, G. P. MULHOLLAND, *The Accuracy and Resolving Power of One Dimensional Transient Inverse Heat Conduction Theory as Applied to Discrete and Inaccurate Measurements*, Int. J. Heat Mass Transfer, 22, (1979).
15. J. V. BECK, *Criteria for Comparison of Methods of Solution of the Inverse Heat Conduction Problem*, Nucl. Eng. Design, 53, (1979).
16. W. M. BABICZ, M. B. KAPILEWICZ, S. G. MICHLIN, G. N. NATANSON, G. M. RIEZ, L. N. SŁOBODECKI, M. M. SMIRNOW, *Równania liniowe fizyki matematycznej*, PWN Warszawa, 1970.
17. M. IMBER, *A Temperature Extrapolation Method for Hollow Cylinder*, AIAA Journal, 11, 1, (1973).
18. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT Warszawa, 1972.
19. K. GRYSA, J. JANKOWSKI, *O sumowaniu pewnych szeregów Diniego i trygonometrycznych występujących w zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych*, Mech. Teoret. Stos., 16, 3, (1978).
20. A. H. ZEMANIAN, *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, PWN Warszawa 1969.
21. A. S. BLAGOVEŠČENSKIJ, *Obratnaja zadača dla volnovogo uravnenia s neizvestnym istočnikom*, w: *Problemy matematičeskoi fiziki*, vyp. 4, Izd. LGU, 1970.

Резюме

НЕКОТОРАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В статье представлена одномерная проблема идентификации краевых условий для конечной струны. Преобразование Лапласа решения этой задачи находится на основе решения начально-краевой задачи пропагации волн. Определяются условия для функции допускаемых для изображения так называемых внутренних ответов, а потом определяется и дискутируется точное решение проблемы.

Summary

ON AN INVERSE PROBLEM FOR WAVE EQUATION

The one-dimensional problem of a boundary condition identification for a finite cord is considered. Solution of an initial-boundary value problem of the wave propagation is exploited to obtain transformed form of a formal solution of the problem. The conditions imposed on the admissible functions describing so-called internal responses are settled and then the exact solution of the problem is found and discussed.

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 września 1981 roku.

METODA OZNACZANIA WSPÓLCZYNNIKÓW CHARAKTERYZUJĄCYCH PROCESY OPISANE RÓWNANIEM PARABOLICZNYM

HENRYK KAMIŃSKI (POZNAŃ)

*Institut Mechaniki Technicznej
Politechniki Poznańskiej*

1. Wstęp

Wiele procesów występujących w technice i badaniach naukowych jest opisanych równaniami różniczkowymi drugiego rzędu typu parabolicznego:

$$\operatorname{div}(K \operatorname{grad} u) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (1.1)$$

z warunkiem brzegowym:

$$\vec{n} \cdot \operatorname{grad} u + \alpha(u - u_0) = 0. \quad (1.2)$$

W ogólnym przypadku współczynnik K może być funkcją postaci

$$K = K(P, t), \quad P \in V,$$

a współczynnik α może mieć postać

$$\alpha = \alpha(A, t) \quad A \in V.$$

Tutaj V jest wnętrzem obszaru, w którym przebiega proces, ∂V jest brzegiem tego obszaru, \vec{n} — normalną zewnętrzną do brzegu, u_0 — wielkością, do której odniesione są wartości funkcji u . W dalszej części pracy współczynniki K i α są przyjęte jako stałe. Współczynnik K opisuje przebieg procesu w obszarze ciała, a współczynnik α charakteryzuje zjawiska zachodzące na powierzchni. Znajomość współczynników występujących w opisie matematycznym procesu niezbędna jest do analizy przebiegu procesu. W pracy przedstawiono jedną z możliwych metod wyznaczenia powyższych współczynników. Zazwyczaj stałe takie wyznacza się poprzez pomiar pewnych wielkości na powierzchni próbki lub w jej wnętrzu. Metoda przedstawiona w pracy bazuje na efektach globalnych dających się zmierzyć w otoczeniu próbki, np: ilość ciepła wymienionego z otoczeniem w procesie wymiany ciepła, lub zmiany wagi próbki w przypadku procesu dyfuzji.

Podstawowym narzędziem analizy prowadzonej w pracy jest technika transformat Laplace'a [3] i wynikający z niej rachunek splotowy. Transformatę Laplace'a funkcji $f(t)$ definiuje się następująco:

$$\bar{f}(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (1.3)$$

gdzie s — parametr transformacji.

Z uwagi na wykorzystanie w obliczeniach rachunku splotowego koniecznym jest posiadanie pełnych danych dotyczących przebiegu procesu. Przez pełne dane w tym przypadku rozumie się dane od początku procesu do co najmniej badanej chwili czasu. Do opisu funkcyjnego wyników eksperymentu proponuje się w pracy użycie splajnów [8].

Problem doświadczalnego wyznaczenia stałych charakteryzujących procesy opisane zagadnieniem brzegowym (2.1)÷(2.4) rozważany był wielokrotnie. Najczęściej spotykane metody opierają się na znajomości (z pomiaru) zmienności w czasie wybranej wielkości wewnątrz obszaru. Współczynniki wyznaczone są bądź metodami iteracyjnymi (np. [12], [13]), bądź poprzez skomplikowane obliczenia analityczne (np. [14]). W niektórych pracach badana jest jednoznaczność i istnienie rozwiązań problemu, polegającego na wyznaczeniu stałych przy znanym przebiegu procesu w punkcie wewnętrznym obszaru (np. [4]). W niniejszej pracy, jak wspomniano wyżej, proponuje się metodę wyznaczania stałych, opartą o pewne efekty globalne. Tego typu podejście nie wymaga wprowadzenia do wnętrza próbki czujników pomiarowych, które zawsze zakłócają przebieg procesu.

2. Określenie zmian globalnych zachodzących w ciele

W pracy rozważa się zagadnienie jednowymiarowe. Rozważania prowadzi się jednocześnie dla warstwy, walca i kuli, tzn. że obejmują one trzy podstawowe geometrie. Użykuje się to przy pomocy parametru kształtu β . Równanie różniczkowe (1.1) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1-2\beta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{K} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (2.1)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \text{dla walca} \quad \beta &= 0, \\ \text{dla kuli} \quad \beta &= -0.5, \\ \text{dla warstwy} \quad \beta &= 0.5. \end{aligned}$$

Warunek brzegowy (1.2) będzie miał w przypadku rozważanych ciał postać

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} + \alpha u \right|_{r=R} = 0. \quad (2.2)$$

Warunek początkowy przyjęto niezależny od współrzędnych przestrzennych

$$u|_{t=0} = u_0. \quad (2.3)$$

Ponadto przyjęto warunek symetrii (dla warstwy — warunek izolacji)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (2.4)$$

Sformułowane zagadnienie brzegowo początkowe (2.1)÷(2.4) po przetransformowaniu przyjmie postać:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1-2\beta}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{s\bar{u}}{K} + \frac{u_0}{K} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \alpha \bar{u} \Big|_{r=R} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Rozwiązanie zagadnienia (2.1) do (2.4) w transformatach Laplace'a ma postać.

$$\bar{u} = - \frac{\alpha u_0 r^\beta I_{-\beta}(pr)}{s[pI_{1-\beta}(pR) + \alpha I_{-\beta}(pR)]R^\beta} + \frac{u_0}{s}, \tag{2.6}$$

gdzie $p = \sqrt{s \cdot K^{-1}}$, $I_\nu(x)$, — zmodyfikowana funkcja Bessela I rodzaju, rzędu ν . Zmianę wielkości globalnych można opisać zależnością

$$T_\theta = \frac{1}{F} \int_V (u_0 - u) r_\theta dV, \tag{2.7}$$

gdzie F oznacza: w przypadku kuli jej powierzchnię całkowitą, w przypadku walca część powierzchni bocznej, uzyskaną przez wycięcie z nieskończonego walca jego części, ograniczonej dwoma płaszczyznami prostopadłymi do jego osi; V oznacza w tym przypadku objętość odciętej części. W przypadku warstwy o grubości R , F oznacza pole powierzchni tej podstawy graniastosłupa, na której jest określony warunek (2.2); V oznacza objętość tego graniastosłupa. Współczynnik r_θ jest określony poprzez fizykę procesu (porównaj część 6 pracy). Związek (2.7) można przekształcić do postaci:

$$T_\theta = \frac{1}{R^{1-2\beta}} \int_0^R r_\theta (u_0 - u) r^{1-2\beta} dr. \tag{2.8}$$

Ponieważ rozwiązanie zagadnienia (2.1) do (2.4) jest podane w transformatach, zależność (2.8) należy również przedstawić w transformatach. Przy obliczaniu transformaty prawej strony związku (2.8) wykorzystuje się twierdzenie Fubniego o zamianie kolejności całkowania [2]. Po tych przekształceniach otrzymuje się

$$\bar{T}_\theta = \frac{1}{R^{1-2\beta}} \int_0^R r_\theta r^{1-2\beta} \left(\frac{u_0}{s} - \bar{u} \right) dr. \tag{2.9}$$

Wstawiając (2.6) do (2.9) ostatecznie otrzymamy:

$$\bar{T}_\theta = \frac{r_\theta \alpha u_0 I_{1-\beta}(pR)}{sp[pI_{1-\beta}(pR) + \alpha I_{-\beta}(pR)]}. \tag{2.10}$$

3. Wyznaczenie stałych charakteryzujących proces

Ponieważ do wyznaczenia są dwie stałe, wygodnie będzie wykorzystać dwa doświadczenia; stała K nie zmienia się w obu doświadczeniach, natomiast stała α ma postać:

$$\alpha_i = \alpha_0 a_i, \quad i = 1, 2, \tag{3.1}$$

α_0 — wielkość niezależna od doświadczenia, którą wyznaczymy

a_i — wielkość zależna od doświadczenia, znana lub zadana (porównaj część 6 pracy).

Wstawiając (3.1) do (2.10) otrzymujemy zależności na nieznane współczynniki

$$\bar{T}_{\theta i} = \frac{r_{\theta} \alpha_0 a_i I_{1-\beta}(pR) u_0}{s p [p I_{1-\beta}(pR) + \alpha_0 a_i I_{-\beta}(pR)]}; \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

Po prostych algebraicznych przekształceniach otrzymamy następujące zależności pozwalające oznaczyć współczynniki

$$\frac{1}{\alpha_0} \frac{a_1 \bar{T}_{\theta 2} - a_2 \bar{T}_{\theta 1}}{a_1 a_2} = \frac{I_{-\beta}(pR)}{p I_{1-\beta}(pR)} (\bar{T}_{\theta 1} - \bar{T}_{\theta 2}), \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{u_0} s (\bar{T}_{\theta 1} \bar{T}_{\theta 2}) (a_1 - a_2) = r_{\theta} \frac{I_{1-\beta}(pR)}{p I_{-\beta}(pR)} [a_1 \bar{T}_{\theta 2} - a_2 \bar{T}_{\theta 1}]. \quad (3.4)$$

Po odwróceniu zależności (3.3) i (3.4) otrzymamy wzory prowadzące do wyznaczenia poszukiwanych stałych:

$$\alpha_0 = \frac{1}{a_1 a_2} \frac{a_1 T_{\theta 2}(t) - a_2 T_{\theta 1}(t)}{F_{\beta}(t) * [T_{\theta 2}(t) - T_{\theta 1}(t)]}, \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt} [T_{\theta 1}(t) * T_{\theta 2}(t)] (a_1 - a_2) = r_{\theta} G_{\beta}(t) * [a_1 T_{\theta 2}(t) - a_2 T_{\theta 1}(t)] u_0. \quad (3.6)$$

Tutaj

$$F_{\nu}(t) = \frac{2K}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \eta(t) \exp \left[-\frac{\mu_{\nu n}^2}{R^2} Kt \right],$$

$$G_{\nu}(t) = F_{\nu}(t) + \frac{2K}{R} (1-\nu),$$

$$J_{\nu}(\mu_{\nu}) = 0,$$

gdzie $\eta(t)$ jest funkcją Heaviside'a, [3], zaś $J_{\nu}(x)$ — funkcją Bessela I rodzaju rzędu ν . We wzorach (3.5) i (3.6) występują sploty, których istnienie jest zapewnione na mocy twierdzenia Titchmarsha [7, str. 28]. Podstawową zaletą zależności (3.5) jest możliwość bezpośredniego wyznaczenia współczynnika α_0 , jeżeli znamy współczynnik K . Pewną niedogodnością zależności (3.6) jest konieczność stosowania iteracji do wyznaczenia współczynnika K . Można również wymnożyć stronami zależności (3.3) i (3.4). Otrzymamy wtedy prostą zależność pozwalającą określić w sposób bezpośredni iloczyn $\alpha_0 K$:

$$u_0 K \alpha_0 a_1 a_2 \frac{r_{\theta}}{s} (\bar{T}_{\theta 1} - \bar{T}_{\theta 2}) = s \bar{T}_{\theta 1} \bar{T}_{\theta 2} (a_1 - a_2). \quad (3.7)$$

Po odwróceniu i uporządkowaniu otrzymamy

$$K \alpha_0 = \frac{\frac{d}{dt} [T_{\theta 1}(t) * T_{\theta 2}(t)] (a_1 - a_2)}{u_0 a_1 a_2 \eta(t) * [T_{\theta 1}(t) - T_{\theta 2}(t)]}. \quad (3.8)$$

4. Opis wyników doświadczenia

Wyniki eksperymentu są przeważnie określone dla chwil czasu, tworzących pewien zbiór

$$\{t_i\} \subset \langle 0, T \rangle; \quad i = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (4.1)$$

Wyniki są zapisane jako zbiór wartości $\{f_i\}$ w chwilach czasu $\{t_i\}$. W przypadku gdy opis jest dany w innej postaci to zawsze można go do powyższego opisu sprowadzić. Wykorzystując zbiór danych pomiarowych $\{f_i\}$ można, w sposób przybliżony, opisać funkcję $f(t)$ przy pomocy splajnu [8]. Otrzymujemy

$$f(t) = A_0 t_+ + \sum_{i=1}^J A_i (t-t_i)_+^n \quad (4.2)$$

gdzie J jest liczbą wyników (odczytów) pomiarów.

Współczynniki A_i określone są związkami

$$A_0 = \frac{f_1}{t_1}; \quad A_1 = \frac{f_2 - A_0 t_2}{(t_2 - t_1)^n} \\ A_p = \frac{f_{p+1} - \sum_{m=1}^{p-1} A_m (t_{p+1} - t_m)_+^n - A_0 t_{p+1}}{(t_{p+1} - t_p)^n} \quad (4.3)$$

gdzie

$$(t-t_k)_+^n = (t-t_k)^n \eta(t-t_k)$$

5. Końcowa postać wzorów

Do końcowego zapisu wzorów (3.5), (3.6), (3.8) wygodnie jest użyć splajnu pierwszego rzędu, tj. splajnu określonego związkiem (4.2) dla $n = 1$. Można oczywiście użyć także splajnów wyższych rzędów. W tym przypadku df. (4.2) sprowadza się do postaci

$$f(t) = \sum_{i=1}^J A_i (t-t_i)_+, \quad t_0 = 0 \quad (5.1)$$

gdzie

$$A_p = \frac{f_{p+1} - \sum_{i=0}^{p-1} A_i (t_{p+1} - t_i)_+}{t_{p+1} - t_p}; \quad A_0 = \frac{f_1}{t_1} \quad (5.2)$$

Ze względu na jednolitość zapisu, a nie zmniejszając ogólności rozważań, można założyć, że funkcje T_{g1} i T_{g2} , zbudowane według wzoru (5.1), czyli w oparciu o zbiory danych pomiarowych, można opisać na tym samym zbiorze chwil czasu $\{t_i\}$, co znacznie upraszcza zapis ostatecznych wzorów. W związku z powyższym opis, wyników będzie postaci

$$T_{g1} = \sum_{i=0}^J A_i (t-t_i)_+, \\ T_{g2} = \sum_{i=0}^J B_i (t-t_i)_+, \quad (5.3)$$

gdzie

$$A_i = \frac{T_{\theta 1, p+1} - \sum_{l=0}^{p-1} A_l (t_{p+1} - t_l)}{t_{p+1} - t_p}; \quad A_0 = \frac{T_{\theta 1, 1}}{t_1}; \quad (5.4)$$

podobnie określa się B_l .

Ostatecznie wzory (3.5), (3.6) i (3.8) odpowiednio przyjmą postać

$$\alpha_0 = \frac{1}{a_1 a_2} \cdot \frac{\sum_{l=0}^J (a_1 B_l - a_2 A_l) (t - t_l)_+}{M_{1-\beta}}, \quad (5.5)$$

$$\sum_{l, j=0}^J A_l B_j (t - t_l - t_j)_+^2 \frac{a_1 - a_2}{2} = r_\theta M_{-\beta} u_0, \quad (5.6)$$

$$K \alpha_0 = \frac{3 \sum_{l, j=0}^J A_l B_j (t - t_l - t_j)_+^2 (a_1 - a_2)}{2u_0 \left[\sum_{l=0}^J A_l (t - t_l)_+^2 - \sum_{l=0}^J B_l (t - t_l)_+^2 \right]}, \quad (5.7)$$

gdzie

$$M_\nu = - \sum_{l=0}^J \frac{R(t - t_l)_+ (a_1 B_l - a_2 A_l)}{4(1-\beta)} + \sum_{l=0}^J \frac{R^3 (a_1 B_l - a_2 A_l) \eta(t - t_l)}{K} \times \\ \times \left[1 - 16(1-\beta)^2 (2-\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp \left[-\frac{\mu_{\nu n}^2 K}{R^2} (t - t_l) \right]}{\mu_{\nu n}^4} \right]. \quad (5.8)$$

Najwygodniejszym podejściem do oznaczenia współczynników α_0 i K jest:

1. rozwiązać równanie (5.6) ze względu na K przy pomocy kolejnych przybliżeń
2. przy znanym współczynniku K ze wzoru (5.7) wyznaczyć współczynnik α_0 .

6. Przykład interpretacji współczynników

Rozważmy nagrzane do stałej temperatury względnej u_0 ciało w kształcie warstwy, kuli lub walca nieskończonego, na powierzchni którego znajduje się cienka powłoka o grubości δ , gdzie

$$\delta \ll R. \quad (6.1)$$

Ze względu na przyjęcie założenia (6.1) można przyjąć, że

- krzywiznę powłoki można zaniedbać
- przepływ ciepła w powłoce jest ustalony.

Niech funkcja $u_1(r, t)$ opisuje rozkład temperatury w warstwie (kuli, walca), a $u_2(r, t)$ —

w powłoce. Proces ochładzania takiego dwuskładnikowego ośrodka będzie opisany równaniami

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1-2\beta}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{1}{K_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = 0 \quad (6.3)$$

z następującymi warunkami:

— warunki sklejenia

$$[q_1 - q_2]_{r=R} = 0 \text{ równość strumieni ciepła,} \quad (6.4)$$

$$[u_1 - u_2]_{r=R} = 0 \text{ równość temperatur,} \quad (6.5)$$

— warunek brzegowy dla powierzchni zewnętrznej

$$u_2|_{r=R+\delta} = 0, \quad (6.6)$$

— warunek początkowy dla ciała

$$u_1|_{t=0} = u_0, \quad (6.7)$$

Stałe mają następujący sens fizyczny:

K_1 — współczynnik wyrównania temperatury

$$K_1 = \frac{\lambda_1}{c_p \rho_1}, \quad (6.8)$$

λ_1 — współczynnik przewodnictwa ciepła,

ρ_1 — gęstość ciała,

c_p — ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu.

Strumień ciepła \vec{q} określony jest następująco:

$$\vec{q} = -\text{gradu} \quad (6.9)$$

Dla ciała i pokrywającej go powłoki mamy

$$q_1 = -\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial r}, \quad (6.10)$$

$$q_2 = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial r}.$$

Stąd zależność (6.4) przyjmie postać

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} \quad \text{dla } r = R \quad (6.11)$$

zagadnienie rozkładu temperatury w powłoce pokrywającej rozważane ciało jest opisane następującymi równaniami:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = 0, \quad (6.12)$$

$$u_2|_{r=R+\delta} = 0,$$

$$u_2|_{r=R} = u_1(R, t).$$

Rozwiązanie tego zagadnienia ma postać

$$u_2 = \frac{u_1(R, t)}{\delta} (R + \delta - r); \quad r \in (R, R + \delta). \quad (6.13)$$

Ostatecznie zależność na strumieniu (6.4) przyjmuje postać:

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} + \lambda_2 \frac{u_1}{\delta} \Big|_{r=R} = 0, \quad (6.14)$$

czyli dla rozważanego ciała otrzymamy na rozkład temperatury zagadnienie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1-2\beta}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{1}{K_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{\delta} u_1 \Big|_{r=R} &= 0; \quad u_1|_{t=0} = u_0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Szukanymi stałymi są:

$$K_1 \quad \text{i} \quad \alpha_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

zatem należałoby w celu ich wyznaczenia przeprowadzić dwa doświadczenia z różnymi grubościami powłoki. Mamy przy tym

$$a_1 = \frac{1}{\delta_1}, \quad a_2 = \frac{1}{\delta_2}. \quad (6.16)$$

Mierzoną wielkością globalną byłoby ciepło przekazane otoczeniu przez powierzchnię jednostkową:

$$Q_F = \frac{1}{R^{1-2\beta}} \int_0^R r^{1-2\beta} (u_0 - u) c_p \rho dr. \quad (6.17)$$

Jak zatem widać, w tym wypadku

$$r_g = c_p \rho. \quad (6.18)$$

Znając $Q_1(t)$ i $Q_2(t)$ przy odpowiednich a_1 i a_2 możemy wyznaczyć współczynniki przewodnictwa ciepła λ_1 i λ_2 ze wzorów (5.6) i (5.7) przedstawionych w pracy.

7. Wnioski

Przedstawiona w pracy metoda oznaczania współczynników charakteryzujących wspomniane we wstępie procesy, pozwala efektywnie je znaleźć w przypadku, gdy są one stałe (nie zależą od zmiennych niezależnych (r, t) oraz od procesu). Szczególnie prosto daje się wyznaczyć współczynnik α_0 przy znanym K , lub iloczyn obu wielkości ze wzoru (5.7). Iloczyn ten nie zależy w sposób bezpośredni od przyjętych kształtów próbek, a tylko od mierzonych wielkości globalnych. Zaletą metody jest możliwość wyznaczenia współczynnika K niezależnie od nieznanego α_0 (por. wzór (5.6)). Cechą zależności (5.5) do (5.7) jest występowanie w nich czasu jako parametru, od którego to współczynniki α_0 i K powinny być niezależne. Własność ta pozwala, w przypadku wyników obliczeń wskazujących na ich zmienność w czasie, określić, na ile postawione zagadnienie (2.1) do (2.4) odpowiada

rzeczywistemu procesowi. Występowanie w końcowych wzorach (5.5) do (5.7) sum nie stanowi — wobec coraz bardziej dostępnej techniki obliczeniowej (komputery, mini-komputery, kalkulatory programowalne) — poważnego utrudnienia. Część sum jest skończona, a ilość wyrazów zależy od opisu wyników eksperymentu, zaś sumy nieskończone występujące we wzorach są szybko zbieżne z uwagi na występowanie członów wykładniczych. Proponowana metoda wyznaczania współczynników będzie również funkcjonować jeśli w miejsce opisujących proces wielkości zostaną wzięte odpowiednie strumienie, czy prędkości. Można również otrzymać podobne wyniki przy innym postawieniu wyjściowego zagadnienia brzegowo — początkowego.

Literatura cytowana w tekście

1. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN Warszawa 1969, rozdział 12.
2. R. SIKORSKI, *Funkcje rzeczywiste*, PWN Warszawa 1958.
3. A. H. ZEMANIAN, *Teoria dystrybucji i analiza transformat*; PWN Warszawa 1969.
4. H. Ja. BIEZNISZCZENKO, A. I. PRILEPKO, *Obratnyje zadaczki dla urawnienij paraboliczeskogo tipa w: Problemy matematycznej fizyki i wycislitelnoj matematiki*, Izdatielstwo Nauka — Moskwa 1977.
5. K. GRYSA, J. JANKOWSKI, *O sumowaniu pewnych szeregów Diniego i trygonometrycznych pojawiających się w zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych*, Mech. Teoret. Stos. **16**, 3, (1977).
6. B. STANISZEWSKI, *Wymiana ciepła, podstawy teoretyczne*, PWN Warszawa 1963.
7. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN Warszawa 1963.
8. R. VARGA, *Funkcjonalnyj analiz i teorija aproksymacij*, Izdatielstwo Mir Moskwa 1974.
9. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, PWN Warszawa 1965.
10. N. T. McLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN Warszawa 1964.
11. *Tablicy nulej funkcji Biessela*, Biblioteka Matematycznych Tablic, wydanie 44, Moskwa 1967.
12. R. C. MEHTA, *Solution of the Inverse Conduction Problem*, AIAA Journal, **15**, (1977), 1355 - 1356.
13. R. C. MEHTA, *Extension of the Solution of Inverse Conduction Problem*, Int. J. Heat Mass Transfer, **22**, (1969).
14. J. TALER, *Metoda eksperymentalnego określenia współczynnika wnikania ciepła w warunkach nieustalonych*, Czas. techn., 1978, 43 - 46.

Резюме

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ, КОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИЗУЮТ ПРОЦЕССЫ ИЗОБРАЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В статье анализируется проблемы вычисления, на основе эксперимента, коэффициентов которые находятся в краевое начальной задачи параболического типа. Коэффициенты определены на основе некоторых общих эффектов. Чтобы получить концевые соотношения используется интегральное преобразование Лапласа и свертковый анализ. К изображению результатов эксперимента в виде функции используется сплайны. Результаты представлены в статье имеют особенно простой вид когда результаты эксперимента изображены с помощью сплайнов первого порядка.

Summary

METHOD OF DETERMINATION OF THE COEFFICIENT CHARACTERIZING THE PROCESSES DESCRIBED BY PARABOLIC EQUATION

In the paper a method of determination of coefficients in the boundary-value problems of the parabolic type is considered. The approach takes into account the experimental results and is based on some global

effects. The Laplace transform techniques and convolution analysis are exploited to obtain the formulas defining the coefficients. In order to represent the experimental data in the analytical form a spline approximation is used. The results have especially simple form when the splines of the order 1 describe the measuring data.

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 września 1981 roku.

METODY OKREŚLANIA LICZBY BIOTA I WSPÓLCZYNNIKA PRZEJMOWANIA CIEPŁA

KRZYSZTOF G R Y S A (POZNAŃ)

*Institut Mechaniki Technicznej
Politechniki Poznańskiej*

Spis oznaczeń

$A_0 f(t)$	— funkcja obliczona na podstawie funkcji $S_0 \Theta$, $S_0 T$, itd.
$A_1 f(t)$	— funkcja obliczona na podstawie funkcji $S_1 \Theta$, $S_1 T$, itd.
α	— współczynnik przejmowania ciepła
$\alpha_n = \pi n$	
α_r	— współczynnik rozszerzalności cieplnej
$Bi = \frac{\alpha h}{\lambda}$	— liczba Biota
β	— parametr kształtu; = +0.5, 0, -0.5 dla warstwy, walca lub kuli
$c^2 = \frac{2Gh^2(1-\nu)}{\rho\kappa^2(1-2\nu)}$	
c_p	— ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu.
Δ_T	— krok czasowy przy pomiarze temperatury medium grzejącego
Δ_Θ	— krok czasowy przy pomiarze WOT
Δ_u	— krok czasowy przy pomiarze WOP
$\varepsilon_{\xi\xi}(\xi, \tau)$	— odkształcenie
G	— moduł ścinania
h	— grubość warstwy
$I_\nu(x)$	— zmodyfikowana funkcja Bessela I rodzaju, rzędu ν
$J_\nu(x)$	— funkcja Bessela I rodzaju, rzędu ν
$k = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_r h$	
$\kappa = \frac{\lambda}{\rho c_p}$	— współczynnik dyfuzyjności temperaturowej
λ	— współczynnik przewodnictwa cieplnego
$\lambda_n = \frac{\pi}{2} (2n-1)$	
μ_n	— kolejne pierwiastki równania $J_\beta(\mu) = 0$
ν	— liczba Poissona
$q(\xi, \tau)$	— strumień ciepła

ρ	— gęstość
s	— parametr transformacji Laplace'a
$S_0 f(t)$	— przybliżenie funkcji $f(t)$ przez funkcję schodkową
$S_1 f(t)$	— przybliżenie funkcji $f(t)$ przez funkcję odcinkowo-liniową
$\sigma_{\xi\xi}(t)$	— naprężenie
t	— czas
$T_f(\tau)$	— temperaturę medium grzejącego warstwę, obliczana względem temperatury odniesienia T_0
$T_p = T_f(p\Delta_T)$	— wynik pomiaru temperatury medium grzejącego w chwili czasu $p\Delta_T$, $p = 1, \dots, P$
$\tau = \frac{\kappa t}{h^2}$	— liczba Fouriera (bezwymiarowy czas)
$\Theta(\xi, \tau)$	— temperatura punktów warstwy, obliczana względem temperatury odniesienia T_0
$\Theta_k = \Theta(\xi^*, k\Delta_\Theta)$	— wynik pomiaru temperatury w punkcie wewnętrznym ciała w chwili czasu $k\Delta_\Theta$, $k = 1, \dots, K$
$\bar{\Theta}, \bar{T}, \bar{u}, \dots$	— transformaty Laplace'a funkcji Θ, T, u, \dots
$u(\xi, \tau)$	— przemieszczenia punktów warstwy
$u_r = u(\xi^*, r\Delta_u)$	— wynik pomiaru przemieszczenia w punkcie wewnętrznym ciała w chwili $r\Delta_u$, $r = 1, \dots, R$
WOP	— wewnętrzna odpowiedź przemieszczeniowa
WOT	— wewnętrzna odpowiedź temperaturowa
$Y_\nu(x)$	— funkcja Bessela II rodzaju rzędu ν
$\eta(x)$	— funkcja Heaviside'a
x	— współrzędna przestrzenna
$\xi = x/h$	— przestrzenna współrzędna bezwymiarowa
ξ^*	— punkt, w którym znana jest WOP lub WOT ; $\xi^* \in [0, 1]$
*	— mnożenie splotowe

Wstęp

W wielu przypadkach w technice znajomość współczynnika przejmowania ciepła odgrywa istotną rolę. Wyznaczenie tego współczynnika jest bardzo trudne z uwagi na to, iż umieszczanie czujników (termopar czy innych) na powierzchni elementu maszyny zakłóca warunki nagrzewania. Często umieszczenie czujnika na ogrzewanej powierzchni jest bardzo utrudnione (ścianki silników odrzutowych czy spalinowych, łopatki turbin itp.) lub nawet niemożliwe (np. na powierzchniach współpracujących). Trudności związane z wyznaczeniem liczba Biota i współczynnika przejmowania ciepła są znane (por. [1], a także [2, 3] i in.), a kolejne metody ich wyznaczenia, proponowane w literaturze dają — przy tym samym zestawie danych wyjściowych — często znacznie różniące się od siebie wyniki (por. [2] i [4]). Niektóre spośród proponowanych metod zawierają niedomówienia znacznie utrudniające ewentualne ich wykorzystanie (np. [5]); inne prace oferują metody bardzo złożone, dla których brak jakiegokolwiek weryfikacji eksperymentalnej czy numerycznej (por. [3]).

W niniejszej pracy rozważa się pole temperatury w warstwie o grubości h w przypadku, gdy jedna z jej powierzchni ograniczających jest cieplnie izolowana, zaś na drugiej powierzchni mamy do czynienia ze swobodną wymianą ciepła pomiędzy nośnikami ciepła, a rozważaną warstwą. Zakłada się, że temperatura poszczególnych punktów warstwy zależy tylko od odległości od powierzchni izolowanej oraz od czasu. Tak więc rozważane jest zagadnienie jednowymiarowe. Wzory, określające liczbę Biota, wyprowadzono przy wykorzystaniu transformacji Laplace'a.

Zagadnienie wyznaczania współczynnika przejmowania ciepła nazywane jest czasami zagadnieniem odwrotnym przewodnictwa ciepła (por. [2, 6] i in.). W niniejszej pracy zagadnienie to potraktowane jest nie tylko inaczej niż w pracach [2, 3, 4] czy [5], lecz także szerzej. Proponowane poniżej dwie metody określania liczby Biota i współczynnika przejmowania ciepła bazują: pierwsza — na odwrotnym zagadnieniu przewodnictwa ciepła, zaś druga — na odwrotnym zagadnieniu teorii naprężeń cieplnych. W pracy podano także możliwości uogólnienia metody na przypadek ciał o innej geometrii (kula, walec, ew. warstwa sferyczna i rura), jak również przedyskutowano inne możliwe podejścia do rozważanego problemu. Otrzymane wyniki zilustrowano przykładem numerycznym.

1. Zagadnienie odwrotne przewodnictwa cieplnego

Rozważmy jednowymiarowe zagadnienie przewodnictwa ciepła w cieplnie izotropowej warstwie o grubości h . Przyjmijmy, że oś Ox skierowana jest od dolnej powierzchni warstwy, będącej powierzchnią o równaniu $x = 0$, w górę. Ponadto założymy, że dolny brzeg warstwy jest cieplnie izolowany, zaś na brzegu górnym mamy do czynienia ze swobodną wymianą ciepła. Warunki początkowe dla temperatury przyjmiemy jednorodne. Wprowadzając bezwymiarowe współrzędne $\xi = x/h$ oraz $\tau = \kappa t/h^2$ można sformułować następujące zagadnienie brzegowo-początkowe:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \Theta(\xi, \tau) = 0, \quad (1.1)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = -\text{Bi}[\Theta(1, \tau) - T_f(\tau)]. \quad (1.4)$$

W dalszym ciągu rozważań płaszczyznę o równaniu $\xi = \text{const}$ będziemy identyfikować — z uwagi na jednowymiarowość zagadnienia — z punktem o współrzędnej ξ .

Aby wyznaczyć liczbę Biota Bi przyjmujemy, iż temperatura $T_f(\tau)$ medium grzejącego warstwę jest znaną funkcją czasu oraz że znana jest zmienność w czasie temperatury w punkcie o współrzędnej ξ^* (tzw. wewnętrzna odpowiedź temperaturowa, w skrócie *WOT*); $\xi^* \in [0, 1]$. Zarówno *WOT* jak i $T_f(\tau)$ może być przy tym dana w postaci zbioru danych dyskretnych, pochodzących z pomiarów.

Aby wyznaczyć liczbę Biota na podstawie WOT i T_f , należy rozwiązać zagadnienie (1.1) - (1.4). Po prostych obliczeniach otrzymujemy następującą postać transformaty Laplace'a temperatury

$$\bar{\Theta}(\xi, s) = \bar{T}_f(s) \frac{\text{Bi} \cosh \xi \sqrt{s}}{\sqrt{s} \sinh \sqrt{s} + \text{Bi} \cosh \sqrt{s}}. \quad (1.5)$$

Przekształcając wzór (1.5) otrzymujemy związek

$$\bar{T}_f(s) \frac{\cosh \xi \sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} = \frac{1}{s} \bar{\Theta}(\xi, s) + \frac{1}{\text{Bi}} \bar{\Theta}(\xi, s) \frac{\sinh \sqrt{s}}{\sqrt{s} \cosh \sqrt{s}} \quad (1.6)$$

Odwrócenie transformat po lewej i prawej stronie związku (1.6) nie następuje trudności. Otrzymujemy równanie

$$T_f(\tau) * \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \cos(\xi \lambda_n) e^{-\lambda_n^2 \tau} \right] = \eta(\tau) * \Theta(\xi, \tau) + \frac{2}{\text{Bi}} \Theta(\xi, \tau) * \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \tau},$$

skąd

$$\text{Bi} = \frac{2 \Theta(\xi, \tau) * \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \tau}}{T_f(\tau) * \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \cos(\xi \lambda_n) e^{-\lambda_n^2 \tau} \right] - \eta(\tau) * \Theta(\xi, \tau)} \quad (1.7)$$

Założmy teraz, iż zarówno WOT jak i T_f znane są w postaci zbiorów danych dyskretnych, pochodzących z pomiarów. Przyjmijmy, że obie serie pomiarów zostały rozpoczęte w tej samej chwili czasu, która jest jednocześnie chwilą początkującą proces nagrzewania. Założymy, że kroki czasowe w obu seriach pomiarów są stałe i wynoszą, odpowiednio, Δ_{Θ} i Δ_T . Wówczas mamy do czynienia ze zbiorami $\{\Theta_k\}_{k=1, \dots, K}$ oraz $\{T_p\}_{p=1, \dots, P}$ opisującymi zmienność funkcji $\Theta(\xi^*, \tau)$ i $T_f(\tau)$ w chwilach czasu równych odpowiednio $k\Delta_{\Theta}$ i $p\Delta_T$. Przyjmujemy przy tym, że chwile $K\Delta_{\Theta}$ i $P\Delta_T$ nie są zbyt od siebie odległe; liczbę Biota będziemy bowiem określać w przedziale czasu $[0, \min(K\Delta_{\Theta}, P\Delta_T)]$. Mając oba wspomniane zbiory danych łatwo można skonstruować funkcje, opisujące w przybliżeniu zmienność $\Theta(\xi^*, \tau)$ i $T_f(\tau)$ w czasie. Najprostszymi tego typu funkcjami ciągłymi są splajny [7]; najbardziej „zgrubne” przybliżenie obu funkcji można uzyskać aproksymując je funkcjami schodkowymi.

I tak — aproksymacja WOT oraz T_f przy pomocy funkcji schodkowych prowadzi do wzorów

$$T_f(\tau) \approx S_0 T_f(\tau) = \sum_{p=1}^P (T_p - T_{p-1}) \eta(\tau - p\Delta_T), \quad (1.8)$$

$$\Theta(\xi^*, \tau) \approx S_0 \Theta(\xi^*, \tau) = \sum_{k=1}^K (\Theta_k - \Theta_{k-1}) \eta(\tau - k\Delta_{\Theta}),$$

gdzie $T_0 = \Theta_0 = 0$. Otrzymujemy wówczas

$$\text{Bi} \approx A_0 \text{Bi}(\tau) = L_0(\tau) / M_0(\tau), \quad (1.9)$$

gdzie

$$L_0(\tau) = \sum_{k=1}^K \left\{ (\Theta_k - \Theta_{k-1}) \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2(\tau - k\Delta_\Theta)} \right] \eta(\tau - k\Delta_\Theta) \right\} \quad (1.10)$$

$$M_0(\tau) = \sum_{p=1}^P \left\{ (T_p - T_{p-1}) \left[\tau - p\Delta_T - \frac{1 - \xi^{*2}}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \cos(\xi^* \lambda_n) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times e^{-\lambda_n^2(\tau - p\Delta_T)} \right] \eta(\tau - p\Delta_T) \right\} - \sum_{k=1}^K \left\{ (\Theta_k - \Theta_{k-1}) (\tau - k\Delta_\Theta) \eta(\tau - k\Delta_\Theta) \right\}. \quad (1.11)$$

W przypadku, gdy $T_f(\tau) = T_f = \text{const}$, mianownik ułamka określającego liczbę Biota, M_0 , przyjmuje szczególnie prostą postać, a mianowicie

$$M_0(\tau)|_{T_f = \text{const}} = T_f \left[\tau - \frac{1 - \xi^{*2}}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \cos(\xi^* \lambda_n) \times \right. \\ \left. \times e^{-\lambda_n^2 \tau} - \sum_{k=1}^K \left\{ (\Theta_k - \Theta_{k-1}) (\tau - k\Delta_\Theta) \eta(\tau - k\Delta_\Theta) \right\} \right]. \quad (1.12)$$

Aproksymacja WOT i T_f przy pomocy najprostszego splajnu, jakim jest funkcja ciągła, odcinkowo-liniowa (łamana) prowadzi do wzorów

$$\Theta(\xi^*, \tau) \approx S_1 \Theta(\xi^*, \tau) = \frac{1}{\Delta_\Theta} \sum_{k=1}^K \left\{ (\Theta_{k+1} - 2\Theta_k + \Theta_{k-1}) (\tau - k\Delta_\Theta) \eta(\tau - k\Delta_\Theta) \right\}, \quad (1.13)$$

$$T_f(\tau) \approx S_1 T_f(\tau) = \frac{1}{\Delta_T} \sum_{p=1}^P \left\{ (T_{p+1} - 2T_p + T_{p-1}) (\tau - p\Delta_T) \eta(\tau - p\Delta_T) \right\}. \quad (1.14)$$

Wówczas

$$Bi \approx A_1 Bi(\tau) = L_1(\tau)/M_1(\tau), \quad (1.15)$$

gdzie

$$L_1'(\tau) = \frac{1}{\Delta_\Theta} \sum_{k=1}^K \left\{ (\Theta_{k+1} - 2\Theta_k + \Theta_{k-1}) \left[\tau - k\Delta_\Theta - \frac{1}{3} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2(\tau - k\Delta_\Theta)} \right] \eta(\tau - k\Delta_\Theta) \right\}, \quad (1.16)$$

$$M_1(\tau) = \frac{1}{\Delta_T} \sum_{p=1}^P \left\{ (T_{p+1} - 2T_p + T_{p-1}) \left[\frac{1}{2} (\tau - p\Delta_T)^2 - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(\tau - p\Delta_T)(1 - \xi^{*2}) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^5} \cos(\xi^* \lambda_n) \times \\
& \times (1 - e^{-\lambda_n^2(\tau - p\Delta_\Theta)}) \left] \eta(\tau - p\Delta_T) \right\} - \frac{1}{2\Delta_\Theta} \sum_{k=1}^K \{(\Theta_{k+1} - \\
& - 2\Theta_k + \Theta_{k-1})(\tau - k\Delta_\Theta)^2 \eta(\tau - k\Delta_\Theta)\}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

W przypadku, gdy $T_f(\tau) = T_f = \text{const}$, funkcja $M_1(\tau)$ przyjmuje szczególnie prostą postać, a mianowicie

$$\begin{aligned}
M_1(\tau)|_{T_f = \text{const}} = T_f \left[\tau - \frac{1}{2}(1 - \xi^{*2}) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \cos(\xi^* \lambda_n) e^{-\lambda_n^2 \tau} \right] - \\
- \frac{1}{2\Delta_\Theta} \sum_{k=1}^K \{(\Theta_{k+1} - 2\Theta_k + \Theta_{k-1})(\tau - k\Delta_\Theta)^2 \eta(\tau - k\Delta_\Theta)\}.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Przy wyprowadzaniu wzorów (1.9) - (1.18) wykorzystano wzory 0.234 z tablic [8] oraz wzór (4.13) z pracy [9] dla przypadku $H = 0$ i $a \rightarrow 0$.

Ze wzorów (1.16) i (1.17) widoczne jest, iż określanie liczby Biota przy pomocy WOT i $T_f(\tau)$ przybliżonych funkcjami łamanymi wymaga znajomości „przyszłych” wartości WOT i $T_f(\tau)$ w stosunku do chwili czasu, dla której określana jest funkcja $A_1 \text{Bi}(\tau)$. Wykorzystanie „przyszłych” wartości WOT i T_f polepsza dokładność otrzymanych wyników — jednakże przedstawianie WOT i T_f w postaci splajnów wyższych rzędów znacznie komplikuje wzory. Z tego też względu nie będziemy przedstawiać związków opisujących $A_n \text{Bi}(\tau)$ dla $n > 1$.

Warto na zakończenie tej części pracy zaznaczyć, że zależność funkcji $A_n \text{Bi}(\tau)$ od czasu wynika tylko i wyłącznie z faktu przedstawienia WOT i $T_f(\tau)$ w sposób przybliżony. Jest to więc raczej zależność od $S_n \Theta(\xi^*, \tau)$ czy $S_n T_f(\tau)$ niż od czasu. Przy wzrastających wartościach τ funkcja $A_n \text{Bi}(\tau)$ zbliża się do pewnej wartości stałej będącej właśnie poszukiwaną liczbą Biota. Ilustruje to dobrze przykład liczbowy, zamieszczony w części piątej pracy.

2. Wyznaczanie liczby Biota na podstawie wewnętrznej odpowiedzi przemieszczeniowej

Do założeń sformułowanych na początku części pierwszej dołożymy założenia następujące:

- warstwa jest sprężysta, izotropowa
- dolna powierzchnia warstwy jest unieruchomiona
- górna powierzchnia warstwy jest wolna od obciążeń
- przemieszczenia odbywają się tylko w kierunku osi Ox
- przemieszczenia i prędkości początkowe punktów warstwy są równe zero.

Rozważany jest zatem jednoosiowy jednowymiarowy stan odkształcenia w warstwie sprężystej, wywołany ogrzewaniem górnej powierzchni warstwy w sposób, opisany związ-

kiem (1.4). Zespół równań (1.1) - (1.4) należy uzupełnić równaniami i warunkami następującymi:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) u(\xi, \tau) = k \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}, \quad (2.1)$$

$$u(\xi, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (2.2)$$

$$u(0, \tau) = 0, \quad (2.3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = k\Theta(1, \tau). \quad (2.4)$$

Warunek (2.4) wynika z założenia o braku obciążeń na górnej powierzchni warstwy (por. wzór (3.11) dla $\beta = 0.5$ i $p(\tau) = 0$). Aby wyznaczyć liczbę Biota Bi przyjmujemy tym razem, iż oprócz funkcji $T_f(\tau)$ znana jest zmienność w czasie przemieszczenia w punkcie o współrzędnej ξ^* (tzw. wewnętrzna odpowiedź przemieszczeniowa, w skrócie *WOP*). Zagadnienie brzegowo-początkowe składające się ze związków (1.1) - (1.4) i (2.1) - (2.4) rozwiązujemy przy zastosowaniu transformacji Laplace'a. Po prostych obliczeniach otrzymuje się następującą postać transformaty Laplace'a przemieszczenia:

$$\bar{u}(\xi, s) = \frac{\bar{T}_f(s) kc Bi \left[s \cosh \sqrt{s} \sinh \left(\xi \frac{s}{c} \right) - c \sqrt{s} \sinh(\xi \sqrt{s}) \cosh \frac{s}{c} \right]}{s(s-c)^2 \cosh \frac{s}{c} \left[\sqrt{s} \sinh \sqrt{s} + Bi \cosh \sqrt{s} \right]}. \quad (2.5)$$

Przekształcając wzór (2.5) otrzymujemy związek

$$\frac{1}{Bi} \bar{u}(\xi, s) + \bar{u}(\xi, s) \frac{\cosh \sqrt{s}}{\sqrt{s} \sinh \sqrt{s}} = kc \bar{T}_f(s) \left[\frac{\cosh \sqrt{s} \sinh \left(\xi \frac{s}{c} \right)}{\sqrt{s} (s-c^2) \sinh \sqrt{s} \cosh \frac{s}{c}} - \frac{c \sinh(\xi \sqrt{s})}{s(s-c^2) \sinh \sqrt{s}} \right]. \quad (2.6)$$

Odwrócenie transformat po lewej i prawej stronie związku (2.6) nie następuje trudności. Otrzymujemy

$$\frac{1}{Bi} u(\xi, \tau) + u(\xi, \tau) * \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n^2 \tau} \right) = P(\tau) * 2kc T_f(\tau), \quad (2.7)$$

gdzie

$$P(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sinh \left(\xi \frac{\alpha_n^2}{c} \right)}{\cosh \left(\frac{\alpha_n^2}{c} \right)} + \frac{c}{\alpha_n} (-1)^n \sin(\xi \alpha_n) \right] \frac{e^{-\alpha_n^2 \tau}}{\alpha_n^2 + c^2} +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\xi \lambda_n)}{\sqrt{2c\lambda_n} (\lambda_n^2 + c^2) (\cosh \sqrt{2c\lambda_n} - \cos \sqrt{2c\lambda_n})} \times \\
& \times \left\{ \sinh \sqrt{2c\lambda_n} \left[\lambda_n \sin \left(c\lambda_n \tau - \frac{\pi}{4} \right) - c \cos \left(c\lambda_n \tau - \frac{\pi}{4} \right) \right] - \right. \\
& \left. - \sin \sqrt{2c\lambda_n} \left[\lambda_n \cos \left(c\lambda_n \tau - \frac{\pi}{4} \right) + c \sin \left(c\lambda_n \tau - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Stąd

$$\text{Bi} = \frac{u(\xi, \tau)}{2kc T_J(\tau) * P(\tau) - u(\xi, \tau) * \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\alpha_n^2 \tau) \right)}. \quad (2.9)$$

Przyjmując, podobnie jak w poprzedniej części pracy, iż tak WOP jak i $T_J(\tau)$ dane są w postaci zbiorów danych dyskretnych, pochodzących z pomiarów, można zbudować w analogiczny jak uprzednio sposób funkcję $A_n \text{Bi}(\tau)$, opisującą liczbę Biota w sposób przybliżony. Jeśli zatem $\{u_r\}_{r=1, \dots, R}$ jest zbiorem danych dotyczących zmian przemieszczenia od chwili $\tau = \Delta_u$ do $\tau = R\Delta_u$, zaś $\{T_p\}_{p=1, \dots, P}$ — zbiorem danych dotyczących temperatury medium grzejącego, przy czym chwile $P\Delta_T$ i $R\Delta_u$ nie są od siebie zbyt odległe, to aproksymując WOP i $T_J(\tau)$ — przykładowo — funkcją schodkową, otrzymujemy

$$\text{Bi} \approx A_0 \text{Bi}(\tau) = \frac{\sum_{r=1}^R (u_r - u_{r-1}) \eta(\tau - r\Delta_u)}{N_0(\tau)}, \quad u_0 = 0, \quad (2.10)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
N_0(\tau) = & 2kc \sum_{p=1}^P \left\{ (T_p - T_{p-1}) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\sinh \left(\xi * \frac{\alpha_n^2}{c} \right)}{\cosh \frac{\alpha_n^2}{c}} + \frac{c}{\alpha_n} (-1)^n \sin(\xi * \alpha_n) \right] \times \right. \right. \\
& \times \frac{1 - \exp[-\alpha_n^2(\tau - p\Delta_T)]}{\alpha_n^2(\alpha_n^2 + c^2)} \left. \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\xi * \lambda_n)}{\sqrt{2c\lambda_n} (\lambda_n^2 + c^2) (\cosh \sqrt{2c\lambda_n} - \cos \sqrt{2c\lambda_n})} \times \right. \right. \\
& \times \left\{ \sinh \sqrt{2c\lambda_n} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \left[c\lambda_n(\tau - p\Delta_T) - \frac{\pi}{4} \right] \right) - \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sin \left[c\lambda_n(\tau - p\Delta_T) - \frac{\pi}{4} \right] \right) \right] - \sin \sqrt{2c\lambda_n} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \left[c\lambda_n(\tau - p\Delta_T) - \frac{\pi}{4} \right] \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \left[c\lambda_n(\tau - p\Delta_T) - \frac{\pi}{4} \right] \right) \right] \right\} \eta(\tau - p\Delta_T) \left. \right\} - \\
& - \sum_{r=1}^R \left\{ (u_r - u_{r-1}) \left[\tau - r\Delta_u + \frac{1}{3} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} e^{-\alpha_n^2(\tau - r\Delta_u)} \right] \eta(\tau - r\Delta_u) \right\}. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Wzór (2.10) jest znacznie bardziej złożony, niż związki (1.9) czy (1.15). Jeszcze bardziej złożona będzie postać funkcji $A_n \text{Bi}(\tau)$, zbudowanej na podstawie WOP i $T_f(\tau)$ przybliżonych splajnami rzędu n . Tym niemniej widoczne jest, że również na podstawie WOP można w — mimo wszystko — stosunkowo prosty sposób wyznaczyć liczbę Biota.

3. Uogólnienie metody na przypadki kuli i walca

Wykorzystując tzw. parametr kształtu, [6, 10], można sformułować zagadnienie wyznaczenia liczby Biota jednocześnie dla walca, kuli i warstwy, a także dla warstwy sferycznej i rury. Równanie przewodnictwa ciepła można bowiem zapisać w postaci [6]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-2\beta}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \Theta(\xi, \tau) = 0, \quad (3.1)$$

gdzie parametr kształtu β przyjmuje wartości $+0.5$, 0 , -0.5 odpowiednio dla warstwy, dla walca i dla kuli. Po prawej stronie równania (3.1) można — w razie potrzeby — umieścić człon odpowiedzialny za produkcję ciepła [10]. Uzupełniając równanie (3.1) warunkami (1.2), (1.3) i (1.4) otrzymujemy zagadnienie brzegowo-początkowe dotyczące bądź warstwy o grubości 1, bądź walca i kuli o promieniu 1 (jest to jedynka bezwymiarowa). Dla wyznaczenia liczby Biota niezbędna jest znajomość WOT oraz $T_f(\tau)$, przy czym mogą one być zadane w postaci zbiorów danych dyskretnych, pochodzących z pomiarów.

Transformata Laplace'a temperatury, $\bar{\Theta}(\xi, s)$, ma w tym wypadku postać

$$\bar{\Theta}(\xi, s) = \bar{T}_f(s) \frac{\text{Bi} \xi^\beta \text{I}_{-\beta}(\xi \sqrt{s})}{\sqrt{s} \text{I}_{-\beta+1}(\sqrt{s}) + \text{Bi} \text{I}_{-\beta}(\sqrt{s})}. \quad (3.2)$$

Stąd po przekształceniu otrzymujemy

$$\bar{T}_f(s) \frac{\xi^\beta \text{I}_{-\beta}(\xi \sqrt{s})}{s \text{I}_{-\beta}(\sqrt{s})} = \frac{1}{s} \bar{\Theta}(\xi, s) + \frac{1}{\text{Bi}} \bar{\Theta}(\xi, s) \frac{\text{I}_{-\beta+1}(\sqrt{s})}{\sqrt{s} \text{I}_{-\beta}(\sqrt{s})}. \quad (3.3)$$

Odwrócenie transformacji prowadzi do następującego równania:

$$\begin{aligned} T_f(\tau) * \left(1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^\beta \text{J}_{-\beta}(\mu_n \xi)}{\mu_n \text{J}_{-\beta+1}(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 \tau} \right) = \\ = \eta(\tau) * \Theta(\xi, \tau) + \frac{2}{\text{Bi}} \Theta(\xi, \tau) * \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 \tau}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdzie μ_n są pierwiastkami równania $\text{J}_{-\beta}(\mu) = 0$. Stąd otrzymujemy wzór

$$\text{Bi} = \frac{2\Theta(\xi, \tau) * \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 \tau}}{T_f(\tau) * \left(1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^\beta \text{J}_{-\beta}(\mu_n \xi)}{\mu_n \text{J}_{-\beta+1}(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 \tau} \right) - \eta(\tau) * \Theta(\xi, \tau)}, \quad (3.5)$$

którego szczególnym przypadkiem jest związek (1.7). Dla $\beta = +0.5$ mamy bowiem $\mu_n = \lambda_n$ oraz

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Dalszy tok postępowania przy wyznaczaniu liczby Biota jest analogiczny jak w części pierwszej pracy. Otrzymuje się wzory o postaci zbliżonej do (1.9) czy (1.15); występujące w tych wzorach niektóre szeregi nieskończone można zastąpić ich sumami, wykorzystując wzory (22) i (17) z pracy [12], przy czym we wzorze (17) należy dokonać przejścia granicznego z parametrem a do zera; oba te wzory należy wykorzystać dla $n = -\beta$. Dla $\beta = -0.5$ i $+0.5$ funkcje Bessela przechodzą w funkcje trygonometryczne — tak więc wówczas, tzn. dla przypadku warstwy i kuli, otrzymane wzory mają postać szczególnie przydatną do obliczeń numerycznych. Wzorów tych nie przytaczamy z uwagi na prostotę ich wprowadzenia.

Jak widać ze związku (3.5), wartość liczby Biota jest powiązana z kształtem próbki, dla której znana jest *WOT*. Związek ten staje się jeszcze bardziej widoczny, jeśli zamiast warunku (1.3) przyjąć warunek

$$\lambda \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} = q_w(\tau), \quad \text{lub np.} \quad (3.6)$$

$$\Theta(\xi_0, \tau) = T_w(\tau), \quad (3.7)$$

tzn. gdy mamy do czynienia z warstwą o grubości $h(1-\xi_0)$, warstwą sferyczną czy też rurą, o takich samych grubościach ścianek. Tutaj $q_w(\tau)$ i $T_w(\tau)$ są funkcjami opisującymi — odpowiednio — strumień ciepła i temperaturę na ścianie $\xi = \xi_0$. Powiązanie liczby Biota z kształtem ciała jest wówczas o tyle bardziej złożone, że oprócz funkcji $J_{-\beta}(x)$ pojawiają się we wzorze opisującym liczbę Biota także funkcja $Y_{-\beta}(x)$.

Jeśli równanie (3.1) z warunkami (1.2), (1.3) i (1.4) uzupełnić równaniem

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-2\beta}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1-2\beta}{\xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) u(\xi, \tau) = k \frac{\partial \Theta(\xi, \tau)}{\partial \xi} \quad (3.8)$$

i warunkami (2.2), (2.3) oraz

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{(1-2\beta)\nu}{1-\nu} \frac{u}{\xi} \right]_{\xi=1} = k\Theta(1, \tau), \quad (3.9)$$

to otrzymuje się uogólnienie metody przedstawionej w części drugiej pracy. Jednakże wzory, określające w tym wypadku liczbę Biota są bardziej złożone od (2.9) i (2.10). Warto tu może zwrócić uwagę na fakt, że przyjęcie w miejsce warunku (2.3) warunku

$$u(\xi_0, \tau) = U(\tau), \quad * \quad (3.10)$$

lub w miejsce (3.9) warunku

$$\sigma_{\xi\xi}(1, \tau) = \frac{2G(1-\nu)}{h(1-2\nu)} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{(1-2\beta)\nu}{1-\nu} \frac{u}{\xi} - k\Theta \right]_{\xi=1} = -p(\tau), \quad (3.11)$$

gdzie $U(\tau)$ i $p(\tau)$ opisują — odpowiednio — przemieszczenie brzegu $\xi = \xi_0$ lub obciążenie brzegu $\xi = 1$, prowadzi do wzorów, z których wynika, że wartość liczby Biota wy-

znaczana na podstawie WOP i $T_f(\tau)$ zależy od warunków natury mechanicznej, w jakich próbka się znajduje. Jest to wniosek dosyć oczywisty zważywszy na to, iż do określenia liczby Biota ma być w tym przypadku wykorzystana wielkość, na którą tego typu warunki mają istotny wpływ.

4. Inne możliwości wyznaczania liczby Biota

Liczbę Biota można wyznaczać nie tylko na podstawie znajomości WOT czy WOP . Można w tym celu wykorzystać np. strumień ciepła $q(\xi^*, \tau)$ (o ile uda się go w punkcie wewnętrznym czy brzegowym w jakiś sposób zmierzyć), odkształcenie $\varepsilon_{\xi\xi}(\xi^*, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, \tau)|_{\xi=\xi^*}$ czy naprężenie $\sigma_{\xi\xi}(\xi^*, \tau)$, określone wzorem (3.11) (oczywiście dla $\xi = \xi^*$), gdzie $\xi^* \in [0, 1]$. Wystarczy w tym celu dokonać odpowiednich operacji na wzorach (1.5) i (2.5), czy też odpowiadających im wzorach, opisujących temperaturę i przemieszczenie przy wykorzystaniu parametru kształtu β . Np. różniczkując wzór (1.5) po ξ , mnożąc obustronnie przez współczynnik przewodnictwa cieplnego λ oraz zastępując wyrażenie $\lambda \frac{\partial \bar{\theta}(\xi, s)}{\partial \xi}$ przez $-\bar{q}(\xi^*, s)$ można, przekształcając tak otrzymany wzór na transformatę strumienia ciepła, otrzymać związek

$$Bi = \frac{2q(\xi, \tau) * \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \tau}}{2\lambda T_f(\tau) * \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\xi \lambda_n) e^{-\lambda_n^2 \tau} - \eta(\tau) * q(\xi, \tau)} \quad (4.1)$$

5. Przykład liczbowy

Wykorzystując wzory (1.9) oraz (1.15) wyznaczmy liczbę Biota na podstawie danych eksperymentalnych, dotyczących pomiarów temperatury na zewnętrznej ściance rozbieżnej dyszy silnika raketowego, dokonanych podczas testowania tegoż silnika, [4]. Dane te wielokrotnie służyły do wyznaczania liczby Biota i współczynnika przejmowania ciepła (por. [2, 4, 5]; w pracy [5] wyznaczono także wartość współczynnika przejmowania ciepła metodą przedstawioną w pracy [11]). Wspomniana dysza miała ściankę o grubości $h = 0.0211$ m, co pozwoliło tę ściankę traktować w przybliżeniu jako warstwę płaską (stosunek promienia zewnętrznego do wewnętrznego był na całej długości dyszy bliski jedności). Pozostałe dane są następujące: temperatura otoczenia dyszy $T_0 = 300^\circ\text{K}$, temperatura gazów w dyszy $T_g = 2946,2^\circ\text{K}$, $\rho = 7900$ kg/m³, $c_p = 545$ Ws/kg^oK, średni współczynnik przewodnictwa cieplnego $\lambda = 35$ W/m^oK; czas pracy silnika — 16 sekund. Na podstawie danych temperaturowych określono, podobnie jak w pracach [2, 4, 5], wartości θ i T_f wg wzorów

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_g - T_0}, \quad T_f = \frac{T_g - T_0}{T_g - T_0} = 1, \quad T - \text{temperatura bezwzględna.} \quad (5.1)$$

Ponieważ dane eksperymentalne są niepełne i dotyczą temperatury w chwilach czasu od $t = 6$ s do $t = 16$ s co 1 s, otrzymane wyniki wykazują tendencję do ustalania się dopiero dla $t > 10$ s. Wartości liczby Biota, otrzymane ze wzorów (1.9) i (1.15) przeliczono następnie na wartości współczynnika przejmowania ciepła wg wzoru

$$\alpha = Bi \lambda / h. \quad (5.2)$$

Otrzymane wyniki przedstawiono w tabeli 1; podano tam także dla porównania wyniki otrzymane w pracach [2, 4, 5], oraz rezultaty cytowane w [5], a otrzymane metodą przedstawioną w pracy [11]. Warto zaznaczyć, że we wszystkich cytowanych pracach zakładano stałość liczby Biota. W pracach [5] i [11] zakładano dodatkowo, że współczynnik przewodnictwa cieplnego, λ , jest funkcją temperatury. Spowodowało to znaczne zmniejszenie wartości współczynnika przejmowania ciepła, α , w stosunku do wyników otrzymanych przy założeniu, że $\lambda = \text{const}$.

Jak widać z tabeli 1, wartości współczynnika przejmowania ciepła otrzymane różnymi metodami cechuje duża rozbieżność. Na tle rezultatów otrzymanych w cytowanych pra-

Tabela 1. Porównanie wartości współczynnika przejmowania ciepła, α , wyznaczonego różnymi metodami na podstawie tych samych danych.

t [s]	$\Theta(0, t)$ bezwym	α					
		(1.9)	(1.15)	[4]	[2]	[5]	[11]
6	0.00933	738.8	239.5	2254.2	1821.9	536.6	581.7
7	0.01588	1074.2	696.6	2254.2	1810.0	600.6	587.0
8	0.02116	1175.7	884.3	2254.2	1610.3	592.6	598.4
9	0.03020	1241.7	969.5	2254.2	1690.9	674.2	685.3
10	0.03855	1291.6	1056.9	2254.2	1669.7	712.9	693.2
11	0.04724	1318.9	1111.7	2254.2	1641.9	737.4	730.0
12	0.05291	1300.4	1138.5	2254.2	1497.6	718.2	721.9
13	0.06046	1279.6	1133.6	2254.2	1443.1	723.6	725.8
14	0.06764	1257.6	1129.0	2254.2	1387.0	723.0	725.1
15	0.07823	1255.2	1127.0	2254.2	1413.0	753.6	765.0
16	0.08615	1248.5	1135.5	2254.2	1383.7	758.3	770.0

cach, wyniki uzyskane przy wykorzystaniu wzorów (1.9) i (1.15), wyróżniają się tym, że dla $t > 10$ mają tendencję do oscylowania wokół pewnej stałej wartości. Tendencję taką mają także wyniki przedstawione przez R. C. Mehtę w pracach [2] i [5], jednakże metoda kolejnych przybliżeń, jaką wykorzystał on do uzyskania tych wyników, jest nieporównanie bardziej złożona od metody zaprezentowanej w niniejszej pracy.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że wyniki uzyskane w niniejszej pracy na podstawie wzoru (1.15), są gorsze (por. tabela 3) od wyników uzyskanych na podstawie związku (1.9). Wynika to z fragmentaryczności danych z pomiarów. Przy znajomości danych pomiarowych dla chwil od $t = 1$ do $t = 16$ z krokiem czasowym równym 1 s, wyniki uzyskane na podstawie wzoru (1.15) są oczywiście dokładniejsze od rezultatów bazujących na (1.9).

Następnie sprawdzono, jaki jest związek pomiędzy wartościami współczynnika przejmowania ciepła, otrzymanymi w niniejszej pracy oraz w pracach [4] i [2], a wynikami

pomiarów temperatury ścianki dyszy, [4], przedstawionymi w drugiej kolumnie tabeli 1. W związku z tym obliczono średnią wartość współczynnika α , biorąc przy tym pod uwagę dane następujące (por. tabela 1)

- dla (1.9): od $t = 10$ do $t = 16$,
- dla (1.15): od $t = 11$ do $t = 16$,
- dla [2]: od $t = 12$ do $t = 16$.

Otrzymane w ten sposób współczynniki α_{sr} , a także odpowiadające im liczby Biota, przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Przybliżone wartości współczynnika przejmowania ciepła, α_{sr} i liczby Biota, Bi_{sr} .

	(1.9)	(1.15)	[4]	[2]	(1.9) popr.
α_{sr}	1278.83	1129.22	2254.2	1424.88	1376.78
Bi_{sr}	0.77095	0.68076	1.35896	0.859	0.83

Wartości temperatury $\Theta(\xi, \tau)$ można obliczyć na podstawie wzoru

$$\Theta(\xi, \tau) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Bi \cos(\xi \mu_n)}{(Bi^2 + Bi + \mu_n^2) \cos \mu_n} e^{-\mu_n^2 \tau}, \quad (5.3)$$

który otrzymuje się, odwracając transformatę, daną związkami (1.5). Tutaj μ_n są pierwiastkami równania

$$\mu \operatorname{tg} \mu = Bi. \quad (5.4)$$

Wstawiając do wzoru (5.3) w miejsce Bi wielkości, podane w tabeli 2, wyliczono wartości temperatury dla chwil od $t = 6$ do $t = 16$ s. Otrzymane wyniki przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3. Wartości temperatury w chwilach od $t = 6$ s do $t = 16$ s, obliczone na podstawie współczynników z tabeli 2.

t [s]	$\Theta(0, t)$					
	pomiar	(1.9)	(1.15)	[4]	[2]	(1.9) popr.
6	0.00933	0.00754	0.00674	0.01228	0.00830	0.00805
7	0.01588	0.01238	0.01109	0.01999	0.01361	0.01321
8	0.02116	0.01824	0.01635	0.02921	0.02002	0.01944
9	0.03020	0.02494	0.02239	0.03965	0.02735	0.02656
10	0.03855	0.03232	0.02906	0.05104	0.03540	0.03440
11	0.04724	0.04025	0.03622	0.06314	0.04404	0.04281
12	0.05291	0.04860	0.04379	0.07577	0.05312	0.05165
13	0.06046	0.05728	0.05166	0.08878	0.06255	0.06084
14	0.06764	0.06620	0.05976	0.10203	0.07222	0.07027
15	0.07823	0.07530	0.06804	0.11544	0.08208	0.07988
16	0.08615	0.08453	0.07644	0.12893	0.09206	0.08962

Wyniki przedstawione w tabeli 3 dyskwalifikują w zasadzie rezultaty pracy [4] oraz wartość liczby Biota otrzymaną na podstawie wzoru (1.15). Co do tego ostatniego, stwierdzono już wyżej, iż wynika to z fragmentaryczności danych. Każdy bowiem wzór określający liczbę Biota w oparciu o $S_n\Theta(\xi^*, \tau)$ wymaga znajomości danych pomiarowych począwszy od chwili początkowej przy stałym kroku czasowym; brak danych dotyczących pierwszej fazy procesu wymiany ciepła powoduje tym większe zafałszowanie wyników, im dokładniej przybliżona jest funkcja $\Theta(\xi^*, \tau)$ przez $S_n\Theta$, tzn. im wyższa jest wartość n . Najmniej wrażliwa na brak informacji z pierwszej fazy procesu jest funkcja $S_0\Theta$ — widać to w tabeli 3.

Na podstawie obliczonych dla $Bi = 0.077095$ wartości temperatury dokonano ponownego obliczenia liczby Biota, biorąc także pod uwagę tylko wyniki dla chwil czasu od $t = 6$ s do $t = 16$ s. Oszacowana na podstawie tych obliczeń wartość liczby Biota, różniąca się (na skutek niepełnych danych z „pomiarów”) od wartości wyjściowej, posłużyła do oceny stopnia dokładności wyników z tabeli 2 w przypadku stosowania wzoru (1.9) do wspomnianych na wstępie danych z pracy [4]. Stwierdzono, iż fragmentaryczność danych z pomiarów powoduje zaniżenie wartości liczby Biota. Poprawiona — w oparciu o te rozważania — liczba Biota została podana w tabeli 2 jako „(1.9) popr.”. Odpowiadająca jej zmiana temperatury $\Theta(0, t)$ przedstawiona jest w ostatniej kolumnie tabeli 3. Porównując te wyniki z danymi pomiarowymi widać, iż są one znacznie im bliższe niż wyniki otrzymane na podstawie wzoru (1.9). Jednocześnie widać dużą zgodność tak otrzymanych rezultatów z rezultatami otrzymanymi na podstawie pracy [2].

W przypadku posiadania pełnych danych z pomiaru, od $t = 1$ do dowolnej chwili czasu, wartości wyliczone na podstawie wzorów (1.9) czy (1.15) bardzo szybko dążą do pewnej wartości granicznej, o ile oczywiście wartość liczby Biota jest stała w rozważanym procesie grzania (chłodzenia). Co do przedstawionego wyżej zestawu danych pomiarowych, oraz otrzymanych na ich podstawie wyników, widać, że założenie o stałości liczby Biota było tu niesłuszne. Tym niemniej otrzymana wartość liczby Biota, przedstawiona w ostatniej kolumnie tabeli 2, ma charakter pewnej wartości średniej.

Natomiast symulacja numeryczna, polegająca na obliczeniu zmiany w czasie temperatury w punkcie $\xi = \xi^*$ przy zadanej liczbie Biota, a następnie odtworzenie tej liczby Biota na podstawie wzorów (1.9) czy (1.15) całkowicie potwierdza przydatność tych wzorów w przypadku, gdy $Bi = \text{const}$.

6. Wnioski

Przedstawione metody wyznaczania współczynnika przejmowania ciepła oraz liczby Biota różnią się nieco w zależności od kształtu próbki (badanego obiektu) oraz rodzaju wewnętrznej odpowiedzi, na podstawie której wspomniane wielkości się wyznacza. Otrzymane wzory, opisujące tę zależność, są proste, a do otrzymania na ich podstawie wyników wystarcza maszyna cyfrowa o niedużej pamięci operacyjnej. (Przedstawione w części piątej wyniki otrzymano na kalkulatorze programowalnym TI-59). W przypadku przybliżania odpowiedzi wewnętrznej przez splajny wyższych rzędów należy wziąć pod uwagę, iż dokładność otrzymanej przy ich pomocy liczby Biota zależy w dużym stopniu od znajomości historii procesu, począwszy od chwili $t = 0$, od kroku czasowego, a także od ilości

posiadanych danych. Wobec możliwości wykorzystania danych z wnętrza ciała, a nawet z brzegu przeciwnego w stosunku do grzanego, przedstawione metody umożliwiają określenie liczby Biota i współczynnika α w takich warunkach, gdy nie ma możliwości dokonania pomiaru temperatury na brzegu grzanym, lub gdy pomiar taki jest bardzo trudny do przeprowadzenia. Prezentowane tu podejście nie wymaga stosowania procedur iteracyjnych, co jest wspólną cechą wielu innych metod, przedstawionych w literaturze. Przy fragmentarycznych danych zastosowanie podejścia zademonstrowanego w piątej części pracy pozwala w prosty sposób określić przybliżoną wartość liczby Biota.

Wydaje się, iż przedstawione w pracy wyniki mogłyby stać się punktem wyjścia do zbudowania urządzenia pomiarowego, które na podstawie danych temperaturowych, przemieszczeniowych czy innych obliczałoby wartość liczby Biota czy współczynnika przyjmowania ciepła.

Warto tu też zaznaczyć, że przy znanej wartości liczby Biota można na podstawie przedstawionych wyżej wzorów wyznaczyć temperaturę T_f czynnika grzejącego w przypadku, gdy jest ona stała. Wystarczy w tym celu przekształcić wzór (3.5) do postaci

$$T_f = \frac{\Theta(\xi, \tau) * [\eta(\tau) \text{Bi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 \tau}]}{\text{Bi} \eta(\tau) * \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^\beta J_{-\beta}(\mu_n \xi)}{\mu_n J_{-\beta+1}(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 \tau} \right]} \quad (6.1)$$

Wzór na określenie T_f można też łatwo otrzymać przekształcając związek (2.9) w przypadku, gdy $T_f = \text{const}$. Prowadziłoby to do możliwości określenia temperatury gazów np. w silniku raketowym czy odrzutowym bez potrzeby umieszczania czujników w tymże gazie.

Można wreszcie wyznaczyć jednocześnie i liczbę Biota i temperaturę nośnika ciepła T_f (gdy jest ona stała), jeśli znane są odpowiedzi wewnętrzne w dwóch różnych punktach badanego ciała.

Wydaje się, że rozwinięcie metod, przedstawionych w pracy, na przypadek współczynników zależnych np. liniowo od temperatury, a także na przypadek innych procesów, opisywalnych układem równań różniczkowych liniowych, mogłoby doprowadzić do powstania nowych metod badań nieniszczących.

Literatura cytowana w tekście

1. B. STANISZEWSKI, *Wymiana ciepła, podstawy teoretyczne*, PWN Warszawa 1963.
2. R. C. MEHTA, *Solution of the Inverse Conduction Problem*, AIAA Journal, **15**, 9, 1355 - 1356 (1977).
3. J. TALER, *Metoda eksperymentalnego określenia współczynnika wnikania ciepła w warunkach nie ustalonych*, Czas. techn., 1978, 43 - 46.
4. D. R. BARTZ, *A Simple Equation for Rapid Estimation of Rocket Nozzle Convective Heat Transfer Coefficients*, Jet Propulsion, **27**, 49 - 51, (1957).
5. R. C. MEHTA, *Extension of the Solution of Inverse Conduction Problem*, Int. J. Heat Mass Transfer, **22**, 1149 - 1150 (1979).
6. M. J. CIAŁKOWSKI, K. GRYSA, *On a Certain Inverse Problem of Temperature and Thermal Stress Fields*, Acta Mechanica, **36**, 3 - 4, 169 - 185 (1980).

7. R. S. VARGA, *Functional Analysis and Approximation Theory in Numerical Analysis*, Soc for Ind. and Appl. Math., Philadelphia, (1971), tłum. ros. Izd. Mir, Moskwa (1974).
8. I. S. GRADŠTEIN, I. M. RIŽIK, *Tablicy integralov, summ, riadov i proizvedenii*, Izd. Nauka, Moskwa (1974).
9. K. GRYSA, J. JANKOWSKI, *O sumowaniu pewnych szeregów Diriego i trygonometrycznych, pojawiających się w zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych*, Mech. Teoret. Stos., 16, 3, 299 - 319 (1978).
10. A. V. LYKOV, *Teplomassoobmen — spravočnik*, Izd. Energia, Moskwa (1978).
11. J. V. BECK, *Nonlinear Estimation Applied to the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem*, Int. J. Heat Mass Transfer, 13, 703 - 716, (1970).
12. K. GRYSA, *O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela*, Mech. Teoret. Stos., 15, 2, 205 - 214 (1977).

Р е з ю м е

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА БИО И КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООБМЕНА

В статье представлены две методы определения числа Био и коэффициента теплообмена. Обе методы выведены при использовании интегрального преобразования Лапласа. Первая метод получена вследствие решения обратной задачи теплопроводности. До выведения второй использовано решение одной проблеммы теории термических напряжений. Представлены тоже другие возможности определения числа Био. Затем, используя некоторые данные измерительные, цитированные в других статьях, сделано числовую проверку первой методы. Вычислительные результаты сравнено с результатами полученными другими авторами.

S u m m a r y

METHODS OF DETERMINATION OF THE BIOT NUMBER AND THE HEAT TRANSFER COEFFICIENT

In the paper two methods of determination of the Biot number and the heat transfer coefficient are presented. Both methods are based on the Laplace transform techniques. The first method takes into account a solution of an inverse heat conduction problem. In order to derive the second method a solution of a problem of the theory of thermal stresses is exploited. Other possibilities of the Biot number determination are also mentioned. Making use of some measuring data, quoted also in other papers, a numerical verification of the first method is made. The results of computation are compared with those obtained by other authors.

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 września 1981 roku.

WYZNACZANIE PŁASKIEGO POLA NAPRĘŻENIA Z OBRAZU IZODYN UZYSKIWANYCH METODĄ ŚWIATŁA ROZPROSZONEGO

WOJCIECH KARMOWSKI, STANISŁAW MAZURKIEWICZ (KRAKÓW)

*Instituł Mechaniki i Podstaw
Konstrukcji Maszyn
Politechnika Krakowska
Instytut Mechaniki i Podstaw
Konstrukcji Maszyn
Politechnika Krakowska*

1. Metody wyznaczania pola naprężenia w przypadku płaskiego stanu naprężenia

Rozwiązanie płaskiego zagadnienia polega na określeniu trzech składowych tensora naprężenia tj. σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} . Składowe te jak wiadomo spełniają równania równowagi oraz równanie nierozdzielności

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Równania (1.1) łącznie z warunkami brzegowymi pozwalają na rozwiązanie płaskiego zagadnienia. Eliminacja dwóch spośród trzech niewiadomych prowadzi do uzyskania jednego równania biharmonicznego. Rozwiązaniem jest na ogół funkcją nieelementarną i może być efektywnie przedstawiona jedynie w postaci dyskretnej. Do rozwiązania stosuje się metody numeryczne np. metodę różnic skończonych. Procedura ta jest jednakże bardzo pracochłonna. Zasadniczą wadą dotychczas stosowanych metod jest określanie wartości funkcji wewnątrz obszaru na podstawie jej wartości i pochodnych na brzegu. Powoduje to znaczne odstępstwa od faktycznego pola fizycznego wywołane nie tylko błędami metody ale i błędami doświadczalnymi wyznaczania własności pola na brzegu obszaru. Błąd pomiarowy jest propagowany przez algorytm do wnętrza obszaru na znaczne odległości co powoduje jego zwielokrotnienie. Wad tych można uniknąć przez prowadzenie eksperymentu, w którym pomiary są wykonywane również wewnątrz obszaru, skracając drogę od dowolnego punktu wewnątrz obszaru do najbliższego punktu pomiarowego. Techniki elastoptyczne między innymi pozwalają na uzyskanie jednego dodatkowego równania do układu (1.1). Poprzez eliminację trzeciego z równań (1.1) uzyskuje się zmniejsz-

szenie stopnia układu o 2, powodując zmniejszenie błędów numerycznych i poprawiając dokładność rozwiązania.

2. Klasyczne techniki elastoptyczne

W elastoptyce stosuje się powszechnie metody oparte o wykorzystanie izochrom i izoklin. Obydwie metody pozwalają na uzyskanie jednej funkcji naprężeń w badanym obszarze, dotyczącej układu głównego naprężeń. Definiując przez „p” połowę sumy naprężeń głównych, przez „q” połowę ich różnicy a przez „ψ” podwojony kąt transformacji tensora naprężeń z układu przyjętego w eksperymencie do układu głównego, można zapisać tensor naprężenia w postaci

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= p + q \cos \psi, \\ \sigma_{yy} &= p - q \cos \psi, \\ \sigma_{xy} &= q \sin \psi.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Metoda izochrom pozwala na pomiar „q” a metoda izoklin na „ψ”. Po wyeliminowaniu „p”, za pomocą równań równowagi, uzyskuje się równanie postaci

$$2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (q \cos \psi) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (q \sin \psi) = 0.\tag{2.2}$$

W przypadku techniki izochrom niewiadomą w tym równaniu jest „ψ”. Jest to równanie silnie nieliniowe i rozwiązanie jego jest trudne i pracochłonne. Znajomość pola izoklin prowadzi wprawdzie do równania liniowego na „q”, lecz pomiar wartości kąta przy pomocy izoklin jest obciążony dużym błędem (są one zwykle bardzo rozmyte). Z pierwszego lub drugiego równania równowagi wyznacza się „p” po wyznaczeniu „q” i „ψ”. Obydwie techniki są wobec tego mało przydatne do dokładnego wyznaczania pól naprężeń, metoda izochrom z powodu generowania równania nieliniowego a metoda izoklin z powodów błędów eksperymentalnych. Nowe możliwości eksperymentalnych badań stworzone zostały dzięki wykorzystaniu zjawiska modulacji intensywności światła rozproszonego poprzez składowe stanu naprężenia wzdłuż drogi wiązki światła padającego na model. Począwszy od 1939 roku [6] następuje szybki rozwój tej metody w różnych zastosowaniach do analizy stanu naprężenia. Jednakże bardziej powszechne jej stosowanie było ograniczone między innymi zbyt uproszczonym modelem matematycznym, opisującym intensywność światła rozproszonego jak również błędami zniekształceń geometrycznych obrazu wynikającymi z zastosowanych technik obserwacji i rejestracji.

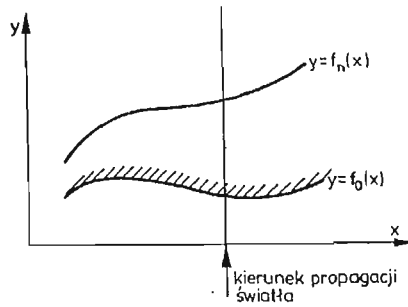
Zaproponowana w pracy [3] nowa koncepcja tzw. zintegrowanego polaryskopu oraz przedstawiony model matematyczny zjawiska pozwala na uniknięcie szeregu błędów pomiarowych i stwarza nowe możliwości szerszego stosowania tej metody w badaniach elastoptycznych.

3. Elementy teorii izodyny

Termin izodyny wprowadzony został po raz pierwszy w pracy [4], dla określenia nowego typu charakterystyk w płaskim stanie naprężenia. Przyjmijmy dowolnie wybrany

kierunek w obszarze, w którym panuje płaski stan naprężenia, nazywany dalej kierunkiem charakterystycznym „y”. Niech brzeg modelu opisuje funkcja $y = f_0(x)$ rys. 1. Izodyna n -tego rzędu $y = f_n(x)$ jest miejscem geometrycznym punktów w modelu, dla których

$$\int_{f_0}^{f_n} \sigma_{xx} dy = \text{const.} \quad (3.1)$$



Rys. 1

Doświadczalnie izodyny można uzyskać stosując metodę światła rozproszonego wykorzystującą pryzmat integrujący opisany w [3]. Przykłady zastosowania tej metody podane są m.in. w [1] [2] [5]. W płaskim stanie naprężenia, gdy $\sigma_{zz} = 0$, naprężenie σ_{xx} wyznaczyć można tą metodą wprost z zależności:

$$\sigma_{xx} = S'_\sigma \frac{\Delta m}{\Delta y}, \quad (3.2)$$

gdzie: Δm — liczba izodyn przecinających odcinek Δy leżący wzdłuż kierunku świetlnego światła spolaryzowanego padającego na model, zaś S'_σ — stała elastoptyczna wyznaczona doświadczalnie. Łatwo zauważyć, iż dla grubości modelu „b” mamy:

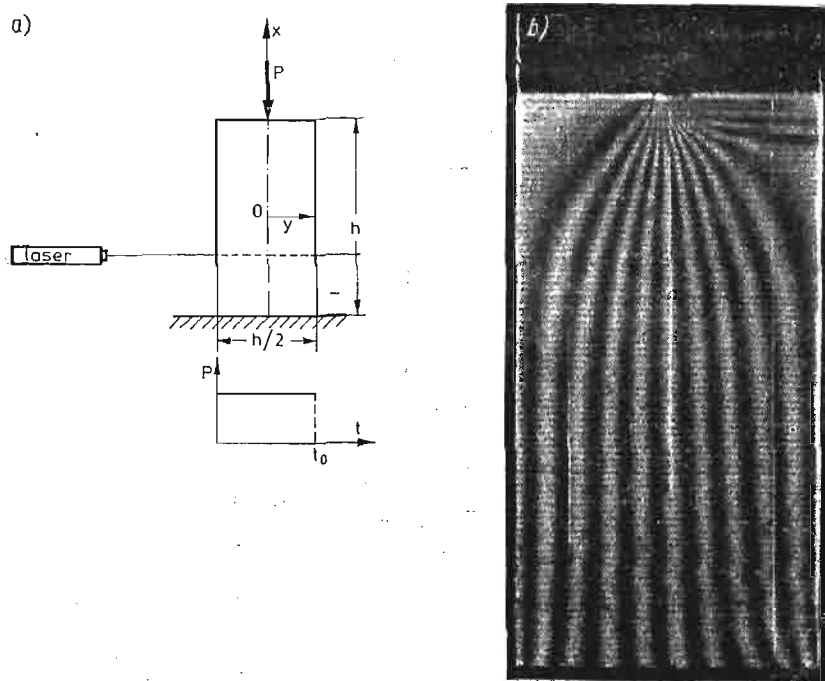
$$\int_{f_0}^{f_n} b \sigma_{xx} dy = \Delta P_x, \quad (3.3)$$

gdzie ΔP_x jest tą częścią siły zewnętrznej P_x , która przenoszona jest przez odcinek przekroju modelu wzdłuż y od brzegu modelu do izodyny f_n . Na rys. 2b i rys. 3b pokazano rodziny izodyn $y = f_n(x)$ a na rys. 2a i 3a schematy obciążeń dla obydwu modeli przy prześwietlaniu ich promieniem świetlnym wzdłuż kierunku y .

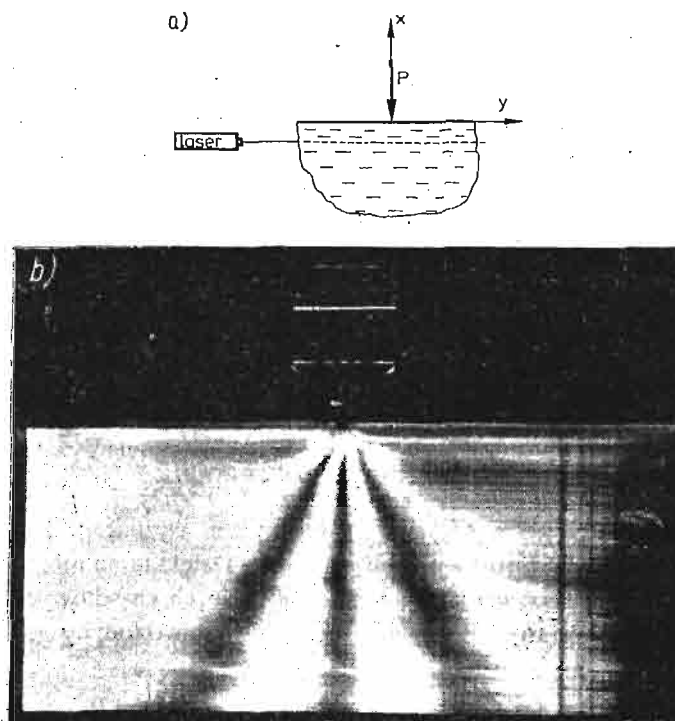
4. Metoda izodyn

Jak opisano w punkcie 3 w technice izodyn można wyznaczyć jedną składową symetryczną pola naprężenia wprost z przebiegu izodyn. Dzięki temu możliwe jest uzyskanie pola naprężenia bez rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych a jedynie przez całkowanie równań równowagi. Różniczkowanie równania izodyny (3.1) po „x” daje

$$\dot{f}_u \cdot \sigma_{xx}(x, f_u) - \dot{f}_0 \cdot \sigma_{xx}(x, f_0) + \int_{f_0}^{f_n} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dy = 0. \quad (4.1)$$



Rys. 2



Rys. 3

Uwzględnienie pierwszego równania równowagi (2.1) prowadzi do zależności na σ_{xy} w dowolnym punkcie izodyny rzędu „ n ”,

$$\sigma_{xy}(x, f_n) = \sigma_{xy}(x, f_0) + \dot{f}_n \cdot \sigma_{xx}(x, f_n) - \dot{f}_0 \cdot \sigma_{xx}(x, f_0) \quad (4.2)$$

W powyższym równaniu, dla wyznaczenia σ_{xy} , należy podać wartość kombinacji składowych σ_{xx} i σ_{xy} na brzegu obszaru. Można je uzyskać z warunku brzegowego

$$\check{\sigma} \vec{n} = \vec{\gamma}, \quad (4.3)$$

gdzie: $\check{\sigma}$ — tensor naprężenia

\vec{n} — wektor normalny do brzegu

$\vec{\gamma}$ — wektor obciążeń brzegu

Równanie brzegu ma postać

$$B(x, y) = 0, \quad (4.4)$$

gdzie: $B(x, y) = f_0(x) - y$.

Wektor normalny ma tutaj postać

$$\vec{n} = \frac{(\dot{f}_0, -1)}{\sqrt{\dot{f}_0^2 + 1}} \quad (4.5)$$

Pierwsze z równań (4.3) ma wtedy postać

$$\gamma \times \sqrt{\dot{f}_0^2 + 1} = \sigma_{xx}(x, f_0) \cdot \dot{f}_0 - \sigma_{xy}(x, f_0) \quad (4.6)$$

co podstawione do (4.2) daje ostatecznie

$$\sigma_{xy}(x, f_n) = \dot{f}_n \cdot \sigma_{xx}(x, f_n) - \gamma \times \sqrt{1 + \dot{f}_0^2} \quad (4.7)$$

Wartość σ_{yy} może być otrzymana z drugiego równania równowagi

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}. \quad (4.8)$$

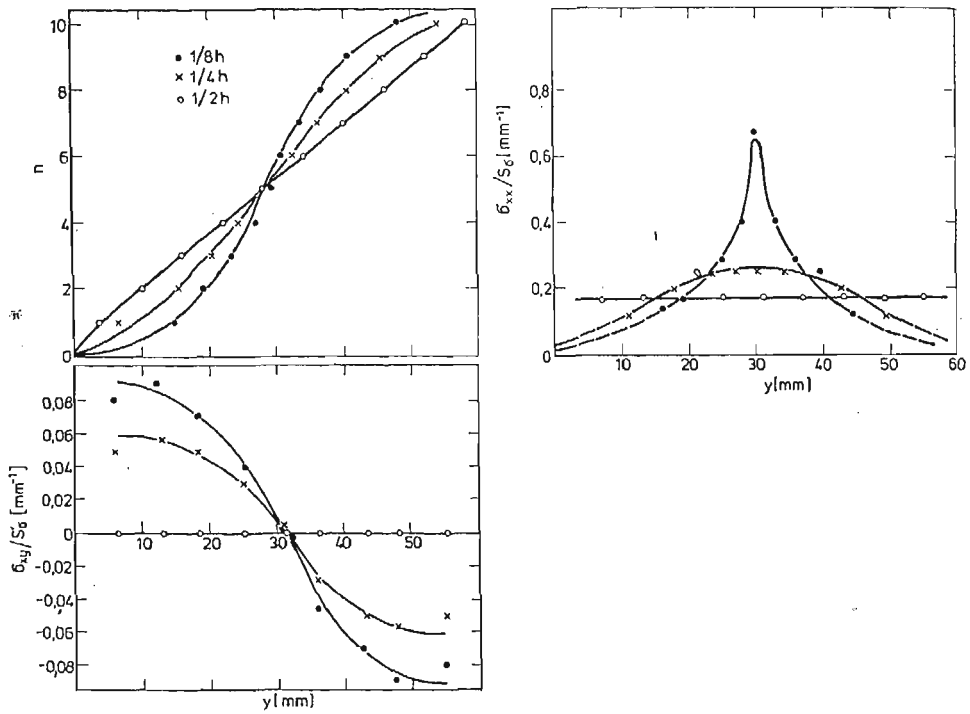
W powyższej metodzie, polegającej na całkowaniu równań równowagi przy zadane wartości σ_{xx} , łatwo można wyliczyć jedynie składową σ_{xy} , i to w punktach leżących na izodynie, przy zadanych warunkach brzegowych. Do wyznaczenia pozostałych składowych konieczne jest uzyskanie algorytmu wyznaczania pochodnych po „ y ” oraz wartości funkcji σ_{xx} we wszystkich punktach obszaru analizowanego.

Dla przykładu podajemy wykresy wartości izodyny n rys. 4a, składowej naprężenia σ_{xx} rys. 4b, składowej naprężenia σ_{xy} rys. 4c dla przekrojów modelu pokazanego na rysunku 2 w odległościach 1/8 h, 1/4 h, 1/2 h, od punktu przyłożenia siły zewnętrznej.

5. Metoda ciągłego pola izodyn

Efektywne wyznaczenie pola naprężeń przy użyciu izodyn możliwe jest jedynie wtedy, gdy znana jest funkcja izodyn ułamkowych, czyli rozkład funkcji ciągłej, która na izodynach przyjmuje wartości całkowite. Jest to funkcja $N(x, y)$, gdzie „ N ” jest liczbą rzeczywistą, „ n ” wartością izodyny i

$$N(x, f_n(x)) = n. \quad (5.1)$$



Rys. 4

Dla celów praktycznych celowe jest sformułowanie funkcji „ H ” w postaci

$$H(x, y) = S'_0 \cdot N(x, y), \quad (5.2)$$

i wtedy

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (5.3)$$

Po zastosowaniu pierwszego równania równowagi (1.1)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\partial_{xy} + \frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0, \quad (5.4)$$

co daje

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial H}{\partial x} + g(x). \quad (5.5)$$

Funkcja $g(x)$ może być wyznaczona z warunku brzegowego

$$g(x) = \sigma_{xy}(x, f_0) + \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{(x, f_0)}. \quad (5.6)$$

Podstawienie (4.6) i (5.3) do (5.6) pozwala uzyskać efektywny wzór na funkcję $g(x)$:

$$g(x) = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{(x, f_0)} + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{(x, f_0)} \cdot f_0 - \gamma_x \sqrt{1 + f_0^2}. \quad (5.7)$$

Wartości σ_{yy} wyznacza się z drugiego równania równowagi

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \dot{g}(x). \quad (5.8)$$

Całkując (5.8) po „y” w granicach f_0 , y otrzymuje się wzór na σ_{yy} w postaci

$$\sigma_{yy} = (\sigma_{yy})_{(x, f_0)} - \dot{g}(x) \cdot (y - f_0) + \int_{f_0}^y \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \cdot dy. \quad (5.9)$$

Funkcja $(\sigma_{yy})_{(x, f_0)}$ jest określona przez

$$(\sigma_{yy})_{(x, f_0)} = \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{(x, f_0)} \cdot \dot{f}_0^2 - (\gamma \times \dot{f}_0 + \gamma_y) \sqrt{1 + \dot{f}_0^2}. \quad (5.10)$$

Uzyskuje się to wykorzystując drugie równanie (4.3) i znaną wyrtłość σ_{xy} .

Wariant metody ciągłego pola izodyn. Wykonanie trzech fotografii izodyn, przepuszczając wiązkę światła w trzech kierunkach w płaszczyźnie „xy”, pozwala na uproszczenie obliczeń i uzyskanie składowych naprężenia wyłącznie poprzez obliczenia algebraiczne. Wychodząc ze wzoru transformacyjnego

$$\check{\sigma}' = \check{T} \check{\sigma} \check{T}^T, \quad (5.11)$$

gdzie $T(\varphi)$ jest macierzą obrotów o kąt „ φ ” i po wylczeniu stąd składowej σ'_{xx} uzyskuje się:

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} \cdot \cos^2 \varphi + 2\sigma_{xy} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \sigma_{yy} \cdot \sin^2 \varphi. \quad (5.12)$$

Wykonanie fotografii izodyn w trzech kierunkach pod kątami $-\varphi$, 0 , φ daje na $\check{\sigma}$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma'_{xx}(0) \\ \sigma_{yy} &= \frac{\sigma'_{xx}(\varphi) + \sigma'_{xx}(-\varphi)}{2 \sin^2 \varphi} - \sigma'_{xx}(0) \cdot \operatorname{ctg}^2 \varphi, \\ \sigma_{xy} &= \frac{\sigma'_{xx}(\varphi) - \sigma'_{xx}(-\varphi)}{4 \sin \varphi \cdot \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

6. Numeryczna metoda wyznaczenia ciągłego pola odpowiadającego izoliniom

Znajdowanie ciągłego pola będącego „rozmazaniem” izolunii na obszar płaski jest typowym zadaniem dla metod aproksymacji. Występuje tutaj jednakże podstawowa trudność polegająca na tym, że doświadczalna izolunia jest pasmem o znacznej, w stosunku do jej długości szerokości. Zapamiętywanie w pamięci komputera takiej linii jest w znacznym stopniu przypadkowe, gdyż rejestrowany jest jeden punkt z szerokości linii. Zastosowanie jakiegokolwiek aproksymacji wymaga uwzględnienia tego rozrzutu. Wykluczone są tutaj wobec tego metody interpolacji. Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów, jako najkorzystniejszej pod względem numerycznym metody aproksymacji, jest niecelowe, gdyż rozkład intensywności światła w poprzek izolunii spada z funkcją $\cos^2 x$, co należy uwzględnić w poszukiwanym algorytmie. Celowe jest wobec tego zastosowanie metody transformacji pasma w pojedynczą linię, uwzględniając określony przez fizykę zagadnienia

rozzrut pomiarów. Metoda taka podana jest w [7]. Ma ona za zadanie utworzyć linię, która przebiega możliwie blisko danych doświadczalnych i jest jednocześnie klasy C_1 . Tak uzyskane dane pośrednie są danymi wejściowymi do drugiego programu, który tworzy ciągły rozkład funkcji [8]. Kryterium wyboru jej wartości w węzłach dowolnej siatki dobrane jest tak by przechodziła ona blisko danych doświadczalnych i tworzyła powierzchnię o możliwie małej krzywiznie. Ze względu na już uzyskaną gładkość izolunii korzystne jest stosowanie miary odchylenia jako sumy kwadratów błędów. Przyjęcie miary krzywizny w postaci kwadratowej funkcji drugich pochodnych powoduje, że tak postawione zadanie prowadzi do układu równań algebraicznych, liniowego względem wartości funkcji w punktach węzłowych. Mimo, że w równaniu tym występuje wielka liczba niewiadomych dość łatwo można je rozwiązać. Proponuje się stosowanie obydwu wymienionych wyżej metod do uzyskiwania funkcji $N(x, y)$ zdefiniowanej w punkcie 5.

7. Podsumowanie

Dotychczas stosowane metody elastoptyki mają istotne braki, polegające na konieczności stosowania pracochłonnej procedury do wyznaczania pola naprężeń. W metodach tych pomiarowi podlega skomplikowana funkcja składowych naprężeń. Uzyskanie składowych tego tensora wymaga realizacji przez komputer wielu operacji arytmetycznych (rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych), które w przypadku stosowania metody izochrom są silnie nieliniowe. Metoda izoklin jakkolwiek daje równanie liniowe to pasmo pomiarowe jest szerokie, co zmniejsza znacznie dokładność. Metoda izodyn jest techniką prostą w użyciu dając dobrze określone wąskie pasma w całym badanym obszarze. Prosta fizyczna interpretacja izodyn, pozwalająca na bezpośrednie wyznaczenie jednej składowej tensora naprężeń, powoduje, że zastosowanie dwóch równań równowagi daje algorytm wprzód (bez rozwiązywania równań algebraicznych na każdym kroku procedury) wyznaczania pozostałych składowych. Zastosowanie metody „rozmywania” izolunii po obszarze płaskim daje wygodny algorytm do wyliczenia pochodnych funkcji ułamkowej izodyny. W wyniku tego można uzyskać pole naprężenia w dyskretnej formie (na siatce o dowolnej odległości węzłów). Możliwe są dwa warianty metody izodyn. Pierwsza polega na wykonaniu jednego eksperymentu i zastosowaniu równań równowagi do wyliczenia składowych pola naprężenia poprzez całkowanie tych równań. Potrzebne wzory są następujące:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \sigma_{yy} &= \int_{f_0}^{f_n} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} dy - g(x) \cdot (y - f_0) + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{(x, f_0)} \cdot f_0^2 - (\gamma \times f_0 + \gamma_y) \sqrt{1 + f_0^2}, \quad (7.1) \\ \sigma_{xy} &= -\frac{\partial H}{\partial x} + g(x).\end{aligned}$$

W przypadku gdy brzeg, od którego liczy się izodyny jest swobodny przyjmują one następującą postać:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \sigma_{yy} &= \int_{f_0}^y \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} dy - (y-f_0) \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{(x,f_0)} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right)_{(x,f_0)} \cdot \dot{f}_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{(x,f_0)} \cdot \dot{f}_0 \right] + \dot{f}_0^2 \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{(x,f_0)}, \\ \sigma_{xy} &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{(x,f_0)} + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{(x,f_0)} \cdot \dot{f}_0.\end{aligned}\tag{7.2}$$

Druga metoda wymaga dokonania tylko prostych działań algebraicznych ale niezbędne jest przeprowadzenie trzech eksperymentów, co w przypadku brzegu o rozwiniętej linii jest trudne. Składowe tensora naprężeń wyznacza się z prostych wzorów (5.13)

O wyborze metody decyduje wobec tego kształt brzegu.

Literatura cytowana w tekście

1. S. MAZURKIEWICZ, *O metodzie światła rozproszonego w elastooptyce*, Czas. Techn. 2 (1977).
2. S. MAZURKIEWICZ, *Zastosowanie metody światła rozproszonego w elastooptyce do badania zagadnień płaskich*, Czas. Techn. 4 (1977).
3. J. T. PINDER, P. STRAKA, *Response of the Integrated Polariscope*, J. Strain. Anal. 8, (1973).
4. J. T. PINDER, S. B. MAZURKIEWICZ, *Photoelastic Isodynes: A New Type of Stress-Modulated Light Intensity Distributions*, Mech. Res. Comm. 4, 4 (1977).
5. S. B. MAZURKIEWICZ, J. T. PINDER, *Integrated plane Photoelastic Method-Application of Photoelastic Isodynes*, Exp. Mech 7, 19 (1979).
6. R. WELLER, *A New Method for Photoelasticity in Three Dimensions*, J. Appl. Phys. 10, 4 (1939).
7. W. KARMOWSKI, J. ORKISZ, *Wygladanie krzywych eksperymentalnych uwzględniające fizyczną funkcję rozrzutu danych*. Konf. Problemy losowe w mechanice konstrukcji, Gdańsk 11, 1980.
8. W. KARMOWSKI, *Aproksymacja funkcji, określonej w obszarze płaskim zbiorem wartości eksperymentalnych w dowolnie rozmieszczonych punktach*, Konf. Problemy losowe w mechanice konstrukcji, Gdańsk 11, 1980.

Резюме

НОВЫЙ МЕТОД ИНТЕРПРЕТИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ИЗОДИН

В работе представлен новый метод интерпретирования изображения изодин. Применяя изображение изодин полученное путем эксперимента и уравнение внутреннего равновесия возможным является получение тензора напряжений (в плоском состоянии) в произвольной точке изображения. Вычисления автоматизированы. Применена черновая коррекция экспериментальных данных. Указаны пользы от применения этого метода по сравнению с другими аналитическими и экспериментальными методами применяемыми в фотоупругости.

S u m m a r y

DETERMINATION OF PLANE STATE OF STRESS FROM THE IMAGE OF ISODYNES
OBTAINED BY A METHOD OF SCATTERED LIGHT

A new method of interpreting the image of isodynes has been shown. Using the image of isodynes, obtained experimentally, and the equation of internal equilibrium it is possible to get the tensor of stress (in plane state) in any point of the image. The calculations can be automatized. During the course of calculation the experimental data are equalized. Advantages, of the method as compared with other well known experimental and analytical—experimental methods used in photoelasticity, have been pointed out.

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 maja 1981 roku.

SKOŚNE PRZEŚWIETLANIE W METODZIE WARSTWY ELASTOOPTYCZNEJ

JERZY KOMOROWSKI, JACEK STUPNICKI (WARSZAWA)

Politechnika
Warszawska

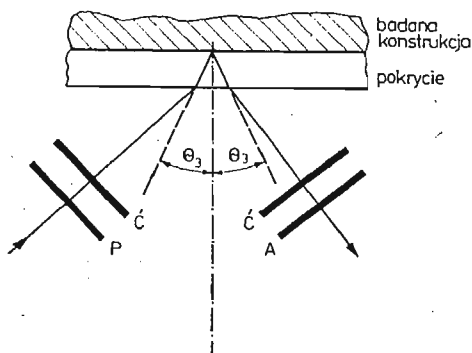
Wstęp

Metoda warstwy elastoptycznej jest metodą dość powszechnie stosowaną do pomiaru odkształceń konstrukcji. Pozwala ona bezpośrednio wyznaczyć na badanej powierzchni różnicę głównych odkształceń i ich kierunek. Natomiast uzyskanie informacji o wartości każdej składowej tensora odkształcenia wymaga przeprowadzenia dodatkowych badań doświadczalnych lub analiz numerycznych. Z opracowanych metod doświadczalnych wyznaczania składowych tensora odkształcenia na czoło wysuwa się metoda skośnego prześwietlania warstwy elastoptycznej. Jest ona prosta i szybka, ma jednak pewne wady, które mogą stać się źródłem poważnych błędów, jeżeli metodę tę stosować bezkrytycznie.

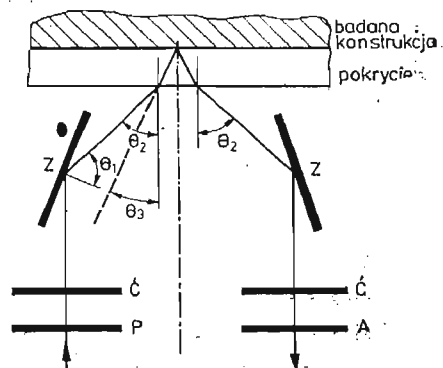
Wady te zostaną szczegółowo omówione.

Układy polaryskopu do skośnego prześwietlania warstwy elastoptycznej

Stosowane powszechnie polaryskopy do skośnego prześwietlania przedstawiono na rys. 1 i 2. Najprostszy pod względem optycznym układ, rys. 1, wymaga w praktycznej realizacji zbudowania specjalnego polaryskopu z polaroidami ustawionymi kąto.



Rys. 1



Rys. 2

Układ polaryskopu do badań w świetle przechodzącym skośnie ze zwierciadłami (rys. 2) jest najbardziej typowy. Umożliwia on zastosowanie tego samego polaryskopu typu V do normalnego i skośnego prześwietlania warstwy. Łatwe też jest ustawienie polaryskopu tak by płaszczyzna odbicia światła pokrywała się z płaszczyzną jednego z kierunków głównych odkształceń.

Promienie światła podczas przejścia przez warstwę elastoptyczną ulegają względnemu opóźnieniu, proporcjonalnemu do różnicy quasigłównych odkształceń w warstwie, ale również podlegają wielokrotnemu odbiciu i załamaniu na granicy ośrodków.

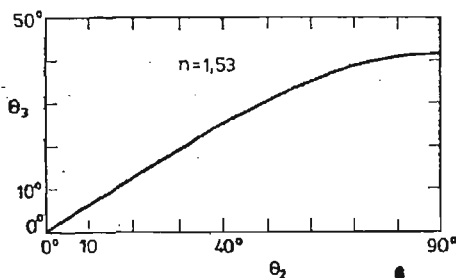
Odbicie i załamanie na granicy powietrze-warstwa elastoptyczna jest szczególnie istotne. Kąty θ_2 i θ_3 (rys. 2) są powiązane prawem Snell'a

$$\sin\theta_3 = \frac{1}{n_3} \sin\theta_2, \quad (1)$$

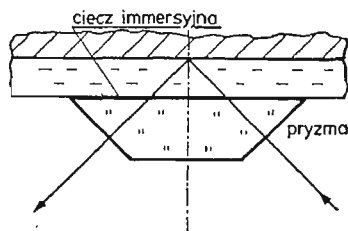
n_3 — współczynnik załamania światła na granicy warstwa elastoptyczna powietrze

Dla średniej wartości współczynnika załamania żywicy epoksydowej $n_3 \cong 1,5$ odpowiadające sobie kąty θ_2 i θ_3 przedstawia wykres na rys. 3. Łatwo zauważyć, że w układach podanych na rys. 1 i 2 jest praktycznie niemożliwe uzyskanie większych kątów θ_3 , niż 40° . Dodatkowo dla kątów $\theta_2 > 70^\circ$ energia światła odbitego od powierzchni zewnętrznej warstwy elastoptycznej jest większa od energii promieni załamanych, odbitych od powierzchni odbłaskowej i wychodzącej z warstwy elastoptycznej. Silny strumień światła odbitego od powierzchni zewnętrznej nie niesie informacji o odkształceniach i uniemożliwia pomiary.

Dla uzyskania większych kątów θ_3 oraz wyeliminowania odbicia promieni od powierzchni zewnętrznych w obydwu układach polaryskopów można zastosować pryzmat (rys. 4), szczelinę pomiędzy warstwą elastoptyczną i pryzmatem wypełniając cieczą immersyjną.



Rys. 3

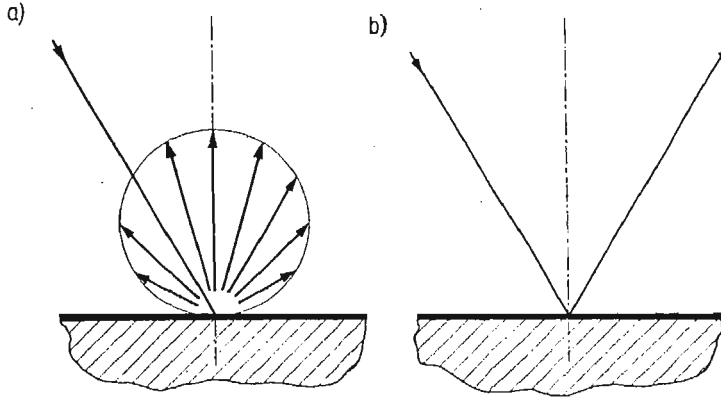


Rys. 4

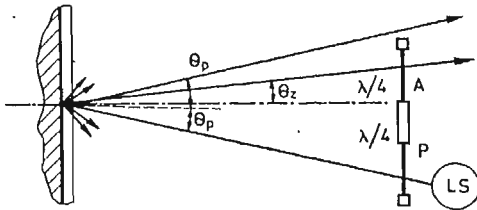
W praktyce w metodzie warstwy elastoptycznej światło po przejściu przez warstwę odbija się od warstwy metalu o pewnej chropowatości lub od specjalnego kleju odbłaskowego, który zawiera najczęściej proszek aluminiowy dobrze odbijający światło. W obu tych przypadkach mamy do czynienia z rozproszeniem światła lub odbiciem dyfuzyjnym (rys. 5a) a rzadko możemy mówić o odbiciu zwierciadlanym (rys. 5b).

Efekt rozpraszania jest od dawna wykorzystywany w polaryskopach typu „V” podczas badań w świetle przechodzącym normalnie (rys. 6). Ponieważ promienie światła odbite

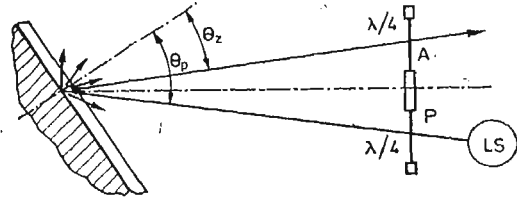
na granicy powietrze-warstwa elasto optyczna pogarszają lub uniemożliwiają rejestrację izochrom polaryskop ustawia się tak, że promienie docierające do obserwatora przez analizator będą pod kątem $\theta_2 \neq \theta_p$.



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

W rezultacie licznych doświadczeń autorzy zaproponowali stosowanie tego samego polaryskopu do badań w świetle przechodzącym normalnie i skośnie (rys. 7) [17]. Metoda ta wymaga zastosowania nieco silniejszego źródła światła. Natomiast układ ten ma szereg zalet, które zostaną wyeksponowane w dalszej części pracy. Korzystne jest też zastosowanie specjalnego kleju odbijającego światło w kierunku z którego ono pada. Efekt ten uzyskuje się dzięki dodaniu do kleju kulek szklanych stosowanych między innymi do produkcji farb odblaskowych „retro paints”. Identyczny układ został niezależnie zaproponowany przez Hung’a i Pottinger’a [6].

SKOŚNE PRZEŚWIETLANIE WARSTWY

Prześwietlając warstwę lub model elasto optyczny wzdłuż normalnej do ich powierzchni otrzymuje się informacje o różnicy odkształceń głównych w płaszczyźnie warstwy lub modelu.

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \delta_n / 2kt = N_n f_{en}$$

gdzie:

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — są odkształceniami głównymi warstwy

- δ — jest kątem względnego opóźnienia fazowego
 k — jest stałą elastoptyczną
 t — jest grubością warstwy elastoptycznej
 n — odnosi się do wielkości uzyskanych w normalnym prześwietlaniu
 f_{en} — wartość rzędu izochromy
 N_n — rząd izochromy

Jeżeli model lub warstwa znajduje się w płaskim stanie naprężenia to odkształcenie w kierunku normalnym wynosi

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad (3)$$

gdzie

ν — jest współczynnikiem Poissona.

Dla cienkich warstw i niedużych gradientów odkształceń w płaszczyźnie warstwy możemy przyjąć, że względne opóźnienie obserwowane przy skośnym prześwietlaniu jest proporcjonalne do różnicy tzw. quasi-głównych odkształceń w płaszczyźnie prostopadłej do biegu promieni.

Jeżeli tak dobierzemy płaszczyznę odbicia, że jeden z kierunków głównych przy prześwietlaniu normalnym np. ε_1 pokrywa się z normalną do tej płaszczyzny przy prześwietlaniu skośnym to możemy napisać

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_{2\theta} = \delta_\theta / 2kt_\theta = N_\theta f_{e\theta}, \quad (4)$$

gdzie:

indeks θ — odnosi się do wielkości uzyskanych w skośnym prześwietlaniu

t_θ — jest drogą promieni w warstwie przyprześwietlaniu skośnym $t_\theta = t/\cos\theta$.

Jeżeli płaszczyzna odbicia jest dowolna wtedy:

$$\varepsilon_{1\theta} - \varepsilon_{2\theta} = \delta_\theta / 2kt_\theta = N_\theta f_{e\theta}. \quad (5)$$

Znając kąt θ prześwietlania warstwy, położenie płaszczyzny odbicia względem kierunków głównych odkształceń w interesującym nas punkcie (kierunki główne określamy prześwietlając normalnie światłem spolaryzowanym liniowo) możemy powiązać wartości ε_1 i ε_2 nowym równaniem wykorzystując zależność (3) i (4) lub w ogólniejszym przypadku (5):

$$A\varepsilon_1 + B\varepsilon_2 = \pm(C\delta_\theta^2 + D\delta_n^2)^{1/2} / 2kt, \quad (6)$$

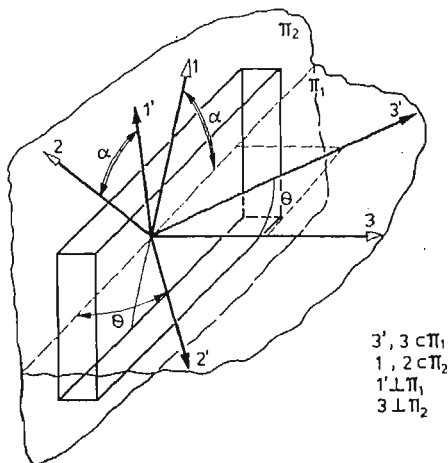
A, B, C, D — są współczynnikami zależnymi od kąta prześwietlania, kierunków głównych odkształceń i współczynnika Poissona dla warstwy [6]

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{a_{3'2}^2 - a_{3'3}^2 a_{3'1}^2}{1 - a_{3'3}^2} + \frac{\nu}{1 - \nu} (1 - a_{3'3}^2), \\
 B &= \frac{a_{3'1}^2 - a_{3'3}^2 a_{3'2}^2}{1 - a_{3'3}^2} + \frac{\nu}{1 - \nu} (1 - a_{3'3}^2), \\
 C &= a_{3'3}^2 \\
 D &= - \left(\frac{2a_{3'3} a_{3'1} a_{3'2}}{1 - a_{3'3}^2} \right)^2,
 \end{aligned} \quad (7a)$$

a_{ij} — są cosinusami kierunkowymi osi $i = 3$, względem układu 123 (rys. 8) możemy więc wzory (7a) przedstawić w postaci w której kąt α między normalną do płaszczyzny odbicia

a jednym z kierunków głównych i kąt prześwietlania warstwy występują w sposób jawny:

$$\begin{aligned} A &= (\sin^2 \alpha - \cos^2 \Theta \cos^2 \alpha) + \frac{\nu}{1-\nu} (\sin^2 \Theta), \\ B &= (\cos^2 \alpha - \cos^2 \Theta \sin^2 \alpha) + \frac{\nu}{1-\nu} (\sin^2 \Theta), \\ C &= \cos^2 \Theta, \\ D &= -(\sin 2\alpha \cos \Theta)^2. \end{aligned} \quad (7b)$$



Rys. 8

Dysponując dwoma równaniami wiążącymi dwie niewiadome ε_1 i ε_2 otrzymujemy układ niejednorodny z którego wyznaczamy ε_1 i ε_2 . Mamy więc możliwość rozdzielania odkształceń przez wyznaczenie opóźnienia w skośnym prześwietlaniu. Ze względu na postać otrzymanych zależności wartości względnych opóźnień δ_n i δ_θ muszą być wyznaczone z jak największą dokładnością. Niewielki błąd ich wyznaczenia powoduje duże błędy ε_1 i ε_2 [16].

Model matematyczny polaryskopu

Światło przechodzące przez warstwę elastoptyczną podlegające załamaniom i odbiciom podlega przemianom, które zależą od wielu czynników. Po opuszczeniu warstwy elastoptycznej strumień światła jest nośnikiem informacji o przebytej drodze. Najwygodniejszym sposobem prześledzenia przemian promienia jest analiza oparta na macierzowym rachunku Jones'a [1] [4].

Promień światła można przedstawić przy użyciu tzw. wektora Jones'a

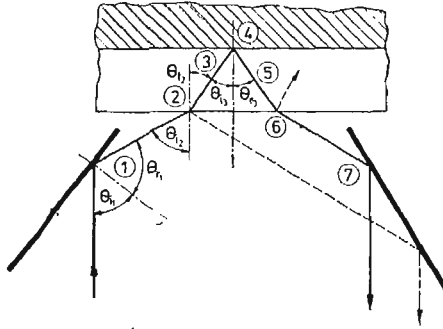
$$[V] = \begin{bmatrix} A_x e^{i\varepsilon_x} \\ A_y e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

A_x, A_y są amplitudami fali świetlnej w płaszczyźnie oxz i oyz , gdy promienie biegną równolegle do osi z .

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ uogólnionymi fazami odpowiednio w płaszczyźnie oxz i oyz .

Poszczególne miejsca w których promienie podlegają przemianom w układzie polaryskopu do skośnego prześwietlania pokazano na rys. 9. Miejsca te oznaczono numerami od 1 - 7.

Punkty oznaczone: 1 i 7 oznaczają odbicie od powierzchni zwierciadeł, 2 i 6 — oznaczają załamanie i odbicie na granicy tworzywo powietrze, 3 i 5 — oznaczają odcinki



Rys. 9

drogi w warstwie elastoptycznej, gdzie wzajemnie ortogonalne składowe promieni biegnących w płaszczyznach odkształceń quasi-głównych ulegają opóźnieniu, 4 — oznacza odbicie na granicy tworzywo warstwa odblaskowa. Promień wychodzący z układu $[V_{WY}]$ opisany jest iloczynem promienia wchodzącego $[V_{WCH}]$ i macierzy elementów składowych układu.

$$[V_{WY}] = [P_7^*][R_7][P_6^{**}][R_6][B_5][R_4][P_4^*][B_3][P_2^{**}][R_2][P_1^*][R_1][V_{WCH}], \quad (9)$$

lub inaczej

$$[V_{WY}] = [T][V_{WCH}], \quad (10)$$

gdzie $[T]$ jest iloczynem macierzy od $[R_1]$ do $[P_7^*]$. W trakcie pomiarów rejestrujemy obrazy interferencyjne dlatego nie musimy zajmować się bezwzględną wartością natężenia światła. Pozwala to przedstawić macierze występujące w równaniu (9) w następującej postaci:

$$[P_r^*] = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} \psi_{oD} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ — jest macierzą transmitancji amplitudy w punkcie odbicia } \operatorname{tg} \psi_{oD} = e_{\parallel}/e_{\perp} \text{ gdzie } e_{\parallel} \text{ i } e_{\perp} \text{ są współczynnikami Fresnela dla odbicia.}$$

$$[P_r^{**}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{tg} \psi_{za} \end{bmatrix} \text{ — jest macierzą transmitancji amplitudy w punkcie załamania, wówczas } \operatorname{tg} \psi_{za} = t_{\perp}/t_{\parallel} \text{ gdzie } t_{\perp} \text{ i } t_{\parallel} \text{ są współczynnikami Fresnela dla załamania.}$$

$$[R_r] = \begin{bmatrix} e^{i\Delta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta/2} \end{bmatrix} \text{ — jest macierzą względnego opóźnienia składowych promieni równoległych (||) i prostopadłych (\perp) do płaszczyzny odbicia w punkcie } r$$

$$[B_r] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \text{ — jest macierzą opisującą efekt przejścia przez ośrodek dwójłomny na drodze } r.$$

$$\begin{cases} m_{11} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot e^{-i\Delta/2} \\ m_{22} = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot e^{-i\Delta/2} \\ m_{12} = m_{21} = (1 - e^{-i\Delta/2}) \sin \alpha \cos \alpha \end{cases} \quad (11)$$

α — jest kątem między kierunkiem polaryzacji analizatora i kierunkiem quasi-głównych odkształceń

δ — jest względnym opóźnieniem promieni wynikającym z efektu dwójtomności.

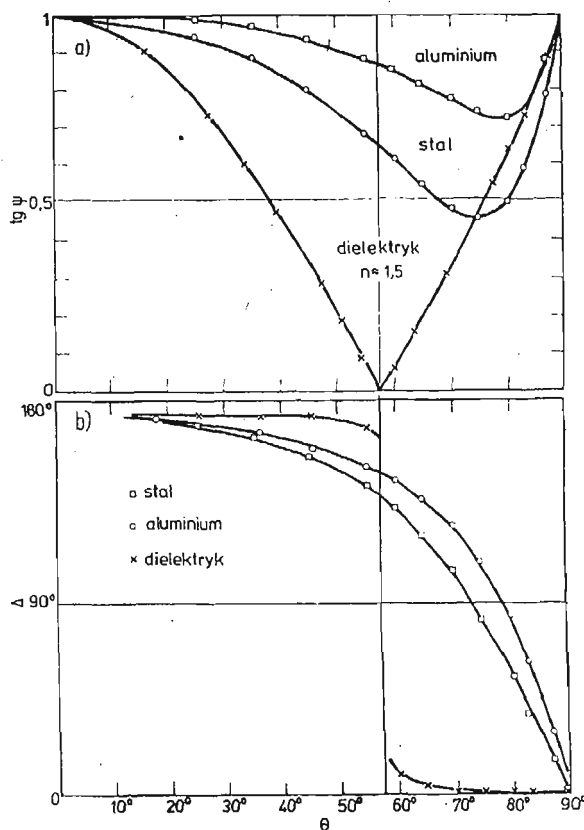
Wartości $\text{tg}\psi$ i wartości Δ dla macierzy opisujących odbicie od zwierciadeł metalowych i wykonanych z dielektryka (punkty 1 i 7) w funkcji kąta padania Θ są podane na rys. 10.

Dla wyznaczenia wartości $\text{tg}\psi$ i Δ towarzyszących odbiciu od powierzchni różnych stali i stopów aluminium stosowanych w budowie maszyn dla powierzchni o różnej chropowatości oraz dla klejów odblaskowych dokonano pomiarów przy użyciu elipsometru, oraz polaryskopu z kompensatorem Soleil-Babinet'a [17] [18].

Wyniki pomiaru $\text{tg}\psi$ i Δ w funkcji kąta Θ dla różnych stali i różnych stopów aluminium są zbliżone do tych przedstawionych na rys. 10.

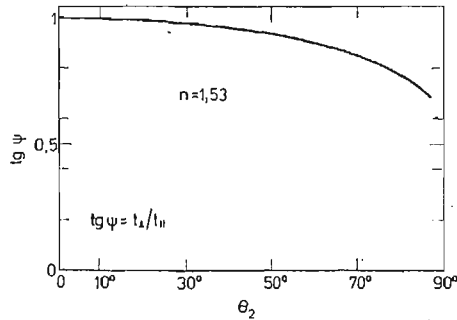
W przypadku stosowania układu podanego na rys. 1 macierze $[R_1][P_1^*]$ i $[R_7][P_7^*]$ w wyrażeniu (9) należy pominąć. W macierzach opisujących przejście światła z powietrza do tworzywa, które jest dielektrykiem (punkt 2) i z tworzywa do powietrza (punkt 6) występuje $\text{tg}\psi$ którego wartości w funkcji kąta Θ podano w rys. 11. Wartości $e^{i\Delta/2} = e^{-i\Delta/2} = 1$ gdyż nie zachodzi tu względna zmiana fazy promieni ($\Delta = 0$).

W przypadku stosowania pryzmatu w wyrażeniu (9) należy pominąć macierze $[R_2][P_2^{**}]$ i $[R_6][P_6^{**}]$.



Rys. 10

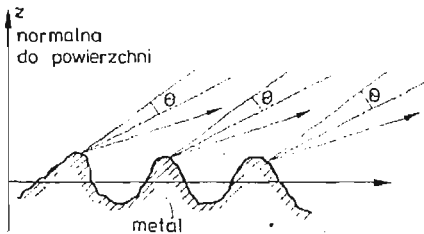
Przy obserwacji powierzchni chropowatych i klejów odblaskowych w polaryskopie nowego typu do niesymetrycznego skośnego prześwietlania okazało się że opóźnienie $\Delta \cong \pi$ a $\text{tg} \psi \cong 1$ co pozwala przypuszczać, że część światła wykorzystywana w pomiarach



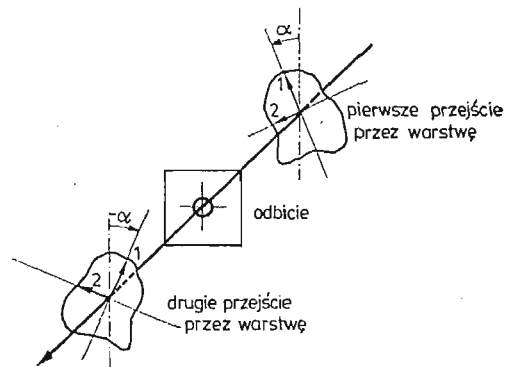
Rys. 11

podlega odbiciu od mikroobszarów powierzchni ustawionych prawie normalnie do przebiegu promieni tak jak to przedstawiono schematycznie na rys. 12.

Podczas przejścia promienia przez odkształconą warstwę elastoptyczną promienie biegnące w płaszczyznach quasi-głównych odkształceń, ściśle biorąc, załamują się pod nieco różnymi kątami. Jednak ze względu na bardzo małą zmianę współczynników załamania, wynikłą z istniejących odkształceń [3] oraz małą grubość warstwy, można przyjąć, że promienie biegną jednym torem wynikającym z wartości współczynnika załamania tworzywa bez odkształceń.



Rys. 12



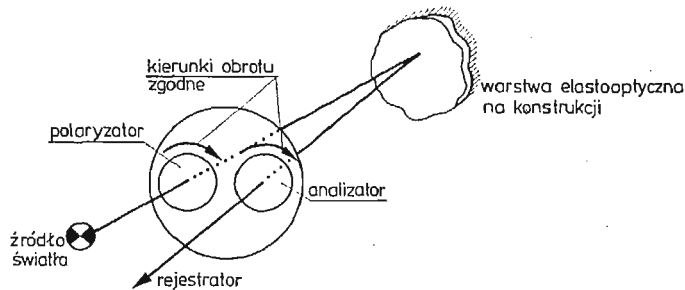
Rys. 13

Jeżeli promienie przechodzą przez warstwę w obu kierunkach pod kątem θ lub $\theta_z \cong \theta_P \cong \theta$ to względne opóźnienie promieni jest dla obydwu przejść identyczne. Należy jednak zwrócić uwagę, że kierunek quasi-głównych odkształceń względem płaszczyzny odbicia przy pierwszym przejściu równy jest α natomiast przy powrocie wynosi $-\alpha$ (rys. 13). Powoduje to zmianę znaku wyrazów m_{ij} dla $i \neq j$ macierzy [Br] (11). Przejście światła przez ośrodek dwójmowny można opisać w sposób wyżej podany jeżeli nie zachodzi na

drodze promienia skęcenie kierunków głównych. Przypadek skęcenia kierunków głównych opisany jest w dalszej części pracy.

Do wyznaczenia kierunków głównych odkształceń warstwy potrzebny jest polaryskop liniowy w którym zapewniona jest możliwość obrotu polaryzatora i analizatora wokół osi optycznej. Patrząc od strony źródła światła płaszczyzny polaryzacji muszą pozostawać podczas obrotu wzajemnie prostopadłe. Przebieg izokliny odpowiadający danemu kątowi płaszczyzny polaryzacji wyznacza punkty o kierunku odkształceń głównych warstwy równemu danemu kierunkowi polaryzacji.

Obserwacje izochrom, więc punktów o stałej różnicy głównych odkształceń, dokonuje się w polaryskopie kołowym. W tym celu należy ustawić osie szybkie ćwierćfalówek tak aby patrząc na polaryskop od strony źródła światła (rys. 14) były one skrzyżowane i ustawione pod kątem 45° do płaszczyzny polaryzacji skrzyżowanego analizatora i polaryzatora. Dla takiego ustawienia polaryskopu następuje wygaszenie izoklin. Rozdzielenie głównych odkształceń metodą skośnego prześwietlania wymaga wyznaczenia rzędów izochrom w interesujących nas punktach konstrukcji z dużą dokładnością. Z reguły podczas pomiarów metodą warstwy elastoptycznej odkształceń sprężystych konstrukcji stalowych lub duraluminiowych uzyskuje się nie więcej niż 3 rząd izochrom. Stąd konieczność stosowania kompensacji dla zwiększenia dokładności odczytu rzędów izochrom.



Rys. 14

Efekt normalnego przejścia światła spolaryzowanego liniowo przez warstwę elastoptyczną

Jeżeli światło pada normalnie do powierzchni warstwy lub kąt padania światła jest nie większy niż 5° , oraz w układzie nie ma zwierciadeł kierujących wiązką to wektor światła wychodzący z analizatora można przedstawić następująco: (rys. 15)

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

gdzie:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — jest wektorem światła poziomo liniowo spolaryzowanego}$$

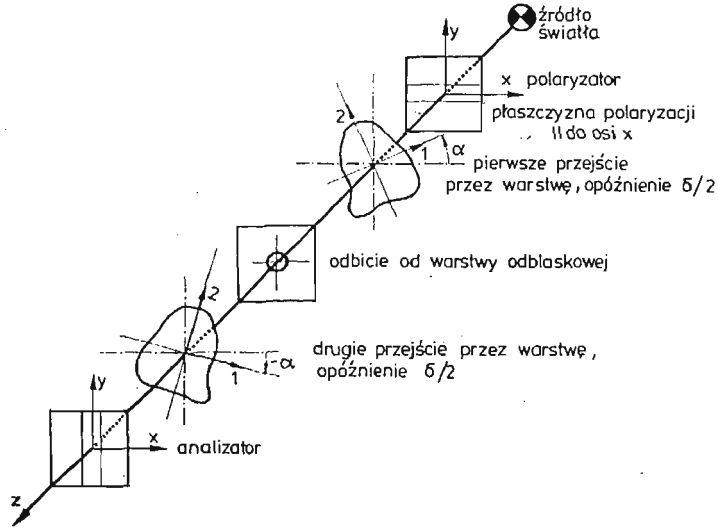
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — jest macierzą analizatora o pionowej płaszczyźnie polaryzacji.}$$

Łatwo dowieść, że

$$\begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (13)$$

gdzie

$$\begin{aligned} M_{11} &= m_{11}^2 + m_{12}^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot e^{-i\delta}, \\ M_{22} &= m_{12}^2 + m_{22}^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot e^{-i\delta}, \\ M_{21} &= M_{12} = (m_{11} + m_{22})m_{12} = (1 - e^{-i\delta})\sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$



Rys. 15

Po przemnożeniu macierzy (13) otrzymano

$$\begin{aligned} E_x &= 0; \\ E_y &= -M_{21} = (e^{-i\delta} - 1)\sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

Natężenie światła promienia po przejściu przez polaryskop jest proporcjonalne do $E_y \cdot E_y^*$, * oznacza wielkość sprzężoną. Stąd:

$$J \sim E_y \cdot E_y^* = \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha (1 - \cos \delta), \quad (14)$$

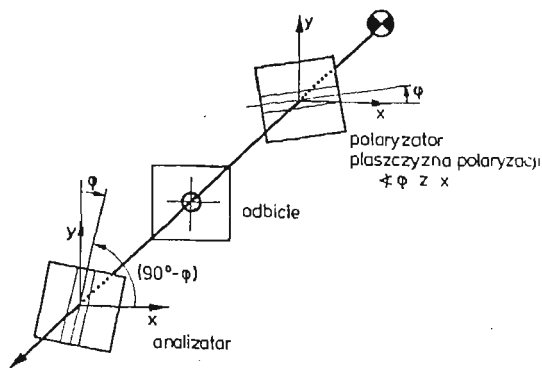
α jest parametrem izokliny, $\delta = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)2kt$ jest kątem opóźnienia fazowego.

Natężenie światła w danym punkcie obrazu jest równe zero ($J = 0$) gdy $\delta = 2\pi N$ gdzie N jest rzędem izochromy lub gdy $\alpha = 0, \pi/2$. Jeżeli chcemy uzyskać izokliny odpowiadające innemu kątowi głównych odkształceń musimy obrócić skrzyżowany polaryzator i analizator o kąt φ (rys. 16). Obrót ten powoduje zmianę wyrazów macierzy i równanie (13) ma postać:

$$\begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{vmatrix} \quad (15)$$

stąd przyjmując $s = \sin \varphi$, $c = \cos \varphi$

$$\begin{aligned} E_x &= s[(M_{11} - M_{22})sc - M_{12}(c^2 - s^2)], \\ E_y &= c[(M_{11} - M_{22})sc - M_{12}(c^2 - s^2)]. \end{aligned} \quad (16)$$



Rys. 16

Natężenie światła promienia jest proporcjonalne do $E_x \cdot E_x^* + E_y \cdot E_y^*$

$$\begin{aligned} J &\sim E_x \cdot E_x^* + E_y \cdot E_y^* = \\ &= (s^2 + c^2)[(M_{11} - M_{22})sc - M_{12}(c^2 - s^2)][(M_{11}^* - M_{22}^*)sc - M_{12}^*(c^2 - s^2)] = \\ &= (2 - 2 \cos \delta)[(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \varphi \cos \varphi - \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)]^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Widzimy więc, że izokliny pojawiają się w punktach w których

$$\alpha = \varphi \quad \text{i} \quad \alpha = \varphi + \pi/2.$$

Efekt normalnego przejścia światła spolaryzowanego kołowo przez warstwę elastoptyczną i kompensator

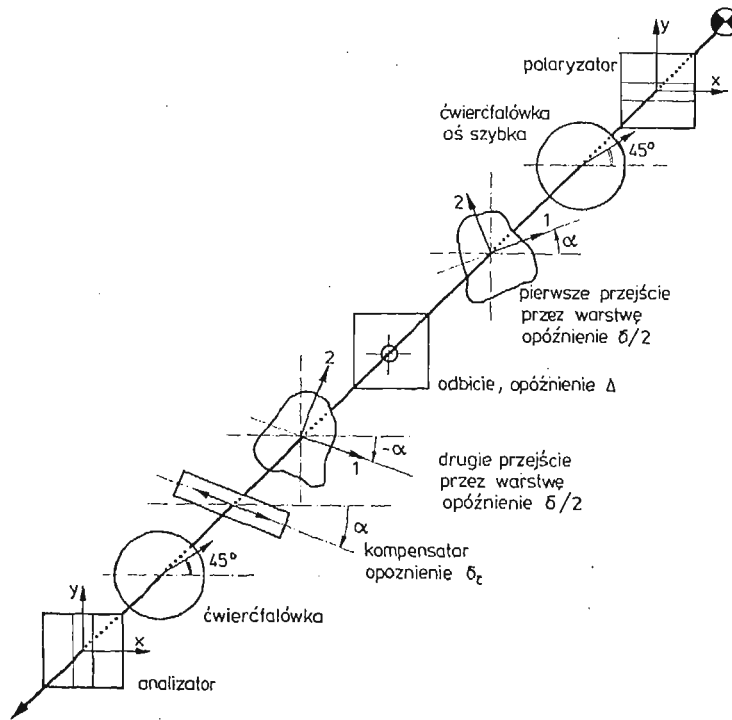
Zgodnie z zasadą kompensacji oś główna kompensatora musi być ustawiona równoległe do kierunku głównych odkształceń w punkcie badanym (rys. 17).

- 1 Jeżeli przyjmimy oś kompensatora równoległe do kierunku większego odkształcenia $\varepsilon_1(-\alpha)$ to macierz kompensatora można opisać następująco:

$$\begin{aligned} M_{11}^c &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot e^{-i\delta c}, \\ M_{22}^c &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot e^{-i\delta c}, \\ M_{12}^c &= M_{21}^c = -(1 - e^{-i\delta c}) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (18)$$

- 2 Jeżeli przyjmimy oś kompensatora równoległe do kierunku mniejszego odkształcenia $\varepsilon_2(\pi/2 - \alpha)$ to otrzymamy

$$\begin{aligned} M_{11}^c &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha e^{-i\delta c}, \\ M_{22}^c &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha e^{-i\delta c}, \\ M_{12}^c &= M_{21}^c = -(1 - e^{-i\delta c}) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (19)$$



Rys. 17

Promień światła wychodzący z analizatora może być opisany wektorem:

$$\begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{11}^c & M_{12}^c \\ M_{21}^c & M_{22}^c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (20)$$

gdzie:

$\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix}$ — są macierzami ćwierćfalówek których osie szybkie tworzą kąt 45° z płaszczyzną drgań strumienia światła (rys. 17)

Po wykonaniu mnożenia macierzy otrzymamy:

$$\begin{aligned} E_x &= 0; \\ E_y &= i[M_{11}M_{11}^c - M_{22}M_{22}^c] - [M_{11} + M_{22}]M_{12}^c - [M_{11}^c + M_{22}^c]M_{12}. \end{aligned} \quad (21)$$

• Natężenie promienia wychodzącego jest proporcjonalne do $E_y \cdot E_y^*$ i wynosi

$$J \sim 2(1 - \cos(\delta + \delta_c)) \text{ dla przypadku 1} \quad (22)$$

i

$$J \sim 2(1 - \cos(\delta - \delta_c)) \text{ dla przypadku 2} \quad (23)$$

W powyższej analizie przyjęto, że oś kompensatora jest prostopadła do osi odpowiadającej większym odkształceniom płytki kompensującej w przypadku odwrotnego ustawienia płytki kompensatora wyniki dla przypadków 1 i 2 należy zamienić.

Uzyskane zależności na natężenie światła są analogiczne do znanych zależności uzyskiwanych w elastooptyce dla modeli przeświecanych na wskroś. Istotne różnice wykazują

ustawienia polaryzatora i analizatora w polaryskopie liniowym oraz ćwierćfalówek w polaryskopie kołowym. (rys. 16, 17) Takie ustawienie jest konieczne ze względu na opóźnienie występujące przy odbiciu od powierzchni odblaskowej.

Efekt skośnego przejścia światła spolaryzowanego liniowo przez warstwę elastooptyczną

Chcąc wyznaczyć δ_θ z dużą dokładnością na ogół posługujemy się kompensatorem. W tym celu na wstępie musimy określić quasi-główne kierunki odkształceń czyli znaleźć parametry izoklin w skośnym prześwietlaniu. Korzystając z (10) i (15) napiszemy:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} s^2 & cs \\ cs & c^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c \\ s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T \end{vmatrix}, \\ c &= \cos \varphi \\ s &= \sin \varphi \end{aligned} \quad (24)$$

Z definicji izokliny, podobnie jak w (17), wiemy że warunkiem koniecznym wygaszenia światła jest by $E_x = 0$ i $E_y = 0$ dla $\alpha = \varphi$ i $\alpha = \varphi + \pi/2$.

Ponieważ w większości układów do skośnego prześwietlania można przyjąć, że światło przechodzi przez warstwę w obu kierunkach pod tym samym kątem θ mamy więc układy w których (rys. 9)

$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_7 = \psi_{OD}, \\ \psi_2 = \psi_6 = \psi_{ZA}, \\ \Delta_1 = \Delta_7 = \Delta. \end{cases} \quad (25)$$

Możemy więc przyjąć oznaczenia:

$$\begin{cases} W = \operatorname{tg} \psi_{OD} e^{i\Delta/2}, \\ V = \operatorname{tg} \psi_{ZA} e^{-i\Delta/2}, \\ E = \operatorname{tg} \psi_4 e^{i\Delta_4/2}, \\ F = e^{-i\Delta_4/2}. \end{cases} \quad (26)$$

Stąd po przemnożeniu macierzy w wyrażeniu (24) otrzymamy

$$\begin{aligned} E_x = & W^2 c s^2 (m_{11}^2 E - m_{12}^2 F) + V^2 s^2 c (F m_{22}^2 - E m_{12}^2) + \\ & + W V c^2 s (m_{22} F - m_{11} E) m_{12} + W V s^3 (m_{11} E - m_{22} F) m_{12}. \end{aligned} \quad (27)$$

W ogólnym przypadku $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi/2$ dla $\alpha = \varphi$ $E_x \neq 0$ praktycznie oznacza to, że w układach przedstawionych na rys. 1, 2 i 4 nie można wyznaczyć poprawnego przebiegu izoklin w skośnym prześwietlaniu. Wprawdzie w praktyce obserwuje się linie analogiczne do izoklin są one jednak rozmyte i niezbyt kontrastowe.

Jeżeli jeden z kierunków głównych odkształceń leży w płaszczyźnie odbicia promienia wtedy warunek $E_x = 0$ jest zawsze spełniony. Poszukiwanie kierunków quasi-głównych odkształceń jest wówczas niecelowe, gdyż są one równoległe i prostopadłe do płaszczyzny odbicia.

W układzie zaproponowanym przez autorów (rys. 7) warstwa odbijająca zachowuje się tak, że:

$$\operatorname{tg} \psi_4 = 1 \quad \text{i} \quad \Delta_4 = \pi$$

stąd jeżeli dodatkowo zastosujemy ciecz immersyjną lub pryzmat (rys. 9) to $W = V = 1$ i z (27)

$$E_x = cs^2(m_{11}^2 + m_{12}^2) - cs^2(m_{12}^2 + m_{22}^2) - c^2s(m_{11} + m_{22})m_{12} + s^3(m_{11} + m_{22})m_{12}, \quad (28)$$

$E_x = 0$ dla $\varphi^2 = \alpha$ i $\varphi = \alpha + \pi/2$.

W tym układzie otrzymuje się prawidłowy przebieg izoklin dzięki właściwościom odbicia „retro”.

Należy tu podkreślić, że dzięki zaproponowanemu układowi możliwe jest wyznaczenie kierunków w których należy ustawić kompensator do wyznaczania opóźnienia δ_θ w warstwie poza oczywistym przypadkiem w którym kierunek odkształceń głównych leży w płaszczyźnie odbicia.

Efekt skośnego przejścia światła spolaryzowanego kołowo przez warstwę elastoptyczną i kompensator

W układzie skośnego prześwietlania przy ustawieniu zespołu polaryzatora ćwierćfałówek i analizatora tak jak w polaryskopie kołowym do prześwietlania normalnego amplitudy składowych promienia wychodzącego mogą być opisane następująco:

$$\begin{aligned} E_x &= 0, \\ E_y &= m_{11}^2 K + m_{11} m_{12} L + m_{12} m_{22} M + m_{12}^2 N + m_{22}^2 Q, \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie K , L , M , N i Q są współczynnikami wynikającymi z przemnożenia macierzy (9):

$$\begin{aligned} K &= i \operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \psi_4 \operatorname{tg} \psi_7 e^{i(D_1 + D_4 + D_7)/2} (M_{11}^c + iM_{21}^c), \\ L &= -[\operatorname{tg} \psi_2 \operatorname{tg} \psi_7 e^{i(D_7 - D_1)/2} (M_{11}^c + iM_{21}^c) + \\ &\quad + \operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \psi_6 e^{i(D_1 - D_7)/2} (M_{22}^c - iM_{21}^c)] \operatorname{tg} \psi_4 e^{iD_4/2}, \\ M &= [\operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \psi_6 e^{i(D_1 - D_7)/2} (M_{22}^c - iM_{21}^c) + \\ &\quad + \operatorname{tg} \psi_2 \operatorname{tg} \psi_7 e^{i(D_7 - D_1)/2} (M_{11}^c + iM_{21}^c)] e^{-iD_4/2}, \\ N &= -i[\operatorname{tg} \psi_4 \operatorname{tg} \psi_6 \operatorname{tg} \psi_2 e^{i(D_4 - D_7 - D_1)/2} (M_{22}^c - iM_{21}^c) + \\ &\quad + \operatorname{tg} \psi_7 \operatorname{tg} \psi_1 e^{-i(D_4 - D_7 - D_1)/2} (M_{11}^c + iM_{21}^c)], \\ Q &= i \operatorname{tg} \psi_2 \operatorname{tg} \psi_6 e^{-i(D_4 + D_7 + D_1)/2} (M_{22}^c - iM_{21}^c). \end{aligned} \quad (30)$$

W ogólnym przypadku pomiar opóźnienia przy użyciu kompensatora nie jest możliwy ze względu na brak możliwości wyznaczenia kierunków quasi-głównych odkształceń. Nawet pobieżne porównanie wyrażenia na E_y (29) z wyrażeniem na E_y dla prześwietlania normalnego (21) wskazuje na to, że na podstawie wyrażenia (29) nie można określić opóźnienia w skośnym prześwietlaniu. Wartości natężenia E_y we wzorze (29) zależy nie tylko od opóźnienia wywołanego różnicą odkształceń głównych lecz również od kierunku odkształceń quasi-głównych w danym punkcie. Nie można tu stosować zależności analogicznej do zależności (22) i (23) na natężenie światła wychodzącego z polaryskopu kołowego przy prześwietlaniu normalnym. Dotyczy to zarówno metody Theocarisa [5] z pryzmatem i pomiarem δ_θ w dwóch dowolnych wzajemnie prostopadłych płaszczyznach

odbicia jak i układu z warstwą odblaskową typu retro tak jak ją zastosowali Hung i Pottinger [6].

W tym ostatnim przypadku natężenie światła promienia wychodzącego z układu bez kompensatora jest proporcjonalne do wyrażenia:

$$J \sim (1 + \operatorname{tg}^4 \psi_{ZA}) - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha (\operatorname{tg}^2 \psi_{ZA} - 1)^2 - \cos \delta_{\Theta} \left[2 \operatorname{tg}^2 \psi_{ZA} + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha (\operatorname{tg}^2 \psi_{ZA} - 1)^2 \right] + 2 \sin 2\alpha \sin \delta_{\Theta} (\operatorname{tg}^2 \psi_{ZA} - 1) \operatorname{tg} \psi_{ZA}, \quad (31)$$

gdzie: $\operatorname{tg} \psi_{ZA} \neq 1$ bo $\Theta \neq 0^\circ$

analiza zależności (31) wskazuje wyraźnie, że dla danego Θ (dane $\operatorname{tg} \psi_{ZA}$) minimum natężenia światła zależy od kierunku odkształceń quasi-głównych. Punkty w których natężenie światła jest najmniejsze mogą nie pokrywać się z położeniem izochrom. Błąd popełniany przy interpretacji tego obrazu przy użyciu zależności $J \sim 2(1 - \cos \delta)$ jest błędem systematycznym i nie da się go zmniejszyć przez wykorzystanie metody najmniejszych kwadratów jak to proponują Hung i Pottinger [6].

W przypadku gdy jeden z kierunków głównych odkształceń leży w płaszczyźnie odbicia promieni, otrzymujemy dla najbardziej skomplikowanego układu z lustrami i z kompensatorem:

$$J \sim h^2 + k^2 + 2hk \cos(2\Delta + \Delta_4 + \delta_{\Theta} \pm \delta_c), \quad (32)$$

gdzie: $h = \operatorname{tg}^2 \psi_{ZA}$; $k = \operatorname{tg}^2 \psi_{OD} \operatorname{tg} \psi_4$

Łatwo zauważyć, że J_{\min} dla

$$2\Delta + \Delta_4 + \delta_{\Theta} \pm \delta_c = (2N_{\Theta} \pi + \pi) \quad \text{gdzie} \quad N_{\Theta} = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Jeżeli zmierzmy przy pomocy kompensatora w punkcie o zerowej różnicy odkształceń (dla $\delta_{\Theta} = 0$) ile wynosi $\delta_c = -\pi - \Delta_4 - 2\Delta$ wtedy możemy dokładnie wyznaczyć rząd izochromy. Kontrast prążków jest nieco zmniejszony ale izochromy są na ogół czytelne. Zastosowanie w tym układzie pryzmatu dla zwiększenia kąta przeświećlania Θ prowadzi do zmniejszenia kontrastu prążków.

Jeżeli zastosujemy układ z warstwą odblaskową retro w układzie w którym płaszczyzna odbicia pokrywa się z jednym z kierunków głównych to otrzymujemy zależność

$$J \sim h^2 - 2h \cos(\delta_{\Theta} \pm \delta_c) + 1. \quad (33)$$

W tym układzie również kontrast jest nieco zmniejszony jednak nie występuje konieczność wprowadzania poprawki na opóźnienie wynikające z odbicia.

W układzie z zastosowaniem warstwy odblaskowej retro oraz pryzmatu, po wyznaczeniu kierunków quasi-głównych odkształceń ustawiamy odpowiednio do nich kompensator w polaryskopie kołowym i otrzymujemy natężenie światła, które może być opisane następującą zależnością

$$J \sim 2[1 - \cos(\delta_{\Theta} \pm \delta_c)]. \quad (34)$$

Wyrażenie to jest identyczne do wyrażenia uzyskanego dla przypadku normalnego przeświećlania warstwy.

Metody badań odkształceń z zastosowaniem skośnego prześwietlania warstwy elastoptycznej

Na podstawie podanych powyżej rozważań można zaproponować dwie metody badań dla rozdzielenia odkształceń w konstrukcjach, z zastosowaniem skośnego prześwietlania. Obydwie wymagają we wstępnym etapie wyznaczenia kierunków głównych oraz różnicy głównych odkształceń przy prześwietlaniu normalnym.

Według pierwszej metody opisanej między innymi w [15] konieczne jest zgranie płaszczyzny odbicia promieni z kierunkiem jednego z odkształceń głównych. W tym celu polaryskop musi być wyposażony w układ zwierciadeł kierujących i musi istnieć możliwość obrotu polaryskopu wokół osi prostopadłej do płaszczyzny polaroidów. W takim położeniu dokonuje się pomiaru opóźnienia przy użyciu kompensatora. Kąt przebiegu promieni przez warstwę jest wyznaczony przez ustawienie zwierciadeł i współczynnik załamania światła w warstwie.

Wyznaczenie składowych tensora odkształceń sprowadza się do podstawienia wyników pomiarów do następujących wzorów:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{2kt(A+B)} [\pm \cos\Theta \delta_\theta + B\delta_n], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2kt(A+B)} [\pm \cos\Theta \delta_\theta - A\delta_n], \end{aligned} \quad (35)$$

gdzie

$$\begin{aligned} A &= -\cos^2\Theta \left(\frac{1}{1-\nu} \right) + \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right), \\ B &= -\cos^2\Theta \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) + \left(\frac{1}{1-\nu} \right). \end{aligned}$$

Stałe A i B zależą od kąta Θ . Ze względu na występujące znaki \pm uzyskuje się dwie pary odpowiedzi. Wybór właściwego wyniku na ogół nie następuje trudności dzięki dodatkowym informacjom o odkształceniach badanego obiektu.

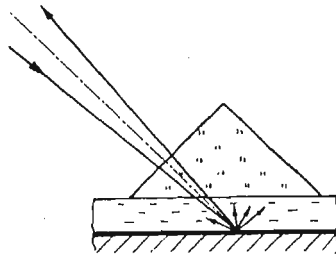
Według metody drugiej, obserwacje izochrom dla skośnego prześwietlania dokonujemy jednostronnie wykorzystując własności odbicia retro (rys. 7). Układ ma przewagę nad układem pierwszym w warunkach ograniczonego dostępu do badanej konstrukcji, polaryskop może być prostszy gdyż nie ma konieczności obrotu całym układem polaroidów. Konieczne jest zastosowanie pryzmatu wykonanego z materiału o współczynniku załamania zbliżonym do współczynniku załamania warstwy elastoptycznej. Pryzmat narzuca kąt prześwietlania warstwy, przy czym kąt ten może być większy niż w pierwszej metodzie (rys. 18).

Opracowanie wyników w drugiej metodzie jest bardziej pracochłonne gdyż składowe tensora odkształcenia wyznacza się z zależności:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{2kt(A+B)} [\pm (c\delta_\theta^2 + D\delta_n^2)^{1/2} + B\delta_n], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2kt(A+B)} [\pm (c\delta_\theta^2 + D\delta_n^2)^{1/2} - A\delta_n], \end{aligned} \quad (36)$$

w których stałe A , B , C i D przyjmują różne wartości w poszczególnych punktach konstruk-

cji zgodnie z wyrażeniami (7). Tak jak w pierwszej metodzie wybór właściwej pary odkształceń głównych z czterech uzyskanych wyników na ogół nie następuje trudności. Stosując pryzmaty o różnych kątach można uzyskać dodatkowe dane, które pozwalają na uśrednienie wyników [6], [7], [8].



Rys. 18

Uwagi końcowe

Dla uzupełnienia wymienimy poniżej kilka dalszych powodów, które mogą stać się przyczyną uzyskiwania błędnych wyników w trakcie badań metodą warstwy elastoptycznej.

Zasadniczą ideą metody warstwy elastoptycznej jest założenie, że warstwa naklejona na powierzchni konstrukcji posiada odkształcenia równe odkształceniom powierzchni konstrukcji

$$\varepsilon_{1P} = \varepsilon_{1K}; \quad \varepsilon_{2P} = \varepsilon_{2K}.$$

Wielkość względnego opóźnienia składowych promieni w warstwie elastoptycznej wyraża się następującą zależnością (2) (5)

$$\delta = 2kt(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_P, \quad (37)$$

gdzie t — jest grubością warstwy

k — jest współczynnikiem czułości warstwy

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — są odkształceniami głównymi w warstwie.

Wielkości ε_1 i ε_2 rzeczywistych konstrukcji znajdujących się w zakresie odkształceń sprężystych nie przekraczają wartości $5 \cdot 10^{-3}$. Wartość k zależy od stosowanego materiału i waha się w granicach $k = 0.05 \div 0.15$

Dla uzyskania dużych efektów elastoptycznych, dużego względnego opóźnienia składowych promieni, należałoby stosować grube warstwy elastoptyczne. Nie jest to jednak możliwe z dwóch powodów

a. Efektu umocnienia konstrukcji przez warstwę elastoptyczną [9]

b. Nierównomierności rozkładu odkształceń wzdłuż grubości warstwy [10].

Efekt wzmocnienia zmusza do wprowadzenia pewnych współczynników korekcyjnych przy obliczaniu odkształceń konstrukcji. Wartość tych współczynników została podana między innymi w pracach [15] [14].

Nierównomierność rozkładu odkształceń na grubości warstwy zaczyna odgrywać istotną rolę wtedy gdy badana konstrukcja nie znajduje się w płaskim stanie naprężeń

lub gdy różni się współczynnik Poissona warstwy i konstrukcji. Różnice te występują w szczególności przy badaniu konstrukcji z materiałów anizotropowych. Nierównomierność rozkładu odkształceń wzdłuż grubości warstw pojawia się też przy badaniu stref plastycznych. Obserwowany efekt elastoptyczny w tym przypadku jest pewnym uśrednieniem co w niektórych przypadkach może prowadzić do znacznych błędów. Uwzględnienie tego efektu jest trudne i wymaga indywidualnej analizy w każdym przypadku. Ograniczenie grubości stosowanych warstw sprzyja zmniejszeniu tego rodzaju błędów. Szczególnie stosując metodę skośnego prześwietlania należy pamiętać, że wyniki mogą być poprawne tylko wtedy gdy warstwa elastoptyczna znajduje się w płaskim stanie naprężenia.

Dość często przy badaniu np. powłok mamy do czynienia z nałożeniem się stanu zginania ze stanem błonowym. Dochodzi wtedy do ciągłej zmiany kierunków głównych wzdłuż grubości warstwy. W pracach [11] [12] zaproponowano metodę wyznaczania odkształceń przy założeniu, że skręcanie kierunków głównych jest równomierne wzdłuż grubości warstwy.

Przy stosowaniu metody skośnego prześwietlania na skutek istnienia gradientu naprężeń wzdłuż normalnej do płaszczyzny warstwy może również powstawać błąd w wyniku zmiany kierunków głównych. Wielkość tego błędu została oszacowana w pracy [13].

Autorzy niniejszej pracy zaobserwowali, że przy skośnym prześwietlaniu warstwy na skutek dyfuzji wody z atmosfery do płyt z żywicy epoksydowej Epidian 5 pojawia się pewien wstępny efekt elastoptyczny analogiczny do efektu brzegowego. Wynika to z faktu, że dyfuzja następuje na wszystkich powierzchniach warstwy [18] [20]. Na pojawienie się tego efektu może też mieć wpływ sposób odlewania płyt. W rezultacie mamy w warstwie pewien wstępny zmieniający się wzdłuż grubości rozkład odkształceń. Stan ten nakłada się na stan odkształceń wynikających z odkształceń konstrukcji powodując skręcanie kierunków głównych wzdłuż grubości warstwy. Stan ten nie ujawnia się w przypadku prześwietlania normalnego natomiast przy prześwietlaniu skośnym odgrywa istotną rolę. Wynika stąd konieczność sprawdzenia warstwy elastoptycznej przed obciążeniem zarówno w świetle przechodzącym normalnie jak i skośnie.

W pracy przedstawiono metodę analizy przemian strumienia światła w polaryskopie do badań metodą warstwy elastoptycznej. Przedstawiono też układ pozwalający na badanie w świetle przechodzącym skośnie przy wykorzystaniu zwykłego polaryskopu bez konieczności dodatkowego wyposażenia. Omówiono też zalety i wady układu w porównaniu z układem standardowym.

Zbudowanie modelu matematycznego do analizy przemian strumienia światła w polaryskopie pozwoliło na wyjaśnienie szeregu przyczyn powstawania błędów pomiarów, szczególnie przy zastosowaniu metody skośnego prześwietlania.

Przedstawione wyniki pochodzą z prac wykonanych w ramach problemu węzłowego 05.12 „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych” koordynowanego przez IPPT PAN.

Literatura cytowana w tekście

1. W. SHURCLIFF, *Polarized light: Production and use*, Harvard Univ. Press, Cambr. Mass. 1962.
2. M. BORN, R. WOLF, *Principles of Optics*, Perg. Press 1975.

3. E. WERNER, *Zur Bestimmung der Spannungsdoppelbrechung von optischen Glas* veb. Jenaer Glaswerk Schott Gen. Jena.
4. R. WOJNAR, *Uogólnione macierze Jones'a i ich zastosowanie w elastoptyce*, VII Symp. Badań Doświadczalnych w Mech. Ciała Stałego, W-wa 1976.
5. P. S. THEOCARIS, *Exp. Solution of Elastic-Plastic Plane Stress Problems* J. of Applied Mechanics, Dec. 1962.
6. Y. Y. HUNG, M. G. POTTINGER, *An improved Oblique-incidence Technique for Principal-strain Separation in Photoelastic Coatings*, Exp. Mech. May 1980.
7. J. M. ALLISON, *Least Squares Solution of the Oblique Incidence Equations* VDI-Berichte Nr 102, 1966.
8. R. J. STANFORD, *Application of Least-squares Method to Photoelastic Analysis*, Exp. Mech. June 1980.
9. F. ZANDMAN, A. S. REDNER, E. J. RIEGNER, *Reinforcing Effect of Birefringent Coatings*. Exp. Mech. Feb. 1962.
10. J. DUFFY, *Effect of the Thickness of Birefringent coatings*, Exp. Mech. March 1961.
11. Н. К. Аден, *К применению фотоупругих покрытий при исследовании оболочек*, Изв. Акад. Наук СССР, Мех. и Маш. Но 6. 1964.
12. Н. К. Аден, *Интегральная фотоупругость*, Волгус, Таллин 1975.
13. В. А. Жилькин, *Некоторые вопросы метода фотоупругих покрытий*, Труды Новосоьб. инст. инженеров желез. трансп. Выпуск 137, 1972.
14. Z. ORŁOŚ red., *Doświadczalna Analiza Odkształceń i Naprężeń*, W-wa 1977.
15. J. STUPNICKI, *Pomiary naprężeń metodą elastoptycznej warstwy powierzchniowej*. Arch. Bud. Maszyn Tom XVI, Zeszyt 3, 1969.
16. J. KOMOROWSKI, J. STUPNICKI, *Źródła Błędów w odczycie rzędu izochromy przy skośnym prześwietlaniu powierzchniowej warstwy optycznie czynnej*, VIII Symp. Doświadczalnych Badań w Mech. Ciała Stałego W-wa 1978.
17. J. KOMOROWSKI, J. STUPNICKI, *Sprawozdanie z I etapu prac nad tematem Rozwijanie metody elastoptycznej warstwy powierzchniowej do wyznaczania naprężeń w konstrukcjach* (Problem węzłowy 05.12) dla IPPT PAN, 1978.
- 18 — jak wyżej sprawozdanie z II etapu, 1979.
19. J. KOMOROWSKI, J. STUPNICKI, *Sources of error in oblique incidence photo-stress method*, VIII Wszecznizwiązkowa Konferencja poświęcona elastoptyce, Tallin 1979 Vol. II.
20. J. KOMOROWSKI, J. STUPNICKI, *Sources of error in Oblique incidence photo-stress method*, Proc. of the I.U.T.A.M. Symposium on „Optical Methods in Mechanics of Solids“ 1979 Sijthoff Noordhoff 1981.

Резюме

МЕТОД НАКЛОННОГО ПРОСВЕЧИВАНИЯ ФОТОУПРУГИХ ПОКРЫТИЙ

В работе представлена математическая модель для анализа эффектов, появляющихся вследствие различий в конструкции полярископов, применяемых в методе фотоупругих покрытий. Эта модель позволила выявить ряд причин ошибок измерений, целью которых является разделение деформаций. Главные преимущества этого способа состоят в использовании стандартного полярископа без дополнительных устройств и в возможности получить значения деформаций с повышенной точностью.

Summary

OBLIQUE INCIDENCE IN PHOTO-STRESS METHOD

Paper presents mathematical model permitting analysis of the effect of different type of polariscopes in photo-stress method. This model enable pointing out errors in oblique incidence method. New technique of photo-stress measurement to separate strains is also described. Its principal advantages are that only standard photo-stress equipment is needed and results obtained by this method are more reliable.

O KLASACH 2-DRZEW W SYNTEZIE DYSKRETYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH

JÓZEF WOJNAROWSKI¹⁾
STANISŁAW ZAWIŚLAK²⁾

Politechnika Śląska w Gliwicach

Streszczenie

W pracy sformułowano jedno z możliwych ujęć zadania syntezy układów mechanicznych w reprezentacji grafów. Rozważono układy dyskretne złożone z elementów Voigta lub Maxwella. Wykazano, że w zadaniu syntezy istotne znaczenie mają dwa typy szczególnych 2-drzew grafu będącego obrazem struktury połączeń układu mechanicznego. W zakończeniu pracy podano algorytm syntezy dyskretnego układu mechanicznego z elementami Voigta.

1. Wprowadzenie

W wielu dziedzinach nauki i techniki opracowuje się metody oraz algorytmy syntezy układów fizycznych różnych typów.

Zadanie syntezy drgającego układu mechanicznego można ująć następująco: na podstawie siłowej lub prędkościowej funkcji przejścia układu należy podać strukturę połączeń oraz wartości liczbowe wszystkich parametrów układu. W tak sformułowanym zadaniu korzystnie jest zastosować model układu w reprezentacji grafów. Są one, jak również i hipergrafy [3, 8], wygodnym sposobem opisu struktury połączeń elementów układu mechanicznego.

W odróżnieniu od prac [1], [2] używane grafy są obciążone, z założenia, wagami w postaci wielomianów. Funkcje przejścia, o których mowa powyżej można przedstawić w postaci $\frac{L}{M} \cdot z$,

$$L = \sum_{d_2 \in D_2} w(d_2), \quad M = \sum_{d_1 \in D_1} w(d_1),$$

gdzie d_i — i -drzewo, D_i — pewne zbiory i -drzew grafu układu mechanicznego, $i = 1, 2$; $w(\cdot)$ — pewne wyrażenia przypisane i -drzewom, z — wielkość przypisana pewnej krawędzi

¹⁾ Profesor Instytutu Podstaw Konstrukcji Maszyn

²⁾ Asystent Instytutu Matematyki

grafu. Wyrażenia L , M można przedstawić i obliczać wieloma sposobami, np. za pomocą funkcji jednoczesności i funkcji wyznaczkowej [1, 2, 8].

W niniejszej pracy scharakteryzowano zbiór D_2 , czyli zbiór 2-drzew istotnych w procesie syntezy dla pewnej klasy układów mechanicznych określonych w rozdziale 2.

Definicje takich pojęć, jak układ mechaniczny [2], funkcją przejścia [4, 8], graf, charakterystyki grafu [5], liczba strukturalna, działania na liczbach strukturalnych [2, 6, 8] przyjmujemy za znane.

W modelowaniu układów mechanicznych za pomocą grafów istotne znaczenie odgrywają pewne zbiory grafów częściowych danego grafu, a mianowicie drzewa i 2-drzewa [8, s. 37].

Definicja 1. Niech $X = [{}_1X, {}_2X, {}_3X]$ jest grafem. Oznaczamy $|{}_1X| = n_1$, k -drzewem grafu X , $k = 1, 2, \dots, n_1$, nazywamy graf częściowy o $n_1 - k$ krawędziach nie tworzących cykli ani pętli, 1-drzewo nazywamy drzewem.

2. O rozważanych układach mechanicznych

W pracy będziemy rozważać układy dyskretne, liniowe, o skończonej liczbie stopni swobody n , z elementami o modelach reologicznych Voigta lub Maxwella. Elementy mają niezmiennie w czasie własności mechaniczne oraz są nieorientowane, tzn. zmienna jest przekazywana przez dany element w ten sam sposób niezależnie od zwrotu zmiennej.

Na układ, na który nałożono więzy holonomiczne, obustronne, działają wymuszenia siłowe. Przy tych założeniach w procesie syntezy układu poszukujemy struktury funkcjonalnej układu mechanicznego U w postaci modelu reologicznego według schematu Voigta lub Maxwella, spełniającej empiryczną postać funkcji przejścia $K(p)$ postaci:

$$(1) \quad K(p) = \frac{g_l p^l + g_{l-1} p^{l-1} + \dots + g_{s+1} p^{s+1} + g_1 p^s}{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_{r+1} p^{r+1} + a_r p^r},$$

gdzie:

$l, m, r, s \in N \cup \{0\}$; $a_i, g_i \in R$; $p \in C$; N, R, C oznaczają odpowiednio zbiory liczb naturalnych, rzeczywistych i zespolonych.

Funkcja przejścia $K(p)$ układów stabilnych spełnia następujące warunki [4, 7]:

- 2.1. Funkcja $K(p)$ nie ma biegunów dla takich p , że $\text{Re}(p) > 0$ oraz jeżeli ma bieguny na osi urojonej, to są one pojedyncze o urojonych residuach.
- 2.2. Funkcja $K(p)$ nie ma zer dla takich p , że $\text{Re}(p) > 0$.

3. Klasa grafów układów mechanicznych

W prezentowanej metodzie strukturę połączeń dyskretnego układu mechanicznego U przedstawiamy w postaci grafu biegunowego $X_{\circ\circ}^X$, mocno spójnego, którego krawędziom przyporządkowujemy poszczególne charakterystyki układu [9, s. 96]. Wtedy można mówić o równoważności $X \cong U$ a graf biegunowy $X_{\circ\circ}^X$, czyli trójka: graf abstrakcyjny oraz para funkcji opisujących, zapisujemy w postaci:

$$(2) \quad X_{\circ\circ}^X = [X, {}_1f, {}_2f],$$

gdzie: $X = [{}_1X, {}_2X, {}_3X]$ jest grafem abstrakcyjnym, czyli trójką zbiorów ${}_1X$ — zbiór wierzchołków, ${}_2X$ — zbiór krawędzi, ${}_3X$ — relacja incydencji, ${}_3X \subset {}_1X \times {}_2X \times {}_1X$, natomiast funkcje ${}_1f, {}_2f$ definiujemy następująco:

$$(3) \quad {}_1f: {}_1X \rightarrow [{}_1S, {}_2S],$$

$$(4) \quad {}_2f: {}_2X \rightarrow [N, Z],$$

$Z = \{m_i p^2, b_i p, c_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ to zbiór wag krawędzi będących sztywnościami dynamicznymi, ${}_1S, {}_2S$ — para wielkości fizykalnych charakteryzujących układ U .

Z uwagi na to, że graf X układu będziemy przedstawiali bez krotnych krawędzi¹⁾, to przypisane im wagi w ogólnym przypadku mogą być wielomianami o postaci $z_i = m_i p^2 + b_i p + c_i$. Zauważmy, że grafy dyskretnych układów mechanicznych posiadają wyróżniony wierzchołek ${}_1x_0$ reprezentujący układ odniesienia oraz n wierzchołków ${}_1x_i$, $i = 1, \dots, n$ reprezentujących masy, z tym że w układach z elementami Maxwella, a więc z szeregowo połączonymi sprężynami i tłumikami występują jeszcze tzw. wierzchołki przegubowe.

Stopień incydencji wierzchołka ${}_1x_0$ reprezentującego układ odniesienia dla układów mechanicznych z elementami Voigta wynosi $n + n'$, gdzie n' oznacza ilość krawędzi czynnych reprezentujących wymuszenia.

W dalszym ciągu będziemy rozważać układy z jednym wymuszeniem siłowym $n' = 1$, ponieważ dla układów rozpatrywanych w tej pracy spełniona jest zasada superpozycji.

Przyjmujemy, że krawędź reprezentująca wymuszenie łączy wierzchołek odniesienia ${}_1x_0$ z pierwszym wierzchołkiem ${}_1x_1$ reprezentującym masę m_1 . Jest to jedyną parą wierzchołków grafu połączona dwoma równoległymi krawędziami. Graf częściowy X_b , złożony wyłącznie z krawędzi biernych jest grafem zwykłym (w sensie Korzana [5]).

Graf X układu traktujemy jako obraz geometryczny liczby strukturalnej A , dzięki temu siłową funkcję przejścia $K(p)$ można wyrazić za pomocą funkcji jednoczesności

$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial l}, \frac{\partial A}{\partial i} \right)$ oraz funkcji wyznaczkowej $\det_z \left(\frac{\partial A}{\partial l} \right)$ liczby strukturalnej A [2, 8].

Mamy wówczas:

$$(5) \quad K(p) = \frac{\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial l}, \frac{\partial A}{\partial i} \right)}{\det_z \left(\frac{\partial A}{\partial l} \right)} \cdot z_i,$$

gdzie z_i jest wagą krawędzi łączącej wierzchołek odniesienia ${}_1x_0$ z wierzchołkiem ${}_1x_i$ — reprezentującym badaną odpowiedź drgającego układu mechanicznego.

Tak więc krawędzie „1” oraz „i” reprezentują odpowiednio wymuszenie siłowe i odpowiedź układu. W tych rozważaniach przyjmujemy, że są one skrajnymi krawędziami grafu układu mechanicznego (rys. 1a).

W rozważanych grafach, które muszą być planarne [2] mogą jeszcze występować krawędzie sprężyn.

Przykładowo na rysunku 1 będzie to krawędź 4.

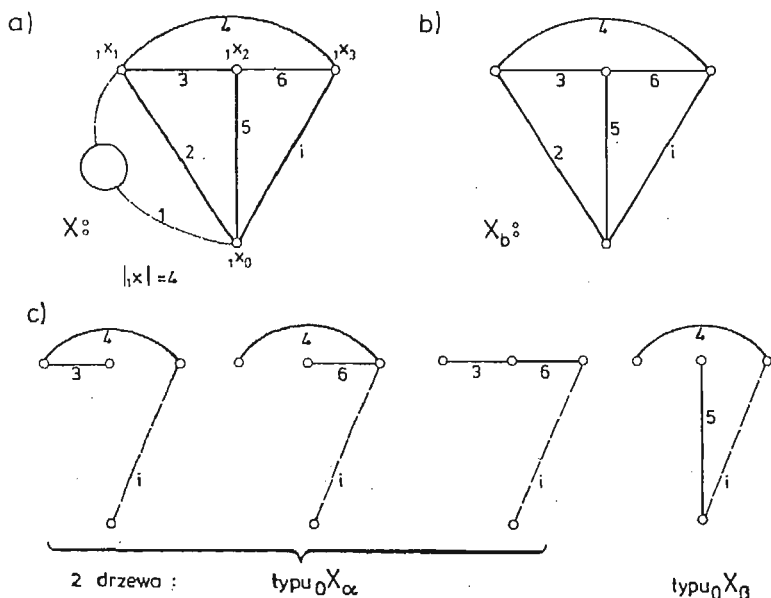
W interpretacji grafów składniki licznika funkcji $K(p)$, wyrażonej wzorem (2), są

¹⁾ multikrawędzi.

2-drzewami grafu X (rys. 1c). Znaki funkcji jednoczesności określa się na podstawie przeciwobrazu geometrycznego liczby strukturalnej A , graf dualny do X jest przeciwobrazem liczby A . Tylko grafy planarne posiadają graf dualny.

Krawędzie łączące wierzchołek odniesienia oraz wierzchołki reprezentujące masy będziemy nazywali krawędziami masowymi. Z rozważań o postaci grafu wynika, że wszystkie współczynniki jednomianów funkcji jednoczesności mają ten sam znak (plus) bowiem krawędzie „1” oraz „i” są incydentne (układ ma tzw. strukturę trójkową). Ze struktury trójkowej wynika również następujący warunek na funkcję przejścia

$$(6) \quad 0 \leq |K(p)| \leq 1 \quad \text{dla} \quad p \in R.$$



Rys. 1

4. O postaci 2-drzew w syntezie drgających układów mechanicznych

O ile zawsze określamy zbiór wszystkich drzew grafu jako modelu układu mechanicznego, to w zbiorze 2-drzew będziemy interesowali się szczególnym ich podzbiorem. Zgodnie z definicją funkcji jednoczesności wyrażenie $\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial l}, \frac{\partial A}{\partial i} \right)$ jest sumą algebraiczną jednomianów odpowiadających takim 2-drzewom grafu X , których kolumnowa reprezentacja występuje równocześnie w liczbach $\frac{\partial A}{\partial l}$ oraz $\frac{\partial A}{\partial i}$. Innymi słowy interesują nas tylko te 2-drzewa, które stają się drzewami grafów zredukowanych X_1 oraz X_i powstałych z grafu X przez zwarcie końców odpowiednio krawędzi 1 oraz i .

Te szczególne 2-drzewa charakteryzuje następujący lemat.

Lemat 1. O postaci 2-drzew grafu biegunowego będącego modelem układu mechanicznego.

Założenia: X — graf reprezentujący układ mechaniczny dyskretny składający się z elementów Voigta.

A — liczba strukturalna taka, że graf X jest obrazem geometrycznym.

Teza: szczególne 2-drzewa reprezentujące kolumny liczby $\frac{\partial A}{\partial l} \cap \frac{\partial A}{\partial i}$ są dwu typów:

X_α — dwudrzewa, które nie zawierają krawędzi masowych. Jedna składowa spójności rozpięta jest na wierzchołkach masowych (jest drzewem grafu generowanego przez wierzchołki masowe), druga jest zdegenerowana, tworzy ją izolowany wierzchołek ${}_1x_0$.

X_β — dwudrzewa, których obie składowe spójności zawierają krawędzie. Do jednej składowej należą wierzchołki leżące pod krawędziami sprzężenia i wierzchołki odniesienia. Do drugiej składowej spójności pozostałe wierzchołki reprezentujące masy. Krawędzie należące do obu składowych spójności tworzą drzewa podgrafów rozpiętych na odpowiednich zbiorach wierzchołków.

Dowód: szczególne 2-drzewo X_α reprezentuje kolumnę liczby strukturalnej $\frac{\partial A}{\partial l} \cap \frac{\partial A}{\partial i}$, bo operacja zwarcia końców krawędzi 1 oraz i prowadzi do powstania grafów X_1 oraz X_i o ilości wierzchołków o jeden mniejszy niż w grafie X ($|X_1| = |X_i| = n_1 - 1$), a krawędzie tego 2-drzewa tworzą teraz graf częściowy spójny grafów przekształconych X_1 oraz X_i , bez pętli i cykli, o $n_1 - 2 = |X_i| - 1 = |X_1| - 1$ krawędziach, czyli drzewo grafów X_1 oraz X_i . Ponieważ grafy X_1 oraz X_i są obrazami geometrycznymi liczb $\frac{\partial A}{\partial l}$ oraz $\frac{\partial A}{\partial i}$ więc kolumna złożona z numerów krawędzi 2-drzewa znajdzie się w obu tych liczbach.

Szczególne 2-drzewo X_β , reprezentuje jedną z kolumn liczb $\frac{\partial A}{\partial l} \cap \frac{\partial A}{\partial i}$, bo zwarcie dwóch składowych spójności wierzchołkami przynależnymi do różnych składowych nie powoduje powstania cyklu i prowadzi do powstania spójnego grafu częściowego X_1 , X_i grafów przekształconych X_1 oraz X_i w zależności od zwarcia krawędzi a mianowicie

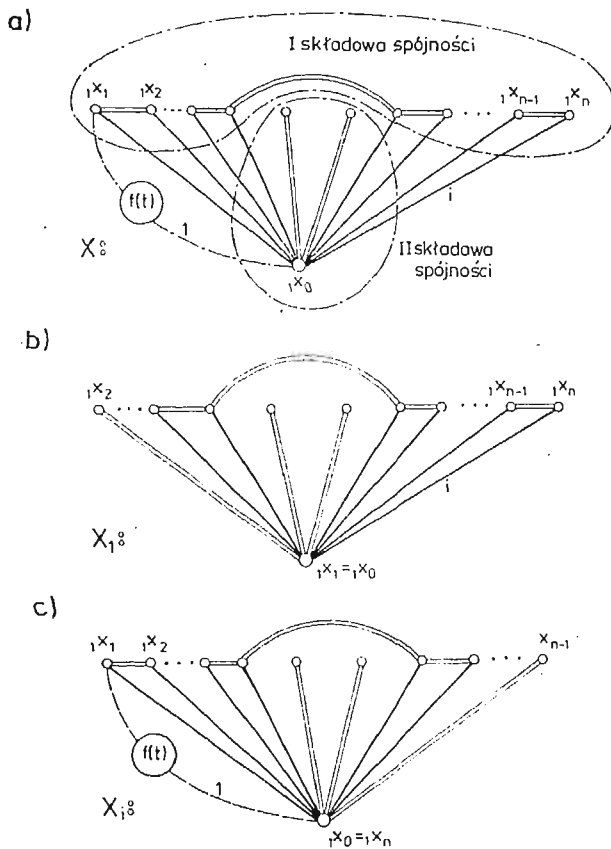
$$X_1 \leftarrow \frac{\text{zwarcie}}{\text{krawędzi } l} X_\beta \cdot \frac{\text{zwarcie}}{\text{krawędzi } i} \rightarrow X_i.$$

Mamy $|X_1| = |X_i|$ oraz X_1 , X_i posiadają zbiór krawędzi ponumerowanych tymi samymi liczbami naturalnymi, mają więc taką samą reprezentację kolumnową (rys. 2).

Liniami podwójnymi zaznaczono 2-drzewo X_β grafu X (rys. 2a), drzewo X_1 grafu X_1 (rys. 2b) i drzewo X_i grafu X_i (rys. 2c). W 2-drzewie X_β nie może być drogi z wierzchołka ${}_1x_0$ do ${}_1x_i$ ani ${}_1x_n$, bo po zwarciu krawędzi 1 lub i powstałby cykl, czyli otrzymany graf częściowy nie byłby drzewem grafów X_1 lub X_i . □

Mając na uwadze powyższy lemat można wykazać, że siłowa funkcja przejścia $K(p)$ układów z elementami Voigta musi spełniać następujące warunki:

- 4.1. $m \in$ parzystych,
- 4.2. $2 \leq l \leq m - 1$,



Rys. 2

$$4.3. \quad 0 \leq r \leq \frac{m}{2},$$

$$4.4. \quad 0 \leq s \leq \frac{m}{2} + 1,$$

$$4.5. \quad s \geq r, \quad \text{ale nie może być } l = s = r.$$

Wykażemy, przykładowo niektóre z nich:

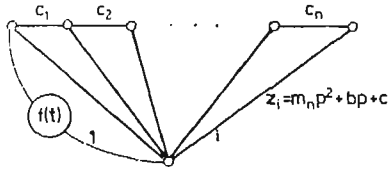
4.1. Wartość drzewa składającego się z krawędzi masowych zawiera składnik $m_1 m_2 \dots m_n p^{2^n}$, ponieważ czynnika o wyższej potędze niż p^{2^n} nie ma, więc maksymalny stopień mianownika funkcji $K(p)$ $m = 2n$.

4.2. Stopień licznika $l = 2$ realizuje się w układzie, którego graf przedstawiono na rys. 3.

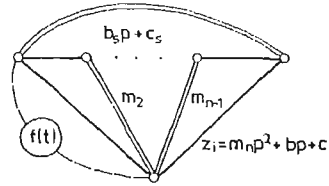
Zauważmy, że liczba strukturalna $\frac{\partial A}{\partial I} \cap \frac{\partial A}{\partial i}$ ma tylko jedną kolumnę. Licznik funkcji $K(p)$ jest więc postaci $c_1 c_2, \dots, c_{n-1} \cdot z_i$. Waga z_i jest wielomianem stopnia drugiego więc $l = 2$.

Stopień $l = m - 1$ jest zrealizowany w układzie o grafie przedstawionym na rys. 4.

Z lematu o postaci 2-drzew wynika, że 2-drzewo zaznaczone na rysunku 4 podwójnymi liniami reprezentuje jedną z kolumn liczbby $\frac{\partial A}{\partial l} \cap \frac{\partial A}{\partial i}$, a więc licznik funkcji $K(p)$ zawiera składnik $m_2 m_3 \dots m_{n-1} \cdot b_s m_n p^{2(n-1)+1}$.



Rys. 3



Rys. 4

Nie ma innego składnika, w którym byłyby więcej krawędzi masowych, przeto $l = 2(n-1)+1 = 2n-1 = m-1$.

Pozostałe warunki 4.3 - 4.5 można analogicznie wykazać.

Dla układów o elementach Maxwella warunki dla siłowej funkcji przejścia przyjmują postać:

- 4.1. $n = 1 \Rightarrow m = 3,$
- 4.2. $3n \leq m \leq 5n-3$ dla $n \geq 2,$
- 4.3. $m - 2n_{\max} + 2 \leq l \leq m - 2,$
- 4.4. l zmienia się co 2,
- 4.5. $s = n_{\max} + 1,$
- 4.6. $r = n_{\max},$

gdzie:

n_{\max} — największa liczba naturalna n spełniająca warunek 4.2.

5. Algorytm syntezy dla układów mechanicznych dyskretnych z elementami typu Voigta

Na podstawie danej funkcji przejścia $K(p)$ należy podać graf układu mechanicznego oraz wartości wszystkich jego parametrów.

Funkcja $K(p)$ musi spełniać warunki 2.1, 2.2, zależność 6 oraz warunki 4.1 - 4.5¹⁾. Jeżeli funkcja nie spełnia warunków 4.1 - 4.5, to oznacza, że nie można znaleźć układu składającego się z elementów Voigta realizującego tę funkcję; co nie wyklucza możliwości zbudowania układu składającego się z innych elementów.

Po skonstruowaniu grafu obciążonego układu mechanicznego wyznaczamy liczby strukturalne potrzebne do dalszych obliczeń a w szczególności $A, \frac{\partial A}{\partial l}, \frac{\partial A}{\partial i}, \frac{\partial A}{\partial i}$ oraz $\frac{\partial A}{\partial l} \cap \frac{\partial A}{\partial i}$.

Następnie tworzymy układ równań przyrównując a_i, g_i do odpowiednich wyrażeń zapisanych za pomocą funkcji działających na liczbę strukturalną A , czyli porównujemy

¹⁾ dla elementów Voigta

wzory (1) i (5). Otrzymamy $i_r = l - s + p - r + 2$ równań. Metodę rozwiązywania układu równań takiej postaci można znaleźć np. w pracy [1]. Musi być wtedy spełniony dodatkowo warunek:

$$5.1. \quad i_n \geq i_r,$$

gdzie i_n — ilość niewiadomych poszukiwanych parametrów układu. Warunek 5.1 pociąga za sobą następującą nierówność

$$5.2. \quad m \geq 6.$$

Podany teraz sposób rysowania grafów obciążonych układów mechanicznych, których wykładniki transmitancji spełniają warunki

$$m \geq 6, m \in \text{zbioru liczb parzystych}, \\ 2 \leq l \leq \frac{m}{2} + 1 \text{ oraz warunki 4.3—4.5.}$$

1° Rysujemy n_1 wierzchołków, $n_1 = \frac{m}{2} + 1$. Jeden z nich ${}_1x_0$ traktujemy jako wierzchołek odniesienia, pozostałych $\frac{m}{2}$ wierzchołków reprezentuje masy układu.

2° Łączymy krawędziami wierzchołki masowe ${}_1x_i$ z wierzchołkiem odniesienia ${}_1x_0$ i dołączamy krawędź wymuszenia (łączy pierwszy wierzchołek masowy ${}_1x_1$ z wierzchołkiem odniesienia). Przypisujemy wagi postaci $m_i p^2$ kolejnym krawędziom masowym.

3° Dla zapewnienia wykładnika l krawędziom łączącym wierzchołki reprezentujące masy nadajemy wagi bp lub c . Wagę bp nadajemy $l-2$ razy, pozostałym krawędziom przypisujemy wagi c . Dla różnych konfiguracji takiego przyporządkowania mamy różne układy mechaniczne.

4° Dla zapewnienia w liczniku wykładnika s wagi postaci bp zmieniamy na $bp+c$. Możemy również zmienić wagę krawędzi i -tej na mp^2+bp , mp^2+c lub mp^2+bp+c , tak aby suma minimalnych stopni wykładników p wielomianów z_i oraz odpowiadającego 2-drzewu o największej ilości wag postaci $bp+c$ była równa s .

5° Dla zapewnienia wykładnika r uzupełniamy teraz wagi krawędzi masowych o składniku bp , c lub $bp+c$. Krawędzie masowe nie wchodzi do żadnego 2-drzewu reprezentującego kolumnę liczby $\frac{\partial A}{\partial l} \cap \frac{\partial A}{\partial i}$, więc wartości l ani s nie zmienimy. Aby na podstawie danego grafu można było prowadzić dalsze etapy syntezy musi być spełniony warunek dotyczący ilości parametrów układu i_n , $i_n \geq l - s + p - r + 2$. Do niektórych wag krawędzi masowych można jeszcze dodać składniki bp lub c tak, aby powyższa nierówność była spełniona. Możemy to przeprowadzić bowiem: dla $s = 0$, $r = 0$, $l = \frac{m}{2} + 1$, mamy

$$i_r = m - r + l - s + 2 = m + \frac{m}{2} + 3 = \frac{3}{2} \cdot m + 3,$$

$$i_n = \frac{m}{2} \cdot 3 + \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \cdot 2 = \frac{5}{2} \cdot m - 2.$$

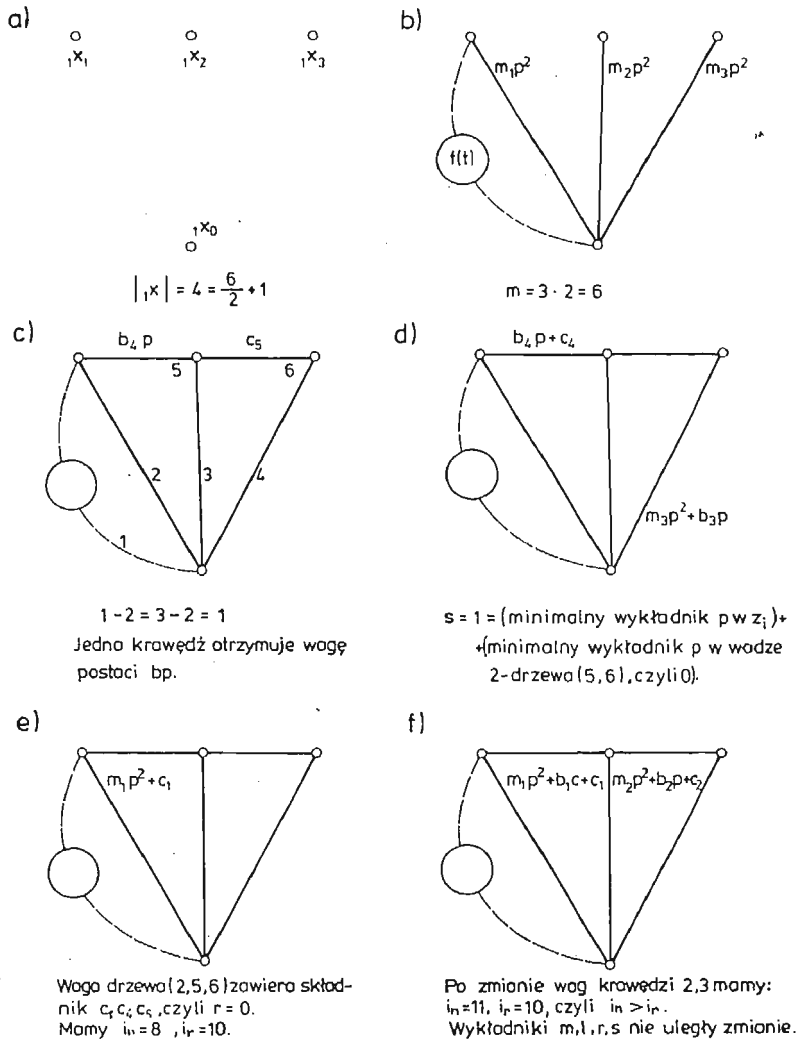
Zauważmy, że dla $m \geq 6$, $i_n \geq i_r$. Jeżeli l , s lub r zmienia się o 1, to ubywa również po jednym parametrze układu i nierówność też jest zachowana.

Przykład

Narysować graf układu realizującego funkcję przejścia w postaci:

$$(7) \quad K(p) = \frac{g_3 p^3 + g_2 p^2 + g_1 p}{a_6 p^6 + a_5 p^5 + \dots + a_1 p + a_0},$$

Dla funkcji (7) warunki 4.1 - 4.5 są spełnione. Załóżmy, że $K(p)$ spełnia również warunki 2.1, 2.2, 3.1. Z postaci funkcji przejścia (7) wynika, że $m = 6$, $l = 3$, $s = 1$, $r = 0$. Oznacza to, że liczba wierzchołków grafu wynosi $|X| = \frac{6}{2} + 1 = 4$. Na rysunku 5 przedstawiono kolejne etapy rysowania grafu i przyporządkowania jego krawędziom wag.



Rys. 5

Przedstawiony sposób jest możliwy do stosowania dla układów o małej liczbie stopni swobody, ponieważ na każdym etapie istnieje kilka możliwości przyporządkowania wag i dlatego sposób ten jest trudno algorytmizowalny.

Literatura cytowana w tekście

1. K. ARCZEWSKI, *Analiza i synteza drgających układów mechanicznych metodą liczb strukturalnych*, Dys. doktorska, Pol. Warszawska, Warszawa 1974.
2. S. BELLERT, H. WOŹNIACKI, *Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych*, WNT, Warszawa 1968.
3. A. BUCHACZ, *Metoda grafów i liczb strukturalnych w badaniu drgań złożonych układów mechanicznych*, Dys. doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1978.
4. A. FIALKOW, I. GERST, *The Transfer Function of General Two Terminal Pair RC Networks*, Guart, Appl. Math. Vol. 10, No 2, pp. 113 - 127, July 1952.
5. B. KORZAN, *Elementy teorii grafów i sieci, Metody i zastosowania*. WNT, Warszawa 1978.
6. D. SIMSON, J. SŁOŃSKI, B. WOJDYŁO, *Charakteryzacja pierścieni liczb strukturalnych, Analiza struktury idealów i pewnych własności arytmetycznych tych pierścieni*. Instytut Matematyki. UMK w Toruniu. Preprint nr 8, Toruń 1973.
7. L. WEINBERG, *Linear Network Analysis and Synthesis*. Mc Graw-Hill, New York 1962.
8. J. WOJNAROWSKI, *Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych*. IPKM Pol. Śląska, PTMETS O/Gliwice z. 38, Gliwice 1977.
9. J. WOJNAROWSKI, *Zastosowanie grafów w analizie drgań układów mechanicznych*. PWN, Warszawa—Wrocław 1981.
10. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ. *Analiza i synteza liniowych układów mechanicznych metodą liczb strukturalnych*. ZN IMiPKM z. 21/55, Gliwice 1974.
11. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ. *O możliwości optymalizacji układów mechanicznych przy użyciu liczb strukturalnych*. Zbiór ref. XIII Sympozjonu „Optymalizacja w Mechanice“, PTMETS O/Gliwice 1974.

Резюме

О КЛАССАХ 2-ДЕРЕВЬЕВ В СИНТЕЗЕ ДИСКРЕТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе сформулирована одна из возможных задач синтеза механических систем представляемых графами. Ряд рассуждений представлен для дискретных систем, состоящих из элементов Фойгта и Максвелла. Доказано, что в задаче синтеза существенное значение имеют два типа особых 2-деревьев графа, являющегося изображением структуры связи механической системы. В конце работы представлен алгоритм синтеза дискретной системы с элементами Фойгта.

Summary

ON THE CLASSES OF 2-TREES IN THE SYNTHESIS OF DISCRETE MECHANICAL SYSTEMS

In the paper a formulation of the problem of synthesizing mechanical systems has been proposed. The discussion refers to discrete mechanical systems composed of Voigt's and Maxwell's elements. It has been proved that in the problems of synthesis two types of 2-trees graphs (the images of joint structure of mechanical systems) play an important role. An algorithm of the synthesis of discrete mechanical systems with Voigt's elements has been given.

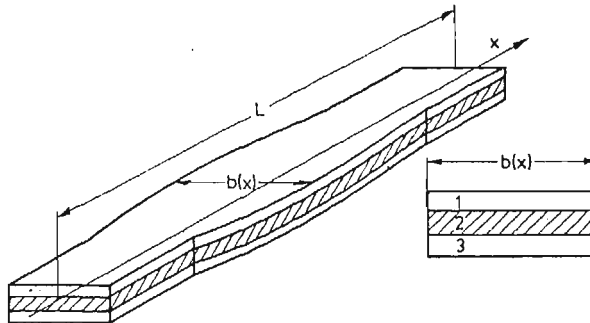
Praca została złożona w Redakcji dnia 23 grudnia 1980 roku.

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE BELKI TRÓJWARSTWOWEJ W PROCESIE USTALONYCH, HARMONICZNYCH DRGAŃ WYMUSZONYCH

ZYGMUNT BASISTA (KRAKÓW)

*Institut Mechaniki i Podstaw
Konstrukcji Maszyn
Politechnika Krakowska*

R. A. Di TARANTO [1] wyprowadził równanie różniczkowe drgań wolnopodpartej belki trójwarstwowej (typu „sandwich”), w której warstwa wewnętrzna posiada liniowe własności lepkości-prężyste (moduł zespolony) pełniąc rolę elementu tłumiącego drgania. Drgania wymuszone takiej belki analizowano w [2]. W obu wymienionych przypadkach była to belka o stałej grubości i stałej szerokości. W niniejszej pracy uogólniono równanie podane przez Di Taranto na przypadek belki o dowolnie zmiennej wzdłuż osi szerokości $b(x)$ (rys. 1). Dla takiej belki sformułowano zagadnienie optymalnego kształtowania [3].



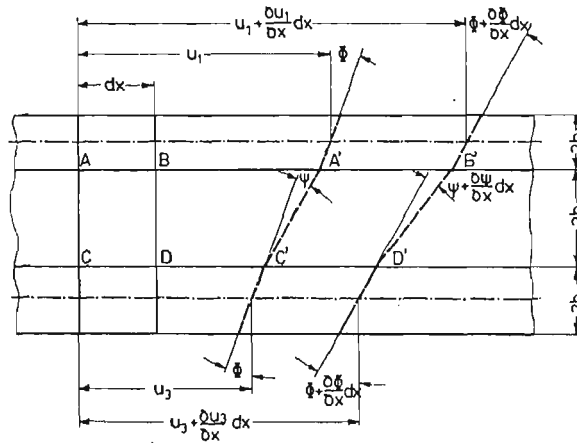
Rys. 1

(optymalnego doboru funkcji $b(x)$) ze względu na minimum (zdefiniowanej dokładnie niżej) amplitudy harmonicznym drgań wymuszonych. Problem rozwiązano w oparciu o zasadę maksimum PONTIAGINA [4]. Przedstawione wyniki otrzymano na drodze obliczeń numerycznych przeprowadzonych na EMC.

1. Równania różniczkowe ruchu

Podobnie jak w [1, 2] założymy, że warstwy zewnętrzne są idealnie sprężyste o modułach Younga E_1 i E_3 , zaś warstwa wewnętrzna posiada liniowe własności lepkości-prężyste

charakteryzujące się zespolonym modułem Kirchoffa $G^*(\omega) = G_1(\omega) + iG_2(\omega)$, (ω — częstość drgań wymuszonych). Pomijamy wpływ naprężeń ścinających w warstwach zewnętrznych na poprzeczne ugięcie belki. Zakładamy, że przemieszczenia poprzeczne w wszystkich warstw są identyczne. W związku z tym, warstwa wewnętrzna podlega tylko odkształceniu postaciowemu. Przyjmujemy, że nie ma poślizgów między warstwami. Rysunek 2 przedstawia zakładaną deformację elementu belki podczas drgań poprzecznych.



Rys. 2

Przekrój A — C przechodzi w A' — C', B — D w B' — D'. Siły osiowe w zewnętrznych warstwach wynoszą odpowiednio

$$F_1 = 2E_1 h_1 b(x) \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad (1)$$

$$F_3 = 2E_3 h_3 b(x) \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad (2)$$

gdzie u_1 i u_3 są przemieszczeniami wzdłużnymi. W warstwie wewnętrznej, zgodnie z przyjętymi założeniami siła osiowa nie występuje. Na podstawie warunku równowagi sił osiowych w całym przekroju belki

$$F_1 + F_3 = 0, \quad (3)$$

otrzymujemy

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = - \frac{E_1 h_1}{E_3 h_3} \frac{\partial u_1}{\partial x},$$

stąd

$$u_3 = - \frac{E_1 h_1}{E_3 h_3} u_1. \quad (4)$$

Zależności geometryczne (rys. 2) prowadzą do związków

$$(u_1 - h_1 \Phi) - (u_3 + h_3 \Phi) = 2h_2(\Phi + \Psi), \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - h_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + h_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 2h_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Oddziaływanie warstwy środkowej na warstwy zewnętrzne ogranicza się do sił stycznych (rys. 3). Warunek równowagi elementu warstwy 1 prowadzi do związku

$$F_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial x} dx. \quad (7)$$

Z drugiej strony mamy

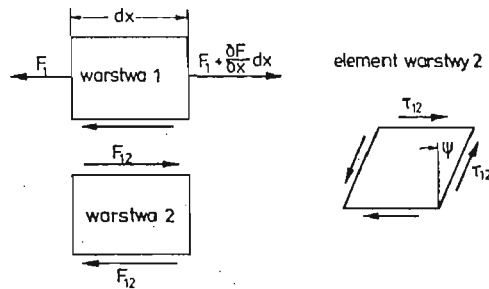
$$b(x)\tau_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial x}, \quad (8)$$

gdzie τ_{12} jest naprężeniem stycznym w warstwie środkowej. Lepkosprężystość warstwy środkowej zdefiniowano przez

$$\tau_{12} = L_G(\Psi), \quad (9)$$

gdzie \mathcal{L}_G jest operatorem całkowym [5]

$$\mathcal{L}_G(\Psi) = G_r\Psi(t) + \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} d\tau, \quad (10)$$



Rys. 3

w którym G jest funkcją relaksacji oraz G_r modułem zrelaksowanym. Biorąc pod uwagę (1), (8) i (9) otrzymujemy

$$\Psi = \frac{2E_1 h_1}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[b(x) \mathcal{L}_G^{-1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right], \quad (11)$$

gdzie \mathcal{L}_G^{-1} jest operatorem odwrotnym do \mathcal{L}_G . Po uwzględnieniu (4), związek (5) prowadzi do równania

$$\Phi = \frac{k}{d} u_1 + \frac{1}{\gamma db(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[b(x) \mathcal{L}_G^{-1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right], \quad (12)$$

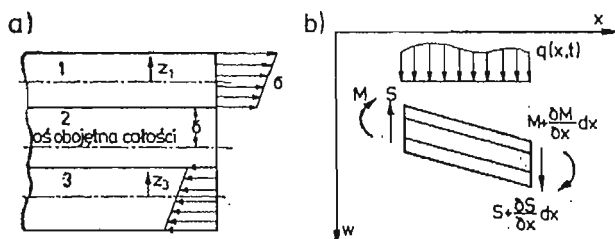
w którym

$$k = \frac{E_1 h_1 + E_3 h_3}{E_3 h_3}, \quad d = h_1 + 2h_2 + h_3$$

$$\gamma = \frac{1}{3E_1 h_1 h_2}$$

Moment zginający w całym przekroju belki (rys. 4b) wynosi

$$M = - \int_{-h_1}^{h_1} (\delta + h_1 + Z_1) dF_1 + \int_{-h_3}^{h_3} (2h_2 - \delta + h_3 - Z_3) dF_3,$$



Rys. 4

gdzie całkujemy po całej powierzchni przekroju danej warstwy oraz gdzie δ jest odległością warstwy 1 do osi obojętnej całej belki (rys. 4a) oraz z_1, z_3 są współrzędnymi określającymi odległość danego punktu przekroju do osi obojętnej określonej warstwy (rys. 4a). Korzystając z

$$dF_1 = E_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) b(x) dz_1,$$

$$dF_3 = E_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + z_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) b(x) dz_3,$$

$$\int_{-h_1}^{h_1} z_1 dz_1 = 0; \quad \int_{-h_3}^{h_3} z_3 dz_3 = 0,$$

$$\int_{-h_1}^{h_1} z_1^2 dz_1 = \frac{2}{3} h_1^3; \quad \int_{-h_3}^{h_3} z_3^2 dz_3 = \frac{2}{3} h_3^3,$$

wyrazimy moment zginający w całym przekroju wzorem

$$M = -2dE_1 h_1 \left[b(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] - \frac{2}{3} (E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3) \left[b(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]. \quad (13)$$

Na podstawie równania belki jednorodnej

$$-\frac{\partial_2 M}{\partial x_2} = -e \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x, t),$$

w którym M oznacza moment zginający, w jest przemieszczeniem poprzecznym, $q(x, t)$ jest obciążeniem zewnętrznym oraz e jest masą na jednostkę długości, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2dE_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[b(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] + \frac{2}{3} (E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[b(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = \\ = -mb(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x, t), \quad (14) \end{aligned}$$

gdzie $m = 2(h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3)$, oraz ρ_1, ρ_2, ρ_3 są gęstościami odpowiednich warstw. Ponieważ

$$\Phi = \frac{\partial w}{\partial x},$$

więc równanie (12) przyjmuje postać

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[b(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] = \gamma \left[b(x) \mathcal{L}_G \left(ku_1 - d \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]. \quad (15)$$

Równanie (14) i (15) stanowią poszukiwany układ równań różniczkowych opisujących ruch trójwarstwowej belki. W przypadku $b(x) = \text{const}$ układ ten można sprowadzić do jednego równania 6-go rzędu [1, 2].

2. Warunki brzegowe

Mamy do określenia 6 warunków brzegowych na końcach belki (dla $x^* = 0$ i $x^* = L$). Mogą to być warunki:

$$1. \quad w(x^*, t) = 0, \quad \text{lub} \quad \frac{\partial w(x^*, t)}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

$$2. \quad M(x^*, t) = 0, \quad \text{lub} \quad \frac{\partial M(x^*, t)}{\partial x} = 0, \quad (17)$$

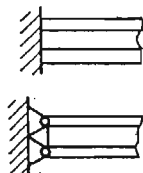
oraz warunki dotyczące przemieszczeń i sił wzdłużnych w przekrojach warstw zewnętrznych:

3. Gdy warstwy zamocowane są tak, że ich końce nie mogą się przemieszczać w kierunku osiowym to

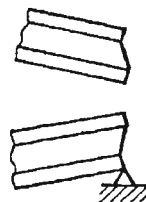
$$u_1(x^*, t) = 0. \quad (18)$$

4. Gdy warstwy zewnętrzne nie są ze sobą sztywno połączone; w związku z czym na końcu może wystąpić tzw. „ukosowanie” (rys. 6), to

$$\frac{\partial u_1(x^*, t)}{\partial x} = 0. \quad (19)$$



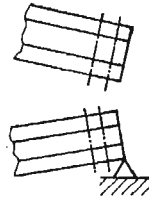
Rys. 5



Rys. 6

5. Gdy warstwy zewnętrzne są na końcach sztywno ze sobą połączone (rys. 7), skutkiem czego nie występuje „ukosowanie”, to $\psi(x^*, t) = 0$, czyli (patrz (11))

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[b(x^*) \mathcal{L}_G^{-1} \left(\frac{\partial u_1(x^*, t)}{\partial x} \right) \right] = 0. \quad (20)$$



Rys. 7

3. Sformułowanie problemu optymalizacji

Problem optymalizacji zostanie sformułowany dla stanu ustalonego drgań belki, wymuszonych harmonicznie zmiennym obciążeniem

$$q(x, t) = q(x)e^{i\omega t}. \quad (21)$$

3.1. Równania stanu. Drgania wymuszone rozpatrywanej belki można przedstawić w postaci

$$\begin{cases} w(x, t) = w(x)e^{i\omega t}, \\ u_1(x, t) = u_1(x)e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (22)$$

Równania (14), (15) prowadzą wtedy do układu

$$\begin{cases} [\alpha(\Theta \ddot{u}'' + w'')]'' - \beta^2 \alpha \ddot{u} = p(\tilde{x}), \\ [\alpha \tilde{w}']' = \tilde{\gamma} \alpha g^*(k_1 \tilde{w} - k_2 \tilde{u}'), \end{cases} \quad (23)$$

w którym wprowadzono wielkości bezwymiarowe

$$\tilde{x} = x/L, \quad \tilde{u} = u_1/L, \quad \tilde{w} = w/L$$

$$\alpha(\tilde{x}) = b(\tilde{x}L)/d$$

$$\Theta = \frac{1}{3} \frac{E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3}{E_1 h_1 d L}, \quad p(\tilde{x}) = \frac{q(\tilde{x}L)L^2}{2E_1 h_1 d^2},$$

$$\beta^2 = \frac{mL^3}{2E_1 h_1 d} \omega^2, \quad \tilde{\gamma} = \frac{L^2}{4h_1 h_2},$$

$$k_1 = \frac{E_1 h_1 + E_3 h_3}{E_3 h_3}, \quad k_2 = \frac{d}{L}, \quad g^* = g_1 + i g_2 = \frac{G^*}{E_1}.$$

oraz G^* jest modułem zespolonym. Przedstawiając zespolone rozwiązanie układu (23) oraz wymuszenie w postaci $w = w_1 + iw_2$; $u = u_1 + iu_2$, $p = p_1 + ip_2$ oraz dokonując podstawień:

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1, & y_2 &= u_2, & y_3 &= u_1', & y_4 &= u_2' \\ y_5 &= -[\alpha(\Theta u_1'' + w_1')], & y_6 &= -[\alpha(\Theta u_2'' + w_2')] \\ y_7 &= y_5', & y_8 &= y_6', & y_9 &= w_1, & y_{10} &= w_2, & y_{11} &= \alpha w_1', & y_{12} &= \alpha w_2', \end{aligned}$$

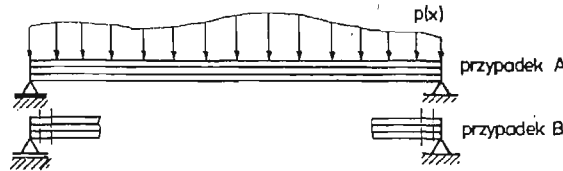
otrzymujemy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu, nazywanych dalej **równaniami stanu**

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = y_3, \quad y'_2 = y_4, \\ y'_3 = -\frac{1}{\Theta\alpha}(y_5 + y_{11}); \quad y'_4 = -\frac{1}{\Theta\alpha}(y_6 + y_{12}), \\ y'_5 = y_7, \quad y'_6 = y_8, \\ y'_7 = -\beta^2\alpha y_1 - p_1, \quad y'_8 = -\beta^2\alpha y_2 - p_2, \\ y'_9 = \frac{1}{\alpha}y_{11}, \quad y'_{10} = \frac{1}{\alpha}y_{12}, \\ y'_{11} = \tilde{\gamma}\alpha[\eta_1(k_1 y_9 - k_2 y_3) - \eta_2(k_1 y_{10} - k_2 y_4)], \\ y'_{12} = \tilde{\gamma}\alpha[\eta_1(k_1 y_{10} - k_2 y_4) + \eta_2(k_1 y_9 - k_2 y_3)]. \end{array} \right. \quad (24)$$

gdzie

$$\eta_1 = \frac{g_1}{g_1^2 + g_2^2}, \quad \eta_2 = \frac{g_2}{g_1^2 + g_2^2}.$$

W dalszej części ograniczymy się do rozpatrzenia belki wolnopodpartej (rys. 8) z dwoma wspomnianymi sposobami połączenia warstw zewnętrznych na końcu. Oznaczmy te



Rys. 8

przypadki przez „A” i „B”. Warunki brzegowe odpowiadające wymienionym przypadkom wyrażają się następująco:

Przypadek „A”

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = y_2(1) = 0, \\ y_5(0) = y_6(0) = y_5(1) = y_6(1) = 0, \\ y_{11}(0) = y_{12}(0) = y_{11}(1) = y_{12}(1) = 0. \end{array} \right. \quad (25A)$$

Przypadek „B”

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = y_2(1) = 0, \\ y_5(0) = y_6(0) = y_5(1) = y_6(1) = 0, \\ k_2 y_3(1) - k_1 y_9(1) = k_2 y_4(1) - k_1 y_{10}(1) = 0. \end{array} \right. \quad (25B)$$

3.2. Sformułowanie problemu. Sformułujemy problem optymalizacji w sposób następujący: Określić funkcję $\alpha(\tilde{x})$, spełniającą warunki $\alpha_d \leq \alpha(x) \leq \alpha_g$, gdzie α_g i α_d są danymi ograniczeniami (górnym i dolnym) oraz warunek

$$\int_0^1 \alpha(\tilde{x}) d\tilde{x} = \alpha_0, \quad (27)$$

dla której funkcjonał

$$J = \int_0^1 (y_1^2 + y_2^2) d\tilde{x}, \quad (28)$$

osiągnie wartość minimalną.

Tak sformułowany problem, przy spełnieniu równań stanu (24) i warunków brzegowych (25A) lub (25B), jest typowym zagadnieniem optymalnego sterowania [4]. Funkcją sterowania jest tutaj funkcja $\alpha(\tilde{x})$ opisująca kształt belki. Warunek (27) jest warunkiem izoperymetrycznym (zadana z góry objętość). Funkcjonał (28), zwany **funkcją celu** określa uśredniony wzdułuż długości kwadrat amplitudy drgań belki.

Do rozwiązywania niniejszego problemu zastosujemy zasadę maksimum Pontriagina. Warunek izoperymetryczny (27) uwzględniamy przez zmodyfikowanie funkcjonału (28)

$$J_1 = \int_0^1 (y_1^2 + y_2^2) d\tilde{x} + \lambda \int_0^1 \alpha d\tilde{x}. \quad (29)$$

Mnożnik Lagrange'a λ dobiera się tak aby był spełniony warunek (27). Po wprowadzeniu zmiennej

$$y_0 = \int_0^{\tilde{x}} (y_1^2 + y_2^2 + \lambda \alpha) d\tilde{x}, \quad (30)$$

otrzymujemy dodatkowe równanie

$$y_0' = y_1^2 + y_2^2 + \lambda \alpha, \quad (31)$$

wraz z warunkiem

$$y_0(0) = 0. \quad (32)$$

Dzięki temu funkcjonał (29) można zapisać bardzo prosto jako

$$J_1 = y_0(1). \quad (33)$$

Utwórzmy hamiltonian

$$H = \sum_{j=0}^{12} f_j \psi_j, \quad (34)$$

gdzie f_j oznaczają prawe strony równań (24) i (31), a ψ_j są rozwiązaniami układu równań sprzężonych

$$\psi_j' = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad i = 0, 1, \dots, 12, \quad (35)$$

spełniających warunki brzegowe, określone na podstawie warunków transwersalności ($\delta(\cdot)$ oznaczają wariacje).

$$\delta J_1 + \sum_{j=0}^{12} (\psi_j(1) \delta y_j(1) - \psi_j(0) \delta y_j(0)) = 0. \quad (36)$$

Biorąc pod uwagę (33) oraz wykorzystując związki $y_0(0) = 0$ (na podstawie (32)) i $\psi_0' = 0$ otrzymujemy najpierw $\psi_0 = -1$. Po wykorzystaniu warunków brzegowych (25A) i (25B) i przyrównaniu do zera pozostałych współczynników stojących przy niezależnych wariacjach otrzymujemy:

Przypadek A

$$\begin{cases} \psi_3(0) = \psi_4(0) = \psi_3(1) = \psi_4(1) = 0, \\ \psi_7(0) = \psi_8(0) = \psi_7(1) = \psi_8(1) = 0, \\ \psi_9(0) = \psi_{10}(0) = \psi_9(1) = \psi_{10}(1) = 0. \end{cases} \quad (37A)$$

Przypadek B

$$\begin{cases} k_1 \psi_3(0) + k_2 \psi_9(0) = k_1 \psi_4(0) + k_2 \psi_{10}(0) = 0, \\ k_1 \psi_3(1) + k_2 \psi_9(1) = k_1 \psi_4(1) + k_2 \psi_{10}(1) = 0, \\ \psi_7(0) = \psi_8(0) = \psi_7(1) = \psi_8(1) = 0, \\ \psi_{11}(0) = \psi_{12}(0) = \psi_{11}(1) = \psi_{12}(1) = 0. \end{cases} \quad (37B)$$

Równania sprzężone oraz hamiltonian (po opuszczeniu wyrazów niezależnych od α) przyjmują postać

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= \beta^2 \alpha \psi_7 + 2y_1, & \psi'_2 &= \beta^2 \alpha \psi_8 + 2y_2, \\ \psi'_3 &= -\psi_1 + \tilde{\gamma} \alpha k_2 (\eta_1 \psi_{11} + \eta_2 \psi_{12}), \\ \psi'_4 &= -\psi_2 + \tilde{\gamma} \alpha k_2 (\eta_1 \psi_{12} - \eta_2 \psi_{11}), \\ \psi'_5 &= \frac{1}{\Theta \alpha} \psi_3, & \psi'_6 &= \frac{1}{\Theta \alpha} \psi_4, \\ \psi'_7 &= -\psi_5, & \psi'_8 &= -\psi_6, \\ \psi'_9 &= -\tilde{\gamma} \alpha k_1 (\eta_1 \psi_{11} + \eta_2 \psi_{12}), \\ \psi'_{10} &= -\tilde{\gamma} \alpha k_1 (\eta_1 \psi_{12} - \eta_2 \psi_{11}), \\ \psi'_{11} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\Theta} \psi_3 - \psi_9 \right), & \psi'_{12} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\Theta} \psi_4 - \psi_{10} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

$$H(\alpha) = -\frac{x}{\alpha} - Y_\alpha \quad (39)$$

gdzie

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\Theta} (y_5 + y_{11}) \psi_3 + (y_6 + y_{12}) \psi_4 - y_{11} \psi_9 - y_{12} \psi_{10}, \\ Y &= \beta^2 (y_1 \psi_7 + y_2 \psi_8) - \tilde{\gamma} (G_1 \psi_{11} + G_2 \psi_{12}) + \lambda, \\ G_1 &= \eta_1 (k_1 y_9 - k_2 y_3) - \eta_2 (k_1 y_{10} - k_2 y_4), \\ G_2 &= \eta_1 (k_1 y_{10} - k_2 y_4) + \eta_2 (k_1 y_9 - k_2 y_3). \end{aligned}$$

Zgodnie z zasadą maksimum wg której optymalna funkcja spełnia warunek

$$H(\alpha_{opt}) = \sup_{\alpha_d \leq \alpha \leq \alpha_g} H(\alpha)$$

otrzymujemy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dla } X > 0 \text{ i } Y > 0 \\ \alpha_{opt}(\tilde{x}) = \begin{cases} \alpha_g & \text{gdy } \alpha^* > \alpha_g, \\ \alpha^* & \text{gdy } \alpha_d \leq \alpha^* \leq \alpha_g, \\ \alpha_d & \text{gdy } \alpha^* < \alpha_d, \end{cases} \\ \text{gdzie } \alpha^* = \sqrt{\frac{X}{Y}}. \\ \text{W przeciwnym wypadku} \\ \alpha_{opt}(\tilde{x}) = \begin{cases} \alpha_g & \text{gdy } H(\alpha_g) > H(\alpha_d), \\ \alpha_d & \text{gdy } H(\alpha_d) \geq H(\alpha_g). \end{cases} \end{array} \right. \quad (40)$$

4. Obliczenia numeryczne

Przedstawiony problem sprowadza się do nieliniowego zagadnienia brzegowego w skład którego wchodzi równania (24), (38) wraz z warunkami (25A) lub (25B) i (37A) lub (37B). Nieliniowość jest wynikiem związków (40), które należy podstawić w miejscu $\alpha(\tilde{x})$ do równań (24) i (38). Rozwiązywanie problemu tego typu wymaga stosowania metod numerycznych. Przedstawione niżej wyniki otrzymano po zastosowaniu metody kolejnych przybliżeń [6]. Proces iteracyjny rozpoczyna się od przyjęcia pewnej funkcji $\alpha_1(\tilde{x})$ jako pierwszego przybliżenia funkcji optymalnej, rozwiązania kolejno zagadnień brzegowych (24), (25A) lub (25B) i (38), (37A) lub (37B). Na podstawie otrzymanych rozwiązań, opierając się na (40) określamy nowe przybliżenia $\alpha_2(\tilde{x})$. Iteracja zostaje zakończona, jeżeli osiągnięta zostanie dokładność ε , tj. jeżeli spełniona będzie nierówność

$$\int_0^1 (\alpha_2(\tilde{x}) - \alpha_1(\tilde{x}))^2 d\tilde{x} \leq \varepsilon.$$

Zaletą przedstawionej metody jest to, że na każdym etapie iteracji rozwiązujemy liniowe zagadnienie brzegowe (dzięki danej w sposób jawny funkcji $\alpha(\tilde{x})$), przy czym wystarczy osobno rozwiązać najpierw równania stanu a następnie równania sprzężone. Rozwiązania równań stanu wchodzi do równań sprzężonych jako niejednorodności. Obliczenia przeprowadzono na maszynie CYBER 72 w oparciu o program napisany w języku FORTRAN. Do rozwiązania liniowych zagadnień brzegowych zastosowano program biblioteczny o nazwie LINBVP (MATHSCIENCE LIBRARY), oparty na metodzie sprowadzenia liniowego zagadnienia brzegowego do zagadnienia początkowego [7].

5. Wyniki obliczeń

Przedstawione wyniki otrzymano przy następujących danych:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 20; & \alpha_b &= 40; & \alpha_d &= 10 \\ k_1 &= 2; & k_2 &= 0.01 \\ \Theta &= 4.167 \times 10^{-4}; & \tilde{\gamma} &= 4 \times 10^4; \end{aligned}$$

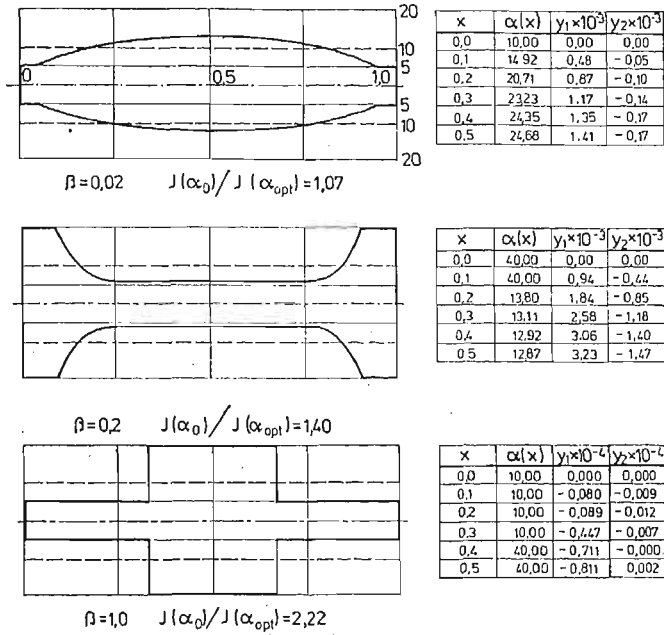
Przyjęto obciążenie stałe na całej długości belki

$$p_1(\tilde{x}) = 10^{-3}; \quad p_2(\tilde{x}) \equiv 0$$

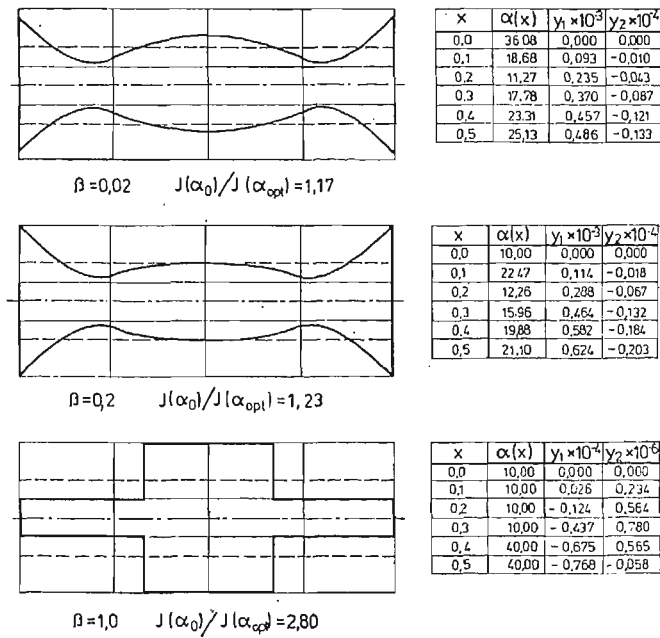
Dla zbadania wpływu wielkości tłumienia w warstwie wewnętrznej na optymalny kształt przeprowadzono obliczenia dla całkowitego braku tłumienia ($g_2 = 0$) oraz przy wielkości $g_2/g_1 = 0,5$.

Określono optymalny kształt belki dla obu przypadków (A i B) zamocowania końców oraz dla trzech wartości β : 0,02, 0,2, 1. Na rys. 9 przedstawiono optymalne kształty belki dla przypadku „A” z uwzględnieniem tłumienia, odpowiadającego podanym wartościom β . W tabelach podano liczbowe wartości funkcji $\alpha_{opt}(\tilde{x})$ w różnych punktach belki oraz wartości ugięć $y_1(\tilde{x})$ z $y_2(\tilde{x})$ dla belki optymalnej. Dla każdego przypadku określono stosunek wartości funkcjonału (28) określono dla belki o stałej szerokości $J(\alpha_0)$ do wartości minimalnej $J(\alpha_{opt})$.

Na rysunku 10 przedstawiono analogiczne wyniki odpowiadające przypadkowi „B”.



Rys. 9



Rys. 10

6. Wnioski

1) Optymalny kształt zależy od częstości wymuszenia. „Działanie” optymalnego kształtu polega jak widać na odpowiednim przesuwanie najbliższych częstości rezonansowych w taki sposób, aby zapewnić minimum amplitudy drgań wymuszonych.

2) Na podstawie przeprowadzonych obliczeń stwierdzono, że tłumienie w warstwie wewnętrznej (w rozpatrywanych przypadkach podparcia i obciążenia) nie ma zauważalnego wpływu na optymalny kształt.

3) Istotny wpływ na optymalny kształt, przy niektórych częstościach wymuszenia wywiera sposób połączenia warstw zewnętrznych na końcu belki.

Literatura cytowana w tekście

1. R. A. Di TARANTO, *Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite — Length Beams*, J. of Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E), vol. 32, Nr 4, 1965, 881 - 886.
2. D. J. MEAD, S. MARKUŠ, *The Forced Vibration of a Three — Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Conditions*, J. Sound Vib. (1969) 10 (2), 163 - 175.
3. V. B. GRINEV, A. P. FILIPPOV, *Optimalizacija elementov konstrukcij po mehaničeskim karakteristikam*, Naukova dumka, Kiev 1975.
4. L. S. PONTRIAGIN, *Matematičeskaja teorija optimal'nych processov*, Nauka, Moskva 1976.
5. J. M. WARD, *Mechaniczne własności polimerów jako tworzyw konstrukcyjnych*, PWN, Warszawa 1975.
6. I. A. KRYLOV, F. L. ČERNOUŠKO, *Algoritm metoda posledovatel'nych približenij dla zadač optimal'nogo upravljenja*, Ž. vyčisl. matem. i matem. fiz., 12 Nr 1, 1972, 14 - 34.
7. V. E. SAMANSKIJ, *Metody čislennogo rešenija kraevych zadač na ÈVČM*, t. II, Naukova dumka, Kiev 1966.

Praca została wykonana w ramach tematu węzłowego 05.12 „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez IPPT PAN.

Р е з ю м е

ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ В ПРОЦЕССЕ УСТАНОВИВШИХСЯ, ГАРМОНИЧЕСКИХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В работе выведены дифференциальные уравнения колебаний трехслойной балки (sandwich) с постоянной толщиной слоев и произвольно переменной ширине. Для такой балки формулируется вопрос оптимального подбора функции, определяющей ширину балки из-за минимума усредненного вдали длины квадрата амплитуды гармонических вынужденных колебаний. Учитывая демпфирование внутреннего слоя (комплексная шодуль) решена проблема, опираясь на принципу максимума Понтрягина и применении ЭВЦМ.

S u m m a r y

OPTIMAL DESIGN OF THE THREE-LAYER SANDWICH BEAM UNDER STABLE HARMONICAL EXCITATION

For the triple-layer sandwich beam, with the constant thickness and variable width of the layers, the differential equations have been derived. The problem of optimal choice of the beam width, based on the minimum of the mean square value (along the length) of amplitude of forced harmonical vibrations, has been formulated.

Taking into consideration dampoing in the inner layer (complex modulus) and basing on Pontriagin's principle the problem has been solved with the aid of computer.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 czerwca 1980 roku.

ANALIZA STATECZNOŚCI PRYZMATYCZNYCH ŁUKÓW O OSI ODKSZTAŁCALNEJ

JAN BŁACHUT (KRAKÓW)

*Institut Fizyki
Politechniki Krakowskiej*

1. Aktualny stan zagadnienia

Przyjęcie wydłużalności osi łuku prowadzi do jakościowo innych zagadnień w problematyce badania stateczności w porównaniu np. do łuków będących w stanie bezmomentowym (1), gdzie przez utratę stateczności rozumie się wystąpienie stanu giętnego. Wyróżniając w łukach o osi wydłużalnej stan deformacji statycznej oraz badając nałożone na niego małe, liniowe drgania można wyznaczyć krytyczne wartości obciążenia i równocześnie typy utraty stateczności (bifurkacja, przeskok).

Forma utraty stateczności zależy od sposobu podparcia, kształtu osi łuku, wydłużalności jak również samej wyniosłości.

W ostatnim czasie zagadnienia krytycznego i pokrytycznego zachowania się łuków są przedmiotem coraz intensywniejszych poszukiwań. SCHREYER i MASUR [13] w oparciu o metody energetyczne rozważają kryteria utraty stateczności łuku pryzmatycznego obciążonego stałym ciśnieniem gazu. DICKIE i BROUGHTON [3] rozważają łuk obciążony radialnie. Praca ma charakter teoretyczny i doświadczalny. Wykorzystując energetyczną metodę badania stateczności stosowaną w [13] autorzy przeprowadzają porównanie otrzymanych rezultatów z danymi doświadczalnymi. Bifurkacja łuków wyniosłych z uwzględnieniem wydłużalności osi jest rozpatrywana przez DYMA [4]. Utracie stateczności oraz pokrytycznemu zachowaniu się łuków kołowych poddanych równomiernie rozłożonemu obciążeniu o nie zmieniającym się kierunku działania, poświęcony jest rozdział książki DYMA [5]. Również BRUSH i ALMROTH [2] rozważają stateczność kołowych pierścieni. Analiza zachowania się liniowo-sprężystego łuku kołowego, przy założeniu hipotezy płaskich przekrojów i przyjęciu nieliniowości geometrycznej badana jest przez SCHMIDTA [9, 10, 11, 12]. Podstawą analizy jest opis łuku poprzez układ sześciu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Praca [12] zawiera ponadto przegląd literatury poświęcony temu zagadnieniu poczynając od 1884 r. PLAUT [8] analizuje stateczność ciągłych elementów konstrukcyjnych (pręty, łuki) obciążonych niezależnie działającymi obciążeniami typu konserwatywnego jak i niekonserwatywnego, lecz w zakresie statycznego kryterium utraty stateczności [1]. Z nieliniowego równania stanu wyróżnia się równania opisujące stan zerowy (stan statycznego ugięcia w procesie obciążenia), wyboczenie oraz stan pokrytyczny. Obok wspornika rozpatrzono kołowy łuk utwierdzony przegubowo, obciążony

pionowo trzema siłami skupionymi. Zbadano wpływ niedokładności przyłożenia siły skupionej. KORNISZYN i ISANBAJEWA [6] rozważają zachowanie się powłok kołowych o stałej grubości z uwzględnieniem warunku stateczności. Podana jest analiza form utraty stateczności.

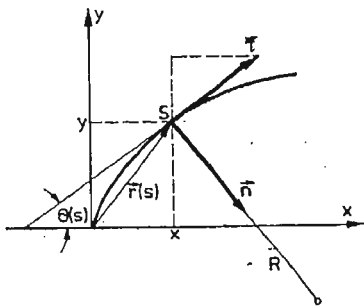
Celem obecnej pracy jest zbadanie stateczności pryzmatycznych łuków z materiału liniowo-sprężystego poprzez analizę małych, liniowych drgań nałożonych na stan statycznego, nieliniowego ugięcia. Na przykładzie łuku kołowego zostanie przedstawiony związek między formami drgań, a formami utraty stateczności.

2. Geometrycznie nieliniowe sformułowanie zagadnienia. Wyprowadzenie równań ruchu.

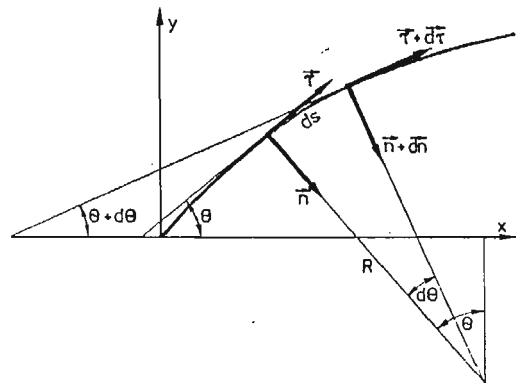
2.1. Związki geometryczne, prawo fizyczne. Rozpatrzmy łuk nieodkształcony w kartezjańskim układzie współrzędnych (rys. 1), którego równanie osi środkowej ma postać:

$$\begin{aligned} x &= \int_0^s \cos \Theta(\xi) d\xi, \\ y &= \int_0^s \sin \Theta(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie kąt Θ mierzony jest między osią OX , a styczną do osi łuku w punkcie s . Związek



Rys. 1



Rys. 2

między elementem długości łuku ds , a zmianą kąta $d\Theta$ pokazano na rysunku 2. Krzywizna łuku oraz związki między wektorami \vec{n} , $\vec{\tau}$ zdefiniowane są następująco:

$$k = -\frac{1}{R} = \frac{d\Theta}{ds}; \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = k\vec{\tau}; \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = -k\vec{n}. \quad (2)$$

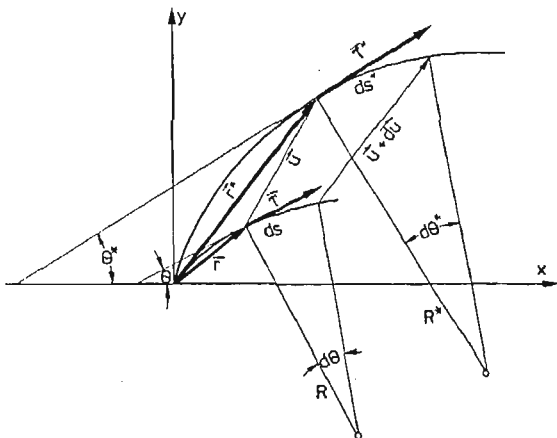
Niech tak opisany łuk ulegnie odkształceniu (rys. 3).

Promień wodzący dowolnego punktu s przed odkształceniem \vec{r} oraz po odkształceniu \vec{r}^* związane są z przemieszczeniem \vec{u} następująco:

$$\vec{r}^*(s) = \vec{r}(s) + \vec{u}(s), \quad (3)$$

przy czym zachodzą następujące związki:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}^*}{ds^*} &= \vec{\tau}^*, \quad |\tau^*| = 1, \\ \frac{d\vec{r}^*}{ds} &= A_1^* \tau^*, \quad \text{gdzie} \quad A_1^* = \left| \frac{d\vec{r}^*}{ds} \right|, \\ k^* &= \frac{d\Theta^*}{ds^*} = -\frac{d\vec{\tau}^*}{ds^*} \cdot \vec{n}^*. \end{aligned} \quad (4)$$



Rys. 3

Odształcenie osi środkowej łuku ε_0 w dalszym ciągu będzie rozumiane w sensie miary Cauchy'ego jako:

$$\varepsilon_0 = \frac{ds^* - ds}{ds} = A_1^* - 1. \quad (5)$$

Odształcenie ε warstwy łuku odległej o z w kierunku normalnej od osi środkowej (rys. 4) może być zapisane:

$$\varepsilon(z) = \frac{(R^* - z) d\Theta^* - (R - z) d\Theta}{(R - z) d\Theta}. \quad (6)$$

Korzystając z (4) i (5) otrzymujemy:

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{1 - z/R} \{ \varepsilon_0 + z[(1 + \varepsilon_0)k^* - k] \}. \quad (7)$$

W układzie współrzędnych $(\vec{\tau}, \vec{n})$ związanym z osią nieodkształconą, przemieszczenie \vec{u} zapiszemy:

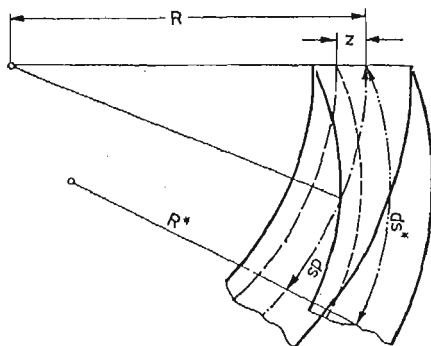
$$\vec{u} = \hat{v} \vec{\tau} + \hat{w} \vec{n}. \quad (8)$$

Z (3) i (4) otrzymujemy:

$$(1 + \varepsilon_0) \vec{\tau}^* = (1 + \hat{v}' + k \hat{w}) \vec{\tau} + (\hat{w}' - k \hat{v}) \vec{n}. \quad (9)$$

Korzystając z rozkładu wektora $\vec{\tau}^*$ w bazie $(\vec{\tau}, \vec{n})$ otrzymujemy z (9) następujący układ równań:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_0) \cos(\Theta^* - \Theta) &= 1 + \hat{v}' + k\hat{w}', \\ -(1 - \varepsilon_0) \sin(\Theta^* - \Theta) &= \hat{w}' - k\hat{v}'. \end{aligned} \quad (10)$$



Rys. 4

Po podniesieniu stronami do kwadratu równań (10) i dodaniu otrzymuje się następujący związek między odkształceniem osi środkowej ε_0 i składowymi przemieszczenia \hat{v} , \hat{w} :

$$\varepsilon_0 = -1 + \sqrt{(1 + \hat{v}' + k\hat{w}')^2 + (\hat{w}' - k\hat{v}')^2}. \quad (11)$$

Wprowadzając oznaczenie:

$$\hat{\psi} = \Theta^* - \Theta, \quad (12)$$

zapiszemy związek między zmianą kąta Θ , a składowymi \hat{v} , \hat{w} w postaci:

$$\hat{\psi} = -\arctg \frac{\hat{w}' - k\hat{v}'}{1 + \hat{v}' + k\hat{w}'}. \quad (13)$$

Jeśli oznaczymy:

$$\varkappa = (1 + \varepsilon_0) k^* - k, \quad (14)$$

to odkształcenie (6) można zapisać:

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + (-\varepsilon_0 k + \varkappa) \frac{z}{1 + kz}, \quad (15)$$

zaś naprężenie (zgodnie z prawem Hooke'a)

$$\sigma(z) = E\varepsilon_0 + E(-\varepsilon_0 k + \varkappa) \frac{z}{1 + kz}. \quad (16)$$

Należy zauważyć, że w elementarnej teorii zginania łuków na ogół przyjmuje się $\varkappa = k^* - k$ (pomijając ε_0 we wzorze (14)).

2.2. Równania ruchu. Po podstawieniu (16) do wzorów określających siły uogólnione:

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \iint_A \sigma dA, \\ \hat{M} &= - \iint_A \sigma z dA, \end{aligned} \quad (17)$$

(gdzie \hat{N} oznacza siłę podłużną, \hat{M} — moment zginający) otrzymamy następujące zależności:

$$\begin{aligned}\hat{N} &= EA\varepsilon_0 - EI_{20}k(-\varepsilon_0 k + \varkappa), \\ \hat{M} &= -EI_{20}(-\varepsilon_0 k + \varkappa),\end{aligned}\quad (18)$$

gdzie [15]:

$$I_{20} = \iint_A \frac{z^2}{1+kz} dA.$$

Korzystając z (13), (14) i (18) otrzymujemy następujące równania (po rozwiązaniu ze względu na \hat{v}' , \hat{w}' , $\hat{\psi}'$):

$$\begin{aligned}\hat{v}' &= -k\hat{w}' - (1 - \cos\hat{\psi}) + \left(\frac{\hat{N}}{EA} - k \frac{\hat{M}}{EA} \right) \cos\hat{\psi}, \\ \hat{w}' &= k\hat{v}' - \left(1 + \frac{\hat{N}}{EA} - \frac{k\hat{M}}{EA} \right) \sin\hat{\psi}, \\ \hat{\psi}' &= -\frac{\hat{M}}{EI_{20}} \left(1 + k^2 \frac{EI_{20}}{EA} \right) + k \frac{\hat{N}}{EA}.\end{aligned}\quad (19)$$

Równania ruchu układu wyprowadzimy z zasady prac przygotowanych. Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu poddanego więzom ustalonym (tzn. niezależnym od czasu), jest równość zera sumy prac wirtualnych sił działających na układ (z uwzględnieniem sił bezwładności)

$$\delta W - \delta L = 0 \quad (20)$$

gdzie δW jest sumą prac przygotowanych sił wewnętrznych, δL zaś sumą prac przygotowanych sił zewnętrznych.

Pracę wirtualną sił wewnętrznych i zewnętrznych obliczamy z równań:

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_0^l (\hat{N} \delta \varepsilon_0 - \hat{M} \delta \varkappa) ds, \\ \delta L &= \int_0^l (\vec{f} - \rho A \vec{u}) \delta \vec{u} ds,\end{aligned}\quad (21)$$

przy czym w pracy sił zewnętrznych pomijamy pracę momentu pochodzącego od bezwładności obrotu przekroju poprzecznego łuku. Całkując przez części wyrażenie (21) oraz korzystając z równań (18) i (11) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\delta W &= -\hat{M} \delta \hat{\psi} \Big|_0^l + \left\{ \left[-\hat{N} \sin \hat{\psi} - \hat{M}' \frac{\cos \hat{\psi}}{1 + \varepsilon_0} \right] \delta \hat{w} \right\} \Big|_0^l + \left\{ \left[\hat{N} \cos \hat{\psi} - \hat{M}' \frac{\sin \hat{\psi}}{1 + \varepsilon_0} \right] \delta \hat{v} \right\} \Big|_0^l + \\ &+ \int_0^l \left\{ k \left[\hat{N} \cos \hat{\psi} - \frac{\hat{M}' \sin \hat{\psi}}{1 + \varepsilon_0} \right] - \left[-\hat{N} \sin \hat{\psi} - \hat{M}' \frac{\cos \hat{\psi}}{1 + \varepsilon_0} \right] \right\} \delta \hat{w} + \\ &+ \int_0^l \left\{ k \left[\hat{N} \sin \hat{\psi} + \hat{M}' \frac{\cos \hat{\psi}}{1 + \varepsilon_0} \right] - \left[\hat{N} \cos \hat{\psi} - \hat{M}' \frac{\sin \hat{\psi}}{1 + \varepsilon_0} \right] \right\} \delta \hat{v},\end{aligned}\quad (22)$$

oraz

$$\delta L = \int_0^l \{[(\vec{f} \cdot \vec{\tau}) - \rho A \hat{v}] \delta \hat{v} + [(\vec{f} \cdot \vec{n}) - \rho A \hat{w}] \delta \hat{w}\} ds. \quad (23)$$

Postępując się (20) (wobec dowolności wariacji $\delta \hat{v}$ i $\delta \hat{w}$) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} k(\hat{N} \cos \hat{\psi} + \hat{Q} \sin \hat{\psi}) + (\hat{N} \sin \hat{\psi} - \hat{Q} \cos \hat{\psi})' - (\vec{f} \cdot \vec{n}) + \rho A \hat{w} &= 0, \\ k(\hat{N} \sin \hat{\psi} - \hat{Q} \cos \hat{\psi}) - (\hat{N} \cos \hat{\psi} + \hat{Q} \sin \hat{\psi})' - (\vec{f} \cdot \vec{\tau}) + \rho A \hat{v} &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie

$$\hat{M}' = -(1 + \varepsilon_0) \hat{Q}. \quad (25)$$

Scalkowane wyrazy dają warunki brzegowe do tych równań:

$$\begin{aligned} -\hat{M} \delta \hat{\psi}|_0 &= 0, \\ [(-\hat{N} \sin \hat{\psi} + \hat{Q} \cos \hat{\psi}) \delta \hat{w}]|_0 &= 0, \\ [(\hat{N} \cos \hat{\psi} + \hat{Q} \sin \hat{\psi}) \delta \hat{v}]|_0 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Wprowadzając nowe zmienne zależne $\hat{\mathcal{N}}$, $\hat{\mathcal{X}}$:

$$\begin{aligned} \hat{N} \cos \hat{\psi} + \hat{Q} \sin \hat{\psi} &= \hat{\mathcal{N}}, \\ -\hat{N} \sin \hat{\psi} + \hat{Q} \cos \hat{\psi} &= \hat{\mathcal{X}}, \end{aligned} \quad (27)$$

otrzymamy z (19) i (24-25) układ cząstkowych nieliniowych równań różniczkowych opisujących nieliniowe drgania łuku sprężystego:

$$\begin{aligned} \hat{v}' &= -k \hat{w} - (1 - \cos \hat{\psi}) + \varepsilon_0 \cos \hat{\psi}, \\ \hat{w}' &= k \hat{v} - \sin \hat{\psi} - \varepsilon_0 \sin \hat{\psi}, \\ \hat{\psi}' &= -\frac{\hat{M}}{EI_{20}} + k \varepsilon_0, \\ \hat{\mathcal{N}}' &= -k \hat{\mathcal{X}} - (\vec{f} \cdot \vec{\tau}) + \rho A \hat{v}, \\ \hat{\mathcal{X}}' &= k \hat{\mathcal{N}} - (\vec{f} \cdot \vec{n}) + \rho A \hat{w}, \\ \hat{M}' &= -(1 + \varepsilon_0) (\hat{\mathcal{N}} \sin \hat{\psi} + \hat{\mathcal{X}} \cos \hat{\psi}), \end{aligned} \quad (28)$$

gdzie

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{EA} (\hat{\mathcal{N}} \cos \hat{\psi} - \hat{\mathcal{X}} \sin \hat{\psi} - k \hat{M}), \quad (29)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} (\hat{M} \delta \hat{\psi})|_0 &= 0, \\ (\hat{\mathcal{X}} \delta \hat{w})|_0 &= 0, \\ (\hat{\mathcal{N}} \delta \hat{v})|_0 &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

3. Analiza stanu nieliniowego statycznego ugięcia, liniowych drgań i stanu krytycznego.

Wprowadźmy do równań stanu rozwinięcia zmiennych stanu, parametrów określających odkształcenie osi środkowej łuku i obciążenie zewnętrzne, pozwalające na zbadanie

małych drgań nałożonych na statyczne ugięcie lub zbadanie form utraty stateczności:

$$\begin{aligned}
 \hat{v}(s, t) &= v_0(s) + \varepsilon \hat{v}_1(s, t) + \dots \\
 \hat{w}(s, t) &= w_0(s) + \varepsilon \hat{w}_1(s, t) + \dots \\
 \hat{\psi}(s, t) &= \psi_0(s) + \varepsilon \hat{\psi}_1(s, t) + \dots \\
 \hat{\mathcal{N}}(s, t) &= \mathcal{N}_0(s) + \varepsilon \hat{\mathcal{N}}_1(s, t) + \dots \\
 \hat{\mathcal{K}}(s, t) &= \mathcal{K}_0(s) + \varepsilon \hat{\mathcal{K}}_1(s, t) + \dots \\
 \hat{M}(s, t) &= M_0(s) + \varepsilon \hat{M}_1(s, t) + \dots \\
 \tilde{q}(s) &= \tilde{q}_0(s) + \varepsilon \tilde{q}_1(s) + \dots \\
 \tilde{p}(s) &= \tilde{p}_0(s) + \varepsilon \tilde{p}_1(s) + \dots
 \end{aligned} \tag{31}$$

gdzie: $(\vec{f} \cdot \vec{v}) = \tilde{q}$; $(\vec{f} \cdot \vec{n}) = \tilde{p}$; ε — mały parametr który może być zdefiniowany nastę-

pująco: $\varepsilon = \left| \frac{w_1 - w_0}{w_0} \right|$

Zeroowy człon tego rozwinięcia opisuje statyczne ugięcie łuku, które jest dane przez następujący układ niejednorodnych, nieliniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned}
 v'_0 &= kw_0 - (1 - \cos \psi_0) + \varepsilon_{00} \cos \psi_0, \\
 w'_0 &= kv_0 - \sin \psi_0 - \varepsilon_{00} \sin \psi_0, \\
 \psi'_0 &= -\frac{M_0}{EI_{20}} + k\varepsilon_{00}, \\
 \mathcal{N}'_0 &= -k\mathcal{K}_0 - \tilde{q}_0, \\
 \mathcal{K}'_0 &= k\mathcal{N}_0 - \tilde{p}_0, \\
 M'_0 &= -(1 + \varepsilon_{00})(\mathcal{N}_0 \sin \psi_0 + \mathcal{K}_0 \cos \psi_0),
 \end{aligned} \tag{32}$$

gdzie

$$\varepsilon_{00} = \frac{1}{EA} (\mathcal{N}_0 \cos \psi_0 - \mathcal{K}_0 \sin \psi_0 - kM_0).$$

Do układu (32) dołączymy warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}
 (M_0 \delta \psi_0)|_0^l &= 0; & (\mathcal{K}_0 \delta w_0)|_0^l &= 0; \\
 (\mathcal{N}_0 \delta v_0)|_0^l &= 0.
 \end{aligned} \tag{33}$$

3.1. Opis liniowych drgań łuku nałożonych na stan statycznego ugięcia. Na nieliniowe statyczne ugięcie łuku nakładamy małe liniowe drgania. Z (28) i (31) po podstawieniu:

$$\begin{aligned}
 \hat{v}_1 &= v_1 \exp(i\omega t); & \hat{w}_1 &= w_1 \exp(i\omega t), \\
 \hat{\psi}_1 &= \psi_1 \exp(i\omega t); & \hat{\mathcal{N}}_1 &= \mathcal{N}_1 \exp(i\omega t), \\
 \hat{\mathcal{K}}_1 &= \mathcal{K}_1 \exp(i\omega t); & \hat{M}_1 &= M_1 \exp(i\omega t),
 \end{aligned} \tag{34}$$

otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned}
 v'_1 &= -kw_1 - (1 + \varepsilon_{00}) \sin \psi_0 \psi_1 + \frac{\cos \psi_0}{EA} [\cos \psi_0 \mathcal{N}_1 - \\
 &\quad - \sin \psi_0 \mathcal{K}_1 - (\mathcal{N}_0 \sin \psi_0 + \mathcal{K}_0 \cos \psi_0) \psi_1 - kM_1],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_1' &= kv_1 - (1 + \varepsilon_{00}) \cos \psi_0 \psi_1 - \frac{\sin \psi_0}{EA} [\cos \psi_0 \mathcal{N}_1 - \\
 &\quad - \sin \psi_0 \mathcal{K}_1 - (\mathcal{N}_0 \sin \psi_0 + \mathcal{K}_0 \cos \psi_0) \psi_1 - kM_1], \\
 \psi_1' &= -\frac{M_1}{EI_{20}} + \frac{k}{EA} [\cos \psi_0 \mathcal{N}_1 - \sin \psi_0 \mathcal{K}_1 - (\mathcal{N}_0 \sin \psi_0 + \mathcal{K}_0 \cos \psi_0) \psi_1 - kM_1], \\
 N_1' &= -k\mathcal{K}_1 - \bar{q}_1 - \rho\omega^2 Av_1, \\
 \mathcal{K}_1' &= k\mathcal{N}_1 - \bar{p}_1 - \rho\omega^2 Aw_1, \\
 M_1' &= -(1 + \varepsilon_{00}) (\cos \psi_0 \mathcal{K}_1 + \sin \psi_0 \mathcal{N}_1) + (\mathcal{N}_0 \cos \psi_0 - \\
 &\quad - \mathcal{K}_0 \sin \psi_0) \psi_1 - \frac{\mathcal{N}_0 \sin \psi_0 + \mathcal{K}_0 \cos \psi_0}{EA} [\cos \psi_0 \mathcal{N}_1 - \\
 &\quad - \sin \psi_0 \mathcal{K}_1 - (\mathcal{N}_0 \sin \psi_0 + \mathcal{K}_0 \cos \psi_0) \psi_1 - kM_1],
 \end{aligned} \tag{35}$$

z warunkami brzegowymi:

$$(M_0 \delta \psi_1 + M_1 \delta \psi_0)|_0^l = 0,$$

$$(\mathcal{K}_0 \delta w_1 + \mathcal{K}_1 \delta w_0)|_0^l = 0,$$

$$(\mathcal{N}_0 \delta v_1 + \mathcal{N}_1 \delta v_0)|_0^l = 0.$$

Równania (35) będziemy nazywać dalej równaniami stanu. Rozwiązanie równań stanu (35) zależy od rozwiązania $(v_0(x), w_0(x), \psi_0(x), \mathcal{N}_0(x), \mathcal{K}_0(x), M_0(x))$ układu (32).

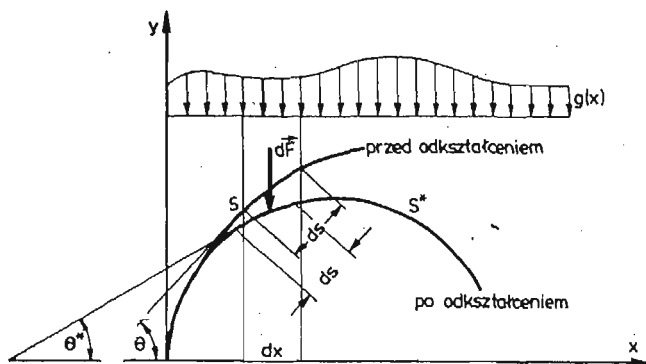
4. Analiza zachowania się obciążenia zewnętrznego

4.1. Obciążenia konserwatywne. i) ciągłe obciążenie zewnętrzne na jednostkę długości osi x .

Na rysunku 5 przedstawiono schemat obciążenia o danej intensywności $g(x)$ na jednostkę długości x .

Elementarna siła $d\vec{F}$ liczona w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) ma współrzędne:

$$d\vec{F}(0, -g(x)dx). \tag{37}$$



Rys. 5

Natomiast wektor $\vec{f} = d\vec{F}/ds$ obciążenia zewnętrznego ma postać:

$$f(0, -g(s)\cos\theta(s)). \quad (38)$$

Składowe (\tilde{p}, \tilde{q}) tego wektora liczone względem lokalnego układu odniesienia $(\vec{n}, \vec{\tau})$ można zapisać:

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= (\vec{f} \cdot \vec{\tau}) = -g[x(s)]\sin\theta(s)\cos\theta(s) = \tilde{q}_0, \\ \tilde{p} &= (\vec{f} \cdot \vec{n}) = g[x(s)]\cos^2\theta(s) = \tilde{p}_0. \end{aligned} \quad (39)$$

Obciążenie takie prowadzi do samosprężenia układu (35).

ii) stały kierunek obciążenia w przestrzeni.

W tym przypadku składowe (\tilde{p}, \tilde{q}) dadzą się zapisać:

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= (\vec{f} \cdot \vec{\tau}) = g_x[y(s)]\sin\theta(s)\cos\theta(s) - g_y[x(s)]\sin\theta(s)\cos\theta(s), \\ \tilde{p} &= (\vec{f} \cdot \vec{n}) = g_x[y(s)]\sin^2\theta(s) + g_y[x(s)]\cos^2\theta(s) \end{aligned} \quad (40)$$

iii) intensywność obciążenia zmienia się w określony sposób.

Jeśli przyjmiemy obciążenie zewnętrzne w postaci:

$$\vec{f} = \vec{f}(s, \vec{r}, \vec{r}', \vec{u}) = f_1(s, \vec{r}, \vec{r}', \vec{u})\vec{\tau} + f_2(s, \vec{r}, \vec{r}', \vec{u})\vec{n} \quad (41)$$

to prowadzi ono do samosprężenia układu równań stanu w przypadku gdy obciążenie \vec{f} posiada potencjał $V(s, \vec{r}, \vec{r}', \vec{u})$ tzn.

$$f_1 = \frac{\partial V}{\partial v} \quad f_2 = \frac{\partial V}{\partial w}, \quad (42)$$

gdzie $V(s, \vec{r}, \vec{r}', \vec{u})$ oznacza dowolną funkcję.

4.2. Obciążenia niekonserwatywne. i) stałe ciśnienie zewnętrzne na jednostkę długości osi nieodkształconej.

Oznaczając stałe, zewnętrzne, ciśnienie działające na jednostkę długości osi nieodkształconej przez $\tilde{p} = p_0 = \text{const}$, można kolejno: wektor \vec{f} oraz jego składowe (q, p) w bazie $(\vec{n}, \vec{\tau})$ zapisać:

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \tilde{p}(s^*)\vec{n}^* = p_0\vec{n}^*, \\ \tilde{q} &= (\vec{f} \cdot \vec{\tau}) = p_0(\vec{n}^* \cdot \vec{\tau}) = p_0\sin\psi, \\ \tilde{p} &= (\vec{f} \cdot \vec{n}) = p_0(\vec{n}^* \cdot \vec{n}) = p_0\cos\psi. \end{aligned} \quad (43)$$

Rozwijając składowe (\tilde{p}, \tilde{q}) w szereg:

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= p_0\sin\psi_0 + p_0\cos\psi_0\epsilon\psi_1 + \dots \\ \tilde{p} &= p_0\cos\psi_0 - p_0\sin\psi_0\epsilon\psi_1 + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

otrzymujemy następujące człony tego obciążenia:

$$\begin{aligned} q_0 &= p_0\sin\psi_0; & \tilde{q}_1 &= p_0\cos\psi_0\psi_1, \\ \tilde{p}_0 &= p_0\cos\psi_0; & \tilde{p}_1 &= -p_0\sin\psi_0\psi_1, \end{aligned} \quad (45)$$

które nie prowadzą do samosprężenia równań stanu (35).

ii) stałe ciśnienie na jednostkę osi odkształconej (ciśnienie rzeczywiste).

W tym przypadku elementarna siła $d\vec{F} = p_0 ds^* \cdot \vec{n}^*$. Wektor \vec{f} można zapisać:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{ds} = p_0 \frac{ds^*}{ds} \vec{n}^* = p_0(1 + \epsilon_0)\vec{n}^*, \quad (46)$$

zaś jego składowe (\tilde{p} , \tilde{q}):

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= (\vec{f} \cdot \vec{\tau}) = p_0(1 + \varepsilon_0)\sin\psi, \\ \tilde{p} &= (\vec{f} \cdot \vec{n}) = p_0(1 + \varepsilon_0)\cos\psi,\end{aligned}\quad (47)$$

korzystając z (31) i (34) otrzymujemy po przekształceniach:

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= p_0(1 + \varepsilon_{00})\sin\psi_0 + \varepsilon[(1 + \varepsilon_{00})\cos\psi_0\psi_1 + \sin\psi_0\varepsilon_{01}]p_0 + \dots, \\ \tilde{p} &= p_0(1 + \varepsilon_{00})\cos\psi_0 + \varepsilon[-(1 + \varepsilon_{00})\sin\psi_0\psi_1 + \cos\psi_0\varepsilon_{01}]p_0 + \dots\end{aligned}\quad (48)$$

Z (48) wynikają następujące składowe obciążenia:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0 &= p_0(1 + \varepsilon_{00})\sin\psi_0, \\ \tilde{p}_0 &= p_0(1 + \varepsilon_{00})\cos\psi_0, \\ \tilde{q}_1 &= p_0[(1 + \varepsilon_{00})\cos\psi_0\psi_1 + \sin\psi_0\varepsilon_{01}], \\ \tilde{p}_1 &= p_0[-(1 + \varepsilon_{00})\sin\psi_0\psi_1 + \cos\psi_0\varepsilon_{01}],\end{aligned}\quad (49)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\varepsilon_{00} &= \frac{1}{EA} (\mathcal{N}_0\cos\psi_0 - \mathcal{K}_0\sin\psi_0 - kM_0) \\ \varepsilon_{01} &= \frac{1}{EA} [(\cos\psi_0\mathcal{N}_1 - \sin\psi_0\mathcal{K}_1) - (\mathcal{N}_0\sin\psi_0 + \mathcal{K}_0\cos\psi_0)\psi_1 - kM_1].\end{aligned}$$

Pełny schemat klasyfikujący 27 różnych sposobów zachowania się obciążenia z uwagi na:

- aktualny kierunek obciążenia
- prostą działania obciążenia
- intensywność obciążenia

został opracowany wspólnie z J. Skrzypkiem i zamieszczony w jego pracy [12].

5. Przykład. Łuk kołowy.

5.1. Równania opisujące statyczne ugięcia oraz małe, liniowe drgania łuku. Rozpatrywać będziemy sprężysty łuk kołowy o długości l , promieniu R , obustronnie sztywnie zamocowany, obciążony stałym ciśnieniem hydrostatycznym p_0 liczonym na jednostkę długości osi nieodkształconej (tzn. ciśnienie pozorne). Przyjęcie takiego ciśnienia podyktowane było względami numerycznymi i jak wynika z porównania wzorów (49) (ciśnienie rzeczywiste) i (45) (ciśnienie pozorne), nie prowadzi do zasadniczych zmian ilościowych z uwagi na nierówności: $\varepsilon_{00} \ll 1$ oraz $\varepsilon_{01} \ll 1$.

Wprowadzając następujące zmienne bezwymiarowe i oznaczenia:

$$\begin{aligned}x &= s/l, & v_0^* &= v_0/l, & w_0^* &= w_0/l, & \mathcal{N}_0^* &= \mathcal{N}_0 l/EI_0, & \psi_0^* &= \psi_0, \\ \mathcal{K}_0^* &= \mathcal{K}_0 l^2/EI_0, & M_0^* &= M_0 l/EI_0, & v_1^* &= v_1/l, & w_1^* &= w_1/l, \\ \mathcal{N}_1^* &= \mathcal{N}_1 l^2/EI_0, & \mathcal{K}_1^* &= \mathcal{K}_1 l^2/EI_0, & M_1^* &= M_1 l/EI_0 \\ \beta &= \frac{p_0 R^3}{EI_0}, & \Omega &= \varrho \omega^2 \frac{R^4 A_0}{EI_0}, & \alpha &= \frac{I_0}{A_0 l^2}, & \bar{\varepsilon} &= \frac{l}{R}.\end{aligned}$$

gdzie

ρ — gęstość materiału

E — moduł Younga, A_0 , I_0 — oznaczają pole powierzchni przekroju poprzecznego oraz jego moment bezwładności w punkcie x_0 zdefiniowanym tak aby $A_0 l = V$ (objętość łuku)

równania opisujące statyczne ugięcie łuku mają postać:

$$\begin{aligned} v_0^* &= \bar{\varepsilon} w_0 - 1 + (1 + \varepsilon_{00}) \cos \psi_0, \\ w_0^* &= -\bar{\varepsilon} v_0 - (1 + \varepsilon_{00}) \sin \psi_0, \\ \psi_0^* &= -\frac{M_0^*}{f(\Phi)} - \bar{\varepsilon} \varepsilon_{00}, \\ \mathcal{N}_0^* &= \bar{\varepsilon} \mathcal{X}_0 - \bar{\varepsilon}^3 \beta \sin \psi_0^*, \\ \mathcal{X}_0^* &= -\bar{\varepsilon} \mathcal{N}_0 - \bar{\varepsilon}^3 \beta \cos \psi_0^*, \\ M_0^* &= -(1 + \varepsilon_{00}) (\mathcal{N}_0^* \sin \psi_0^* + \mathcal{X}_0^* \cos \psi_0^*), \end{aligned} \quad (51)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varepsilon_{00} &= \frac{\alpha}{\Phi} (\mathcal{N}_0^* \cos \psi_0^* - \mathcal{X}_0^* \sin \psi_0^* + \bar{\varepsilon} M_0^*), \\ A &= A_0 \Phi(x); \quad I_{20} = I_0 f(\Phi); \quad f(\Phi) = \Phi^v; \quad v = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (52)$$

Φ — bezwymiarowy przekrój poprzeczny łuku.

Do równań (51) dołączamy następujące warunki brzegowe wynikłe z obustronnego sztywnego utwierdzenia:

$$\begin{aligned} v_0^*(0) &= 0, & w_0^*(0) &= 0, & \psi_0^*(0) &= 0, \\ v_0^*(1/2) &= 0, & \psi_0^*(1/2) &= 0, & \mathcal{X}_0^*(1/2) &= 0. \end{aligned}$$

Warunki te odpowiadają symetrycznej formie ugięcia. Z (35) otrzymuje się następujące równania stanu:

$$\begin{aligned} v_{1i}^* &= \bar{\varepsilon} w_{1i}^* - (1 + \varepsilon_{00}) \sin \psi_0^* \psi_{1i}^* + \frac{\alpha}{\Phi} \cos \psi_0^* [\cos \psi_0^* \mathcal{N}_{1i}^* - \\ &\quad - \sin \psi_0^* \mathcal{X}_{1i}^* - (\mathcal{N}_0^* \sin \psi_0^* + \mathcal{X}_0^* \cos \psi_0^*) \psi_{1i}^* + \bar{\varepsilon} M_{1i}^*], \\ w_{1i}^* &= -\bar{\varepsilon} v_{1i}^* - (1 + \varepsilon_{00}) \cos \psi_0^* \psi_{1i}^* - \frac{\alpha}{\Phi} \sin \psi_0^* [\cos \psi_0^* \mathcal{N}_{1i}^* - \\ &\quad - \sin \psi_0^* \mathcal{X}_{1i}^* - (\mathcal{N}_0^* \sin \psi_0^* + \mathcal{X}_0^* \cos \psi_0^*) \psi_{1i}^* + \bar{\varepsilon} M_{1i}^*], \\ \psi_{1i}^* &= -\frac{M_{1i}^*}{f(\Phi)} - \bar{\varepsilon} \frac{\alpha}{\Phi} \cos \psi_0^* \mathcal{N}_{1i}^* - \sin \psi_0^* \mathcal{X}_{1i}^* - (\mathcal{N}_0^* \sin \psi_0^* + \mathcal{X}_0^* \cos \psi_0^*) \psi_{1i}^* + \bar{\varepsilon} M_{1i}^*, \\ \mathcal{N}_{1i}^* &= \bar{\varepsilon} \mathcal{X}_{1i}^* - \bar{\varepsilon}^3 \beta \cos \psi_0^* \psi_{1i}^* - \bar{\varepsilon}^4 \Omega_i \Phi v_{1i}^*, \\ \mathcal{X}_{1i}^* &= -\bar{\varepsilon} \mathcal{N}_{1i}^* + \bar{\varepsilon}^3 \beta \sin \psi_0^* \psi_{1i}^* - \bar{\varepsilon}^4 \Omega_i \Phi w_{1i}^*, \\ M_{1i}^* &= -(1 + \varepsilon_{00}) [\cos \psi_0^* \mathcal{X}_{1i}^* + \sin \psi_0^* \mathcal{N}_{1i}^* + (\mathcal{N}_0^* \cos \psi_0^* - \mathcal{X}_0^* \sin \psi_0^*) \psi_{1i}^*] - \\ &\quad - \frac{\alpha}{\Phi} (\mathcal{N}_0^* \sin \psi_0^* + \mathcal{X}_0^* \cos \psi_0^*) [\cos \psi_0^* \mathcal{N}_{1i}^* - \sin \psi_0^* \mathcal{X}_{1i}^* - \\ &\quad - (\mathcal{N}_0^* \sin \psi_0^* + \mathcal{X}_0^* \cos \psi_0^*) \psi_{1i}^* + \bar{\varepsilon} M_{1i}^*], \end{aligned} \quad (53)$$

z warunkami brzegowymi:

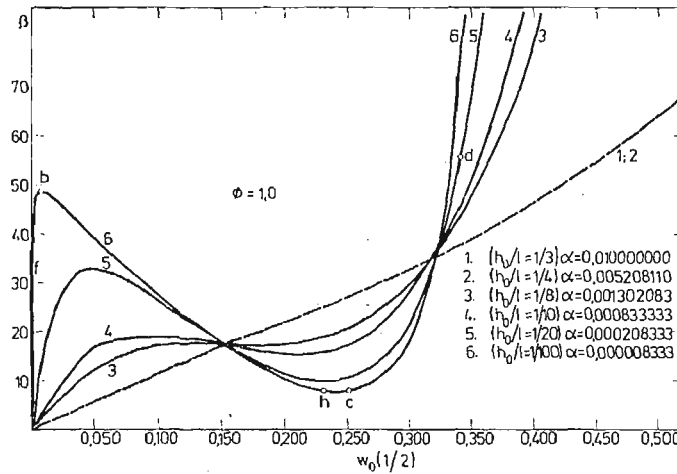
a) antysymetryczna forma drgań ($i = 1$)

$$\begin{aligned} v_{i1}^*(0) = 0, \quad w_{i1}^*(0) = 0, \quad \psi_{i1}^*(0) = 0, \\ w_{i1}^*(1/2) = 0, \quad \mathcal{N}_{i1}^*(1/2) = 0, \quad M_{i1}^*(1/2) = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

b) symetryczna forma drgań ($i = 2$)

$$\begin{aligned} v_{i2}^*(0) = 0, \quad w_{i2}^*(0) = 0, \quad \psi_{i2}^*(0) = 0, \\ v_{i2}^*(1/2) = 0, \quad \psi_{i2}^*(1/2) = 0, \quad \mathcal{H}_{i2}^*(1/2) = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

5.2. Związek między drganiami, a formami utraty stateczności. W celu zbadania statecznego zachowania się łuku całkowano numerycznie równania statycznego ugięcia (51) z warunkami brzegowymi (52). Otrzymane rezultaty dla wyniosłości $\bar{\varepsilon} = 1,571$ i $\frac{h_0}{l} = 1/100$ przedstawiono na rysunku 6. Punkt *b* (rys. 6) odpowiada krytycznej wartości obciążenia dla którego



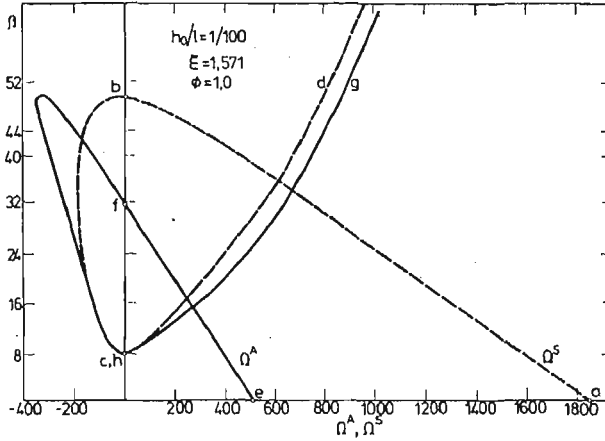
Rys. 6

następuje utrata stateczności przez przeskok. Gałąź (b—c) odpowiada niestatecznemu zachowaniu się łuku, z uwagi na formę symetryczną wyboczenia. Zbiór krzywych w funkcji parametru α zestawiono na rys. 6. W celu określenia obciążenia krytycznego odpowiadającego bifurkacji rozpatrzono małe, liniowe drgania nałożone na stan statycznego ugięcia wyznaczone z rozwiązań równań (51) z warunkami (52). Wykreślono zależność między wartościami kwadratów częstości antysymetrycznej Ω_i^A i symetrycznej Ω^S , a ugięciem $w_0(1/2)$ w środku łuku. Odpowiednie wartości otrzymano całkując numerycznie równania stanu (53) z warunkami (54) dla antysymetrycznej lub (55) dla symetrycznej linii ugięcia.

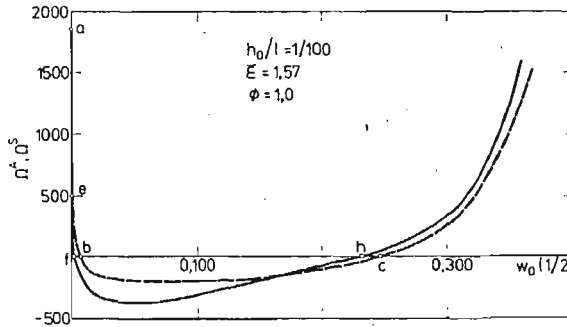
Dla $\frac{h_0}{l} = 1/100$ otrzymano krzywe przedstawione na rysunkach 7 i 8.

Krzywe te wspólnie z krzywą z rysunku 6 charakteryzują zachowanie się łuku pryzmatycznego. Ze wzrostem siły, ugięcie $w_0(1/2)$ rośnie, zaś częstość Ω^S maleje (gałąź (a—b)). W punkcie *b* (siła krytyczna) następuje przeskok na gałąź *d* lub niestateczne przejście po gałęzi (b—c) (Ω^S pozostaje wtedy ujemne). Począwszy od punktu *c* cała gałąź (c—d)

odpowiada statecznemu zachowaniu się łuku (ze względu na wyoboczenie symetryczne). Dla drgań antysymetrycznych gałąź (e—f) odpowiada statecznemu zachowaniu się łuku. Punkt f odpowiada bifurkacji. Gałąź (f—h) charakteryzuje niestateczne zachowanie się



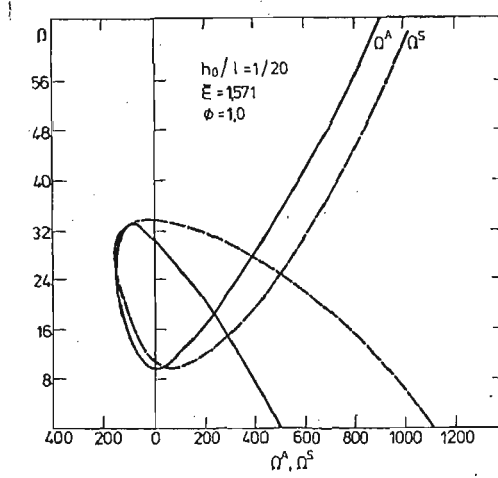
Rys. 7



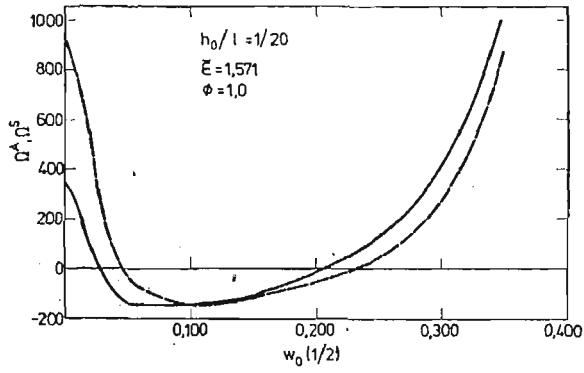
Rys. 8

łuku. Obszar stateczności pojawia się dopiero na gałęzi (h—g). Odpowiednie obszary stateczności i niestateczności, przeskok oraz bifurkacja mogą być również dobrze zilustrowane w innym układzie współrzędnych (rys. 8). Dla parametru $\frac{h_0}{l} = 1/100, 1/10, 1/4$ analogiczne wykresy zestawiono na rys. 9, 10, 11, 12, 13, 14.

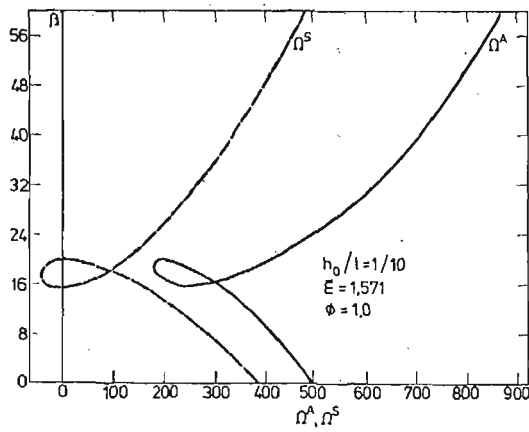
Jak widać z rysunku 11 i 12 dla $\frac{h_0}{l} = 1/10$ nie występuje utrata stateczności przez bifurkację ($\Omega^A > 0$). Zaś dla $\frac{h_0}{l} = 1/4$ w ogóle nie jest możliwa utrata stateczności, ani poprzez bifurkację (gdyż $\Omega^A > 0$), ani poprzez przeskok ponieważ $\Omega^S > 0$.



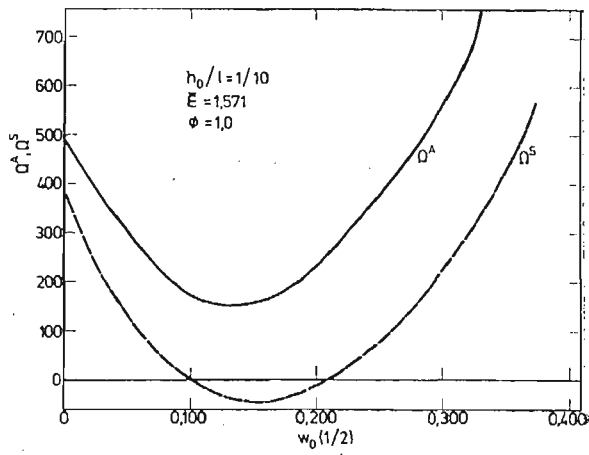
Rys. 9



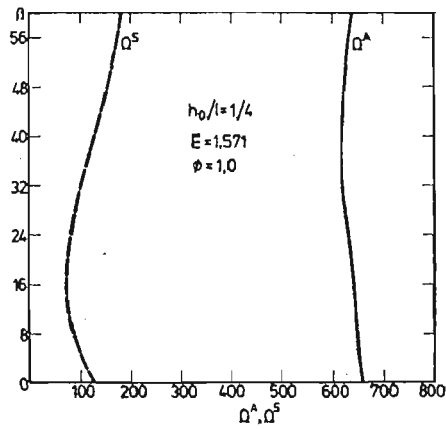
Rys. 10



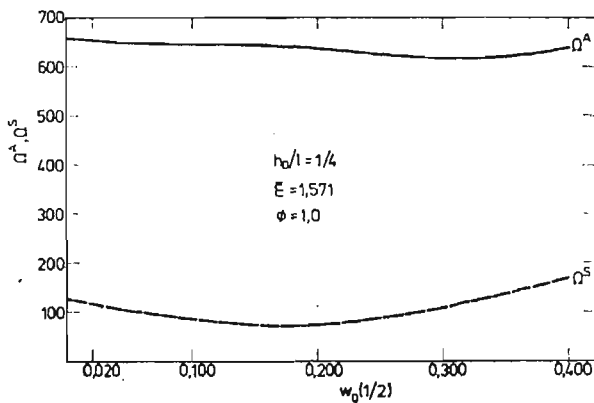
Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14

6. Zakończenie

Przedstawiona koncepcja wyróżnienia stanu nieliniowego, statycznego ugięcia z równoczesnym nałożeniem na niego małych, liniowych drgań oprócz swej funkcji prowadzącej do badania stateczności może być wykorzystana do optymalnego kształtowania łuków o osi wydłużalnej.

W zakończeniu pragnę również wyrazić wdzięczność doc. dr hab. inż. Antoniemu Gajewskiemu za pomoc w wykonaniu tej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. J. BLACHUT, A. GAJEWSKI, *On unimodal and bimodal optimal design of funicular arches*, Int. J. Solids Struct., 17, (1981), 653 - 667.
2. D. O. BRUSH, B. O. ALMROTH, *Buckling of bars, plates and shells*, str. 120 - 141, Mc Graw-Hill, NY, 1975.
3. J. F. DICKIE, P. BROUGHTON, *Stability criteria for shallow arches*, J. of Engineering Mech. Div., ASCE, 97, (1971), 951 - 965.
4. C. L. DYM, *Buckling and postbuckling behaviour of steep compressible arches*, Int. J. Solids Struct., 9, (1973), 129 - 140.
5. C. L. DYM, *Stability theory and its applications to structural mechanics*, str. 144 - 166, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1974.
6. M. S. KORNISZYN, F. S. ISANBAJEWA, *Gibkije plastyiny i paneli*, Moskwa, 1968.
7. M. LÉVY, *Memoire sur un nouveau cas integrable du problème d'élastique et l'une de ses applications*, Journal de Mathématique Pures et Appliquées (Liouville), series 3, 10, (1884), 5 - 42.
8. R. H. PLAUT, *Postbuckling analysis of continuous elastic systems under multiple loads; part 1: theory, part 2: applications*, J. Appl. Mech., 2, 46, (1979), 393 - 403.
9. R. SCHMIDT, *Postbuckling behaviour of uniformly compressed circular arches with clamped ends*, Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP), 30, (1979), 553 - 556.
10. R. SCHMIDT, *Initial postcritical behaviour of circular arches with hinged ends*, Indust. Math., 29, (1979), 27 - 37.
11. R. SCHMIDT, D. A. DADDEPO, *Large deflections of eccentrically loaded arches*, Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP), 21, (1970), 991.
12. R. SCHMIDT, *Buckling of rings subjected to unconventional loads*, Industrial Math., 30, (1980), 135 - 142.
13. H. L. SCHREYER, E. F. MASUR, *Buckling of shallow arches*, J. of the Engineering Mech. Div., ASCE, 92, (1966), 1 - 17.
14. J. SKRZYPEK, *Odkształcenia plastyczne i analiza form utraty nośności geometrycznie nieliniowych powłok toroidalnych*, Zeszyty Naukowe Pol. Krakowskiej, nr. 2, 1979.
15. R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Układy prętowe i powierzchniowe; obliczenia dynamiczne*, Arkady, Warszawa, 1964.

Резюме

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БАЛОК С РАСТЯЖИВАЕМОЙ ОСЕЙ

Рассматривается задача устойчивости призматических балок, в которых употребляется растяжимость оси (не принимается во внимание безмоментного состояния). Выведены точные уравнения движения, а потом выведено нелинейное состояние, на которое накладывается малые,

линейные колебания, чтобы получить возможность учитывания устойчивости или для бифуркаций или для перескока. Численные результаты получились для круглой арки под действием внешнево давления.

Summary

STABILITY ANALYSIS OF EXTENSIBLE PRISMATIC ARCHES

The stability problem of a prismatic curved rod in which an extensibility of a rod axis and a bending state are taken into account, is discussed. The linear vibrations are imposed on the deformed state in order to analyse the buckling problem either by a bifurcation or by a snap-through approach. Appropriate results for a circular arch under external pressure are provided.

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 stycznia 1981 roku.

Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 pt. „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”.

STATECZNOŚĆ EULEROWSKA PRĘTÓW PRZEKŁADKOWYCH Z RDZENIEM O ZMIENNEJ CHARAKTERYSTYCE

PIOTR A. WRZECIONIARZ (WROCLAW)

1. Wstęp

Pojawienie się tworzyw o zmiennych własnościach umożliwiło otrzymanie konstrukcji przekładkowych z rdzeniami o zmiennej charakterystyce [1]. Dotychczas rozważono utratę stateczności płyty przekładkowej z rdzeniem o celowo zróżnicowanych na grubości własnościach wytrzymałościowych [2]. Przedstawiono metodę określania sił krytycznych grubych płyt przekładkowych w przypadku lokalnej formy utraty stateczności [3]. W badaniach doświadczalnych [4, 5] wykazano, że zastosowanie rdzenia o zmiennej gęstości powoduje wzrost sił krytycznych fałdowania nawet o 68% w stosunku do płyt przekładkowych z rdzeniem o stałej charakterystyce, przy tym samym ciężarze obu rodzajów płyt.

Praca niniejsza uzupełnia dotychczasowe o przypadek wyboczenia eulerowskiego pręta przekładkowego z rdzeniem o zmiennej na grubości charakterystyce wytrzymałościowej. Analizuje się swobodnie podparty pręt poddany działaniu jednokierunkowego obciążenia ściskającego przyłożonego w płaszczyźnie okładzin. W celu wykazania korzyści związanych ze stosowaniem tego typu konstrukcji porównuje się wartości sił krytycznych prętów o stałych i zmiennych charakterystykach rdzenia.

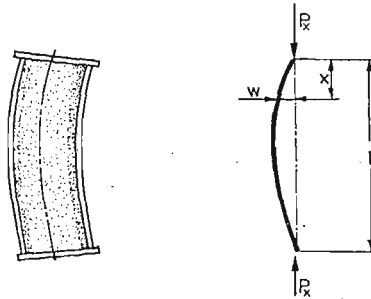
2. Analiza mechanizmu utraty stateczności

Rozważany pręt przekładkowy (rys. 1) charakteryzuje się rdzeniem o zmiennej na grubości gęstości pozornej. Tworzywo o największej gęstości pozornej, a więc i najwyższych własnościach wytrzymałościowych, znajduje się bezpośrednio przy okładzinach.

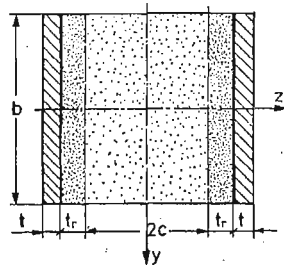
Rys. 2 przedstawia przekrój poprzeczny tego pręta. Jak wykazały badania [2, 4, 6] zmiany w tworzywie mają charakter ciągły, przy czym istotne różnice występują jedynie w cienkich zewnętrznych warstwach rdzenia, natomiast jego warstwa środkowa charakteryzuje się własnościami stałymi. Można więc w rdzeniu wyodrębnić trzy warstwy: dwie cienkie zewnętrzne o grubości t , charakteryzujące się podwyższonymi i zmieniającymi się własnościami wytrzymałościowymi oraz wewnętrzną o własnościach stałych.

Utrata stateczności w kierunku osi y (rys. 2) jest mało prawdopodobna z uwagi na znaczną sztywność okładzin zginanych w swej płaszczyźnie. Wyboczenie pręta może nastąpić w kierunku osi z . Ponieważ sztywność rdzenia w kierunku osi x , w tym i jego warstw zagęszczonych jest mała w porównaniu ze sztywnością okładzin, więc się ją powszechnie pomija. Jest to równoznaczne założeniu, że rdzeń nie przynosi naprężeń po-

dłużnych, które w całości przynoszone są przez obie okładziny. Powszechnie też przyjmuje się, że w cienkich okładzinach naprężenia normalne mają rozkład liniowy na grubości t , natomiast naprężenia ścinające są równe zero. Tak więc utrata stateczności związana będzie ze zginaniem obu okładzin, obu warstw zagęszczonych oraz warstwy środkowej. Obok zginania występować będzie, charakterystyczne dla konstrukcji warstwowych, ścinanie rdzenia, który przenosi całkowitą siłę poprzeczną. Naprężenia ścinające występujące we wszystkich warstwach rdzenia nie mogą być pominięte, gdyż mają one duży wpływ na zachowanie się konstrukcji przekładkowych.



Rys. 1. Wyboczony pręt przekładkowy.



Rys. 2. Przekrój poprzeczny pręta przekładkowego z rdzeniem o zmiennej charakterystyce.

W rozważanych prętach rdzeń połączony jest z okładzinami na całej ich powierzchni. W przypadku rdzeni o zmiennej charakterystyce nie jest możliwe stosowanie technologii spieniania „in situ” między okładzinami. Tak więc połączenie elementów składowych konstrukcji może odbyć się przez klejenie. Z uwagi na stosowane obecnie kleje, charakteryzujące się znaczną elastycznością, można przyjąć, podobnie jak w pracy [3], założenie upraszczające o istnieniu poślizgów na granicy okładzin i rdzenia.

3. Obciążenia krytyczne

Obciążenia krytyczne określone zostaną dla pręta swobodnie podpartego na obu końcach. Czyni się przy tym następujące założenia wynikające z p. 2 lub też powszechnie czynione w przypadku rozważania konstrukcji warstwowych:

- utrata stateczności pręta, o jednostkowej szerokości b , następuje w zakresie sprężystym,
- na pręt działa równomierne obciążenie ściskające P_x przyłożone na końcach pręta i przenoszone w całości przez obie okładziny,

- wszystkie warstwy pręta są sprężyste i izotropowe,
- dopuszcza się występowanie poślizgów na granicy okładzin i rdzenia,
- rdzeń składa się z dwóch jednakowych warstw zewnętrznych o grubości t , oraz jednej warstwy wewnętrznej o grubości $2c$,
- każda cienka warstwa zewnętrzna rdzenia ma własności wytrzymałościowe równe średniej arytmetycznej własności ekstremalnych w niej występujących.

Ostatnie z przedstawionych założeń sprowadza w zasadzie rozważany pręt przekładkowy do pręta o trójwarstwowym rdzeniu. Jak wykazały cytowane badania [2, 4, 6] zewnętrzne warstwy rdzenia o zmiennej charakterystyce mają niewielką grubość w stosunku do grubości warstwy środkowej. Ponadto w warstwach tych uzyskuje się własności o różnym trudnym obecnie do uchwycenia, charakterze zmian. Przyjęcie uproszczonego modelu, identycznego z przedstawionymi w [2, 3], zaważa oczywiście uniwersalność przedstawionych rozważań.

Całkowite ugięcie wyobczonego pręta (rys. 1) jest sumą ugięć częściowych, z których w_g pochodzi od zginania, natomiast w_s od sił poprzecznych występujących w rdzeniu.

$$w = w_g + w_s. \quad (3.1)$$

Na podstawie klasycznej teorii gięcia można napisać, że

$$\frac{\partial^2 w_g}{\partial x^2} = -\frac{M}{B}, \quad (3.2)$$

gdzie:

B jest sztywnością na zginanie.

Od sztywności poprzecznej S zależy ugięcie w_s ,

$$w_s = \frac{\partial Q}{\partial X}, \quad (3.3)$$

przy czym

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.4)$$

Równanie (3.1) można więc przedstawić w postaci

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M}{B} + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.5)$$

Pamiętając o tym, że $M = P \cdot w$ można napisać

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{P_x \cdot w}{B} + \frac{P_x}{S} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (3.6)$$

lub po przekształceniach

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{B} \frac{P_x}{1 + \frac{P_x}{S}} w = 0. \quad (3.7)$$

Dla warunków swobodnego podparcia pręta na obu końcach mamy

$$\begin{aligned}x &= 0 & w &= 0 \\x &= l & w &= 0\end{aligned}$$

Oczywiście powyższe warunki brzegowe odnoszą się tylko do sumy ugięć w , a nigdy do w_g lub w_s oddzielnie. Rozwiązanie równania (3.7) przy założonych warunkach brzegowych przyjmuje ostateczną postać

$$P_{xkr} = \frac{P_E}{1 + \frac{P_E}{P_S}} \quad (3.8)$$

Siła eulerowska P_E określona będzie zależnością

$$P_E = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} B \quad (3.9)$$

Przed przystąpieniem do dalszych rozważań przyjmuje się, że $n = 1$, gdyż wówczas otrzymuje się najmniejszą wartość siły wybaczącej.

W sztywności na zginanie B (3.9) uwzględnić należy zginanie obu okładzin, obu warstw zagęszczonych oraz warstwy środkowej

$$B = E_t \cdot J_t + E_r \cdot J_r + E_c \cdot J_c. \quad (3.10)$$

Odpowiednie momenty bezwładności oblicza się jedynie względem osi środkowej pręta, gdyż sztywności na zginanie okładzin i warstw zagęszczonych liczone według własnych osi są pomijalnie małe dla rozważanego przypadku (cienkie okładziny, cienkie warstwy zagęszczone). Moment bezwładności okładzin określa zależność:

$$J_t = \frac{(2t + 2t_r + 2c)^3}{12} - \frac{(2t_r + 2c)^3}{12}, \quad (3.11)$$

lub

$$J_t = \frac{2}{3} [(t + t_r + c)^3 - (t_r + c)^3]. \quad (3.12)$$

Analogicznie moment bezwładności warstw zagęszczonych wyniesie

$$J_r = \frac{2}{3} [(t_r + c)^3 - c^3]. \quad (3.13)$$

Moment bezwładności warstwy środkowej

$$J_c = \frac{2}{3} c^3. \quad (3.14)$$

Uwzględniając zależności 3.10 ÷ 3.14 siła eulerowska określona może być równaniem

$$P_E = \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{l^2} \{E_t [(t + t_r + c)^3 - (t_r + c)^3] + E_r [(t_r + c)^3 - c^3] + E_c \cdot c^3\}. \quad (3.15)$$

Siła P_s , związana z efektem przekładkowym, uwzględnia ścinanie we wszystkich fragmentach rdzenia, zarówno tych o stałej, jak i zmiennej charakterystyce. Jak wiadomo jest

ona równa iloczynowi powierzchni przekroju rdzenia A oraz modułu sprężystości poprzecznej G .

$$S = A \cdot G \quad (3.16)$$

Dla rozważanego pręta przekładkowego otrzymamy

$$P_s = 2 \cdot c \cdot b \cdot G_c + 2 \cdot t_r \cdot b \cdot G_r \quad (3.17)$$

Dla pręta o jednostkowej szerokości można oczywiście napisać

$$P_s = 2c \cdot G_c + 2t_r \cdot G_r \quad (3.18)$$

Uwzględniając (3.15) i (3.18) siłę krytyczną z równania (3.8) opisuje ostatecznie zależność

$$P_{skr} = \frac{\frac{2}{3} \frac{\pi^2}{l^2} \{E_t[(t+t_r+c)^3 - (t_r+c)^3] + E_r[(t_r+c)^3 - c^3] + E_c \cdot c^3\}}{1 + \frac{\frac{2}{3} \frac{\pi^2}{l^2} \{E_t[(t+t_r+c)^3 - (t_r+c)^3] + E_r[(t_r+c)^3 - c^3] + E_c \cdot c^3\}}{2c \cdot G_c + 2t_r \cdot G_r}}$$

Postępując analogicznie określić można siłę krytyczną dla pręta obustronnie zamurowanego lub o mieszanych warunkach brzegowych. W tych przypadkach zależność (3.9) ulegnie zmianie podobnie jak dla prętów jednorodnych, podczas gdy (3.8), (3.10) i (3.18) pozostaną w tej samej postaci.

4. Porównanie prętów przekładkowych z rdzeniami o stałych i zmiennych charakterystykach

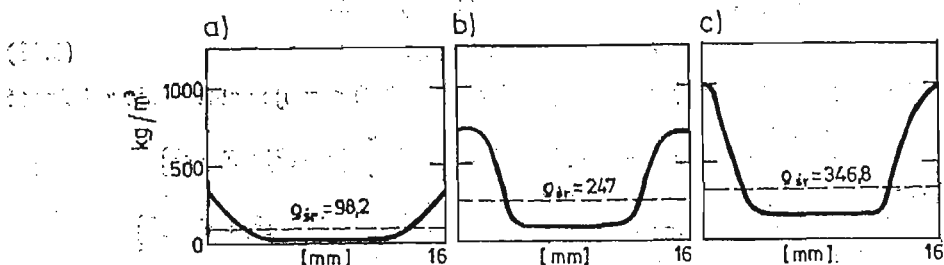
W celu sprawdzenia efektów związanych z ewentualnym stosowaniem prętów z rdzeniami o zmiennej na grubości charakterystyce wytrzymałościowej porównuje się je z odpowiednimi prętami o klasycznych rdzeniach spienianych. Obliczenia przeprowadza się dla rdzenia ze sztywnego tworzywa poliuretanowego, którego warstwy zewnętrzne mają charakterystyki identyczne do wcześniej otrzymanych [2, 4, 5]. Dobiera się do nich takie rdzenie o stałych własnościach, których gęstość pozorną jest równa średniej gęstości pozornej tych pierwszych. Innymi słowy porównanie dotyczy prętów przekładkowych o tej samej masie. Oczywiście pozostałe wielkości takie jak wymiary gabarytowe, stałe materiałowe i grubość okładzin, warunki brzegowe oraz sposób obciążenia są identyczne dla obu rodzajów prętów.

Obliczenia przeprowadza się dla prętów o długości $l = 500$ mm i całkowitej grubości rdzenia 16 mm. Wymiary powyższe gwarantują pojawienie się eulerowskiej formy utraty stateczności. Przyjmuje się ponadto, że okładziny o grubości $t = 1$ mm wykonane są z blachy duralowej o $E_t = 72,9 \cdot 10^3$ MPa oraz $\nu_t = 0,3$.

Na rysunku 3 przedstawiono wykresy zmian gęstości pozornej w trzech różnych rdzeniach. Zgodnie z założeniami przedstawionymi w p. 3 oraz w oparciu o metodę określania związków między gęstością pozorną a własnościami wytrzymałościowymi [6] można określić stałe materiałowe rdzenia. Dla warstwy zagęszczonej o grubości 3 mm, I-szego pręta mamy $E_r = 51,2$ MPa oraz $G_r = 25,6$ MPa, natomiast dla warstwy środkowej o grubości 10 mm odpowiednio $E_c = 6,88$ MPa i $G_c = 3,44$ MPa.

Siła eulerowska, zgodnie z 3.15 wyniesie 416,9 N/mm, a siła P_s zgodnie z 3.18 — 180 N/mm.

Ostatecznie siła krytyczna przyjmuje wartość $P_{xkr} = 129,6$ N/mm. Podane jednostki wynikają z rozważań pręta o szerokości $b = 1$. Średnia gęstość pozorna rdzenia wynosi 98,2 kg/m³, a odpowiedni moduł Younga 15,4 MPa [6]. Można więc obliczyć siłę krytyczną dla pręta z rdzeniem o stałej charakterystyce. Wynosi ona 95 N/mm.



Rys. 3. Zmiany gęstości pozornej w trzech rdzeniach.

Postępując analogicznie określono siły krytyczne dla prętów z rdzeniami przedstawionymi na rys. 3b i c oraz dla odpowiadających im prętów z rdzeniami o stałej gęstości pozornej. Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy 1. Odpowiednio podano: średnią gęstość pozorną rdzenia ρ_{sr} , wartość siły krytycznej dla pręta z rdzeniem o zmiennej charakterystyce P_{xkrz} oraz dla odpowiedniego pręta o charakterystyce stałej P_{xkrst} , ΔP różnicę między obydwoma wartościami sił krytycznych oraz przyrost procentowy liczony w stosunku do siły P_{xkrz} .

Tablica 1

Porównanie sił krytycznych prętów z rdzeniami o stałych i zmiennych charakterystykach

ρ_{sr} kg/m ³	P_{xkrz} N/mm	P_{xkrst} N/mm	ΔP N/mm	$\frac{\Delta P}{P_{xkrz}} \cdot 100\%$ %
98,2	129,6	95,0	34,6	36,4
247	304,7	263,7	41,0	15,5
346,8	364,9	324,4	40,5	12,5

Z przedstawionego zestawienia wynika, że wybaczone siły krytyczne dla prętów z rdzeniami o zmiennej charakterystyce są większe niż dla prętów z rdzeniem o tej samej średniej gęstości pozornej lecz charakterystyce stałej. Podobnie jak dla płyt różnica ta jest największa dla najniższej średniej gęstości pozornej rdzenia i maleje wraz z jej wzrostem. Podane przykłady wykazały, że w przypadku stosowania obecnie wytwarzanych rdzeni poliuretanowych o zmiennej charakterystyce można pominąć sztywność zginania warstwy środkowej, która jest znacznie mniejsza od sztywności na zginanie obu okładzin i warstw zagęszczonych. Można więc tym samym uprościć zależność 3.10 i dalsze w konkretnych obliczeniach inżynierskich.

Wykazane w poprzednich pracach korzyści płynące z zastosowania konstrukcji prze-

kładkowych z rdzeniami o zmiennej charakterystyce znalazły również potwierdzenie w niniejszym opracowaniu. Należy spodziewać się, że ewentualne dalsze prace mogą również wykazać celowość wprowadzenia tego typu elementów w miejsce dotychczas stosowanych konstrukcji przekładnikowych o stałych charakterystykach rdzenia.

Przedstawiona propozycja określenia stateczności prętów przekładkowych z rdzeniem o zmiennej charakterystyce nie jest jedyną możliwą. Zastosowanie innych metod obliczeniowych takich, jak np. MES pozwoli na bardziej efektywne analizowanie zjawisk występujących w konstrukcjach warstwowych o celowo zróżnicowanych własnościach wytrzymałościowych materiału rdzenia.

Literatura cytowana w tekście

1. L. STRICKER, P. WRZECIONIARZ, *Konstrukcyjny element przekładkowy*, Patent Nr 86955.
2. P. WRZECIONIARZ, *Stateczność płyty przekładkowej z rdzeniem o zmiennej charakterystyce*, Rozprawa doktorska, Komunikat IKiEM nr 159, Pol. Wrocław 1976.
3. P. WRZECIONIARZ, *Lokale Stabilität von Sandwichplatten mit Kernen veränderlichen Festigkeit*, *Forschung im Ingenieurwesen*, vol. 45, nr 6, 1979.
4. P. WRZECIONIARZ, *Badania stateczności płyt przekładkowych z rdzeniem o zmiennej charakterystyce*, III Symp. Stateczności Konstrukcji, Łódź 1979.
5. P. WRZECIONIARZ, *Stability investigations of variable density core sandwich*. *Journal of the Engineering Mechanics*, Proceedings of ASCE
6. P. WRZECIONIARZ, *Własność wytrzymałościowe tworzyw quasi-warstwowych*, *Przegląd Mechaniczny*, Nr 5, 1981.

Резюме

ЭЙЛЕРОВА УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ О ПЕРЕМЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

В работе рассмотрена проблема потери эйлеровой устойчивости трёхслойного стержня с заполнителем о максимальных свойствах при пластине и уменьшающихся в направлении середины заполнителя. Выведены уравнения критической нагрузки для стержня свободно опартого на концах и сжимаемого в плоскости пластин. Сравнение результатов для трёхслойных стержней с заполнителями о постоянной и переменной характеристике показывает превосходство этих вторых.

Summary

OVERALL INSTABILITY OF SANDWICH STRUTS WITH A CORE OF VARIABLE CHARACTERISTIC

The problem of overall instability of a sandwich strut with a core of the highest strength properties near the faces and decreasing towards to the axis of symmetry is considered. A formula for the critical load for a strut having both ends free supported and compressed with forces acting in the planes of the faces is derived. The calculation shows superiority of sandwich struts with the core of variable characteristics over struts with constant properties.

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 marca 1981 roku.

LIST DO REDAKCJI

1. Tezy pracy [1], jak również prac [2], [3] podważają stan wiedzy w dziedzinie transportu energii poprzez przewodnictwo cieplne oraz przenoszenia masy drogą dyfuzji, bez podania zadowalającej argumentacji. Na fakt ten zwrócił uwagę R. Żelazny, opiniując rozprawę [2]. W pracach tych E. Bobuła proponuje nowy matematyczny model jednowymiarowego i nieustalonego procesu transportu. Przewodnictwo ciepła lub dyfuzja ma być zachowawcza w obszarze skończonym, o brzegu przemieszczającym się w czasie. Zatem Autor zamierza usunąć paradoks nieskończenie wielkiej prędkości rozchodzenia się energii lub masy, będący konsekwencją stosowania równań parabolicznych. Natężenie strumienia energii lub masy $\vec{\Phi}$ E. Bobuła przyjmuje w postaci:

$$\{1\}^1 \quad \vec{\Phi} = -k \left(\frac{\partial p(x', t)}{\partial x'} + c(x', t)p(x', t) \right) \vec{i},$$

gdzie $x' \in (-\infty, +\infty)$ — współrzędna położenia, $t \in [0, \infty)$ — czas, p — temperatura lub stężenie, c — siły zewnętrzne, bodźce wewnętrzne lub wypadkowa wszystkich oddziaływań, \vec{i} — wektor na osi Ox' .

Po przyjęciu silnych założeń, że $p(x', 0) = p(-x', 0)$, $c(x', t) = -c(-x', t)$, wprowadzeniu nowej zmiennej niezależnej $x = \sqrt{D_p} x'$ i po przekształceniach Autor przedstawia równanie bilansu w postaci:

$$\{2\} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (cp) + 2 \left(\frac{\partial c}{\partial x} + cp \right)_{x=0^-} \delta(x),$$

W pracach [2] i [3] oraz w rozdziale 3 [1] Autor rozważa problem gdy $c = 0$. Dla skrócenia wywodów w niniejszych rozważaniach zwrócono uwagę głównie na ten przypadek szczególny.

2. Uwagi krytyczne

2.1. Jeszcze przed znalezieniem rozwiązania Autor zakłada, że funkcja p nie posiada pochodnej $\frac{\partial p}{\partial x}$ dla $x = 0$, $t > 0$. Gdy natężenie strumienia energii lub masy podaje wzór {1}, $c \equiv 0$, a proces przebiega w ośrodku jednorodnym to nawet w przypadku, gdy $p(x, 0)$ nie posiada pochodnych po x w skończonej ilości punktów x_i równanie zachowania ma postać

$$\{3\} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

¹⁾ Nawiasy {} dotyczą numerów wzorów tej pracy. Wzory z rozprawy [1] posiadają numery w nawiasach ().

oraz posiada klasyczne rozwiązanie. Zagadnienie takie znane jest pod nazwą problemu Cauchy'ego dla równań parabolicznych. Jego rozwiązaniem jest całka Poissona, która jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna względem zmiennych x i t (np. [25]). Powstaje więc wątpliwość dlaczego rozwiązanie p musi posiadać właściwości nieistnienia pochodnej po x , dla $x = 0$, $t > 0$. W przypadku ośrodka jednorodnego pochodna $\frac{\partial p}{\partial x}$ nie istnieje dla tych x w których działają punktowe źródła lub upusty energii lub masy. Autor natomiast stwierdza ([1] str. 31) "... zatem otrzymane równanie ((12) {2} J.W.) jest równaniem bezźródłowym". Składnik tego równania $2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} + cp \right)_{x=0^-} \delta(x)$ przedstawia źródło energii lub masy. Wskutek jego działania od punktu $x = 0$ płyną dwa makroskopowe strumienie energii lub masy o natężeniach równych odpowiednio:

$$-k \left(\frac{\partial p}{\partial x} + cp \right)_{x=0^-} \vec{i}, \quad -k \left(\frac{\partial p}{\partial x} + cp \right)_{x=0^+} \vec{i}$$

Rozwiązanie spełniające warunki (14) i (15) [1] oraz zerujące się dla $|x| \geq |\lambda(t)|$ nie posiada klasycznych pochodnych $\frac{\partial p}{\partial x}$ dla trzech, a nie dla jednej wartości x . Są to $x_1 = 0$, $x_2 = +\lambda(t)$, $x_3 = -\lambda(t)$. Wobec tego równanie bilansu ma postać

$$\{4\} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0^-} \delta(x) - \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=-\lambda(t)^+} \delta(x + \lambda(t)) - \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=+\lambda(t)^-} \delta(x - \lambda(t)),$$

która różni się od (13). Ponadto winny być spełnione warunki

$$p(\pm \lambda(t), t) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0^-} = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=-\lambda(t)^+}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0^+} = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=+\lambda(t)^-}$$

Twierdzenie J. Szarskiego [2] „Jeżeli $p(x, 0)$ jest nieujemne w przedziale $-\lambda(0) \leq x \leq \lambda(0)$ i zeruje się na zewnątrz tego przedziału i jest ograniczone dla $x \rightarrow \infty$ to rozwiązanie jest nieujemne dla $-\lambda(t) \leq x \leq \lambda(t)$ oraz zeruje się na zewnątrz tego przedziału” nie dotyczy równania (13), lecz równania {4}. Spełnienie warunku (14) jest rezultatem dostosowania natężenia źródła energii lub masy w punkcie $x = 0$ do intensywności jej odbioru na ruchomych brzegach obszaru, zatem Autor rozważa proces ze źródłami a nie zachowawczy jak podaje w tytule. Omawiany problem może być przeformułowany na przypadek źródeł rozłożonych, na co zwrócił uwagę R. Żelazny [2].

2.2. Problemy transportu masy i energii stanowią przedmiot termodynamiki procesów nieodwracalnych [4], [5]. Metodologia badania procesów transportu oparta jest na pojęciach bodźców (sił) i przepływów termodynamicznych, na lokalnym ujęciu II zasady termodynamiki. Użyteczne bywa pojęcie źródła entropii.

Można przypuszczać, że używając słowa „gęstość” w przypadku dyfuzji Autor ma na myśli stężenie, a więc gęstość cząstkową, parcjalaną. W powszechnie przyjętym rozumieniu transport masy przez wybraną powierzchnię oznacza sumę transportów cząstkowych poszczególnych składników wyróżnialnych w układzie. Transporty te mogą być skoniugowane lub sprzężone. Bodźcami do transportów skoniugowanych mogą być ułamki molowe. Fragmenty tekstu ze str. 35 i 36 rozprawy [1] przynoszą rewizję tego ogólnie przyjętego stanowiska.

„... transport pewnych składników odbywa się w kierunku przeciwnym do kierunku wyznaczonego przez gradient gęstości ... W tym przypadku modułem napędowym transportu jest potencjał elektrochemiczny”. „Jeśli proces dyfuzji posiada strumień, który zależy również od gęstości, jak w przypadku transportu zachodzącego pod wpływem potencjału elektrochemicznego ..., wówczas $c(x, t)$... jest czynnikiem ... wpływającym na kształt rozwiązania ...” W dyskusji nad tymi sformułowaniami można stwierdzić:

- bodźcem napędowym transportu cząstkowego jest gradient potencjału chemicznego, a uproszczeniem jest przyjęcie za bodziec gradientu stężenia,
- transport przeciwny do kierunku wyznaczonego przez gradient „gęstości” nie jest wywołany potencjałem chemicznym lecz jest sprzężony z innymi bodźcami,
- potencjał chemiczny jako bodziec powinien występować w postaci gradientu a nie w czynniku $c(x, t)$,
- pojawienie się w równaniu transportu składnika zależącego od „gęstości” cząstkowej utożsamiane jest z działaniem siły zewnętrznej,
- w rozumieniu Autora byłby to czynnik wewnętrzny $c(x, t)$. W tym znaczeniu czynnik ten reprezentuje jakąś właściwość układu. Jak Autor wyjaśnia zmianę znaku tej właściwości dla $x = 0$, lub ewentualną nieciągłość w tym punkcie?

Ponadto biorąc pod uwagę wzór na $c(x, t) = \frac{x}{2(r-t)}$ ze str. 27 [1] należy stwierdzić, że ma miejsce niezgodność zwrotów wszystkich bodźców termodynamicznych oraz makroskopowego przepływu energii lub masy. Zatem rozdział 4 [1] kwestionuje lokalne ujęcie II zasady termodynamiki.

2.3. Autor sugeruje, że wyrażenie na strumień {1} pochodzi od M. Smoluchowskiego z pracy [6], gdzie podany jest wzór (niektóre oznaczenia za pracą [1]):

$$\{5\} \quad \vec{\Phi} = \left(-k \frac{\partial p}{\partial x} + uFp \right) \vec{i}$$

gdzie u — jest ruchliwością cząsteczek, F — rzutem siły zewnętrznej skierowanej równoległe do osi x .

Porównując wyrażenie {1} ze wzorem M. Smoluchowskiego, używanym do dziś [7], [8] należy spostrzec, że w odróżnieniu od wzoru {1} w zależności {5} drugi składnik nie zależy od współczynnika dyfuzji, strumień cząstek transportowanych pod wpływem siły zewnętrznej (zależnej tylko od położenia) jest zgodny z jej zwrotem.

2.4. Odnośnie bibliografii.

a) Autor nie uwzględnia prac dotyczących problemu przewodnictwa cieplnego i dyfuzji po J. B. J. Fourierze i A. Ficku. Należało powołać się m.in. na monografie [9], [10], [7], [11], [26] oraz na prace A. Einsteina, M. Smoluchowskiego, J. E. Boltzmann, P. G. Shewnona oraz na twórców termodynamiki procesów nieodwracalnych [12], [13], [14] oraz [4], [5], [15].

b) Problem impulsu cieplnego czy masowego o „skończonej prędkości” należy prawie do klasycznych, wywodzi się bowiem od Maxwella. Istnieje polska bibliografia z tego zakresu [16], [17]. Hipotezę Maxwella uzasadnił C. Cattaneo w oparciu o kinetyczną teorię gazów, implikującą równanie hiperboliczne [18], [19]. Omawiany problem był przedmiotem prac P. VERNOTTE [20], M. E. GURTINA i A. C. PIPKINA [21]. Interesująca

jest koncepcja J. Müllera, przedstawiona w kilku publikacjach syntetycznie omówionych w monografii K. WILMAŃSKIEGO [22], gdzie zamieszczona jest pełna bibliografia. Podobny wykaz piśmiennictwa można zestawić dla zagadnienia dyfuzji, zaczynając od pracy S. Goldsteina [23] która od lat znalazła stałe miejsce nie tylko w bibliografii problemów dyfuzji lecz także przy omawianiu zagadnień probabilistycznych. Efekt „skończonej prędkości” uzyskuje się także w niektórych przypadkach nieliniowych równań różniczkowych parabolicznych. Wówczas rozwiązanie zachowuje ciągłość, której nie zapewnia równanie hiperboliczne. Autor nie cytuje podanych tu czy ewentualnie innych pozycji literaturowych. W tej sytuacji Autor nie porównuje swojej propozycji z dotychczasowym stanem wiedzy w zakresie „skończonej prędkości” mimo, że problem ten ma stanowić zasadnicze osiągnięcie prac [1], [2] i [3].

2.5. Praca nie zawiera erraty, więc pragnąłbym się nie ustosunkowywać do drobnych błędów, które mogły być naniesione w toku drukowania pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. E. BOBULA, *Równanie zachowawczej dyfuzji w przestrzeni dystrybucji a możliwość wpływu na jej przebieg*, ZN AGH, Górnictwo, z. 104, Kraków 1979 r.
2. E. BOBULA, *Pseudoźródłową hipoteza transportu parabolicznego*, rękopis wraz z recenzjami oraz pismem Jacka Szarskiego złożony w Bibliotece Jagiellońskiej, praca doktorska UJ 1974 r.
3. E. BOBULA, ZN AGH nr 428, MFCh z. 19, 1975 r.
4. K. GUMIŃSKI, *Termodynamika procesów nieodwracalnych*. PWN 1962 r.
5. S. WIŚNIEWSKI, B. STANISZEWSKI, R. SZYMANIK, *Termodynamika procesów nierównowagowych*, PWN 1973 r.
6. M. SMOLUCHOWSKI, *Ann. der Physik*, 48, 1915 r.
7. W. JOST, *Diffusion in Solids, Liquids and Gases*, wyd. 4 Acad. Press. New York, 1960 r.
8. H. SCHMALZRIED, *Reakcje w stanie stałym*, PWN, 1978 r.
9. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids. II.* wyd. Oxford 1959 r.
10. A. V. LUIKOW, *Analytical Heat Diffusion Theory*. Acad. Press N. York 1968 r.
11. J. CRANK, *Mathematics of Diffusion*, Oxford 1956 r.
12. L. ONSAGER, *Phys. Rev.* 1931 r. 37, 405, 1931 r. 38, 2265.
13. S. R. de GROOT, *Thermodynamics of Irreversible Processes*, Amsterdam 1952 r.
14. I. PRIGOGINE, *Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes* 1955 r.
15. B. BARANOWSKI, *Nierównowagowa termodynamika w chemii fizycznej*, PWN, 1974 r.
16. S. KALISKI, *Biuletyn PAN*, 1965 r. 13, 211.
17. S. KALISKI, *Biuletyn PAN* 1965 r. 13, 253.
18. C. CATTANEO, *Atti del Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* 3, 8, 3 1948 r.
19. C. CATTANEO, *C. R. Acad. Sci. Paris* 1958 r. 247/431.
20. P. VERNOTTE, *CR Acad. Sci. Paris*, 1958 r. 246, 3154.
21. M. E. GURTIN i A. C. PIPKIN. *Arch. Rac. Mech. An* 1968 r. 31, 113.
22. K. WILMAŃSKI, *Podstawy termodynamiki fenomenologicznej* PWN, 1974 r.
23. S. GOLDSTEIN, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1951 r.
24. A. N. TICHONOW, A. A. SAMARSKI, *Równania fizyki matematycznej*, PWN Warszawa 1963 r.
25. S. K. GODUNOW, *Równanie fizyki matematycznej*, WNT 1975 r.
26. Ł. A. KOZDOBA, *Metody rozwiązania nieliniowych zadań ciepłowodności*, Moskwa 1975 r.

INSTRUKCJE DLA AUTORÓW

Ogólne

W Mechanice Teoretycznej i Stosowanej drukowane są prace przeglądowe oraz oryginalne teoretyczne i doświadczalne z zakresu mechaniki ciała stałego oraz cieczy i gazów. Publikujemy również dyskusję naukową oraz polemikę dotyczącą prac z mechaniki, które ukazały się w MTiS lub w innych czasopismach naukowych.

W Biuletynie Informacyjnym drukujemy sprawozdania z konferencji naukowych z zakresu mechaniki w kraju i za granicą oraz z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

Praca może być złożona do druku w MTiS pod warunkiem jej nieopublikowania w innym czasopiśmie.

Drukujemy w języku polskim oraz na życzenie autorów w języku angielskim pod warunkiem złożenia pracy w tym języku.

Prace należy nadsyłać na adres Redakcji bądź jednego z redaktorów, w dwóch egzemplarzach (oryginał + kopia).

Praca złożona do druku podlega recenzji.

Wszelkie zmiany (poprawki autorskie) po zakwalifikowaniu artykułu do druku i przekazaniu go do drukarni mogą być dokonane tylko w czasie 1 korekty (na koszt autora).

Po opublikowaniu autorzy otrzymują 25 egzemplarzy odbitek swojego artykułu.

Szczegółowe

- Prace składane do publikacji w MTiS powinny zawierać (wg. kolejności)
 - Tytuł
 - Imię, Nazwisko z podaniem miejsca pracy
 - Abstrakt (w języku polskim)
 - Właściwa praca
 - Spis literatury
 - Streszczenia w języku
 - praca w języku polskim — rosyjskim i angielskim
 - praca w języku angielskim — polskim i rosyjskim.
- Tekst powinien być napisany po jednej stronie (nie na papierze kredowym) z zachowaniem podwójnych odstępów i obustronnych marginesów — z lewej 3 cm, z prawej 1 cm.
- Wzory należy wpisywać czytelnie, w kolorze czarnym, z zachowaniem numeracji po stronie prawej (należy zwrócić szczególną uwagę na rozróżnienie l oraz litery l, zera i litery o oraz liter q i p).
- Życzenia autorów dotyczące formy graficznej pracy w tym kroju czcionki, liter greckich itp. powinny być dołączone na osobnej kartce, bądź na marginesie (ołówkiem).
- Tablice występujące w tekście należy dołączyć na oddzielnych kartkach (jedna na stronie).
- Podpisy pod rysunkami powinny być wyszczególnione oddzielnie, a nie pod rysunkami.
- Prosimy o sporządzanie wykazu literatury w sposób następujący: W. Nowacki, Teoria Sprężystości, Warszawa PWN, 1970.
- Odnośniki należy numerować kolejno w całej pracy, a nie wg strony.
- Obowiązuje stosowanie układu jednostek SI.

W następnym numerze ukażą się prace

- W. NOWACKI, Modele matematyczne fenomenologicznej piezoelektryczności
Математическая модель феноменологического пьезоэлектричества
Mathematical models of a phenomenological piezoelectricity
- D. WEISHERT, A minimum principle for stress-state in elastic-plastic plates and the systematical generation of appropriate plate-models
Закон минимум для непронаженного состояния в упругопластических плитах и соответствующий модель плиты
Zasada minimum dla stanu naprężenia w płytach sprężysto-plastycznych oraz dyskusja stosowanego modelu płyt
- K. GRYSA, O metodach teorii potencjałów w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych wymiany ciepła
О методах теории потенциалов в разрешивании обратных задач теплопроводности
On the methods of the theory of potentials in resolving the inverse heat conduction problems
- R. МОКРЫК, Z. ОЛЕСΙΑК, Termodyfuzja w zagadnieniu kontaktu warstwy i półprzestrzeni sprężystej
Термодиффузия при контакте слоя с упругим полупространством
Thermodiffusion in a contact of an elastic layer with a semispace
- A. WACHNEKA-SKOWRON, O więzach wewnętrznych dla materiałów typu prędkościowego
О внутренних связях для материалов скоростного типа
On internal constrains for velocity type materials
- W. NAGÓRKO, O szacowaniu błędu rozwiązań przybliżonych w mechanice
Оценка погрешности приближенных решений в механике
On estimation of approximate solutions in mechanics
- K. PODOLAK, O propagacji fal naprężenia w sprężysto-plastycznym przewodniku poddanym działaniu ruchomej siły masowej w obecności pola magnetycznego
О распространении волн напряжения в упруго-пластическом проводнике под действием подвижной массовой силы в магнитном поле
On the propagation of stress waves produced by a moving body force in an elastic-plastic conductor subject to a magnetic field
- F. ROMANOW, J. CZMOSNOWSKI, Nieliniowa teoria stateczności powłok przekładkowych z uwzględnieniem poprzecznej odkształcalności rdzenia
Нелинейная теория устойчивости трёхслойных оболочек с учетом поперечной деформируемости заполнителя
Non-linear theory of the stability of sandwich shells with transverse deformability of the core
- S. JAKUBOWSKI, Analiza stanu zakrytycznego swobodnie podpartej tarczy prostokątnej poddanej działaniu mimośrodowego ściskania i jej zastosowanie do przybliżonego obliczania cienkościennego dźwigara skrzynekowego
Анализ послекритической стадии прямоугольной пластинки нагруженной эксцентрической сжимающей силой и его применение в приближенном методе вычисления тонкостенной балки
The post-buckling state analysis of a rectangular plate subjected to an eccentric compression and its application in an approximate calculations of thin walled box girder
- K. GRYSA, Z. KOZŁOWSKI, O jednowymiarowym zagadnieniu identyfikacji strumienia ciepła na brzegu warstwy płaskiej
Об одномерной задаче идентификации теплового потока на поверхности
On an one-dimensional heat flux identification problem at a surface of a plane slab
- B. SKIERCZYŃSKI, Wykorzystanie metod analizy wrażliwości do badania układów mechanicznych opisywanych liniowymi i nieliniowymi równaniami Mathieu
Применение метода анализа чувствительности к механическим системам описываемым линейными и нелинейными уравнениями Матье
Method of sensitivity analysis applied to mechanical systems governed by linear and nonlinear Mathieu equations

- G. MILEWSKI, W. RYCHWALSKI, Parametry funkcji opisujących relaksację naprężeń jako wskaźniki uszkodzenia struktury materiału
 Параметры функции описывающих релаксацию напряжений как указатели повреждения структуры материала
 Parameters of functions describing stress relaxation as indicators of a structure damage
- Z. GÓRECKI, Zastosowanie półbezmomentowej teorii powłok w obliczeniach statycznych ortotropowych liniowo-sprężystych prętów cienkościennych o przekroju wieloobwodowym zamkniętym
 Применение полу-безмоментной теории оболочек к статическому расчёту ортотропных линейно — упругих тонкостенных призматических стержней произвольного закрытого профиля
 The application of half-momentless theory of shells in static computation of ortotropic linear elastic bars with multicircuit closed section
- K. DRZEWIŃSKI, R. KAŁUŻA, O. MATEJA, K. SKRZYPUŁEC, Minikomputerowe wspomaganie badań doświadczalnych w mechanice
 Применение миникомпютера в экспериментальных опытах в механике
 Minicomputer application in experimental investigations in mechanics
- D. BUGAJNY, M. OSTWALD, W. SZYC, Statyczne ciśnienie niszczące membranę z promieniowymi korbami
 Статические давление разрушающие мембрану с радиальными пазами
 Static bursting pressure for the membrane having radial grooves
- E. WAŁICKI, J. ZACHWIEJA, Uogólniony przepływ Poiseuille a płynu mikropolarnego drugiego rzędu w szczelinie między dwoma współosiowymi walcami
 Обобщенное течение Пуассейля второго ряда микрополярной жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами
 The generalized Poiseuille flow of a second order micropolar fluid in the clearence between two cylinders

Cena zł 120,—

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 240,—
półrocznie zł 120,—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

— do 25 listopada na I półrocze roku bieżącego i na cały rok następny,

— do 10 czerwca na II półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW — w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmują RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona — Ruch in Bank Handlowy S. A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17 pokój 1724)

Mech. Teor. T. 20, z. 1—2, s. 1—172, Warszawa 1982, Indeks 36523
