

74720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



PL ISSN 0079-3701

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 19 · ZESZYT 2

WARSZAWA 1981

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

531

SPIS TREŚCI

ST. ŁUKASIEWICZ, Równania liniowej, zgięciowej teorii powłok o wolno zmiennych krzywiznach. 167 Уравнения линейной теории изгиба оболочек с медленно изменяющимися кривизнами. Equations of the linear theory of shells with slowly varying curvatures.	167
J. ZIELNICA, M. KWIEK, Wyboczenie cienkiej powłoki przy obciążeniach obrotowo symetrycznych 181 poza granicą sprężystości. Выпучивание тонкой конической оболочки при осе-симметрических нагрузках за пределом упругости. Buckling of a thin walled conical shell for axially-symmetric loads beyond to elastic limit.	181
R. GRĄDZKI, Stateczność i stan zakrytyczny swobodnie podpartej tarczy trapezowej poddanej 203 jednokierunkowemu ściskaniu. Устойчивость и закритическое поведение трапецевидной пластинки при сжатии. Bucling and post-bucling behaviour of trapezoidal webplates under compression.	203
M. E. NIEZGODZIŃSKI, W. ZWOLIŃSKI, Analiza wytrzymałościowa pionowej przepływowej wytwor- 217 nicy pary elektrowni jądrowych. Расчет на прочность вертикальных парогенераторов атомных электростанций Strength analysis of the vertical flow steam generators of nuclear power plants.	217
J. OW CZARZY, J. KOSSOWSKI, Nielasyczne zachowanie się modelu hiperboloidalnej chłodni komi- 225 nowej pod obciążeniem osiowo symetrycznym. Неклассическое поведение модели гиперболической оболочки градирни при осесиметрической нагрузке. A nonclastic behaviour model of hyperbolic shell of cooling tower under axisymmetric loading	225
A. WŁOSNOWICZ, M. LINEK, Wpływ temperatury i szybkości rozciągania na wytrzymałość włókien 239 poliestrowych o niskim stopniu orientacji. Влияние температуры и скорости растяжения на прочность полиэфирных волокон с малой вытяжкой. Influence of temperature and stretching rate on the strenght of polyester fibres of small elongation.	239
E. RUSIŃSKI, Analiza konstrukcji prętowo-tarczowych metodą elementów skończonych. 253 Анализ стержене—складчатой конструкции с помощью метода конечных элементов. An analysis of the rod-shield constructions by the finite element method.	253
N. СУГАНОВА, О однозначности zasady наименьшего скрепования (наименьшего прzymusu) 261 Gaussa. Об однозначности принципа наименьшего принуждения Гаусса. On uniqueness of Gauss' least constraint principle.	261
K. DEMS, Zasady wariacyjne mechaniki dla zmiennych obszarów i ich wykorzystanie w optymalizacji 269 konstrukcji. Вариационные правила механики для переменных областей и их использование для оптимизаций конструкции. The variational principles of mechanics for variable domains and their utilization for structural optimization.	269
A. LIŁEWKA, E. ROGALSKA, Stan naprężenia przy niesymetrycznym rozciąganiu osiowym materiałów 285 perforowanych. Напряженное состояние для несимметричного одноосного растяжения перфорированных материалов. Stress state for off-axis tension of the perforated materials.	285
M. NOWAK, Oznaczenie granicy zmęczenia tworzyw sztucznych metodą schodkową. 301 Определение усталостной прогности пластмасс методом вверх-вниз. Determination of fatigue strenght of plastics according to up-and-down method.	301

75 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

TOM 19 • ZESZYT 2

WARSZAWA 1981

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

•

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

•

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,
JÓZEF WIĘCKOWSKI,
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR NACZELNY,
JACEK STUPNICKI — REDAKTOR,
ANDRZEJ SZANIAWSKI — REDAKTOR,
CZESŁAW WOŹNIAK — REDAKTOR,
MONIKA WĄGROWSKA — REDAKTOR,
ELŻBIETA OLSZEWSKA — SEKRETARZ

РЕДАКЦИЯ

00-901 Warszawa, PKiN. pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 640, Ark. wydawniczych 13,5, Ark. drukarskich 11,75, Papier druk. b. s. imp. III kl. 70 g. 70 × 100.
Oddano do składania 5.X.1981 r. Druk ukończono w grudniu 1982 r. Zam. 956/81 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

RÓWNANIA LINIOWEJ, ZGIĘCIOWEJ TEORII POWŁOK O WOLNO ZMIENNYCH KRZYWIZNACH

STANISŁAW ŁUKASIEWICZ (WARSZAWA)

Wstęp

Równania teorii powłok o wolno zmiennych krzywiznach były tematem wcześniejszych prac autora [1, 2, 3], w których wyprowadzono podstawowe równania dla tego typu powłok. Niniejsza praca przedstawia wyniki dalszych badań w tym zakresie. W stosunku do prac poprzednich zawiera pełne, formalnie ścisłe i bardziej konsekwentne wyprowadzenie równań podstawowych oraz ocenę ich dokładności. Zostały przeanalizowane dwa warianty równań teorii powłok, oparte na dwu różnych miarach tensora zmiany krzywizny [4], które są uznane obecnie za najlepsze. Wykazano, że w przypadku powłok o wolno zmiennych krzywiznach oba te warianty prowadzą do tej samej postaci równań podstawowych.

1. Założenia podstawowe

Zajmijmy się analizą powłok wyniosłych, których krzywizny są wolno zmiennymi funkcjami współrzędnych Θ^1 i Θ^2 . Przez określenie „funkcja wolno zmienna” rozumiemy funkcję, której stosunek jej pierwszej pochodnej do niej samej jest wielkością mniejszą od jedności w całym obszarze, za wyjątkiem otoczenia punktów, gdzie ta funkcja jest bliska zeru. Dla tego typu powłok można uzyskać uproszczone równania dobrze nadające się do obliczeń liczbowych. W omawianej klasie powłok znajdują się oczywiście powłoki kuliste i powłoki walcowe, których krzywizny są stałe. Można wykazać, że również powłoki odbiegające od walca i kuli, lecz o łagodnie zmiennych krzywiznach mogą być obliczone w ten sposób. Obecnie wykażemy, że podstawowy układ równań powłok cienkich można sprowadzić do układu dwu równań różniczkowych dla ugięcia normalnego w i funkcji naprężeń Φ . Funkcję tę definiujemy w podobny sposób jak w przypadku płaskiego zagadnienia teorii sprężystości. Staje się to możliwe dzięki dokonaniu pewnych uproszczeń w równaniach podstawowych. Uproszczenia te są dopuszczalne jeżeli przyjmiemy pewne dodatkowe warunki i dokonamy oceny błędów popełnionych przez przyjęcie zależności uproszczonych.

W dalszych rozważaniach będziemy opierać się na założeniach i równaniach teorii powłok cienkich podanych w pracach KOITERA i SIMONDSA [4, 6]. Ponadto przyjmiemy założenie dodatkowe dotyczące zmienności krzywizny powierzchni środkowej. A więc założymy, że powłoka jest na tyle cienka, że możemy pomijać wyrazy rzędu $(h/R)^2$ w porównaniu z jednością. Dalej przyjmiemy, że odkształcenia powierzchni środkowej powłoki

są na tyle małe, że możemy pomijać wyrazy rzędu odkształcenia powierzchni środkowej ε w porównaniu z jedności ($\varepsilon \ll 1$).

Powyżej: h — oznacza grubość powłoki, R — mniejszy z głównych promieni krzywizny powierzchni środkowej powłoki. $1/R \equiv \min(b_{\alpha\beta})$.

Na razie zajmiemy się tylko zagadnieniami liniowymi. Aby ocenić wielkość wyrazów zawierających różne pochodne składowych stanu odkształcenia i naprężenia, występujących w równaniach teorii powłok wprowadzimy parametr L charakteryzujący długość półfali przemieszczenia. Przyjmijmy, że stan przemieszczenia powłoki zmienia się zgodnie ze wzorem

$$w = w_0 \sin \frac{\pi \Theta_\alpha}{L}, \quad v_\alpha = v_{0\alpha} \sin \frac{\pi \Theta_\alpha}{L} \quad \alpha = 1, 2.$$

gdzie w — jest ugięciem normalnym do powierzchni środkowej,

Θ_α — współrzędną krzywoliniową na powierzchni powłoki,

v_α — składową styczną wektora przemieszczenia

wtedy rząd wielkości tych wyrazów wynosi

$$o(w) = w_0, \quad o(v_\alpha) = v_{\alpha 0},$$

Przyjmujemy, że zajmować się będziemy najczęściej spotykanymi przypadkami, dla których $o(w_0) > o(v_{\alpha 0})$.

Rząd wielkości pochodnej składowej wektora przemieszczenia można ocenić na podstawie zależności

$$\frac{\partial w}{\partial \Theta_\alpha} = w_0 \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi \Theta_\alpha}{L}, \quad \text{a więc} \quad o\left(\frac{\partial w}{\partial \Theta_\alpha}\right) = \frac{\pi}{L} o(w),$$

oraz
$$o(w|_\alpha) = \frac{\pi}{L} o(w).$$

Założymy dalej, że podobnie zmiana stanu naprężenia towarzysząca stanowi zgięciowemu może być scharakteryzowana przez tę samą odległość L . Przyjmijmy, że rozpatrywana w tej pracy klasa zagadnień zgięciowej teorii powłok cienkich dotyczy takich przypadków, dla których spełnione są następujące warunki

$$h^2/R^2 \ll 1, \quad h^2/L^2 \ll 1.$$

Ponadto przyjmijmy, że $L^2/R^2 \ll o(1)$ co oznacza, że wyrazy rzędu $(L/R)^2$ nie będą pomijane w porównaniu z jednością. Można się przekonać, że powyższe założenia są spełnione w najczęściej spotykanych przypadkach technicznych, w których występuje zginanie powłok. Dalsze założenie dotyczy zmienności promieni krzywizny powłoki. Aby ocenić wielkość wyrazów zawierających pochodne tensora krzywizny powierzchni środkowej $b_{\alpha\beta}$ przyjmujemy, że tensor ten może być np. przedstawiony w następujący sposób

$$b_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta 0} \left(1 + \bar{\varrho} \sin \frac{\pi \Theta_\alpha}{L_R} \right),$$

gdzie $b_{\alpha\beta 0}$ jest wielkością stałą i przedstawia średnie krzywizny powierzchni środkowej powłoki, $\bar{\varrho}$ — jest pewną liczbą bezwymiarową mniejszą od jedności oznaczającą stosunek

przyrostu krzywizny do jej wielkości średniej, L_R jest długością charakteryzującą szybkość zmiany składowych tensora krzywizny powierzchni środkowej.

Przyjmijmy, że będziemy rozpatrywali powłoki dla których stosunek $L/L_R < 1$.

Z powyższego wynika, że rząd wielkości pochodnej tensora krzywizny można ocenić jako

$$o(b_{\alpha\beta|\gamma}) = o(b_{\beta|\gamma}^\alpha) = \bar{\varrho} \frac{\pi}{L_R} o(b_{\alpha\beta}) \approx \bar{\varrho} \frac{\pi}{L_R R}.$$

Opierając się na powyższej ocenie możemy stwierdzić również, że

$$o(K|_\alpha) = \bar{\varrho} \frac{\pi}{L_R} o(K) \simeq \bar{\varrho} \frac{\pi}{L_R R^2},$$

gdzie K jest krzywizną Gaussa.

Przyjmijmy dalej, że zmiany krzywizny rozpatrywanych powłok są na tyle niewielkie i odbywają się na tyle powoli, że możemy pomijać wyrazy rzędu

$$\varrho_1 = \frac{\bar{\varrho} h L}{R L_R} \ll 1, \quad \varrho_2 = \frac{\bar{\varrho} L^3}{\pi^2 R^2 L_R} \ll 1, \quad \varrho_3 = \frac{\bar{\varrho} L^2}{\pi L_R R} \ll 1.$$

w porównaniu z jednością. Jeżeli $\varrho = \max(\varrho_i)$, niech $\varrho \ll 1$. Powyższe warunki są najczęściej spełnione w tych problemach technicznych, dla których są słuszne założenia zgięciowej teorii powłok cienkich. Ponieważ $\bar{\varrho} < 1$, $h/R \simeq 0,05 - 0,001 < 1$, a długość fali ugięcia L jest rzędu \sqrt{hR} , a więc gdy $L/R \sim L/L_R \sim \sqrt{h/R} < 1$, pomijane wyrazy wynoszą kolejno (przy np. $\bar{\varrho} = 0,3$, $h/R = 0,01$), $0,3 \cdot 10^{-3}$, $0,3 \cdot 10^{-4}$, $1 \cdot 10^{-3}$.

Podstawowy układ równań liniowej teorii powłok, po wyeliminowaniu sił poprzecznych, przyjmuje następującą postać [4, 6, 7] (przy zmienionych znakach tensora momentów i zmiany krzywizny).

— równania równowagi

$$(1) \quad \begin{aligned} (S^{\alpha\beta} - b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta})_{|\beta} - b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta}|_\beta + P^\alpha &= 0, \\ M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} + (S^{\alpha\beta} - b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta}) b_{\alpha\beta} + P^3 &= 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \end{aligned}$$

— równania zgodności odkształceń

$$(2) \quad \begin{aligned} K \varepsilon_\lambda^\lambda + d^{\alpha\beta} d^{\lambda\mu} (\varepsilon_{\alpha\mu|\beta\lambda} - b_{\alpha\mu} \varkappa_{\beta\lambda}) &= 0, \\ d^{\alpha\beta} d^{\lambda\mu} [\varkappa_{\beta\lambda|\mu} + b_\lambda^\alpha (\varepsilon_{\alpha\beta|\mu} + \varepsilon_{\alpha\mu|\beta} - \varepsilon_{\beta\mu|\alpha})] &= 0. \end{aligned}$$

gdzie $d^{\alpha\beta}$ jest tensorem permutacyjnym,

— równania konstytutywne

$$(3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{Eh} [(1+\nu) S_{\alpha\beta} - \nu a_{\alpha\beta} S_\lambda^\lambda] + o(\varepsilon\Theta^2), \\ M^{\alpha\beta} &= D[(1-\nu) \varkappa^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta} \varkappa_\lambda^\lambda] + o(Eh^2 \varepsilon\Theta^2), \end{aligned}$$

gdzie $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ jest zgięciową sztywnością powłoki, h — grubością powłoki. $\Theta^2 = \max(h/L, \sqrt{h/R}, \sqrt{\varepsilon})$. W powyższych równaniach $S^{\alpha\beta}$ oznacza składowe tensora sił błonowych, a $M^{\alpha\beta}$ są składowymi tensora momentów gnących, $\varkappa_{\alpha\beta}$ i $\varepsilon_{\alpha\beta}$ przedstawiają tensory zmiany krzywizny oraz tensor odkształcenia powierzchni środkowej. Wszystkie wyżej wymienione wielkości są tensorami symetrycznymi, spełniającymi zasadę prac przygotowanych. Pomiędzy rzeczywistymi, niesymetrycznymi siłami i momentami we-

wnętrznymi działającymi w przekroju powłoki a ich symetrycznymi reprezentacjami istnieją następujące zależności

$$(4) \quad N^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} - b_{\gamma}^{\alpha} M^{\gamma\beta}, \quad M^{\alpha\beta} = M^{\beta\alpha}.$$

Tensor zmiany krzywizny $\kappa_{\alpha\beta}$ dany jest wzorem

$$(5) \quad \begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} &= -w|_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta} w - b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda|\beta} - b_{\beta}^{\lambda} u_{\alpha|\lambda} - b_{\alpha|\beta}^{\lambda} u_{\lambda}, \\ c_{\alpha\beta} &= b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} = 2Hb_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} K, \end{aligned}$$

gdzie $2H = b_{\alpha}^{\alpha}$ jest średnią krzywizną, a K krzywizną Gaussa. Tensor odkształcenia powierzchni środkowej $\varepsilon_{\alpha\beta}$ wynosi

$$(6) \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} w,$$

gdzie u_{α} — jest składową wektora przemieszczenia na powierzchni środkowej, w — przemieszczeniem normalnym do powierzchni środkowej.

2. Przekształcenia równań podstawowych

Powyższy układ równań różniczkowych, razem z warunkami brzegowymi określa stan naprężenia i odkształcenia powłoki o umiarkowanie dużych ugięciach. Aby sprowadzić powyższy układ do postaci bardziej dogodnej do obliczeń liczbowych dokonujemy następujących przekształceń. Opierając się na założeniu o wolnej zmianie krzywizny, pierwsze z równań równowagi można przedstawić w postaci

$$(7) \quad (S^{\alpha\beta} - 2b_{\gamma}^{\alpha} M^{\gamma\beta})_{|\beta} + p^{\alpha} = 0.$$

Zostaje tu pominięty wyraz $b_{\gamma|\beta}^{\alpha} M^{\gamma\beta}$ zawierający pochodną tensora krzywizny. Dopuszczalność takiego uproszczenia jest wykazana w dalej przytoczonych rozważaniach. Mianowicie, przyjmujemy zgodnie z założeniami zgięciowej teorii powłok, że odkształcenia spowodowane zginaniem są tego samego rzędu co odkształcenia stanu błonowego, wtedy rząd wielkości składowych tensora odkształcenia $\varepsilon_{\alpha\beta}$ można ocenić jako

$$o(\varepsilon_{\alpha\beta}) \simeq o(\kappa_{\alpha\beta} h).$$

Rząd wielkości pomijanego wyrazu wynosi więc

$$b_{\gamma|\beta}^{\alpha} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} o(\kappa_{\alpha\beta}) = \bar{q} \frac{\pi Eh^3}{12(1-\nu^2)RL_R} o(\kappa_{\alpha\beta}),$$

podczas gdy rząd wielkości wyrazu $S^{\alpha\beta}|_{\beta}$ wynosi

$$o(S^{\alpha\beta}|_{\beta}) = \frac{Eh}{1-\nu^2} o(\varepsilon^{\alpha\beta}|_{\beta}) = \frac{Eh^2}{1-\nu^2} \frac{\pi}{L} o(\kappa_{\alpha\beta}).$$

Porównując oba te wyrazy ze sobą widzimy, że pominięcie wyrazu $b_{\gamma|\beta}^{\alpha} M^{\gamma\beta}$ daje błąd w równaniu (7) rzędu $\bar{q} \frac{Lh}{L_R R} = \varrho_1$ w porównaniu z jednością. Zgodnie z założeniami początkowymi uproszczenie to jest dopuszczalne.

Równanie (7) można spełniać tożsamościowo przy $p = 0$, jeżeli wprowadzimy funkcję naprężeń Φ zdefiniowaną w następujący sposób

$$(8) \quad S^{\alpha\beta} - 2b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta} = R^{\alpha\beta} = -d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} \Phi|_{\lambda\mu} - K a^{\alpha\beta} \Phi.$$

Po podstawieniu powyższego wyrażenia do równania (7) otrzymujemy

$$(9) \quad R^{\alpha\beta}|_\beta = -d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} \Phi|_{\lambda\mu\beta} - (K a^{\alpha\beta} \Phi)|_\beta.$$

W pierwszym wyrazie po prawej stronie równania (9) występuje antysymetryczny tensor permutacyjny $d^{\beta\mu}$ mnożony przez trzecią pochodną funkcji Φ . Ponieważ różniczkowanie kowariantne w dwuwymiarowej przestrzeni powierzchni środkowej nie jest przemienne, wyrażenie to nie jest równe zeru. Mamy bowiem

$$(10) \quad \Phi|_{\lambda\mu\beta} - \Phi|_{\lambda\beta\mu} = \Phi|_\gamma R_{\lambda\mu\beta}^\gamma,$$

gdzie $R_{\lambda\mu\beta}^\gamma$ jest tensorem Riemanna-Christoffela.

Przedstawimy $\Phi|_{\lambda\mu\beta}$ jako kombinację wielkości symetrycznej i antysymetrycznej ze względu na wskaźniki β i μ .

$$\Phi|_{\lambda\mu\beta} = \frac{1}{2} (\Phi|_{\lambda\mu\beta} + \Phi|_{\lambda\beta\mu}) + \frac{1}{2} (\Phi|_{\lambda\mu\beta} - \Phi|_{\lambda\beta\mu}).$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (9) otrzymamy

$$R^{\alpha\beta}|_\beta = -\frac{1}{2} d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} \Phi|_\gamma R_{\lambda\mu\beta}^\gamma - (K a^{\alpha\beta} \Phi)|_\beta = -\frac{1}{2} d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} R_{\gamma\lambda\mu\beta} \Phi|^\gamma - (K\Phi)|^\alpha,$$

gdzie oznaczyliśmy $a^{\gamma\delta} \Phi|_\delta = \Phi|^\gamma$.

Wykorzystując definicję $R_{\lambda\mu\beta}^\gamma$ otrzymujemy

$$(11) \quad R^{\alpha\beta}|_\beta = K\Phi|^\alpha - (K\Phi)|^\alpha = -K|^\alpha \Phi.$$

Widzimy, że po wprowadzeniu funkcji naprężeń wg wzoru (8) do równania (7), równanie to jest spełnione tożsamościowo pod warunkiem, że możemy pominąć wyraz $K|^\alpha \Phi$.

Wyraz ten jest rzędu $o(\Phi) \frac{\pi\varrho}{L_R R^2}$. Rząd wielkości największego wyrazu w równaniu (7) wynosi

$$o(S^{\alpha\beta}|_\beta) = \frac{\pi^3}{L^3} o(\Phi).$$

Porównując te wyrazy widzimy, że pominięcie wyrazu $K|^\alpha \Phi$ jest uzasadnione jeżeli możemy pominąć $\varrho_2 = \bar{\varrho} L^3 / \pi^2 R^2 L_R$ w porównaniu z jednością. Ponieważ $\bar{\varrho} < 1$, $L/L_R < 1$, $\pi^2 \simeq 10$ a więc można uznać, że jest to uzasadnione.

Zajmijmy się obecnie drugim równaniem równowagi (1). Równanie to może być przekształcone i uproszczone jeżeli wykorzystując równania konstytutywne, wyrazimy momenty gnące $M^{\alpha\beta}$ przez ugięcie normalne w , a siły błonowe $N^{\alpha\beta}$ przez funkcję naprężeń ϕ . Zależność (3)₁ może być przedstawiona w innej postaci za pomocą następującej tożsamości słusznej dla dowolnego symetrycznego tensora powierzchniowego

$$(12) \quad \varkappa^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} \varkappa_\lambda^\lambda - d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} \varkappa_{\lambda\mu}.$$

Po podstawieniu (12) do (3)₂ otrzymujemy

$$(13) \quad M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} = D[a^{\alpha\beta} \varkappa_\lambda^\lambda - (1-\nu) d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} \varkappa_{\lambda\mu}]|_{\alpha\beta}.$$

Aby obliczyć wielkość \varkappa_λ^1 wykorzystajmy wyrażenie (5) dla tensora zmiany krzywizny $\varkappa_{\alpha\beta}$. Wyrażenie to może być przekształcone jeżeli wykorzystamy zależność (6).

Mnożąc obie strony równania (6) przez b_α^δ i b_β^δ otrzymamy po dodaniu

$$(14) \quad b_\alpha^\delta \varepsilon_{\delta\beta} + b_\beta^\delta \varepsilon_{\delta\alpha} = \frac{1}{2} b_\alpha^\delta (u_{\delta|\beta} + u_{\beta|\delta}) + \frac{1}{2} b_\beta^\delta (u_{\delta|\alpha} + u_{\alpha|\delta}) - 2C_{\alpha\beta} w.$$

Dodając stronami równania (5) i (14) otrzymamy następujące wyrażenie dla tensora zmiany krzywizny

$$(15) \quad \varkappa_{\alpha\beta} + b_\alpha^\delta \varepsilon_{\delta\beta} + b_\beta^\delta \varepsilon_{\delta\alpha} = -w|_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta} + (b_\alpha^\lambda \omega_{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda \omega_{\lambda\alpha}) - \underline{b_{\alpha|\beta} u_\lambda},$$

gdzie $\omega_{\lambda\alpha} = \frac{1}{2} (u_{\lambda|\alpha} - u_{\alpha|\lambda})$ jest tensorem obrotu dookoła normalnej do powierzchni środkowej.

Ostatni, podkreślony wyraz jest rzędu $\bar{\rho}L/L_R$ w porównaniu z pozostałymi wyrazami zawierającymi funkcje przemieszczenia u_α . Jeżeli $o(u_\alpha) \sim o(w)$ wtedy w porównaniu z pierwszym, największym wyrazem $w|_{\alpha\beta}$ jest on rzędu $\rho_3 = \bar{\rho}L^2/\pi L_R R$. Ponieważ przyjęliśmy, że $o(u_\alpha) < o(w)$, (odpowiada to przypadkom najczęściej spotykanym w technice), oraz $\bar{\rho} < 1$, $L/L_R < 1$, $L/R < 1$ a więc dla rozpatrywanej klasy powłok o wolno zmieniających krzywiznach podkreślony wyraz jest mały i może być pominięty. Wtedy otrzymamy

$$(16) \quad \varkappa_\lambda^1 = -w|_\lambda^1 - b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} w - 2b^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta},$$

gdyż wyraz $(b_\alpha^\lambda \omega_{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda \omega_{\lambda\alpha}) a^{\alpha\beta} = 0$.

Zajmijmy się teraz drugim wyrazem równania (1)₂

$$(17) \quad (S^{\alpha\beta} - b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta}) b_{\alpha\beta} = (R^{\alpha\beta} + b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta}) b_{\alpha\beta}.$$

Wykorzystując wyrażenie (9) otrzymamy

$$(18) \quad (R^{\alpha\beta} + b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta}) b_{\alpha\beta} = -(d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} \Phi|_{\lambda\mu} + K a^{\alpha\beta} \Phi) b_{\alpha\beta} + b_\gamma^\alpha b_{\alpha\beta} M^{\gamma\beta} = \Delta_k \Phi + c_{\gamma\beta} M^{\gamma\beta},$$

gdzie operator $\Delta_k \Phi$ oznacza następujące wyrażenie

$$(19) \quad \Delta_k \Phi = -d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} b_{\alpha\beta} \Phi|_{\lambda\mu} - 2HK\Phi,$$

Przekształćmy teraz wyrażenie (18) wykorzystując tożsamość (13). Mamy

$$(20) \quad C_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} = DC_{\alpha\beta} [a^{\alpha\beta} \varkappa_\lambda^1 - (1-\nu) d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} \varkappa^{\lambda\mu}] = \\ = (4H^2 - 2K) D\varkappa_\lambda^1 + (1-\nu) DK\varkappa_\lambda^1 - (1-\nu) 2Hd^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} b_{\alpha\beta} \varkappa_{\lambda\mu}.$$

Wykorzystajmy w powyższym równaniu wyrażenie (16) dla tensora zmiany krzywizny \varkappa_λ^1 . Wyrażenie to zawiera człon $2b^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}$ który jak się można przekonać po podstawieniu do równania równowagi (18) daje wyraz rzędu h^2/R^2 w porównaniu z pozostałymi wyrazami tego równania. Aby to udowodnić zauważmy, że wyrażenie to można wyrazić przez funkcję naprężeń Φ korzystając z równań konstytutywnych (3)₁

$$(21) \quad 2b^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{2}{Eh} [b^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} S_\lambda^1 - (1+\nu) b^{\alpha\beta} d_{\alpha\lambda} d_{\beta\mu} S_{\lambda\mu}].$$

Ponieważ

$$(22) \quad S_\lambda^1 = R_\lambda^1 + 2b_{\lambda\mu} M^{\lambda\mu} = -(\Delta\Phi + 2K\Phi) + 4HD\varkappa_\lambda^1 - 2(1-\nu) Db_{\alpha\beta} d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} \varkappa_{\lambda\mu}$$

Przekształcając podobnie drugi wyraz w wyrażeniu (21) otrzymamy

$$(23) \quad b^{\alpha\beta} d_{\alpha\lambda} d_{\beta\mu} S^{\lambda\mu} = -b^{\alpha\beta} \Phi|_{\alpha\beta} - 2HK\Phi + 2(1+\nu)DK\kappa_{\lambda}^{\lambda}.$$

Po podstawieniu do równania (21) mamy

$$(24) \quad 2b^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{2}{Eh} \{ -2H(\Delta\Phi + 2K\Phi) + 8H^2 D\kappa_{\lambda}^{\lambda} - 4(1-\nu)DHb_{\alpha\beta} d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} \kappa_{\lambda\mu} + \\ + (1+\nu)[b^{\alpha\beta} \Phi|_{\alpha\beta} + 2HK\Phi - 2(1+\nu)DK\kappa_{\lambda}^{\lambda}] \}.$$

Powyższą zależność można wykorzystać do obliczenia $\kappa_{\lambda}^{\lambda}$.

Zauważmy, że gdy podstawimy (24) do równania (16), otrzymamy po prawej stronie tego równania wyrazy rzędu $(D/EhR^2)\kappa_{\lambda}^{\lambda}$. Współczynnik D/EhR^2 stojący przed tymi wyrażeniami jest rzędu

$$h^2/R^2 \ll 1; \quad (D/EhR^2 = Eh^2/12(1-\nu^2)ER^2).$$

A więc wyrazy mnożone przez ten współczynnik można pominąć w porównaniu z wyrazem $\kappa_{\lambda}^{\lambda}$ występującym po lewej stronie równania (16). Wtedy otrzymamy następujące wyrażenie dla drugiego wyrazu równania równowagi (18)

$$(25) \quad (R^{\alpha\beta} + b_{\gamma}^{\alpha} M^{\gamma\beta}) b_{\alpha\beta} = \Delta_k \Phi + D(4H^2 - (1+\nu)K) \left\{ -w|_{\lambda}^{\lambda} + b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} w - \right. \\ \left. - \frac{2}{Eh} [-2H(\Delta\Phi + 2K\Phi) + (1+\nu)(b^{\alpha\beta} \Phi|_{\alpha\beta} + 2HK\Phi)] \right\} + 2(1-\nu)HDd^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} a_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu}.$$

Porównajmy teraz wyrazy zawierające drugie pochodne funkcji stojące w nawiasie kwadratowym w (25) z wyrazem $\Delta_k \Phi$ znajdującym się po prawej stronie powyższego równania (25). Widzimy, że wyrazy te, zawierające tego samego rzędu pochodne funkcji Φ są mnożone przez współczynnik D/EhR^2 rzędu h^2/R^2 , a więc mogą być w tym równaniu pominięte. Otrzymujemy więc

$$(26) \quad (S^{\alpha\beta} - b_{\gamma}^{\alpha} M^{\gamma\beta}) b_{\alpha\beta} = \Delta_k \Phi - (4H^2 - (1+\nu)K) D [w|_{\lambda}^{\lambda} + \\ (4H^2 - 2K)w] - 2(1-\nu)HDd^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} b_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu}$$

Jest to wynik jaki otrzymalibyśmy pomijając wyraz $2b^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}$ w wyrażeniu (16). Wynik ten jest interesujący gdyż oznacza, że w równaniu równowagi rzutów sił na kierunek normalny efekty zmiany krzywizny przy małych odkształceniach powierzchni środkowej $\varepsilon_{\alpha\beta} \ll 1$ możemy obliczyć tak jak dla powierzchni odkształcającej się izometrycznie, to znaczy przy $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$. Wpływ tych odkształceń jest jak się okazuje rzędu h^2/R^2 . Jeżeli wykorzystamy ten wniosek otrzymamy, że przekształcając równanie równowagi (26) możemy przyjąć dla tensora zmiany krzywizny

$$(27) \quad \kappa_{\alpha\beta} = -w|_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} w.$$

Przekształćmy obecnie ostatni wyraz występujący w równaniu (26), po wykorzystaniu (15) otrzymamy

$$(28) \quad d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} b_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu} = \Delta_k w + \underline{d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} b_{\alpha\beta} [b_{\lambda}^{\rho} (\varepsilon_{\rho\mu} + \omega_{\rho\mu}) + b_{\mu}^{\rho} (\varepsilon_{\rho\lambda} + \omega_{\rho\lambda})]}.$$

Podkreślony wyraz daje w równaniu (26) wyrażenie rzędu

$$HD \frac{1}{R^2} o(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R^3 Eh} o(S_{\alpha\beta}) = \frac{h^2 \pi^2}{12R^3 L^2} o(\Phi). \quad \text{przy} \quad o(\varepsilon_{\alpha\beta}) \simeq o(\omega_{\alpha\beta}).$$

Porównajmy teraz ten wyraz z największym wyrazem w równaniu (26) zawierającym funkcję naprężeń, to znaczy z wyrazem $\Delta_k \phi$ rzędu $\frac{1}{R} \frac{\pi^2}{L^2} o(\phi)$. Widzimy, że podkreślony wyraz daje błąd rzędu $(h/R)^2$ i może być pominięty. Ostatecznie otrzymujemy równanie (28) w postaci

$$(S^{\alpha\beta} - b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta}) b_{\alpha\beta} = \Delta_k \phi - (4H^2 - (1+\nu)K) D[\Delta w + (4H^2 - 2K)w] + 2(1-\nu)HD\Delta_k w.$$

Zajmijmy się obecnie pierwszym wyrazem równania (1)₂.

$$(29) \quad M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} = D[\varkappa_\alpha^\alpha|_\beta^\beta - (1-\nu)d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}\varkappa_{\lambda\mu|\alpha\beta}].$$

Pierwsza część tego wyrażenia przedstawia $\Delta \varkappa_\beta^\beta$. Chcąc przekształcić drugi wyraz (29), który jak się można przekonać ma małą wielkość w porównaniu z pierwszym wyrazem w nawiasie, wykorzystajmy zależność (15) omówioną powyżej. Wtedy po podstawieniu i przekształceniach otrzymujemy

$$(30) \quad d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}\varkappa_{\lambda\mu|\alpha\beta} = 2K\Delta w + 2H(\Delta_k w + 2HKw) - d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}[b_\lambda^\rho(\varepsilon_{\rho\mu} + \omega_{\rho\mu}) + b_\mu^\rho(\varepsilon_{\rho\lambda} + \omega_{\rho\lambda})]_{|\alpha\beta}.$$

Pełne równanie równowagi (1)₂ ma wtedy postać

$$(31) \quad -M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} - (S^{\alpha\beta} - b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta}) b_{\alpha\beta} = D\Delta[\Delta + (4H^2 - 2K)]w + \\ + 2(1-\nu)D[K\Delta w + H(\Delta_k w + HKw)] + D(4H^2 - (1+\nu)K)[\Delta w + (4H^2 - 2K)w] + \\ + 2(1-\nu)HD\Delta_k w - \Delta_k \Phi + \underline{(1-\nu)Dd^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}[b_\lambda^\rho(\varepsilon_{\rho\mu} + \omega_{\rho\mu}) + b_\mu^\rho(\varepsilon_{\rho\lambda} + \omega_{\rho\lambda})]_{|\alpha\beta}} = P^3$$

Łatwo wykazać, że podkreślony wyraz jest rzędu

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{R} \frac{1}{Eh} \frac{\pi^4}{L^4} o(\Phi) \quad (\text{przy } o(\varepsilon_{\alpha\beta}) \simeq o(\omega_{\alpha\beta}),$$

Porównując go z wyrazem $\Delta_k \phi$ widzimy, że jest on rzędu $h^2/L^2 \ll 1$ i może być pominięty.

Powyższe równanie zawiera jedynie dwie nieznanne funkcje ω i ϕ i może być uznane za pierwsze z dwu podstawowych równań powłoki o wolno zmiennych krzywiznach. Równanie to można nieco uprościć jeżeli do przekształcenia pewnych małych wyrazów wykorzystamy równanie zgodności odkształceń (2)₁

$$(32) \quad d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}\varkappa_{\beta\lambda|\mu\alpha} = -d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}b_\lambda^\rho(\varepsilon_{\rho\beta|\mu} + \varepsilon_{\rho\mu|\beta} - \varepsilon_{\beta\mu|\rho})_{|\alpha}.$$

Porównując zależności (30) i (32) widzimy, że

$$2H\Delta_k w = -2K\Delta w - 4H^2Kw + \frac{1}{EhR} \frac{\pi^4}{L^4} o(\Phi).$$

Jeżeli wykorzystamy tę zależność do przekształcenia pewnych małych wyrazów w równaniu (31) otrzymamy równanie w którym wyrazy wynikające z udziału odkształceń błonowych i obrotów ($\varepsilon_{\alpha\beta}$ i $\omega_{\alpha\beta}$) są rzędu $\frac{\pi^4 h^2}{12(1+\nu)L^4 R} o(\phi)$. W porównaniu z wyrazem $\Delta_k \phi$, którego rząd wielkości wynosi $(\pi^2/RL^2)o(\Phi)$, są one rzędu h^2/L^2 a więc mogą być pominięte. Ostatecznie otrzymujemy pierwsze podstawowe równanie w postaci

$$(33) \quad D[\Delta + 4H^2 - (3-\nu)K][\Delta + 4H^2 - 2K]w + 4(1-\nu)DK(H^2 - k)w + \Delta_k \Phi = P^3.$$

Powyższe równanie różni się od równania poprzednio wyprowadzonego w pracy [3] jedynie małym wyrazem $4(1-\nu)DK(H^2-K)$ w rzędu L^4/R^4 , który może być najczęściej pominięty. Dla powłoki kulistej i walcowej wyraz ten równy jest zeru.

Aby otrzymać drugie równanie zawierające te same dwie nieznanne funkcje, to jest ugięcie normalne w i funkcję naprężeń ϕ wykorzystajmy równanie zgodności odkształceń (2)₁

$$d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}[\varepsilon_{\alpha\mu|\beta\lambda} - b_{\alpha\mu}\varkappa_{\beta\lambda}] + K\varepsilon_{\lambda}^{\lambda} = 0.$$

W równaniu tym możemy odkształcenia wyrazić przez siły błonowe, a te z kolei przez funkcje naprężeń Φ korzystając z wzorów (3). Mamy więc

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{Eh} [a_{\alpha\beta}\delta_{\lambda}^{\lambda} - (1+\nu)d_{\alpha\lambda}d_{\beta\mu}S^{\lambda\mu}],$$

gdzie $S^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} + 2b_{\gamma}^{\alpha}M^{\gamma\beta}$.

Po podstawieniu $S^{\lambda\mu}$ z (8) otrzymujemy

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -\frac{1}{Eh} [a_{\alpha\beta}\Delta\Phi - (1+\nu)\Phi_{|\alpha\beta} + (1-\nu)a_{\alpha\beta}K\Phi] + \frac{2D}{Eh} [(-a_{\alpha\beta}2H + (1+\nu)b_{\alpha\beta})\varkappa_{\lambda}^{\lambda} + (1-\nu)a_{\alpha\beta}b^{\rho\lambda}\varkappa_{\rho\lambda} + (1-\nu^2)(b_{\alpha}^{\lambda}\varkappa_{\rho\beta} - 2H\varkappa_{\alpha\beta})].$$

Po podstawieniu do równania (2)₁ i wykonaniu różniczkowania otrzymujemy

$$(34) \quad d^{\alpha\beta}d_{\lambda\mu}\varepsilon_{\alpha\mu|\beta\lambda} = \frac{1}{Eh} \{ \Delta(\Delta\phi + (1-\nu)K\Phi) + (1+\nu)d^{\alpha\beta}d_{\lambda\mu}\Phi_{|\alpha\mu\beta\lambda} \} + \frac{2D}{EhR} o(\varkappa_{\lambda}^{\lambda}|\beta).$$

Można się przekonać, po wykonaniu dość pracochłonnych przekształceń, że ostatni wyraz równania (34) zawiera jedynie wyrazy rzędu drugich pochodnych funkcji w mnożone przez współczynnik $2D/EhR^3$. Przekształćmy jeszcze powyższą zależność, mamy

$$d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}\Phi_{|\alpha\mu\beta\lambda} = Ka^{\gamma\lambda}\Phi_{|\gamma\lambda} + K|_{\lambda}\Phi|^{\lambda}.$$

Ostatni wyraz $K|_{\lambda}\Phi|^{\lambda}$ w porównaniu z wyrazem poprzedzającym jest rzędu $\bar{\rho}L/L_R$. Jednakże gdy porównamy go z największym wyrazem $\Delta\Delta\Phi$ w równaniu (34) otrzymujemy, że pominięcie go daje błąd rzędu $\rho_2 = \bar{\rho}L^3/\pi^2R^2L_R$.

Ponieważ $\bar{\rho} < 1$; $(L/R)^2 < 1$; $L/L_R < 1$; $\pi^2 \simeq 10$, widzimy, że pominięcie to jest dopuszczalne w ramach rozpatrywanego wariantu zgięciowej teorii powłok cienkich, ($\rho_2 \ll 1$).

Pomijając wyraz zawierający pochodną krzywizny Gaussa K otrzymamy

$$(35) \quad d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}\varepsilon_{\alpha\mu|\beta\lambda} = \frac{1}{Eh} \{ \Delta(\Delta\phi + (1-\nu)K\Phi) + (1+\nu)K\Delta\Phi \} + \frac{2D}{EhR^3} o(\Delta w) = \frac{1}{Eh} \{ \Delta(\Delta\phi + 2K\Phi) \} + \frac{2D}{EhR^3} o(\Delta w).$$

Drugi wyraz równania (2)₁ można przekształcić, wykorzystując zależność (16). Otrzymamy wtedy

$$(36) \quad -d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}b_{\alpha\mu}\varkappa_{\beta\lambda} = -\Delta_k w + d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}b_{\alpha\mu}2b_{\beta}^{\delta}\varepsilon_{\delta\lambda} = -\Delta_k w + \frac{2}{Eh} (1-\nu)K[\Delta\Phi + 2K\Phi].$$

Trzeci wyraz $K\varepsilon_{\lambda}^{\lambda}$ po wyrażeniu $\varepsilon_{\alpha\beta}$ przez funkcję naprężeń otrzymuje postać

$$(37) \quad K\varepsilon_{\lambda}^{\lambda} = -\frac{1-\nu}{Eh} K[\Delta\phi + 2K\Phi].$$

Dodając wyrazy (35), (36) i (37) otrzymamy równanie zgodności odkształceń w postaci

$$(38) \quad \frac{1}{Eh} \{ \Delta(\Delta\Phi + 2K\Phi) + (1-\nu)K(\Delta + 2K)\Phi \} - \Delta_k w + \frac{2D}{EhR^3} o(\Delta w) = 0.$$

Porównajmy ostatni wyraz powyższego równania, mnożony przez współczynnik D/EhR^3 z wyrazem $\Delta_k w$. Ponieważ współczynnik ten jest rzędu h^2/R^2 wyrażenie to może być pominięte. Jeżeli nie skorzystamy ze wspomnianych przedtem przekształceń i porównamy ostatni wyraz równania (34) z $\Delta_k w$ otrzymamy, że jest on rzędu h/L^2 co również dowodzi, że może być pominięte. Ostatecznie możemy zapisać równanie (38) w prostej postaci

$$(39) \quad \frac{1}{Eh} [\Delta + (1-\nu)K][\Delta + 2K]\Phi - \Delta_k w = 0.$$

W wyniku przekształceń otrzymaliśmy układ dwu równań różniczkowych (38) i (39) zawierających dwie nieznanne funkcje w i ϕ , które mogą być uznane za podstawowe równania powłoki o wolno zmiennych krzywiznach. Rozwiązanie tych równań określa w i ϕ , a następnie wszystkie poszukiwane wielkości. Siły przekrojowe $N^{\alpha\beta}$ otrzymujemy z wzorów $N^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} + b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta}$.

3. Wariant drugi, tak zwany „najlepszy wariant równań teorii cienkich powłok”

Rozważmy jeszcze drugi wariant równań podstawowych zwany „najlepszym” wariantem równań teorii powłok cienkich. Wtedy podstawowe równania przyjmują postać [4] Równania równowagi

$$(40) \quad \left[S^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (b_\lambda^\beta M^{\alpha\lambda} - b_\lambda^\alpha M^{\lambda\beta}) \right]_{|\beta} - b_\lambda^\alpha M^{\lambda\beta}_{|\beta} + P^\alpha = 0, \\ M^{\alpha\beta}_{|\alpha\beta} + S^{\mu\beta} b_{\alpha\beta} + P^3 = 0.$$

Równania zgodności odkształceń

$$(41) \quad d^{\alpha\beta} d^{\lambda\mu} [\varepsilon_{\alpha\mu;\beta\lambda} - b_{\alpha\mu} \varrho_{\lambda\beta}] = 0, \\ d^{\alpha\beta} d^{\lambda\mu} \left[\varrho_{\beta\lambda} - \frac{1}{2} (b_\beta^\gamma \varepsilon_{\gamma\lambda} + b_\lambda^\gamma \varepsilon_{\gamma\beta}) \right]_{|\mu} + b_\lambda^\alpha (\varepsilon_{\gamma\beta|\mu} + \varepsilon_{\gamma\mu|\beta} - \varepsilon_{\beta\mu;\gamma}) = 0.$$

Równania konstytutywne

$$(42) \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{Eh} [(1+\nu)S_{\alpha\beta} - \nu S_\lambda^\lambda a_{\alpha\beta}], \quad M^{\alpha\beta} = D[(1-\nu)\varrho^{\alpha\beta} + \nu \varrho_\lambda^\lambda a^{\alpha\beta}].$$

gdzie $\varrho_{\alpha\beta}$ jest tzw. modyfikowanym tensorem zmiany krzywizny danym przez

$$(43) \quad \varrho_{\alpha\beta} = \varkappa_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (b_\alpha^\gamma \varepsilon_{\gamma\beta} + b_\beta^\gamma \varepsilon_{\gamma\alpha}),$$

Pomiędzy rzeczywistymi, niesymetrycznymi tensorami sił i momentów wewnętrznych a ich symetrycznymi reprezentacjami istnieją następujące zależności

$$(44) \quad N^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} - b_\lambda^\alpha M^{\lambda\beta}.$$

Równanie równowagi (40)₁ dla powłok o wolno zmiennych krzywiznach można przedstawić w postaci

$$(45) \quad \left[S^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (b_{\lambda}^{\beta} M_{\alpha\lambda} - 3b_{\lambda}^{\alpha} M^{\lambda\beta}) \right]_{|\beta} + P^{\alpha} = 0.$$

Równanie to może być spełnione tożsamościowo. Jeżeli wprowadzimy funkcję Φ określoną jako

$$(46) \quad S^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (b_{\lambda}^{\beta} M^{\alpha\lambda} - 3b_{\lambda}^{\alpha} M^{\lambda\beta}) = R^{\alpha\beta} = -d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} \Phi_{|\lambda\mu} - K a^{\alpha\beta} \phi.$$

Wyrazy drugiego z równań równowagi (40)₂ przyjmują po przekształceniach następującą postać

$$(47) \quad \begin{aligned} S^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} &= \Delta_k \Phi + D \{ [4H^2 - (1+\nu)K] \chi_k^{\lambda} - 2H(1-\nu) \Delta_k w \}, \\ M^{\alpha\beta} |_{\alpha\beta} &= -D \{ \Delta [\Delta + (4H^2 - 2K)] w + 2(1-\nu)K(\Delta + 2H^2) w + 2(1-\nu)H \Delta_k w \}, \end{aligned}$$

gdzie $\Delta_k \phi = b_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}$.

Po dodaniu otrzymujemy równanie identyczne z równaniem (30) otrzymanym poprzednio. Drugie równanie podstawowe wyprowadzone na podstawie równania zgodności odkształceń (41)₁ przyjmuje również tę samą postać co poprzednio, gdyż nie występujący w tym równaniu wyraz $K e_{\lambda}^{\lambda}$ jest skompensowany wyrazem $\frac{1}{2} (b_{\alpha}^{\gamma} \varepsilon_{\gamma\beta} + b_{\beta}^{\gamma} \varepsilon_{\gamma\alpha})$ pojawiającym się w wyrażeniu (43) dla tensora zmiany krzywizny. W rezultacie otrzymujemy drugie równanie podstawowe identyczne z równaniem (39).

Równania dla sił przekrojowych $N^{\alpha\beta}$ są następujące

$$(48) \quad N^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (b_{\lambda}^{\alpha} M^{\lambda\beta} - b_{\lambda}^{\beta} M^{\alpha\lambda})$$

i różnią się od zależności w poprzednio rozpatrywanym wariancie równań podstawowych.

4. Warunki brzegowe

Podstawowy układ równań (33, 39) teorii powłok jest ósmego rzędu. Pozwala więc na spełnienie czterech warunków brzegowych na każdym brzegu powłoki, podobnie jak ma to miejsce w klasycznej teorii powłok o małej wyniosłości. Warunki te mogą mieć charakter geometryczny lub statyczny.

Jeżeli geometryczne warunki brzegowe są wyrażone przez odkształcenia i zmiany krzywizny wtedy trzeba wyrazić odkształcenia przez funkcję naprężeń, korzystając z wzorów (3) oraz z zależności (8). Zmiany krzywizny powierzchni środkowej określone są równaniem (15). Ponieważ, jak wykazano poprzednio wyrazy zawierające funkcje składowych tensora odkształcenia powierzchni środkowej dają w podstawowych równaniach (33) (39) efekty rzędu $(h/R)^2$ i $(h/L)^2$, uzasadnione jest więc pominięcie ich również w warunkach brzegowych dotyczących tych równań. Wtedy możemy korzystać z wyrażenia (27) przy określeniu składowych tensora zmiany krzywizny. Możliwe jest również spełnienie warunków brzegowych w przemieszczeniach. Badamy wtedy spełnienie warunków brze-

gowych przez ugięcie w i $\frac{\partial w}{\partial n}$ oraz składowe styczne wektora przemieszczenia u_α . Poszukiwanie składowych u_α wymaga scałkowania zależności (6).

Styczne warunki brzegowe można wyrazić przez siły i momenty brzegowe. Korzystamy przy tym z zależności (4), (8) i (3)₂. Konieczne jest przy tym wprowadzenie statyczne równoważnych sił brzegowych. Podstawowy układ równań wraz z odpowiadającymi im warunkami brzegowymi może być w ramach przyjętych przybliżeń wyprowadzony z warunków wariacyjnych. Jednakże zagadnienie to będzie przedmiotem oddzielnej publikacji.

5. Wnioski

Wyprowadzenie wyżej przedstawionych równań teorii powłok o wolno zmiennych krzywiznach opiera się na założeniu, że możemy pomijać wyrazy rzędu h^2/R^2 , h^2/L^2 w porównaniu z jednością oraz małe wyrazy określone w § 1, wynikające z efektu zmienności krzywizny powierzchni środkowej powłoki. Przyjęto również, że długość fali ugięcia naprężenia jest rzędu $\sim \sqrt{Rh}$ i $L < R$. Ponieważ wiele problemów technicznych spełnia przyjęte warunki, równania te, dzięki swej prostocie, mogą być użyteczne w obliczeniach inżynierskich.

Powyższe równania są równaniami liniowej teorii powłok gdyż wszystkie efekty nieliniowe wynikające ze zmiany geometrii powłoki zostały pominięte. Jednakże łatwo można je uogólnić na przypadek nieliniowy dotyczący umiarkowanie dużych ugięć. Będzie to tematem następnej publikacji.

Literatura cytowana w tekście

1. S. A. ŁUKASIEWICZ; *Uzupełnienie równań technicznej teorii powłok*. Rozprawy inżynierskie **11**, 1 (1963).
2. S. A. ŁUKASIEWICZ; *The equation of the Technical Theory of Shells with the Effect of Transverse Shear Deformations*. Q. Appl. Math. **1**, 489 - 497 (1971).
3. S. A. ŁUKASIEWICZ; *On the equations of the Theory of Shells of Slowly Varying Curvatures*. Journal of Appl. Math. and Physics (ZAMP) vol. **22**, 6 (1971).
4. W. T. KOITER; *On the nonlinear Theory of thin Elastic Shells*. Proceedings of Kon. Ned. Ak. Wet. S.B. **69** No 1, 1966.
5. W. T. KOITER; *A comparison between John's refined interior shells equations and classical shell theory*. Journ. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP) **20**, 642 - 652 (1969).
6. W. T. KOITER; J. G. SIMMONDS; *Foundations of shell theory „Theoretical and applied Mechanics”*. Proc. 13th IUTAM Congr. Moscow 1972. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973 p. 150 - 175.
7. W. PIETRASZKIEWICZ; *Introduction to the non-linear theory of shells*. Mitteilungen ans dem Institut für Mechanics, Ruhr-Universität Bochum, 1977.

Резюме

УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ОБОЛОЧЕК С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ КРИВИЗНАМИ.

В работе рассмотрены фундаментальные уравнения теории оболочек с медленно изменяющимися кривизнами. В сравнении с предыдущими работами автора здесь дан более точен и систематический вывод уравнений, а также оценка точности решения.

Система фундаментальных дифференциальных уравнений оболочки сведена к системе двух дифференциальных уравнений для нормального изгиба и функции напряжений.

Проанализовано два варианта дифференциальных уравнений и доказано, что для оболочек с медленно изменяющимися кривизнами, получены фундаментальные уравнения идентичны.

S u m m a r y

EQUATIONS OF THE LINEAR THEORY OF SHELLS WITH SLOWLY VARYING CURVATURES

In the paper the fundamental equations are presented of the theory of shells with slowly varying curvatures. In comparison with the author previous works, here, a consistent and complete derivation of the fundamental equations is given. The system of differential equations of the theory of shells has been reduced to the system of two differential equations for the normal deflection and the stress function. Two variants of the differential equations have been analysed and it has been proved that in the case of shells of slowly varying curvature they lead to the identical fundamental equations.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 kwietnia 1980 roku

WYBOCZENIE CIENKIEJ POWŁOKI PRZY OBCIĄŻENIACH OBROTOWO SYMETRYCZNYCH POZA GRANICĄ SPRĘŻYSTOŚCI

JERZY ZIELNICA, MARIA KWIEK (POZNAŃ)

1. Wstęp, założenia i oznaczenia

W pracy wyprowadzono zależności oraz przedstawiono metodę obliczeń obciążeń krytycznych dla cienkiej sprężysto-plastycznej powłoki w kształcie stożka ściętego pod wpływem podstawowych obciążeń typu obrotowo-symetrycznego, tj.:

- poprzeczne ciśnienie równomierne,
- wszechstronne równomierne obciążenie hydrostatyczne,
- siła wzdłużna ściskająca skierowana wzdłuż tworzącej.

Wykorzystując podejście SHANLEYA, dopuszczające wzrastanie obciążenia i rozwijanie się stref procesów biernych w wyniku powstawania pozakrytycznych ugięć, dla każdego z wyszczególnionych przypadków podano zależności dla obliczania obciążeń krytycznych według dwóch podstawowych teorii plastyczności, tj. teorii deformacyjnej i teorii plastycznego płynięcia. Uwzględniono ściśliwość materiału powłoki i przyjęto charakterystykę umocnienia typu liniowego. Do rozwiązania równań wyjściowych wykorzystano metodę ortogonalizacyjną.

Przy uwzględnieniu niejednorodnego rozkładu naprężeń w powłoce w stanie przedkrytycznym i wprowadzeniu badania warunku uplastycznienia typu H-M-H uzyskano zależności pozwalające na obliczanie obciążeń krytycznych dla powłoki całkowicie lub częściowo uplastycznionej, a nawet dla powłoki znajdującej się przed wybozczeniem w stanie sprężystym. W wyniku analizy stwierdzono, że związki wyjściowe uzyskane na bazie teorii plastycznego płynięcia są prostsze i wygodniejsze dla praktycznego wykorzystania. Przy wykorzystaniu teorii deformacyjnej obliczanie obciążeń krytycznych wymaga stosowania metod iteracyjnych i całkowania numerycznego.

W pracach [4, 5] przedstawiono analizę stateczności poza granicą sprężystości powłoki stożkowej obciążonej wszechstronnym równomiernym ciśnieniem hydrostatycznym przy założeniu charakterystyki umocnienia materiału typu potęgowego. Wyprowadzone w tych pracach związki wyjściowe posiadały rozbudowaną strukturę; stosowanie ich do obliczania obciążeń krytycznych było ograniczone do przypadków gdy cała powłoka przed utratą stateczności przeszła w stan plastyczny. Tego dość silnego ograniczenia, zawężającego zakres możliwych rozwiązań, niniejsza praca nie zawiera. W pracy niniejszej przyjęto liniową charakterystykę umocnienia materiału [6], a poprzez całkowanie przez części po ortogonalizacji uniknięto konieczności różniczkowania współczynników macierzy sztywności, które z uwagi na niejednorodny stan naprężeń w stanie dokrytycznym zależą

od współrzędnych geometrycznych, przez co zależności wyjściowe przyjęły zwartą postać. Zakłada się ponadto, że materiał powłoki jest izotropowy i ściśliwy. Obowiązują hipotezy Kirchhoffa-Love'a (w powłoce panuje płaski stan naprężenia, obowiązuje hipoteza niewydłużalnego odcinka normalnego) i zajmujemy się dowolną formą utraty stateczności. Analizę opieramy na koncepcji wzrastającego obciążenia, która, pomimo złożoności, umożliwia uzyskanie związków fizycznych w postaci rozprężniętej i daje rezultaty bardziej zbliżone do danych eksperymentalnych. Przegląd ważniejszych prac, tematycznie związanych z niniejszą, można znaleźć w pracy przeglądowej [2], oraz w pracach [1, 4, 5].

Poniżej zestawiono ważniejsze oznaczenia stosowane w pracy:

- E_c — moduł sieczny,
- $E_k = E_1$ — moduł styczny lub moduł wzmocnienia liniowego,
- E, G — moduły sprężystości podłużnej i poprzecznej,
- ν — liczba Poissona,
- q — równomierne ciśnienie działające na powierzchnię boczną powłoki,
- σ — wszechstronne równomierne ciśnienie hydrostatyczne,
- N_a — siła wzdłużna rozłożona równomiernie, przyłożona do górnej podstawy powłoki,
- q^*, σ^*, N_a^* — argumenty miejsca zerowego,
- σ_i, ε_i — intensywność naprężeń i odkształceń,
- $m, 2n$ — parametry — liczba półfal wzdłuż tworzącej i po obwodzie przy wyboczeniu,
- σ_{pl} — granica plastyczności,
- N_{10}, N_{20}, T_{10} — siły stanu błonowego,
- w, Φ — funkcja ugięcia i funkcja sił,
- $\varepsilon_\alpha, \kappa_\alpha, \varepsilon_{12}, \gamma_{12}$ — odkształcenia i zmiany krzywizn powierzchni podstawowej powłoki,
- $\bar{\sigma}_s = \sigma_s/\sigma_1, \bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta/\sigma_1, \bar{\tau}_{s\theta} = \tau_{s\theta}/\sigma_1$ — względne naprężenia odpowiednio w kierunku podłużnym, obwodowym i styczne,
- \tilde{A}_i, \tilde{B}_i — całki numeryczne w równaniu stateczności,
- $(\cdot)_{,s}; (\cdot)_{,\theta}$ — różniczkowanie względem odpowiedniej współrzędnej,
- s_1, s_2 — odległość od wierzchołka do górnej i dolnej podstawy wzdłuż tworzącej,
- h — grubość powłoki,
- β — kąt pochylenia tworzącej przy podstawie.

2. Sformułowanie problemu i podstawowe związki wyjściowe

Rozważamy cienkościenną powłokę w kształcie stożka ściętego, swobodnie podpartą na brzegach, obciążoną w sposób dowolny, obrotowosymetryczny. Zakładamy, że przed utratą stateczności w powłoce istnieje bezmomentowy niejednorodny stan naprężeń o siłach wewnętrznych: $N_{10}, N_{20}, T_{10}, T_{20}$, a wymiary powłoki i materiał są takie, że

przy aktywnym i proporcjonalnym narastaniu składowych tensora naprężeń, wyboczenie może nastąpić po osiągnięciu granicy sprężystości. Jeżeli przyjmiemy, że w chwili wyboczenia powłoka ulega uplastycznieniu, a strefy lokalnych odciążenia powstają dopiero w wyniku ugięć powłoki, wówczas dochodzimy do stosowanej tutaj koncepcji wzrastającego obciążenia. Przy takim podejściu rozwijaniu się stref procesów biernych towarzyszy wzrost obciążenia ponad wartość krytyczną, a kąt pochylenia krzywej $\sigma_i = \sigma_i(w)$ w punkcie bifurkacji jest na ogół różny od zera. Koncepcja ta została zaproponowana przez SHANLEYA do analizy wyboczenia prętów i zastosowana przez STOWELLA, ILIUSZYNA i GRIGOLUKA dla płyt i powłok.

Równania stateczności powłoki stożkowej zostały wyprowadzone w pracy [4]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & \Phi_{,ss} \sin \beta + \delta M_{s,ss} s \cos \beta + 2 \delta M_{s,s} \cos \beta + \frac{1}{s \cos \beta} \delta M_{\theta,\theta\theta} - \delta M_{\theta,s} \cos \beta + \\ & + \frac{2}{s} \delta M_{s\theta,\theta} + 2 \delta M_{s\theta,s\theta} + \left(\frac{1}{s \cos \beta} w_{,\theta\theta} + \cos \beta w_{,s} \right) N_{20} + s \cos \beta w_{,ss} N_{10} + \\ & + 2 \left(w_{,s\theta} - \frac{1}{s} w_{,\theta} \right) T_{10} = 0, \\ & w_{,ss} \sin \beta - \delta \gamma_{s\theta,s\theta} - \frac{1}{s} \delta \gamma_{s\theta,\theta} + \delta \varepsilon_{\theta,ss} s \cos \beta + \frac{1}{s \cos \beta} \delta \varepsilon_{s,\theta\theta} + 2 \delta \varepsilon_{\theta,s} \cos \beta - \\ & \delta \varepsilon_{s,s} \cos \beta = 0. \end{aligned}$$

Równanie (2.1)₁ wynika z warunków równowagi elementu po utracie stateczności, natomiast (2.1)₂ jest równaniem nierozdzielności odkształceń. $\delta M_s, \dots, \delta N_s, \dots$ oznaczają wariacje sił i momentów wywołane w powłoce przez utratę stateczności, $\delta \varepsilon_s, \delta \varepsilon_{\theta}, \delta \gamma_{s\theta}$ — wariacje odkształceń w powłoce.

Według hipotezy Kirchhoffa-Love'a wariacje wydłużeń dowolnego odcinka powłoki zależą od wydłużenia elementu powierzchni podstawowej i zmiany krzywizn

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \delta \varepsilon_s &= \delta \varepsilon_1 - x_3 \delta \kappa_1, \\ \delta \varepsilon_{\theta} &= \delta \varepsilon_2 - x_3 \delta \kappa_2, \\ \delta \gamma_{s\theta} &= \delta \gamma_{12} - x_3 \delta \kappa_{12}, \end{aligned}$$

gdzie x_3 jest współrzędną normalną do powierzchni podstawowej, przy czym $-\frac{h}{2} \leq x_3 \leq +\frac{h}{2}$.

Wariacje krzywizn w powłoce są określone następująco

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \delta \kappa_1 &= w_{,ss} \quad \delta \kappa_2 = \frac{1}{s} w_{,s} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} w_{,\theta\theta} - \frac{\sin \beta}{s^2 \cos^2 \beta} v_{,\theta}, \\ \delta \kappa_{12} &= \frac{1}{s \cos \beta} w_{,s\theta} - \frac{1}{s^2 \cos \beta} w_{,\theta} + \frac{\operatorname{tg} \beta}{2s} v_{,s} - \frac{v}{s^2} \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Siły i momenty w powłoce jakie powstaną w wyniku utraty stateczności uzyskamy całkując po grubości powłoki wariacje naprężeń

$$(2.5) \quad \delta N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \delta \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad \delta M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \delta \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3,$$

gdzie $\delta\sigma_{\alpha\beta}$ oznacza wariacje naprężeń, które należy określić ze związków fizycznych. Zgodnie z teorią małych odkształceń sprężysto-plastycznych NADAI-A-HENCKYEGO [6] mamy

$$(2.5) \quad \sigma_{IJ} = 2m(\varepsilon_I) \varepsilon_{IJ} + [3K - 2m(\varepsilon_I)] \varepsilon_m \delta_{IJ}$$

gdzie należy dokonać wariacji składowych tensora naprężenia. Według stowarzyszonego prawa płynięcia PRANDTLA-REUSSA, po dokonaniu wariacji tensora odkształcenia mamy

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \delta\varepsilon_s &= \frac{1}{E} (\delta\sigma_s - \nu\delta\sigma_\Theta) + \frac{1}{E} \omega_k \left(\sigma_s - \frac{1}{2}\sigma_\Theta \right) \frac{\delta\sigma_I}{\sigma_I}, \quad (\overline{s, \Theta}) \\ \delta\gamma_{s\Theta} &= \frac{1}{G} \delta\tau_{s\Theta} + \frac{3}{E} \omega_k \tau_{s\Theta} \frac{\delta\sigma_I}{\sigma_I}, \end{aligned}$$

gdzie $\sigma_I^2 = \sigma_s^2 + \sigma_\Theta^2 - \sigma_s\sigma_\Theta + 3\tau_{s\Theta}^2$, $\omega_k = E/E_k - 1$.

Związki (2.6) należy odwrócić ze względu na wariacje naprężeń. Po rozwinięciu, a następnie podstawieniu (2.5) i (2.6) do (2.4) i scałkowaniu dostaniemy wzory, które dla skrócenia zapisu podajemy w zapisie macierzowym

$$(2.7) \quad \delta\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \delta\boldsymbol{\varepsilon},$$

$$(2.8) \quad \delta\mathbf{M} = \mathbf{D} \times \delta\boldsymbol{\varkappa},$$

gdzie \mathbf{E} i \mathbf{D} są macierzami sztywności

$$(2.9) \quad \{E_{IJ}\} = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & -E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & -E_{23} \\ -E_{31} & -E_{32} & E_{33} \end{vmatrix}, \quad \{D_{IJ}\} = \begin{vmatrix} -D_{11} & -D_{12} & D_{13} \\ -D_{21} & -D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & -D_{33} \end{vmatrix},$$

natomiast $\delta\mathbf{N}$ i $\delta\mathbf{M}$ są wektorami kolumnowymi sił i momentów.

$$(2.10) \quad \delta\mathbf{N} = \{\delta N_s, \delta N_\Theta, \delta N_{s\Theta}\}, \quad \delta\mathbf{M} = \{\delta M_s, \delta M_\Theta, \delta M_{s\Theta}\},$$

a $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ i $\delta\boldsymbol{\varkappa}$ są wektorami kolumnowymi odkształceń i zmian krzywizn

$$(2.11) \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \{\delta\varepsilon_1, \delta\varepsilon_2, \delta\varepsilon_{12}\}, \quad \delta\boldsymbol{\varkappa} = \{\delta\kappa_1, \delta\kappa_2, \delta\kappa_{12}\}.$$

Zgodnie z koncepcją SHANLEYA współczynniki E_{IJ} i D_{IJ} zależą od przyjętej teorii plastyczności, mechanicznych własności materiału w stanie sprężystym i plastycznym i od stanu naprężeń w powłóce przed utratą stateczności. Wartości ich można znaleźć w pracach [4, 5] dla obydwu podstawowych teorii plastyczności, dlatego też w pracy niniejszej ogólnej ich postaci nie przytoczymy, podamy jedynie ich wartości po określeniu charakterystyki materiału i zdefiniowaniu naprężeń stanu przedkrytycznego dla poszczególnych rodzajów obciążeń zewnętrznych. Do równania równowagi i równania nierozdzielności (2.1) wstawiamy wariacje momentów (2.8), oraz wariacje odkształceń po odwróceniu równania (2.7), tj.

$$(2.12) \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \overline{\mathbf{E}} \times \delta\mathbf{N}$$

gdzie $\overline{\mathbf{E}}$ jest odwróconą macierzą sztywności.

Do równań (2.1) wstawiamy również wyrażenia określające krzywizny (2.3) oraz wariacje sił wyrażone za pomocą funkcji sił

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \delta N_s &= \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} \Phi_{,\theta\theta} + \frac{1}{s} \Phi_{,s}, & \delta N_\theta &= \Phi_{,ss}, \\ \delta N_{s\theta} &= -\frac{1}{s \cos \beta} \Phi_{,s\theta} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} \Phi_{,\theta}. \end{aligned}$$

Pomimo obrotowej symetrii obciążenia, w powłoce panuje niejednorodny rozkład uapreżeń w stanie przedkrytycznym, stąd E_{ij} i D_{ij} są funkcjami argumentu s , a dla przyjętych rodzajów obciążeń znikają siły i naprężenia tnące, co powoduje że $E_{\alpha 3} = E_{3\alpha} = D_{\alpha 3} = D_{3\alpha} = 0$. Po uporządkowaniu równania (2.1) przyjmą postać

$$(2.14) \quad \begin{aligned} &\Phi_{,ss} \sin \beta - D_{11} s \cos \beta w_{,ssss} - 2 \cos \beta (s D_{11})_{,s} w_{,sss} + \cos \beta \left[- \left(s D_{11,ss} + D_{12,s} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 D_{11,s} - \frac{1}{s} D_{22} \right) + N_{10} \right] w_{,ss} + \cos \beta \left(- D_{12,ss} + \frac{1}{s} D_{22,s} - \frac{1}{s^2} D_{22} + \right. \\ &\quad \left. + N_{20} \right) w_{,s} + \frac{2}{s \cos \beta} (D_{33} - D_{21}) w_{,ss\theta\theta} + \frac{2}{s \cos \beta} \left[\frac{1}{s} (D_{12} - D_{33}) + D_{33,s} - \right. \\ &\quad \left. - D_{12,s} \right] w_{,s\theta\theta} + \frac{1}{s \cos \beta} \left[- D_{12,ss} + \frac{1}{s} (2 D_{12,s} + D_{22,s} - 2 D_{33,s}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{s^2} (D_{12} + D_{22} - D_{33}) - N_{20} \right] w_{,\theta\theta} - \frac{1}{s^3 \cos^3 \beta} D_{22} w_{,\theta\theta\theta\theta} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &w_{,ss} \sin \beta + \bar{E}_{22} s \cos \beta \Phi_{,ssss} + \frac{1}{s \cos \beta} (\bar{E}_{33} + 2 \bar{E}_{12}) \Phi_{,ss\theta\theta} + \frac{1}{s^3 \cos^3 \beta} \bar{E}_{11} \Phi_{,\theta\theta\theta\theta} + \\ &\quad + \frac{1}{s \cos \beta} \left(\bar{E}_{33,s} + 2 \bar{E}_{21,s} - \frac{2}{s} \bar{E}_{12} - \frac{1}{s} \bar{E}_{33} \right) \Phi_{,s\theta\theta} + 2 \cos \beta (s \bar{E}_{22,s} + \bar{E}_{22}) + \\ &\quad + \frac{1}{s \cos \beta} \left[\bar{E}_{21,ss} - \frac{1}{s} (\bar{E}_{33,s} + 2 \bar{E}_{21,s} + \bar{E}_{11,s}) + \frac{1}{s^2} (\bar{E}_{33} + 2 \bar{E}_{21} + 2 \bar{E}_{11}) \right] \Phi_{,\theta\theta} + \\ &\quad + \cos \beta \left(s \bar{E}_{22,ss} + 2 \bar{E}_{22,s} + \bar{E}_{21,s} - \frac{1}{s} \bar{E}_{11} \right) \Phi_{,ss} + \cos \beta \left(\bar{E}_{12,ss} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{s} \bar{E}_{11,s} + \frac{1}{s^2} \bar{E}_{11} \right) \Phi_{,s} = 0. \end{aligned}$$

3. Rozwiązanie równań

Aby wyznaczyć obciążenie krytyczne należy rozwiązać układ równań różniczkowych cząstkowych (2.14). Układ ten sprowadzimy do równań różniczkowych zwyczajnych względem zmiennej s przez przyjęcie funkcji ugięcia w i funkcji sił Φ w postaci podwójnych szeregów nieskończonych

$$(3.1) \quad w(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}(s) \cos n \theta, \quad \Phi(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{mn}(s) \cos n \theta.$$

Przyjmując w pierwszym przybliżeniu po jednym wyrazie tych funkcji i podstawiając do (2.14) uzyskamy układ

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \sin \beta \frac{d^2 \Phi}{ds^2} + \alpha_1 \frac{d^4 w}{ds^4} + \alpha_2 \frac{d^3 w}{ds^3} + (\bar{\alpha}_3 - n^2 \alpha_5) \frac{d^2 w}{ds^2} + (\bar{\alpha}_4 - n^2 \alpha_7) \frac{dw}{ds} - \\ & \qquad \qquad \qquad - n^2 w (\bar{\alpha}_9 - n^2 \alpha_{10}) = 0, \\ & \sin \beta \frac{d^2 w}{ds^2} + \beta_5 \frac{d^3 \Phi}{ds^3} + (\beta_7 - n^2 \beta_2) \frac{d^2 \Phi}{ds^2} + \beta_1 \frac{d^4 \Phi}{ds^4} + (\beta_8 - n^2 \beta_4) \frac{d\Phi}{ds} + \\ & \qquad \qquad \qquad + n^2 \Phi (n^2 \beta_3 - \beta_6) = 0. \end{aligned}$$

Współczynniki α_i i β_i równań (3.2) są funkcjami zmiennej s . Układ równań (4.2) scałkujemy w sposób przybliżony metodą ortogonalizacyjną GALERKINA, przyjmując funkcje $w(s)$ i $\Phi(s)$ w postaci

$$(3.3) \quad w(s) = w_0 \sin \frac{m\pi}{l} (s - s_1), \quad \Phi(s) = \Phi_0 \sin \frac{m\pi}{l} (s - s_1),$$

spełniającej kinematyczne warunki brzegowe.

Zgodnie z metodą ortogonalizacyjną żądamy spełnienia warunków

$$(3.4) \quad \int_{s_1}^{s_2} F_1(s) w(s) ds = 0, \quad \int_{s_1}^{s_2} F_2(s) \Phi(s) ds = 0,$$

gdzie $F_1(s)$ i $F_2(s)$ oznaczają lewe strony równań (3.2).

Podstawiając (3.3) i (3.2) do (3.4) oraz wykonując całkowanie przez części wyrazów zawierających zmienne współczynniki α_i i β_i uzyskamy układ dwóch równań algebraicznych względem niewiadomych w_0 i Φ_0

$$(3.5) \quad \begin{aligned} w_0 A_{11} + \Phi_0 A_{12} &= 0, \\ w_0 A_{21} + \Phi_0 A_{22} &= 0, \end{aligned}$$

Z warunku znikania wyznacznika tego układu, tj.

$$(3.6) \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0$$

i po odpowiednich przekształceniach, wyznaczymy obciążenia krytyczne.

Jak już wspomniano, do analizy przyjmuje się charakterystykę umocnienia materiału typu liniowego, dla której

$$(3.7) \quad \sigma_t = \varepsilon_t E_k - \sigma_{pl} \left(\frac{E_k}{E} - 1 \right).$$

Moduł styczny w zakresie plastycznym $E_k = E_1 = \text{const}$ w tym przypadku, natomiast moduł sieczny $E_c = \sigma_t / \varepsilon_t$ jest zmienny i określony charakterystyką (3.7). W momencie utraty stateczności część powłoki może znajdować się w stanie sprężystym, a część w plastycznym, stąd też konieczne jest badanie warunku uplastycznienia i przyjmowanie $E_k = E_c = E$ dla zakresu sprężystego. Moduły sieczny i styczny, wchodzące do związków fizycznych, zdefiniujemy wobec tego następująco

$$(3.8) \quad E_c = \begin{cases} E_c, & \sigma_t > \sigma_{pl} \\ E, & \sigma_t \leq \sigma_{pl} \end{cases} \quad E_k = \begin{cases} E_1, & \sigma_t > \sigma_{pl} \\ E, & \sigma_t \leq \sigma_{pl} \end{cases}.$$

Obecnie przejdziemy do podania wyników dla poszczególnych przypadków obciążeń.

4. Powłoka obciążona równomiernym ciśnieniem poprzecznym

Sily i naprężenia błonowego, przedkrytycznego stanu naprężeń w powłoce są określone następująco

$$(4.1) \quad N_{10} = \sigma_s h = -\frac{qs}{2\operatorname{tg}\beta} \left(1 - \frac{s_1^2}{s^2}\right), \quad N_{20} = \sigma_\varphi h = -\frac{qs}{\operatorname{tg}\beta},$$

$$\sigma_l = \frac{qs}{2h\operatorname{tg}\beta} \sqrt{3 + \left(\frac{s_1}{s}\right)^4},$$

natomiast moduł sieczny przyjmuje wartość

$$(4.2) \quad E_c = \begin{cases} \frac{E_k}{1 + \frac{k_1}{qs\sqrt{\Omega_s}}}, & \sigma_l > \sigma_{pl} \\ E & \sigma_l \leq \sigma_{pl} \end{cases}$$

gdzie

$$k_1 = 2 \left(\frac{E_k}{E} - 1 \right) \sigma_{pl} h \operatorname{tg}\beta, \quad \Omega_s = 3 + \left(\frac{s_1}{s} \right)^4.$$

Zgodnie z (3.6) uzyskamy następujący związek określający wartość obciążenia krytycznego

$$(4.3) \quad q_{krn} = \left[\frac{3\pi^2 \left(\frac{\pi \sin\beta}{lh} \right)^2}{\tilde{B}_1 \cos\beta + \frac{n^2}{\cos\beta} \tilde{B}_2 + \frac{n^4}{\cos^3\beta} \tilde{B}_3 - b_{12}^0 \left| \frac{s_2}{s_1} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos\beta} - \left(\tilde{A}_1 \cos\beta + \frac{n^2}{\cos\beta} \tilde{A}_2 + \frac{n^4}{\cos^3\beta} \tilde{A}_3 + d_{12}^0 \left| \frac{s_2}{s_1} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos\beta \right) \right. \right] \times$$

$$\times \frac{Eh^3 \operatorname{tg}\beta}{3l \cos\beta} \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left[s_1^2 - \frac{1}{3l} (s_2^3 - s_1^3) \right] + \frac{2}{\cos^2\beta} n^2 \right\}^{-1}.$$

W równaniu powyższym

$$(4.4) \quad \tilde{A}_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{N} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left[-s d_{11} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin^2\varphi - d_{12} \frac{\pi}{l} \sin 2\varphi - \frac{1}{s} \cos^2\varphi \right] ds,$$

$$\tilde{A}_2 = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{1}{N} \frac{1}{s} \frac{\pi}{l} \left[-2d_{12} \frac{\pi}{l} \sin^2\varphi + \frac{1}{s} d_{22} \sin 2\varphi \right] + \right.$$

$$\left. + 2d_{33} \frac{1}{s} \left[\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos^2\varphi - \frac{\pi}{l} \frac{1}{s} \sin 2\varphi + \frac{1}{s^2} \sin^2\varphi \right] \right\} ds,$$

$$\tilde{A}_3 = - \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{N} \frac{1}{s^3} d_{22} \sin^2\varphi ds,$$

$$\tilde{B}_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{N}{M} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left[s b_{22} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin^2\varphi - b_{12} \frac{\pi}{l} \sin 2\varphi + \frac{1}{s} b_{11} \cos^2\varphi \right] ds,$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_2 &= \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{N}{M} \frac{1}{s} \frac{\pi}{l} \left(2b_{12} \frac{\pi}{l} \sin^2 \varphi - \frac{1}{s} b_{11} \sin 2\varphi \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_{33} \frac{1}{s} \left[\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{s} \frac{\pi}{l} \sin 2\varphi + \frac{1}{s^2} \sin^2 \varphi \right] \right\} ds, \\ \tilde{B}_3 &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{N}{M} \frac{1}{s^3} b_{11} \sin^2 \varphi ds, \quad \varphi = \frac{\pi}{l} (s - s_1).\end{aligned}$$

Współczynniki występujące w zależnościach (4.10) są związane z elementami macierzy sztywności następująco

$$(4.5) \quad \begin{aligned}d_{12}^0 \Big|_{s_1}^{s_2} &= \frac{D_{12}(s_2)}{N(s_2)} - \frac{D_{12}(s_1)}{N(s_1)}, \\ b_{12}^0 \Big|_{s_1}^{s_2} &= \frac{N(s_2)}{M(s_2)} D_{12}(s_2) - \frac{N(s_1)}{M(s_1)} D_{12}(s_1), \\ d_{\alpha\beta} &= D_{\alpha\beta}, \quad b_{11} = D_{22}, \quad b_{22} = D_{11}, \quad b_{12} = -D_{12}, \\ M &= D_{11} D_{22} - D_{12}^2.\end{aligned}$$

Elementy macierzy sztywności $D_{\alpha\beta}$ i funkcje N i M zależą od przyjętej teorii plastyczności i dla danego typu obciążenia i przyjętej charakterystyki materiału w zakresie sprężystym i plastycznym są określone następująco:

a) teoria deformacyjna (TD)

$$(4.6) \quad \begin{aligned}D_{11}^{\text{TD}} &= \begin{cases} 1, & \sigma_l \leq \sigma_{p1} \\ 1 + \frac{k_1 s}{q \sqrt{3s^4 + s_1^4}} \left[1 - \frac{\left(3 + \frac{s_1^2}{s^2} \right)^2}{4 \left(3 + \frac{s_1^4}{s^4} \right)} \right], & \sigma_l > \sigma_{p1} \end{cases}, \\ D_{22}^{\text{TD}} &= \begin{cases} 1, \\ 1 + \frac{3k_1 s^5}{q \sqrt{(3s^4 + s_1^4)^3}}, \end{cases} \\ D_{12}^{\text{TD}} &= \begin{cases} \frac{1}{4} (2 - \nu_1), \\ \frac{3k_1 s^3 (s^2 - s_1^2)}{2q \sqrt{(3s^4 + s_1^4)^3}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_k}{2E} \nu_1 \right), \end{cases} \\ d_{33}^{\text{TD}} &= \begin{cases} \frac{2}{3 - \nu_1}, \\ \frac{2}{3 \frac{E}{E_k} \left(1 + \frac{k_1 s}{q \sqrt{s_1^4 + s^4}} \right) - \nu_1}, \end{cases} \quad b_{33}^{\text{TD}} = \begin{cases} 3 - \nu_1, \\ 3 \frac{E}{E_k} \left(1 + \frac{k_1 s}{q \sqrt{s_1^4 + s^4}} \right) - \nu_1, \end{cases} \\ N^{\text{TD}} &= \begin{cases} \frac{1}{4} [(3 + 2\nu_1) - \nu_1^2], \\ \frac{1}{4} \left\{ \frac{k_1 s}{q \sqrt{3s^4 + s_1^4}} \left[\left(3 \frac{E}{E_k} + \nu_1 \right) - \frac{2\nu_1 s_1^2 (3s^2 + s_1^2)}{3s^4 + s_1^4} \right] + 3 \frac{E}{E_k} + \nu_1 - \nu_1^2 \frac{E_k}{E} \right\}, \end{cases}\end{aligned}$$

gdzie $\nu_1 = 1 - 2\nu$.

b) teoria plastycznego płynięcia (TPP)

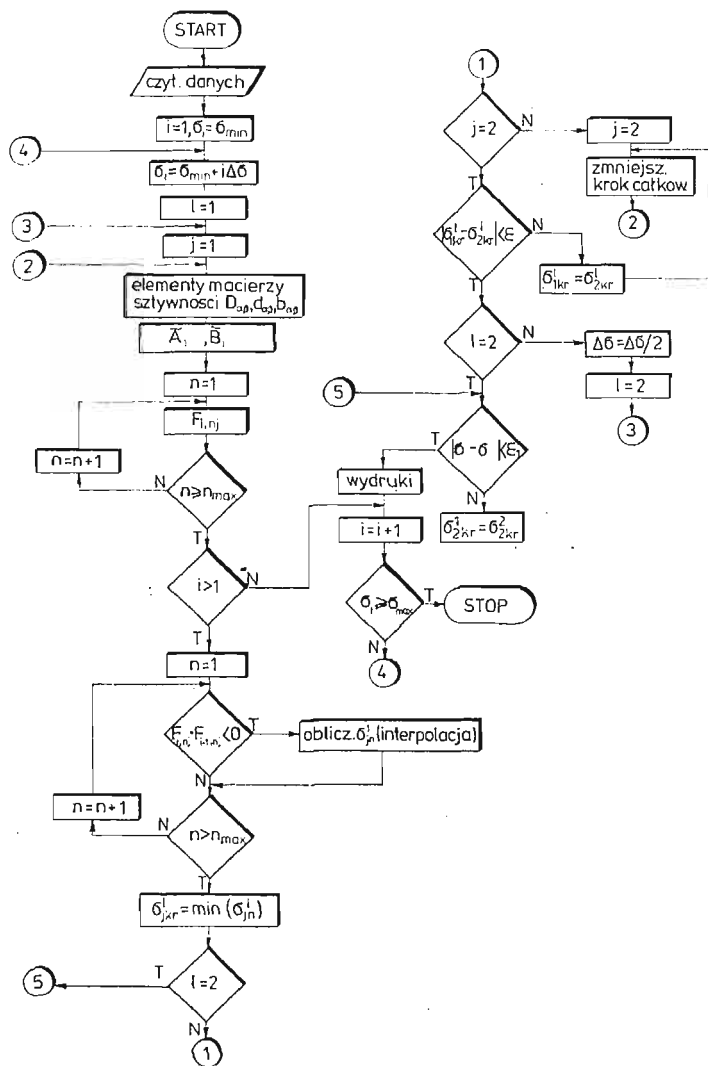
$$\begin{aligned}
 D_{11}^{\text{TPP}} &= \begin{cases} 2\Omega_s, & \sigma_i \leq \sigma_{pl} \\ 6 + \frac{9}{2} \omega_k + 3 \left(\frac{s_1}{s} \right)^2 \omega_k + \left(2 + \frac{1}{2} \omega_k \right) \left(\frac{s_1}{s} \right)^4, & \sigma_i > \sigma_{pl} \end{cases} \\
 D_{22}^{\text{TPP}} &= \begin{cases} 2\Omega_s, \\ 2 \left[3 + (1 + \omega_k) \left(\frac{s_1}{s} \right)^4 \right], \end{cases} \\
 (4.7) \quad D_{12}^{\text{TPP}} &= \begin{cases} 2\nu\Omega_s, \\ 6\nu + 3\omega_k \left(\frac{s_1}{s} \right)^2 + (2\nu + \omega_k) \left(\frac{s_1}{s} \right)^4, \end{cases} \\
 d_{33}^{\text{TPP}} &= \frac{1}{1+\nu}, \quad b_{33}^{\text{TPP}} = 2(1+\nu), \\
 N^{\text{TPP}} &= \begin{cases} 2(1-\nu^2)\Omega_s, \\ 6(1-\nu^2) + \frac{9}{2} \omega_k + 3(1-2\nu)\omega_k \frac{s_1^2}{s^2} + \left[2(1-\nu^2) + \frac{1}{2} \omega_k(5-4\nu) \right] \left(\frac{s_1}{s} \right)^4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Jak widać, współczynniki wg teorii deformacyjnej zależą od zmiennej s jak i od obciążenia zewnętrznego q , natomiast zgodnie z teorią plastycznego płynięcia zależą tylko od s . W związku z tym stosując teorię plastycznego płynięcia obciążenie krytyczne można otrzymać bezpośrednio ze wzoru (4.3); pozostaje jedynie obliczenie całek numerycznych \tilde{A}_i i \tilde{B}_i (4.4), których wyznaczenie w sposób ścisły jest zawile. Według teorii deformacyjnej obciążenia krytycznego bezpośrednio ze wzoru (4.3) nie można obliczyć, ponieważ przekształcenie tej zależności ze względu na q nie jest możliwe. W związku z tym podamy pewien algorytm iteracyjny. Powłoka na którą działa boczne ciśnienie równomierne traci stateczność w ten sposób, że wzdłuż tworzącej tworzy się jedna półfala; dlatego w równaniu (4.3) przyjęto $m = 1$, natomiast po obwodzie powstaje n fal, przy czym wartość n przy obciążeniu krytycznym zależy od parametrów geometrycznych powłoki. Obciążenie krytyczne q_{krn} stanowi minimalna spośród wartości $q^* = q^*(n)$ dla różnych liczb n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Obliczenia będziemy prowadzili następująco. Związek (4.3) zapiszemy w postaci

$$(4.8) \quad F_i(q, n) = L_i(q, n) - q = 0,$$

gdzie $L_i(q, n)$ oznacza prawą stronę równania (4.3). Mamy w ten sposób funkcję jednej zmiennej q i parametru n . Obliczenia, polegające na poszukiwaniu miejsc zerowych (q^*) funkcji $F_i(q, n)$ zrealizowano przy pomocy komputera po opracowaniu odpowiedniej procedury. Na rys. 1 przedstawiono uproszczony algorytm obliczeń. Po wczytaniu danych, w tym parametrów iteracji ε i ε_1 , następuje start obliczeń od $q_i = q_{min}$ (przy czym $q_{min} < < q_{krn}$) przyjętego na przykład w oparciu o wyniki dla teorii plastycznego płynięcia. Po obliczeniu elementów macierzy sztywności dla szeregu wartości argumentu $s \in (s_1, s_2)$ przy zadanym kroku całkowania i przechowaniu ich w pamięci, następuje obliczenie całek \tilde{A}_i i \tilde{B}_i i również przechowanie ich w pamięci. Pozwala to na zwiększenie efektywności obliczeń, gdyż we wyrażeniach na \tilde{A}_i i \tilde{B}_i nie występuje parametr n . Po obliczeniu $F_i(q, n)$ następują kolejne obliczenia dla $(q+k\Delta q)$, aż do osiągnięcia zmiany znaku funkcji

$F_{i+k}(q+k\Delta q, n)$. W tym momencie metodą interpolacji liniowej zostaje ustalona i zapamiętana wartość przybliżona argumentu q^* odpowiadająca miejscu zerowemu przy różnych wartościach n . Dalej następują ponowne przejścia przy zmniejszonym każdorazowo kroku Δq i badanie czy osiągnięta została odpowiednia dokładność (parametr ε). Jak widać z rys. 1, procedura przewiduje również każdorazowo badanie wpływu na wynik dokład-



Rys. 1

ności całkowania. Dokonuje się tego przez zrealizowanie ponownych przejść ze zmniejszonym za każdym razem krokiem całkowania, aż do spełnienia związku $(\sigma_{2kr}^2 - \sigma_{1kr}^1) < \varepsilon_1$, gdzie ε_1 jest parametrem całkowania, a σ_{2kr}^2 i σ_{1kr}^1 oznaczają wartości argumentu miejsca zerowego z poprzedniego i bieżącego przejścia. Po spełnieniu tych warunków następuje

wyprowadzenie wyników i automatyczne przejście do realizacji dla kolejnej grupy danych, przechowywanych w zbiorze dyskowym. Obliczenia kończą się po wyczerpaniu wszystkich wariantów. Rezultaty obliczeń zostaną przedstawione w ostatnim rozdziale pracy.

5. Powłoka obciążona wszechstronnym równomiernym ciśnieniem hydrostatycznym

Dla tego przypadku obciążenia siły i naprężenia błonowego przedkrytycznego stanu naprężeń wyrażają się następująco

$$(5.1) \quad \begin{aligned} N_{10} = \sigma_s h = -\frac{\sigma s}{2 \operatorname{tg} \beta}, \quad N_{20} = \sigma_\theta h = -\frac{\sigma s}{\operatorname{tg} \beta}, \quad T_{10} = T_{20} = 0, \\ \sigma_t = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma s}{h \operatorname{tg} \beta}. \end{aligned}$$

Moduł sieczny przyjmuje wartość

$$E_c = \begin{cases} -\frac{E_k}{1 + \frac{k_1}{\sqrt{3}\sigma s}}, & \sigma_t > \sigma_{pl} \\ E, & \sigma_t \leq \sigma_{pl}, \quad k_1 = 2 \left(\frac{E_k}{E} - 1 \right) \sigma_{pl} h \operatorname{tg} \beta. \end{cases}$$

Według kryterium stateczności (3.6) dla tego przypadku obciążenia powłoki otrzymujemy następującą zależność na obciążenie krytyczne

$$(5.2) \quad \sigma_{krs} = \left[\frac{3\pi^2 \left(\frac{\pi \sin \beta}{lh} \right)^2}{\tilde{B}_1 \cos \beta + \frac{n^2}{\cos \beta} \tilde{B}_2 + \frac{n^4}{\cos^3 \beta} \tilde{B}_3 - b_{12}^0 \left| \frac{s_2}{s_1} \right|^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos \beta} - \left(\tilde{A}_1 \cos \beta + \frac{n^2}{\cos \beta} \tilde{A}_2 + \frac{n^4}{\cos^3 \beta} \tilde{A}_3 + d_{12}^0 \left| \frac{s_2}{s_1} \right|^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos \beta \right) \right] \times \\ \times \frac{Eh^3 \sin \beta}{3l} \left\{ \cos^2 \beta \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3l} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 (s_2^3 - s_1^3) \right] + 2n^2 \right\}^{-1}.$$

Całki numeryczne występujące w równaniu stateczności (5.2) są określone zależnościami (4.4). Obowiązują tutaj również zależności (4.5). Współczynniki określające elementy macierzy sztywności dla obciążenia wszechstronnego i liniowej charakterystyki umocnienia są następujące:

a) teoria deformacyjna

$$(5.3) \quad D_{11}^{TD} = \begin{cases} 1, & \sigma_t < \sigma_{pl} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{k_1}{\sigma s}, & \sigma_t \geq \sigma_{pl} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_{22}^{\text{TD}} &= \begin{cases} 1, \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{k_1}{\sigma s}, \end{cases} & \mathbf{D}_{12}^{\text{TD}} &= \begin{cases} \frac{1}{4} (2 - \nu_1), \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{k_1}{\sigma s}, \end{cases} \\
 \text{(5.3)} \quad \text{[cd.]} \quad d_{33}^{\text{TD}} &= \begin{cases} \frac{2}{3 - \nu_1}, \\ \frac{2}{3 \frac{E}{E_k} \left(1 + \frac{k_1}{\sigma s \sqrt{3}}\right) - \nu_1}, \end{cases} & b_{33}^{\text{TD}} &= \begin{cases} 3 - \nu_1, \\ 3 \frac{E}{E_k} \left(1 + \left(\frac{k_1}{\sigma s \sqrt{3}}\right) - \nu_1\right) \end{cases} \\
 N^{\text{TD}} &= \begin{cases} \frac{1}{4} [(3 + 2\nu_1) - \nu_1^2], \\ \frac{1}{4} \left[3 \frac{E}{E_k} + 2\nu_1 - \nu_1^2 \frac{E_k}{E} + \sqrt{3} \left(\frac{E}{E_k} + \frac{2}{3} \nu_1 \right) \frac{k_1}{\sigma s} \right], \quad \nu_1 = 1 - 2\nu. \end{cases}
 \end{aligned}$$

b) teoria plastycznego płynięcia (TPP)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_{11}^{\text{TPP}} &= \begin{cases} 6, & \sigma_i < \sigma_{p1} \\ 6 + \frac{9}{2} \omega_k, & \sigma_i \geq \sigma_{p1} \end{cases} \\
 \text{(5.4)} \quad \mathbf{D}_{22}^{\text{TPP}} &= 6, \quad \mathbf{D}_{12}^{\text{TPP}} = 6\nu, \quad d_{33}^{\text{TPP}} = \frac{1}{1 + \nu}, \quad b_{33}^{\text{TPP}} = 2(1 + \nu), \\
 N^{\text{TPP}} &= \begin{cases} 6(1 - \nu^2), \\ 6(1 - \nu^2) + \frac{9}{2} \omega_k, \quad \omega_k = \frac{E}{E_k} - 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku, według teorii deformacyjnej współczynniki zależą od zmiennej s i obciążenia σ , natomiast zgodnie z teorią plastycznego płynięcia współczynniki te są stałe, co bardzo upraszcza zagadnienie. Dla teorii płynięcia obciążenie krytyczne obliczamy bezpośrednio ze wzoru (5.2), gdzie całki numeryczne \tilde{A}_i i \tilde{B}_i (biorąc pod uwagę, że D_{ij}^{TPP} i $N^{\text{TPP}} = \text{const}$) można wyznaczyć explicite. Są one następujące

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_1 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{N} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 d_{11} (s_2^2 - s_1^2) + d_{22} \left[\ln \frac{s_2}{s_1} \left(1 + \cos 2\pi \frac{s_1}{l} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + C_k \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right] \right\}, \\
 \text{(5.5)} \quad \tilde{A}_2 &= \frac{1}{N} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left\{ -d_{12} \ln \frac{s_2}{s_1} + (d_{12} + 2d_{22}) \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right] \right\} + d_{33} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left\{ \ln \frac{s_2}{s_1} - \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right] \right\}, \\
 \tilde{A}_3 &= -\frac{1}{N} d_{22} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.5) \quad \tilde{B}_1 &= \frac{1}{2} \frac{N}{M} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} b_{22} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 (s_2^2 - s_1^2) + b_{11} \left[\ln \frac{s_2}{s_1} + \left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \times \right. \right. \\
 [\text{cd.}] \quad & \left. \left. \times \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right] \right\}, \\
 \tilde{B}_2 &= \frac{N}{M} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left\{ b_{12} \ln \frac{s_2}{s_1} - (b_{12} + 2b_{11}) \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right] \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} b_{33} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left\{ \ln \frac{s_2}{s_1} + \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right] \right\}, \\
 \tilde{B}_3 &= \frac{N}{M} b_{11} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right],
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 C_k &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^{2k}}{(2k)! 2k} (s_2^{2k} - s_1^{2k}), \\
 S_k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{2\pi}{l} \right)^{2k+1}}{(2k+1)! (2k+1)} (s_2^{2k+1} - s_1^{2k+1}).
 \end{aligned}$$

Jak widać, w oparciu o teorię deformacyjną obciążenie krytyczne może być wyznaczone jedynie w oparciu o poprzednio omówioną procedurę iteracyjną. Dla teorii plastycznego płynięcia nie ma problemu w przypadku gdy powłoka traci stateczność w stanie całkowicie sprężystym lub całkowicie plastycznym, gdyż tylko wtedy elementy macierzy sztywności (5.4) są określone jednoznacznie. Gdy powłoka traci stateczność w stanie sprężysto-plastycznym, pojawiają się problemy, które można pokonać np. przez dokonanie podziału przedziału $\langle s_1, s_2 \rangle$ na części i sprawdzenie dla każdego kroku warunku uplastycznienia. Umożliwi to wybranie właściwych wartości współczynników (5.4). Oczywiście jeżeli dokonujemy podziału na większą ilość części wynik będzie dokładniejszy.

6. Powłoka obciążona wzdłużną siłą ściskającą

Siły i naprężenia w bezmomentowym przedkrytycznym stanie naprężenia są następujące

$$(6.1) \quad N_{10} = \sigma_s h = -N_a \frac{s_1}{s}, \quad N_{20} = 0, \quad T_{10} = T_{20} = 0, \quad \sigma_t = N_a \frac{s_1}{h} \frac{1}{s}.$$

Moduł sieczny przyjmuje wartość

$$(6.2) \quad E_c = \begin{cases} \frac{E_k}{1 + k_1 \frac{s}{N_a}}, & \sigma_t > \sigma_{p1} \\ E, & \sigma_t \leq \sigma_{p1}, \end{cases}$$

gdzie

$$k_1 = \frac{h}{s_1} \sigma_{p1} \left(\frac{E}{E_k} - 1 \right).$$

Krytyczną siłę ściskającą obliczymy z zależności

$$(6.3) \quad N_{akr} = \frac{Eh^3}{6s_1(s_2 - s_1)} \left[\frac{3m^2\pi^2\sin^2\beta}{h^2\cos\beta} \cdot \frac{1}{\tilde{B}_1\cos\beta + \frac{n^2}{\cos\beta}\tilde{B}_2 + \frac{n^4}{\cos^3\beta}\tilde{B}_3 - b_{12}^0 \Big|_{s_1}^{s_2} m_1^2 \cos\beta} + \frac{1}{m_1^2 \cos\beta} \left(\tilde{A}_1 \cos\beta + \frac{n^2}{\cos\beta} \tilde{A}_2 + \frac{n^4}{\cos^3\beta} \tilde{A}_3 \right) - d_{12}^0 \Big|_{s_1}^{s_2} \right].$$

Całki \tilde{A}_i i \tilde{B}_i obliczamy według zależności (4.4) i (4.5), natomiast elementy macierzy sztywności dla omawianego przypadku obciążenia są następujące:

a) teoria deformacyjna

$$(6.4) \quad \begin{aligned} D_{11}^{TD} &= \begin{cases} 1, & \sigma_t \leq \sigma_{p1} \\ 1 + \frac{3}{4} k_1 \frac{s}{N_a}, & \sigma_t > \sigma_{p1}, \end{cases} & D_{22}^{TD} &= 1, \\ D_{12}^{TD} &= \begin{cases} \frac{1}{4} (2 - \nu_1), \\ \frac{1}{4} \left(2 - \nu_1 \frac{E}{E_k} \right), \end{cases} \\ d_{33}^{TD} &= \begin{cases} \frac{1}{1 + \nu}, \\ \frac{2}{3 \frac{E}{E_k} \left(1 + k_1 \frac{s}{N_a} \right) - \nu_1}, \end{cases} & b_{33}^{TD} &= \begin{cases} 2(1 + \nu), \\ 3 \frac{E}{E_k} \left(1 + k_1 \frac{s}{N_a} \right) - \nu_1, \end{cases} \\ N^{TD} &= \begin{cases} 1 - \nu^2, \\ \frac{1}{4} \left[3 \frac{E}{E_k} k_1 \left(\frac{s}{N_a} \right) + 3 \frac{E}{E_k} + 2\nu_1 - \nu_1^2 \frac{E_k}{E} \right], \end{cases} & \nu_1 &= 1 - 2\nu. \end{aligned}$$

b) teoria plastycznego płynięcia

$$(6.5) \quad \begin{aligned} D_{11}^{TPP} &= \begin{cases} 2, & \sigma_t \leq \sigma_{p1} \\ 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{E}{E_k} - 1 \right), & \sigma_t > \sigma_{p1} \end{cases} \\ D_{22}^{TPP} &= \begin{cases} 2, \\ 2 \frac{E}{E_k}, \end{cases} & D_{12}^{TPP} &= \begin{cases} 2\nu, \\ 2\nu - 1 + \frac{E}{E_k}, \end{cases} \\ d_{33}^{TPP} &= \frac{1}{1 + \nu}, & b_{33}^{TPP} &= 2(1 + \nu), \\ N^{TPP} &= \begin{cases} 2(1 - \nu^2), \\ 2(1 - \nu^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{E}{E_k} - 1 \right) (5 - 4\nu). \end{cases} \end{aligned}$$

Jak widać z powyższych zależności, jeżeli do obliczeń zastosujemy teorię deformacyjną, wtedy obciążenie krytyczne można znaleźć wyłącznie w sposób iteracyjny, natomiast przy wykorzystaniu teorii płynięcia, gdzie elementy macierzy sztywności są stałe i nie zależą od obciążenia, problem się upraszcza. Ponieważ w tym przypadku funkcje podcałkowe w wyrażeniach (4.4) nie są zawile, po scałkowaniu uzyskamy

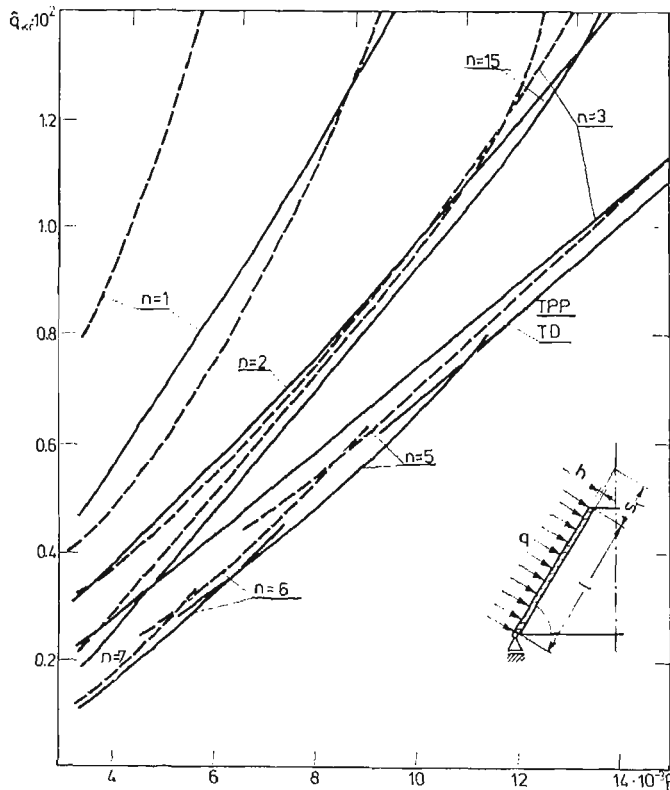
$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{N} m_1^2 \left\{ \frac{1}{2} d_{11} m_1^2 (s_1^2 - s_2^2) - d_{22} \ln \frac{s_2}{s_1} - d_{22} \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right] \right\}, \\
 \tilde{A}_2 &= \frac{1}{N} m_1^2 \left\{ -d_{12} \ln \frac{s_2}{s_1} + (d_{12} + 2d_{22}) \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right] \right\} + d_{33} m_1^2 \left\{ \ln \frac{s_2}{s_1} - \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right] \right\}, \\
 \tilde{A}_3 &= -\frac{1}{N} d_{22} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right], \\
 \tilde{B}_1 &= \frac{1}{2} \frac{N}{M} m_1^2 \left\{ \frac{1}{2} b_{22} m_1^2 (s_2^2 - s_1^2) + b_{11} \ln \frac{s_2}{s_1} + b_{11} \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right] \right\}, \\
 \tilde{B}_2 &= \frac{N}{M} m_1^2 \left\{ b_{12} \ln \frac{s_2}{s_1} - (b_{12} + 2b_{11}) \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right] \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} b_{33} m_1^2 \left\{ \ln \frac{s_2}{s_1} - \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right] \right\}, \\
 \tilde{B}_3 &= \frac{N}{M} b_{11} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right], \\
 C_k &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{2m\pi}{l} \right)^{2k}}{(2k)! 2k} (s_2^{2k} - s_1^{2k}), \\
 S_k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{2m\pi}{l} \right)^{2k+1}}{(2k+1)! (2k+1)} (s_2^{2k+1} - s_1^{2k+1}).
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

Dla rozważanego przypadku obciążenia powłoki w celu obliczenia obciążeń krytycznych należy dokonać minimalizacji względem dwóch parametrów, tj. m i n . Może wystąpić tutaj również przypadek wyboczenia osiowo symetrycznego ($n = 0$) i wówczas zależność na obciążenie krytyczne sprowadza się do związku

$$N_{akr} = \frac{Eh^3}{6s_1(s_2 - s_1)} \left[\frac{3m^2\pi^2 \operatorname{tg}^2 \beta}{h^2 (\tilde{B}_1 - b_{12}^0) \left| \frac{s_2}{s_1} m_1^2 \right|} + \frac{\tilde{A}_1}{m_1^2} - d_{12}^0 \left| \frac{s_2}{s_1} \right| \right].
 \tag{6.7}$$

7. Obliczenia numeryczne i wnioski

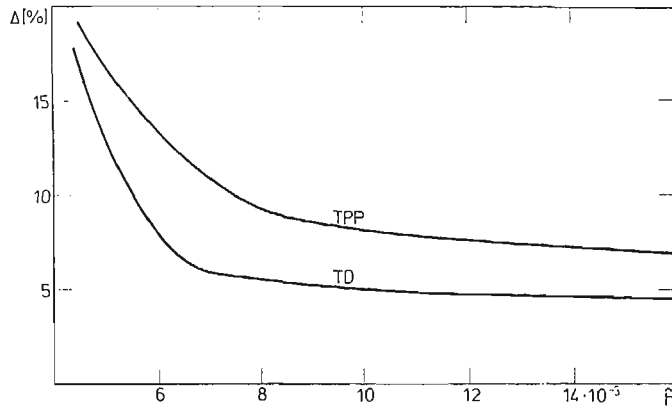
W oparciu o przedstawiony algorytm (rys. 1) opracowano program w języku FORTRAN-IV, a obliczenia zrealizowano na komputerze ODRA-1305. Istotną rolę w uruchomieniu programu i wykonaniu obliczeń numerycznych stanowiła możliwość korzystania ze zdalnej końcówki konwersacyjnej pod sterowaniem systemu operacyjnego GEORGE-3. Jako podstawowe do obliczeń przyjęto następujące dane: $E = 2,09 \cdot 10^5$ MPa, $E_k = 9 \cdot 10^3$ MPa, $\sigma_{p1} = 72$ MPa, $\nu = 0,33$, $s_1 = 32$ cm, $s_2 = 81$ cm, $\beta = 20^\circ$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0,001$. Dane różniące się od wymienionych zaznaczono na wykresach.



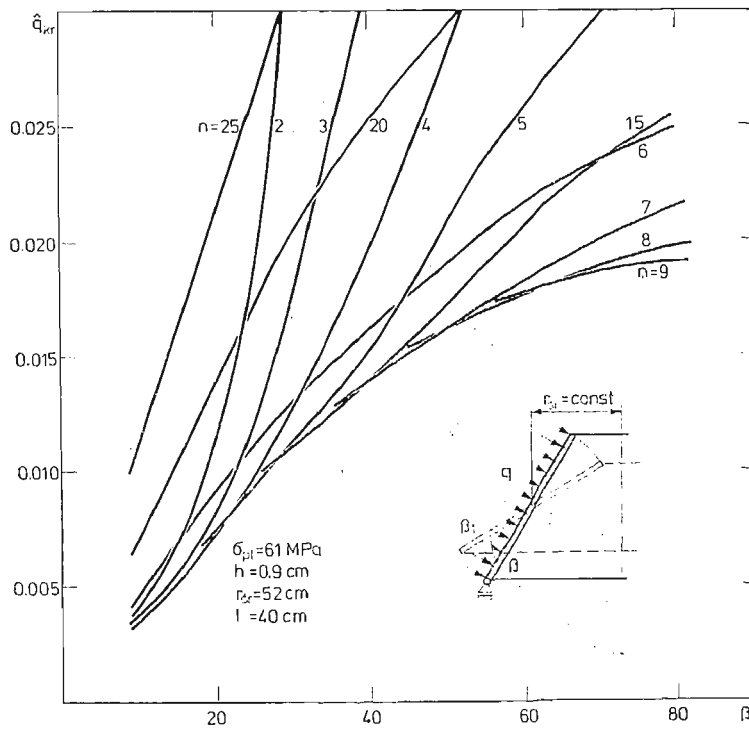
Rys. 2

Na rys. 2 przedstawiono wyniki obliczeń dla przypadku obciążenia powłoki równomiernym ciśnieniem bocznym q . Wykres przedstawia zależność obciążenia krytycznego $\hat{q}_{kr} = q_{kr}/\sigma_{p1}$ od grubości powłoki $\hat{h} = h/\varrho_a$; gdzie $\varrho_a = s_1 \operatorname{ctg} \beta$ jest promieniem krzywizny powierzchni środkowej przy mniejszej podstawie. Wyniki podano zarówno dla teorii deformacyjnej (TD-linia ciągła), jak i dla teorii plastycznego płynięcia (TPP-linia przerywana). Jak widać, w miarę wzrostu grubości powłoki obciążenia krytyczne również rosną i to w sposób zbliżony do liniowego. Zmienia się jednak postać utraty stateczności; im grubość większa, tym tworzy się mniej fal po obwodzie odkształconej w wyniku utraty stateczności powłoki. Obydwie teorie dały tutaj zbliżone wyniki, z tym że stosując teorię

plastycznego płynięcia uzyskuje się nieco wyższe obciążenia krytyczne. Nadmienić należy również, że w całym badanym zakresie powłoka traciła stateczność w stanie sprężysto-plastycznym. Dla przyjętej grupy danych uwzględniono ściśliwość materiału powłoki. Ponieważ w szeregu pracach dotyczących stateczności płyt poza granicą sprężystości nie uwzględnia się ściśliwości materiału, dla tego przypadku przeprowadzono ponownie



Rys. 3



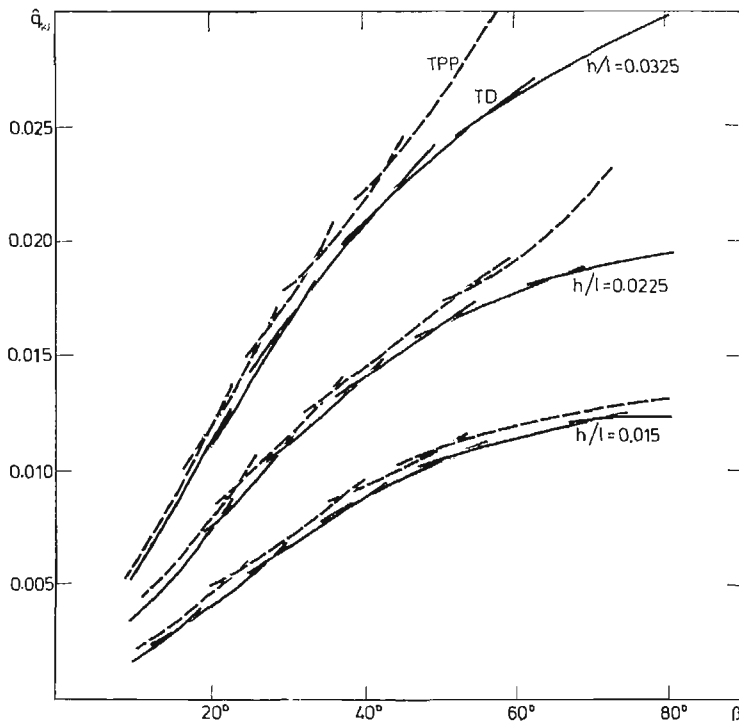
Rys. 4

obliczenia przy założeniu nieściśliwości. Kolejny wykres pokazuje rozbieżności jakie wynikają w obciążeniach krytycznych przy uwzględnieniu i bez uwzględnienia ściśliwości materiału. Przedstawione na rys. 2 krzywe obrazują zależność

$$(7.1) \quad \Delta = \frac{(\hat{q}_{kr})_{\nu=0.5} - (\hat{q}_{kr})_{\nu=0.33}}{(\hat{q}_{kr})_{\nu=0.5}} \cdot 100\%,$$

przy zmieniającej się grubości powłoki, dla obydwu teorii plastyczności. Stwierdzono, że rozbieżności są większe dla mniejszych grubości powłoki, czyli dla przypadków gdy proces uplastycznienia w chwili utraty stateczności jest jeszcze niewiele zaawansowany. W miarę rozwoju procesu uplastycznienia rozbieżności maleją; jednak teoria plastycznego płynięcia wykazuje wyższe wartości tych rozbieżności niż teoria deformacyjna. Wynika stąd wniosek, że nie uwzględnienie ściśliwości materiału, (co pozwala uzyskać prostsze związki) może być z technicznego punktu widzenia słuszne dla powłok tracących stateczność przy zaawansowanym procesie uplastycznienia.

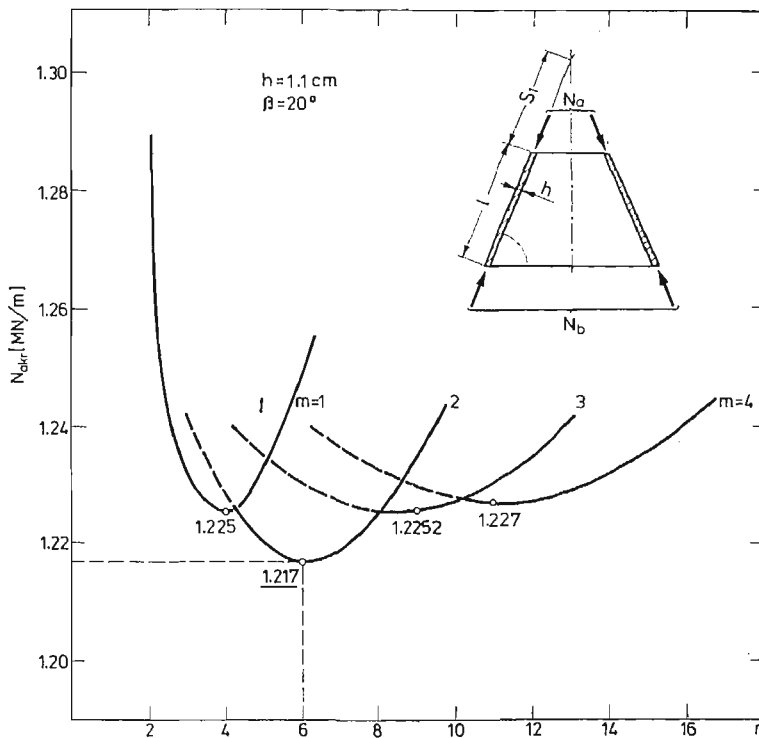
Na kolejnym rysunku pokazano jak zmieniają się obciążenia krytyczne ze zmianą kąta pochylenia tworzącej przy podstawic, przy zachowaniu stałego średniego promienia powłoki. Obliczenia wykonano dla teorii deformacyjnej z uwzględnieniem ściśliwości materiału. W obliczeniach wykorzystano opracowany algorytm iteracyjny i związek (4.3). Zauważyć można tutaj, że przy wzroście kąta β obciążenia krytyczne nieliniowo rosną, przy wzrastającej jednocześnie ilości fal wyboczenia. Wzrost ten staje się mniej gwałtowny



Rys. 5

dla kąta $\beta > 60^\circ$, gdy stożek zbliża się kształtem do walca. Wyniki przedstawione na tym wykresie odpowiadają stosunkowi grubości do długości powłoki $h/l = 0,015$. Przeprowadzono również obliczenia przy zmieniającym się kącie β dla większych stosunków h/l , tj. dla powłok o większej grubości, a wyniki przedstawiono na rys. 5. Istotnym celem tego wykresu jest pokazanie rozbieżności pomiędzy dwoma podstawowymi teoriami plastyczności. Jak widać różnice są niewielkie dla $h/l = 0,015$, natomiast dla większych grubości rozbieżności rosną, przy czym teoria plastycznego płynięcia daje zawsze wyższe wartości. W oparciu o obliczenia stwierdza się, że rozbieżności były stosunkowo niewielkie dla powłok tracących stateczność w stanie sprężysto-plastycznym. Gdy cała powłoka przeszła przed wybozczeniem w stan plastyczny, rozbieżności gwałtownie wzrastały.

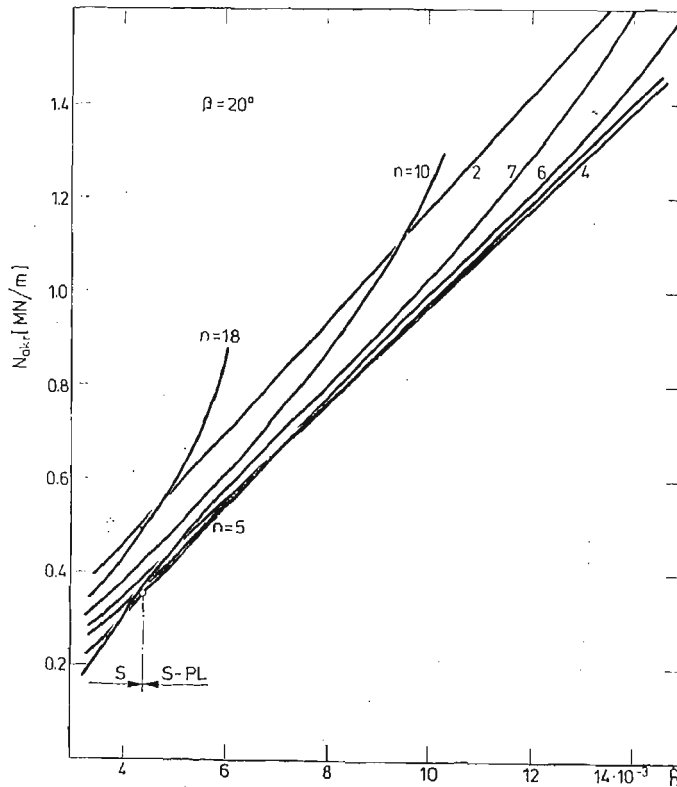
Kolejnym etapem analizy numerycznej były obliczenia obciążeń krytycznych powłoki ściskanej osiowo siłą rozłożoną równomiernie na obwodzie podstawy. Obliczeń dokonano dla obydwu teorii plastyczności, opierając się na zależnościach (6.3) do (6.6) i (7.1) i procedurach opisanych uprzednio. Powłoka ściskana siłą wzdłużną może po utracie stateczności pofalować się zarówno w kierunku wzdłużnym jak i po obwodzie, zależnie od parametrów fizycznych i geometrycznych. Stąd wynika konieczność minimalizacji zarówno względem parametru m jak i n . Na rys. 6 pokazano jak zmieniają się obciążenia krytyczne dla różnych ilości fal wybozczenia m i n . Dla tej grupy danych uzyskano obciążenie krytyczne równe $N_{a\text{kr}} = 1,217 \text{ MN/m}$ przy $m = 2$ i $n = 6$. Przeprowadzono również analizę



Rys. 6

wpływu zmiany grubości powłoki na obciążenia krytyczne, co przedstawia rys. 7. Wymiary dobrano w ten sposób, że dla dolnych wartości badanego zakresu powłoka traciła stateczność w stanie całkowicie sprężystym; wyniki dla obydwu teorii były zgodne, przy większych grubościach następowało wyboczenie w stanie sprężysto-plastycznym, rozbieżności pomiędzy TD i TPP były niewielkie. Jak widać z wykresu, podobnie jak w poprzednich przypadkach, wraz ze zmianą grubości powłoki krytyczna siła ściskająca wzrasta w przybliżeniu liniowo, przy malejącej liczbie fal obwodowych n . Zauważyć należy również, że niższe wartości obciążeń krytycznych uzyskiwano dla badanej grupy danych przy niesymetrycznej formie utraty stateczności.

Na zakończenie należy podkreślić, że odpowiedź na pytanie która z przyjętych teorii plastyczności da wyniki bliższe rzeczywistości powinien dać eksperyment. Pewną próbę



Rys. 7

wyjaśnienia uzyskiwanych rozbieżności dla problemów wyboczenia płyt i powłok przedstawił ostatnio R. N. DUBEX [1] doszukując się przyczyn w obrocie głównych osi naprężeń, a właśnie teoria przyrostowa pomija wpływ tych obrotów na płynięcie plastyczne. Pomimo że w pracy przyjęto liniową charakterystykę umocnienia materiału, wyniki i zaproponowana metoda mogą być z powodzeniem zastosowane dla innych charakterystyk, np. odcinkowo-łamanej lub potęgowej.

Literatura cytowana w tekście

1. R. N. DUBEY, *On Bifurcation in Elastic-Plastic Solids*, Nuclear Engineering and Design, **49**, 3, 217 - 222, 1978.
2. Э. И. Григолоук, *Теоретическое и экспериментальное исследование устойчивости тонких оболочек за пределом упругости*, Механика, Устойчивость и пластичность, И. Н., 1967.
3. H. RAMSEY, *Plastic Buckling of a Conical Shell under Axial Compression*, Int. J. of Mech. Sci., **19/5**, 1977.
4. J. ZIELNICA, *Stateczność powłoki stożkowej poza granicą sprężystości*, Rozprawy Inżynierskie, **20**, 3, 431 - 454, 1972.
5. J. ZIELNICA, W. OSMÓLSKI, *Wyznaczenie obciążenia krytycznego cienkiej powłoki stożkowej w oparciu o teorię plastycznego płynięcia*, Arch. Bud. Masz., **23**, 2, 283 - 299, 1976.
6. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN, W-wa, 1973.

Резюме

ВЫПУЧИВАНИЕ ТОНКОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ
ОСЕ-СИММЕТРИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

В работе представлено метод определения нагрузок тонкой конической оболочки при напряжениях превышающих предел упругости при следующих осе-симметрических нагрузках:

- равномерное боковые давление
- всестороннее равномерное боковые давление
- сжимающая продольная сила действующая вдоль образующей

Использованы физические соотношения обеих фундаментальных теорий пластичности, при возрастающей нагрузке. Принимается сжимаемость материала оболочки, при линейных характеристиках. Полученные уравнения решены ортогонализационным методом. Приведены некоторые численные примеры и их анализ.

Summary

BUCKLING OF A THIN-WALLED CONICAL SHELL FOR AXIALLY-SYMMETRIC LOADS
BEYOND THE ELASTIC LIMIT

The basic equations are derived, and critical load evaluation method for elastic-plastic thin-walled conical shell is presented. It is assumed that the shell is subjected to the following, external, axially symmetric loads: lateral uniform pressure, external uniform hydrostatic pressure, longitudinal compressive force, acting along the shell generatrix.

Taking into account, Shanley's concept, for each case the relations are given enabling to find critical loads according to the both basic plasticity theories (incremental and total strain). The material's compressibility and linear-type stress-strain characteristic are taken into account. The problem is solved by the orthogonalization method. Numerical results are given in diagrams.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 stycznia 1980 roku

STATECZNOŚĆ I STAN ZAKRYTYCZNY SWOBODNIE PODPARTEJ
TARCZY TRAPEZOWEJ PODDANEJ JEDNOKIERUNKOWEMU ŚCISKANIU

RYSZARD GRĄDZKI (ŁÓDŹ)

OZNACZENIA:

α — kąt nachylenia bocznych krawędzi trapezu do osi Ox

$2b$ — długość większej podstawy trapezu

$2a$ — wysokość trapezu

$\lambda = \frac{a}{b}$ — współczynnik kształtu tarczy

h — grubość tarczy ($h = \text{const}$)

f — parametr ugięcia tarczy

f_0 — parametr wygięcia wstępnego tarczy

$f^* = \frac{f}{h}, f_0^* = \frac{f_0}{h}$ — bezwymiarowe parametry ugięcia

P^* i P_{kr}^* — bezwymiarowe wartości siły P obciążającej tarczę i siły krytycznej P_{kr}

$n = \frac{P}{P_{kr}}$ — współczynnik obciążenia tarczy

k — współczynnik stateczności

E — moduł Younga

ν — liczba Poissona (w obliczeniach przyjęto $\nu = 0,3$)

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — płytowa sztywność zginania

$\sigma^* = \sigma \frac{4b^2}{Eh^2}$ — naprężenia bezwymiarowe

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — naprężenia stanu błonowego

$\sigma_{xg}, \sigma_{yg}, \tau_{xyg}$ — naprężenia stanu zgięciowego

σ_{zr}^* — bezwymiarowe naprężenia zredukowane:

$$\sigma_{zr}^* = \sqrt{\sigma_{xc}^{*2} + \sigma_{yc}^{*2} - \sigma_{xc}^* \sigma_{yc}^* + 3\tau_{xyg}^{*2}}$$

gdzie:

$$\sigma_{xc}^* = \sigma_x^* + \sigma_{xg}^*$$

$$\sigma_{yc}^* = \sigma_y^* + \sigma_{yg}^*$$

$$\tau_{xyg}^* = \tau_{xy}^* + \tau_{xyg}^*$$

1. Wstęp

Często spotykanym elementem nośnym blachownicowych lub skrzynkowych ustrojów dźwigarowych są cienkie tarcze, o kształcie trapezu. Tarcze te — jako wydzielone elementy nośne ustrojów dźwigarowych — pracują na ogół w złożonym stanie obciążenia. Przenoszą one głównie obciążenia działające w ich płaszczyźnie i z tego powodu mogą ulegać wyboczeniu. Podstawowym więc zagadnieniem przy analizie pracy takich tarcz jest zagadnienie utraty stateczności. W odniesieniu do tarcz trapezowych dotychczasowy stan wiedzy na temat stanów krytycznych tych tarcz jest stosunkowo skromny. Nieliczne prace z tego zakresu uznać można za pierwsze próby poznania zagadnienia. Ten stan rzeczy wynika — ogólnie rzecz biorąc — ze znacznie większych trudności jakie trzeba pokonać przy rozwiązywaniu płaskich zagadnień teorii sprężystości tarcz trapezowych — w stosunku do tych jakie wynikają przy rozpatrywaniu takich samych zagadnień dotyczących np. tarcz prostokątnych czy kołowych, tj. tarcz o geometrycznie prostszym kształcie.

W odniesieniu do zagadnień stateczności trudności te dodatkowo rosną z uwagi na dobór odpowiedniej funkcji ugięcia spełniającej warunki brzegowe zagadnienia, a jednocześnie możliwie dokładnie opisującej kształt ugiętej powierzchni środkowej tarczy trapezowej — po jej utracie stateczności. Złożoność — z uwagi na kształt tarczy trapezowej — postaci tej funkcji prowadzi w dalszych rozważaniach do znacznej komplikacji otrzymywanych wzorów i w konsekwencji do wzrostu trudności natury matematycznej.

Z tego względu znane do tej pory rozwiązania zagadnienia stateczności tarcz trapezowych oparte są na daleko idących założeniach upraszczających. Powoduje to, że przyjęte schematy obliczeniowe takich tarcz w małym stopniu odpowiadają warunkom podparcia oraz obciążenia spotykanych w zastosowaniach technicznych istniejących konstrukcji.

Zagadnieniem stateczności tarcz trapezowych zajmowali się: B. KLEIN [5], L. ROOTS [6], [7], L. PREGIER [8], [9], [10], A. POŁOZKOW i I. GORDIJENKO [11], [12], V. ILLE i G. BARSAN [13].

Zagadnienie — określone tytułem pracy — rozwiązano w oparciu o równania nieliniowej teorii cienkich płyt sprężystych [2].

2. Geometria i stan obciążenia tarczy

Przedmiotem rozważań jest cienka izotropowa tarcza w kształcie trapezu równoramiennego o stałej grubości h , swobodnie podparta wzdłuż obwodu. Tarczę tę opisano w prostokątnym układzie współrzędnych O, x, y, z . Oś Oz skierowano prostopadle do płaszczyzny O, x, y pokrywającej się z płaszczyzną środkową tarczy (rys. 2.1.). Początek tego układu przyjęto na osi symetrii trapezu, w połowie jego wysokości. Takie przyjęcie początku układu współrzędnych umożliwiło łatwiejsze przeprowadzenie odpowiedniej analizy porównawczej przy przejściu od tarczy trapezowej do tarczy prostokątnej. W przyjętym układzie współrzędnych równoległe oraz boczne krawędzie tarczy opisane są równaniami o postaci:

$$(2.1) \quad x = \pm a; \quad y = \pm g(x),$$

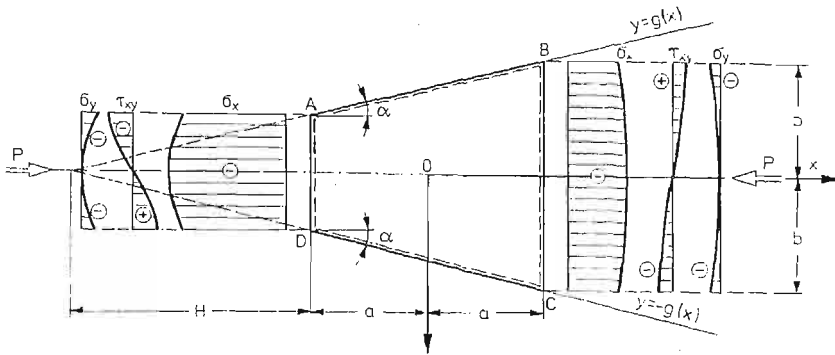
gdzie:

$$(2.2) \quad g(x) = m(x-a) + b.$$

zaś

$$(2.3) \quad m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{2a+H}.$$

Granicznymi postaciami tak opisanej tarczy jest: trójkąt — gdy $H = 0$, tj. gdy $m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{2a}$ oraz prostokąt — gdy $H = \infty$, tj. gdy $m = \operatorname{tg} \alpha = 0$.



Rys. 2.1.

Dla opisu stanu naprężenia tarczy w kształcie trapezu równoramiennego, wykorzystano — znane z teorii sprężystości [1], — rozwiązanie zagadnienia płaskiego klina, obciążonego w swym wierzchołku siłą skupioną. Wartości składowych σ_x , σ_y i τ_{xy} błonowego stanu obciążenia w dowolnym punkcie tarczy określone są wówczas za pomocą następujących wzorów.

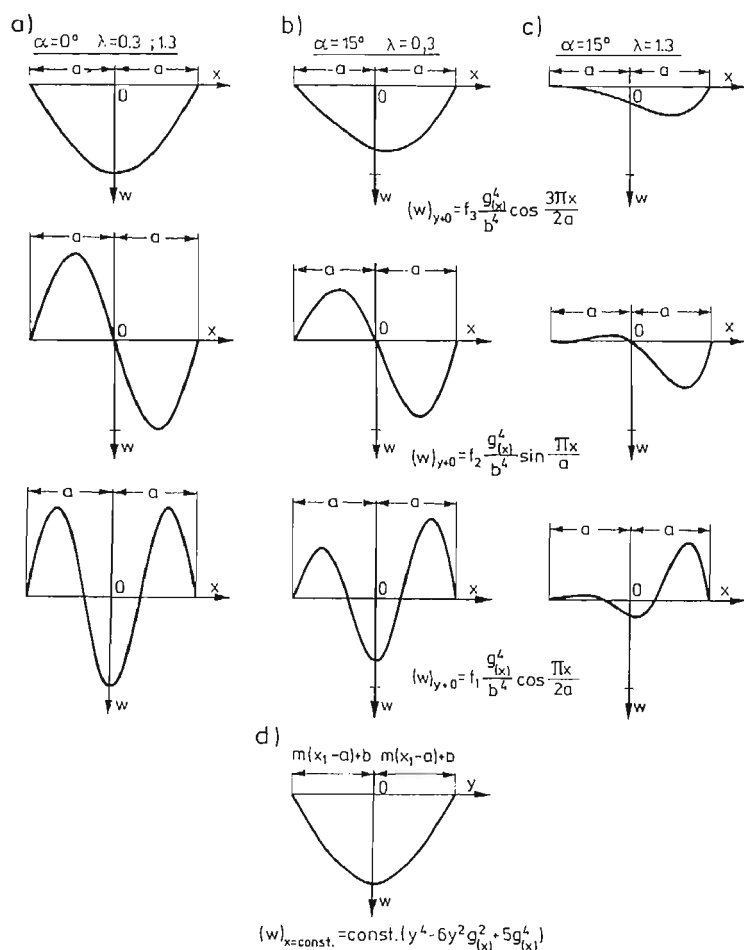
$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= - \frac{P}{\left[\frac{\operatorname{arctg} m}{m} + \frac{1}{1+m^2} \right] h} \cdot \frac{g^3(x)}{[g^2(x) + m^2 y^2]^2}, \\ \sigma_y &= - \frac{P}{\left[\frac{\operatorname{arctg} m}{m} + \frac{1}{1+m^2} \right] h} \cdot \frac{g(x) y^2 m^2}{[g^2(x) + m^2 y^2]^2}, \\ \tau_{xy} &= - \frac{P}{\left[\frac{\operatorname{arctg} m}{m} + \frac{1}{1+m^2} \right] h} \cdot \frac{g^2(x) y m}{[g^2(x) + m^2 y^2]^2}. \end{aligned}$$

Rozkład powyższych naprężeń na krawędziach $x = \pm a$ tarczy przedstawiono na rys. 2.1.

3. Stan krytyczny

Analizę stanu krytycznego przyjętej do rozważań tarczy przeprowadzono dwiema metodami, a mianowicie: metodą energetyczną oraz metodą ortogonalizacji. Uczyniono to w celu sprawdzenia efektywności wymienionych metod z punktu widzenia dokładności wyznaczania wartości obciążenia krytycznego dla tego typu tarcz. Z uwagi bowiem na kształt tarczy trapezowej istnieją trudności dobrania takiej postaci funkcji ugięcia, która opisywałaby — w możliwie dokładny sposób — rzeczywisty kształt ugiętej powierzchni środkowej tarczy po jej utracie stateczności, a jednocześnie spełniała geometryczne i statyczne warunki brzegowe. Porównawcze zestawienie wymienionych dwóch metod rozwiązania zagadnienia — przy przyjęciu w obydwu przypadkach takiej samej postaci funkcji ugięcia $w = w(x, y)$ — pozwoliło w końcowej fazie na wybór tych wyników, które w bardziej ścisły sposób opisują zjawisko utraty stateczności rozpatrywanej tarczy.

Funkcję ugięcia $w = w(x, y)$, opisującą — w sposób przybliżony — kształt ugiętej



Rys. 3.1.

powierzchni środkowej tarczy po utracie stateczności, przyjęto w następującej, trójparametrowej postaci:

$$(3.1) \quad w(x, y) = \left(f_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + f_2 \sin \frac{\pi x}{a} + f_3 \cos \frac{3\pi x}{2a} \right) [y^4 - 6y^2 g^2(x) + 5g^4(x)].$$

W celu zilustrowania wpływu parametrów kształtu tarczy na postać poszczególnych składników funkcji $w = w(x, y)$ przyjętej według wzoru (3.1.), na rys. 3.1. pokazano — w sposób poglądowy — wykresy zmian poszczególnych składników tej funkcji wzdłuż osi symetrii tarczy (wzdłuż osi Ox) dla różnych wartości kąta α pochylenia jej bocznych krawędzi.

Przedstawione tu krzywe odnoszą się do granicznego przypadku gdy $m = \operatorname{tg} \alpha = 0$ odpowiadającego tarczy prostokątnej (krzywe „a'”) oraz do tarczy trapezowej o kącie pochylenia bocznych ramion trapezu względem osi Ox równym $\alpha = 15^\circ$ — dla dwóch wartości stosunku $\frac{a}{b} = \lambda$, a mianowicie dla $\lambda = 0,3$ (krzywe „b'”) oraz $\lambda = 1,3$ (krzywe „c'”). Krzywa przedstawiona na rysunku „d'” odpowiada przekrojowi $x = \text{const}$ z wyłączeniem przekrojów $x = \pm a$.

3.1. Rozwiązanie zagadnienia metodą energetyczną. Przy rozpatrywaniu zagadnienia stateczności tarczy metodą energetyczną uwzględniono energię sprężystą zginania tarczy oraz energię sił zewnętrznych [2].

Energia sił zewnętrznych, działających w płaszczyźnie środkowej tarczy, określona jest wzorem:

$$(3.1.1) \quad T = -\frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy.$$

Odpowiednie wyrażenie określające energię zginania ma postać:

$$(3.1.2) \quad U = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy.$$

Krytyczne wartości sił P , obciążających tarczę wyznaczono z warunku [2]:

$$(3.1.3) \quad T = U$$

Krytyczną wartość tej siły określono wzorem:

$$(3.1.4) \quad P_{kr} = k \frac{\pi^2 D}{2b}.$$

W celu wyznaczenia krytycznej wartości siły ściskającej tarczę przyjęto — w pierwszym przybliżeniu — dwuparametrową funkcję ugięcia o postaci:

$$(3.1.5) \quad w(x, y) = \left(f_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + f_2 \sin \frac{\pi x}{a} \right) [y^4 - 6y^2 g^2(x) + 5g^4(x)].$$

Do rozwiązania zagadnienia zastosowano metodę Timoshenki — Ritza. Wyniki obliczeń pokazano na rys. 3.2.2.

3.2. Rozwiązanie zagadnienia metodą ortogonalizacji. Równanie równowagi dowolnego elementu tarczy mającej — przy uwzględnieniu odkształcenia jej powierzchni środkowej — postać:

$$(3.2.1) \quad D\nabla^2\nabla^2w = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

można zastąpić równoważnym układem dwóch równań [3]:

$$(3.2.2) \quad \nabla^2 M + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\nabla^2 w + \frac{M}{D} = 0,$$

gdzie:

$$(3.2.3) \quad M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu}.$$

Przy takim ujęciu zarówno funkcja $w = w(x, y)$ jak i funkcja $M = M(x, y)$ muszą spełniać odpowiednio geometryczne i statyczne warunki brzegowe.

Dla tarczy przegubowo podpartej wzdłuż obwodu muszą być zatem spełnione warunki:

$$(3.2.4) \quad w = 0 \quad \text{i} \quad M = 0.$$

Dla wyznaczenia przybliżonej wartości siły krytycznej założono funkcje $w = w(x, y)$ i $M = M(x, y)$ w następujących postaciach:

$$(3.2.5) \quad w(x, y) = \left(f_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + f_2 \sin \frac{\pi x}{a} + f_3 \cos \frac{3\pi x}{2a} \right) [y^4 - 6y^2 g^2(x) + 5g^4(x)],$$

$$(3.2.6) \quad M(x, y) = \left(m_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + m_2 \sin \frac{\pi x}{a} + m_3 \cos \frac{3\pi x}{2a} \right) [y^4 - 6y^2 g^2(x) + 5g^4(x)].$$

gdzie: m_1, m_2 i m_3 — podobnie jak f_1, f_2 i f_3 — są nieznanymi swobodnymi parametrami.

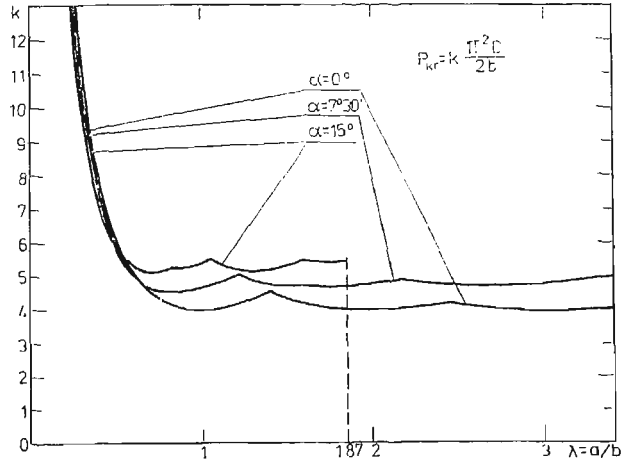
Wyżej określone funkcje $w = w(x, y)$ oraz $M = M(x, y)$ spełniają odpowiednio warunki brzegowe (3.2.4). Podobnie jak poprzednio siłę krytyczną i w tym przypadku określono wyrażeniem (3.1.4). Ponieważ funkcje $w = w(x, y)$ oraz $M = M(x, y)$ nie spełniają ściśle układu równań (3.2.2), w celu wyznaczenia wartości współczynnika stateczności k obciążenia krytycznego tarczy zastosowano metodę ortogonalizacji. Otrzymuje się wówczas następujący układ równań:

$$(3.2.7) \quad \int_{-a}^{+a} \int_{-g(x)}^{+g(x)} \left[\nabla^2 M + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \delta w dx dy = 0,$$

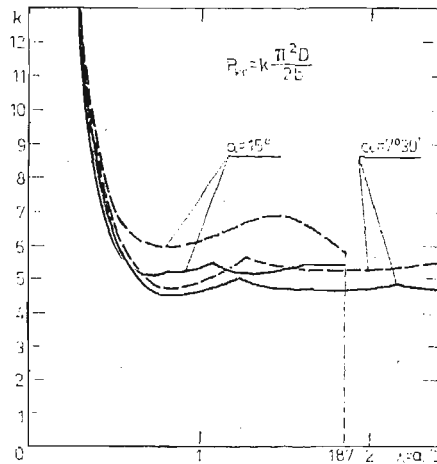
$$\int_{-a}^{+a} \int_{-g(x)}^{+g(x)} \left[\nabla^2 w + \frac{M}{D} \right] \delta M dx dy = 0.$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymano układ sześciu jednorodnych równań liniowych zawierających nieznanne swobodne parametry f_1, f_2 i f_3 oraz m_1, m_2 i m_3 . Układ tych równań daje rozwiązania różne od zera tylko wówczas, gdy wyznacznik tego układu jest równy zeru. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 3.2.1.

Na rys. 3.2.2. przedstawiono krzywe $k = k(\lambda)$ otrzymane metodą energetyczną i metodą ortogonalizacji dla kątów $\alpha = 7^\circ 30'$ i $\alpha = 15^\circ$ przy założeniu tej samej dwuparametrowej funkcji ugięcia (3.1.5). Linie ciągłe odpowiadają rozwiązaniu zagadnienia metodą ortogonalizacji, natomiast linie przerywane rozwiązanie metodą energetyczną. Z wy-



Rys. 3.2.1.



Rys. 3.2.2.

kresów tych wynika, że poprawniejsze wyniki otrzymuje się w przypadku rozwiązania zagadnienia metodą ortogonalizacji, ponieważ z tej metody otrzymano mniejsze wartości współczynników stateczności k dla takich samych wartości współczynnika λ . Zastosowaną tu metodę ortogonalizacji należy zatem uznać za właściwą przy rozwiązywaniu postawionego zagadnienia.

4. Stan zakrytyczny

Analizę stanu zakrytycznego rozpatrywanej tarczy trapezowej przeprowadzono przy założeniu, że powierzchnia środkowa tarczy nie jest idealnie płaska, lecz ma wstępne wygięcie, opisane funkcją $w_0 = w_0(x, y)$. Rozwiązanie tego zagadnienia przeprowadzono w oparciu o równania różniczkowe Kármána nieliniowej teorii cienkich płyt. Postępując podobnie jak przy analizie stanu krytycznego, układ dwóch równań Kármána zastąpiono równoważnym układem trzech równań o postaci:

$$(4.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi = E \left\{ \left[\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x \partial y} \right]^2 - \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2} - \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \right\},$$

$$(4.2) \quad \nabla^2 M + h \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x \partial y} \right] = 0,$$

$$(4.3) \quad \nabla^2 w + \frac{M}{D} = 0,$$

gdzie:

$$(4.4) \quad M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu}.$$

Przy analizie stanu zakrytycznego tarczy funkcję ugięcia $w = w(x, y)$ przyjęto w następującej postaci:

$$(4.5) \quad w(x, y) = f \frac{1}{5b^4} \cos \frac{\pi x}{2a} [y^4 - 6y^2 g^2(x) + 5g^4(x)].$$

Założono, że wygięta wstępnie powierzchnia środkowa tarczy ma taki sam kształt jaki przyjmuje tarcza — idealnie płaska w stanie początkowym — po utracie stateczności, spowodowanej przyłożonym obciążeniem. Taki kształt wstępnego wygięcia tarczy jest najbardziej niekorzystny z punktu widzenia pracy tarczy w zakresie zakrytycznym. Tak więc, funkcja opisująca wstępne wygięcie tarczy ma postać:

$$(4.6) \quad w_0(x, y) = f_0 \frac{1}{5b^4} \cos \frac{\pi x}{2a} [y^4 - 6y^2 g^2(x) + 5g^4(x)].$$

Funkcję $M = M(x, y)$ — podobnie jak przy rozpatrywaniu stanu krytycznego — założono jako funkcję z jednym swobodnym parametrem a mianowicie:

$$(4.7) \quad M(x, y) = m_1 \cos \frac{\pi x}{2a} [y^4 - 6y^2 g^2(x) + 5g^4(x)].$$

Funkcja naprężeń $\Phi = \Phi(x, y)$ przyjęta do dalszych rozważań ma postać:

$$(4.8) \quad \Phi(x, y) = \Phi_0 + \Phi_s = \frac{P}{\left(\frac{\operatorname{arctg} m}{m} - \frac{1}{1+m^2} \right) h} \cdot \frac{y}{2} \operatorname{arctg} \frac{my}{g(x)} + \\ + \varphi_1 \cos \frac{\pi x}{a} + \varphi_2 \left[y^8 - \frac{15}{2} y^6 g^2(x) + \frac{381}{16} y^4 g^4(x) - \frac{233}{8} y^2 g^6(x) + \frac{189}{32} g^8(x) \right].$$

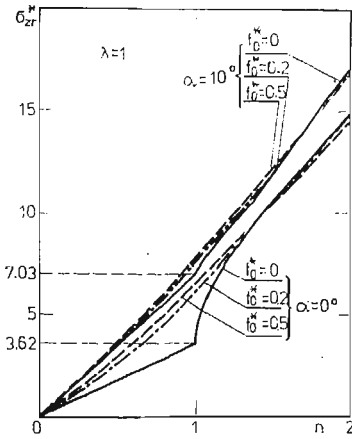
Nieznane wartości współczynników φ_1 i φ_2 funkcji naprężeń określono w zależności od współczynników f i f_0 — stosując metodę ortogonalizacji. Wówczas otrzymano warunki:

$$(4.9) \quad \int_{-a}^{+a} \int_{-g(x)}^{+g(x)} \left\{ \nabla^2 \nabla^2 \Phi - E \left[\left(\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2} - \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \right] \right\} \delta \Phi_s dx dy = 0.$$

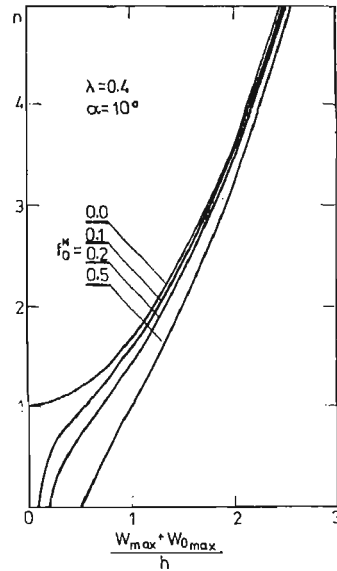
W celu rozwiązania układu równań (4.2.) i (4.3.) zastosowano metodę ortogonalizacji, otrzymując następujące warunki:

$$(4.10) \quad \int_{-a}^{+a} \int_{-g(x)}^{+g(x)} \left\{ \nabla^2 M + h \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x \partial y} \right] \right\} \delta w dx dy = 0.$$

$$\int_{-a}^{+a} \int_{-g(x)}^{+g(x)} \left[\nabla^2 w + \frac{M}{D} \right] \delta M dx dy = 0.$$



Rys. 4.1.

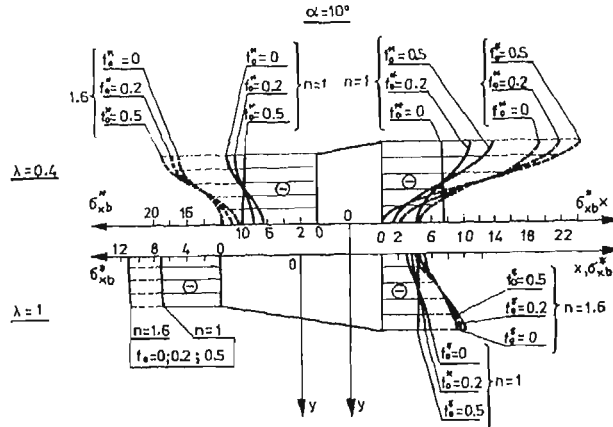


Rys. 4.2.

Po wykonaniu obliczeń i wyrugowaniu parametru m_1 , otrzymano związek pomiędzy obciążeniem tarczy, jej parametrami geometrycznymi oraz współczynnikami ugięcia. Związek ten ma postać:

$$(4.11) \quad f^{*3}(A) + f^{*2} f_0^* 3(A) + f^* [P_{kr}^* - n P_{kr}^* + 2(A) f_0^{*2}] - f_0^* n P_{kr}^* = 0.$$

Wyniki obliczeń, które przeprowadzono w celu określenia składowych błonowego i zgięciowego stanu naprężeń, naprężeń zredukowanych oraz ugięć tarczy przedstawiono przykładowo na rys. 4.1. - 4.3.



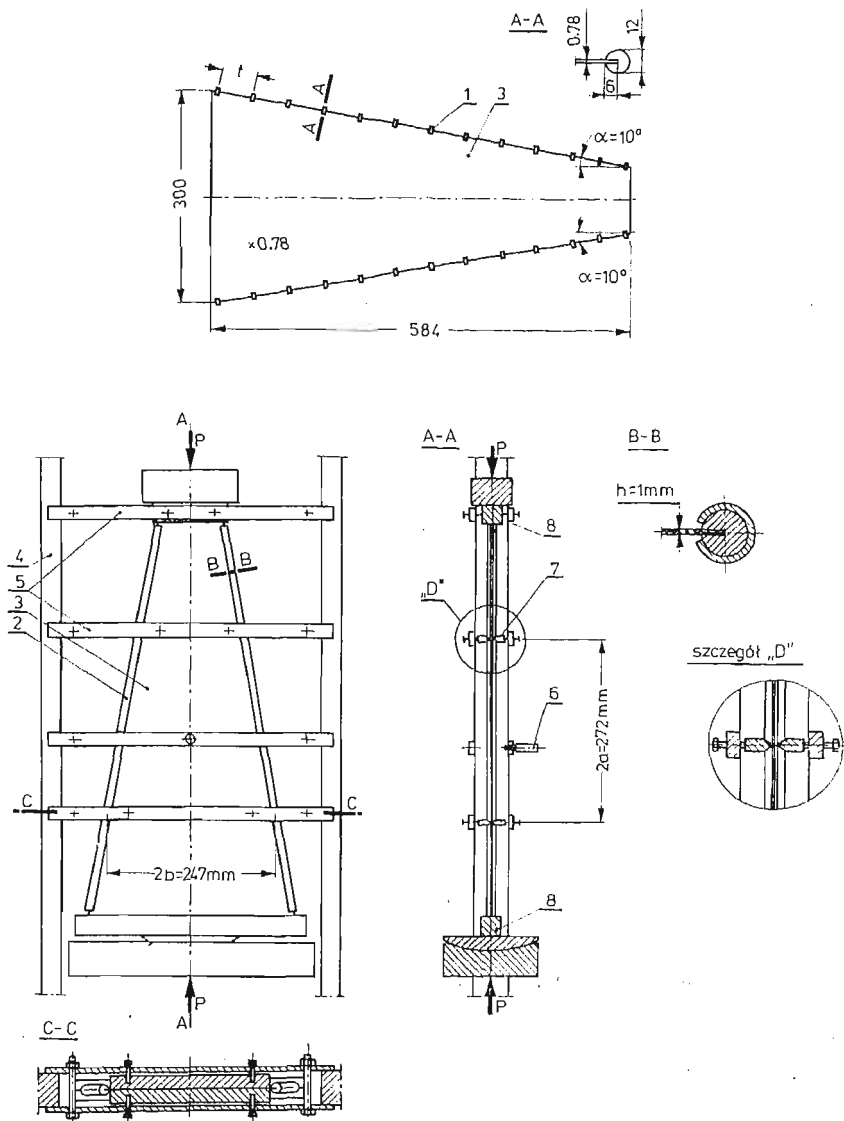
Rys. 4.3.

5. Badania doświadczalne

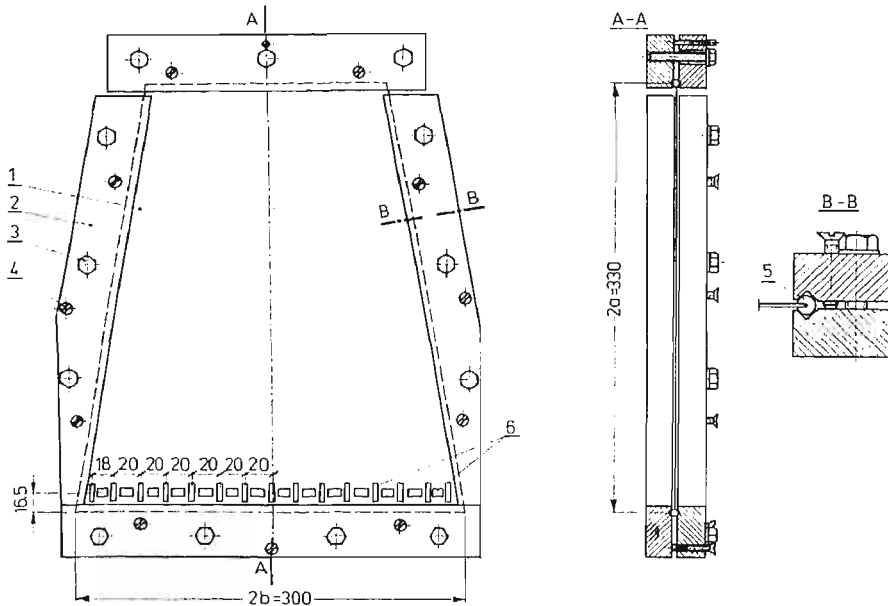
W celu sprawdzenia poprawności otrzymanych wzorów teoretycznych oraz ich przydatności do obliczeń praktycznych, przeprowadzono odpowiednie weryfikacyjne badania doświadczalne. Badania te zostały przeprowadzone na dwóch różnych modelach tarczy trapezowej, wykonanych z cienkiej blachy stalowej. Wymiary modeli zostały tak dobrane, aby mieściły się one w zakresie tarcz objętych analizą teoretyczną. Największą trudność stanowiło natomiast spełnienie założonych warunków obciążenia tarczy oraz swobodnego podparcia jej krawędzi. W celu jak najlepszego zbliżenia warunków badań do warunków przyjętych w założeniach teoretycznych, badania te przeprowadzono na dwóch modelach tarcz. Modele te różniły się między sobą w istotny sposób. Model pierwszy był wycinkiem trapezowego pasma płytowego, drugi zaś samodzielną tarczą trapezową, podpartą przegubowo wzdłuż obwodu.

Schemat pierwszego stanowiska przedstawiono na rys. 5.1. natomiast schemat drugiego stanowiska na rys. 5.2. Badania przeprowadzono metodą SOUTHWELLA [2] i TERESZKOWSKIEGO [14]. Wartości sił krytycznych otrzymane z doświadczeń były o kilka procent mniejsze od wartości sił krytycznych otrzymanych z rozwiązania teoretycznego.

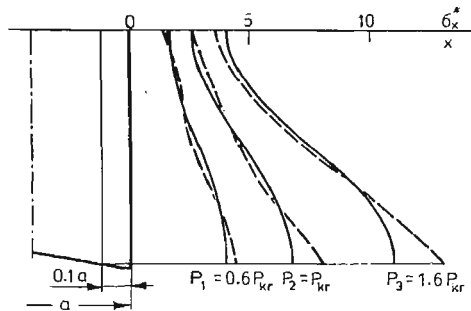
Rozkłady błonowych naprężeń normalnych w pobliżu dłuższej podstawy trapezu zweryfikowano badaniami tensometrycznymi (rys. 5.3.) — linie przerywane. Linie ciągłe przedstawiają rozkłady tych naprężeń otrzymane na drodze teoretycznej.



Rys. 5.1.



Rys. 5.2.



Rys. 5.3.

6. Wniosk

1. Jak wynika z przeprowadzonej analizy porównawczej, zastosowana w obliczeniach metoda ortogonalizacyjna — do zmodyfikowanego układu równań, otrzymanego przez wprowadzenie dodatkowo funkcji $M = M(x, y)$ — okazała się, przy badaniach stateczności i stanu zakrytycznego tarczy trapezowej, skuteczniejszą od powszechnie stosowanej metody energetycznej.

2. Przyjęte w obliczeniach numerycznych zakresy zmienności kątów α pochylenia ramion trapezu oraz współczynnika λ kształtu tarczy — odpowiadają większości parametrów tarcz, stosowanych w praktycznych rozwiązaniach konstrukcyjnych dźwigarów cienkościennych. Przeprowadzone na dwóch modelach weryfikacyjne badania doświadczalne potwierdziły prawidłowość otrzymanych, na drodze teoretycznej związków i z tego względu otrzymane wzory mogą być wykorzystane w obliczeniach inżynierskich przy projektowaniu tego typu konstrukcji.

Literatura cytowana w tekście

1. S. P. TIMOSHENKO i J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady 1962.
2. S. P. TIMOSHENKO i J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady 1963.
3. S. P. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady 1962.
4. A. S. VOLMIR, *Gibkie plastinki i oboločki*, Moskwa 1956.
5. B. KLEIN, *Buckling of Simply Supported Plates Tapered in Planform*, Journal of Applied Mechanics, June. 1956 s. 207.
6. L. ROOTS, E. SAKS, *Ob ustoičivosti trapecijevidnych plastin*, Tartu Riikliku ulikooli toimetised. Učebnyje zapiski Tartuskogo Instytuta 1971. Vypusk 281.
7. L. ROOTS, *Ob ustoičivosti plastinok različnoj formy w častnosti trjeugolnych i trapecijevidnych*, Tartru Riikliku ulikooli toimetised. Učebnyje zapiski Tartuskogo Instytuta 1961. Vypusk 102.
8. L. M. PREGIER, *O vyborje approksimirujuščich funkceji dla rasčeta trapecijevidnych plastin*, Sbornik Naucnych Trudov Tomskogo Inženierno-Stroitel'nogo Instituta Tom X 1962.
9. L. M. PREGIER, *K voprosu izgiba trapecijevidnych i trjeugolnych plastin pri djeistvii popjerječnoj nagruzki i sil w srjedinoj plaskosti*, Sbornik Naučnych Trudov Tomskogo Inženierno-Stroitel'nogo Instituta Tom X 1962.
10. L. M. PREGIER, *Zakritičeskaja deformacija trapecijevidnych i trjeugolnych plastin*, Tr. Tomskij Inženierno-Stroitel'nyj Institut Nr 11, 1964.
11. A. A. POLOZKOV, J. A. GORDIENKO, *Issledovanie ustoičivosti ravnobočnoj trapecijevidnoj plastinki podkrepļennoj rebrom žestkosti*, Voprosy nadieżnosti i dolgoviečnosti sjełchozmasin, Rostov — na — Donu, 1968.
12. A. A. POLOZKOV, J. A. GORDIENKO, *Ustoičivost trapecijevidnych plastin, podkrepļennych prodolnymi rebrami žestkosti*, Izvestia Vyssich Ucebnych Zaviedjenii. Masinostrojenie Nr 8 1966.
13. V. ILLE, G. BARSAN, *Über die Stabilität der allseitig frei drehbar gelagerten Trapezplatte*, An. Univ. Bucuresti. Mat-Mec. 1969 18, Nr 2.
14. Z. TERESZKOWSKI, *Doświadczalna metoda wyznaczenia obciążenia krytycznych w płytach*, Archiwum Budowy Maszyn, 17 z. 3. 1970.

Р е з ю м е

УСТОЙЧИВОСТЬ И ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ
ТРАПЕЦЕВИДНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ СЖАТИИ

Получено приближенное решение проблемы на основе дифференциальных уравнений нелинейной теории тонких пластинок с начальным прогибом. Решение этих уравнений осуществляется при помощи метода Бубнова-Галеркина. Результаты численных примеров представлены в виде графиков. Теоретические результаты проверено экспериментально.

S u m m a r y

BUCKLING AND POST-BUCKLING BEHAVIOUR OF TRAPEZOIDAL WEBPLATES UNDER
COMPRESSION

The approximate solution of the title problem derived on the basis of nonlinear differential equations of thin plates with initial deflection. Solution of these equations is based on the Bubnov-Galerkin method. The results of numerical calculations are presented in diagrams form. Theoretical results are verified by experiments.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

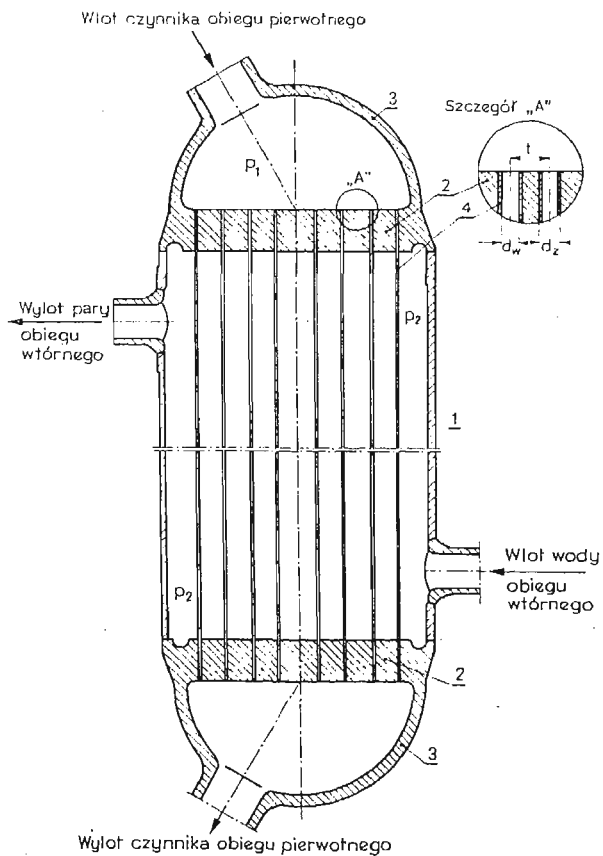
Praca została złożona w Redakcji dnia 4 marca 1980 roku.

ANALIZA WYTRZYMAŁOŚCIOWA PIONOWEJ PRZEPLYWOWEJ
WYTWORNICY PARY ELEKTROWNI JĄDROWYCH

MICHAŁ NIEZGODZIŃSKI, WAĆLAW ZWOLIŃSKI (ŁÓDŹ)

1. Wprowadzenie

Z pośród szeregu systemów i rozwiązań konstrukcyjnych wytwornic pary elektrowni jądrowych (wytwornice poziome, U-rurowe itp.) — szereg zalet wykazują przepływowe wytwornice pionowe o budowie podanej schematycznie na rys. 1. Wytwornica taka składa się z płaszcza cylindrycznego (1), do którego przyspawane są dna sitowe (2) z dennicami (3). Przestrzeń między dnami sitowymi wypełniają proste rurki (4), których końce są



Rys. 1. Schemat przepływowej wytwornicy pary 1 — płaszcz cylindryczny, 2 — dno sitowe, 3 — dennica półkulista, 4 — rurki wkładu grzewczego

rozwalcowane w dnach sitowych (lub w inny sposób np. wybuchowo — połączone z dnami).

Jeżeli rurki — na swej długości — usztywnione zostaną przeponami, to wówczas mogą przenosić nie tylko siły rozciągające, lecz również ściskające — a więc mogą być traktowane jak sprężyste podłoże na którym spoczywają dna sitowe. Przy tym rozwiązaniu dna sitowe mogą być traktowane jako kołowe płyty perforowane spoczywające na sprężystym podłożu. Analiza takiego zagadnienia przeprowadzona została przez autorów w pracach [1], [2] a ostatnio również analogiczne rozwiązanie ukazało się w opracowaniu [3].

Dotychczasowe opracowania oparte były na teorii płyt cienkich i z powodzeniem mogły być wykorzystane do analizy urządzeń niskociśnieniowych (wytwornice pary elektrowni konwencjonalnych, reaktory chemiczne itp.).

W odniesieniu do elektrowni jądrowych, gdzie ciśnienie obiegu pierwotnego wynosi przykładowo 20 MPa, przy ekonomicznie uzasadnionej średnicy wytwornicy pary rzędu $2 \div 4$ m (i wysokości rzędu 20 m) — grubość den sitowych wypada rzędu 0,6 m, a więc dna takie powinny być liczone według teorii płyt grubych.

Dla płyt takich — liczonych wg teorii płyt cienkich, a więc z pominięciem wpływu naprężeń od sił tnących na odkształcenia postaciowe elementów płyty — otrzymuje się ugięcia znacznie mniejsze od ugięć rzeczywistych, otrzymywanych po zastosowaniu teorii płyt grubych, co w zdecydowany sposób wpływa na ustalenie sił osiowych (ściskających lub rozciągających) działających na rurki wkładu grzewczego.

Opierając się na wynikach analiz teoretycznych i badań doświadczalnych [4] cienkie dna sitowe można było traktować jako perforowane płyty koliste, w których wpływ perforacji uwzględniany był przez zmianę stałych materiałowych. Jeżeli w płycie okrągłej o grubości g , wykonanej z materiału o modułach sprężystości E oraz G i liczbie Poissona ν wykonano gęstą sieć otworów, to obliczenia takiej płyty perforowanej można prowadzić jak dla płyty izotropowej pełnej wykonanej z materiału o takiej samej grubości lecz innych zastępczych stałych materiałowych E^* , G^* oraz ν^* .

Powyższy warunek izotropowości materiału płyty perforowanej, stosowany w odniesieniu do płyt cienkich, nie może być przyjęty w odniesieniu do płyt grubych. O ile bowiem w płaszczyźnie płyty gęsta sieć otworów może dawać w efekcie jednakowe w każdym kierunku stałe parametry odkształceń, to w kierunku poprzecznym stałe materiałowe muszą być inne, gdyż występują tu lite kolumny materiału rodzimego. Tak więc w odniesieniu do grubych płyt perforowanych stałe materiałowe powinny być inne w płaszczyźnie płyty, a inne w kierunku prostopadłym tj. wzdłuż grubości płyty. Wartości liczbowe stałych materiałowych E^* , G^* , ν^* w płaszczyźnie płyty oraz E^z , G^z , ν^z w kierunku prostopadłym do płaszczyzny płyty określić można na podstawie wykresu podanego na rysunku 2 (według [5]), w zależności od współczynnika perforacji η , który dla heksagonalnej siatki otworów wyraża się wzorem:

$$(1.1) \quad \eta = \frac{h + \kappa \cdot g_r}{t},$$

gdzie:

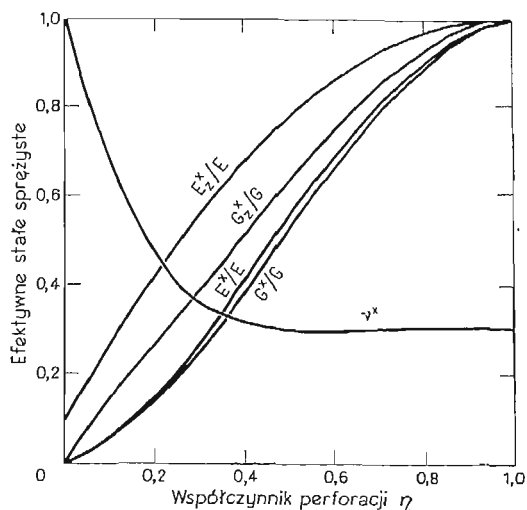
h — szerokość mostka w najwęższym przekroju

g_r — grubość ścianki rurki

t — podziałka perforacji (w układzie heksagonalnym)

$\kappa = 1,5 \div 2,0$ — współczynnik zależny od połączenia rurki z dnem sitowym (dla rurek rozwalcowywanych $\kappa = 1,5$, dla dokładnego połączenia np. metodą wybuchową $\kappa = 2,0$).

Biorąc pod uwagę przytoczone względy, analizę naprężeń w pionowej przepływowej wytwornicy pary elektrowni jądrowych przeprowadzono przy założeniu, że dna sitowe



Rys. 2. Zależność między stałymi materiałowymi dla grubych kolistych płyt perforowanych ($\nu = 0,3$)

traktowane są jako grube, perforowane, ortotropowe płyty kolisty spoczywające na sprężystym podłożu utworzonym z rurek wkładu grzewczego. Płyty te współpracują z płaszczem cylindrycznym oraz z przyspawanymi do nich półkulistymi dennicami.

2. Założenia do obliczeń

Na podstawie analizy warunków pracy wytwornicy przyjęto założenie że temperatury wszystkich rurek wkładu grzewczego są w każdym przekroju poprzecznym (poziomym) wytwornicy jednakowe (i zmieniają się wzdłuż długości rurek). Dzięki usztywniającemu działaniu przepon umożliwiającym przenoszenie przez rurki sił ściskających przyjęto, że rurki tworzą sprężyste podłoże typu winklerowskiego o stałej:

$$(2.1) \quad k = \psi_k \frac{n(d_z^2 - d_w^2)E_r}{4a^2 l_r}.$$

Oznaczenia w powyższym wzorze:

- l_r — połowa długości rurek (połowa prześwitu między dnami sitowymi)
- d_z, d_w — zewnętrzna i wewnętrzna średnica rurek (wszystkie rurki wkładu grzewczego są jednakowe)
- E_r — moduł Younga materiału rurek
- ψ_k — współczynnik uwzględniający niedokładność wykonania i odchyłki od prostoliniowości rurek

n — liczba rurek wkładu grzewczego
 a — zewnętrzny obliczeniowy promień części perforowanej dna sitowego. Promień ten (wg [6] s. 431) oblicza się ze wzoru

$$a = r_o + \frac{d_z}{4}$$

gdzie: r_o — odległość osi najdalejzego otworu od środka płyty.

Przeprowadzane badania doświadczalne [7] wykazały, że własności rzeczywistych rurek, przy ich osiowym ściskaniu wyraźnie różnią się od własności teoretycznych, wynikających z prawa Hooke'a jak również ze wzorów Eulera określających siłę krytyczną (wyboczeniową). Tak więc dla rurek inconelowych ϕ 16/14 mm przy smukłości około 100 współczynnik ten wynosi $\psi_k = 0,7$ do $0,4$ ¹⁾.

W odróżnieniu od den pełnych, dla których promieniowe odkształcenie dna od sił tarczowych traktuje się zazwyczaj jako pomijalne, w przypadku den perforowanych konieczne jest uwzględnienie również i tych odkształceń.

Mając na uwadze omówione wyżej względy, schemat obliczeniowy wytwornicy przyjęto w następujący sposób. W połowie wysokości wytwornicy poprowadzono umowną płaszczyznę symetrii (oznaczoną I-I na rys. 1) i obliczenia wykonano osobno dla górnej, a następnie — przy zastosowaniu takich samych wzorów — dla dolnej połówki. Założenie to związane jest z faktem, że dla uproszczenia wzorów — w niniejszym, opracowaniu pominięto wpływ ciężaru własnego, oddziaływania podpór i rurociągów, obciążeń sejsmicznych, niustalonych stanów pracy itp. gdyż powyższe czynniki można osobno obliczyć i uwzględnić stosując zasadę superpozycji. Tak więc każda połówka wytwornicy składa się z grubej, ortotropowej płyty kolistej spoczywającej na sprężystym podłożu utworzonym z rurek wkładu grzewczego, współpracującej z pierścieniem, do którego przyspawany jest płaszcz cylindryczny oraz półkulista dennica. Przyjęto, że pierścień ten może zmieniać swą średnicę lecz jest na tyle sztywny, że jego przekroje poprzeczne nie doznają odkształceń postaciowych (mogą się przemieszczać i obracać zachowując swój pierwotny kształt).

3. Podstawowe wzory i zależności wytrzymałościowe

Układ sił działających na każdy z głównych elementów wytwornicy przedstawiono na rys. 3, gdzie podano również wymiary i oznaczenia występujące w dalszej części opracowania. Wszystkie siły brzegowe odniesione są do jednostki długości mierzonej po obwodzie określonym danym promieniem.

Na skutek działania ciśnienia p_1 obiegu pierwotnego i ciśnienia p_2 obiegu wtórnego, obliczeniowe ciśnienie działające na część perforowaną dna sitowego od strony górnej (wg rys. 3) wynosi:

$$(3.1) \quad p_{10} = p_1 \left[1 - n \left(\frac{d_w}{2a} \right)^2 \right],$$

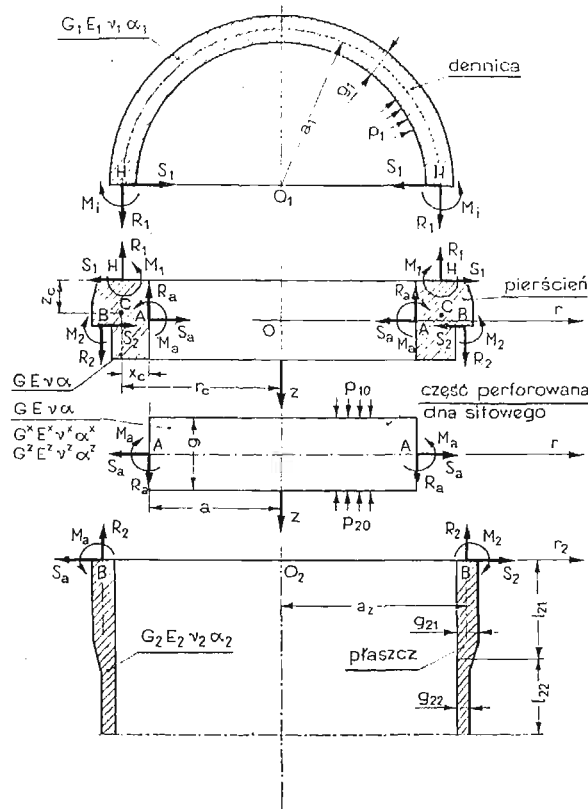
¹⁾ Badania przeprowadzone przez K. Januskiewicza i J. Grabskiego [7].

zaś od strony dolnej:

$$(3.2) \quad p_{20} = p_2 \left[1 - n \left(\frac{d_z}{2a} \right)^2 \right].$$

Różnice swobodnych wydłużeń płaszcza i rurek wkładu grzewczego powodują powstanie sił brzegowych które wyznaczyć można z warunków ciągłości układu dla $r = a$. Swobodne wydłużenie rurek spowodowane przyrostem temperatury wyraża się związkiem:

$$(3.3) \quad \Delta l_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \alpha_{ri} \cdot l_{ri} \cdot \Delta t_{ri},$$



Rys. 3. Obciążenia głównych elementów wytwornicy pary.

podobnie swobodne wydłużenie termiczne płaszcza

$$(3.4) \quad l_p = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_{pl} \cdot l_{pl} \cdot \Delta t_{pl}.$$

Ponadto działanie ciśnienia wewnętrznego p_{10} i zewnętrznego p_{20} na rurki powoduje ich wydłużenie o wielkość:

$$(3.5) \quad \Delta l_{rp} = \frac{\nu_r \cdot l_r (p_1 - p_2) \cdot (d_z + d_w)}{2(d_z - d_w) E_r}.$$

W powyższych wzorach $\alpha_{r,i}$ oraz $\alpha_{p,i}$ oznacza współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej, l — długość strefy o danej średniej temperaturze zaś t — różnica temperatury pracy i montażu danej strefy, odpowiednio dla rurek (indeks r) lub płaszcza (indeks p), przy czym liczba „ i ” stref rurek wynosi k , zaś płaszcza — m . Po wprowadzeniu omówionych wyżej oznaczeń przemieszczenia punktu A (położonego na zewnętrznej krawędzi powierzchni środkowej części perforowanej dna sitowego, rys. 3), zgodnie ze wzorem (6.5) podanym w pracy [8] dla tego przypadku wynosi:

$$(3.6) \quad w_a = \frac{p_{10} + p_{20}}{k} + \Delta l_r - \Delta l_p + \Delta l_{rp} + C_1 \text{Ber}(\beta a e^{i\alpha}) + C_2 \cdot \text{Bei}(\beta a e^{i\alpha}),$$

w kierunku zaś promieniowym (wzór (6.6) w pracy [8]).

$$(3.7) \quad u_a = -\eta \{ C_1 [\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \\ + C_2 [-\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha] + \beta a A_1 \} + \alpha \alpha_i \Delta t$$

kąt obrotu:

$$(3.8) \quad \Theta_a = -\frac{3k}{2\beta g G^z} \left\{ C_1 \left[\left(\cos 2\alpha + \frac{2\beta g G^z}{3k} \right) \text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha \right] + \right. \\ \left. + C_2 \left[\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \left(\cos 2\alpha + \frac{2\beta g G^z}{3k} \right) \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \right] \right\}$$

Oznaczenia w powyższych wzorach omówione są w pracy [8], tam też podane są zależności pozwalające wyznaczyć stałe C_1 , C_2 oraz A_1 w funkcji sił brzegowych M_a , S_a , R_a działających na część perforowaną dna sitowego.

Z warunku równowagi dennicy (górnej wg rys. 3) znajdujemy:

$$(3.9) \quad R_1 = p_1 \frac{\left(a_1 - \frac{1}{2} g_1 \right)^2}{2a_1},$$

promieniowe przemieszczenie brzegu dennicy (punkt H na rys. 3):

$$(3.10) \quad W_H = \frac{2\beta_1}{E g_1} (\beta_1 M_1 - a_1 S_1) + a_1 \alpha_1 t_1,$$

gdzie:

$$\beta_1 = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)a_1^2}{g_1^2}}; \quad D_1 = \frac{E g_1^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\Theta_H = \frac{2\beta_1^2}{E g_1 a_1} (2\beta_1 \cdot M_1 - S_1)$$

Analogicznie dla krawędzi płaszcza (pkt B wg rys. 3, przy założeniu że najbliższy pierścienia odcinek powłoki walcowej można traktować, jako powłokę długą, $\beta_{21} \cdot l_{21} > > 3$).

$$(3.11) \quad w_B = \frac{1}{2\beta_{21}^3 \cdot D_{21}} (S_2 + \beta_{21} \cdot M_2) + \frac{a_2}{E g_{21}} (p_2 \cdot a_2 - \nu \cdot R_2) + a_2 \cdot \alpha_2 \cdot \Delta t_{21},$$

$$(3.12) \quad \Theta_B = -\frac{l}{2\beta_{21}^2 \cdot D_{21}} (S_2 + 2\beta_{21} \cdot M_2),$$

gdzie:

$$\beta_{21} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{a_2^2 \cdot g_{21}^2}}; \quad D_{21} = \frac{E g_{21}^3}{12(1-\nu^2)}$$

Dla uproszczenia rozważań — pominięto różnicę temperatur na grubości dennicy, powłoki walcowej i pierścienia wytwornicy.

Dalsze równania wynikające z warunków równowagi pierścienia oraz warunki ciągłości odkształceń dla punktów *A*, *H* oraz *B* pierścienia i przylegających elementów pozwalają wyznaczyć wszystkie występujące tu siły wewnętrzne (brzegowe) a następnie naprężenia w poszczególnych elementach wytwornicy pary.

Literatura cytowana w tekście

1. M. E. NIEZGODZIŃSKI, W. ZWOLIŃSKI, *Obliczenia wytrzymałościowe przepływowych wytwornic pary z uwzględnieniem podatności rur wkładu grzewczego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Mechanika z. 40, 1974 r.
2. M. E. NIEZGODZIŃSKI, W. ZWOLIŃSKI, *Praktyczna metoda obliczeń wytrzymałościowych wymienników ciepła z dnami sitowymi spoczywającymi na sprężystym podłożu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Mechanika z. 45, 1976 r.
3. K. P. SINGH, *Analysis of vertically mounted through — tube heat exchangers*, Transactions of ASME, vol. 100 April 1978.
4. M. E. NIEZGODZIŃSKI, *Obliczenie den w zbiornikach ciśnieniowych*, Przegląd Mechaniczny Nr. 18, 1977 r.
5. T. SLOT, *Ortotropic Analysis of Thick Perforated Plate With Pressure on one Side*, Second International Conference on Structural Mechanics in Reaktor Technology. Berlin 10 - 14.09.1973, vol. F 6/8.
6. American Society of Mechanical Engineers (ASME), *Boiler and Pressure Vessel Code — Section III, Nuclear Power — Plant Components*, New York 1974.
7. M. E. NIEZGODZIŃSKI i inni, *Metoda przeprowadzania obliczeń wytrzymałościowych przepływowych wytwornic pary elektrowni jądrowych*, Praca niepublikowana, wykonana w Instytucie Mechaniki Stosowanej P.Ł., 1975 r.
8. W. ZWOLIŃSKI, *Płyta kołowa gruba o ortotropii cylindrycznej, spoczywająca na sprężystym podłożu*. (MTiS).

Р е з ю м е

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПАРОГЕНЕРАТОРОВ АТОМНЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ.

В работе представлен аналитический метод определения внутренних сил и напряжений в основных элементах вертикальных парогенераторов. Положено, что трубки обогревающего вкладыша создают упругое основание, на котором опираются трубные доски. Перфорированные днища рассчитаны как толстые, ортотропные плиты.

Решение получено из уравнений совместности деформаций и равновесия внутренних сил — элементов входящих в узел соединения днища, сферической и цилиндрической оболочки.

S u m m a r y

STRENGTH ANALYSIS OF THE VERTICAL FLOW STEAM GENERATORS OF NUCLEAR
POWER PLANTS

An analytical method is considered of calculation of internal stresses and forces in the main elements of the vertical flow steam generators of nuclear power plants. The heating tubes make an elastic foundation supporting the perforated bottoms. The bottoms are assumed to be orthotropic plates juncted with a cylindrical shell and hemispherical or elliptical heads. The solutions are given for any conditions of exploitation.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 stycznia 1979 roku.

NIEKLASYCZNE ZACHOWANIE SIĘ MODELU HIPERBOLOIDALNEJ CHŁODNI
KOMINOWEJ POD OBCIĄŻENIEM OSIOWO SYMETRYCZNYM

JAN OWCZARZY, JANUSZ KOSSOWSKI (GLIWICE)

1. Wstęp

Chłodnie kominowe stanowią konstrukcję złożoną z bardzo cienkiej powłoki, wiotkich słupów podtrzymujących powłokę oraz fundamentu najczęściej pierścieniowego posadowionego na zróżnicowanym ze względu na swe gabaryty podłożu gruntowym. Powłokę chłodni konstruuje się zazwyczaj jako jednopowłokową hiperboloidę obrotową o wysokości, która osiąga już ponad 160 m, minimalnej grubości wynoszącej 16 cm i stosunku jej do najmniejszego promienia rzędu 1/200. Problem pracy statycznej tych powłok będących prostokreślnymi powierzchniami o ujemnej krzywiznie Gaussa nie jest jeszcze całkowicie zbadany a intensywny rozwój ich zastosowań w budownictwie energetycznym nie obył się bez katastrof. Z technicznego punktu widzenia najbardziej racjonalną, zapewniającą równomierną na grubości pracę materiału (żelbetu) jest bezmomentowy stan naprężeń w powłoce. Z drugiej strony istnieją wszelkie przesłanki, że powłoka ze względu na małą grubość ścianki a tym samym dużą jej wiotkość nie jest w stanie przejmować szczególnie na obwodzie naprężeń ściskających i mieć tendencję do deformacji bez wydłużeń i skróceń powierzchni środkowej czyli do występowania stanu czystego zginania.

WŁASOW [1] w swej fundamentalnej pracy dotyczącej powłok dowodzi, że powłoki o ujemnej krzywiznie Gaussa, dla których problem równowagi sprowadza się do rozwiązania różniczkowych równań cząstkowych typu hiperbolicznego w odróżnieniu do powłok o dodatniej krzywiznie nie mogą wyłącznie pracować w stanie bezmomentowym. NOWOŻIŁOW [2] stwierdza, że warunkiem niezbędnym i dostatecznym dla uniknięcia naprężeń czystego zginania w obrotowych powłokach o ujemnej krzywiznie jest pełne utwierdzenie jednego brzegu w obu kierunkach stycznych do powierzchni środkowych ($v = 0, u = 0$). FLÜGGE [3] zwraca uwagę na osobliwe zachowanie się powłok o ujemnej krzywiznie Gaussa i na przykładzie hiperboloidy jednopowłokowej obciążonej na brzegach pokazuje, że nieciągłości na brzegach wywołują nieciągłości naprężeń w powłoce propagujące się wzdłuż pewnych linii powierzchni środkowej. Jednym z warunków stosowalności bezmomentowej teorii cienkich powłok jest wg GOLDENWEJZERA [4] spełnienie tzw. hipotezy Nowodworskiego o możliwych zginaniach. W myśl tej hipotezy w powłoce panuje bezmomentowy stan naprężeń wtenczas, gdy siły przyłożone do powłoki nie wykonują żadnej pracy na przemieszczeniach możliwych zginania czyli inaczej gdy nie występują przemieszczenia czystego zginania lub gdy są one ortogonalne do działających obciążeń. Stosowane różne warianty teorii dwuwymiarowych oparte na skończonej ilości wielkości zdefiniowanych na powierzchni środkowej są z definicji teoriami przybliżonymi i nie mogą dać

pełnej i ścisłej informacji o stanie naprężeń i odkształceń w cienkich trójwymiarowych ciałach jakimi są powłoki [5]. W tej sytuacji dużego znaczenia nabierają metody doświadczalne pozwalające na pokonanie barier wynikających z niedoskonałości metod analitycznych w wiernym odwzorowaniu zachowania się powłok pod różnymi sposobami obciążeń. Badania modelowe konstrukcji są szczególnie przydatne do rozwiązywania wybranych zagadnień skomplikowanych konstrukcji składających się z dźwigarów powierzchniowych w tym i powłok.

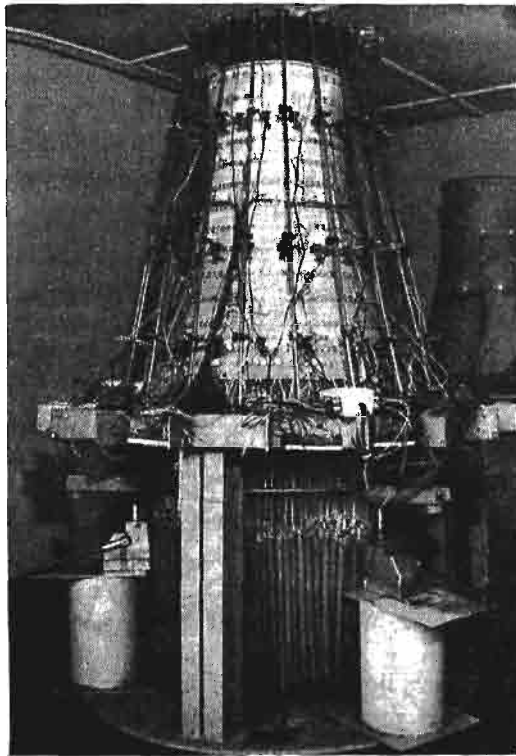
Wielu autorów prowadziło badania eksperymentalne na małych modelach chłodni kominowych obciążonych ciężarem własnym, wiatrem itp., których celem prawie zawsze był problem zachowania się powłok przy utracie stateczności w tym przede wszystkim określenie tzw. obciążeń krytycznych. Obszerne podsumowanie aktualnego stanu badań doświadczalnych, analitycznych i numerycznych wraz z krytyczną dyskusją zawarto w artykułach [6, 7]. Rezultaty tych badań różnią się między sobą jakościowo i ilościowo i wskazują, że problem zachowania się powłok chłodni hiperboloidalnych przed i po utracie stateczności jest nadal otwarty. Wynika to, poza stosowaniem przybliżonych teorii powłok, z braku wiarygodnych informacji o przebiegu zjawiska a w związku z tym o roli pracy błonowej, zgjęciowej w fazie przed i po utracie stateczności konstrukcji. Analizując znane i dostępne opisy badań modelowych [8, 9, 10, 11] można stwierdzić brak właściwej i pełnej obserwacji zachowania się modeli we wszystkich począwszy od zera stadiach obciążeń. Nie rejestrowano w wystarczającej ilości punktów pomiarowych procesu deformowania się modeli i nie określono w sposób nie budzący wątpliwości charakteru rozwijania się przemieszczeń i naprężeń szczególnie po obwodzie powłok. Ponadto badania realizowano dla różnych geometrii modeli, przy różnych warunkach brzegowych, własnościach materiału modelowego oraz różnym sposobie i charakterze obciążenia. Zaobserwowane w tych badaniach dość duże na obwodzie rozrzuty mierzonych wartości przemieszczeń i naprężeń przy osiowo symetrycznym obciążeniu składano tylko na karb niedokładności kształtu i grubości, mimo środkowego działania obciążeń czy też błędów pomiarowych.

Mając powyższe na względzie autorzy przeprowadzili szczegółową analizę czynników wpływających na rezultaty eksperymentu modelowego i skupili się na dokładnym i kompleksowym rozeznaniu charakteru pracy modelu, w którym zachowano najworniejsze ze znanych realizacji podobieństwo geometryczne, warunków brzegowych pod najprostszym osiowo symetrycznym sposobie obciążenia. Opracowano i wdrożono metodykę badań oraz systemy pomiarowe naprężeń i przemieszczeń zapewniające pełny i wiarygodny opis zachowania się modelu pod obciążeniem. W artykule omówiono rezultaty przeprowadzonych badań, które ujawniły osobliwości i stany pracy statycznej hiperboloidalnej powłoki chłodni kominowej, które przy obecnym stanie wiedzy trudno osiągnąć na drodze rozważań analitycznych.

2. Badania modelu pod obciążeniem osiowo symetrycznym

Model użyty do badań wiernie odwzorowywał w skali 1:100 chłodnię kominową typu Jaworzno III, Rybnik II o wysokości 120 m i minimalnej grubości 14 cm. Do wykonania modelu zastosowano kompozycję epoksydowo mineralną plastyfikowaną żywicą po-

liestrową. Posiada ona własności ciała chwilowo liniowo sprężystego. Moduł Yunga wynosił $E_0^{18^\circ\text{C}} = 3640 \text{ MPa}$, zaś współczynnik Poissona był z określonym prawdopodobieństwem niezależny od poziomu naprężeń i temperatury i wynosił $\nu = 0,336$. Powłokę modelu wykonywano przez sukcesywne nanoszenie płynnego tworzywa na wcześniej przygotowaną powierzchnię wewnętrzną powłoki. Tworzywo to było profilowane tak, aby uzyskać powierzchnię zewnętrzną powłoki a następnie po utwardzeniu szlifowane do żądanej grubości modelu powłoki. Pozostałe elementy modelu, tj. pierścień górny, słupy ze stopami, wykonywano osobno doklejało do powłoki, po czym zatopiono je w wymodelowanym, nie stwardniałym jeszcze pierścieniu fundamentowym. Fundament modelu był przyklejony do sztywnego stendu, co odpowiadało posadowieniu na sztywnym podłożu gruntowym.



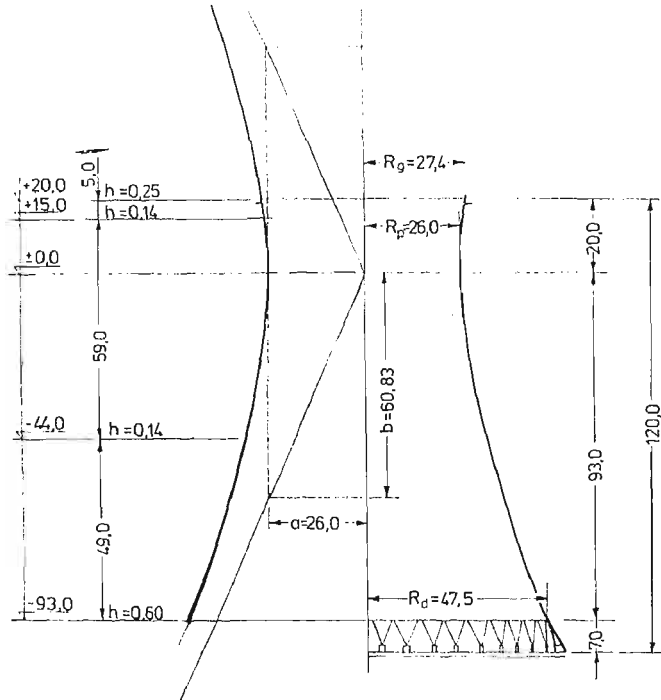
Rys. 1. Widok stanowiska badawczego.

Obciążenie od ciężaru własnego zastąpiono na modelu obciążnikami zaczepionymi za pomocą wiotkich cięgien do powłoki w środkach pól wyznaczonych przez siatkę podziału powłoki. Zastosowano podział na 15 równoleżników oraz od 40 do 120 południków, w wyniku czego uzyskano 1280 pól. Dla przeprowadzenia obciążenia i odciążenia zastosowano ruchomy pomost oparty na trzech podnośnikach hydraulicznych. Poprzez podnoszenie i opuszczanie pomostu kolejno odciążano i obciążano model. Rysunek 1 przedstawia widok stanowiska badawczego, zaś rysunek 2 wymiary modelu. W badaniach zastosowano podobieństwo modelowe, w którym dla przyjętej a priori skali wymiarów

liniowych i materiału modelowego inne skale ścisłego podobieństwa modelowego były jednoznacznie określone i wynosiły:

- skala naprężeń $K\sigma = 1/8,8$
- skala przemieszczeń $K_w = 1/100$.

W badaniach zastosowano w kolejnych etapach dwukrotne, sześciokrotne i ośmiokrotne zwiększenie obciążeń ponad wartości wymagane przez podobieństwo ścisłe. W artykule podano wyniki ilościowe uzyskane dla ośmiokrotnego przeciążenia.



Rys. 2. Wymiary modelu chłodni [cm].

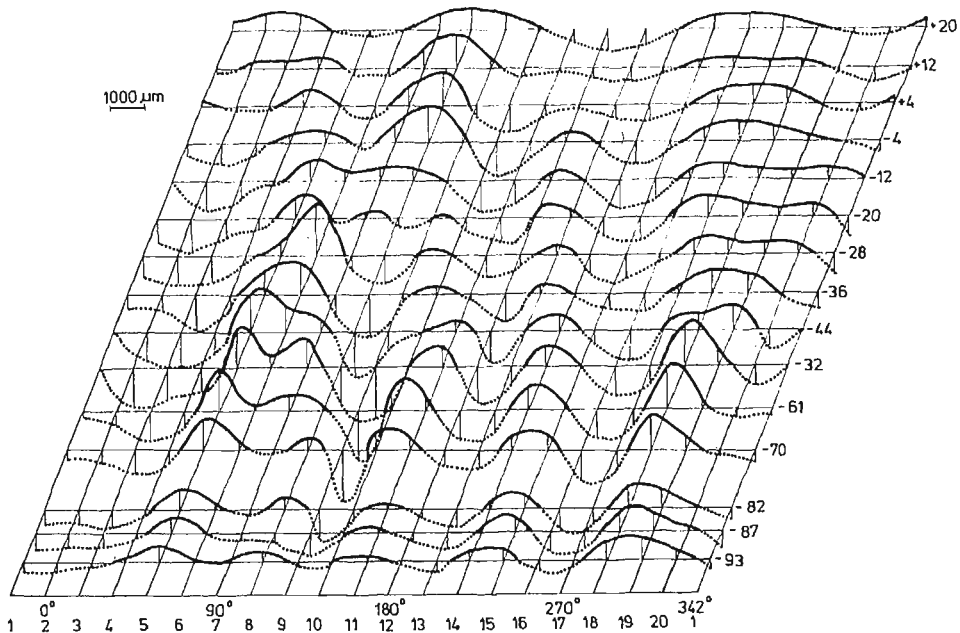
Dla uzyskania jak największej ilości informacji dotyczącej reakcji modelu na obciążenie zastosowano następujące ilości punktów i przekrojów pomiarowych:

- a) pomiar przemieszczeń normalnych powłoki modelu w 20 punktach na obwodzie i na od 6 do 16 poziomach wzdłuż wysokości oraz pomiar przemieszczeń stycznych (u, v) na brzegach powłoki,
- b) pomiar tensometryczny normalnych naprężeń południkowych i równoleżnikowych w 10 punktach na obwodzie i na 6 poziomach, w tym na poziomie -28 pomiar zagęszczono do 20 punktów na obwodzie,
- c) pomiar tensometryczny naprężeń na słupach 10 parach słupów modelu.

Pomiary przemieszczeń oraz tensometryczne pomiary naprężeń przeprowadzono przy użyciu automatycznego systemu przeprowadzania pomiarów i przetwarzania danych „ASMT-CHŁODNIE” wersja „stress” i „displ”, opartego na sprzężeniu „on line” zestawu aparatury tensometrycznej firmy Brüel and Kjaer (mostek typu 1526) z kalkulatorem

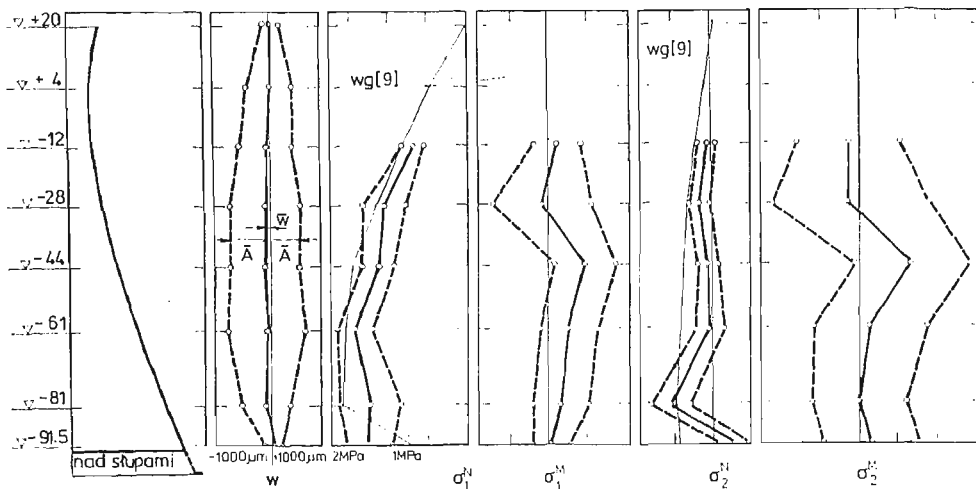
programowym Computorp G-22 typu 425 oraz na odpowiednim oprogramowaniu sterowania pomiarami i przetwarzania danych pomiarowych. W wersji „displ” przystosowano odpowiednio mostek tensometryczny do pomiaru przemieszczeń. W trakcie obciążenia modelu przeprowadzono również pomiar ciąglej naprężeń i przemieszczeń za pomocą systemu składającego się z 12 kanałowego mostka dynamicznego TDA-6 Mikrotechna oraz oscylografu pętlicowego typu 2925 japońskiej firmy YEV. Do pomiarów przemieszczeń użyto czujniki indukcyjne produkcji krajowej typu MDKa-E o dokładności w systemie $1 \mu\text{m}$ i zakresie $\pm 1000 \mu\text{m}$. Pomiary odkształceń przeprowadzono używając krajowych tensometrów foliowych typu FK oraz kratowych typu RL. Zastosowano oryginalną metodykę pomiarów tensometrycznych naprężeń opartą na metodzie porównywania mierzonych na modelu odkształceń ze wzorcem oraz zastosowaniu pełnej kompensacji temperaturowej przy użyciu osobnego modelu kompensacyjnego [12, 13]. Wielkości stanu odkształceń i naprężeń określono za pomocą prostokątnych rozet naklejonych na powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej modelu i rozdzielano je na składowe stanu błonowego i zgięciowego przy założeniu liniowego ich rozkładu na grubości.

Wyniki. W wyniku pomiarów otrzymano pełny obraz zdeformowanej icsop modelu. Na rysunku 3 zestawiono pomierzone przemieszczenia normalne powłoki. Po-

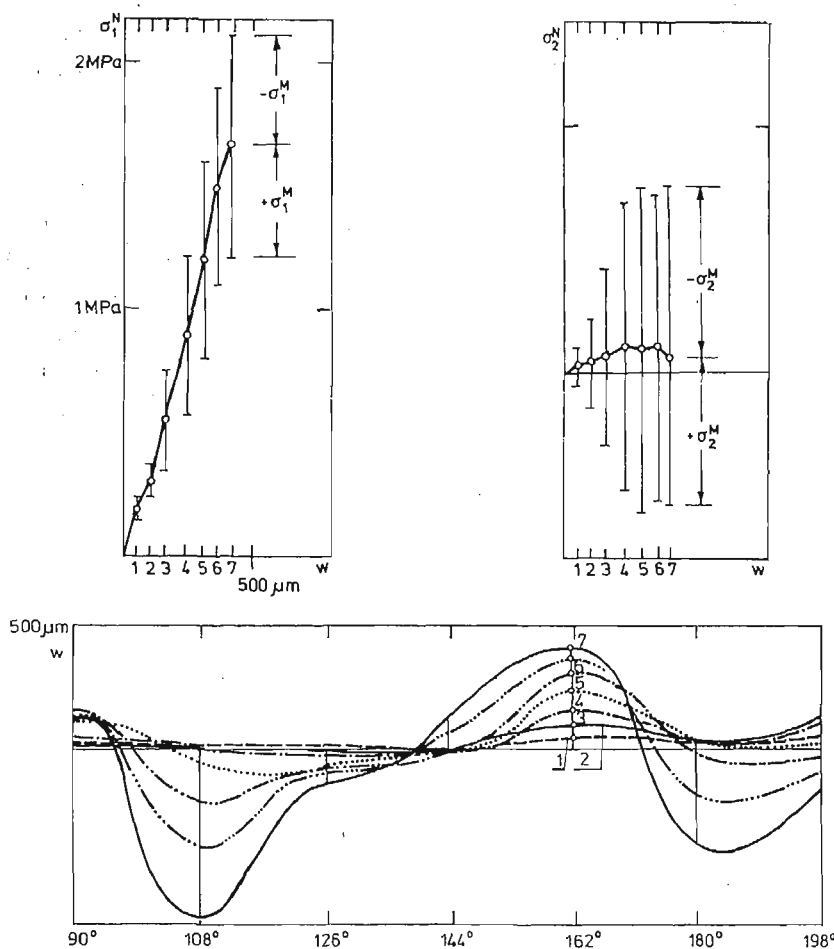


Rys. 3. Wykres przemieszczeń normalnych powłoki modelu.

wierzchnia modelu przybrała pod obciążeniem osiowo symetrycznym symulującym ciężar własny globalną na całej wysokości postać falową. Ilość powstałych na obwodzie fal waha się od 5 na dolnym do 3 na górnym brzegu powłoki. Podobnie jak przemieszczenia normalne tak i styczne do powierzchni środkowej (v , u) pomierzone na brzegach mają charakter falowy. Przebieg przemieszczeń normalnych wzdłuż południków nie wykazuje wyraźnie

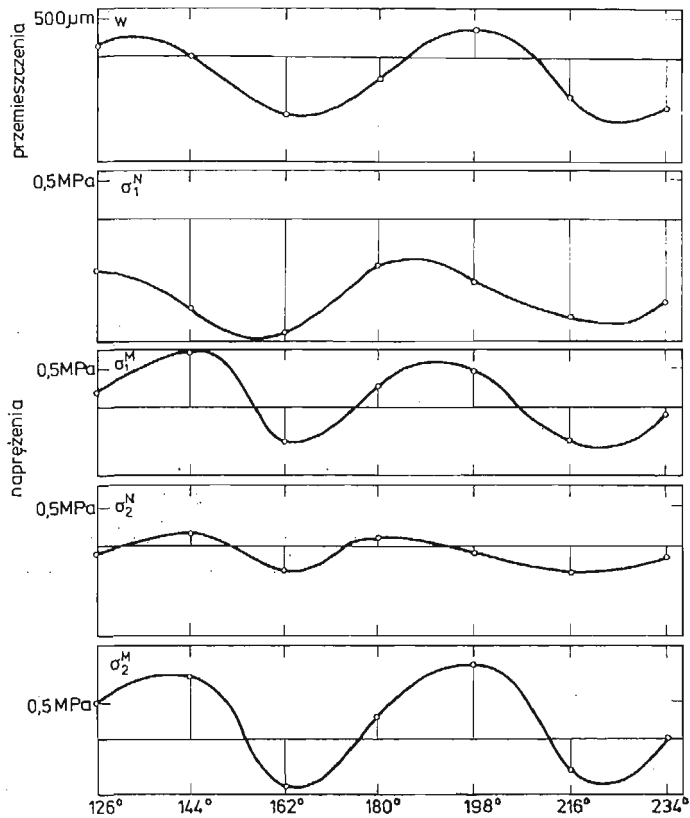


Rys. 4. Wartości średnie oraz uśrednionych amplitud przemieszczeń na obwodzie powłoki.



Rys. 5. Rozwój przemieszczeń i naprężeń w czasie obciążenia modelu na poz. — 44.

określonych prawidłowości, albowiem jest zdeterminowany przede wszystkim przebiegiem falowym po obwodzie powłoki. Można doszukać się pewnej tendencji układania się punktów charakterystycznych fal po prostych tworzących hiperboloidy. Amplitudy fal przemieszczeń normalnych osiągały wartości rzędu grubości powłoki modelu. Redystrybucja równoleżnikowych i południkowych naprężeń błonowych i zgięciowych uzyskana z pomiarów naprężeń na powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej powłoki przybrała także falowy



Rys. 6. Przebieg przemieszczeń i naprężeń na poz. — 28.

charakter. Charakteryzowała się ona dużymi, szczególnie na obwodzie naprężeniami zginającymi, a ponadto wszystkie składowe naprężenia, w tym i błonowych naprężenia południkowych były silnie uzależnione od przebiegu przemieszczeń normalnych na obwodzie (rys. 6). Stwierdzono, że pomiar w 10 punktach na obwodzie nie daje wystarczającego obrazu zmian przebiegu mierzonych naprężeń, dlatego dokonano tylko statystycznej oceny tendencji średniej i amplitud „falowania”. Te wielkości zestawiono i porównano z wartościami otrzymanymi wg teorii zgięciowej [14] na rysunku 4. Zauważyć można, że przebieg uśrednionych wartości południkowych naprężeń błonowych jest dość zgodny z rozwiązaniami stanu bezmomentowego, zaś przebieg oscylujących wokół zera błonowych naprężeń równoleżnikowych przy równoczesnych dużych wartościach naprężeń zginających wskazuje na występowanie globalnego stanu bez wydłużeń powierzchni środkowej powłoki. Równo-

leżnikowe naprężenia błonowe w dolnym obszarze powłoki noszą charakter efektu brzegowego dla tego stanu oraz rozkładu „tarczowego” od podparcia słupami dolnej krawędzi powłoki. Z pomiarów naprężeń na słupach wynika, że pracują one na skutek „falowania” się krawędzi dolnej powłoki w złożonym stanie. Oprócz naprężeń osiowych występują naprężenia dwuosiowego zginania, skręcania i ścinania. Pomierzone w słupach wartości naprężeń normalnych i stycznych są także silnie uzależnione od przebiegu przemieszczeń krawędzi dolnej powłoki.

Dla zbadania charakteru i sposobu kształtowania się postaci falowej powłoki obserwowano na poziomie -44 proces przemieszczania się wybranych punktów na obwodzie wraz z przyrostem naprężeń w tych punktach (rys. 5). Proces falowego deformowania modelu zaczyna się od początku obciążenia, przy czym przyrosty błonowych naprężeń podłużnikowych są prawie w liniowej zależności od przemieszczeń normalnych. Inny charakter mają przyrosty naprężeń równoleżnikowych wskazujące na fakt, że powłoka na obwodzie przemieszcza się bez odpowiedniego przyrostu błonowych naprężeń równoleżnikowych czyli tendencji do odkształceń bez wydłużeń powierzchni środkowej.

Każdorazowo po odciążeniu model wracał do swej pierwotnej postaci i zachowywał zdolność do przejmowania obciążeń. W badaniach nie zaobserwowano zjawiska bifurkacji czy też przeskoku rozpatrywanego w teoriach stateczności konstrukcji.

Falowy po obwodzie przebieg przemieszczeń normalnych stwierdzono we wszystkich etapach badań tj. między innymi przy dwukrotnym i sześciokrotnym przeciążeniu jak również przy brzegowym obciążeniu montażowym [15]. Przeprowadzone kontrolne pomiary na badanym modelu oraz na drugim, „nie skażonym” tensometrami itp. pod pierścieniowym osiowo symetrycznym o małej wartości obciążeniu przyłożonym na poziomie -44 , wykazały całkowitą powtarzalność zjawiska falowego charakteru deformacji powłoki.

3. Analiza czynników wpływających na wyniki badań modelowych

Dla wyjaśnienia przyczyn osobliwego zachowania się hiperboloidalnej powłoki chłodni kominowej pod obciążeniem osiowo symetrycznym przeprowadzono analizę czynników wpływających na wyniki badań oraz przeprowadzono dodatkowe badania modelowe. Podstawą analizy było założenie, że reakcja modelu na obciążenie jest złożonym procesem wieloczynnikowym. Czynniki mające wpływ na wyniki badań dotyczą trzech zasadniczych elementów podobieństwa zjawisk w modelu i obiekcie rzeczywistym, a mianowicie:

- a) stopnia zachowania podobieństwa sztywności konstrukcji
- b) stopnia zachowania podobieństwa warunków brzegowych
- c) stopnia zachowania podobieństwa obciążenia.

Analiza abstrahuje od zasadniczego pytania w jakim stopniu quasi sprężysty model może odwzorować skomplikowane zachowanie się rzeczywistej konstrukcji chłodni w aspekcie niejednorodności struktury betonu, reologii oraz dwufazowej pracy materiału (żelbetu). Opiera się ona na założeniu a priori, że zjawiska fizyczne w ujęciu analitycznym i na modelu przebiegają jednakowo. W wyniku szczegółowej analizy błędów pomiarowych stwierdzono, że nie wpływają one na jakościowy obraz mierzonych wielkości.

ad. a) Jakość badań modelowych jest uzależniona przede wszystkim od stopnia zachowania ścisłego podobieństwa geometrii, warunków brzegowych i cech materiałowych. Nie można więc porównywać wyników uzyskanych dla różnych wymiarów geometrycznych i warunków brzegowych modeli. Jak już wspomniano w badaniach przeprowadzonych przez autorów zachowano ściśle podobieństwo geometryczne wszystkich elementów konstrukcji chłodzi t.j. powłoki, słupów, górnego pierścienia i pierścieniowego fundamentu wraz ze stopami słupów. Grubości poszczególnych części modelu starano się wykonać z dokładnością 0,1 mm, zaś wymiary gabarytowe z dokładnością 1 mm. Wiadomo, że model zawsze obciążony jest określonymi błędami wykonawczymi, dlatego dla modeli użytych w badaniach przeprowadzono pomiary grubości za pomocą grubościomierza ultradźwiękowego UNIPAN typu 546 z głowicą typu 4LDS7G produkcji krajowej. Średnie wartości z 20 pomiarów na obwodzie powłoki wraz z oszacowaniem błędów rozrzutu wokół średniej zamieszczono w tabelicy nr 1. Pomierzone wartości są miarą zarówno grubości jak i jedno-

Tabela nr 1. Wyniki pomiaru grubości modelu

Równoleżniki pomiarowe	Grubość projekt. mm	Średnia wartość mm	Błąd rozrzutu wokół średniej mm
		$\bar{h} = \frac{\sum h}{20}$	$t_{0,95} = S_{(h)} \cdot t_{0,95}$
+20	2,50	2,57	0,040
+12	1,62	1,64	0,014
+ 4	1,40	1,45	0,013
- 4	1,40	1,44	0,007
-12	1,40	1,46	0,019
-20	1,40	1,46	0,014
-28	1,40	1,46	0,018
-36	1,40	1,48	0,013
-44	1,40	1,48	0,013
-52	1,40	1,50	0,010
-61	1,54	1,59	0,013
-70	1,64	1,66	0,017
-76	1,74	1,76	0,010
-80	1,79	1,82	0,011
-84	2,25	2,28	0,011
-88	3,96	3,97	0,016
-93	6,00	6,10	0,026

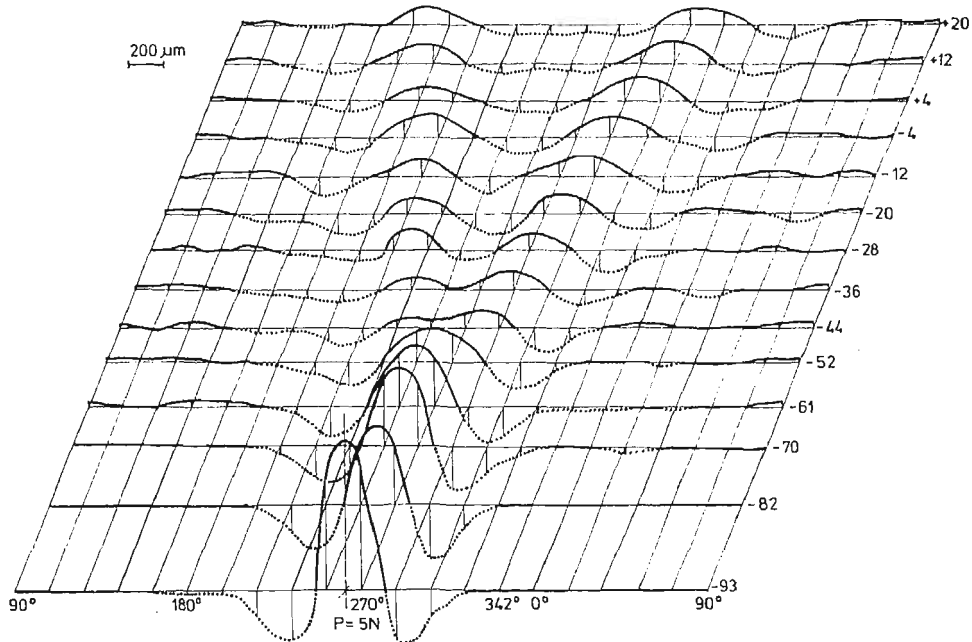
rodności powłoki modelu. Zmiany grubości powłoki modelu nałożone na przebieg przemieszczeń normalnych nie wykazały określonych korelacji. Tak samo skażenia grubości w postaci naklejonych na powłokę tensometrów, kostek lutowniczych, przewodów jak również lokalny defekt w pobliżu południka 148° nie miał zasadniczego wpływu na globalny przebieg falowego odkształcania się modelu. Potwierdzają to dodatkowe badania na nieskażonym w ten sposób modelu kontrolnym. Wpływ tego typu defektów i skażeń mają charakter lokalny, tym niemniej zdaniem autorów mogą one inicjować osobliwy globalny proces deformacji powłoki.

Stosując do badań, których interpretacja oparta jest na zasadzie sprężystych własności betonu i materiału modelowego, tworzywo sztuczne o własnościach zależnych od temperatury i czasu wynikł problem ich poprawności. Bazując na pojęciu o chwilowych sprężystych własnościach materiałów oraz na zasadzie pomiaru opartej na porównywaniu wielkości mierzonych na modelu z wielkościami na wzorcach, opracowano i zastosowano metodykę badań 13, która w poważnym stopniu eliminuje błędy wynikłe z niekorzystnych własności tworzywa jako materiału modelowego.

ad. b) Realizowane w badaniach usztywnienia brzegów powłoki mają duże znaczenie na zachowanie się modelu w takim stopniu jaki ma wpływ tzw. efekt brzegowy na stan deformacji modelu. Przy długich a nie całkowicie skrępowanych brzegach prawie zawsze stwierdzano globalny stan wybozeniowy, zaś przy modelach krótkich i brzegach utwierdzonych występuje najczęściej lokalne w środku wybozenie propagujące się do obszarów zamocowania. Teoretyczne rozważania nt. wpływu warunków brzegowych na charakter pracy statycznej, w tym i możliwość występowania stanu czystego zginania zawarte są w pracach [1, 2, 3, 4]. Analizując stan osiowo-symetryczny w powłoce hiperboloidalnej od obciążenia przyłożonego na brzegach DULAČSKA [16] dowodzi, że cienka powłoka hiperboloidalna może doznawać deformacji bez wydłużeń powierzchni środkowej gdy jeden brzeg powłoki ma możliwość przemieszczeń w kierunku południkowym, a w tych eksperymentach, w których obciążenie realizuje się za pomocą sztywnych płyt zamocowanych na brzegach taki stan nie może wystąpić. Zestawione w pracy [17] wyniki badań modelowych wskazują, że modele utwierdzone na jednym brzegu a na drugim swobodne, wybaczą się przy obciążeniach bliskim stanowi bez wydłużeń powierzchni środkowej powłoki i że zjawisko jest w wysokim stopniu nieliniowe. Dla ustalenia wpływu zmian warunków brzegowych, w tym i rozchodzenie się zaburzeń brzegowych, autorzy przeprowadzili obszernie dodatkowe badania na modelu. Rozpatrywano wpływ usztywnienia górnej krawędzi powłoki pierścieniem, wpływ usztywnienia górnego brzegu sztywną przeponą, wpływ sił skupionych przyłożonych na brzegach, wpływ usunięcia grupy podpór i stwierdzono:

- dla obciążenia symulującego ciężar własny zastosowany pierścieniem górnym stężającym powłokę zmniejsza na górnej krawędzi amplitudy fal przemieszczeń o połowę, przy czym poniżej przewężenia zmiany te są nieznaczne,
- dla pionowego pierścieniowego obciążenia umieszczonego na poziomach -40 , $\pm 0,0$, $+20$ stwierdzono, że usztywnienie górnego brzegu sztywną przeponą nie ma zasadniczego znaczenia na obraz deformacji w środku powłoki (poz. -28),
- badano reakcję modelu na siły skupione normalne przyłożone do powłoki na brzegu górnym, dolnym i w środku powłoki (-40). W tych badaniach stwierdzono, że zaburzenie w postaci sił skupionych przyłożonych do powłoki rozprzestrzenia się na całą wysokość powłoki na obszarze ograniczonym liniami asymptotycznymi powierzchni środkowej (rys. 7). Podobnie zaburzenie w postaci wycięcia jednej, a potem trzech grup słupów przy obciążeniu ciężarem własnym propaguje się daleko w głąb powłoki wzdłuż linii asymptotycznych, zmieniając obraz powierzchni zafalowanej powłoki,
- badano obraz przemieszczeń normalnych przy obciążeniu górnego brzegu kolejno 1, 3, 4, 5, 8, 13, 20 i 40 siłami skupionymi rozmieszczonym każdorazowo symetry-

cznie po obwodzie i stwierdzono rozchodzenie się i nakładanie wywołanych przez nie zaburzeń wzdłuż linii asymptotycznych. Dla powyżej 13 tj. 20, 40 sił na obwodzie obraz odkształconej powłoki poza proporcjonalnym zwiększeniem amplitud fal nie zmienił się, co świadczy, że sposób podparcia (50 par słupów) nie jest bezpośrednią przyczyną falowej postaci deformacji. Większą, a może dominującą rolę odgrywa fakt, że słupy podparcia pozwalają na przemieszczenia dolnej krawędzi powłoki we wszystkich kierunkach (u, v, w).



Rys. 7. Rozchodzenie się zaburzenia od siły normalnej przyłożonej na dolnym brzegu powłoki.

ad. c) Charakter i sposób przyłożenia obciążeń decydują w sposób znaczący o zachowaniu się powłoki. Z drugiej strony jest to czynnik, który najtrudniej da się odwzorować na modelu. Dla przypadku obciążenia ciężarem własnym istnieją niepokonalne trudności w wiernym zamodelowaniu jego masowego charakteru oraz sposobu jego przyrastania wraz z postępowaniem wznoszenia powłoki tak, aby w miarę dokładnie wywołać stan naprężeń i odkształceń realizujący się w obiekcie rzeczywistym. Najczęstszym spotykanym sposobem obciążenia modelu jest jego dyskretyzacja za pomocą obciążników lub badania na maszynach wytrzymałościowych realizujących obciążenie na krawędziach modelu. Urządzenia te w zależności od rozwiązania konstrukcyjnego może być typu sztywnego lub obciążnikowego. Stosowane zazwyczaj sztywne przepony na krawędziach modelu powłoki poza ich usztywnieniem mogą ulegać obrotowi lub też powodować mimośrodowe przekazywanie się obciążeń. Obciążenie powierzchniowe jest wywoływane najczęściej przez medium (powietrze, ciecz) działające wewnątrz lub zewnątrz modelu. Szybkość realizowania obciążenia, ewentualne wpływy dynamiczne mogą także wpływać na wyniki badań. Taki sposób obciążania modelu zmienia w zasadniczo stan naprężeń i odkształceń na wysokości

modelu oraz zmienia jego warunki zamocowania. W przeprowadzonych przez autorów badaniach zastosowano obciążniki zawieszane na modelu wg przyjętej siatki dyskretyzacji masowego charakteru obciążenia ciężarem własnym. Przyjęto bardzo gęsty w miarę możliwości technicznych podział wzdłuż równoleżników. Autorzy przeprowadzili badania w jakim stopniu zagęszczenie obciążników wpływa na przebieg zjawiska deformowania się modelu. Dokonano pomiarów przemieszczeń normalnych powłoki modelu przy zmiennym, na poziomie -40 i brzegu górnym, zagęszczeniu na obwodzie siatki dyskretyzacji osiowo symetrycznego obciążenia pierścieniowego i stwierdzono, że podział obciążenia na 20 i powyżej części na obwodzie nie powoduje dalszych zmian, poza wielkościami amplitud w przebiegu falowego odkształcania się powłoki modelu, tzn. nie zależy on od tak przyjętej siatki podziału. Na podstawie wyników dot. wpływu sił skupionych przykładanych pod różnymi kątami do powłoki stwierdzono szczególne znaczenie sił normalnych do powłoki. Zamiana np. grawitacyjnego charakteru działania ciężaru własnego na siły działające na krawędzie i ciśnienie medium na powierzchnię powłoki modelu może spowodować znaczne zmiany w przebiegu deformacji modelu. Należy spodziewać się dużego wpływu sił normalnych np. od wiatru na wielkości zafalowanej deformacji powłoki. Świadczą o tym także wyniki badań modelowych przeprowadzonych w tunelach aerodynamicznych, w których uzyskiwano z reguły przebieg deformacji zbliżony do stanu bez wydłużeń powierzchni środkowej.

Wyniki analizy. Konfrontując rozważone czynniki ze sposobem przeprowadzonych badań stwierdzić można, że zrealizowano najbardziej wierne ze znanych badań modelowych ściśle podobieństwo geometryczne wszystkich elementów konstrukcji chłodni i warunków brzegowych. Obciążenie w zakresie zastosowanej dyskretyzacji w miarę wierne i bez wpływu na przebieg zjawiska odwzorowuje działanie ciężaru własnego. Ewentualne tolerancje w wymiarach, grubości, obciążenia mogą powodować pewne skażenie stanu wyjściowego modelu, które jednak nie ma decydującego wpływu na mechanizm deformowania się modelu. Autorzy na podstawie obserwacji reakcji modelu na siły skupione sądzą, że główną przyczyną falowego od początku obciążenia stanu przemieszczeń i naprężeń mogą być osobliwości geometrii otwartej powłoki hiperboloidalnej. Problem ten wymaga dalszych badań.

4. Wnioski końcowe

Wyniki badań znacznie różnią się od znanych rozwiązań teoretycznych i rezultatów badań modelowych. Potwierdzają one osobliwości pracy statycznej bardzo cienkich powłok o ujemnej krzywiznie Gaussa jaką jest hiperboloidalna powłoka chłodni kominowej:

- a) Powłoka modelu pod obciążeniem osiowo symetrycznym symulującym ciężar własny od początku procesu obciążania przybierała globalną postać falową. Na równo z naprężeniami stanu błonowego, zgięciowego występują naprężenia stanu bez wydłużeń powierzchni środkowej. Takie zachowanie się modelu stwierdzono we wszystkich przeprowadzonych etapach badań.

- b) W badaniach nie zaobserwowano zjawisk świadczących o wystąpieniu bifurkacji, przeskoku rozumianych w kategoriach jednowymiarowych teorii stateczności. Od początku obciążenia powłoka przybierała w sposób łagodny postać falową.
- c) Zaburzenia przyłożone na brzegach i na wysokości powłoki propagują się daleko w głąb powłoki wzdłuż linii asymptotycznych powierzchni środkowej.
- d) Zaobserwowane na modelu zjawiska sygnalizują złożoność pracy statycznej cienkich powłok prostokreślnych o ujemnej krzywiznie Gaussa. Problem zachowania się tego typu powłok podpartych punktowo nie jest jeszcze całkowicie zbadany. Zdaniem autorów główną przyczyną zaobserwowanego w badaniach falowego od początku obciążenia stanu przemieszczeń i naprężeń mogą być osobliwości geometrii otwartych, wklęsłych powłok o ujemnej krzywiznie. Dlatego istnieje konieczność podjęcia obszernych badań teoretycznych i eksperymentalnych.
- e) Stosując metodę badań modelowych, dla rozwiązywania problemów pracy statycznej konstrukcji powłokowych, poza koniecznością wiernego zachowania podobieństwa sztywności, warunków brzegowych i obciążeń dla zapewnienia właściwej interpretacji rezultatów badań należy postawić szczególne wymagania metodyce badań, a przede wszystkim ilości i jakości opisu stopni swobody całej powierzchni modelu.

Literatura cytowana w tekście

1. W. Z. WŁASOW, *Obszczaja teorija oboloczek*, Gostechizdat, Moskwa 1949 r.
2. V. V. NOWOŻIŁOW, *Teorija tonkich oboloczek*, Sudizdat, Leningrad 1951 r.
3. W. FLÜGGE, *Powłoki, obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1972 r.
4. A. Ł. GOLDENWEIZER, *Teorija uprugich tonkich oboloczek*, Nauka, Moskwa 1976 r.
5. W. PIETRASZKIEWICZ, *Nieliniowe teorie cienkich powłok sprężystych*, Konstrukcje powłokowe. Teoria i zastosowania t. I, PWN, Warszawa 1978, str. 25 - 53.
6. P. P. COLE, J. F. ABEL, D. P. BILLINGTON, *Buckling of Cooling-Tower Shells: State-of-the-Art*, Journal of the Structural Division, ASCE, June 1975, pp. 1185 - 1203 and discussion by Chang-Hua-Yeh, Shieh W.Y.J. — January 1976, Mungan J. — Jan. 1976, and closure April 1977.
7. P. P. COLE, J. F. ABEL, D. P. BILLINGTON, *Buckling of Cooling-Tower Shells: Bifurcation Results*, Journal of the Structural Division, ASCE, June 1975 pp. 1205 - 1222, and discussion by Stalbohn H., Mungan I., Gould P. I., Jan. 1976 and closure April 1977.
8. T. I. DER, R. FIDLER, *A model study of the buckling behavior of hyperbolic shells*, Proceedings Institut Civil Engineers Sept. 1968.
9. O. MATEJA, *Stateczność hiperboloidalnych chłodni wieżowych obciążonych ciężarem własnym*. Praca doktorska. Biblioteka Politechniki Śląskiej, Gliwice 1964.
10. J. WIANECKI, *Stateczność obrotowej powłoki hiperboloidalnej obciążonej na brzegach*, Biblioteka IPPT PAN W-wa 1962.
11. W. ZERNA i inni, *Beuluntersuchungen an hyperbolischen Rotationsschalen*, Westdeutscher Verlag, Opladen, 1974.
12. J. OW CZARZY, J. KOSSOWSKI, *Badania modelu hiperboloidalnej powłoki chłodni kominowej pod obciążeniem osiowo symetrycznym*, Inżynieria i Budownictwo nr 11/79.
13. J. OW CZARZY, J. KOSSOWSKI, *Pomiary tensometryczne na modelach z tworzyw sztucznych*, Inżynieria i Budownictwo nr 9/79.
14. CZ. SAPIAN, P. KONDERLA, *Jednolity system analizy numerycznej chłodni kominowej — system Cooltran*, Wrocław 1977, Praca Politechniki Wrocławskiej wykonana na zlecenie PBCh „Chłodnie Kominowe”.
15. J. OW CZARZY, J. KOSSOWSKI, *Praca statyczna hiperboloidalnej powłoki chłodni kominowej w trakcie jej wznoszenia w świetle badań modelowych*, Inżynieria i Budownictwo 1/81.

16. E. DULAČSKA, J. A. NAGY, *On the Buckling of Axially Loaded Hyperbolic Shells of Revolution*, Konferencja IASS, Madryt 24÷28.09.1979 г.
17. J. G. A. CROLL, A. H. CHILVER, *Approximate Estimates of the Stability of Cooling-Towers Under Wind-Loading*, Konferencja IASS Bruksela 24÷25.05.1971 г.

Р е з ю м е

НЕКЛАССИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МОДЕЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ГРАДИРНИ ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ

Испытания обнаруживают существование особенности статики гиперболической оболочки градирни. Оболочка сначала нагружения принимает общую волнистую форму: Совместно с тангенциальными напряжениями появляются изгибающие напряжения от деформации без удлинения и сдвига срединной поверхности. Отмечено тоже, что возмущения розпрост раняются вигуб оболочки вдоль асимптотических линии срединной поверхности. Поведение модели потверждает слотный характер статики тонких, открытых, вагнутых, линейчатых оболочек с отрицательной кривизной Гаусса.

S u m m a r y

A NONCLASIC BEHAVIOUR MODEL OF HYPERBOLIC SHELL OF COOLING TOWER
UNDER AXISYMMETRIC LOADING

Results of the model study show peculiarities of stress state in hyperbolic shells of cooling tower. The shell has from the initial state a wavy form. Beside the membrane stress also the bending one exists due to the wavy form. It has been observed that the edge loadings propagate into the shell along the asymptote lines of mid surface. The model of the shell shows the complexity of the stress state of thin nonclosed and nonconvex rectilinearly drawn shells with negative Gaussian curvature.

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 października 1979 roku.

WPLYW TEMPERATURY I SZYBKOŚCI ROZCIĄGANIA NA WYTRZYMAŁOŚĆ WŁÓKIEN POLIESTROWYCH O NISKIM STOPNIU ORIENTACJI

ANDRZEJ WŁOCHOWICZ, MAREK LINEK (BIELSKO-BIAŁA)

Wstęp

Rozwój prac badawczych w dziedzinie polimerów zmierza w dwóch zasadniczych kierunkach — fenomenologicznym i statystycznym.

Grupa pierwsza jest reprezentowana przez opracowania FRAUDENTHALA [1], TRUESDELLA [2], NOLLA [3], COLEMANNA [4], ERINGENA [5] i innych [6, 7], druga zaś prace ZIMMA [8], ROUSE'A [9], CERFA [10], BUCHEGO [11], PETERLINA [12], KARGINA [13] czy ZAWADZKIEGO [14].

Prace w grupie pierwszej opierają się na koncepcji mikroskopowej ośrodków ciągłych uwzględniając termodynamiczne teorie materiałów z „pamięcią”, z drugiej zaś na modyfikowaniu teorii typu statystycznego przy uwzględnieniu indywidualnych cech struktury cząsteczkowej elementów składowych makrocząsteczek.

W polimerach, w zależności od ich stanu fizycznego, naprężenia, struktury cząsteczkowej i nadcząsteczkowej, warunków badania, przebiegają złożone procesy fizyko-chemiczne, których wynikiem są zjawiska termokinetyczne i zmiany struktury wewnętrznej.

Wytrzymałość charakteryzuje zdolność włókna do zachowania spójności pod działaniem sił zewnętrznych. Stanowi więc ważną w praktyce własność ciał stałych. Szczególny przypadek stanowi wytrzymałość na rozrywanie. Istnieje w tym względzie szereg teorii i metod badawczych [15], z których na wyróżnienie zasługują opracowane w ostatnich latach dwie — PETERLINA [12], oraz ŻURKOWA i ABASOWA [17-19].

PETERLIN zakłada, że wytrzymałość włókna jest uwarunkowana układem makrocząsteczek w warstwie rozdzielającej (wiążącej) sąsiednie lamele krystaliczne, wykazującej najniższą trwałość mechaniczną w fibryli. Żurkow i Abasow twierdzą, że decydujący wpływ na rozwój destrukcji tworzywa włókna mają drgania cieplne atomów. Fluktuacje cieplne mogą spowodować zerwanie poszczególnych wiązań, co może dać początek przegrupowaniu cząsteczek oraz pojawieniu się mikroszczelin w objętości badanego włókna. Teoria Żurkowa — Abasowa wyróżnia się prostym ujęciem ilościowym procesu niszczenia mechanicznego opartym na elementarnych zjawiskach fizycznych. Występujący w równaniu ŻURKOWA graniczny współczynnik strukturalny γ jest funkcją parametrów budowy cząsteczkowej i nadcząsteczkowej tworzywa włókna. Znalezienie postaci tej funkcji stworzyłoby podstawy teoretyczne do projektowania włókien chemicznych o z góry danych własnościach makroskopowych. Rozwiązanie tego zagadnienia wymaga jednak uprzedniej analizy równania Żurkowa w zastosowaniu do zmiennych obciążeń badanego włókna, co jest treścią niniejszego opracowania.

Zarys teorii Żurkowa-Abasowa

Termomechaniczna teoria ŻURKOWA [19] jako podstawową przyczynę procesu destrukcji polimerów przyjmuje fluktuacje drgań cieplnych atomów w makrocząsteczkach. Naprężenia występujące w tworzywie polimeru pod działaniem sił zewnętrznych są jedynie czynnikiem stymulującym proces zrywania wiązań głównych w makrocząsteczkach przez obniżenie bariery energetycznej. Wzrost temperatury zwiększa prawdopodobieństwo fluktuacji drgań cieplnych, co także aktywizuje proces destrukcji. Wielkością makroskopową charakteryzującą wytrzymałość polimeru na zrywanie jest wg Żurkowa „czas życia” próbki τ pod działaniem stacjonarnych naprężeń σ w stałej temperaturze T . Wielkości te są związane równaniem typu Arrheniusa:

$$(1) \quad \tau = \tau_0 \exp\left(\frac{U - \gamma\sigma}{kT}\right),$$

gdzie:

$\tau_0 = 10^{-13 \pm 1}$ — okres drgań własnych atomu, niezależny od rodzaju tworzywa,
 u — bariera energetyczna wiązań głównych równa średniej energii dysocjacji,
 γ — współczynnik strukturalny zależy od parametrów budowy cząsteczkowej i nadcząsteczkowej, odzwierciedlający nierównomierności rozkładu naprężeń wewnętrznych,
 σ — naprężenie.

Równanie (1) nie odzwierciedla jednak szeregu zjawisk towarzyszących procesowi destrukcji, np. przy małych wartościach naprężeń istotną rolę odgrywa proces rekombinacji zerwanych wiązań. Istnieje zatem pewna wartość naprężeń, przy której proces rekombinacji równoważny proces destrukcji wiązań, (włókno zachowuje spistość).

Nadto występuje zależność między ciągłością przemian zachodzących w strukturze nadcząsteczkowej tworzywa włókna w procesie rozciągania a długością badanej próbki. Występuje więc szereg ograniczeń w stosowalności równania Żurkowa podanego w postaci (1).

W praktyce, podczas rozrywania włókien rzadko stosuje się obciążenia stacjonarne. Założenie o nieodwracalności elementarnych aktów destrukcji wiązań, czyli o ich sumowaniu się (co jest do przyjęcia dla dostatecznie dużych naprężeń) prowadzi przy dowolnym programie naprężenia $\sigma(t)$ w stałej temperaturze (T) do równości (2) [20].

$$(2) \quad \int_0^{\tau} \frac{dt}{A \exp[-\alpha\sigma(t)]} = 1,$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{\gamma}{kT},$$

$$A = \tau_0 \exp \frac{U}{kT},$$

Z równania (2) wynika, że podczas zrywania włókien średni czas życia τ zależy od zmian naprężenia $\sigma(t)$. Wielkością charakteryzującą własności wytrzymałościowe tworzywa włókna jest współczynnik strukturalny γ .

Równanie (2) poszerza zakres stosowalności równania (1) i można je przyjąć za kryterium zgodności z teorią Żurkowa w przypadku zmiennych naprężeń. Przy stałej szybkości wzrostu naprężeń σ z równania (2) można wyznaczyć wartości naprężeń zrywających w postaci funkcji

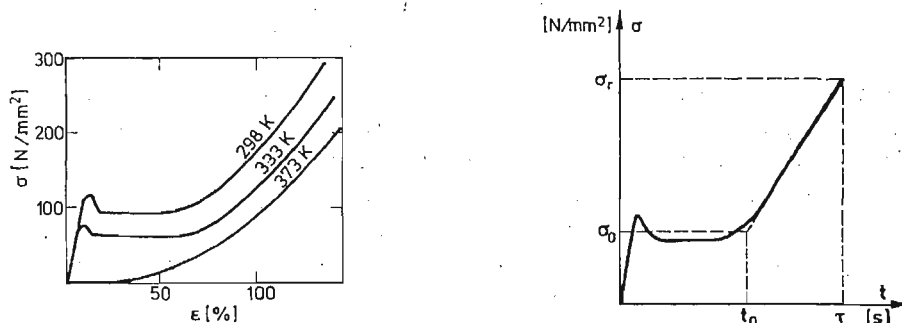
$$(3) \quad \sigma_r = \frac{\ln(A \cdot \alpha)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \ln \dot{\sigma}$$

$$\dot{\sigma} = \text{const}$$

Słuszność powyższego rozumowania (równania 1 i 3) dla różnych materiałów potwierdzają dane doświadczalne w pracy [21].

Wyznaczanie współczynnika strukturalnego γ , oraz energii aktywacji U przy stałej prędkości rozciągania włókien

W praktyce badań wytrzymałościowych włókien na rozciąganie najczęściej prowadzi się ocenę wytrzymałości rozciągając włókno ze stałą prędkością rozciągania. Sprawdzenie kryterium (2) wymaga wówczas znalezienia funkcji $\sigma(t)$ w oparciu o krzywą doświadczalną $\sigma(\epsilon)$ dla każdego przypadku zmiany parametrów strukturalnych tworzywa lub temperatury pomiaru. Na rys. 1 przedstawiono zależności $\sigma(\epsilon)$ dla włókien poliestrowych o niskim



Rys. 1. Doświadczalne zależności $\sigma(\epsilon)$ dla włókien poliestrowych o niskiej orientacji wewnętrznej, w różnych temperaturach rozciągania włókna.

Rys. 2. Sposób wyznaczania stałych σ_0 , σ_r , t_0 , τ z krzywej $\sigma(t)$.

stopniu orientacji wewnętrznej, rozciąganych ze stałą prędkością v , w różnych ustalonych temperaturach T . Zależność $\sigma(t)$ (rys. 2) z dobrym przybliżeniem opisuje funkcja (4):

$$(4) \quad \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{dla } 0 \leq t \leq t_0, \\ \sigma_0 + \frac{\sigma_r - \sigma_0}{\tau - t_0} (t - t_0) & \text{dla } t_0 \leq t \leq \tau. \end{cases}$$

Sposób wyznaczenia stałych σ_0 , σ_r , t_0 , τ dla funkcji aproksymacyjnej (4) podano na rys. 2. Zmiana prędkości rozciągania nie wpływa praktycznie na postać funkcji (4), zmienia jedynie wartości σ_r , t_0 , τ . Podstawiając funkcję (4) do równania (2) i wykonując całkowanie otrzymuje się zależność między czasem życia τ a naprężeniem zrywającym σ_r w postaci

$$(5) \quad \ln \tau = \frac{U_0 - \gamma \sigma_r}{kT} - \ln \frac{kT(1 - \beta)}{\gamma(\sigma_r - \sigma_0) \tau_0},$$

gdzie:

$\beta = \frac{t_0}{\tau} = 0,33$ — czas względny, w którym $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, niezależny od v (rys. 2).

Uwzględniając zależność

$$(6) \quad \tau = \frac{\varepsilon_r \cdot l_0 \cdot 60}{v} \text{ [s]},$$

oraz włączając wolnozmiennie wyrazy równania (5) do stałej C (wprowadza to błąd $\leq 0,5\%$) otrzymuje się zależności:

$$(7) \quad \sigma_T(v) = \frac{kT}{\gamma} \ln v + C_1 \quad \text{gdy } T = \text{const},$$

gdzie:

$$(7a) \quad C_1 = \frac{U_0}{\gamma} - \frac{kT}{\gamma} \ln \frac{\varepsilon_r \cdot l_0 \cdot 60(1-\beta) \cdot kT}{\tau_0(\sigma_r - \sigma_0)\gamma},$$

lub

$$(8) \quad \sigma_{v(T)} = \frac{U}{\gamma} - C_2 T \quad \text{gdy } v = \text{const},$$

w której

$$(8a) \quad C_2 = \frac{k}{\gamma} \ln \frac{\varepsilon_r \cdot l_0 \cdot 60(1-\beta)kT}{v \cdot \tau_0(\sigma_r - \sigma_0)\gamma}.$$

Zależności (7) i (8) pozwalają w oparciu o dane doświadczalne wyznaczyć wartość współczynnika γ i U . BUECHE [11] wychodząc z nieco odmiennych od Żurkowa założeń, lecz także opartych na termofluktuacyjnym charakterze procesu zrywania wiązań w makrocząsteczce, dochodzi do równania analogicznego do równania (7).

Liniowa zależność między naprężeniem zrywającym włókna σ_{uv} jest spełniona dla badanych włókien poliestrowych przy prędkościach rozciągania mniejszych od 300 mm/min.

Równanie (8) nie daje również wartości σ_r zgodnych z doświadczeniem. Wpływ temperatury na wytrzymałość włókien jest znacznie wyższy niż wyrażony w równaniu (8) przez współczynnik kierunkowy C_2 przy czym liniowa zależność $\sigma_v(T)$ jest zachowana.

Podstawową przyczyną niezgodności równania (8) z danymi doświadczalnymi wydaje się być przyjęcie w równaniu (1) jako energii aktywacji, niezależnej od temperatury energii dysocjacji wiązań głównych w łańcuchu makrocząsteczki. W tworzywach z polimerów organicznych istotną rolę odgrywa kohezja cząsteczkowa. W temperaturach niskich, w których ruchliwość grup bocznych łańcucha głównego jest niewielka, wiązania międzycząsteczkowe przenoszą część naprężeń działających na makrocząsteczkę na pewien obszar jej otoczenia. W takim przypadku fragmentaryzacja makrocząsteczki jest możliwa dopiero po przekroczeniu bariery energetycznej równej sumie energii dysocjacji wiązań głównych (U_d) i energii kohezji cząsteczkowej (U_k).

$$(9) \quad U_0 = U_d + U_{k0}.$$

Ze wzrostem temperatury wzrasta ruchliwość cieplna łańcucha makrocząsteczki i jej grup bocznych, zatem wpływ wiązań międzycząsteczkowych na degradację makrocząsteczki maleje. Oznacza to, że U_k maleje ze wzrostem temperatury. Z doświadczenia wynika,

że zależność ta jest liniowa w szerokim przedziale temperatur. Można więc napisać, że:

$$(10) \quad U_k = U_{k_0} - \alpha T,$$

lub

$$(11) \quad U = U_0 - \alpha T,$$

Dane doświadczalne zawarte w pracy [22], otrzymane dla poliamidu 6 w zakresie temperatur 253 - 330 K, potwierdzają słuszność równania (11).

Konsekwencje przyjęcia w równaniu Żurkowa liniowej zależności $U(\sigma)$

Występująca w równaniu (1) energia aktywacji przedstawiona jest w postaci liniowej funkcji naprężenia, co stanowi duże uproszczenie, zwłaszcza gdy badane tworzywo poddawane jest naprężeniom w szerokim przedziale wartości. W celu określenia konsekwencji takiego uproszczenia prześledzmy jedną z metod obliczania energii aktywacji.

Energję potencjalną dwóch atomów połączonych wiązaniem głównym w zależności od odległości środków ciężkości tych atomów można opisać równaniem Morse'a (rys. 3a):

$$(12) \quad U = U_0 + U_d[1 - e^{-b(r-r_0)}]^2,$$

gdzie:

U_0 — wartość energii w stanie równowagi (głębokość studni potencjału),

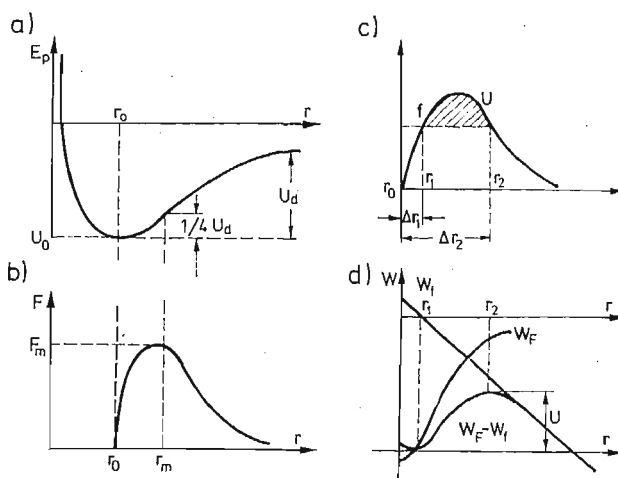
U_d — energia dysocjacji wiązania,

r_0 — odległość między atomami w stanie równowagi,

b — stała.

Siła potrzebna do rozciągnięcia wiązania głównego będzie równa (rys. 3b):

$$(13) \quad F = \frac{dU}{dr} = 4Fm[e^{-b(r-r_0)} - e^{-2b(r-r_0)}],$$



Rys. 3. a) Krzywa zmiany energii potencjalnej głównego wiązania chemicznego według r . Morse'a. b) Siła oddziaływania atomów w dwuatomowej cząsteczce w funkcji odległości. c) i d) Sposób wyznaczania energii aktywacji destrukcji wiązania przy stałej sile rozciągającej f .

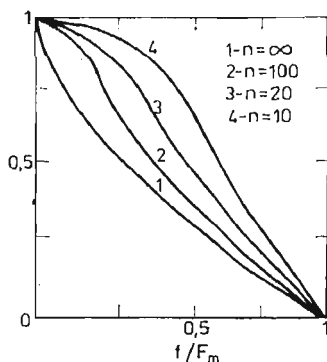
gdzie:

$$F_m = \frac{b}{2} U_d \text{ — maksymalna wartość } F(r).$$

Energia aktywacji procesu zrywania wiązań pod działaniem stałej siły f równa jest pracy potrzebnej do przejścia atomu z położenia równowagi trwałej przy deformacji Δr_1 do położenia równowagi chwiejnej przy deformacji Δr_2 (rys. 3c i 3d):

$$(14) \quad U(f) = \int_{\Delta r_1}^{\Delta r_2} [F(r) - f] dr = U_d \left[\sqrt{1 - \frac{f}{F_m}} - \frac{f}{2F_m} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{f}{F_m}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{f}{F_m}}} \right].$$

Rys. 4 przedstawia zależność energii aktywacji od przyłożonej siły rozciągającej wiązanie dla różnych ilości (n) ogniw merowych w łańcuchu makrocząsteczki [25].



Rys. 4. Zależność energii aktywacji od siły przyłożonej do makrocząsteczki dla różnych długości łańcucha [26]. Ilość ogniw merowych w łańcuchu makrocząsteczki: 1 — ∞ , 2 — 100, 3 — 20, 4 — 10.

Równanie (14) z dobrym przybliżeniem opisuje zależność $U(f)$ dla makrocząsteczek o wysokim stopniu polimeryzacji ($n \rightarrow \infty$).

Krzywe z rys. 4 przedstawiają także z dokładnością do stałej przebieg zmienności funkcji $\ln \tau \left(\frac{f}{F_m} \right)$ dla stacjonarnych naprężeń rozrywających przy $T = \text{const}$:

$$(15) \quad \frac{U}{U_d} = \frac{kT}{U_d} \ln \frac{\tau}{\tau_0}.$$

O liniowej zależności można tu mówić jedynie dla wąskich przedziałów wartości naprężeń stacjonarnych, przy czym nachylenia prostych zmieniają się w kolejnych przedziałach. A zatem przybliżenie liniowe prowadzi do różnych wartości energii dysocjacji U_d w zależności od rozważanego przedziału naprężeń rozrywających. Przebiegi krzywych dla skrajnych wartości f/F_m nie mają praktycznego znaczenia, gdyż dla wartości bliskich zera występuje silny efekt rekombinacji wiązań, natomiast wartości bliskie jedności są praktycznie nieosiągalne — przyłożenie zewnętrznej siły rozrywającej wywołuje ustalenie się naprężeń lokalnych w próbce w skończonym różnym od zera przedziale czasu, a więc rozerwanie zachodzi przed osiągnięciem maksymalnej wartości naprężeń średnich. Ogólnie można stwierdzić, że dla małych wartości n (np. kryształy metaliczne) równanie (1) daje

zawsze zawyżone wartości $U_d (U_0 > U_d)$, natomiast dla n z przedziału 50 - 150 (np. polimery) otrzymujemy przy małych wartościach $f/F_m U_0 > U_d$, zaś przy dużych — $U_0 < U_d$.

Rozpatrzmy z kolei przypadek zmiennych naprężeń opisanych równaniem (4), przyjmując energię aktywacji w postaci (14). Wprowadzimy przy tym oznaczenie

$$(16) \quad z = \frac{f}{F_m} = \frac{q \cdot \sigma}{\sigma_t},$$

gdzie:

σ — naprężenie średnie,

σ_t — naprężenie teoretyczne (wytrzymałość teoretyczna),

q — współczynnik spiętrzenia naprężeń lokalnych.

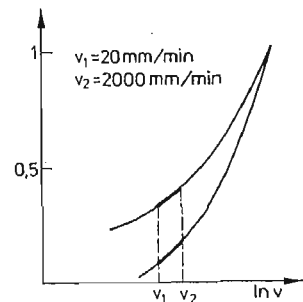
Analiza intensywności przebiegu procesu destrukcji na podstawie równania (2), przy liniowo zmiennych naprężeniach wykazuje, że ponad 99% aktów destrukcji wiązań głównych zachodzi w końcowym przedziale wartości (z) o szerokości $z_r - z = 0,1$, niezależnie

od wartości $z_r \left(z_r = \frac{q \cdot \sigma_r}{\sigma_t} \right)$.

Fakt ten pozwala na następujące uproszczenia w rozważaniach ilościowych: granice w równaniu (2) można zredukować do przedziału t_0, τ , gdyż w początkowej fazie rozciągania występuje głównie przegrupowanie jednostek kinetycznych tworzywa bez zrywania wiązań głównych, ponadto funkcję (14) można do całkowania zastąpić styczną w punkcie z_r . Prowadzi to do następującej zależności:

$$(17) \quad \ln v = \ln \frac{\varepsilon_r \cdot l_n \cdot 60(1-\beta)kT}{-z \ln \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}} \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_r}\right) \tau_0 u_d} - \frac{u_d}{kT} \left(\sqrt{1-z} + z_0 \ln \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}} \right).$$

Przebieg zmienności funkcji (17) przedstawiony jest dla dwóch różnych wartości energii na rys. 5. W przedziale prędkości stosowanych w eksperymencie (linia ciągła



Rys. 5. Przebieg zmienności funkcji $z(\ln v)$ dla różnych wartości energii aktywacji (r. 17).

na rys. 5) przebieg jest z dobrym przybliżeniem prostoliniowy, a więc analogiczny do opisanego równaniem (7). Sposób postępowania, prowadzący do równania (17) eliminuje wpływ na wartość energii dysocjacji przybliżenia występującego w równaniu Żurkova w postaci liniowej zależności $U(\sigma)$.

Jednakże i w tym przypadku dane doświadczalne wskazują na zależność energii aktywacji od temperatury, przy czym wartość energii dysocjacji otrzymana z równania (17) jest wyższa niż przy stosowaniu równania (8). Wynika to stąd, że dla poliestrów n wynosi 100 - 140, a więc $U(z)$ odpowiada krzywej 2 na rys. 4. Równanie (17) można wykorzystać do oszacowania wartości z , odpowiadających eksperymentalnym wartościom σ_r . I tak dla $T = 298$ K otrzymujemy $z = 0,39 - 0,42$ a dla $T = 453$ K $z = 0,25 - 0,27$. Równanie stycznej do krzywej 2 w przedziale pierwszym daje dobrą zgodność z przybliżeniem Żurkowa, natomiast stosując równanie Żurkowa do danych z drugiego przedziału należałoby oczekiwać wyższych wartości U_d (efekt przeciwny do obserwowanego w eksperymencie).

Reasumując, można stwierdzić że obserwowane dla poliestrów odstępstwa od teorii Żurkowa wynikają z pominięcia w równaniu (1) oddziaływań między cząsteczkowych, natomiast przyjęcie liniowej zależności $U(\sigma)$ może jedynie zmieniać wartość współczynnika w równaniu (11). Równanie Żurkowa w postaci (1) może więc stanowić podstawę do analizy jakościowej wpływu oddziaływań międzycząsteczkowych na proces destrukcji podczas rozciągania tworzywa. Wpływ ten powinien ujawnić się w postaci zależności $U(T)$ oraz $\gamma(v, T)$.

Wpływ temperatury i prędkości rozciągania włókien na wartość współczynnika strukturalnego γ

Wzrost temperatury wpływa nie tylko na wartość energii aktywacji (11), lecz także na koncentrację naprężeń podczas rozciągania próbki.

Wskutek różnej długości i kształtu makrocząsteczek łączących poszczególne obszary krystaliczne oraz ich silnego powiązania wzajemnego, rozciąganiu próbki towarzyszy bardzo nierównomierny rozkład sił działających na makrocząsteczki. Powoduje to sukcesywne zrywanie łańcuchów makrocząsteczek, przy czym w pierwszej kolejności ulegają naprężeniu i rozrywaniu makrocząsteczki łączące o najmniejszej długości i najbardziej wyprostowane, a następnie dłuższe i bardziej skłębione. Tak więc, naprężenie rozciągające jest przenoszone przez względnie małą liczbę makrocząsteczek. Ilościowo efekt ten ujmuje współczynnik strukturalny γ .

W niskich temperaturach (poniżej temp. zeszklenia T_g) ze względu na małą ruchliwość termiczną łańcuchów lub ich fragmentów oraz grup bocznych, oddziaływania międzycząsteczkowe są znaczne. Rozkład naprężeń jest wówczas optymalny dla danych parametrów strukturalnych tworzywa włókna. Ze wzrostem temperatury zmniejsza się udział długich, silnie skłębionych, makrocząsteczek w przenoszeniu naprężeń. Wynika z tego, że wzrost temperatury powoduje wzrost wartości współczynnika γ . Proces przegrupowywania makrocząsteczek i obszarów krystalicznych, rozwijania i rozprostowywania skłębionych łańcuchów makrocząsteczek powoduje wzrost stopnia orientacji tworzywa włókna. Towarzyszy temu relaksacja naprężeń w obszarach o dużej ich koncentracji zwiększającą równomierność rozkładu naprężeń. Stopień zrelaksowania naprężeń wzrasta z czasem trwania procesu. Nie eliminuje to jednak destrukcji wiązań, zwłaszcza w makrocząsteczkach silniej naprężonych, przy czym prawdopodobieństwo rozerwania wiązania w wyniku termofluktuacji rośnie z czasem działania naprężenia. Oba procesy wywołują przeciwny wpływ na wytrzymałość tworzywa poddanego naprężeniom rozciągającym. Wynika

z tego, że istnieje taki czas życia próbki, przy którym występują najmniej korzystne warunki dla procesu destrukcji, a więc naprężenia zrywające σ_r osiągają wartość maksymalną.

Zależność $\sigma_r(\ln v)$ nie może więc być liniową [22, 24] ani monotonicznie zmienną.

Proces częściowej relaksacji naprężeń zmniejsza się ze wzrostem prędkości, zatem wzrost prędkości wywołuje zwiększenie γ . Wprowadźmy współczynnik korekcyjny $\beta(v, T)$ i niech

$$(18) \quad \gamma = \frac{\gamma_0}{\beta(v, T)}.$$

Wielkości v oraz T wpływają na γ w sposób niezależny, można więc napisać, że:

$$(19) \quad \beta(v, T) = f_1(v) \cdot f_2(T).$$

Ilościowy wpływ przegrupowania makrocząsteczek na wartość naprężeń można rozpatrzeć w pierwszym przybliżeniu w oparciu o model reologiczny Kelvina — Voigta. Związek między wydłużeniem względnym ε podczas pełzania tworzywa włókna a naprężeniami stacjonarnymi w funkcji czasu, opisuje równanie:

$$(20) \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{E}{\eta} \cdot t \right] \right\}$$

gdzie:

- σ — naprężenie,
- E — moduł Younga,
- η — współczynnik lepkości,
- t — czas.

Zakładając, że wartości chwilowe σ i ε spełniają równanie (20) dla poszczególnych makrocząsteczek przy zmiennych obciążeniach, wpływ szybkości rozciągania włókna na wartość naprężeń lokalnych można określić porównując naprężenia przy jednakowych wartościach ε dla $v = 0$ (maksymalna relaksacja — σ_0) i dowolnej wartości v (relaksacja częściowa — σ), zatem

$$(21) \quad \sigma = \frac{\sigma_0}{1 - \exp \left(- \frac{\text{const}}{v} \right)}.$$

Ze wzrostem stopnia relaksacji naprężeń rośnie liczba makrocząsteczek przenoszących działanie sił zewnętrznych, w wyniku czego naprężenia makroskopowe w znacznie mniejszym stopniu zależą od prędkości rozciągania. Równanie (21) odzwierciedla jedynie wpływ prędkości na spiętrzenie naprężeń lokalnych. Wynika stąd, że funkcja $f_1(v)$ może mieć postać:

$$(22) \quad f_1(v) = 1 - \exp \left(- \frac{\text{const}}{v} \right).$$

Na drodze empirycznej otrzymano, że:

$$(23) \quad f_1(v) = 1 - C \exp \left(- \frac{v_0}{v} \right),$$

oraz

$$(24) \quad f_2(T) = 1 - \frac{T}{T_0}$$

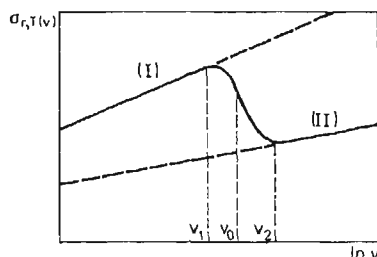
gdzie:

C, v_0, T_0 — stałe

Stała C obrazuje nierównomierność procesu relaksacji naprężeń w poszczególnych makrocząsteczkach obszaru bezpostaciowego. Ostatecznie współczynnik korekcyjny $\beta(v, T)$ przyjmuje postać:

$$(25) \quad \beta(v, T) = \left[1 - C \exp\left(-\frac{v}{v_0}\right) \right] \cdot \left(1 - \frac{T}{T_0} \right)$$

Na rysunku 6 przedstawiony jest schematycznie przebieg zmienności funkcji $\sigma_r(v)$ na podstawie równania (7) z uwzględnieniem funkcji $f_1(v)$ (23).



Rys. 6. Przebieg zmienności funkcji $\sigma_r(v)$ wyliczony na podstawie równania (7) z uwzględnieniem funkcji $f_1(v)$.

Przy małych szybkościach rozciągania czas trwałości próbki jest dostatecznie długi do pełnego, maksymalnego dla danej próbki przegrupowania makrocząsteczek lub ich zespołów, niezależnie od szybkości rozciągania. Współczynnik strukturalny γ_1 , decydujący o nachyleniu odcinka prostej (I) z rysunku 6 ma wartość odpowiadającą strukturze tworzywa w momencie zerwania, jednakową dla wszystkich próbek.

Przy dużych szybkościach rozciągania rozkład naprężeń lokalnych jest funkcją parametrów struktury wyjściowej próbki. Czas trwałości jest zbyt krótki, aby podczas rozciągania zaszły w próbce istotne zmiany strukturalne. Współczynnik strukturalny γ_2 jest więc także niezależny od szybkości rozciągania, przy czym $\gamma_2 > \gamma_1$. Odpowiada to odcinkowi prostoliniowemu (II) krzywej z rysunku 6.

Dla tworzyw kruchych współczynniki γ_1 i γ_2 mogą być w przybliżeniu równe. W takim przypadku nie wystąpi obniżenie wytrzymałości przy dużych szybkościach rozciągania.

Wyniki pomiarów

Pomiary wytrzymałości badanych włókien poliestrowych prowadzono na zrywarcie Instron model 1122, stosując szybkość rozciągania 20 - 2000 mm/min w temperaturach 298 - 453 K. Minimalna długość próbek była ograniczona konstrukcją komory temperaturowej i wynosiła $l_0 = 100$ mm. Średnica przekroju poprzecznego włókna była równa $d = 0,025$ mm. W celu wyeliminowania wpływu skurczu termicznego wyraźnie ujawniającego się w temperaturach powyżej T_g , próbki wprowadzone były w szczękę zrywarki za pomocą specjalnego uchwytu, zapewniającego ich stałą długość początkową (dokładniej — stałą masę próbek).

Naprężenie zrywające badanych włókien w funkcji v i T , przy stałej prędkości rozciągania w ustalonej temperaturze obliczono z równania (5) przy uwzględnieniu funkcji (19) i (25).

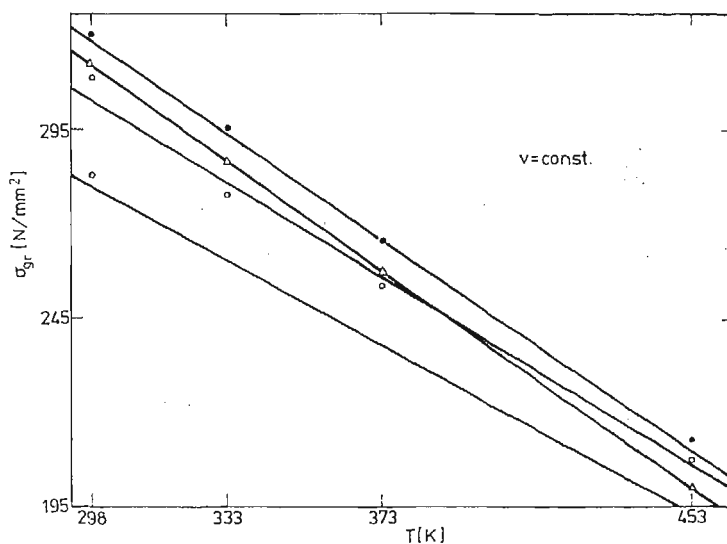
Ostatecznie po przekształceniu równanie (5) ma postać:

$$(26) \quad \sigma_r(v, T) = \left[\frac{U_0 - \alpha T}{\gamma_0} - \frac{kT}{\gamma_0} \ln \frac{\varepsilon_r \cdot l_0 \cdot 60 \cdot (1 - \beta) kT}{v \cdot \tau_0 (\sigma_r - \sigma_0) \gamma} \right] \times \\ \times \left[1 - C \exp \left(- \frac{v_0}{v} \right) \right] \cdot \left(1 - \frac{T}{T_0} \right)$$

Przy stałych prędkościach rozciągania $v < 300$ mm/min, ($\dot{\varepsilon} < 3$ min⁻¹) i $T = \text{const}$ równanie (26) przechodzi w zależność liniową podobną do równania (7). Wprowadzenie współczynnika $f_2(T)$ zmienia nieco wartość U_0 i γ_0 w porównaniu z obliczonymi z równania (7). Wartości stałych otrzymane z równania (26) przy uwzględnieniu danych doświadczalnych wynoszą:

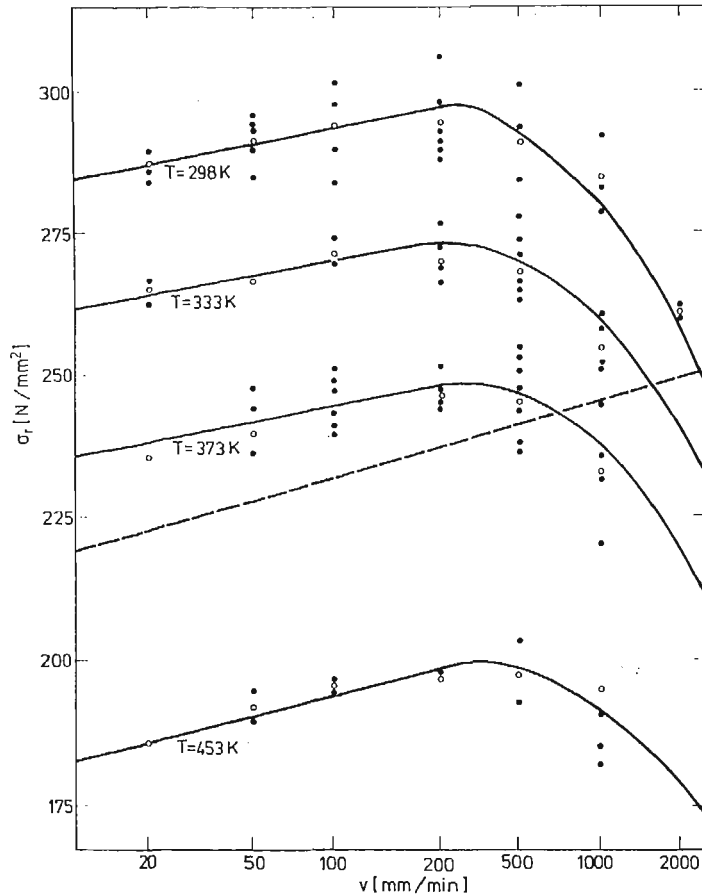
$$U_0 = 74,9 \text{ [kcal/mol]}, \quad \gamma = 1,344 \text{ [kcal/mol/kG/mm}^2\text{]}, \\ T_0 = 3130 \text{ K}, \quad V_0 = 1400 \text{ [mm/min]}, \quad \alpha = 0,03 \text{ [kcal/mol} \cdot \text{K]}, \\ C = 0,3.$$

Na rys. 7 przedstawiono wykresy przebiegu zmienności $\sigma_{r,T}(\ln v)$ na podstawie równania (26), oraz dane doświadczalne.



Rys. 7. Przebieg zmienności funkcji $\sigma_{r,T}(v)$ dla różnych wartości T (wg r. 26) oraz dane doświadczalne.

Rys. 8 ilustruje analogiczne zależności temperaturowe $\sigma_{r,v}(T)$. Z porównania krzywych wynika, iż zgodność równania (22) z danymi doświadczalnymi jest duża. Średnie odchylenie standardowe dla poszczególnych punktów pomiarowych (średnia z 20 pomiarów wykonanych dla włókien elementarnych składających się na przędzę), oraz dla wartości średnich przędzy, są tego samego rzędu i zawierają się w przedziale 0,1 - 0,2 kG/mm².



Rys. 8. Przebieg zmienności funkcji $\sigma_{r,v}(T)$, dla różnych wartości v (wg r. 26) oraz dane doświadczalne.

Tabela 1. Wyniki pomiarów wartości U i γ dla włókien poliestrowych o niskiej orientacji wewnętrznej

TK	0	298	333	373	453	530
U [kcal/mol]	74,9	66,0	64,9	63,7	61,3	59,0
U [J/mol]	314	277	272	267	257	247
γ $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{mol}} / \frac{\text{kG}}{\text{mm}^2} \right]$	1,34	1,49	1,50	1,53	1,57	1,62

W tabeli (1) zestawiono wartości energii aktywacji obliczonej z równania (26) dla badanych włókien poliestrowych w przedziale temperatur 298 - 453 K. Ekstrapolując te wartości dla $T = 0$ K, otrzymamy, że $U_0 = 74,9$ [kcal/mol], zaś dla temperatury topnienia włókna $T_f = 530$ K, $U_T = 59,0$ [kcal/mol].

Można więc stwierdzić, że wpływ grup bocznych łańcucha głównego na przenoszenie naprężeń zanika dopiero w pobliżu temperatury topnienia tworzywa włókna, czyli gdy $U_d = U_T$.

Wartość energii dysocjacji U_d i energii kohezji cząsteczkowej U_{k0} znalezione przez PIEREPELKINA [23] wynoszą odpowiednio: $U_d = 62,6 - 68,9$ [kcal/mol], $U_{k0} = 11,0 - 14,6$ [kcal/mol] i dobrze spełniają równanie (9).

Podsumowanie

Przedstawione wyniki pomiarów potwierdzają termofluktuacyjny charakter procesu destrukcji tworzywa włókna poliestrowego podczas rozciągania, stanowiący podstawę teorii Żurkowa. Nieuzasadnione jest jednak przyjęcie w równaniu (1) stałej wartości energii dysocjacji wiązań głównych w makrocząsteczce tworzywa włókna. Wydaje się koniecznym uwzględnienie energii kohezji cząsteczkowej. W skrajnym przypadku oddziaływania pomiędzy makrocząsteczkami mogą decydować o wytrzymałości, gdyż znaczna część makrocząsteczek łączących może ulec wysunięciu bez zerwania wiązań głównych. Jedynie dla włókien o wysokim stopniu krystaliczności wpływ temperatury na wartość U , a także γ , może być pomijany. Dla włókien o niskim stopniu orientacji nie można pomijać także procesu przegrupowywania makrocząsteczek i obszarów uporządkowanych, powodującego zmianę rozkładu naprężeń lokalnych. Należy więc uwzględnić wpływ szybkości rozciągania na wartość γ . Dla włókien poliestrowych zależność naprężeń rozrywających σ_r od $\ln v$ jest nieliniowa. Przy dużych szybkościach rozciągania występuje znaczne zmniejszenie wytrzymałości tworzywa włókna w porównaniu z przewidywaną przez teorię Żurkowa.

Literatura cytowana w tekście

1. A. M. FREUDENTHAL, H. GEIRINGER, *Encyclopedie of Physics*, vol. VI, Berlin, Springer Verlag 1958.
2. C. TRUESDELL, R. A. TAUPIN, *Handbuch der Physik*, Berlin 1960. Bd. III/1 str. 226.
3. W. NOLL, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **3**, 195 1958.
4. B. D. COLEMAN, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **17**, 197/1964.
5. A. C. ERINGEN, *Nonlinear Theory of Continous Media*. London 1962, McGraw-Hill.
6. W. NOWACKI, *Teoria pelzania*, Warszawa 1963, Arkady.
7. P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastyczności*, Warszawa 1968, PWN.
8. B. ZIMM, *Journal Chem. Phys.* **24**, 269, 1956.
9. P. E. ROUSE, *Journal Chem. Phys.* **21**, 1272, 1953.
10. R. CERFA, *Journal Phys. Rad.* **19**, 122, 1957.
11. F. J. BUCHE, *Journal Appl. Phys.* **26**, 1133, 1955, **28**, 784, 1957, **29**, 123, 1958.
12. A. PETERLIN, *Journal Polimer Sci.* **A2**, 7, 1151, 1969.
13. V. A. KARGIN, G. L. SLONIMSKIJ, *Kratkije očerki po fiziko-chimii polimerov*. Moskwa 1967, Izd. „Chimija”.
14. J. ZAWADZKI, *Problemy wyteżenia i znużenia polimerów jako tworzyw konstrukcyjnych*, Warszawa 1979, PWN.
15. G. W. URBAŃCZYK, *Fizyka włókna*, Warszawa 1974, PWN.
16. L. R. G. TRELOAR, *Trans. Far. Soc.*, **40**, 324, 1944.
17. S. N. ŻURKOW, S. A. ABASOW, *Wysokomol. Sojed.* **3**, 441, 650, 1961.
18. S. N. ŻURKOW, S. A. ABASOW, *Wysokomol. Sojed.* **4**, 1703, 1962.
19. S. N. ŻURKOW, *Fiz. Twierd. Tiela*, **4**, 2184, 1962.
20. J. BAILEY, *Glass Industry*, **20**, 21, 1939.

21. W. R. REGIEL, *Minetičeskaja priroda pročnosti twierdych tiel*, Moskwa 1974, Izd. Nauka.
22. S. MAZURKIEWICZ, *Zeszyty Naukowe Politech. Krakowskiej* 22, 9 (1975).
23. К. Е. ПЕРЕПИЕЛКИН, *Chim. Volok.* 2, 3, 1966, *Faserforschung u. Textiltechnik*, 22, 4, 171, 1971.
24. G. WŁODARSKI, *Włókna Chemiczne*, Warszawa 1977, WNT.
25. E. TOMASZEWSKI, *Fiz. Twierd. Tiela*, 12, 3202, 1970.

Р е з ю м е

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И СКОРОСТИ РАСТЯЖЕНИЯ НА ПРОЧНОСТЬ
ПОЛИЭФИРНЫХ ВОЛОКОН С МАЛОЙ ВЫТЯЖКОЙ

В работе дана модификация уравнения Журкова, расширяющая предел его применения на вещества, характеризующиеся течением во время растяжения.

Для таких веществ структурный коэффициент γ зависит от скорости растяжения и температуры.

Эффектом этого является потеря прочности вещества с увеличением скорости при больших её величинах и значительно сильнее влияние температуры на прочность, чем предполагает Журков.

Кроме того учтено влияние межмолекулярных связей на напряжения в веществе, ответственное за линейное падение энергии активации процесса демутации при повышении температуры. Анализ уравнения Журкова подтвержден результатами измерений проведенными для полиэфирных волокон с малой вытяжкой.

S u m m a r y

INFLUENCE OF TEMPERATURE AND STRETCHING RATE ON THE STRENGTH
OF POLYESTER FIBRES OF SMALL ELONGATION

The modification of Žurkov equation widening the range of its application for materials characterized by strong flow during stretching is described in this paper. For such materials the structural coefficient γ is stretching rate and temperature-dependent. This results in loss of material strength with rise in stretching rate, when stretching rate reaches high value, and temperature dependence considerably greater than it is assumed by Žurkov. Moreover, the effect of intermolecular bounds on stress transfer in material, responsible for linear loss in activation energy of destruction with increase in temperature has been regarded. Taken into account.

The analyses of Žurkov equation has been confirmed by data of measurements carried out on polyester fibres of small elongation.

INSTYTUT WŁÓKIENNICZY
FILIA POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ — BIELSKO-BIAŁA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lipca 1979 roku.

ANALIZA KONSTRUKCJI PRĘTOWO-TARCZOWYCH METODĄ
ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

EUGENIUSZ RUSIŃSKI (WROCLAW)

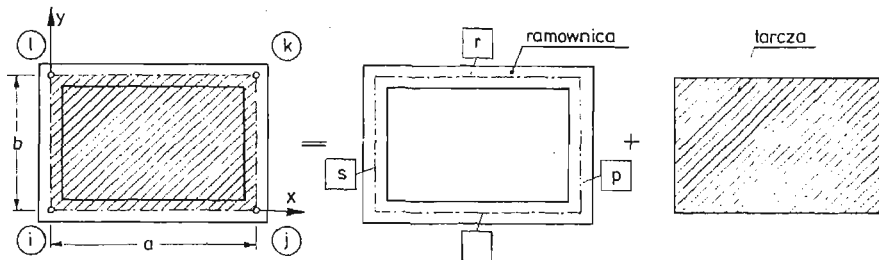
1. Wstęp

W metodzie elementów skończonych, jak wiadomo, istotną sprawą jest wyznaczenie macierzy sztywności, za pomocą której wyraża się siły uogólnione w węzłach w funkcji przemieszczeń węzłowych. W konstrukcjach prętowo-tarczowych występują elementy prętowe i tarczowe. Znane są w postaci jawnej macierze sztywności zarówno pręta, jak i tarczy, które zostały omówione m.in. w [1], [2], ..., [9]. Dla przeprowadzenia analizy konstrukcji prętowo-tarczowej i skrócenia czasu liczenia na EMC, celowe jest określenie w postaci jawnej macierzy sztywności elementu prętowo-tarczowego. Pozwoli to bezpośrednio podzielić konstrukcję tylko na elementy prętowo-tarczowe.

2. Określenie macierzy sztywności elementu prostokątnego prętowo-tarczowego

Istnieją dwie drogi określenia macierzy sztywności na drodze energetycznej lub też, jak to czyni się w niniejszej pracy, metodą superpozycji, polegającej na złożeniu macierzy sztywności ramownicy składającej się z 4 prętów i macierzy sztywności samej tarczy (rys. 1). Macierz sztywności elementu prętowo-tarczowego wyraża się równaniem

$$(2.1.) \quad [k_{r-t}] = [k_r] + [k_t],$$



Rys. 1. Prostokątny element prętowo-tarczowy.

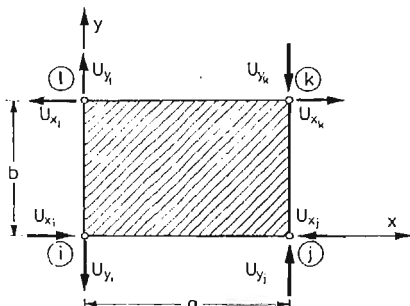
gdzie: $[k_r]$ — macierz sztywności ramownicy prętowej,

$[k_t]$ — macierz sztywności elementu tarczy.

Prostokątny element tarczy połączony jest z dowolnymi elementami prętowymi n , p , r , s wzdłuż krawędzi tarczy w sposób ciągły (rys. 1). Przy formułowaniu funkcji kształtu

tarczy, w celu zapewnienia ciągłości połączenia prętów z tarczą, przyjmuje się jednakowe przemieszczenia dla tarczy i prętów w miejscu połączenia.

2.1. Macierz sztywności prostokątnego elementu tarczy. Przedstawiony na rys. 2 typowy element prostokątny o węzłach i, j, k, l numerowanych odwrotnie do ruchu wskazówek



Rys. 2. Prostokątny element tarczy.

zegara, ma początek układu współrzędnych w węźle i . Macierz sztywności takiego elementu ma postać:

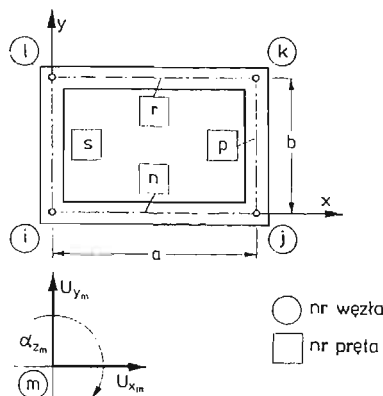
$$(2.1.1.) \quad [k_t] = \frac{Et}{12(1-\nu^2)} \times$$

	z_1	$\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_2	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{1}{2}z_1$	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_3	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$
	z_4	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_5	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-\frac{1}{2}z_4$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_6	z_6
	z_1	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_3	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{1}{2}z_1$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_2	$\frac{3}{2}(1-\nu)$
\times	z_4	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_6	$\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-\frac{1}{2}z_4$	$\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_5	$-\frac{1}{2}z_4$
	z_1	$\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_2	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_4	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$
	z_3	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_5	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_1	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$
	z_5	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_4	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_3	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$
	z_4	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_3	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_2	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$

Wyprowadzenie macierzy sztywności prostokątnego elementu tarczy dla układu współrzędnych w środku ciężkości zostało przedstawione w pracach [2 i 4].

2.2. Macierz sztywności ramownicy jednoobwodowej. Rozważana ramownica jest zbudowana z czterech prętów (n, p, r i s) połączonych ze sobą sztywno (rys. 3). Macierz sztywności $[k_r]$ takiej ramownicy jest zbudowana z macierzy sztywności $[k]$ poszczególnych elementów prętowych transponowanych do układu współrzędnych ramownicy. Wyprowadzenia

macierzy sztywności pręta obustronnie utwierdzonego przedstawiono między innymi w pracach [1], [4], [5], [6], [8]. Macierze sztywności przykładowego pręta „n” ma postać:



Rys. 3. Ramownica prostokątna jednoobwodowa.

$$(2.2.1.) \quad [k^n] = \begin{bmatrix} \frac{EF_n}{a} & 0 & 0 & -\frac{EF_n}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_{zn}}{a^3} & \frac{6EJ_{zn}}{a^2} & 0 & -\frac{12EJ_{zn}}{a^3} & \frac{6EJ_{zn}}{a^2} \\ 0 & \frac{6EJ_{zn}}{a^2} & \frac{4EJ_{zn}}{a} & 0 & \frac{2EJ_{zn}}{a} & \frac{2EJ_{zn}}{a} \\ 0 & 0 & \frac{4EJ_{zn}}{a} & \frac{EF_n}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_{zn}}{a^3} & \frac{6EJ_{zn}}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_{zn}}{a^2} & \frac{4EJ_{zn}}{a} \end{bmatrix}$$

Transformację poszczególnych macierzy sztywności prętów (2.2.1.) przedstawić można zależnością

$$(2.2.2.) \quad \dots \quad [k^m] = [C]^T [k^m]' [C]$$

gdzie:

$[C]$ — macierz transformacji z układu globalnego ramownicy do układu lokalnego pręta o wymiarze (3×3) ,

$[C]^T$ — macierz transponowana macierzy transformacji. Macierz transformacji ma postać

$$(2.2.3) \quad [C] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku kąt β przyjmuje dwie wartości (rys. 3), zależnie od położenia pręta w ramownicy, 0° lub 90° . Uwzględniając (2.2.1) i (2.2.2) oraz dokonując przekształceń macierz sztywności ramownicy (rys. 3) przedstawić można w postaci

$$(2.2.4) \quad [k_r] = E \begin{bmatrix} [k_{i-i}^{n+s}] & [k_{i-j}^n] & 0 & [k_{i-l}^s] \\ [k_{j-i}^n] & [k_{j-j}^{n+p}] & [k_{j-k}^p] & 0 \\ 0 & [k_{k-j}^p] & [k_{k-k}^{p+k}] & [k_{k-l}^r] \\ [k_{i-i}^s] & 0 & [k_{i-k}^r] & [k_{i-l}^{r+l}] \end{bmatrix} \begin{matrix} ,,i'' \\ ,,j'' \\ ,,k'' \\ ,,l'' \end{matrix}$$

gdzie: elementy $[k_{i-j}]$ są podmacierzami kwadratowymi o wymiarach (3×3) . Podmacierze te wyznaczono w postaci jawnej i przykładowo wynoszą:

$$(2.2.5) \quad [k_{i-i}^{n+s}] = \begin{bmatrix} \frac{F_n}{a} + \frac{12J_{z_s}}{b^3} & 0 & \frac{6J_{z_s}}{b^2} \\ 0 & \frac{12J_{z_n}}{a^3} + \frac{F_s}{b} & \frac{6J_{z_s}}{a^2} \\ \frac{6J_{z_s}}{b^2} & \frac{6J_{z_n}}{a^2} & 4\left(\frac{J_{z_n}}{a} + \frac{J_{z_s}}{b}\right) \end{bmatrix},$$

$$[k_{i-j}^n] = \begin{bmatrix} -\frac{F_n}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12J_{z_n}}{a^3} & \frac{6J_{z_n}}{a^2} \\ 0 & -\frac{6J_{z_n}}{a^2} & \frac{2J_{z_n}}{a} \end{bmatrix},$$

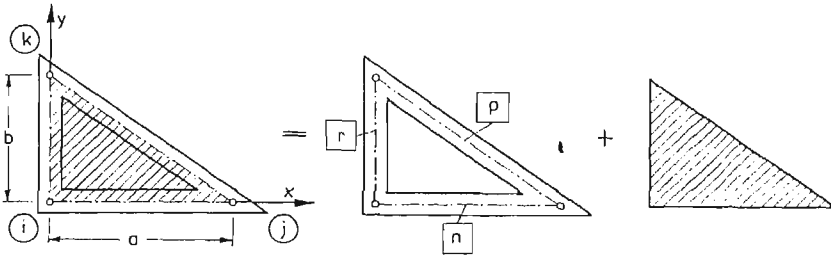
$$[k_{i-l}^s] = \begin{bmatrix} -\frac{12J_{z_s}}{b^3} & 0 & \frac{6J_{z_s}}{b^2} \\ 0 & -\frac{F_s}{b} & 0 \\ -\frac{6J_{z_s}}{b^2} & 0 & \frac{2J_{z_s}}{b} \end{bmatrix},$$

gdzie a i b , J_z , F oznaczają odpowiednio: długości prętów, moment bezwładności na zgięcie i pole przekroju pręta.

2.3. Macierz sztywności elementu prostokątnego prętowo-tarczowego. Po określeniu macierzy sztywności prostokątnego elementu tarczy (2.1.14) oraz macierzy sztywności ramownicy (2.2.4) przeprowadzono dodawanie dwóch macierzy według (1). Dodawanie to nie jest wykonywane wprost, gdyż macierz opisana równaniem (2.1.14) jest o wymiarze (8×8) i w tej macierzy występują tylko przemieszczenia u_x , u_y w każdym węźle. Natomiast w węzłach ramownicy oprócz przemieszczeń liniowych u_x , u_y występuje obrót α_z względem osi z . Dlatego też do węzłów tarczy wprowadza się dodatkowo zerowy pozorny obrót $\alpha'_z = 0$ względem osi z , w wyniku czego uzyskuje się macierz sztywności tarczy o wymiarze (12×12) . Po przekształceniach i dodaniu obu macierzy otrzymano w jawnej postaci macierz sztywności elementu prostokątnego prętowo-tarczowego (tabl. 1).

3. Macierz sztywności elementu trójkątnego prętowo-tarczowego

Postępując podobnie jak wyżej wyznacza się macierz sztywności elementu trójkątnego, składającego się z tarczy połączonej na swoich krawędziach w ogólnym przypadku z trzema dowolnymi prętami (rys. 4).



Rys. 4. Trójkątny element prętowo-tarczowy.

Kolejność numeracji węzłów jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara: $i-j-k$. Grubość tarczy jest stała i wynosi t . Układ współrzędnych lokalnych jest zaczepiony w węzle. Rozważa się płaski stan naprężeń. Stan przemieszczeń wewnątrz elementu jest podobny jak w elemencie prostokątnym (rozd. 2). Wyznaczoną w ten sposób macierz sztywności elementu trójkątnego prętowotarczowego zamieszczono w tablicy 2.

4. Program PRTA

Przedstawiono obliczenia konstrukcji z podziałem na elementy prętowo-tarczowe, wg metody elementów skończonych, został zaprogramowany na maszynie cyfrową, pod nazwą PRTA. Program ten napisano w języku FORTRAN 1900 i uruchomiono go na maszynie cyfrowej serii ODRA 1300. Obliczenia można prowadzić dla dowolnych konstrukcji płaskich obciążonych w płaszczyźnie, składających się z elementów:

- prętowo-tarczowych (prostokątnych i trójkątnych),
- prętowych (ramy płaskie),
- tarczowych (prostokątnych i trójkątnych).

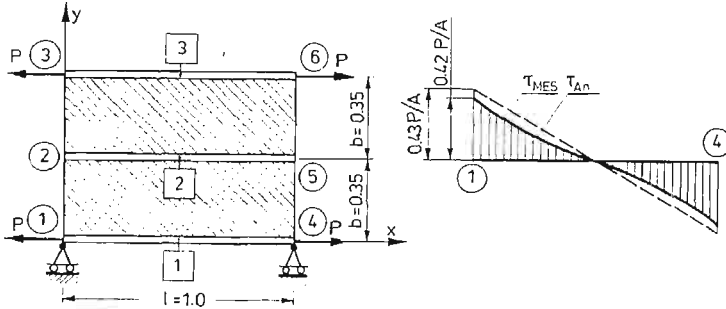
Pręty o stałym przekroju, w połączeniu z tarczą stanowią jej uźebrowanie lub wzmocnienie brzegów. Obciążenie zewnętrzne musi być przykładane w węzłach elementu.

W danych do programu należy podać wielkości geometryczne prętów, tarcz i obciążeń zewnętrznych. Jako wyniki otrzymuje się przemieszczenia poszczególnych węzłów konstrukcji, siły wewnętrzne w prętach i tarczach. Ponadto otrzymuje się naprężenia pochodzące od momentu gnącego σ_g , ściskające lub rozciągające σ_c i sumaryczne σ_{sum} — w prętach, odkształcenia bezwzględne ε_x , ε_y , γ_{xy} oraz naprężenia σ_x , σ_y i τ_{xy} — w tarczach.

Ograniczenia programu stanowi ogólna liczba elementów $m \leq 300$, co wynika z pojemności pamięci operacyjnej maszyny serii ODRA 1300. Jednak jest ona zupełnie wystarczająca dla celów praktycznych.

5. Przykład liczbowy

W celu sprawdzenia poprawności działań programu wykonano szereg obliczeń testujących. Uzyskane wyniki obliczenia prostych konstrukcji prętowo-tarczowych porównywano z wynikami otrzymanymi metodami analitycznymi [10, 11, 12]. Porównanie to wykazało, że już przy podziale na niewielką liczbę elementów uzyskuje się dobrą zgodność z wynikami otrzymanymi z rozwiązań analitycznych. Przeprowadzono przykładowo obliczenia konstrukcji prętowo-tarczowej obciążonej czterema siłami skupionymi (rys. 5). Konstrukcję



Rys. 5. Przykład konstrukcji prętowo-tarczowej: a) układ obciążeń, b) rozkład naprężeń stycznych. MES — metoda elementów skończonych, A_n — rozwiązanie ścisłe.

podzielono na dwa prostokątne elementy prętowo-tarczowe (Tablica 1) zawierająca po 4 węzły każdy, w elementach tych występują tylko 2 pręty na przeciwległych bokach. Wartości naprężeń w prętach omawianej konstrukcji (rys. 5) według rozwiązania [10] wynoszą:

$$\sigma_4 = -\sigma_1 = \sigma_6 = -\sigma_3 = \frac{P}{A}, \quad \sigma_2 = \sigma_5 = 0,$$

a maksymalna bezwzględna wartość naprężeń stycznych

$$\tau_{\max} = 0,42 \frac{P}{A}$$

Natomiast wartości naprężeń, uzyskane przy wykorzystaniu omawianej macierzy sztywności w MES wynoszą:

$$\sigma_4 = -\sigma_1 = \sigma_6 = -\sigma_3 = 0,80 \frac{P}{A}, \quad \sigma_2 = -\sigma_5 = -0,04 \frac{P}{A}$$

a maksymalne naprężenie styczne

$$\tau_{\max} = 0,43 \frac{P}{A}$$

Największy błąd uzyskanych wyników występuje w prętach nr 1, 3 i wynosi 20%, ale obliczenia wg [10] dają w tym przypadku zawyżone wartości. Mianowicie zakłada się, że w węzłach przyłożenia sił (rys. 5), obciążenie to jest przenoszone tylko przez pręty, a w rzeczywistości część obciążenia przenosi tarcza co uwzględniono w przedstawionej pracy, która jest sztywno połączona z prętami. Natomiast w pręcie nr 2 wynosi 4%, a dla

naprężeń stycznych 1%. Należy przypuszczać, że przy zwiększaniu liczby elementów, na którą podzielono konstrukcję, otrzymane wyniki będą jeszcze bliższe rozwiązaniu dokładnemu.

Reasumując stwierdza się, że przeprowadzenie analizy wytrzymałościowej konstrukcji o elementach prętowo-tarczowych, z uwzględnieniem macierzy sztywności (tab. 1 i 2), pozwala w znaczny sposób skrócić efektywny czas liczenia oraz mniejszą pamięć EMC.

Literatura cytowana w tekście

1. J. S. PRZEMIENIECKI, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw — Hill 1968.
2. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw — Hill 1967.
3. J. H. ARGYRIS, *Energy Theorems and Structural Analysis*, Aircraft Eng. **26**,1954, **27**,1955.
4. CH. MASSONNET, G. DEPREZ, R. MAQUOL, R. MÜLLER, G. FONDER, *Calcul des structures sur ordinateur*, Tome I, Analyse matricielle des structures. Paris 1972.
5. G. RAKOWSKI, *Metoda elementów skończonych w mechanice budowli*, Inżynieria i Budownictwo, nr 2,1971.
6. E. RUSIŃSKI, J. TEISSEYRE, *Die Berechnungs methoden mit Torsionsmoment belasteten räumlichen Stabtragwerke*, Politechnika Wroclawska, IKiEM, Komunikat nr 238,1977.
7. J. SZMELTER, S. DOBROCIŃSKI, *Zastosowanie metody elementów skończonych do tworzenia macierzy sztywności elementu płyty*. Biuletyn WAT, nr 4, 200, 1969 r.
8. J. SZMELTER, M. DACKO, S. PYRAK, *Analiza statyczna przestrzennych układów prętowych metodą elementów skończonych*, Poradnik Konstruktora nr 7,1972.
9. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady Warszawa 1972.
10. Z. BRZOSKA, *Statyka i stateczność konstrukcji* PWN, Warszawa 1965.
11. S. TIMOSHENKO, S. WOINOSKY — KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa 1962.
12. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty, obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.

Резюме

АНАЛИЗ СТЕРЖНЕ-СКЛАДЧАТОЙ КОНСТРУКЦИИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Представлен метод расчета любых стержне-складчатых конструкций методом конечных элементов. Приведены в явном виде матрицы жесткости прямоугольного и треугольного стержне-складчатого элемента с тремя степенями свободы. В стержне-складчатом элементе учтена любая форма сечения каждого стержня. Определены также матрицы жесткости прямоугольной складки и рамной конструкции, состоящей из 4 стержней. Программа PRТА написана на языке ФОРТРАН 1900 и тестирована на цифровой вычислительной машине ОДРА 1300. Работа проиллюстрирована проверочным примером.

Summary

AN ANALYSIS OF THE ROD-SHIELD CONSTRUCTIONS BY THE FINITE ELEMENT METHOD

The way of calculating any rod-shield construction by the finite element method is shown in the paper. The rigidity matrix of the rod-shield construction elements of a rectangular and triangular shape with three degrees of freedom is given. In a rod-shield element any shape of the rod cross-section may be applied.

The rigidity matrix of a rectangular shield and of a four bars frame is also given in the paper. The PRTA programme was written in the FORTRAN 1900 language and was tested on the ODRA 1300 computer. The paper is illustrated with an example.

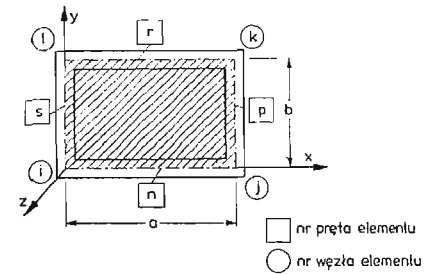
POLITECHNIKA WROCLAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 marca 1979 roku.

$$[k_{r-i}] = Ex$$

Tablica 1. Macierz sztywności prostokątnego elementu prętowo-tarczowego

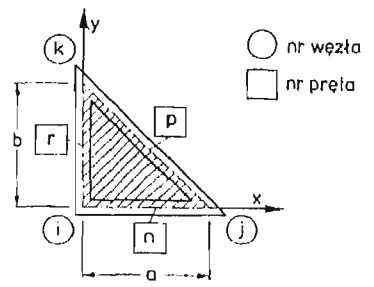
$\frac{F_n}{a} + \frac{12I_{z_s}}{b^3} + z'_1$	$\frac{t}{8(1-\nu)}$	$\frac{6I_{z_s}}{b^2}$	$-\frac{F_n}{a} + z'_2$	$-\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	0	$-\frac{z'_1}{2}$	$-\frac{t}{8(1-\nu)}$	0	$-\frac{12I_{z_s}}{b^3} + z'_3$	$\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	$\frac{6I_{z_s}}{b^2}$
	$\frac{12I_{z_n}}{a^3} + \frac{F_s}{b} + z'_4$	$\frac{6I_{z_n}}{a^2}$	$\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	$-\frac{12I_{z_n}}{a^3} + z'_5$	$\frac{6I_{z_n}}{a^2}$	$-\frac{t}{8(1-\nu)}$	$-\frac{z'_4}{2}$	0	$-\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	$-\frac{F_s}{b} + z'_5$	0
	S	$4\left(\frac{6I_{z_n}}{a^2} + \frac{I_{z_n}}{b}\right)$	0	$-\frac{6I_{z_n}}{a^2}$	$\frac{2I_{z_n}}{a}$	0	0	0	$-\frac{6I_{z_s}}{b^2}$	0	$\frac{2I_{z_s}}{b}$
		Y	$\frac{F_n}{a} + \frac{12I_{z_p}}{b^3} + z'_1$	$-\frac{t}{8(1-\nu)}$	$-\frac{6I_{z_p}}{b^2}$	$-\frac{12I_{z_p}}{b^3} + z'_3$	$-\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	$-\frac{6I_{z_p}}{b^2}$	$-\frac{z'_1}{2}$	$\frac{t}{8(1-\nu)}$	0
$z'_1 = \frac{t}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{4b}{a} + \frac{2a}{b} (1-\nu) \right]$			M	$\frac{12I_{z_n}}{a^3} + \frac{F_p}{b} + z'_4$	$-\frac{6I_{z_n}}{a^2}$	$\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	$-\frac{F_p}{b} + z'_6$	0	$\frac{t}{8(1-\nu)}$	$-\frac{z'_4}{2}$	0
$z'_2 = \frac{t}{12(1-\nu^2)} \left[-\frac{4b}{a} + \frac{a}{b} (1-\nu) \right]$				E	$4\left(\frac{I_{z_n}}{a} + \frac{I_{z_p}}{b}\right)$	$-\frac{6I_{z_p}}{b^2}$	0	$\frac{2I_{z_p}}{b}$	0	0	0
$z'_3 = \frac{t}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{2b}{a} - \frac{2a}{b} (1-\nu) \right]$					T	$\frac{12I_{z_p}}{b^3} + \frac{F_r}{a} + z'_1$	$\frac{t}{8(1-\nu)}$	$-\frac{6I_{z_p}}{b^2}$	$-\frac{F_r}{a} + z'_2$	$-\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	0
$z'_4 = \frac{t}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{4a}{b} + \frac{2b}{a} (1-\nu) \right]$						R	$\frac{F_p}{b} + \frac{12I_{z_r}}{a^3} + z'_4$	$\frac{6I_{z_p}}{a^2}$	$\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	$-\frac{12I_{z_r}}{a^3} + z'_5$	$\frac{6I_{z_r}}{a^2}$
$z'_5 = \frac{t}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} (1-\nu) \right]$							I	$4\left(\frac{I_{z_p}}{b} + \frac{I_{z_r}}{a}\right)$	0	$-\frac{6I_{z_r}}{a^2}$	$\frac{2I_{z_r}}{a}$
$z'_6 = \frac{t}{12(1-\nu^2)} \left[-\frac{4a}{b} + \frac{b}{a} (1-\nu) \right]$								A	$\frac{F_r}{a} + \frac{12I_{z_s}}{b^3} + z'_1$	$-\frac{t}{8(1-\nu)}$	$-\frac{6I_{z_s}}{b^2}$
									$\frac{12I_{z_r}}{a^3} + \frac{F_s}{b} + z'_4$	$-\frac{6I_{z_r}}{a^2}$	$-\frac{6I_{z_s}}{a^2}$
											$4\left(\frac{I_{z_r}}{a} + \frac{I_{z_s}}{b}\right)$



$$[k_{r-i}] = E \times$$

Tablica 2. Macierz sztywności trójkątnego elementu prętowo-tarczowego

	$\frac{F_n}{a} + \frac{12I_z}{b^3} + e_1$	$\frac{\nu+1}{2ab} A_2$	$\frac{6I_{z_r}}{b^2}$	$-\frac{F_n}{a} - \frac{1}{a^2} A_2$	$-\frac{1-\nu}{2ab} A_2$	0	$-\frac{12I_{z_r}}{b^3} - \frac{1-\nu}{2b^2} A_2$	$-\frac{\nu}{ab} A_2$	$\frac{6I_{z_r}}{b^2}$
$d^2 = a^2 + b^2$	S	$\frac{12I_{z_n}}{a^3} + \frac{F_r}{b} + e_2$	$\frac{6I_{z_n}}{a^2}$	$-\frac{\nu}{ab} A_2$	$-\frac{12I_{z_n}}{a^3} - \frac{1-\nu}{2a^2} A_2$	$\frac{6I_{z_n}}{a^2}$	$-\frac{1-\nu}{2ab} A_2$	$-\frac{F_r}{b} - \frac{1}{b^2} A_2$	0
$A_2 = \frac{abt}{2(1-\nu^2)}$		Y	$4\left(\frac{I_{z_n}}{a} + \frac{I_{z_r}}{b}\right)$	0	$-\frac{6I_{z_n}}{a^2}$	$\frac{2I_{z_n}}{a}$	$-\frac{6I_{z_r}}{b^2}$	0	$\frac{2I_{z_r}}{b}$
$e_1 = A_2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1-\nu}{2b^2}\right)$			M	$e_3 + \frac{A_2}{a^2}$	e_4	$+\frac{6I_{z_p}}{d^2} y$	$-\frac{F_p}{d} x^2 - \frac{12I_{z_n}}{d^3} y^2$	$-e_4 + \frac{\nu A_2}{ab}$	$+\frac{6I_{z_p}}{d^2} y$
$e_2 = A_2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1-\nu}{2a^2}\right)$				E	$e_5 + \frac{1-\nu}{2a^2} A_2$	$6\left(\frac{I_{z_p}}{d^2} x - \frac{I_{z_n}}{a^2}\right)$	$-e_4 + \frac{1-\nu}{2ab} A_2$	$-\frac{F_p}{d} y^2 - \frac{12I_{z_p}}{d^3} x^2$	$\frac{6I_{z_p}}{d^2} x$
$e_3 = \frac{F_n}{a} + \frac{F_p}{d} x^2 + \frac{12I_{z_p}}{d^3} y^2$					T	$4\left(\frac{I_{z_n}}{a} + \frac{I_{z_p}}{d}\right)$	$-\frac{6I_{z_p}}{d^2} y$	$-\frac{6I_{z_p}}{d^2} x$	$\frac{2I_{z_p}}{d}$
$e_4 = -xy\left(\frac{F_p}{d} - \frac{12I_{z_p}}{d^3}\right)$						R	$e_6 + \frac{1-\nu}{2b^2} A_2$	e_4	$6\left(-\frac{I_{z_p}}{d^2} y - \frac{I_{z_r}}{b^2}\right)$
$e_5 = \frac{F_p}{d} y^2 + 12\left(\frac{I_{z_n}}{a^3} + \frac{I_{z_p}}{d^3} x^2\right)$							I	e_7	$-\frac{6I_{z_p}}{d^2} x$
$e_6 = \frac{F_p}{d} x^2 + 12\left(\frac{I_{z_r}}{b^3} + \frac{I_{z_p}}{d^3} y^2\right)$								A	$4\left(\frac{I_{z_r}}{b} + \frac{I_{z_p}}{d}\right)$
$e_7 = \frac{F_r}{b} + \frac{F_p}{d} y^2 + \frac{12I_{z_p}}{d^3} x^2$									
$x = -\frac{a}{d}, \quad y = \frac{b}{d}$									



O JEDNOZNACZNOŚCI ZASADY NAJMNIEJSZEGO SKRĘPOWANIA
(NAJMNIEJSZEGO PRZYMUSU) GAUSSA

N. CYGANOWA (TULA)

W pracy P. STÄCKELA [1] zawarty jest ścisły dowód jednoznaczności zasady Gaussa dla układów z przytrzymującymi (udierziwajuszczymi) i nieprzytrzymanymi (nieudierziwajuszczymi) holonomicznymi i liniowymi nieholonomicznymi więzami pierwszego rzędu i zbadane są przypadki osobliwe.

Przy założeniu regularności położenia układu istnieje jeden i tylko jeden układ przyspieszeń, który dla danego stanu ruchu spełnia zasadę najmniejszego skrępowania.

Rozpatrzmy dowód Stäckela dla układu z więzami przytrzymanymi. Niech układ „ n ” punktów materialnych jest związany „ k ” holonomicznymi więzami

$$(1) \quad f_{\mu}(x_i, t) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, k),$$

z których dla prędkości w postaci wynikają warunki

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_{\mu}}{\partial t} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, k),$$

i „ l ” liniowymi nieholonomicznymi więzami pierwszego rzędu

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{3n} \varphi_{\lambda}(x_i, t) \dot{x}_i + \varphi_{\lambda_0}(x_i, t) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l).$$

Położenie (x_i) układu nazywamy regularnym jeśli równania (2) i (3) stanowią razem układ $m = k + l$ równań liniowych względem rzutów prędkości

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{3n} F_{\varrho_i}(x_i, t) \dot{x}_i + F_{\varrho_0}(x_i, t) = 0, \quad (\varrho = 1, 2, \dots, m),$$

przy czym co najmniej jeden z wyznaczników m — rzędu macierzy (F_{ϱ_i}) różny jest od zera, w przeciwnym przypadku położenie nazywamy osobliwym.

Różniczkując równania (4) względem czasu otrzymujemy liniowe równania względem rzutów przyspieszenia

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{3n} F_{\varrho_i}(x_i, t) \ddot{x}_i + H_{\varrho}(x_i, \dot{x}_i, t) = 0, \quad (\varrho = 1, 2, \dots, m),$$

gdzie $H_{\varrho}(x_i, \dot{x}_i, t)$ są funkcjami drugiego stopnia względem \dot{x}_i .

Przy położeniu osobliwym przynajmniej jedno z równań (5) jest zastąpione równaniem drugiego lub wyższego stopnia względem przyspieszeń.

Z równań (5) można określić „ m ” składowych przyspieszeń jako liniowe funkcje pozostałych $3n - m$ składowych. Dalej, w celu określenia przyspieszenia układu punktów przy istnieniu więzów i sił rzeczywistych, przytacza się jedną z zasad mechaniki analitycznej.

Zgodnie z zasadą Gaussa przyspieszenia rzeczywiste określa się z warunku minimum skrępowania

$$Z(\ddot{x}_i) = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} (m_i \ddot{x}_i - X_i)^2.$$

przy uwzględnieniu warunków (5) dla przyspieszeń.

Istnienie minimum funkcji Z wynika z jej dodatniej określoności. W dowodzie korzystamy z faktu, że dla regularnego położenia układu, skrępowanie charakteryzuje się jednym minimum, inaczej mówiąc, że zasada Gaussa przy tym istotnym ograniczeniu określa ruch jednoznacznie.

Niech Z określa minimum dla wartości przyspieszeń $\ddot{x}_i = \ddot{\xi}_i$. Wówczas spełniona jest nierówność $Z(\ddot{\xi}_i + u_i) > Z(\ddot{\xi}_i)$ dla wszystkich dostatecznie małych układów wartości u_i takich, dla których odpowiednie wartości przyspieszeń $\ddot{\xi}_i + u_i$ spełniają warunki (5), tzn. spełniających warunki

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{3n} F_{ei} u_i = 0, \quad (e = 1, 2, \dots, m).$$

Z równań (6) wynika, że jeśli układ wartości u_i jest dopuszczalny, to dopuszczalny jest również układ wartości $U_i = g u_i$, gdzie g jest dowolną dodatnią lub ujemną liczbą. Z tego powodu i z równości

$$(7) \quad Z(\ddot{\xi}_i + U_i) = Z(\ddot{\xi}_i) + \sum_{i=1}^{3n} m_i U_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{\xi}_i - X_i) U_i,$$

wynika, że

$$(8) \quad \sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{\xi}_i - X_i) u_i = 0,$$

dla dostatecznie małych dopuszczalnych wartości u_i . Oczywiście równanie (8) spełnione będzie również dla dowolnych dopuszczalnych wartości u_i .

Założymy, że skrępowanie osiąga minimum również dla wartości przyspieszeń $\ddot{x}_i = \ddot{\eta}_i$. Różnice $\ddot{\eta}_i - \ddot{\xi}_i$, jak łatwo zauważyć, spełniają warunki (6) i mogą być przyjęte za dopuszczalne wartości wielkości u_i , tzn. można przyjąć $\ddot{\eta}_i = \ddot{\xi}_i + u_i$. Wówczas z równania (7) wynika, że $Z(\ddot{\eta}_i) > Z(\ddot{\xi}_i)$. Zatem, założenie istnienia dwóch minimów skrępowania doprowadziło do sprzeczności.

Jednoznaczność zasady Gaussa zostaje naruszona przy osobliwym położeniu układu. Jeden taki osobliwy przypadek bada dokładnie Stäckel.

Punkt materialny o masie jednostkowej porusza się po powierzchni stożka

$$(9) \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

Z równania więzów (9) wynikają warunki

$$(10) \quad x\dot{x} + y\dot{y} - z\dot{z} = 0, \quad x\ddot{x} + y\ddot{y} - z\ddot{z} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = 0,$$

$$(11) \quad x\delta x + y\delta y - z\delta z = 0,$$

które są spełnione przez prędkości, przyspieszenia i wirtualne przesunięcia punktu.

Niech w chwili t punkt materialny znajduje się w stanie spoczynku na górze stożka. W tym osobliwym położeniu równanie (11), określające wirtualne przemieszczenia, nie nakłada na nie żadnych ograniczeń, tzn. jest nieprzydatne. Wirtualne przemieszczenia dla osobliwego położenia należy określić oddzielnie. Określając jako takie, które przeprowadzają punkt materialny z danego położenia w drugie położenie zgodne z więzami, otrzymujemy warunek

$$(12) \quad (\delta x)^2 + (\delta y)^2 - (\delta z)^2 = 0.$$

Warunek (10) dla przyspieszeń w położeniu osobliwym również jest nieprzydatny. Łatwo zauważyć, że dla rzutów przyspieszeń na górze stożka powinien być spełniony warunek

$$(13) \quad \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 - \ddot{z}^2 = 0,$$

gdyż punkt materialny może oczywiście pozostawać tylko wtedy na górze stożka, gdy na początku ruchu wektor przyspieszenia leży na jego powierzchni.

Zasada przemieszczeń wirtualnych łącznie z zasadą d'Alamberta tutaj oczywiście jest nieważna, ponieważ warunek (12) dla przemieszczeń wirtualnych jest nieliniowy. Jednakże zasada najmniejszego skrępowania daje możliwość określenia ruchu aczkolwiek niejednoznacznie.

Znajdziemy minimum skrępowania $Z = (\dot{x} - X)^2 + (\dot{y} - Y)^2 + (\dot{z} - Z)^2$ przy warunku (13). Otrzymamy dwa rozwiązania, co również jasno wynika z przedstawienia geometrycznego. Skrępowanie Z geometrycznie oznacza odległość między dwoma punktami $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ i (X, Y, Z) , a określenie minimum skrępowania przy uwzględnieniu warunku (13) sprowadza się do znalezienia najmniejszej odległości punktu (X, Y, Z) od powierzchni stożka. Rozwiązanie dadzą dwa punkty na powierzchni stożka. Odcinki od wierzchołka stożka do obydwu punktów dają wielkość i kierunek poszukiwanego przyspieszenia. Odcinki te leżą na prostych otrzymanych przy przecięciu powierzchni płaszczyzną, przechodzącą przez oś stożka i wektor siły.

Rozpatrzony sposób określenia przyspieszeń jest nieprzydatny tylko w tym przypadku, gdy wektor siły znajduje się na osi stożka. W każdym bądź razie jest jasne, że w przypadku położenia osobliwego można stosować tylko zasadę Gaussa.

Jeśli idzie o niejednoznaczność w przypadku osobliwym, Stäckel zauważa: „Nieprawidłowe było by odrzucenie zasady mechaniki z tego powodu, że przy znanych warunkach przyspieszenie jest niejednoznacznie określone. Przyczyna może tkwić w postawieniu zadania. Ruch zachodzący w pobliżu wierzchołka stożka nie może być mechanicznie określony. Tutaj przyjęta jest niedopuszczalna idealizacja” [1, s. 10]. Przykład Stäckela rozpatruje także Nordheim traktując go bardziej szczegółowo [2, s. 66]. Z przykładu widać, że dla położenia osobliwego zasada wirtualnych przemieszczeń wspólnie z zasadą d'Alamberta nie są równoważne zasadzie Gaussa, zasada Gaussa daje możliwość określenia przyspieszenia, chociaż nie jednoznacznie, natomiast pierwsza z wymienionych zasad

nie może być w ogóle zastosowana. Wynika stąd, że dla osobliwego położenia zasady najmniejszego skrępowania nie można otrzymać z zasady dopuszczalnych przemieszczeń i zasady d'Alamberta. Zasadę Gaussa dla położenia osobliwego przyjmuje się jako aksjomat.

Jednoznaczność zasady Gaussa dla więzów nieprzytrzymałych udowadnia się analogicznie.

Niech oprócz holonomicznych i nieholonomicznych więzów (1) i (3), nałożonych na układ, działają dodatkowo holonomiczne i nieholonomiczne nieprzytrzymałe więzy

$$(14) \quad g_{\mu'}(x_i, t) \geq (\mu' = 1, 2, \dots, k'),$$

$$(15) \quad \sum_{i=1}^{3n} \psi_{\lambda'_i}(x_i, t)x_i + \psi_{\lambda'_0}(x_i, t) \geq 0, \quad (\lambda' = 1, 2, \dots, l')$$

Założymy, że dla danego stanu ruchu w chwili t współrzędne prędkości spełniają s równań

$$(16) \quad \sum_{i=1}^{3n} v_{\sigma_i}(x_i, t)\dot{x}_i + v_{\sigma_0}(x_i, t) = 0, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, s; s = k' + l'),$$

wywodzących się z więzów (14) i (15).

Położenie (x) układu w chwili t nazywamy regularnym, jeśli przy pomocy równań (16) i (4) $m+s$ rzutów prędkości może być przedstawionych jako liniowe funkcje pozostałych $3n-m-s$ rzutów prędkości. Rzuty przyspieszeń spełniają (5) i warunki

$$(17) \quad \sum_{i=1}^{3n} v_{\sigma_i}(x_i, t)\ddot{x}_i + K_{\sigma}(x_i, \dot{x}_i, t) \geq 0, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, s),$$

odpowiadające równościom (16), które są spełnione przez prędkości punktów w rozpatrywanej chwili ruchu.

Twierdzenie o jednoznaczności zasady Gaussa dla nieprzytrzymałych więzów ma miejsce także przy założeniu regularności położenia. W przestrzeni euklidesowej R_{3n} wielkości \ddot{x}_i , skrępowanie Z dla części przestrzeni, zawierającej punkty \ddot{x}_i , spełniające wspomniane warunki (5) i (17), jest ciągłą funkcją punktu, dodatnio określoną i dlatego osiąga przynajmniej w jednym punkcie wartość minimalną.

Założenie regularności położenia nie jest w tym przypadku konieczne, jest ono istotne dla dowodu jednoznaczności zasady. Niech wartość minimalna skrępowania jest osiągnięta dla wartości przyspieszeń $\ddot{x}_i = \ddot{\xi}_i$, stąd dla wszystkich dostatecznie małych dopuszczalnych wartości układów (u_i) ma miejsce nierówność

$$Z(\ddot{\xi}_i + u_i) > Z(\ddot{\xi}_i).$$

Ponieważ

$$Z(\ddot{\xi}_i + u_i) = Z(\ddot{\xi}_i) + \sum_{i=1}^{3n} m_i u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{\xi}_i - X_i) u_i,$$

wynika stąd, że dla dostatecznie małych dopuszczalnych układów wartości u_i spełniony jest warunek

$$(18) \quad \sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{\xi}_i - X_i) u_i \geq 0,$$

W przypadku regularnego położenia układu można pokazać, że warunek (18) spełniony jest także przy dowolnych dopuszczalnych układach wartości u_i . I rzeczywiście, wartości $\ddot{\xi}_i$ spełniają warunek (17), tzn.

$$\sum_{i=1}^{3n} V_{\sigma_i} \ddot{\xi}_i + K_{\sigma} \geq 0.$$

Wartości wielkości u_i są dopuszczalne, jeśli odpowiadające im wartości przyspieszeń $\ddot{\xi}_i + u_i$ spełniają warunki (17), tzn. dla dopuszczalnych układów wartości u_i spełniona jest nierówność

$$(19) \quad \sum_{i=1}^{3n} V_{\sigma_i} \ddot{\xi}_i + \sum_{i=1}^{3n} V_{\sigma_i} u_i + K_{\sigma} \geq 0.$$

Łatwo udowodnić, że jeśli układ wartości u_i jest dopuszczalny, to dopuszczalny jest także układ wartości Θu_i , gdzie $0 < \Theta < 1$. Jeżeli układ u_i jest dopuszczalny, to spełnia on związek (19), ale wówczas, jak łatwo zauważyć, spełniony jest związek

$$(20) \quad \sum_{i=1}^{3n} V_{\sigma_i} \ddot{\xi}_i + \Theta \sum_{i=1}^{3n} V_{\sigma_i} u_i + K_{\sigma} \geq 0.$$

Wielkości Θ można przyjąć na tyle małe, że warunek (18) będzie spełniony dla wielkości Θu_i , tzn. będzie spełniona nierówność

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{\xi}_i - X_i) \Theta u_i \geq 0$$

z której wynika dla $\Theta > 0$ spełnienie nierówności

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{\xi}_i - X_i) u_i \geq 0,$$

dla dowolnych dopuszczalnych wartości u_i .

Przy pomocy tej nierówności łatwo można teraz udowodnić jednoznaczność zasady Gaussa, przeprowadzając rozważania analogiczne do tych, przy których pomocy dowodziło się jednoznaczność zasady dla więzów przytrzymanych.

W pracy P. Stäckela podano również geometryczny dowód jednoznaczności zasady Gaussa.

Podstawiając

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}} (m_i \ddot{x}_i - X_i),$$

skrępowanie

$$Z = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} (m_i \ddot{x}_i - X_i)^2 = \sum_{i=1}^{3n} y_i^2$$

można traktować jako kwadrat odległości punktu $3n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej R_{3n} od początku układu współrzędnych. Warunki (5), które spełnione są przez rzuty przyspieszeń w przypadku więzów przytrzymanych (1) i (3) zapiszą się w postaci

$$(21) \quad \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{\sqrt{m_i}} F_{q_i} y_i + \bar{H}_q = 0, \quad (q = 1, 2, \dots, m).$$

Warunki (21) wydzielaają w przestrzeni euklidesowej R_{3n} podprzestrzeń euklidesową R_{3n-m} . Zasada najmniejszego skrępowania wymaga wyznaczenia punktu tej podprzestrzeni, znajdującego się najbliżej początku układu współrzędnych.

Z teorii wielowymiarowych przestrzeni euklidesowych wiadomo, że szukana najmniejsza odległość jest prostopadłą z początku układu współrzędnych do podprzestrzeni R_{3n-m} , oraz że istnieje jedna i tylko jedna taka prostopadła.

Wykorzystując geometryczną interpretację, Sätckel rozpatruje potem określenie przyspieszeń przy pomocy zasady najmniejszego skrępowania w przypadku ogólnym, gdy występują wśród więzów nieprzytrzymałe więzy.

Przy założeniu regularności położenia układu mają miejsce liniowe związki pomiędzy wielkościami y_i , odpowiadające równaniom (5)

$$(22) \quad \sum_{i=1}^{3n} A_{q_i} y_i + A_{q_0} = 0, \quad (q = 1, 2, \dots, m)$$

i nierówności

$$(23) \quad \sum_{i=1}^{3n} B_{\sigma_i} y_i + B_{\sigma_0} \geq 0, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, s),$$

odpowiadające warunkom (17).

Równania (22) wyznaczają w przestrzeni euklidesowej R_{3n} podprzestrzeń euklidesową R_{3n-m} , a nierówności (23) wyznaczają w tej ostatniej jednopójny wypukły obszar S_N , ograniczony podprzestrzeniami euklidesowymi $N-1, N-2, \dots, 2, 1$ — wymiarowymi, przy czym $N = 3n - m$. Określenie przyspieszeń przy pomocy zasady najmniejszego skrępowania sprowadza się zatem do zadania geometrycznego:

Przez liniowe równania i nierówności wyznaczony został obszar w przestrzeni euklidesowej. Należy określić najmniejszą jej odległość od danego punktu przestrzeni. Przy wyznaczaniu najmniejszej odległości to, że istnieje tylko jedna taka najmniejsza odległość wykazano analitycznie; spotykamy dwa takie przypadki.

Dany jest punkt O , początek układu współrzędnych, może należeć do obszaru S_N włącznie z granicą, wówczas najmniejsza odległość dotyczy samego punktu O . Punkt O może leżeć na zewnątrz obszaru S .

Niech OT — prostopadła do podprzestrzeni R_N , do której należy S_N , wówczas OT — jest najmniejszą odległością punktów R_N od O .

Jeśli punkt T należy do obszaru S_N , to OT także jest szukaną najmniejszą odległością.

W tym przypadku punkt T leży na granicy obszaru S_N i przestrzeni R_{3n} . Jeśli punkt T nie należy do obszaru S_N to minimum odległości występuje dla pewnego punktu A , różnego od T . Punkt A leży na granicy obszaru S_N i podprzestrzeni R_N .

Zagadnienie jednoznaczności zasady najmniejszego skrępowania zostało dalej rozwinięte i zbadane przez A. PRZEBORSKIEGO [3].

W odróżnieniu od badań Stäckela, który ograniczał się do idealnych holonomicznych i liniowych nieholonomicznych więzów pierwszego rzędu, Przeborski przeprowadził

badanie zasady Gaussa dla najbardziej ogólnego przypadku holonomicznych i nieholonomicznych więzów z tarciem. A. Przeborski sformułował zasadę Gaussa w postaci obejmującej wszystkie przypadki fizycznej realizacji więzów:

„Przy każdej fizycznej realizacji więzów, w każdym momencie czasu, w którym położenie układu jest regularne, ruch układu odbywa się w taki sposób, że odpowiadające wymuszenie osiąga wartość minimalną przy założeniu, że przyspieszenie spełnia warunki, nałożone więzami analitycznymi” [3, s. 285]. W „Wykładach” Przeborskiego spotykamy się z prawidłowym rozpatrzeniem zasady najmniejszego skrępowania z uwzględnieniem regularności układu.

Literatura cytowana w tekście

1. P. STÄCKEL, *Bemerkungen zum Prinzip des kleinsten Zwanges Heidelberg*, 1919.
2. L. NORDHEIM, *Die Prinzipie der Dynamik.-Handbuch der Physik*, V. 5, Leipzig, 1927.
3. A. PRZEBORSKI, *Wykłady mechaniki teoretycznej*, t. 2. Warszawa, 1935.

Резюме

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ ГАУССА

Немецкому ученому П. Штекелю принадлежит исследование однозначности принципа Гаусса для систем с удерживающими и неудерживающими идеальными голономными и линейными неголономными связями первого порядка. Для регулярного положения системы принцип Гаусса определяет движение однозначно, в сингулярном случае — неоднозначно. Дальнейшее развитие этот вопрос получил в исследовании А. Пшеборского. Пшеборский провел исследование принципа Гаусса для самого общего случая голономных и неголономных связей с трением.

Summary

ON UNIQUENESS OF GAUSS' LEAST CONSTRAINT PRINCIPLE

A German scholar P. Stäckel has investigated the uniqueness of Gauss' principle for a system with restrained and unrestrained ideal holonomic and linear nonholonomic constraints of the first order. For a regular position of a system the Gauss' principle determines the motion uniquely, while in a singular case non-uniquely. The subsequent development of the problem can be traced in A. Przeborski's papers who has investigated Gauss' principle for the most general case of holonomic and nonholonomic constraints with friction.

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 stycznia 1980 roku.

ZASADY WARIACYJNE MECHANIKI DLA ZMIENNYCH OBSZARÓW
I ICH WYKORZYSTANIE W OPTYMALIZACJI KONSTRUKCJI

KRZYSZTOF D E M S (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Zasady prac przygotowanych oraz uzupełniających prac przygotowanych są podstawą wariacyjnego sformułowania zagadnień statycznej równowagi ciała pod działaniem zewnętrznych i wewnętrznych sił. Najczęściej kształt ciała jest z góry określony i wariacji podlegać mogą pola naprężeń, odkształceń i przemieszczeń. Istnieje jednak szereg zagadnień w których istotnym jest uwzględnienie zmiany kształtu brzegu ograniczającego ciało, lub jakiegokolwiek powierzchni wewnątrz rozpatrywanego ciała. Zagadnieniami takimi mogą być problemy optymalizacji kształtu ciała, zagadnienia propagacji pęknięć, transformacji faz przy krzepnięciu itp.

W przedstawionej pracy zajmiemy się wyznaczaniem wspomnianych zasad wariacyjnych w przypadku gdy oprócz wariacji pól naprężeń, odkształceń i przemieszczeń należy również rozpatrywać wariację obszaru zajmowanego przez ciało. Następnie wykorzystamy te zasady przy wyznaczaniu warunków optymalności kształtu brzegu ciała. Naszą analizę ograniczymy do materiałów sprężystości nieliniowych z potencjałami naprężeń i odkształceń $W(\sigma_{ij})$ oraz $U(\varepsilon_{ij})$ takimi, że

$$(1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

Dalej przyjmujemy, że $W(\sigma_{ij})$ i $U(\varepsilon_{ij})$ są jednorodnymi funkcjami rzędów $(n+1)$ i $(k+1)$, takimi, że

$$(2) \quad \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} = (n+1)W(\sigma_{ij}) = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} = (k+1)U(\varepsilon_{ij}),$$

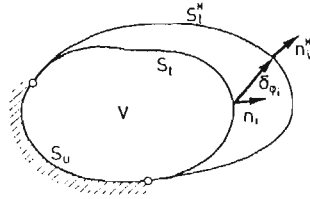
gdzie $kn = 1$. Dla jednoosiowego stanu naprężenia zależność naprężenie-odkształcenie jest opisana zatem przez związek $\varepsilon = c\sigma^n$, gdzie c oraz n są parametrami materiałowymi. Dla $n = 1$, związki (1) odpowiadają materiałowi sprężystości liniowemu, podlegającemu prawu Hooke'a.

2. Zasada prac przygotowanych przy równoczesnej wariacji pola przemieszczeń i kształtu brzegu

Niech dane ciało sprężyste B , zajmujące obszar V i ograniczone brzegiem S znajduje się w stanie równowagi statycznej pod działaniem danych sił powierzchniowych, rys. 1. Powierzchnia graniczna składa się z dwóch części S_i i S_u . Na części brzegu S_i dane są siły powierzchniowe $T_i^0 = \sigma_{ij}n_j$, zaś na brzegu S_u zadane są przemieszczenia $u_i = u_i^0$.

Rozpatrzmy nieskończenie małą wariację konfiguracji ciała B określoną przez ciągłe i różniczkowalne pole wektorowe $\delta\varphi_i = \delta\varphi_i(x)$ takie, że dowolny punkt P ciała przechodzi w punkt P^* zgodnie z zależnością

$$(3) \quad P \rightarrow P^*: x_i^* = x_i + \delta\varphi_i.$$

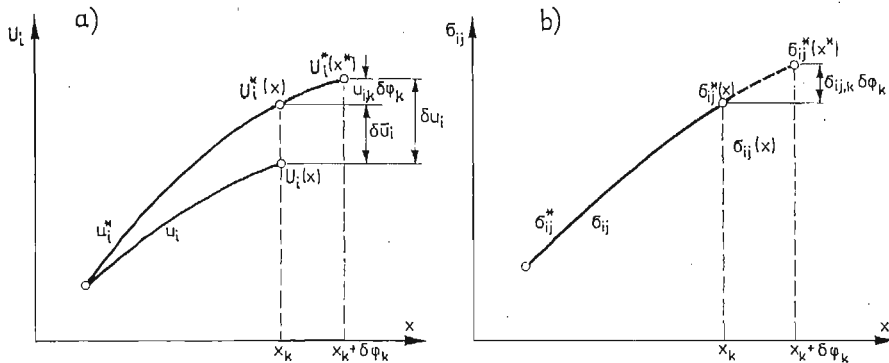


Rys. 1. Ciało B podparte na S_u i obciążone na brzegu S_i poddanym wariacji

W wyniku transformacji (3) obszar pierwotny V przechodzi w obszar V^* zaś brzeg S_i przechodzi w brzeg S_i^* . O funkcji $\delta\varphi_i$ założymy ponadto, że znika ona na brzegu S_u , tak, że kształt brzegu podpartego nie ulega zmianie podczas wariacji kształtu ciała.

Oznaczmy naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia ciała B przed wariacją kształtu przez σ_{ij} , ε_{ij} i u_i . Pola te spełniają odpowiednio równania równowagi, warunki nierozdzielności oraz warunki brzegowe na S_i i S_u . Rozpatrzmy teraz wariację pól statycznych i kinematycznych. Dla pola przemieszczeń możemy napisać, rys. 2a, [1]

$$(4) \quad u_i^*(x^*) = u_i(x) + \delta u_i(x),$$



Rys. 2a) wariacja i przedłużenie pola przemieszczeń b) przedłużenie pola naprężeń poza brzeg S_i

gdzie wariacja δu_i jest określona przez

$$(5) \quad \delta u_i = u_i^*(x) - u_i(x) + u_{i,k}(x) \delta\varphi_k = \delta \bar{u}_i + u_{i,k} \delta\varphi_k$$

i spełnia warunek

$$(6) \quad \delta u_i = 0 \text{ na } S_u.$$

Zauważmy, że δu_i przedstawia całkowitą wariację u_i , podczas gdy $\delta \bar{u}_i$ jest wariacją przemieszczeń dla ustalonej konfiguracji pierwotnej ciała B . Wariacja odkształceń wyrażona jest analogicznie do (5) i wynosi

$$(7) \quad \delta \varepsilon_{ij} = \delta \bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij,k} \delta\varphi_k,$$

oraz

$$(8) \quad \varepsilon_{ij}^*(x^*) = \varepsilon_{ij}(x) + \delta \varepsilon_{ij}(x).$$

Rozpatrzmy teraz statycznie dopuszczalne przedłużenie pola naprężeń określone przez, rys. 2b

$$(9) \quad \sigma_{ij}^*(x^*) = \sigma_{ij}(x) + \sigma_{ij,k}(x) \delta \varphi_k.$$

Zatem pole naprężeń jest określone również poza brzegiem S_i i spełnia ponadto równania równowagi, skoro [1]

$$(10) \quad \sigma_{ij,j}^*(x^*) = \sigma_{ij,j}(x) + \sigma_{ij,kj}(x) \delta \varphi_k = 0.$$

Siły powierzchniowe na brzegu S_i^* wywołane naprężeniami (9) wynosić będą

$$(11) \quad T_i^*(x^*) = \sigma_{ij}^*(x^*) n_j^*,$$

gdzie n_j^* jest jednostkowym wektorem normalnej zewnętrznej do brzegu S_i^* . Dla konfiguracji V^* możemy zatem napisać

$$(12) \quad \int_{V^*} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV^* = \int_{S_u} t_i^* u_i^0 dS_u + \int_{S_i^*} T_i^* u_i^* dS_i^*.$$

Sprawdźmy teraz w równaniu (12) całkowanie po obszarze V^* i powierzchni S_i^* do całkowania po obszarze V i powierzchni S_i . Uwzględniając w jacobianie przekształcenia (3) jedynie wielkości rzędu pierwszego ze względu na $\delta \varphi_k$ otrzymamy [1]

$$(13) \quad dV^* = (1 + \delta \varphi_{k,k}) dV,$$

podczas gdy element powierzchniowy $n_j^* dS_i^*$ wyrazić możemy przez [2]

$$(14) \quad n_j^* dS_i^* = (n_j + n_j \delta \varphi_{k,k} - n_k \delta \varphi_{k,j}) dS_i,$$

gdzie n_j jest jednostkowym wektorem normalnej zewnętrznej do pierwotnego brzegu S_i .

Uwzględniając zatem związki (4 - 11) oraz (13) i (14), równanie (12) przedstawić możemy w postaci

$$(15) \quad \int_V (\sigma_{ij} + \sigma_{ij,k} \delta \varphi_k) (\varepsilon_{ij} + \delta \bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij,k} \delta \varphi_k) (1 + \delta \varphi_{k,k}) dV = \\ = \int_{S_u} t_i u_i^0 dS_u + \int_{S_i} (\sigma_{ij} + \sigma_{ij,k} \delta \varphi_k) (u_i + \delta \bar{u}_i + u_{i,k} \delta \varphi_k) (n_j + n_j \delta \varphi_{k,k} - n_k \delta \varphi_{k,j}) dS_i.$$

Pomijając człony wyższego rzędu niż pierwszy ze względu na $\delta \varphi_k$, $\delta \bar{\varepsilon}_{ij}$ i $\delta \bar{u}_i$ oraz wykorzystując równość

$$(16) \quad \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{S_u} t_i u_i^0 dS_u + \int_{S_i} T_i^0 u_i dS_i,$$

równanie (15) możemy przedstawić w postaci

$$(17) \quad \int_V \sigma_{ij} \delta \bar{\varepsilon}_{ij} dV = \int_{S_i} T_i^0 \delta \bar{u}_i dS_i + \int_{S_i} [(\sigma_{ik} \delta \varphi_j - \sigma_{ij} \delta \varphi_k) u_i]_{,j} n_k dS_i,$$

która przedstawia poszukiwaną zasadę prac przygotowanych. Stosując dalej do ostatniego członu po prawej stronie równania (17) twierdzenie Stokesa, możemy go przekształcić do całki krzywoliniowej po krzywej Γ ograniczającej powierzchnię S_i . Otrzymamy zatem

$$(18) \quad \int_V \sigma_{ij} \delta \bar{\varepsilon}_{ij} dV = \int_{S_i} T_i^0 \delta \bar{u}_i dS_i - \oint_{\Gamma} e_{jkl} \sigma_{ij} u_i t_k^{\Gamma} \delta \varphi_l^{\Gamma} d\Gamma,$$

gdzie t_k^T jest jednostkowym wektorem stycznym do krzywej Γ , $\delta\varphi_i^T$ przedstawia wariację punktów powierzchni S_i na krzywej Γ zaś ϵ_{jkl} jest symbolem permutacyjnym.

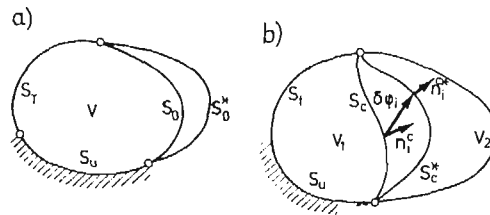
Jeżeli teraz uwzględnimy, że wariacja kształtu powierzchni S_i na ograniczającej ją krzywej Γ wynosi zero, $\delta\varphi_i^T = 0$, ostatni człon po prawej stronie (18) znika i zasada prac przygotowanych przy równoczesnej wariacji pola przemieszczeń i kształtu powierzchni obciążonej przyjmuje postać

$$(19) \quad \int_V \sigma_{ij} \delta \bar{\epsilon}_{ij} dV = \int_{S_i} T_i^0 \delta \bar{u}_i dS_i.$$

Rozpatrzmy teraz postać zasady (19) jeżeli brzeg S_i składa się z części obciążonej S_T na której działają niezerowe siły powierzchniowe $T_i^0 \neq 0$ i której kształt jest z góry dany, $\delta\varphi_k = 0$ na S_T , oraz nieobciążonej części S_o , której kształt podlega wariacji, $T_i^0 = 0$, $\delta\varphi_k \neq 0$ na S_o , rys. 3a. W takim przypadku równanie (19) przyjmie postać

$$(20) \quad \int_V \sigma_{ij} \delta \bar{\epsilon}_{ij} dV = \int_{S_T} T_i^0 \delta \bar{u}_i dS_T.$$

Niech teraz dane będzie dwufazowe ciało sprężyste B ograniczone ustalonym brzegiem $S = S_u \cup S_i$ i zajmujące obszary V_1 i V_2 rozdzielone brzegiem wewnętrznym S_c , rys. 3b. Przyjmujemy, że konfiguracja ciała doznawać może nieskończenie małych wariacji określonych transformacją (3), gdzie teraz funkcje $\delta\varphi_i$ znikają na całym brzegu zewnętrznym S . W wyniku tak określonej transformacji kształt brzegu wewnętrznego S_c może podlegać wariacji, podczas gdy zewnętrzny brzeg S nie ulega zmianie.



Rys. 3a) Ciało podparte na S_u i obciążone na S_T ze swobodnym brzegiem S_o poddanym wariacji, b) Wariacja kształtu wewnętrznego brzegu S_c

Niech naprężenia, odkształcenia oraz przemieszczenia oznaczone będą odpowiednio przez $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$, $\epsilon_{ij}^{(1)}$, $\epsilon_{ij}^{(2)}$, $u_i^{(1)}$ oraz $u_i^{(2)}$ i niech spełniają odpowiednio równania równowagi, warunki nierozdzielności oraz warunki brzegowe na S_u i S_i . Ponadto na brzegu wewnętrznym S_c przemieszczenia $u_i = u_i^c$ i siły powierzchniowe $T_i^c = \sigma_{ij} n_j^c$ muszą być ciągłe podczas gdy ich gradienty mogą doznawać nieciągłości. Możemy zatem napisać [3]

$$(21) \quad \begin{aligned} [u_i^c] &= 0, & [T_i^c] &= [\sigma_{ij}] n_j^c = 0, \\ [u_{i,k}^c] &= [u_{i,n}] n_k^c, & [T_{i,k}^c] &= [T_{i,n}^c] n_k^c \end{aligned} \quad \text{na } S_c,$$

gdzie symbol $[]$ oznacza skok odpowiednich wielkości na powierzchni S_c obliczany jako ich różnica w obszarach V_1 i V_2 , np. $[f_i] = f_i^{(1)}(x) - f_i^{(2)}(x)$ dla $x \in S_c$. Jednostkowy wektor normalnej na S_c n_j^c jest skierowany na zewnątrz obszaru V_1 .

Rozpatrzymy teraz wariację pól przemieszczeń $u_i^{(1)}$ i $u_i^{(2)}$ określoną przez (5) i spełniającą warunki

$$(22) \quad \delta u_i = 0 \text{ na } S_n, \quad \delta u_i = \delta \bar{u}_i \text{ na } S_t, \quad [\delta u_i] = 0 \text{ na } S_c.$$

Uwzględniając ostatni z warunków (22) oraz równanie (5), wariacje pól przemieszczeń na S_c spełniać muszą warunek

$$(23) \quad [\delta \bar{u}_i] + [u_{i,k}] \delta \varphi_k = 0, \quad \text{na } S_c,$$

Pisząc teraz dla obu części ciała zasadę prac przygotowanych (19) i uwzględniając ciągłość sił wewnętrznych na powierzchni S_c otrzymamy

$$(24) \quad \int_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{(1)} dV_1 + \int_{V_2} \sigma_{ij}^{(2)} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{(2)} dV_2 = \int_{S_t} T_i^0 \delta \bar{u}_i dS_t + \int_{S_c} T_i^c [\delta \bar{u}_i] dS_c,$$

gdzie T_i^0 oznaczają dane siły powierzchniowe na brzegu obciążonym S_t , zaś T_i^c są powierzchniowymi siłami wewnętrznymi na powierzchni S_c . Wykorzystując w (24) warunek (23) oraz równość

$$(25) \quad [u_{i,k}] \delta \varphi_k = [u_{i,n}] \delta \varphi_n,$$

gdzie $\delta \varphi_n$ oznacza składową normalną wariacji brzegu S_c , zasada prac przygotowanych dla równoczesnej wariacji przemieszczeń i kształtu brzegu wewnętrznego S_c przyjmuje postać

$$(26) \quad \int_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{(1)} dV_1 + \int_{V_2} \sigma_{ij}^{(2)} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{(2)} dV_2 = \int_{S_t} T_i^0 \delta \bar{u}_i dS_t - \int_{S_c} T_i^c [u_{i,n}] \delta \varphi_n dS_c.$$

3. Zasada uzupełniających prac przygotowanych przy równoczesnej wariacji pola naprężeń i kształtu brzegu

Wykorzystując notację poprzedniego punktu założymy teraz, że transformacja $V \rightarrow V^*$ połączona jest z równoczesną wariacją naprężeń oraz, że pole naprężeń σ_{ij}^* jest statycznie dopuszczalne i spełnia odpowiednie warunki brzegowe. Mamy zatem

$$(27) \quad \sigma_{ij}^*(x^*) = \sigma_{ij}(x) + \delta \sigma_{ij}(x) = \sigma_{ij} + \delta \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij,k} \delta \varphi_k,$$

gdzie

$$(28) \quad \delta \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^*(x) - \sigma_{ij}(x)$$

i statyczna dopuszczalność pola naprężeń wymaga, aby

$$(29) \quad \sigma_{ij,j}^* = \sigma_{ij,j} + \delta \bar{\sigma}_{ij,j} + \sigma_{ij,kj} \delta \varphi_k = 0.$$

Stąd

$$(30) \quad \delta \bar{\sigma}_{ij,j} = 0 \text{ w } V,$$

zaś siły powierzchniowe na brzegu S_t^* są określone przez

$$(31) \quad T_i^*(x^*) = \sigma_{ij}^*(x^*) n_j^*.$$

Oznaczając teraz całkowitą wariację sił powierzchniowych przez

$$(32) \quad \delta T_i^0 = T_i^*(x^*) - T_i^0(x) = \delta \sigma_{ij} n_j + \sigma_{ij} \delta n_j$$

i wykorzystując równość [2]

$$(33) \quad \delta n_j = n_j^* - n_j = n_j n_k n_l \delta \varphi_{k,l} - n_k \delta \varphi_{k,j},$$

oraz uwzględniając (27) otrzymamy z (32)

$$(34) \quad \delta \bar{\sigma}_{ij} n_j = \delta T_i^0 - T_i^0 n_k n_l \delta \varphi_{k,l} - \sigma_{ij,k} n_j \delta \varphi_k + \sigma_{ij} n_k \delta \varphi_{k,j}, \quad \text{na } S_t.$$

Przedłużając analitycznie pola przemieszczeń i odkształceń z V do V^* możemy napisać

$$(35) \quad \begin{aligned} u_i^*(x^*) &= u_i(x) + u_{i,k}(x) \delta \varphi_k, \\ \varepsilon_{ij}^*(x^*) &= \varepsilon_{ij}(x) + \varepsilon_{ij,k}(x) \delta \varphi_k. \end{aligned}$$

Zatem w konfiguracji V^* napiszemy

$$(36) \quad \int_{V^*} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV^* = \int_{S_u} t_i^* u_i^0 dS_u + \int_{S_t^*} T_i^* u_i^0 dS_t^*.$$

Postępując podobnie jak w poprzednim punkcie zastąpimy całkowanie w obszarach V^* i S_t^* przez całkowanie po obszarach V i S_t . Wykorzystując (13), (14) i (27 - 35) otrzymamy, pomijając czony wyższego rzędu ze względu na $\delta \varphi_k$ i $\delta \bar{\sigma}_{ij}$

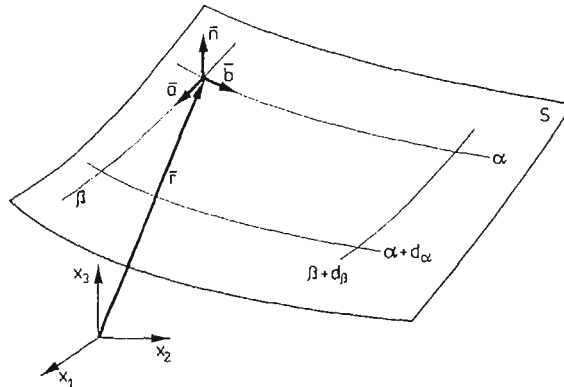
$$(37) \quad \int_V (\sigma_{ij} + \delta \bar{\sigma}_{ij}) \varepsilon_{ij} dV = \int_{S_u} t_i^* u_i^0 dS_u + \int_{S_t} [T_i^0 u_i + \delta T_i^0 u_i + T_{i,l}^0 u_l (\delta \varphi_{k,k} - n_k n_l \delta \varphi_{k,l}) + (\sigma_{ik} \delta \varphi_j - \sigma_{ij} \delta \varphi_k) u_{i,j} n_k] dS_t.$$

Odejmując teraz (16) od (37) otrzymamy poszukiwaną zasadę uzupełniających prac przygotowanych w postaci

$$(38) \quad \int_V \delta \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u + \int_{S_t} [\delta T_i^0 u_i + T_i^0 u_l (\delta \varphi_{k,k} - n_k n_l \delta \varphi_{k,l}) + (\sigma_{ik} \delta \varphi_j - \sigma_{ij} \delta \varphi_k) u_{i,j} n_k] dS_t.$$

Niech teraz powierzchnia S , będzie sparametryzowana ortogonalnym krzywoliniowym układem współrzędnych α, β , rys. 4, pokrywających się z liniami głównych krzywizn na S_t i niech a_k, b_k oznaczają jednostkowe wektory styczne do linii α i β , zaś $\delta \varphi_\alpha, \delta \varphi_\beta, \delta \varphi_n$ oznaczają składowe wariacji punktów powierzchni S_t w kierunkach α, β, n , przy czym zachodzi

$$(39) \quad \delta \varphi_\alpha = a_k \delta \varphi_k, \quad \delta \varphi_\beta = b_k \delta \varphi_k, \quad \delta \varphi_n = n_k \delta \varphi_k.$$



Rys. 4. Parametryzacja powierzchni S krzywoliniowym ortogonalnym układem współrzędnych (α, β)

Uwzględniając, że dla dowolnej funkcji $f(x)$ ciągłej i różniczkowalnej na S_t zachodzi

$$(40) \quad f_{,k} = \frac{1}{A} f_{,\alpha} a_k + \frac{1}{B} f_{,\beta} b_k + f_{,n} n_k,$$

gdzie A^2 i B^2 są współczynnikami pierwszej formy kwadratowej powierzchni S_t , równanie (38) przekształcimy do postaci

$$(41) \quad \int_V \delta \bar{\sigma}_{IJ} \varepsilon_{IJ} dV = \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u + \int_{S_t} \delta T_i^0 u_i dS_t + \int_{S_t} \{ (T_i^0 u_i)_{,n} - 2T_i^0 u_i H - \\ - \sigma_{IJ} \varepsilon_{IJ} \}_{n_k} - T_{i,k}^0 u_i \} \delta \varphi_k dS_t + \int_{S_t} [(T_i^0 u_i n_k \delta \varphi_k)_{,\alpha} + (T_i^0 u_i n_k \delta \varphi_k)_{,\beta}] \frac{1}{AB} dS_t,$$

gdzie H oznacza średnią krzywiznę powierzchni S_t . W równaniu (41) wykorzystano ponadto równość

$$(42) \quad 2Hn_k = \frac{1}{AB} [(Ba_k)_{,\alpha} + (Ab_k)_{,\beta}].$$

Jeżeli na krzywej ograniczającej powierzchnię S_t znikają wariacje $\delta \varphi_k$, to ostatnia całka po prawej stronie (41) staje się równa zero i poszukiwana zasada uzupełniających prac przygotowanych przy równoczesnej wariacji pola naprężeń i kształtu brzegu obciążonego przyjmuje postać

$$(43) \quad \int_V \delta \bar{\sigma}_{IJ} \varepsilon_{IJ} dV = \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u + \int_{S_t} \delta T_i^0 u_i dS_t + \int_{S_t} \{ [(T_i^0 u_i)_{,n} - 2T_i^0 u_i H - \\ - \sigma_{IJ} \varepsilon_{IJ}] n_k - T_{i,k}^0 u_i \} \delta \varphi_k dS_t.$$

Zauważmy, że zasada (43) (jak również (19)) jest słuszna zarówno w przypadku gdy siły powierzchniowe na S_t są siłami zachowawczymi jak również w przypadku sił niezachowawczych.

Niech teraz powierzchnia S_t składa się z obciążonej części S_T o zadanym kształcie, $T_i^0 \neq 0$ $\delta \varphi_k = 0$ na S_T , i nieobciążonej części S_0 której kształt może podlegać zmianom, $T_i^0 = 0$ $\delta \varphi_k \neq 0$ na S_0 . W takim przypadku z równania (43) otrzymamy

$$(44) \quad \int_V \delta \bar{\sigma}_{IJ} \varepsilon_{IJ} dV = \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u - \int_{S_0} \sigma_{IJ} \varepsilon_{IJ} \delta \varphi_n dS_0.$$

Wprowadzając na S_0 lokalny prostokątny układ współrzędnych (y_k) z osią y_3 normalną do S_0 i osiami y_1 i y_2 leżącymi w płaszczyźnie stycznej do S_0 , z równania (44) otrzymamy zasadę uzupełniających prac przygotowanych w postaci

$$(45) \quad \int_V \delta \bar{\sigma}_{IJ} \varepsilon_{IJ} dV = \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u - \int_{S_0} \sigma_{kl} \varepsilon_{kl} \delta \varphi_n dS_0, \quad k, l = 1, 2,$$

gdzie ostatni człon po prawej stronie przedstawia iloczyn „wewnętrznych” naprężeń i odpowiednich odkształceń.

Równie łatwo otrzymać możemy zasadę uzupełniających prac przygotowanych w przypadku wariacji kształtu wewnętrznej powierzchni S_c ciała dwufazowego rozdzielającego materiały o różnych własnościach sprężystych, rys. 3b. Korzystając z notacji wprowadzonej

w poprzednim punkcie oraz uwzględniając ciągłość przemieszczeń oraz sił powierzchniowych i ich wariacji na S_c , z równania (43) napisanego dla obu części ciała otrzymamy

$$(46) \quad \int_{V_1} \delta \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV_1 + \int_{V_2} \delta \bar{\sigma}_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV_2 = \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u + \int_{S_c} \{ [(T_i^e u_i^e)_n] n_k^e - [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}] n_k^e - [T_{i,k}^e] u_i^e \} \delta \varphi_k dS_c.$$

Uwzględniając teraz warunki (21) oraz równość

$$(47) \quad [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}] = [\sigma_{kl}] \varepsilon_{kl} + \sigma_{in} [\varepsilon_{in}] \quad \text{na } S_c$$

gdzie σ_{kl} i ε_{kl} ($k, l = 1, 2$) oznaczają „wewnętrzne” naprężenia i odkształcenia w kierunku osi k, l leżących w płaszczyźnie stycznej do S_c i $\sigma_{in} = T_i^e$ ($i = 1, 2, 3; n = 3$) są „zewnątrznymi” naprężeniami działającymi na nieciągłych odkształceniach $[\varepsilon_{in}] = [u_{i,n}^e]$, z równania (46) otrzymamy poszukiwaną zasadę uzupełniających prac przygotowanych w postaci

$$(48) \quad \int_{V_1} \delta \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV_1 + \int_{V_2} \delta \bar{\sigma}_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV_2 = \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u - \int_{S_c} [\sigma_{kl}] \varepsilon_{kl} \delta \varphi_n dS_c \quad k, l = 1, 2.$$

gdzie ostatni człon po prawej stronie przedstawia iloczyn skoku „wewnętrznych” naprężeń i odpowiednich odkształceń, które są ciągłe.

4. Warunki optymalności kształtu brzegu ciała

Rozpatrzmy teraz problem optymalnego projektowania kształtu brzegu ciała. Dyskusję naszą ograniczymy do projektowania kształtu konstrukcji przy którym osiąga ona minimalną podatność (maksymalną sztywność) w klasie ciał o danym z góry całkowitym koszcie materiału. Tego rodzaju projektowanie proponowane było po raz pierwszy przez WASIUTYŃSKIEGO [4]. Generalne sformułowanie problemu trójwymiarowego rozpatrywane było przez MROZA [5, 6], który podał globalne warunki optymalności w przypadku projektowania kształtu brzegu swobodnego ciała, a rozszerzenie na inne ograniczenia rozpatrywane było przez PRAGERA [7]. DEMS i MRÓZ [8, 9] rozpatrywali zagadnienia wieloparametrowej optymalizacji kształtu brzegu swobodnego i wewnętrznego konstrukcji wykonanych z materiałów fizycznie nieliniowych. W pracy [8] rozpatrzono ponadto algorytm numerycznego rozwiązania problemu metodą elementów skończonych. Problem optymalnego kształtu skręcącego pręta przyrzątecznego rozwiązywany był przez DEMSA [10]. W przedstawionej pracy rozszerzymy rozważania zawarte w pracach [8, 9] na zagadnienie optymalnego projektowania kształtu brzegu obciążonego konstrukcji wykonanej z materiału fizycznie nieliniowego, przy czym rozpatrzmy obciążenie siłami zachowawczymi, jak również siłami niezachowawczymi, zależnymi od konfiguracji brzegu. Dalej wykażemy równoważność warunków optymalizacji przy projektowaniu na minimum podatności i maksimum sztywności konstrukcji.

Rozpatrzmy ciało B pokazane na rys. 1 i wyznaczmy warunki optymalności kształtu brzegu obciążonego przy projektowaniu na minimum podatności. Całkowity koszt materiału konstrukcji określimy jako

$$(49) \quad C = cV$$

gdzie c jest jednostkowym kosztem materiału, zaś V oznacza objętość ciała. Przyjmijmy całkowitą energię uzupełniającą jako miarę globalnej podatności konstrukcji

$$(50) \quad \pi_\sigma = \int_V W(\sigma_{ij}) dV - \int_{S_u} t_i u_i^0 dS_u.$$

Zauważmy, że dla jednorodnej funkcji gęstości energii uzupełniającej, z uwagi na (2), zachodzi

$$(51) \quad \pi_\sigma = \frac{1}{n+1} \int_{S_t} T_i^0 u_i dS_t, \quad \text{dla} \quad S_u = 0,$$

$$(52) \quad \pi_\sigma = -\frac{n}{n+1} \int_{S_u} t_i u_i^0 dS_u \quad \text{dla} \quad S_t = 0$$

i całkowita energia uzupełniająca jest proporcjonalna do pracy sił powierzchniowych na S_u lub S_t . Problem optymalizacji

$$(53) \quad \min. \pi_\sigma \quad \text{dla} \quad C \leq C_0$$

gdzie C_0 jest danym z góry całkowitym kosztem materiału konstrukcji, może być zastąpiony przez poszukiwanie warunków stacjonarności funkcjonału

$$(54) \quad \pi'_\sigma(\sigma_{ij}, \varphi_k, \lambda) = \pi_\sigma + \lambda(C - C_0)$$

gdzie λ jest dodatnim mnożnikiem Lagrange'a. Pierwsza wariacja funkcjonału (54) z uwagi na σ_{ij} , φ_k i λ wynosi [1]

$$(55) \quad \delta\pi'_\sigma = \int_V \delta\bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} dV + \int_{S_t} W n_k \delta\varphi_k dS_t - \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u + \lambda c \int_{S_t} n_k \delta\varphi_k dS_t + \delta\lambda(C - C_0).$$

Wykorzystując zasadę uzupełniających prac przygotowanych (43) otrzymamy warunek stacjonarności

$$(56) \quad \delta\pi'_\sigma = \int_{S_u} \{ [W + (T_i^0 u_i)_{,n} - 2T_i^0 u_i H - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}] n_k - T_{i,k}^0 u_i \} \delta\varphi_k dS_t + \\ + \int_{S_t} \delta T_i^0 u_i dS_t + \lambda c \int_{S_t} n_k \delta\varphi_k dS_t + \delta\lambda(C - C_0) = 0.$$

Rozpatrzmy teraz wariację sił powierzchniowych δT_i^0 . W przypadku zachowawczego pola sił napiszemy

$$(57) \quad T_i^0 = T_i^0[u_i(x)]$$

i wariację sił powierzchniowych spowodowaną zmianą kształtu brzegu S_t określimy przez

$$(58) \quad \delta T_i^0 = T_{i,k}^0 \delta\varphi_k.$$

Uwzględniając teraz (58) w warunku stacjonarności (56) oraz wykorzystując (39) otrzymamy

$$(59) \quad \delta\pi'_\sigma = \int_{S_t} [W + (T_i^0 u_i)_{,n} - 2T_i^0 u_i H - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda c] \delta\varphi_n dS_t + \delta\lambda(C - C_0) = 0.$$

Z uwagi na niezależność wariacji $\delta\varphi_n$, $\delta\lambda$ z równania (59) otrzymujemy lokalne warunki optymalności kształtu brzegu obciążonego siłami zachowawczymi w postaci

$$(60) \quad \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W + 2T_i^0 u_i H - (T_i^0 u_i)_{,n} = \lambda c \quad \text{na } S_t, \quad C = C_0.$$

Jako przykład niezachowawczego pola sił, rozpatrzmy siły powierzchniowe zależne od punktu i konfiguracji powierzchni S_t , $T_i^0 = T_i^0(x_k, S_t)$, dane w postaci

$$(61) \quad T_i^0 = p(x_k)n_i,$$

gdzie n_i oznacza wektor jednostkowy normalnej zewnętrznej do S_t , zaś $p(x_k)$ jest funkcją punktu. Tak więc równanie (61) przedstawia sobą obciążenie brzegu zmiennym ciśnieniem p skierowanym stale wzdłuż normalnej do powierzchni S_t . Tego rodzaju obciążenie występuje przy projektowaniu np. zbiorników ciśnieniowych, zapór wodnych itp.

Wykorzystując (33), wariację sił (61) spowodowaną zmianą kształtu brzegu przedstawimy w postaci

$$(62) \quad \delta T_i^0 = \delta p(x_k)n_i + p(x_k)\delta n_i = p_{,k}n_i\delta\varphi_k + p(n_i n_k \delta\varphi_{k,n} - n_k \delta\varphi_{k,i}),$$

zaś pracę wariacji sił δT_i^0 na przemieszczeniach u_i wyrazimy przez

$$(63) \quad \int_{S_t} \delta T_i^0 u_i dS_t = \int_{S_t} \{ [2pn_i u_i H - (pn_i u_i)_{,n} + (pu_i)_{,i}n_k + (pn_i)_{,k}u_i] \delta\varphi_k dS_t.$$

Uwzględniając teraz (61) i (63) w (56) oraz wykorzystując (39) otrzymamy warunek stacjonarności

$$(64) \quad \delta\pi'_\sigma = \int_{S_t} [W - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + (pu_i)_{,i} + \lambda c] \delta\varphi_n dS_t + \delta\lambda(C - C_0) = 0,$$

skąd z uwagi na niezależność wariacji $\delta\varphi_n$, $\delta\lambda$ otrzymamy lokalne warunki optymalności kształtu brzegu obciążonego niezachowawczymi siłami normalnymi do brzegu

$$(65) \quad \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W - (pu_i)_{,i} = \lambda c \quad \text{na } S_t, \quad C = C_0.$$

Poszukiwane warunki optymalności, korzystając z pojęcia energii potencjalnej, otrzymamy stosując podobny tok postępowania. Przyjmijmy energię potencjalną

$$(66) \quad \pi_u = \int_V U(\varepsilon_{ij})dV - \int_{S_t} T_i^0 u_i dS_t,$$

jako miarę globalnej sztywności konstrukcji. Problem optymalizacji sformułujemy teraz następująco

$$(67) \quad \max. \pi_u \quad \text{dla } C \leq C_0.$$

Warunki optymalności wyznaczmy rozpatrując funkcjonal

$$(68) \quad \pi'_u(u_i, T_i^0, \varphi_k, \lambda) = \pi_u - \lambda(C - C_0),$$

którego pierwsza wariacja wynosi

$$(69) \quad \delta\pi'_u = \int \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \bar{\varepsilon}_{ij} dV + \int_{S_t} U n_k \delta\varphi_k dS_t - \delta \int_{S_t} T_i^0 u_i dS_t - \lambda c \int_{S_t} n_k \delta\varphi_k dS_t - \delta\lambda(C - C_0) = 0.$$

Wariację pracy sił powierzchniowych wyrazimy jako

$$(70) \quad \delta \int_{S_t} T_i^0 u_i dS_t = \int_{S_t} \delta T_i^0 u_i dS_t + T_i^0 \delta u_i dS_t + T_i^0 u_i \delta(dS_t).$$

Wykorzystując teraz (5) oraz równość [2]

$$(71) \quad \delta(dS_t) = (\delta\varphi_{k,k} - n_k \delta\varphi_{k,n}) dS_t,$$

równanie (70) przedstawimy w postaci

$$(72) \quad \delta \int_{S_t} T_i^0 u_i dS_t = \int_{S_t} \delta T_i^0 u_i dS_t + T_i^0 \delta \bar{u}_i dS_t + [(T_i^0 u_i)_{,n} - 2T_i^0 u_i H] n_k \delta\varphi_k dS_t - \\ - T_{i,k}^0 u_i \delta\varphi_k dS_t + \frac{1}{AB} [(T_i^0 u_i B a_k \delta\varphi_k)_{,\alpha} + (T_i^0 u_i A b_k \delta\varphi_k)_{,\beta}] dS_t,$$

gdzie ostatni człon po prawej stronie staje się równy zeru, jeżeli na krzywej Γ ograniczającej powierzchnię S_t wariacja $\delta\varphi_k = 0$.

Wykorzystując teraz w równaniu (69) zasadę prac przygotowanych (19) oraz równanie (72) otrzymamy warunek stacjonarności funkcjonału (68) w postaci

$$(73) \quad \delta\pi'_u = \int_{S_t} \{ [U - (T_i^0 u_i)_{,n} + 2T_i^0 u_i H] n_k + T_{i,k}^0 u_i \} \delta\varphi_k dS_t - \int_{S_t} \delta T_i^0 u_i dS_t - \\ - \lambda c \int_{S_t} n_k \delta\varphi_k dS_t - \delta\lambda(C - C_0) = 0.$$

Jeżeli powierzchnia S_t jest obciążona zachowawczym układem sił (57), których wariacja wyrażona jest przez (58), z równania (73) otrzymamy lokalne warunki optymalności

$$(74) \quad U - (T_i^0 u_i)_{,n} + 2T_i^0 u_i H = \lambda c \text{ na } S_t, \quad C = C_0.$$

W przypadku niezachowawczego pola sił (61), którego wariacja określona jest przez równania (62 - 63), lokalne warunki optymalności kształtu brzegu S_t , otrzymane z równania (73) przyjmują postać

$$(75) \quad U - (p u_i)_{,i} = \lambda c \text{ na } S_t, \quad C = C_0.$$

Zauważmy równocześnie, że równoważność globalnych warunków (56) i (73) lub lokalnych (60) i (74) oraz (65) i (75) wynika bezpośrednio z równości

$$(76) \quad U + W = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}.$$

Jeżeli teraz optymalizacji będzie podlegać kształt brzegu swobodnego S_0 ciała ($T_i^0 = \delta T_i^0 = 0$ na S_0 , równania (56, 73)), to z równania (56) otrzymamy lokalny warunek optymalności w postaci

$$(77) \quad \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - W = \lambda c \text{ na } S_0, \quad C = C_0,$$

lub, z równania (73), [8]

$$(78) \quad U = \lambda c \text{ na } S_0, \quad C = C_0.$$

Równie łatwo otrzymać możemy warunki optymalności kształtu brzegu wewnętrznego ciała, rys. 3, rozdzielającego materiały o różnych własnościach sprężystych w klasie ciał o danym całkowitym koszcie materiału określonym teraz przez

$$(79) \quad C = c_1 V_1 + c_2 V_2 \leq C_0,$$

gdzie c_1 i c_2 są jednostkowymi kosztami obu materiałów.

Minimalizacja całkowitej energii uzupełniającej π_σ , przy wykorzystaniu zasady uzupełniających prac przygotowanych (48) prowadzi do lokalnych warunków optymalności kształtu powierzchni wewnętrznej, danych w postaci [9]

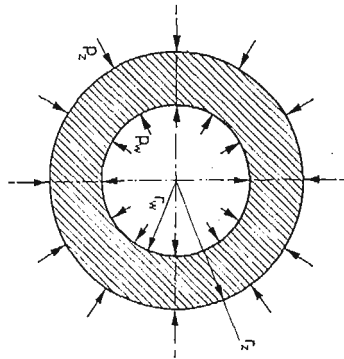
$$(80) \quad [\sigma_{kl}] \varepsilon_{kl} - [W] = \lambda(c_1 - c_2) \text{ na } S_c, \quad C = C_0,$$

zaś maksymalizacja energii potencjalnej π_u , przy wykorzystaniu zasady (26), prowadzi do warunków optymalności postaci [9]

$$(81) \quad [U] - T_i^0 [u_{i,n}] = \lambda(c_1 - c_2) \text{ na } S_c, \quad C = C_0.$$

5. Przykład optymalizacji kształtu brzegu obciążonego

Jako prostą ilustrację wykorzystania otrzymanych w poprzednim punkcie warunków optymalności rozpatrzmy problem optymalnego projektowania grubościennej rury kołowej obciążonej stałym ciśnieniem wewnętrznym p_w i zewnętrznym p_z , rys. 5. Rura o we-



Rys. 5. Rura kołowa poddana stałemu ciśnieniu wewnętrznemu i zewnętrznemu

wnętrznym promieniu r_w i zewnętrznym r_z wykonana jest z materiału liniowo sprężystego. Problem optymalizacji ograniczony jest do wyznaczenia wartości promieni r_w i r_z , dla których podatność rury osiąga minimum, przy zachowaniu stałego pola powierzchni przekroju poprzecznego rury. Zakładając całkowity koszt rury jako proporcjonalny do pola powierzchni jej przekroju otrzymamy

$$(82) \quad C = c\pi(r_z^2 - r_w^2).$$

Całkowita energia uzupełniająca rury, odniesiona do jednostki jej długości, wynosić będzie

$$(83) \quad \pi_\sigma = \frac{1}{2E} \int_{r_w}^{r_z} (\sigma_r^2 - 2\nu\sigma_r\sigma_t + \sigma_t^2) r dr,$$

gdzie σ_r i σ_t oznaczają naprężenia promieniowe i obwodowe, zaś E i ν są stałymi sprężystości. Równanie równowagi

$$(84) \quad \frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_t = 0,$$

uzupełnione jest warunkami brzegowymi

$$(85) \quad \begin{aligned} T_r^0 &= -\sigma_r = +p_w, & T_t^0 &= 0 & \text{dla } r &= r_w, \\ T_r^0 &= \sigma_r = -p_z, & T_t^0 &= 0 & \text{dla } r &= r_z. \end{aligned}$$

Powyższe równania uzupełnimy warunkiem stacjonarności (65), wyrażonym przez naprężenia w postaci

$$(86) \quad \begin{aligned} (\sigma_t + p_w)^2 - 2p_w^2(1-\nu) &= 2\lambda cE, & \text{dla } r &= r_w, \\ (\sigma_t + p_z)^2 - 2p_z^2(1-\nu) &= 2\lambda cE, & \text{dla } r &= r_z. \end{aligned}$$

Równanie (84) spełnimy tożsamościowo, przyjmując pole naprężeń w postaci [11]

$$(87) \quad \sigma_r = \frac{A}{r^2} + B, \quad \sigma_t = -\frac{A}{r^2} + B,$$

zaś warunki brzegowe (85) są spełnione, gdy

$$(88) \quad A = \frac{r_w^2 r_z^2}{r_z^2 - r_w^2} (p_z - p_w), \quad B = \frac{p_w r_w^2 - p_z r_z^2}{r_z^2 - r_w^2}.$$

Warunki optymalności (86), przy uwzględnieniu związków (87) i przedstawimy w postaci

$$(89) \quad \begin{aligned} 2r_z^4(p_w - p_z)^2 - p_w^2(r_z^2 - r_w^2)^2(1-\nu) &= \lambda cE(r_z^2 - r_w^2)^2, \\ 2r_w^4(p_w - p_z)^2 - p_w^2(r_z^2 - r_w^2)^2(1-\nu) &= \lambda cE(r_z^2 - r_w^2)^2. \end{aligned}$$

Ograniczenie nałożone na całkowity koszt materiału rury, z uwagi na (82) wyrazimy w postaci

$$(90) \quad r_z^2 - r_w^2 = q$$

gdzie $q > 1$ jest danym kosztem względnym projektowania.

Rozwiązując układ równań (89 - 90) wyznaczmy poszukiwane wartości optymalnych promieni r_w i r_z

$$(91) \quad r_w = \frac{1}{2} \sqrt{q \frac{(3-\nu)p_z - (1+\nu)p_w}{p_w - p_z}}, \quad r_z = \frac{1}{2} \sqrt{q \frac{(3-\nu)p_w - (1+\nu)p_z}{p_w - p_z}},$$

przy czym musi zachodzić

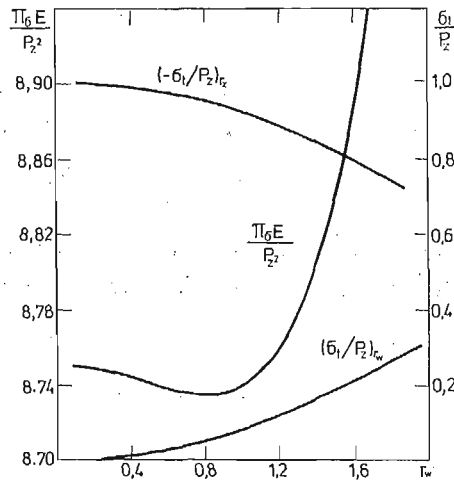
$$(92) \quad 1 < \frac{p_w}{p_z} < \frac{3-\nu}{1+\nu}.$$

Jeżeli nierówność (92) nie jest spełniona, równania warunków optymalności (89) nie mają rozwiązań rzeczywistych.

Podatność rury (83), wykorzystując (87) i (88) przedstawimy w postaci

$$(93) \quad \pi_\sigma = \frac{1}{2qE} [(1+\nu)r_w^2 r_z^2 (p_z - p_w)^2 + (1-\nu)(p_w r_w^2 - p_z r_z^2)^2]$$

Rysunek 6 przedstawia zmianę podatności rury o ustalonym koszcie względnym projektowania w przypadku $\nu = 0.3$ jako funkcję promienia wewnętrznego r_w , dla ustalonego stosunku ciśnień p_w/p_z . Dodatkowo pokazana jest zmiana wartości naprężeń



Rys. 6. Zmiana podatności rury i naprężeń obwodowych w funkcji promienia wewnętrznego ($\nu = 0.3$, $q = 25$, $p_w/p_z = 2$).

obwodowych σ , na wewnętrznym i zewnętrznym brzegu rury. Łatwo zauważyć, że wartości r_w i r_z spełniające warunki optymalności (91) odpowiadają globalnemu minimum podatności rury.

6. Wnioski

Wyznaczone zasady prac przygotowanych i uzupełniających prac przygotowanych tworzą podstawy do rozpatrywania szerokiej klasy problemów optymalnego projektowania konstrukcji. W przedstawionej pracy rozpatrzono problem projektowania sztywnościowego konstrukcji. Jednakże rozszerzenie na inne kryteria optymalizacyjne, jak np. podatność dynamiczna, stateczność, projektowanie naprężeniowe [7] czy też projektowanie na minimum dowolnego funkcjonału zależnego od pól naprężeń i odkształceń, może być uzyskane równie łatwo, skoro znane są odpowiednie zasady wariacyjne.

Otrzymane warunki optymalności tworzą układ nieliniowych równań pozwalających wyznaczyć parametry generujące kształt optymalnego brzegu. Rozwiązanie takiego układu jest ogólnie możliwe przy zastosowaniu procesów iteracyjnych analizy-syntezy, co było dyskutowane w [8], gdzie do rozwiązania problemu optymalizacji kształtu brzegu wykorzystano metodę elementów skończonych.

Należy również wspomnieć, że wyznaczone zasady wariacyjne, oprócz problemów optymalnego projektowania, pozwalają na rozpatrywanie w podobny sposób problemów o innej „naturze” fizycznej, jak np. propagacja pęknięć, transformacja faz itp., gdzie kształt nieznaney powierzchni stanowi część rozwiązania.

Literatura cytowana w tekście

1. I. M. GELFAND, S. W. FOMIN, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa, 1972.
2. R. HILL, *Aspects of Invariance in Solid Mechanics*, Advances in Applied Mechanics, **18**, 1978, 1 - 75.
3. R. HILL, *Discontinuity relations in mechanics of solids*, Progress in Solid Mechanics, vol. II, North Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1961.
4. Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *The present stage of knowledge in the field of optimum design of structures*, Appl. Mech. Revs., **16**, 341 - 350, 1963.
5. Z. MRÓZ, *Limit analysis of plastic structures subject to boundary variations*, Arch. Mech. Stos., **15**, 63, 76, 1963.
6. Z. MRÓZ, *Optimal design of structures of composite materials*, Int. J. Sol. Struct., **6**, 859 - 870, 1970.
7. W. PRAGER, *Optimality criteria in structural design*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **61**, 794 - 796, 1968.
8. K. DEMS, Z. MRÓZ, *Multiparameter structural shape optimization by the finite element method*, Int. J. Num. Meth. Eng., **13**, 247 - 263, 1979.
9. K. DEMS, Z. MRÓZ, *Optimal shape design of multi-composite structures*, J. Struct. Mech. **8**, 3, 309 - 329, 1980
10. K. DEMS, *Multiparameter shape optimization of elastic bars in torsion*, Int. J. Num. Meth. Eng. **15**, 1517 - 1539, 1980
11. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa, 1969.

Р е з ю м е

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРАВИЛА МЕХАНИКИ ДЛЯ ПЕРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ
И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ОПТИМАЛИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИИ

В работе выведены вариационные правила механики для случая, когда форма границы, окружающей тело, может изменяться. Рассмотрены сохраняющиеся и не сохраняющиеся поля сил в зависимости от конфигурации границы. Проанализирована возможность оптимизации формы границы, окружающей упругое тело, с точки зрения минимизации ее уступчивости и определены необходимые условия оптимальности для случая изменяющихся нагруженных и свободных границ, а также для случая изменяющейся внутренней границы, разделяющей материалы с различными упругими свойствами.

S u m m a r y

THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF MECHANICS FOR VARIABLE DOMAINS AND THEIR UTILIZATION FOR STRUCTURAL OPTIMIZATION

The paper provides the virtual displacement and stress principles in the case when the simultaneous variation of external or internal boundaries bounding an elastic body is considered. Both the conservative and nonconservative, dependent on boundary configuration load systems are considered. Next, we consider the problem of mean compliance design of a structure with unspecified in advance shape. The optimality conditions are generated for the case of optimal shape design of loaded and free external boundaries as well as for design of interfaces separating materials of different stiffness.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 marca 1980 roku.

STAN NAPRĘŻENIA PRZY NIESYMETRYCZNYM ROZCIĄGANIU
OSIOWYM MATERIAŁÓW PERFOROWANYCH

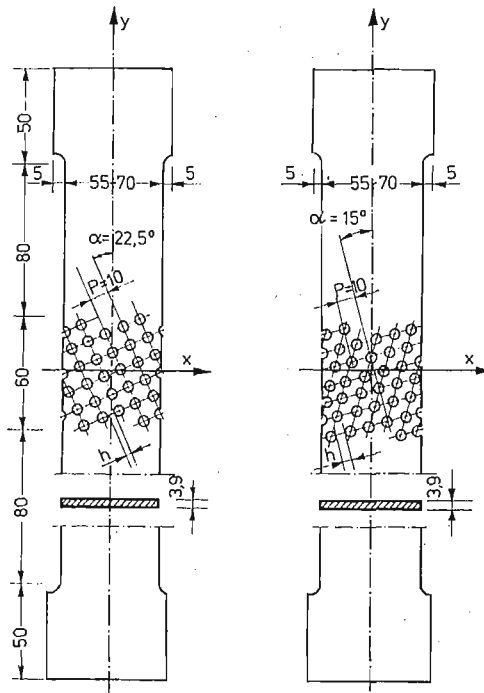
ANDRZEJ LITEWKA, EWA ROGALSKA (POZNAŃ)

1. Wprowadzenie

Materiały perforowane z regularnym układem otworów stosowane są w budowie różnych urządzeń w energetyce i chemii, stąd też istotnym problemem są badania ich własności mechanicznych. W obliczeniach wytrzymałościowych elementów perforowanych przeprowadza się homogenizację ośrodka wprowadzając pojęcie materiału zastępczego. Zasady projektowania elementów perforowanych w oparciu o koncepcję materiału zastępczego, którego stałe sprężystości odpowiadają stałym sprężystości materiału perforowanego w skali makro podali O'DONNELL i LANGER w pracy [1]. Na podstawie licznych badań doświadczalnych jak również analiz teoretycznych przyjmuje się [2], że w zakresie sprężystym materiał zastępczy w przypadku kwadratowego układu otworów jest materiałem ortotropowym, natomiast dla trójkątnego układu otworów zakłada się izotropię materiału zastępczego. W ostatnich latach ukazało się szereg prac, których celem było określenie własności plastycznych materiałów perforowanych. POROWSKI i O'DONNELL w pracach [3, 4] przedstawili powierzchnie plastycznego płynięcia dla materiałów perforowanych z kwadratowym i trójkątnym układem otworów, wyznaczone metodą nośności granicznej w oparciu o statycznie dopuszczalne pola naprężeń. Z tych prac wynika, że materiały perforowane wykazują anizotropię plastyczną przy kwadratowym, jak również przy trójkątnym układzie otworów. Podobny wniosek wynika również z doświadczalnych badań plastyczności materiałów perforowanych. W pracy [5] przedstawiono wyniki badań doświadczalnych anizotropii plastycznej, przeprowadzone na próbkach perforowanych ze stopu aluminium PA4, poddanych osiowemu rozciąganiu, przy różnych kątach nachylenia osi symetrii perforacji w stosunku do kierunku obciążenia. Badania te wykazały, że materiały z kwadratowym układem otworów wykazują większą anizotropię niż materiały z układem trójkątnym. W dalszym etapie badań, który przedstawiono w pracach [6, 7], wyznaczono w złożonym stanie naprężenia powierzchnię plastycznego płynięcia dla materiału z kwadratowym układem otworów. Badania te przeprowadzone były na perforowanych rurkach wykonanych ze stali miękkiej ST3S. W pracach [6, 7] stwierdzono, że anizotropia materiału perforowanego w znacznym stopniu uzależniona jest od współczynnika osłabienia otworami $\mu = h/P$ (wielkości h i P objaśnia rys. 1). Anizotropia materiału z kwadratowym układem otworów wzrasta, gdy wartości μ maleją, przy czym dla $\mu > 0,7$ materiał jest praktycznie izotropowy plastycznie.

W badaniach materiałów anizotropowych jakimi są materiały perforowane istotnym czynnikiem wpływającym na dokładność wyników są zakłócenia stanu naprężeń, wystę-

pujące w przypadku, gdy kierunek obciążenia próbki nie pokrywa się z kierunkiem osi symetrii ośrodka. Problem ten daje się bardzo wyraźnie zauważyć w przypadku osiowego rozciągania, gdzie zakłócenia stanu naprężeń spowodowane są powstawaniem odkształceń postaciowych występujących w płaszczyźnie próbki obok jej przewężenia i wydłużenia osiowego. Z reguły sposób mocowania próbek w maszynie wytrzymałościowej krępuje

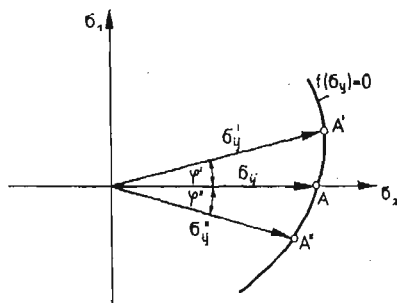


Rys. 1. Próbkki użyte do badań.

swobodę odkształceń próbki, szczególnie w kierunku prostopadłym do jej osi przez co utrudnione jest powstanie odkształceń postaciowych. W takim przypadku w próbce wytwarza się złożony stan naprężenia, którego składowymi w układzie współrzędnych x, y (rys. 1) są σ_x^* , σ_y^* , τ_{xy}^* . Naprężenia σ_x^* , σ_y^* , τ_{xy}^* są uśrednionymi naprężeniami w ośrodku zastępczym otrzymanym w wyniku homogenizacji materiału perforowanego. Tego rodzaju rozciąganie osiowe nazywać będziemy w dalszym ciągu niniejszej pracy niesymetrycznym rozciąganiem osiowym, co oznacza, że kierunek obciążenia nie pokrywa się z kierunkiem osi symetrii układu perforacji. Wystąpienie omówionych wyżej zakłóceń oznacza, że kierunki naprężeń głównych podlegają obrotowi w płaszczyźnie próbki i nie pokrywają się z kierunkami osi x, y . Wówczas przykładowo przy wyznaczaniu powierzchni plastycznego płynięcia, badany stan naprężenia odpowiada w przestrzeni naprężeń głównych σ_1, σ_2 punktowi A' lub A'' (rys. 2), a nie jak wynikałoby ze sposobu obciążenia, punktowi A. Wielkość naprężeń stycznych τ_{xy}^* , zakłócających osiowy stan naprężenia nie jest znana, a tym samym nie jest znany kąt φ' lub φ'' , określający odchylenie wektora naprężeń σ'_{ij} lub σ''_{ij} , w stosunku do wektora σ_{ij} odpowiadającego osiowemu rozciąganiu. Podobna sytuacja ma miejsce również dla innych dróg obciążenia w złożonym stanie naprężenia.

Z tego względu utrudniona jest poprawna interpretacja wyników badań, gdyż faktycznie nie można określić jaki stan naprężenia występuje w badanej próbce.

Celem niniejszej pracy jest ilościowe określenie wartości naprężeń stycznych τ_{xy}^* występujących przy osiowym rozciąganiu próbek materiałów perforowanych, gdy kierunek obciążenia nie pokrywa się z osią symetrii układu perforacji oraz określenie błędów popełnionych z tego tytułu przy wyznaczaniu powierzchni plastycznego płynięcia.



Rys. 2.

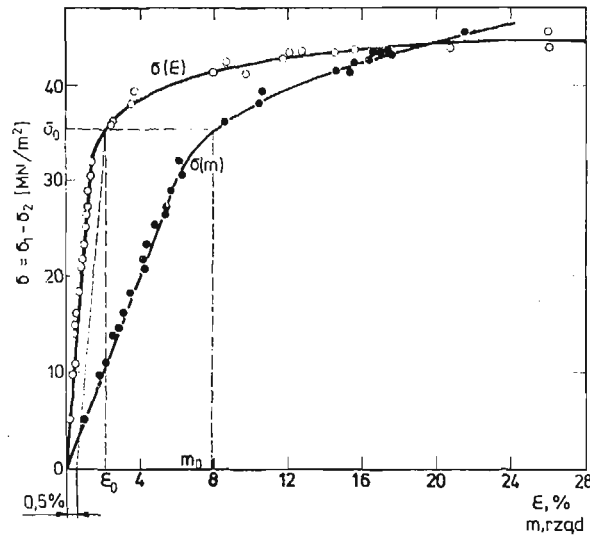
2. Metoda badań

Badania omówione w tej pracy przeprowadzone zostały przy zastosowaniu metody fotoplastyczności przedstawionej przez FROCHTA i THOMSONA [8]. Jako materiału do wykonania modeli użyto płyty celuloidowej o grubości 3,9 mm. Badania cechujące materiału nieosłabionego otworami przeprowadzone zostały w sposób opisany w pracach [8, 9]. Krzywą obrazującą zależność odkształceń od naprężeń oraz krzywą zależności efektu optycznego, reprezentowanego przez rząd izochromy, od różnicy naprężeń głównych $\sigma_1 - \sigma_2$ dla celuloidu użytego do badań przedstawia rys. 3. Krzywe te zostały wykreślone na podstawie przeprowadzonych badań pełzania mechanicznego oraz pełzania optycznego próbek celuloidowych poddanych osiowemu rozciąganiu i odnoszą się one do czasu badania $t = 300$ minut. Użyty do badań materiał był jednorodny i izotropowy oraz wykazywał przed zerwaniem odkształcenia trwałe rzędu 25%. Całość badań przedstawionych w tej pracy przeprowadzono w jednakowych warunkach termiczno-wilgotnościowych przy czym temperatura wynosiła $22^\circ \pm 2^\circ$, a wilgotność względna $50 \pm 10\%$. Konieczność taka zaistniała stąd, że własności celuloidu w znacznym stopniu uzależnione są od temperatury i wilgotności otoczenia.

Kształt oraz wymiary użytych do badań próbek materiałów perforowanych przedstawia rys. 1. Środkowa perforowana część stanowiła zasadniczą, to znaczy anizotropową część próbki natomiast dolna i górna część nieosłabiona miały stanowić rodzaj czujnika elastoplastycznego służącego do obserwacji zakłóceń osiowego stanu naprężenia. Badania przeprowadzono dla kwadratowego i trójkątnego układu otworów. Ze względu na przebieg osi symetrii układu otworów największych zakłóceń osiowego stanu naprężenia należy oczekiwać w przypadku, gdy kąt α zaznaczony na rys. 1 wynosi 15° dla układu trójkątnego oraz $22,5^\circ$ dla układu kwadratowego. Badania przeprowadzono więc na próbkach, w któ-

rych kierunek obciążenia tworzył takie kąty z osiami symetrii. Współczynnik osłabienia otworami określony stosunkiem $\mu = h/P$ wynosił dla badanych próbek 0,4, gdyż jak wynika z badań omówionych w pracy [7] materiały perforowane przy tej wartości μ wykazują znaczną anizotropię. Przeprowadzono również badania na kilku próbkach z niższym współczynnikiem osłabienia wynoszącym 0,3.

Opisane wyżej próbki poddane zostały osiowo rozciągającej sile, której wartość była tak dobrana, że w części perforowanej mogły rozwinąć się odkształcenia trwałe, natomiast



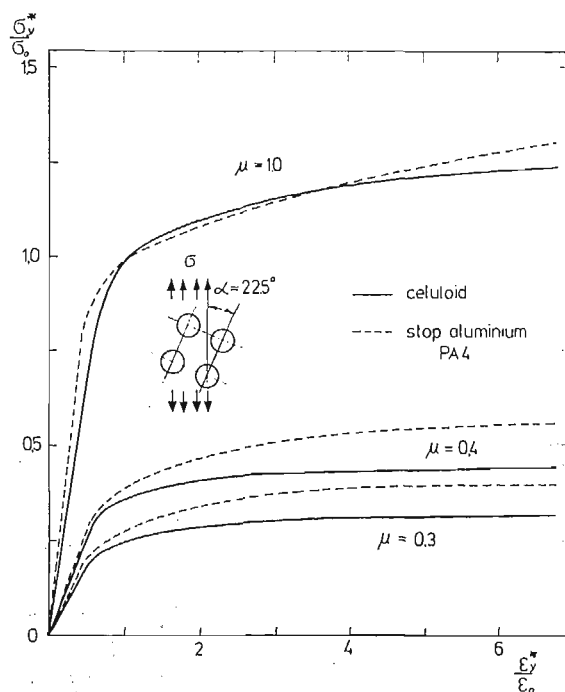
Rys. 3. Krzywa zależności odkształceń od naprężeń oraz krzywa zależności rzędu izochrom od różnicy naprężeń głównych dla czasu badania $t = 300$ minut.

w nieosłabionej części próbki występowały odkształcenia sprężyste. Siłę rozciągającą realizowano w dźwigniowym układzie obciążającym polaryskopu, przy czym szczęki mocujące próbkę umieszczone były pomiędzy sztywnymi stalowymi prowadnicami umożliwiającymi ruch próbki tylko po kierunku jej osi. Próbkę obciążano w ten sposób, że wielkość siły zwiększano skokowo co 10 minut przez okres 90 minut aż do osiągnięcia przez nią pełnej wartości przewidzianej w danym badaniu. Następnie pozostawiano próbkę pod pełnym obciążeniem przez okres 210 minut. Łączny czas badania wynosił więc 300 minut. W identyczny sposób prowadzone były badania cechujące materiał nieosłabionego. Taki sposób badania wynikał stąd, że po okresie 300 minut od chwili rozpoczęcia obciążenia następowała stabilizacja efektu optycznego, który pozostawał już praktycznie niezmienny pomimo przyrostu odkształceń. Problem ten został przedstawiony w cytowanych już pracach [8, 9]. Po upływie 300 minut rejestrowano globalne odkształcenia perforowanej części próbki ϵ_y^* oraz wykonywano zdjęcia izochrom i izoklin. Przy takim sposobie prowadzenia badań jedna próbka materiału perforowanego dostarczała tylko jednego punktu dla krzywej obrazującej zależność odkształceń podłużnych ϵ_y^* od naprężeń σ_y^* . Odkształcenia podłużne mierzone były za pomocą katetometru o dokładności 0,01 mm. Baza pomiarowa o długości około 35 mm zaznaczona była na perforowanej części próbki cienkimi kreskami naciętymi na mostkach przewiązań pomiędzy otworami.

Dla obliczenia naprężeń występujących w przekrojach przechodzących przez strefy uplastycznione zastosowano metodę fotoplastyczności zaproponowaną przez FROCHTA [8]. Metoda ta polega na takim prowadzeniu eksperymentu, ażeby rząd izochrom w jednoznaczny sposób określał wielkość różnicy naprężeń głównych $\sigma_1 - \sigma_2$, natomiast parametr izoklin jednoznacznie określał kierunki naprężeń głównych. Warunki te spełnione są jeżeli zdjęcia izochrom i izoklin w modelu wyciętym z celuloidu wykonuje się po czasie 300 minut od chwili rozpoczęcia obciążenia. Obliczenie naprężeń wzdłuż dowolnie wbranych prostoliniowych przekrojów można wówczas przeprowadzić metodą różnicy naprężeń stycznych powszechnie stosowaną w elastooptyce.

3. Wyniki badań

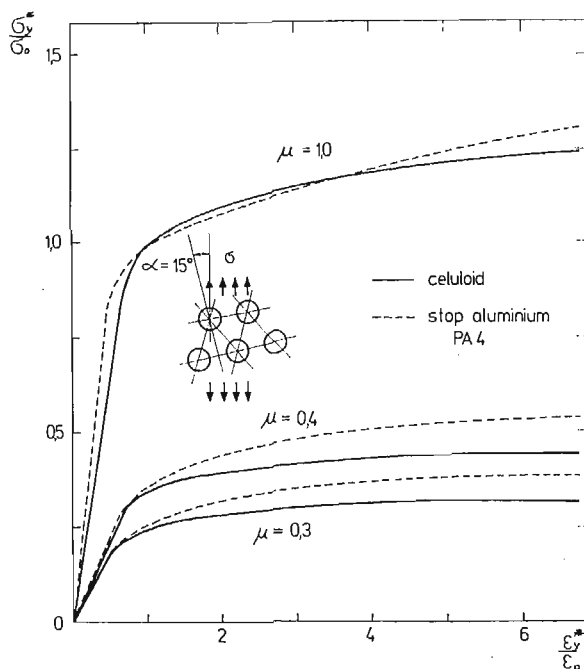
3.1. Krzywe rozciągania. Krzywe zależności odkształceń podłużnych ε_y^* od naprężeń podłużnych σ_y^* dla próbek perforowanych otrzymane w sposób omówiony w punkcie 2 przedstawione zostały w bezwymiarowym układzie współrzędnych σ_y^*/σ_0 , $\varepsilon_y^*/\varepsilon_0$ na rys. 4 i 5. Wielkości σ_y^* i ε_y^* oznaczają naprężenie i odkształcenie w materiale perforowanym,



Rys. 4. Krzywe zależności odkształceń od naprężeń dla próbek o kwadratowym układzie otworów.

traktowanym jako ośrodek jednorodny, σ_0 oznacza granicę plastyczności materiału bez perforacji ($\mu = 1,0$), a ε_0 oznacza odkształcenie odpowiadające wartości σ_0 . Wartość umownej granicy plastyczności σ_0^* dla materiałów perforowanych podobnie jak dla materiału bez perforacji wyznaczano jako naprężenie σ_y^* odpowiadające odkształceniom

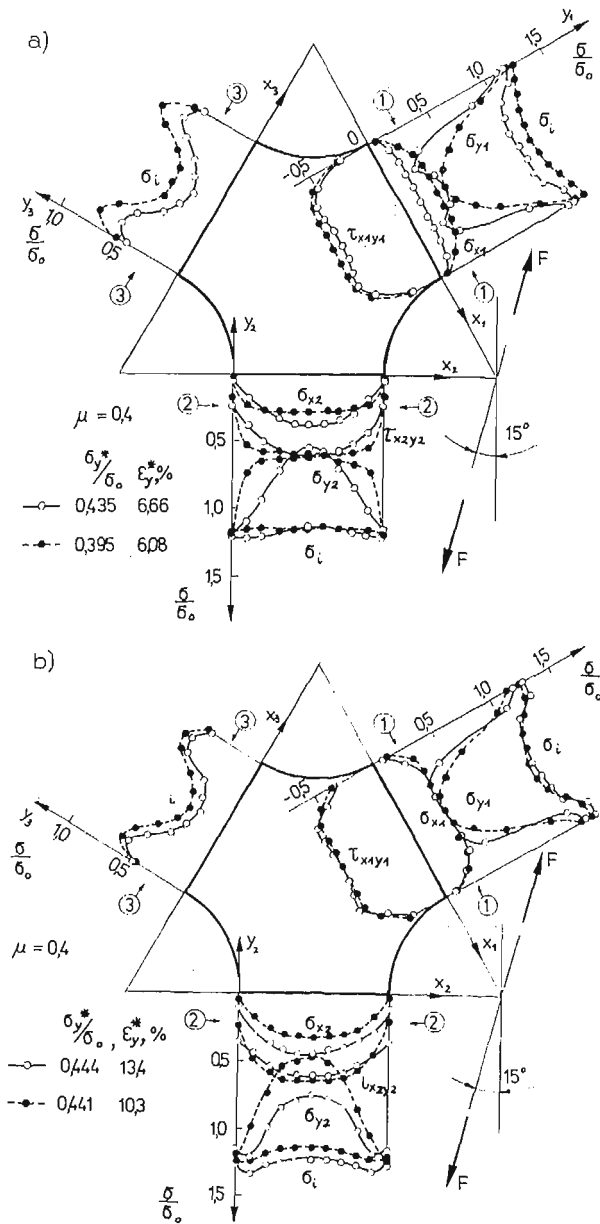
trwałym $\epsilon_y^* = 0,5\%$. Uśrednione naprężenia σ_y^* w materiale perforowanym obliczano z zależności $\sigma_y^* = F/A_0$, gdzie F jest osiową siłą przyłożoną do próbki, a A_0 jest początkowym przekrojem próbki bez potrącenia powierzchni otworów. Na rys. 4 i 5 przedstawiono porównanie krzywych rozciągania dla próbek perforowanych z kwadratowym i trójkątnym układem otworów przy $\mu = 0,3, 0,4$ i $1,0$ dla dwóch różnych materiałów a mianowicie



Rys. 5. Krzywe zależności odkształceń od naprężeń dla próbek o trójkątnym układzie otworów.

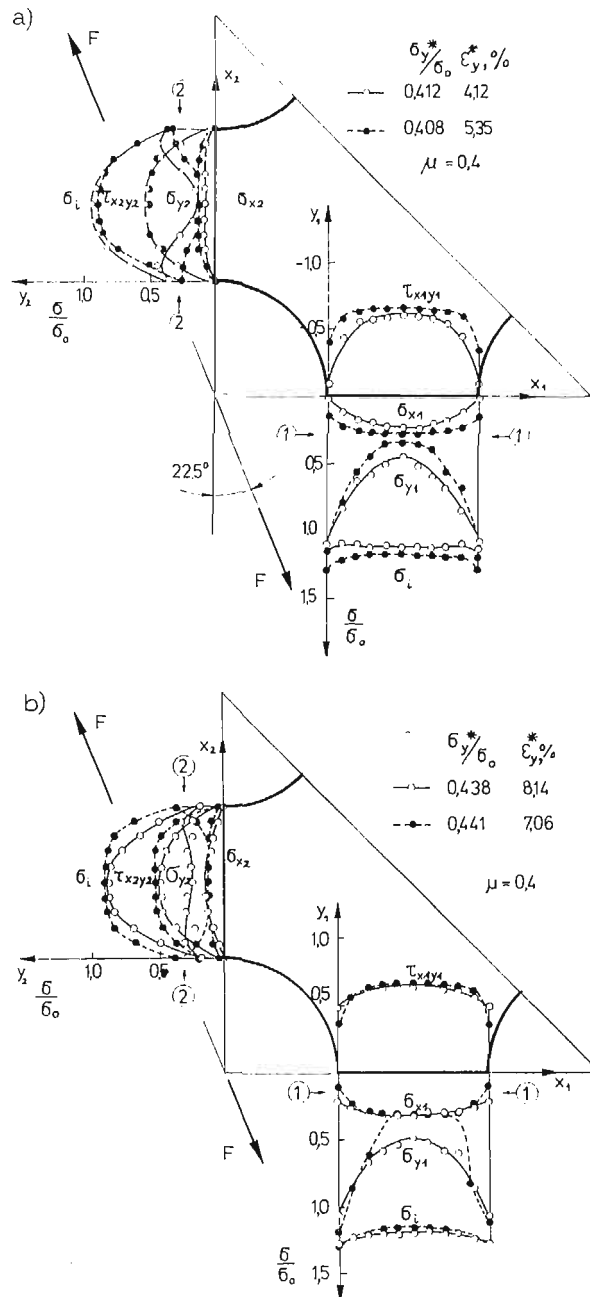
celuloиду użytego w badaniach omawianych w tej pracy i stopu aluminium PA4, z którego wykonywane były próbki w badaniach przedstawionych w pracy [5]. Z rys. 4 i 5 widać, że krzywe dla tych dwóch materiałów wykazują podobieństwo, co oznacza, że spełniony jest jeden z warunków podobieństwa modelowego w fotoplastyczności. Z prac [10, 11] wynika, że przy podobieństwie krzywych rozciągania istnieje możliwość przeniesienia wyników badań otrzymanych metodą fotoplastyczności na elementy geometrycznie podobne, wykonane z innych materiałów.

3.2. Naprężenia. Na podstawie zarejestrowanych zdjęć izochrom i izoklin obliczone zostały dla badanych próbek naprężenia styczne oraz normalne w przekrojach ograniczających trójkątne lub kwadratowe ogniwa struktury próbek. Wykresy bezwymiarowych naprężeń σ_{xn}/σ_0 , σ_{yn}/σ_0 , τ_{xny}/σ_0 , gdzie σ_0 jest granicą plastyczności celuloиду, przedstawione zostały na rys. 6 i 7. Naprężenia wyznaczono w charakterystycznych przekrojach struktury materiału oznaczonych numerami $n = 1, 2, 3$ dla trójkątnego układu otworów i $n = 1, 2$ dla kwadratowego układu otworów. Jak widać z wykresów intensywności naprężeń σ_i , pokazanych na rys. 6 i 7, uplastycznienie materiału następuje w przekrojach 1 i 2 w przypadku trójkątnego układu otworów oraz w przekroju 1 w przypadku kwadrato-



Rys. 6. Wykresy naprężeń dla trójkątnego układu otworów.

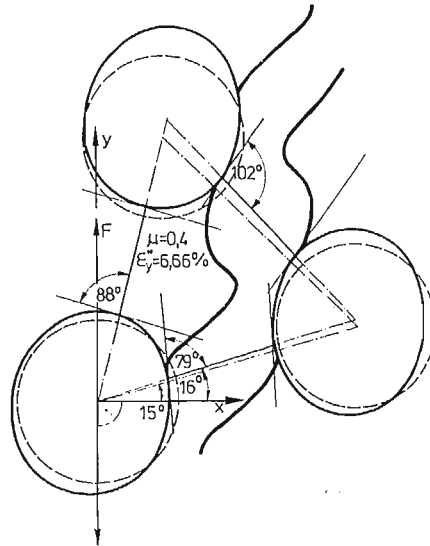
wego układu otworów. Szczególnie niskie wartości naprężeń występowały w przekroju 3 przy trójkątnej siatce otworów, w związku z czym dla zachowania czytelności rys. 6 przedstawiono tam dla przekroju 3 tylko wykresy intensywności naprężeń σ_i a pominięto wykresy składowych σ_{x3} , σ_{y3} , τ_{x3y3} . Dla wartości naprężeń przedstawionych na rys. 6 i 7 sprawdzono warunki równowagi dla ogniw struktury materiału, ograniczonych przekrojani, w których obliczone zostały naprężenia. Błędy tego sprawdzenia tylko sporadycznie



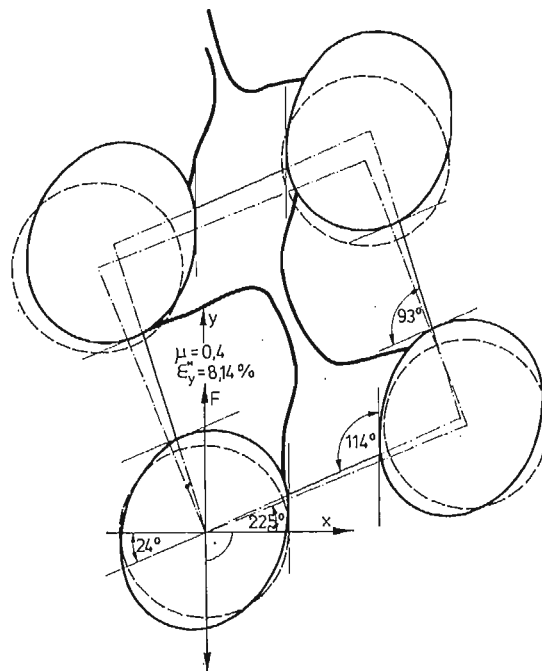
Rys. 7. Wykresy naprężeń dla kwadratowego układu otworów.

przekroczyły 10%. Rysunki przedstawiające wartości naprężeń zostały sporządzone przez odniesienie wykresów naprężeń do nieodkształconej siatki struktury próbki. Obliczenia naprężeń przeprowadzono natomiast dla odkształconej siatki otworów, wytyczając przekroje na podstawie położenia środków otworów po deformacji. W takiej sytuacji przekroje

nie tworzyły kątów prostych ze stycznymi do krawędzi otworów, stąd naprężenia styczne na krawędziach otworów w przyjętym układzie x_n, y_n , gdzie n oznacza numer przekroju, z reguły nie były równe zero. Porównanie siatki otworów przed przyłożeniem obciążenia oraz po odkształceniu przedstawiają rys. 8 i 9. Na rysunkach tych naniesione zostały



Rys. 8. Trójkątna siatka otworów przed i po odkształceniu.



Rys. 9. Kwadratowa siatka otworów przed i po odkształceniu.

również granice obszarów uplastycznionych, wyznaczone z przebiegu izochrom przy założeniu, że uplastycznienie materiału następuje zgodnie z warunkiem plastyczności Treski. Rząd izochrom m_0 , odpowiadający początkowi uplastycznienia, wyznaczony został z rys. 3 dla umownej granicy plastyczności określonej naprężeniem, przy którym odkształcenia trwałe wynoszą 0,5%.

3.3. Zakłócenia osiowego stanu naprężenia W punkcie 2 niniejszej pracy wspomniano, że nieosłabione części próbek przedstawionych na rys. 1 miały stanowić rodzaj czujnika elastooptycznego służącego do obserwacji zakłóceń osiowego stanu naprężenia. Część nieosłabiona na skutek oddziaływania części perforowanej, w której powstawały odkształcenia postaciowe w płaszczyźnie próbki, podlegała zginaniu, przez co stan naprężenia w tej części był superpozycją osiowego rozciągania i zginania. Wartości naprężeń wywołane zginaniem były jednakże zbyt małe, ażeby można było w ten sposób ilościowo określić w jakim stopniu faktyczny stan naprężenia w próbce odbiega od osiowego rozciągania. Nie powiódł się również pomiar zakłóceń oparty na pomiarze zmiany parametru izoklin w części nieosłabionej, wywołanej obrotem kierunków naprężeń głównych. Podczas badań można było zaobserwować obrót kierunków głównych o kąt rzędu $\pi/60 - \pi/30$ w stosunku do podłużnej osi próbki, co wskazywało na istnienie w układzie współrzędnych x, y naprężeń stycznych τ_{xy}^* zakłócających osiowe rozciąganie. Dokładność takiego pomiaru była jednak zbyt mała dla wyciągnięcia wniosków ilościowych odnośnie zakłóceń stanu naprężenia. W trakcie badań przeprowadzono szereg prób, mających na celu dobranie najodpowiedniejszego kształtu próbki do pomiaru zakłóceń osiowego rozciągania. W trakcie tych poszukiwań przeprowadzono również badania kilku próbek długich, których kształt pokazany został na rys. 10. Na rysunku tym przedstawiono również kształt tych próbek po ich obciążeniu. Kontur próbki po wymontowaniu z układu obciążającego był inwentaryzowany przy użyciu komparatora Abbego. Próbki te rozciągane były w ten sposób, że szczęki mocujące umieszczone były pomiędzy dwoma sztywnymi prowadnicami, uniemożliwiającymi ich przesunięcie poziome. Stan odkształcenia próbek przedstawionych na rys. 10 jest dość złożony, gdyż po przyłożeniu siły osiowej w perforowanej części próbki powinny się pojawić odkształcenia postaciowe, powodujące przesunięcie górnego przekroju tej części względem dolnego. Z uwagi na umieszczenie szczęk mocujących próbkę pomiędzy sztywnymi prowadnicami przesunięcie to może się realizować tylko poprzez sprężyste odkształcenie części nieosłabionej, która w rezultacie poddana jest nie tylko osiowemu rozciąganiu lecz również zginaniu. Po odciążeniu próbek zniknęły odkształcenia sprężyste, natomiast pozostały trwałe odkształcenia części perforowanej, która przybierała kształt pokazany na rys. 10. Pewien niewielki udział w przesunięciu poziomym górnego przekroju próbki względem dolnego miały również nieuniknione luzy pomiędzy szczękami a prowadnicami. Wielkość tych luzów nie przekraczała jednak kilku dziesiątych części milimetra. Charakter odkształcenia trwałego próbek krótkich, których kształt pokazany został na rys. 1 był analogiczny z tym tylko, że zniknęła w nich część środkowa w kształcie litery S, a pozostały jedynie skośne odcinki przylegające do części nieosłabionych.

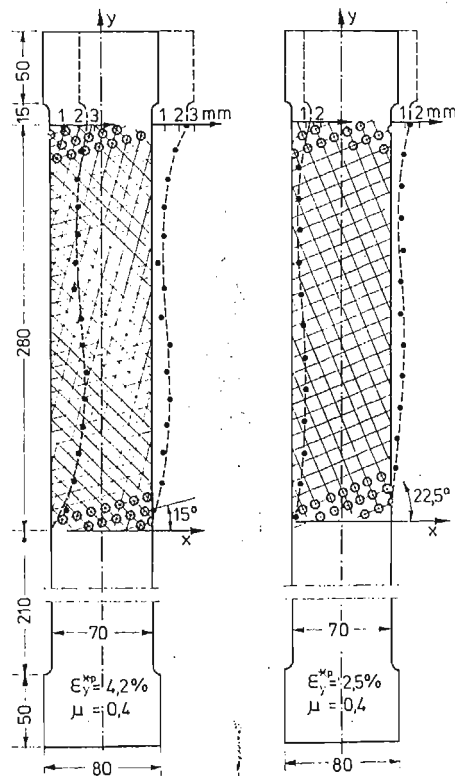
Obliczone w poszczególnych przekrojach naprężenia styczne τ_{xny} oraz naprężenia σ_{yn} , których wykresy przedstawiają rys. 6 i 7, posłużyły do obliczenia średnich naprężeń stycznych τ_{xny}^* oraz średnich naprężeń normalnych σ_{yn}^* działających w zastępczym ośrodku

jednorodnym na odcinku jednego skoku siatki otworów. Naprężenia te obliczono z zależności

$$(1) \quad \sigma_{yn}^* = \frac{1}{P^*} \int_0^{h^*} \sigma_{yn} dx_n,$$

$$\tau_{xnyn}^* = \frac{1}{P^*} \int_0^{h^*} \tau_{xnyn} dx_n,$$

w przekrojach $n = 1, 2, 3$ dla trójkątnego układu otworów i $n = 1, 2$ dla kwadratowego układu otworów. W zależności (1) h^* oznacza szerokość przekroju po odkształceniu,

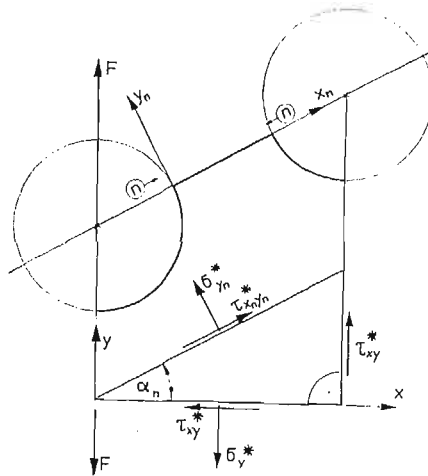


Rys. 10. Kształt próbek po odcięciu.

natomiast P^* jest skokiem odkształconej siatki otworów. Wielkości h^* i P^* mierzone były bezpośrednio ze zdjęć izochrom i izoklin. Obliczając w ten sposób naprężenia średnie materiał perforowany został potraktowany jako ośrodek ciągły jednorodny, w którym w kilku przekrojach n wyznaczone zostały dwie składowe stanu naprężenia σ_{yn}^* i τ_{xnyn}^* . Obliczone z wzorów (1) wartości naprężeń średnich umożliwiły wyznaczenie składowych naprężeń odniesionych do układu współrzędnych x, y zorientowanego jak pokazano na rys. 1 i 11. Posłużono się tutaj zależnościami

$$(2) \quad \begin{aligned} |\tau_{xy}^*| &= \sigma_{yn}^* \operatorname{tg} \alpha_n - \tau_{xnyn}^*, \\ \sigma_y^* &= \sigma_{yn}^* + (\tau_{xnyn}^* + \tau_{xy}^*) \operatorname{tg} \alpha_n, \end{aligned}$$

wyprowadzonymi przy założeniu że naprężenie σ_x^* w ośrodku zastępczym jest równe zero. Znak naprężeń stycznych τ_{xy}^* ustalony był odpowiednio, przyjmując za dodatnie zwroty



Rys. 11. Naprężenia w zastępczym ośrodku.

pokazane na rys. 11. W omawianym przypadku przy obliczaniu naprężeń σ_y^* i τ_{xy}^* odniesionych do układu współrzędnych x, y nie można było wprost zastosować prawa transformacji współrzędnych tensora naprężeń, gdyż brak było wartości σ_{xn} dla poszczególnych przekrojów n .

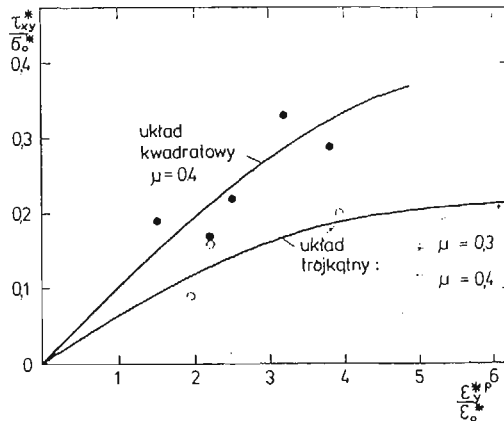
4. Analiza wyników

Na podstawie rys. 6 i 7, z których każdy przedstawia wykresy naprężeń dla dwóch różnych próbek, poddanych obciążeniu wywołującemu w części perforowanej zbliżone wartości odkształceń ε_y^* można stwierdzić, że powtarzalność wyników uzyskanych metodą fotoplastyczności jest dość dobra. Wykresy naprężeń pokazane na rys. 6 i 7 sporządzono w bezwymiarowej skali σ/σ_0 gdzie σ_0 jest granicą plastyczności dla materiału, z którego wykonane są próbki, w tym przypadku celulozoidu. Obliczone w ten sposób bezwymiarowe wartości naprężeń, jak wykazane zostało w pracach [10, 11], mogą być przeniesione na geometrycznie podobne modele wykonane ze stopu aluminium PA4 lub innego metalu o podobnej krzywej rozciągania.

Z zależności (2) obliczono naprężenia τ_{xy}^* i σ_y^* podstawiając kolejno wartości naprężeń τ_{xnyn}^* i σ_{yn}^* wyznaczone dla poszczególnych przekrojów n , a następnie obliczono średnie arytmetyczne. Zestawienie średnich wartości σ_y^* i τ_{xy}^* zamieszczono w tablicy I, a na rys. 12 przedstawiono zależności τ_{xy}^*/σ_0^* od $\varepsilon_y^p/\varepsilon_0^*$. σ_0^* oznacza tutaj granicę plastyczności materiału zastępczego, a ε_0^* jest wartością odkształcenia podłużnego materiału zastępczego, która odpowiada naprężeniu σ_0^* . W tablicy I podane zostały również dla poszczególnych próbek

Tablica I. Zestawienie naprężeń

Układ otworów	μ	$\sigma_y^* = \frac{F}{A_0}$ [$\frac{MN}{m^2}$]	ε_y^* %	Naprężenie w materiale zastępczym [$\frac{MN}{m^2}$]		
				σ_y^*	τ_{xy}^*	σ_t^*
Trójkątny	0,4	13,7	6,08	14,1	1,2	14,2
		15,1	6,66	14,8	2,0	15,2
		15,3	10,3	15,8	2,6	16,4
		15,4	13,4	16,3	2,5	16,9
	0,3	9,8	8,74	11,4	1,5	11,7
		11,6	12,9	11,6	1,8	12,0
Kwadratowy	0,4	14,2	4,12	12,4	2,4	13,1
		14,2	5,35	14,7	2,2	15,2
		15,2	5,88	14,7	2,9	15,5
		15,3	7,06	12,6	4,2	14,6
	15,2	8,14	13,4	3,7	14,9	
		0,3	10,9	7,89	10,9	1,1



Rys. 12. Zależność naprężeń stycznych od wielkości odkształceń trwałych.

intensywności naprężeń σ_t^* w zastępczym ośrodku, obliczone na podstawie naprężeń σ_y^* i τ_{xy}^* . Wyznaczone w ten sposób wartości σ_t^* wykazują dość dobrą zgodność z wartością naprężenia $\sigma_y^* = F/A_0$, gdzie F jest siłą rozciągającą, a A_0 jest przekrojem początkowym próbki bez potrącenia powierzchni otworów. W jednym tylko przypadku dla próbki z trójkątnym układem otworów przy $\mu = 0,3$ i $\varepsilon_y = 8,74\%$ błąd wynosił $+18\%$. Tak duża rozbieżność spowodowana została małą zmianą warunków termiczno-wilgotnościowych, jaka nastąpiła podczas trwającego kilka godzin badania tej próbki. Dla pozostałych próbek rozbieżności wahały się w granicach kilku procent. Z zestawienia naprężeń podanego w tablicy I oraz rys. 12 wynika, że w części perforowanej oprócz naprężeń normalnych σ_y^* występują również naprężenia styczne τ_{xy}^* , których zwrot jest zgodny z odkształceniem

postaciowym tej części próbki. Dokładność obliczenia wartości naprężeń stycznych nie jest duża, gdyż szacunkowa analiza błędów wykazała, że błędy wartości uśrednionych naprężeń stycznych, τ_{xy}^* mogą dochodzić do 50%. Przeprowadzone obliczenia, mimo iż dają tylko pogląd odnośnie rzędu wartości τ_{xy}^* , umożliwiają sprecyzowanie pewnych wniosków. Mianowicie można stwierdzić, że wartość naprężeń stycznych dla próbek o kwadratowym układzie perforacji jest wyraźnie większa niż dla układu trójkątnego. Ponadto wartości naprężeń stycznych τ_{xy}^* w części perforowanej wzrastają wraz ze wzrostem podłużnych odkształceń trwałych. Podobną tendencję stwierdzono również przy obserwacji zakłóceń osiowego stanu naprężenia w czujniku elastoptycznym, jakim były nieosłabione części próbki. Biorąc to pod uwagę można oczekiwać, że przy małych odkształceniach trwałych zakłócenia osiowego stanu naprężenia będą niewielkie, w związku z czym błąd popełniony z tego tytułu przy określaniu granicy plastyczności, względnie powierzchni plastycznego płynięcia, jest niewielki. Wynika to stąd, że w badaniach przedstawionych w pracach [5, 6, 7] granice plastyczności wyznaczone były dla odkształceń trwałych 0,2% dla stopu aluminium PA4 i 0,1% dla stali miękkiej. W takim przypadku wartość $\varepsilon_y^{*p}/\varepsilon_0^*$ odpowiadająca granicy plastyczności materiału zastępczego nie przekraczała 0,5 co odpowiada na rys. 12 względnej wartości naprężeń stycznych $\tau_{xy}^*/\sigma_0^* = 0,06$ dla kwadratowego układu otworów i 0,04 dla trójkątnego układu otworów. Oznacza to, że kąt obrotu kierunków naprężeń głównych względem osi x nie przekracza $\pi/60$ radianów, a stosunek naprężeń głównych σ_2/σ_1 jest mniejszy niż 0,007. Można więc przyjąć, że taki stan naprężenia jest bardzo zbliżony do stanu jednoosiowego. Otrzymanych tutaj wyników oszacowania zakłóceń nie można przenieść na przypadek innej drogi obciążenia w złożonym stanie naprężenia, można jednak wnioskować, że w przypadku obciążeń złożonych błędy będą również pomijalnie małe.

5. Wnioski

Przedstawione w tej pracy badania umożliwiły znalezienie rozkładów naprężeń w charakterystycznych przekrojach struktury materiału perforowanego i oszacowanie rozmiarów zakłóceń osiowego stanu naprężenia przy niesymetrycznym rozciąganiu materiału perforowanego. Stwierdzono, że zakłócenia te są dostrzegalne dopiero przy odkształceniach podłużnych próbki materiału perforowanego rzędu kilku procent i są większe w przypadku materiału z kwadratowym układem otworów niż dla układu trójkątnego. Z badań wynika, że zakłócenia stanu naprężenia w początkowej fazie uplastycznienia są niewielkie w związku z czym błąd popełniony z tego tytułu przy wyznaczaniu początkowej powierzchni plastyczności jest pomijalnie mały. W dalszym etapie uplastycznienia materiału nie można jednak pomijać zakłóceń stanu naprężenia.

Literatura cytowana w tekście

1. W. J. O'DONNELL, B. F. LANGER, *Design of Perforated Plates*, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, 3, 84 (1962), 307 - 320.
2. T. SLOT, W. J. O'DONNELL, *Effective Elastic Constants for Thick Perforated Plates With Square and Triangular Penetration Patterns*, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, 4, 93, (1971), 935 - 942.

3. W. J. O'DONNELL, J. POROWSKI, *Yield Surfaces for Perforated Materials*, Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, 1, 40, (1973), 263 - 270.
4. J. POROWSKI, W. J. O'DONNELL, *Plastic Strength of Perforated Plates With Square Penetration Patterns*, Trans. ASME, Journal of Pressure Vessel Technology, 3, 97, (1975), 146 - 154.
5. A. LITEWKA, E. ROGALSKA, *Badania plastyczności materialu perforowanego przy osiowym rozciąganiu*, VIII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa, 1978 179 - 190.
6. A. LITEWKA, A. SAWCZUK, *On a Continuum Approach to Plastic Anisotropy of Perforated Materials*, Kolokwium Euromech 115, Villard-de-Lans, Francja, 1979.
7. A. LITEWKA, E. ROGALSKA, *Plastic flow of the perforated materials with square penetration pattern*, 5th International Conference SMIRT, Berlin 1979, L12/9.
8. M. M. ФРОСТ, R. A. ТНОМСОН, *Studies in Photoplasticity*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 2, 11, (1959), 157 - 171.
9. A. LITEWKA, *Polaryzacyjno-optyczna metoda wyznaczania składowych płaskiego stanu naprężenia w obszarze plastycznym*, Rozprawy Inżynierskie, 4, 17, (1969), 693 - 704.
10. A. LITEWKA, *Modelowanie płaskich sprężysto-plastycznych zagadnień metodą fotoplastyczności*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 1, 8, (1970), 19 - 26.
11. В. П. Нетребко, В. Д. Копитов, *К вопросу о моделировании напряженно-деформированного состояния при упруго-пластических поляризационно-оптическим методом*, Вестник Московского университета, Математика, механика, 3 (1970), 93 - 98.

Р е з ю м е

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДЛЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ОДНООСНОГО
РАСТЯЖЕНИЯ ПЕРФОРИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В работе представляется определение напряженного состояния в образцах из анизотропного материала нагруженного в пластической области в направлении, которое не совпадает с направлениями симметрии структуры материала. Анизотропный материал был моделирован перфорированным материалом с регулярным трехугольным и квадратным расложением отверстий. Из испытаний получились напряжения в характерных разрезах структуры материала. Полученные напряжения гомогенизировались в области одного шага структуры материала и определялась величина отклонения от одноосного напряженного состояния.

S u m m a r y

STRESS STATE FOR OFF-AXIS TENSION OF THE PERFORATED MATERIALS

The aim of the paper is to determine elastoplastic stress state in the specimens of anisotropic materials loaded in the direction which does not coincide with the symmetry axes of the material structure. The anisotropic material was modelled by means of the perforated materials with regular triangular and square penetration patterns. The tests enabled determining the stress distributions in characteristic sections of the material structure. The stress determined were homogenized along the pitch of the hole pattern and the stresses disturbances of the uniaxial stress state for off-axis tension of the specimens were estimated.

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lutego 1979 roku.

OZNACZANIE GRANICY ZMĘCZENIA
TWORZYW SZTUCZNYCH METODĄ SCHODKOWĄ

MARIAN NOWAK (WROCLAW)

Zestawienie ważniejszych oznaczeń

A. Ogólnych

- $E(x)$ wartość średnia rozkładu,
 f częstotliwość obciążeń — [Hz],
 M typ maszyny zmęczeniowej: 1w — jednowrzecionowa [1], 12w — dwu-
nastowrzecionowa [2], PH — pulsator hydrauliczny [3], 1wB — jedno-
wzrecionowa, bułgarska [4],
 n_0 liczebność próby (liczba obserwacji),
 R współczynnik amplitudy cyklu [5],
 t_B temperatura badania — [K],
 t_α krytyczna wartość statystyki t — Studenta,
 X_{\min}, X_{\max} najniższa i najwyższa wartość zmiennej losowej,
 Z_{g0} wytrzymałość zmęczeniowa przy próbie wahadłowego zginania określona
metodą schodkową na bazie N_G — [MPa],
 Z_{g0}^m wytrzymałość zmęczeniowa przy próbie wahadłowego zginania określona
metodą schodkową zmodyfikowaną na bazie N_G — [MPa],
 ν współczynnik zmienności — [%],
 $\sigma(x)$ odchylenie standardowe,
 τ_s czas naturalnego starzenia — [miesiące].

B. Szczegółowych — związanych z metodą schodkową

- i numer kolejny poziomu naprężenia,
 n liczba próbek rzadziej występującego zdarzenia ($n = \sum n_i$),
 n_i liczba próbek na poszczególnych poziomach naprężenia zdarzenia rzadszego
w próbie,
 q liczba stopni (poziomów) naprężenia,
 S_j, S szacunkowa wartość odchylenia standardowego próby i zbioru — [MPa],
 σ_{g0} wartość najniższego poziomu naprężenia rzadziej występującego zdarzenia —
[MPa],
 $\Delta\sigma$ wartość stopnia naprężenia — [MPa].

1. Wstęp

Pierwsze prace ze zmęczenia tworzyw sztucznych ukazały się w latach 1937 - 39 [6, 7, 8] i dotyczyły laminatów fenolowoformaldehydowych. W Polsce badania zmęczeniowe zainaugurowała publikacja KARCZEWSKIEGO na temat własności zmęczeniowych żyłki polikaprolaktamowej [9]. Historycznie pierwszą i aktualnie zasadniczą formą opracowywania wyników pomiarów jest wykres zmęczenia w układzie σ -lgN (zwany także wykresem Wöhlera [10]). W dalszych badaniach zaadaptowano do oznaczania wytrzymałości zmęczeniowej tworzyw sztucznych takie metody, jak: Prota, schodkową, Lehra-Schencka i Probit [11].

Metoda schodkowa (nazwa w oryginale: the „up and down” method), opracowana przez DIXONA i MOODA [12], została spopularyzowana w polskim piśmiennictwie naukowym przez DYŁĄGA i ORŁOSIA [13] oraz BARANOWSKIEGO [14, 15], BACHMACZA [16] i innych [17, 18]. Stosowanie jej w badaniach zmęczeniowych tworzyw sztucznych jest celowe z tego powodu, że jest dokładna i nadaje się do materiałów o dużej dyspersji wyników pomiarów.

Niniejsza praca omawia zasadnicze problemy stosowania metody schodkowej i schodkowej zmodyfikowanej do oznaczania granicy zmęczenia tworzyw sztucznych z uwzględnieniem aspektów praktycznych związanych przede wszystkim z liczebnością próby w wymienionych metodach (n_s, n_z) oraz stopniem i ilością poziomów naprężenia. Podstawą analizy teoretyczno-doświadczalnej jest zbiór 60 wykresów schodkowych zgromadzony przez autora na przestrzeni 10 lat stosowania tej metody w badaniach zmęczeniowych tworzyw sztucznych [19].

2. Charakterystyka badanego zbioru

Przedmiotem analizy doświadczalnej jest pięć rodzajów tworzyw termoplastycznych: poliamid 6, poliamid 6 wzmocniony szkłem (włókna i kulki szklane), polichlorek winylu nieplastyfikowany [20], polistyren wysokoudarowy produkcji bułgarskiej [4] oraz politereftalan etylenowy wzmocniony szkłem (tablica 1). Najliczniej reprezentowana jest grupa poliamidów wzmocnionych i niewzmocnionych. Zestaw tworzyw wynika z faktu, że poliamid 6 należy do popularnych w Polsce tworzyw konstrukcyjnych oraz z chronologii wykonywania z nich tworzyw wzmocnionych. Pierwszym w kraju polimerem wzmocnionym był Tarnamid T-27 (T-27WS), którego produkcję w skali laboratoryjnej uruchomił Instytut Chemii Przemysłowej w Warszawie [21, 22]. W roku 1976 rozpoczęto wytwarzanie politereftalanu etylenowego wzmocnionego szkłem (Elit 25), który łącznie z produkowaną serią itamidów (Itamid 25, 35, S) tworzy grupę nowych tworzyw konstrukcyjnych o podwyższonych własnościach mechanicznych [23].

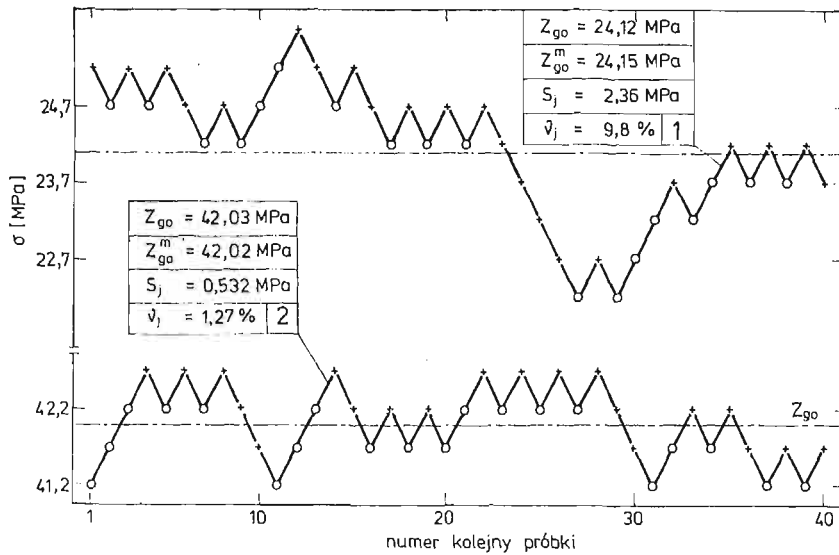
Analizę statystyczną i sformułowane wnioski — jak zaanonsowano we wstępie — oparto o zbiór 60 wykresów zbudowanych metodą schodkową dla liczebności próby $n_0 = 27 \div 51$ (tablica 2). Jest to reprezentatywna populacja, ponieważ różnica w statystyce t_α dla $n' = 60$ i następnej dla $n' = 120$ jest bardzo mała [24]. Ponadto zbiór, dla którego $n' > 30$ uważany jest już za próbę o dużej liczebności.

Obok szerokiego asortymentu tworzyw sztucznych analizowana populacja, z której wybrano przykładowo dwa charakterystyczne wykresy schodkowe (rys. 1), reprezentuje

Tablica 1. Porównanie granicy zmęczenia niektórych tworzyw sztucznych określonej metodą schodkową i metodą schodkową zmodyfikowaną dla wybranych warunków pomiaru

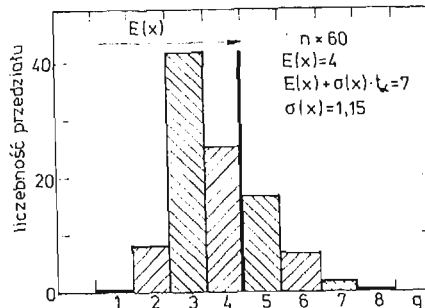
Nr	Rodzaj tworzywa	Nazwa handlowa	Warunki pomiaru				Z_{go} MPa	Z_{go}^{II} MPa	$ \Delta_{mj} $ %	ν_j %	
			$\Delta\sigma$	τ_s	t_B	M					n_0
1	Poliamid 6	Tarnamid T-27 (seria I)	0,5	7	298	1w	40	13,2	13,18	0,15	8,8
2		Tarnamid T-27 (seria II)	0,5	12	298	12w	40	14,0	14,00	0	5,6
3		Poliamid blokowy PB	0,55	10	358	1w	40	12,4	12,45	0,40	4,7
4		Poliamid blokowy PB	0,90	—	298	12w	41	13,7	13,64	0,44	5,8
5		Poliamid blokowy PB	0,55	8	298	12w	27	10,4	10,45	0,48	2,1
6		Poliamid blokowy PB	0,55	8	298	PH ¹⁾	51	76,2	75,70	0,66	2,4
7		Poliamid blokowy PB	0,55	8	298	12w	40	23,0	22,86	0,61	8,3
8		Poliamid blokowy PB	0,5	34	298	1w	40	13,6	13,60	0	7,2
9		Poliamid blokowy PB	0,5	15	298	12w	40	13,6	13,60	0	7,0
10		Poliamid blokowy PB	0,5	65	298	12w	40	19,0	19,03	0,16	4,5
11	Poliamid 6 wzmocniony szkieł	Itamid 25	0,5	78	298	12w	34	22,2	22,18	0,09	3,7
12		Itamid 25	0,5	84	298	1w	31	20,7	20,54	0,77	2,1
13		Itamid 25	0,5	48	298	12w	40	22,4	22,43	0,14	3,1
14		Itamid 25	0,5	48	298	1w	41	25,0	25,04	0,16	1,8
15		Itamid 25	0,5	48	298	12w	39	24,5	24,47	0,12	1,5
16		Itamid 25	0,5	10	298	12w	29	41,40	41,42	0,02	2,1
17		Itamid 25	0,5	16	298	1w	29	41,30	41,33	0,07	1,9
18		Itamid 25	0,5	16	298	12w	40	42,0	42,02	0,05	1,3
19		Itamid 25	0,5	—	298	1w	40	7,9	7,88	0,25	10,6
20		Itamid 25	0,5	—	328	1w	31	4,9	4,87	0,60	34,5
21	Polichlorek winylu	PCW	0,5	—	298	1w	40	6,65	6,65	0	6,8
22		PCW	0,4	—	293	1wB	40	12,77	12,74	0,23	4,1
23		PCW	0,5	10	298	12w	27	25,8	25,79	0,12	1,3
24		PCW	0,5	17	298	1w	40	24,1	24,2	0,41	9,8

Baza $N_G = 10^6$, $f = 15$ Hz, a dla polistyrenu $N_G = 10^7$ oraz $f = 100$ Hz [4] 1) cykl Z_{-j} oraz baza 10^5 [3]; 2) zastąpiony przez T-27 [29]; 3) wzmocniony.



Rys. 1. Wybrane wykresy schodkowe o różnym stopniu asymetrii 1 — Elit 25 (wykres niesymetryczny $v_j > E(v_j)$); 2 — Itamid S-2 [wykres symetryczny, $v_j < E(v_j)$].

także różne temperatury (293 ÷ 358 K), typy maszyn zmęczeniowych (1w, 12w, PH, 1wB) różną zawartość wilgoci w próbkach (stan klimatyzowany i mokry), czas starzenia (7 ÷ 84 miesięcy), technologię wykonania i kształt próbki (walcowe i profilowe [25]) oraz częstotliwość (15 i 100 Hz). Badany zbiór wykresów schodkowych scharakteryzowano wielobokiem częstości szeregu rozdzielczego liczby stopni naprężenia q (rys. 2) oraz sumaryczną liczbą wykresów dla praktycznie stosowanych liczebności zdarzeń (tablica 2).



Rys. 2. Wielobok częstości szeregu rozdzielczego liczby stopni naprężenia q ($\epsilon_t = 2\%$).

Tablica 2. Klasyfikacja badanego zbioru ze względu na liczbę wykresów schodkowych w grupie o liczebności n

Stosowane liczebności oznaczeń w konstrukcji wykresów schodkowych, n_0	27 ÷ 30	31 ÷ 39	≥ 40
Liczba wykresów schodkowych z liczbą oznaczeń n_0	32	12	16

Liczba pojedynczych obserwacji w zbiorze = 1930; średnia liczba obserwacji w próbie $\bar{n}_0 = 32$.

3. Ogólne uwagi o metodzie schodkowej i schodkowej zmodyfikowanej

Granica zmęczenia Z , według metody schodkowej, jest takie naprężenie, w cyklu określonym przez σ_a , σ_m i R , które spowoduje zniszczenie około 50% badanych próbek przed osiągnięciem przez nie założonej granicznej liczby cykli N_G . Z definicji Z i sposobu prowadzenia eksperymentu wynika, że przed rozpoczęciem badań należy założyć: 1. liczebność próby n_0 , 2. bazę N_G , 3. wartość stopnia naprężenia $\Delta\sigma$.

Liczba próbek zalecana w konstrukcji wykresu schodkowego metali jest rzędu $40 \div 50$ [12, 13, 26]. Analogiczne liczebności należałoby przyjmować w badaniach zmęczeniowych tworzyw sztucznych (a nawet większe z powodu większego rozrzutu), ponieważ obliczanie granicy zmęczenia, odchylenia standardowego oraz przedziałów ufności dla pojedynczych spostrzeżeń i wartości średniej oparte jest na tej samej podstawie teoretycznej. Zebrany materiał doświadczalny z badań tworzyw sztucznych na zmęczenie i jego analiza teoretyczna wskazują jednak, że liczbę próbek można znacznie zmniejszyć do statystycznie i ekonomicznie uzasadnionej, uwzględniając przy tym przeznaczenie pomiarów.

Wielkość bazy N_G jaką obserwuje się w badaniach porównawczych tworzyw sztucznych wynosi najczęściej 10^6 , a więc powyżej krytycznej liczby cykli [25]. Przy jej wyborze kierujemy się tym, że z jednej strony nie może to być liczba zbyt mała ze względu na techniczną wartość wytrzymałości zmęczeniowej, a z drugiej — wartość bazy $5 \cdot 10^6$, $10 \cdot 10^6$, $20 \cdot 10^6$ jak w przypadku badań metali [10] przedłużyłaby czas trwania próby do tego stopnia, że wpływ starzenia na wytrzymałość zmęczeniową niektórych tworzyw może okazać się już znaczący [25].

Trzecim parametrem przyjmowanym w metodzie schodkowej — to stopień naprężenia $\Delta\sigma$. Wartość zalecana przez Dixona i Mooda wynosi $\Delta\sigma = (0,5 \div 2) \cdot S_j$. Pierwsze badane próbki obciąża się większymi stopniami naprężenia aż do osiągnięcia dwójki próbek, które dały przeciwne wyniki względem granicznej liczby cykli, a następnie mniejszymi i już stałymi do zakończenia próby. Podstawą analizy statystycznej jest zdarzenie rzadziej występujące w eksperymencie.

Wyznaczanie umownej wytrzymałości zmęczeniowej według zmodyfikowanej metody schodkowej opiera się również na wykresie schodkowym, lecz o mniejszej liczebności (minimum 15 — [13]). Obliczone według wzoru

$$(1) \quad Z_{g0}^m = \frac{1}{n_0} \sum_1^{n_0} \sigma_i,$$

wartości granicy zmęczenia są przedmiotem porównania i rozważań statystycznych.

4. Analiza statystyczna wyników pomiarów

Analizie statystycznej poddano (tablica 3) — zgodnie z celem pracy sformułowanym we wstępie — sześć wielkości; charakteryzujących wykres schodkowy:

1. Względny błąd metody obliczania granicy zmęczenia (schodkowa — schodkowa zmodyfikowana) — Δ_{mj} (rys. 5).

Tablica 3. Zestawienie obliczeń statystycznych wielkości charakteryzujących doświadczalną populację wykresów schodkowych dla $\varepsilon_3 = 2\%$.

Lp.	Liczby charakterystyczne	$E(x)$	X_{\min}	X_{\max}	$\sigma(x)$	t_α ($\alpha = 0,05$)	$\sigma(x) \cdot t_\alpha$	$E(x) + \sigma(x) \cdot t_\alpha$
	Wielkości badanego zbioru							
1	Względny błąd metody obliczania $Z_{go}: \Delta_m$	0,18	0,00	1,5	0,34	2,000	0,68	0,86
2	Odchylenie standardowe: S	0,70	0,20	2,1	—	—	—	—
3	Minimalna liczebność próby w metodzie schodkowej n_s	13	1	29	6,940	2,000	13,88	(26, 51) 27
4	Minimalna liczebność próby w metodzie schodkowej zmodyfikowanej: n_z	12	1	28	5,685	2,000	11,37	(23, 37) 24
5	Liczba stopni naprężenia: q	4	2	7	1,15	2,000	2,30	7
6	Współczynnik zmienności: ν	5,40	0,8	34,5	5,23	2,000	10,46	15,86

2. Odchylenie standardowe [12] —

$$(2) \quad S_j = 1,62 \cdot \Delta \sigma \left[\frac{n \sum i^2 n_i - (\sum i n_i)^2}{n^2} + 0,029 \right].$$

3. Liczebność próby w metodzie schodkowej — n_{sj} .

4. Liczebność próby w metodzie schodkowej zmodyfikowanej — n_{zj} .

5. Liczbę stopni naprężenia q_j .

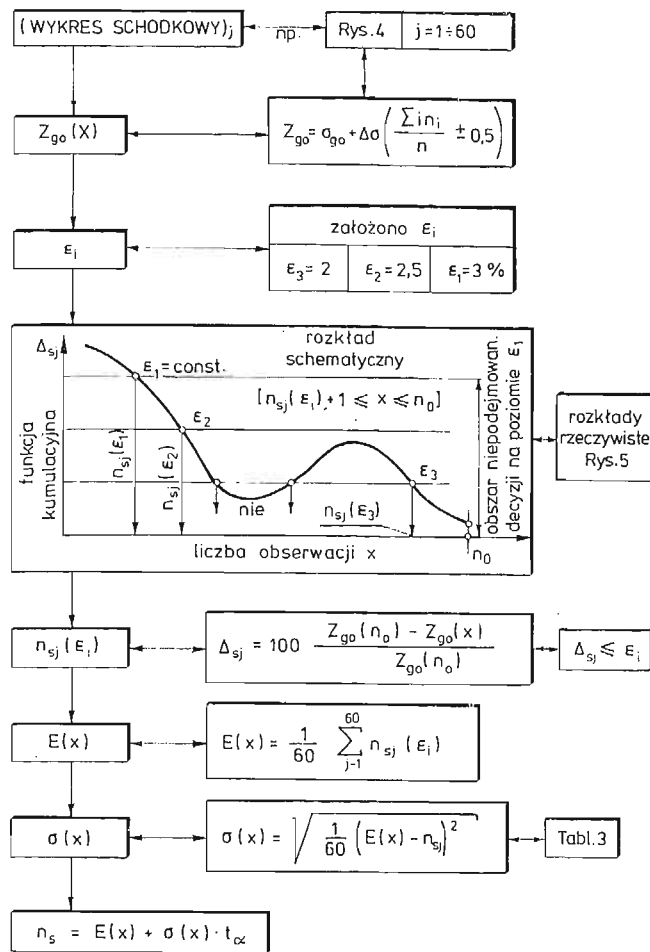
6. Współczynnik zmienności ν_j .

Zasadę obliczania n_{sj} i n_{zj} skonstruowano na wzór analizy sekwencyjnej w ten sposób (rys. 3), że dla założonego błędu ε_i wyznaczania granicy zmęczenia poszukuje się dla każdego wykresu schodkowego minimalnych liczebności próby, dla których spełnione są nierówności

$$(3), (4) \quad \Delta_{sj} \leq \varepsilon_i; \quad \Delta_{mj} \leq \varepsilon_i$$

Następnie dla nowego zbioru zmiennych losowych n_{sj} , n_{zj} wyznaczono parametry rozkładu $E(x)$ i $\sigma(x)$ i dla założonego poziomu istotności α określono granice przedziału: $\pm \sigma(x) \cdot t_\alpha$. Obliczenia prowadzono systemem tablicowym.

Wartość najniższego błędu przyjęto $|\varepsilon_3| = 2\%$ (tablica 4), ponieważ gdy $|\varepsilon_3| < 2\%$ to procent wykresów schodkowych w badanej populacji, dla których obliczona liczebność jest większa od najmniejszej w zbiorze ($n_{sj} > n_0 = 27$) przekracza założony poziom



Rys. 3. Schemat obliczeń statystycznych liczebności próby w metodzie schodkowej (n_s).

Tablica 4. Minimalne liczebności próby w wyznaczeniu Z_{90} , w funkcji błędu pomiaru ϵ_i określone z prawdopodobieństwem $P = 95\%$.

Metoda oznaczania Z_{90}		ϵ_i (%)		
		2	2,5	3
schodkowa	n_s	27	25	22
schodkowa zmodyfikowana	n_z	24	23	20

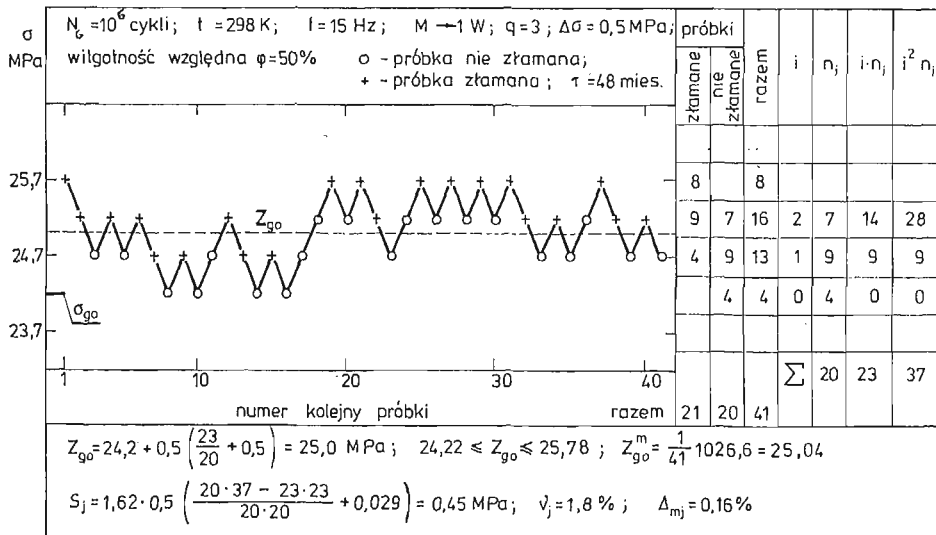
istotności $\alpha = 0,05$ (wartość najczęściej przyjmowana w doświadczalnictwie). Natomiast wartości ϵ_1 i ϵ_2 (rys. 3) mogą być uzasadnione wprowadzeniem do badań zmęczeniowych klasyfikacji pomiarów na trzy strefy dokładności, jak to uczyniono m.in. w metrologii

włókienniczej [27]. Według tej klasyfikacji pierwszej strefie dokładności (dokładność przeciętna) odpowiada ε_1 , drugiej (dokładnej) — ε_2 i trzeciej (bardzo dokładnej) — ε_3 .

Założono ponadto, że zmienne losowe Δ_{mj} , S_j , n_{sj} , n_{zj} , q_j , ν_j mają rozkład normalny. Weryfikację tego założenia przeprowadzono dla n_{sj} i n_{zj} — jako wielkości podstawowych w zagadnieniu — metodą wykresną na siatce funkcyjnej (papierze probabilistycznym). Z otrzymanych wykresów wynika, że rozkłady badanych zmiennych losowych są po wygładzeniu w przybliżeniu normalne. W związku z tym poszukiwane wielkości (tablica 3) mają sens praktyczny tylko dla górnej granicy przedziału, tj. dla

$$(5) \quad E(x) + \sigma(x) \cdot t_\alpha.$$

Analizę statystyczną pozostałych wielkości ograniczono do jednej wartości $\varepsilon_i = \varepsilon_3$ uważając, że jest ona wystarczająca w stosunku do roli jaką te wielkości spełniają w metodzie schodkowej i schodkowej zmodyfikowanej, zaś dyskusję wyników — do bezpośrednich wniosków. Natomiast analizę statystyczną wielkości n_s oraz n_z przeprowadzono dla trzech wartości ε_i , uwzględniając w schemacie obliczeń (rys. 3 i 5 oraz tablica 3) specyfikę funkcji kumulacyjnych Δ_{sj} i $\Delta_{mj} = F(x)$. Polega ona na tym, że niektóre wykresy Δ_{sj} i Δ_{mj} przecinają proste $\varepsilon_i = \text{const}$ więcej niż jeden raz. W takich przypadkach za zmienną losową przyjmowano minimalne wartości n_{sj} oraz n_{zj} wynikające z pierwszego przecięcia, prowadząc obliczenia w kierunku malejących x (rys. 5). Gdy zaś skumulowane wartości

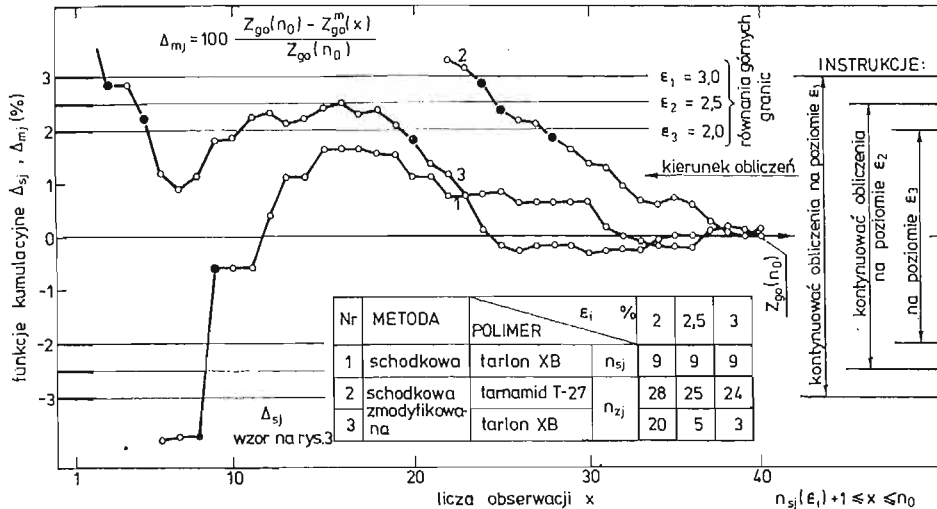


Rys. 4. Przebieg oznaczania umownej wytrzymałości zmęczeniowej Itamidu 35 metodą schodkową (wykres schodkowy).

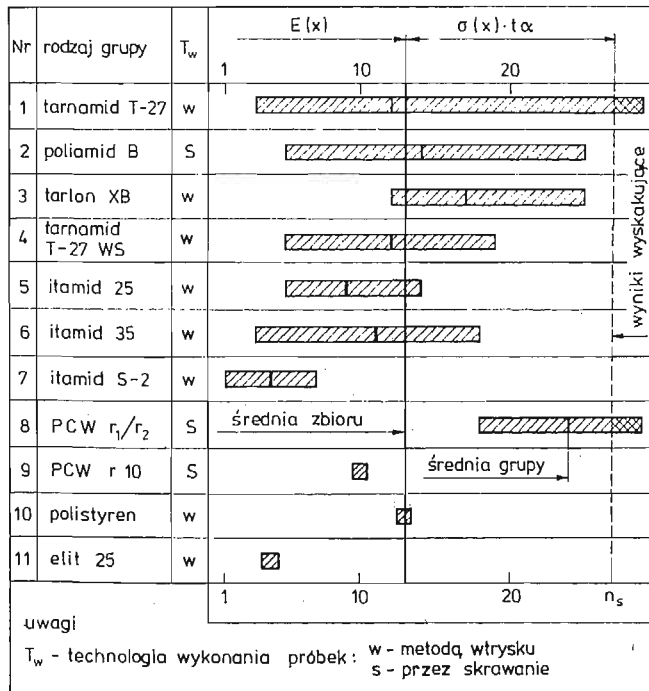
funkcji Δ_{mj} i Δ_{sj} nie przecięły żadnej z prostych $\varepsilon_i = \text{const}$ (wykresów takich zanotowano 4), to przyjmowano $n_{sj} = n_{zj} = 1$.

Z podziału badanego zbioru wykresów schodkowych na podzbiory (grupy tworzyw — rys. 6) wynikają dwa charakterystyczne zjawiska. Pierwsze — dotyczy tzw. wyników wyskakujących poza granicę rozkładu ustaloną wzorem (5), a drugie — związane jest z przesunięciem wartości oczekiwanej grupy poza wartość średnią zbioru. Do tych pod-

zbiorów należy Tarnamid T-27, poliamid polimeryzowany w bloku (poliamid B), Tarlon XB oraz polichlorek winylu (PCW — r_1/r_2), tzn. te tworzywa, których wykresy schodkowe są niesymetryczne (rys. 1). Asymetria ta jest prawdopodobnie związana z niejednorodnością podzbioru polegającą na tym, że zawiera on próbki należące do trzech populacji



Rys. 5. Wykresna analiza sekwencyjna regulacji założonego błędu ϵ_i wielkością próby X .



Rys. 6. Podział badanych tworzyw na podzbiory (grupy) monomateriałowe ($\epsilon_i = 2\%$).

Tablica 5. Charakterystyka wykresów schodkowych dla wybranych metali

Nr	Materiał	R_m MPa	Warunki pomiaru			Z^s MPa	Z^m MPa	$ \Delta_{mj} $ %	ν_j %	q
			n_0	$\Delta\sigma$ MPa	$10^{-6}N_G$					
1	Stal Ck 10; C = 0,11%; próbka gładka	450	50	5	2	283,3	283,3	0	3,4	5
2	Stal Ck10; C = 0,11%; próbka z karbem	450	50	7,5	2	191,3	191,25	0,03	3,3	3
3	Stop Alumiiniowy AlCuMgPA7	535	40	10	70	138,2	139,0	0,58	11,5	4
4	Drut stalowy D60A; C = 0,58% d = 2,5 mm; stan dostawy	1385				450	449,2	0,18	7,1	6
5	Drut wyżarzony w oleju	1487	52	10	5	461	461,2	0,04	5,2	6
6	Drut wyżarzony w kąpieli ołowianej	1449				489	488,8	0,04	5,1	6
7	Drut wyżarzony w soli	1382				532	531,3	0,13	6,6	6
8	Stal 34 CrMo4	1000	15	10	10	518,3	520,6	0,44	6,0	5

Tablicę opracowano na podstawie: [15, 16, 26, 30]; Z^s — granica zmeżenia obliczona metodą schodkową, Z^m — granica zmeżenia określona metodą schodkową zmodyfikowaną $\nu = 6,0$; $\bar{q} = 5$.

[28, s. 29]: niskowytrzymałościowej, podstawowej i wysokowytrzymałościowej. Złożone warunki wtrysku tworzywa do formy, jakość stosowanych substratów do wytłaczania wałków z PCW, zmienne warunki polimeryzacji poliamidu w bloku oraz szereg innych czynników związanych z technologią wykonania próbek składa się na powstawanie niejednorodnych podzbiorów. Do zmniejszenia tej niejednorodności może przyczynić się:

— na etapie formowania próbek — staranne przygotowanie masy wtryskowej, dobór i utrzymanie optymalnych parametrów wtrysku, prawidłowe pod względem funkcjonalnym wykonanie formy oraz właściwy dobór wtryskarki i oprzyrządowania pomocniczego (lub właściwy dobór parametrów skrawania — dla próbek wykonywanych przez toczenie);

— na etapie przygotowania próby do eksperymentu — staranne wymieszanie próbek oraz pobieranie ich do pomiarów według tablic liczb losowych.

Na zakończenie należy zwrócić uwagę, że wielkości charakteryzujące wykresy schodkowe wybranych przykładowo metali (tablica 5) są w zasadzie tego samego rzędu co dla badanych tworzyw sztucznych.

5. Wnioski

1. Oznaczanie granicy zmęczenia termoplastycznych tworzyw sztucznych metodą schodkową należy przeprowadzać na zbiorze próbek o liczebności nie mniejszej od 22 zakładając, że $\varepsilon = 3\%$, a prawdopodobieństwo popełnienia błędu 0,05. Dla $\varepsilon = 2\%$ liczba badanych próbek wynosi $n_s = 27$.

2. Zmodyfikowana metoda schodkowa może być stosowana do obliczania granicy zmęczenia, ponieważ w porównaniu z metodą schodkową różnice wytrzymałości zmęczeniowej nie przekraczają 1% ($P = 95\%$). Metoda schodkowa zmodyfikowana jest prostsza w obliczeniach, a liczebność próby może być nawet mniejsza o około 10% i wynosi: dla $\varepsilon = 3\%$ $n_z = 20$, a dla $\varepsilon = 2\%$ $n_z = 24$.

3. Średnia wartość odchylenia standardowego zbioru, obliczona wzorem przybliżonym wynosi 0,7 MPa i zawiera się w przedziale $S = 0,20 \div 2,10$. Stopień zaś naprężenia do badań początkowych można wybrać wstępnie z przedziału $\Delta\sigma = 0,1 \div 4,2$ MPa, średnio $\Delta\sigma = 0,35 - 1,4$ MPa.

4. Serię próbek o dużej liczebności, co do której istnieje przypuszczenie, że mogą w niej wystąpić różne zbiorowości należy dobrze wymieszać, a do pomiarów pobierać próbki według tablicy liczb losowych. Nieprzestrzeganie tej zasady może być przyczyną niesymetrycznego układu wyników na wykresie schodkowym, co prowadzi do wzrostu błędu oznaczania granicy zmęczenia albo do wzrostu liczebności próby ponad wyżej ustaloną.

5. Jeżeli badania określonego zjawiska będą oparte na wynikach pomiaru granicy zmęczenia metodą schodkową, to ze względów praktycznych liczbę próbek można ograniczyć do $n_0 = 20$, a dalszą niezbędną poprawę dokładności oznaczania należy skoncentrować na jakości wykonania próbek i staranności przeprowadzania eksperymentu.

Sformułowane wnioski (wniosek 3 z ograniczeniem) można rozszerzyć na inne tworzywa sztuczne i materiały — także metale — pod warunkiem, że wartości parametrów charakteryzujących wykres schodkowy (q , ν i symetria wykresu) mieszczą się w przedziale odpowiednich wartości badanego zbioru.

Literatura cytowana w tekście

1. M. NOWAK, *Badanie efektów cieplnych i starzeniowych poliamidu na podstawie wytrzymałości zmęczeniowej*, Raport nr 65, IMMT Politechniki Wrocławskiej, 1976.
2. M. NOWAK, *Konstrukcja aparatu do badania wytrzymałości zmęczeniowej na obrotowe zginanie tworzyw sztucznych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Wrocławskiej, Mechanika 25 (1968), 29 - 59.
3. J. ZAWADZKI, M. NOWAK, *Wytrzymałość zmęczeniowa poliamidu blokowego*, Przegląd Mech., z. 19, 29 (1970), 561 - 564.
4. П. ГЛЕНЕВ, С. МАНДЖАКОВ, И. СГУРЕВА, *Якости и деформационни характеристики на български конструкционни пластмаси*, Комитет за Наука, Технически Прогрес и Висше Образование, София 1973.
5. Polska Norma: PN-64/H-04325; PN-67/H-04326.
6. A. THUM, A. GRETH, H. R. JACOBI, *Dauerbiegeversuche mit Kunstharzpressstoffen*, VDJ — „Kunst — und Pressstoffe”, 2 (1937), 16 - 24.
7. A. THUM, H. R. JACOBI, *Die Dauerfestigkeit von Kunstharzpressstoffen*, Der Maschinenschaden, nr 6-7, 15 (1938); 85 - 91, 101 - 105.
8. A. THUM, H. R. JACOBI, *Festigkeitseigenschaften von hochfesten Kunstharz — Pressstoffen*, VDJ — Zeitschrift, nr 37, Bd. 83 (1939), 1044 - 1048.
9. T. KARCEWSKI, *Właściwości zmęczeniowe żyłki polikaprolaktamowej i próba ich scharakteryzowania w zależności od stopnia orientacji rentgenowskiej*, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, nr 32, Włókiennictwo z. 6 (1960), 73 - 132.
10. S. KACAŃDA, *Zmęczeniowe niszczenie metali*, WNT, Warszawa 1978.
11. J. ZAWADZKI, M. NOWAK, *Metody badań zmęczeniowych tworzyw sztucznych*, Przegląd Mech., z. 1, 31 (1972), 5 - 10.
12. W. J. DIXON, A. M. MOOD, *A method for obtaining and analyzing sensitivity data*, J. Amer. Statist. Ass., Vol. 43 (1948), 109 - 126.
13. Z. DYŁĄG, Z. ORŁOŚ, *Wytrzymałość zmęczeniowa materiałów*, WNT, Warszawa 1962.
14. B. BARANOWSKI, *Zastosowanie metod statystycznych do wyznaczenia krzywej zmęczenia drutu stalowego*, Prace Inst. Hutniczych, z. 3, WGH, Katowice 1958, 153 - 160.
15. B. BARANOWSKI, *Wpływ wyżarzenia przy temperaturze 250 - 400°C na wytrzymałość na zmęczenie drutu liniarskiego D60A określony metodą statystyczną*, Prace Inst. Hutniczych, z. 3, WGH, Katowice 1958, 349 - 359.
16. W. BACHMACZ, *Trwała wytrzymałość zmęczeniowa stopu aluminiowego AlCuMg (PA7)*, Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej, Mech. z. 9 (1964), 43 - 51.
17. M. NOWAK, *Badanie efektów starzenia i obróbki cieplnej poliamidu 6 na bazie wytrzymałości zmęczeniowej*, Raport nr 7, IMMT Politechniki Wrocławskiej, 1973.
18. M. NOWAK, J. ZAWADZKI, *Wpływ temperatury i konstrukcji maszyny na wytrzymałość zmęczeniową Tarnamidu T-27*, Prace Naukowe IMMT Politechniki Wrocławskiej, nr 29, SiM nr 18 (1976) 13 - 21.
19. J. ZAWADZKI, M. NOWAK, *Wytrzymałość zmęczeniowa polichlorku winylu*, V Krajowa Konf. Wytr. i Badania Materiałów, Kraków 10 - 12.VI.1969.
20. J. ZAWADZKI, M. NOWAK, *Wytrzymałość zmęczeniowa polichlorku winylu*, Przegląd Mech., z. 15, 29 (1970), 437 - 440.
21. J. ZAWADZKI, M. NOWAK, *Wytrzymałość zmęczeniowa poliamidu zbrojonego włóknem szklanym*, Przegląd Mech., z. 3, 30 (1971), 69 - 73.
22. J. ZAWADZKI, M. NOWAK, *Wpływ temperatury na wytrzymałość zmęczeniową poliamidu zbrojonego*, Przegląd Mech., z. 5, 31 (1972), 137 - 139.

23. M. NOWAK, A. WAWRYKOWICZ, *Wytrzymałość zmęczeniowa wybranych tworzyw sztucznych wzmocnionych szkłem*, VIII Sympozjum Dośw. Badań w Mechanice Ciała Stałego, PTMTS et al., Warszawa 1978, 238 - 245.
24. A. STRZAŁOWSKI, A. ŚLIŻYŃSKI, *Matematyczne metody opracowywania wyników pomiarów*, PWN, Warszawa 1977.
25. M. NOWAK, *Badanie efektów reologicznych Tarnamidu oraz Itamidu przy naprężeniach zmiennych*, Raport nr 97, IMMT Politechniki Wrocławskiej, 1977.
26. H. BÜHLER, W. SCHREIBER, *Lösung einiger Aufgaben der Dauerschwingfestigkeit mit dem Treppenstufen — Verfahren*, Archiv für das Eisenhüttenwesen, H. 3, 28 (1957), 153 - 156.
27. A. RÓŻYCKI, *Dokładność i prawdopodobieństwo wyniku a liczba pomiarów przy wyznaczaniu wytrzymałości na rozrywanie tkanin bawełnianych*, Prace Inst. Włókiennictwa, z. 2, 3 (1953), 23 - 31.
28. M. NOWAK, *Wybrane zagadnienia wytrzymałości zmęczeniowej poliamidu stabilizowanego*, Prace Naukowe IMMT Politechniki Wrocławskiej, Nr 11, M3 (1972), 1 - 155.
29. A. KASZŃIA, A. TARNOWSKI, *50-lecie Zakładów Azotowych im. F. Dzierżyńskiego w Tarnowie*, Polimery — Tw. Wielk., nr 11, 22 (1977), 421 - 423.
30. M. HEMPEL, *Das Dauerschwingverhalten der Werkstoffe*, VDJ — Zeitschrift, Nr 27, Bd. 104 (1962), 1362 - 1377.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ ПЛАСТМАСС
МЕТОДОМ ВВЕРХ-ВНИЗ

Проведён статистический анализ множества 60 ступенчатых графиков для определения минимального числа элементов испытания для определения условного сопротивления усталости термопластов. Документирован исследовательский анализ, что если значение кумулятивной функции не больше, чем 3% по отношению к объёму множества, принятого за генеральную совокупность, то эксперимент с определением усталостной прочности можно провести на множестве образцов с числом элементов, не меньшим, чем 22. Проверена применимость модифицированного метода вверх-вниз для определения сопротивления усталости и установлено, что число образцов в этой схеме вычислений меньше на около 10%. Так как опытное множество ступенчатых графиков представляет сравнительно широкий класс пластмасс и параметров исследований, признано возможным распространение выводов на другие материалы, дисперсия результатов которых не превышает определённых пределов исследуемого множества.

Summary

DETERMINATION OF FATIGUE STRENGTH OF PLASTICS ACCORDING TO UP-AND-DOWN
METHOD

The statistical analysis of 60 up-and-down method diagrams was carried out to find the minimum number of samples required for determination of the fatigue strength of plastics. Basing on the sequential analysis the evidence was given that if the value of cumulative function is not greater than 3 per cent of the size of set taken as parent population, then the determination of fatigue strength can be carried out with the number of samples not less than 22. The applicability of modified up-and-down method for determination of the fatigue limit was verified. It was found that in this pattern of calculation the number of samples may be reduced by 10 per cent. As the experimental set of diagrams represents a relatively wide class of plastics and test parameters, the applicability of conclusions to other materials with dispersion within the limits of tested set, was found possible.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

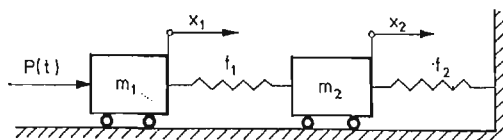
Praca została złożona w Redakcji dnia 24 kwietnia 1979 roku.

WYZNACZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UDERZENIA W UKŁADZIE O DWU STOPNIACH
SWOBODY Z NIELINIOWOŚCIĄ TYPU DUFFINGA I HERTZA

HENRYK WOJCIECHOWSKI (GŁIWICE)

1. Wstęp

Obiektem badań teoretycznych jest zachowawczy, nieliniowy układ dwumasowy (rys. 1), którego ruch wymuszony został obciążeniem nieokresowym o znanym przebiegu czasowym, tj. o znanym kształcie impulsu.



Rys. 1.

Układ taki może być modelem dynamicznym różnych urządzeń technicznych pracujących udarowo. Uderzenia występujące w eksploatacji urządzeń technicznych mogą służyć z jednej strony jako sposób przekazywania energii np. młoty, z drugiej strony są źródłem niepożądanych nadmiernych sił działających na elementy konstrukcji.

W pierwszym przypadku celem działalności konstruktora jest optymalizacja przekazywania energii przez odpowiedni dobór parametrów układu, zaś w drugim minimalizacja skutków uderzenia. Stąd też analiza dynamiki układów uderzeniowych, zwłaszcza nieliniowych — bliższych rzeczywistości, jest zagadnieniem technicznie ważnym. Układom nieliniowym o dwu stopniach swobody poświęcono szereg prac m.in. [2], [6], [7], [10], [11], [12], [13], [14], w których rozwiązano zagadnienie drgań swobodnych przy warunkach początkowych $x_1(0) = x_1$, $x_2(0) = x_2$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, albo też zagadnienie drgań wymuszonych harmonicznymi. Jak wiadomo [3] warunki początkowe ruchu wzbudzonego uderzeniami można formułować dwojako.

Pierwszy sposób, matematycznie prostszy, polega na tym, że obciążenie traktuje się jako impulsowe (w sensie Diraca) i wtedy analiza ruchu wymaga tylko opisu drgań swobodnych przy określonych prędkościach początkowych. Sposób ten można stosować gdy długotrwałość obciążenia jest mała wobec najkrótszego okresu drgań własnych. Gdy warunek ten nie jest spełniony, stosuje się drugi sposób. Wymagana tu jest znajomość czasowego przebiegu obciążenia, czyli kształtu impulsu siły uderzenia. Obliczenia rozdziela się na dwa etapy.

W pierwszym etapie bada się ruch wymuszony siłą o znanym przebiegu czasowym i zerowych warunkach początkowych, celem określenia stanu kinematycznego w końcowej

chwili obciążenia. Te dane służą jako warunki początkowe dla następującej potem autonomicznej fazy ruchu. Zauważmy, że największe przemieszczenia (odkształcenia) mogą wystąpić zarówno w pierwszej jak i drugiej fazie ruchu, czego nie da się rozstrzygnąć na gruncie metody pierwszej.

W tym sensie drugi sposób podejścia jest ogólniejszy, a zarazem prowadzi do wyników dokładniejszych. Wymaga on jednak znajomości kształtu impulsu obciążenia, który zależy od szeregu czynników, przede wszystkim od geometrii powierzchni styku oraz sprężystych lub sprężysto-plastycznych własności zderzających się ciał.

W przypadku uderzenia ciał sprężystych, zagadnienie stykowe opisuje się znanymi wzorami Hertza lub ogólniejszymi Sztajermana. Chcąc rozwiązać zagadnienie uderzenia dwóch ciał sprężystych, z których jedno (bijać) jest swobodne, zaś drugie (ciało uderzone) jest podparte w określony sposób, trzeba badać układ złożony co najmniej z dwóch mas, pomiędzy którymi zachodzi oddziaływanie typu Hertzowskiego.

Ten sposób ujęcia zagadnienia reprezentowany jest w p. 4 niniejszej pracy.

Nieliniowość typu Hertzowskiego sprawia szczególnie dużo kłopotów przy próbach analitycznego rozwiązania zagadnień dynamicznych. Aby uniknąć dodatkowych komplikacji, przyjęto warunki początkowe jak przy obciążeniu impulsowym, czyli według sposobu pierwszego.

W p. 3 przeprowadzono obliczenia według sposobu drugiego, w szczególności dla trójkątnego impulsu obciążenia. Ponadto przyjęto, że więzy nałożone na ciało uderzone mają charakterystykę nieliniową typu Duffinga.

W p. 2 wyprowadzono ogólne równania i wzory dla dowolnego sposobu obciążenia i dowolnego typu nieliniowości charakterystyk sprężyn.

Rozwiązanie nieliniowe układu równań ruchu uzyskano stosując metodę optymalnej linearyzacji, po uprzednim wprowadzeniu współrzędnych głównych.

Wyniki obliczeń zostały zilustrowane wykresami współczynników uderzenia, które uzyskano drogą rozwiązań numerycznych z pomocą komputera.

2. Linearyzacja układu zachowawczego o dwu stopniach swobody wzbudzonego uderzeniowo

Rozpatrywać będziemy układ przedstawiony na rys. 1 obciążony w ten sposób, że na masę m_1 działa siła o znanym przebiegu czasowym $P(t)$ dla $t \in [0, \tau]$, która równa się zero dla $t > \tau$. Siły sprężystości $f_1(x_1 - x_2)$, $f_2(x_2)$ są na ogół nieliniowymi, nieparzystymi funkcjami odkształcenia sprężyn, które możemy przedstawić jako sumę składnika liniowego, i nieliniowego pisząc w postaci:

$$(2.1) \quad f_1(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)k_1 - S_1(x_1 - x_2),$$

$$(2.2) \quad f_2(x_2) = k_2 x_2 - S(x_2),$$

$$(2.3) \quad S(x_2) - S_1(x_1 - x_2) = S_2(x_1 - x_2).$$

Równania ruchu układu w przedziale czasu $t \in [0, \infty]$ po uwzględnieniu (2.1 - 2.3) możemy napisać

$$(2.4) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_1 x_2 &= S_1(x_1 - x_2) + P(t)[H(t) - H(t - \tau)], \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_2 - k_1 x_1 &= S_2(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

z zerowymi warunkami początkowymi, gdzie $H(t)$ jest funkcją skokową Heaviside'a.

Przekształcimy te równania wprowadzając współrzędne główne q_1, q_2 układu liniowego (to jest w równaniach (2.4) przyjmujemy $S_1 = S_2 = P = 0$). Między współrzędnymi naturalnymi x_1, x_2 , a współrzędnymi głównymi q_1, q_2 zachodzą znane zależności [5], [8], [16]

$$(2.5) \quad x_1 = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2, \quad x_2 = \lambda_1 \varrho_1 q_1 + \lambda_2 \varrho_2 q_2,$$

gdzie

$$(2.6) \quad \lambda_1^2 = \frac{1}{m_1 + m_2 \varrho_1^2}, \quad \lambda_2^2 = \frac{1}{m_1 + m_2 \varrho_2^2}.$$

Współczynniki postaci drgań własnych układu liniowego ϱ_1, ϱ_2 określone są wzorami

$$(2.7) \quad \varrho_1 = \frac{k_1 - m_1 \omega_{01}^2}{k_1} = \frac{k_1}{k_1 + k_2 - m_2 \omega_{01}^2},$$

$$(2.8) \quad \varrho_2 = \frac{k_1 - m_1 \omega_{02}^2}{k_1} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - m_2 \omega_{02}^2}.$$

$\omega_{01}^2, \omega_{02}^2$ są kwadratami częstości drgań własnych układu liniowego [3]

$$(2.9) \quad \omega_{01,02}^2 = \frac{k_1}{2m_1} + \frac{k_1 + k_2}{2m_2} \mp \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1 + k_2}{m_2} \right)^2 - \frac{4k_1 k_2}{m_1 m_2} \right]^{1/2}.$$

Różniczkowe równania ruchu we współrzędnych głównych mają postać:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_{01}^2 q_1 &= \Phi_1(q_1, q_2) + H_1(t)[H(t) - H(t - \tau)], \\ \ddot{q}_2 + \omega_{02}^2 q_2 &= \Phi_2(q_1, q_2) + H_2(t)[H(t) - H(t - \tau)]. \end{aligned}$$

$\Phi_i, H_i, i = 1, 2$ wyznaczono obliczając pracę uogólnionych sił $S_1, S_2, P(t)$ na odpowiadających im przemieszczeniach wirtualnych $\delta x_1, \delta x_2$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \Phi_i(q_1, q_2) &= \lambda_i [\tilde{S}_1(q_1, q_2) + \varrho_i \tilde{S}_2(q_1, q_2)] \\ H_i(t) &= \lambda_i P(t), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Ażeby rozwiązać nieliniowe równania (2.10) linearyzujemy je postępując podobnie jak w metodzie Panowki — różnica polega na tym, że w metodzie przedstawionej w [7], [8] przeprowadzono linearyzację we współrzędnych naturalnych, natomiast tu przeprowadzamy linearyzację we współrzędnych głównych. Oznaczmy siły sprężystości dla nieliniowego układu równań (2.10) odpowiednio przez

$$(2.12) \quad F_i(q_1, q_2) = \omega_{0i}^2 q_i - \Phi_i(q_1, q_2), \quad i = 1, 2.$$

Nieliniowe wyrażenia (2.12) zastępujemy wyrażeniami liniowymi

$$(2.13) \quad F_i^* = \omega_i^2 q_i, \quad i = 1, 2$$

z odpowiednio dobranymi częstościami ω_1, ω_2 zastępczego układu liniowego.

Niech

$$r_{ui} = F_i - F_i^*, \quad i = 1, 2$$

oznacza różnice między funkcjami nieliniowymi (2.12) i liniowymi (2.13), zaś

$$(2.14) \quad m_{0i} = r_{ui} q_i = (F_i - \omega_i^2 q_i) q_i, \quad i = 1, 2,$$

są momentami tych odchyień.

Nieznane kwadraty częstości ω_1^2 , ω_2^2 zastępczego układu liniowego dobieramy w ten sposób, ażeby całki z kwadratów momentów odchyień

$$(2.15) \quad \begin{aligned} I_1 &= \int_D m_{\delta_1}^2 dq_1 dq_2, \\ I_2 &= \int_D m_{\delta_2}^2 dq_1 dq_2, \end{aligned}$$

$$\text{w obszarze } D = \left\{ \begin{array}{l} -Q_1 \leq q_1 \leq Q_1 \\ -Q_2 \leq q_2 \leq Q_2 \end{array} \right\}$$

miały wartość minimalną (Q_1 , Q_2 są maksymalnymi wartościami współrzędnych q_1 , q_2). Z warunków koniecznych na ekstremum funkcji $I_1(\omega_1^2, \omega_2^2)$, $I_2(\omega_1^2, \omega_2^2)$

$$(2.16) \quad \frac{\partial I_1}{\partial \omega_1^2} = 0, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \omega_2^2} = 0,$$

otrzymujemy dwa równania, z których wyznaczamy ω_1^2, ω_2^2 :

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{5}{4Q_1^5 Q_2} \int_{-Q_1}^{Q_1} \int_{-Q_2}^{Q_2} F_1(q_1, q_2) q_1^3 dq_1 dq_2, \\ \omega_2^2 &= \frac{5}{4Q_1 Q_2^5} \int_{-Q_1}^{Q_1} \int_{-Q_2}^{Q_2} F_2(q_1, q_2) q_2^3 dq_1 dq_2. \end{aligned}$$

Amplitudy $Q_1 = \max_t q_1(t)$, $Q_2 = \max_t q_2(t)$ znajdujemy rozwiązując liniowe równania

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i &= \lambda_i P(t), & i = 1, 2 & \text{ dla } 0 \leq t \leq \tau \\ \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i &= 0, & i = 1, 2 & \text{ dla } t > \tau. \end{aligned}$$

Układ dynamiczny, którego ruch opisany jest równaniami (2.18) nazwiemy układem liniowym równoważnym. Przedstawioną metodę linearyzacji możemy również stosować do układów autonomicznych, obliczając kwadraty zastępczych częstości wzorami (2.17). Natomiast Q_1 , Q_2 znajdujemy jako maksimum (względem t) rozwiązań równań

$$(2.19) \quad \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0, \quad i = 1, 2$$

przy danych warunkach początkowych.

W teorii uderzenia szczególnie interesujący jest przypadek wymuszenia ruchu przez udzielenie tylko masie m_1 pewnej prędkości początkowej, tzn. gdy warunki początkowe są następujące:

$$(2.20) \quad x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = V_1.$$

Rozwiązując zadanie początkowe (2.19), (2.20) znajdujemy wyrażenia dla obliczenia Q_1, Q_2 [3]

$$(2.21) \quad Q_1 = \frac{\varrho_2 V_1}{\lambda_1 \omega_1 (\varrho_2 - \varrho_1)}, \quad Q_2 = \frac{\varrho_1 V_1}{\lambda_2 \omega_2 (\varrho_1 - \varrho_2)}.$$

Obliczmy jeszcze zastępcze współczynniki sztywności k_{1z} , k_{2z} układu zlinearyzowanego. W tym celu do (2.9) zamiast k_1, k_2 podstawiamy k_{1z}, k_{2z} . Otrzymamy wówczas

$$(2.22) \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_{1z}}{m_1} + \frac{k_{1z} + k_{2z}}{m_2} \right) \mp \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_{1z}}{m_1} + \frac{k_{1z} + k_{2z}}{m_2} \right)^2 - \frac{4k_{1z}k_{2z}}{m_1m_2} \right]^{1/2} = a_1 \mp b_1,$$

przy czym $b_1^2 = a_1^2 - c_1^2$, gdzie

$$(2.23) \quad c_1^2 = \frac{k_{1z}k_{2z}}{m_1m_2}.$$

Po przekształceniach otrzymamy

$$k_{1z} = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 m_1 m_2}{k_{2z}},$$

$$k_{2z}^2 - 2a_1 m_2 k_{2z} + c_1^2 m_2 (m_1 + m_2) = 0.$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy

$$(2.24) \quad k_{1z} = \frac{2m_1 m_2 \omega_1^2 \omega_2^2}{m_2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - [m_2^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 m_2(m_1 + m_2)]^{1/2}},$$

$$k_{2z} = \frac{1}{2} m_2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \frac{1}{2} [m_2^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 m_2(m_1 + m_2)]^{1/2}.$$

Zagadnienia dynamiki układu przedstawionego na rys. 1 można rozwiązywać przy użyciu rozmaitych metod, znanych w dynamice nieliniowych układów dyskretnych [1], [4]. Uzyskane wzory na zastępczą częstość własną wymagają w konkretnych przypadkach korzystania z pomocy komputera. Wydaje się jednak, że obrana droga postępowania prowadzi do celu szybciej niż np. bezpośrednio całkowanie numeryczne różniczkowych równań ruchu.

Zaproponowana linearyzacja we współrzędnych głównych q_1, q_2 ma tę zaletę w porównaniu z linearyzacją we współrzędnych naturalnych x_1, x_2 , że dla układów wzbudzonych uderzeniowo o wiele łatwiej jest wyznaczyć maksymalne wartości współrzędnych głównych niż naturalnych.

3. Rozwiązanie szczególne dla układu z nieliniowością Duffinga

Niech w układzie przedstawionym na rys. 1 charakterystyki sprężyn będą określone następująco:

$$f_1 = (x_1 - x_2)k_1,$$

$$f_2 = k_2 x_2 + k_3 x_2^3.$$

Obciążenie ma charakter impulsu trójkątnego:

$$P(t) = P_0 \frac{t}{\tau_1}, \quad \text{dla } t \in [0, \tau_1],$$

gdzie P_0 jest maksymalną wartością siły uderzenia, a τ_1 — długotrwałością jej działania. Wprowadzając następujące oznaczenia:

$$b = \sqrt{\frac{k_3}{k_2}}, \quad \bar{x}_1 = bx_1, \quad \bar{x}_2 = bx_2,$$

$$\frac{k_1}{m_1} = \alpha_1^2, \quad \frac{k_2}{k_1} = c, \quad \frac{m_2}{m_1} = \beta, \quad \tau = \alpha_1 t,$$

równania ruchu sprowadzamy do postaci bezwymiarowej:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \ddot{\bar{x}}_1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 &= \bar{P}(\tau) & \text{dla } 0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ \beta \ddot{\bar{x}}_2 + (1+c)\bar{x}_2 - \bar{x}_1 &= -c\bar{x}_2^3 = S(\bar{x}_2), \\ \ddot{\bar{x}}_1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 &= 0 & \text{dla } \tau > \tau_0, \\ \beta \ddot{\bar{x}}_2 + (1+c)\bar{x}_2 - \bar{x}_1 &= S(\bar{x}_2). \end{aligned}$$

\bar{x}_1, \bar{x}_2 są bezwymiarowymi współrzędnymi, $\bar{P}(\tau) = \frac{b}{m_1 \kappa_1^2} P(t)$, $\ddot{\bar{x}}_i = \frac{d^2 \bar{x}_i}{d\tau^2}$ $i = 1, 2$, $\tau_0 = \kappa_1 \tau_1$.

W celu rozwiązania układu równań (3.1) zlinearyzowano je stosując metodę podaną w p. 2.

Przekształcamy równania (3.1) wprowadzając bezwymiarowe współrzędne główne $\bar{q}_i = b\bar{q}_i$, $i = 1, 2$.

Równania te we współrzędnych głównych przyjmują postać

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \ddot{\bar{q}}_i + \bar{\omega}_{0i}^2 \bar{q}_i &= \Phi_i(\bar{q}_1, \bar{q}_2) + H_i(\tau), & \text{dla } 0 \leq \tau \leq \tau_0, \\ & & \text{dla } \tau > \tau_0, H_i(\tau) = 0, \end{aligned}$$

gdzie:

$$(3.3) \quad \Phi_i = \lambda_i \varrho_i \tilde{S}(\bar{q}_1, \bar{q}_2), \quad H_i(\tau) = \lambda_i \bar{P}(\tau), \quad i = 1, 2.$$

Parametry $\lambda_i, \varrho_i, \bar{\omega}_{0i}^2$, $i = 1, 2$ są następujące

$$(3.4) \quad \lambda_i^2 = \frac{1}{1 + \beta \varrho_i^2}, \quad i = 1, 2,$$

$$(3.5) \quad \varrho_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{1+c}{2\beta} \pm \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1+c}{\beta} \right)^2 - 4 \frac{c}{\beta} \right]^{1/2},$$

$$(3.6) \quad \bar{\omega}_{01,02}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1+c}{2\beta} \pm \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1+c}{\beta} \right)^2 - 4 \frac{c}{\beta} \right]^{1/2}.$$

Układ równań (3.2) zastępujemy równoważnym układem liniowym

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \ddot{\bar{q}}_i + \omega_i^2 \bar{q}_i &= \lambda_i \bar{P}(\tau), & \text{dla } 0 \leq \tau \leq \tau_0, \\ \ddot{\bar{q}}_i + \omega_i^2 \bar{q}_i &= 0, & \tau > \tau_0, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

w którym kwadraty częstości ω_1^2, ω_2^2 , obliczone wzorami (2.17), w tym przypadku będą miały postać:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \bar{\omega}_1^2 &= \bar{\omega}_{01}^2 + c \lambda_1^2 \varrho_1^2 \left(\frac{5}{7} \lambda_1^2 \varrho_1^2 \bar{Q}_1^2 + \lambda_2^2 \varrho_2^2 \bar{Q}_2^2 \right), \\ \bar{\omega}_2^2 &= \bar{\omega}_{02}^2 + c \lambda_2^2 \varrho_2^2 \left(\lambda_1^2 \varrho_1^2 \bar{Q}_1^2 + \frac{5}{7} \lambda_2^2 \varrho_2^2 \bar{Q}_2^2 \right). \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia amplitud $\bar{Q}_1 = \max_{\tau} \bar{q}_1(\tau)$, $\bar{Q}_2 = \max_{\tau} \bar{q}_2(\tau)$ należy obliczyć maksymalne wartości funkcji będących rozwiązaniami układu równań (3.7), w którym podstawiamy za $\lambda_i \bar{P}(\tau)$ wyrażenie $\lambda_i \bar{P}_0 \tau$, gdzie $\bar{P}_0 = \frac{b P_0}{m_1 \kappa_1^2 \tau_0}$.

Z określenia współrzędnych głównych wynika, że rozwiązania które we współrzędnych naturalnych x_1, x_2 spełniają zerowe warunki początkowe, muszą je spełniać także we współrzędnych głównych.

Rozwiązanie równań (3.7), spełniające zerowe warunki początkowe, ma postać całki Duhamela

$$(3.9) \quad \bar{q}_i(\tau) = \frac{\lambda_i \bar{P}_0}{\bar{\omega}_i} \int_0^\tau t \sin \bar{\omega}_i(\tau-t) dt, \quad i = 1, 2,$$

lub

$$(3.10) \quad \bar{q}_i(\tau) = \frac{\lambda_i \bar{P}_0}{\bar{\omega}_i} \left(\frac{\tau}{\bar{\omega}_i} - \frac{\sin \bar{\omega}_i \tau}{\bar{\omega}_i^2} \right) \quad \text{dla } 0 \leq \tau \leq \tau_0, \quad i = 1, 2.$$

Przemieszczenia $\bar{q}_i(\tau)$ są w przedziale $0 \leq \tau \leq \tau_0$ rosnącymi funkcjami czasu, co wynika z wzorów (3.10). Zatem maksymalne wartości \bar{Q}_1, \bar{Q}_2 wystąpią dla $\tau > \tau_0$.

Rozwiązanie układu równań (3.7) dla $\tau > \tau_0$ ma postać

$$(3.11) \quad \bar{q}_i(\tau) = \frac{\lambda_i \bar{P}_0}{\bar{\omega}_i} \int_0^{\tau_0} t \sin \bar{\omega}_i(\tau-t) dt, \quad i = 1, 2$$

lub

$$(3.12) \quad \bar{q}_i(\tau) = -\frac{\lambda_i \bar{P}_0}{\bar{\omega}_i^2} \left[\left(\tau_0 \sin \bar{\omega}_i \tau_0 + \frac{1}{\bar{\omega}_i} \cos \bar{\omega}_i \tau_0 - \frac{1}{\bar{\omega}_i} \right) \sin \bar{\omega}_i \tau + \left(\tau_0 \cos \bar{\omega}_i \tau_0 - \frac{1}{\bar{\omega}_i} \sin \bar{\omega}_i \tau_0 \right) \cos \bar{\omega}_i \tau \right], \quad i = 1, 2$$

Obliczone maksimum tych funkcji ze względu na τ

$$(3.13) \quad \bar{Q}_i = \frac{\lambda_i \bar{P}_0}{\bar{\omega}_i^2} A_i, \quad i = 1, 2,$$

gdzie

$$(3.14) \quad A_i = \left[\tau_0^2 + \frac{2}{\bar{\omega}_i^2} - \frac{2\tau_0}{\bar{\omega}_i} \sin \bar{\omega}_i \tau_0 - \frac{2}{\bar{\omega}_i^2} \cos \bar{\omega}_i \tau_0 \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2.$$

Celem niniejszych rozważań jest obliczenie współczynnika uderzenia μ , rozumianego jako stosunek maksymalnej siły zwrotnej w sprężynie $\max F(t)$ do maksymalnej wartości siły wymuszającej P_0 . Dla układu o dwu stopniach swobody trzeba obliczyć dwa współczynniki uderzenia

$$(3.15) \quad \mu_1 = \frac{\max F_1(t)}{P_0}, \quad \mu_2 = \frac{\max F_2(t)}{P_0},$$

gdzie:

$$F_1(t) = k_{1z}[x_1(t) - x_2(t)], \quad F_2(t) = k_{2z}x_2(t),$$

k_{1z}, k_{2z} są zastępczymi współczynnikami sprężystości układu zlinearyzowanego.

Znając współrzędne główne możemy powrócić do współrzędnych naturalnych i po odpowiednich przekształceniach napisać wzory przybliżone (wynikające z oszacowania

funkcji typu $\max_t A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \leq A + B$ dla współczynników uderzenia:

$$(3.16) \quad \mu_1 = \frac{\bar{k}_{1z}}{\tau_0} \left[\frac{\lambda_1^2 A_1 (1 - \rho_1)}{\bar{\omega}_1^2} + \frac{\lambda_2^2 A_2 (1 - \rho_2)}{\bar{\omega}_2^2} \right],$$

$$(3.17) \quad \mu_2 = \frac{k_{2z}}{\tau_0} \left(\frac{\lambda_1^2 A_1}{\bar{\omega}_1^2} \rho_1 + \frac{\lambda_2^2 A_2}{\bar{\omega}_2^2} \rho_2 \right),$$

gdzie \bar{k}_{1z} , \bar{k}_{2z} obliczono wzorami (2.24)

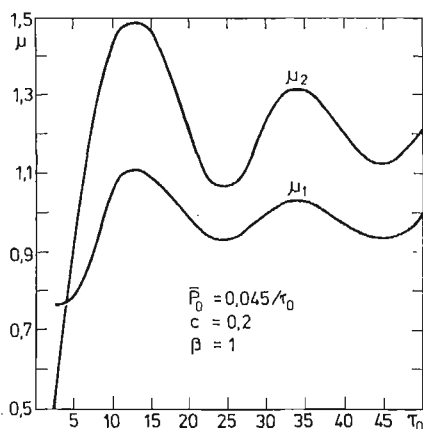
$$(3.18) \quad \bar{k}_{1z} = \frac{2\beta\bar{\omega}_1^2\bar{\omega}_2^2}{\beta(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2) - [\beta^2(\bar{\omega}_1^2 - \bar{\omega}_2^2)^2 - 4\beta\bar{\omega}_1^2\bar{\omega}_2^2]^{1/2}},$$

$$\bar{k}_{2z} = \frac{1}{2} \beta(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2) - \frac{1}{2} [\beta^2(\bar{\omega}_1^2 - \bar{\omega}_2^2)^2 - 4\beta\bar{\omega}_1^2\bar{\omega}_2^2]^{1/2}.$$

Częstości $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ układu zlinearyzowanego oraz współczynniki uderzenia μ_1 , μ_2 są funkcjami następujących parametrów \bar{P}_0 , c , β , τ_0 . Złożona budowa powyższych wzorów uniemożliwia przeprowadzenie wprost ogólnej dyskusji wpływu poszczególnych parametrów na wartość $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ lub μ_1 , μ_2 .

Dlatego obliczono wielkości $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, μ_1 , μ_2 jako funkcje τ_0 , traktując pozostałe parametry jako stałe.

Wyniki obliczeń przedstawia rys. 2.



Rys. 2.

4. Układ dwumasowy z nieliniowością Hertza

Dla układu jak na rys. 1 wyznaczmy maksymalną siłę w sprężynie pośredniej oraz maksymalne ugięcie sprężyny skrajnej, jeśli charakterystyki sprężyn są określono następująco:

$$f_1 = k_H \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) |x_1 - x_2|^{3/2}$$

$$\text{przy czym } \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x_1 - x_2 > 0 \\ -1 & \text{dla } x_1 - x_2 < 0 \end{cases}$$

$$f_2 = k_2 x_2, \quad P(t) = 0.$$

Przyjmujemy warunki początkowe:

$$(4.1) \quad x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = V_0.$$

Rozpatrywany układ dynamiczny modeluje uderzenie quasi-sztywnego bijaka¹⁾ w ciało quasi-sztywne nieswobodne, na które są nałożone liniowe więzy sprężyste o sztywności k_2 . Przez m_1 należy rozumieć masę bijaka, przez m_2 — masę ciała uderzonego, zredukowaną do punktu uderzenia. Sprężyna pośrednia imituje podatność lokalną (k_H) zderzających się ciał i dlatego jej charakterystykę przyjęto w postaci hertzowskiej [3].

Równania ruchu mas podczas trwania ich kontaktu są następujące:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_H \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) |x_1 - x_2|^{3/2} &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_H \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) |x_1 - x_2|^{3/2} + k_2 x_2 &= 0, \end{aligned}$$

z warunkami początkowymi (4.1).

Dodajmy z obu stron równania (4.2a) człon $k_2(x_1 - x_2)$ zaś do równania (4.2b) człon $-k_2(x_1 - x_2)$ oraz wprowadzimy oznaczenia

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{k_2}{G} &= b, & \bar{x}_1 &= bx_1, & \bar{x}_2 &= bx_2, \\ \frac{k_2}{m_2} &= \kappa^2, & \frac{m_2}{m_1} &= \beta, & \frac{k_H}{\sqrt{bk_2}} &= a, \\ \tau &= \kappa t, & \text{gdzie} & & G &= m_2 g \end{aligned}$$

i przepisemy równania (4.2) po uwzględnieniu (4.3) w postaci bezwymiarowej

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\beta} \ddot{\bar{x}}_1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 &= -a \operatorname{sgn}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|^{3/2} + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = S_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \ddot{\bar{x}}_2 + 2\bar{x}_2 - \bar{x}_1 &= a \operatorname{sgn}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|^{3/2} - \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = -S_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2). \end{aligned}$$

Przekształcamy równania (4.4) wprowadzając współrzędne główne \bar{q}_1, \bar{q}_2 układu (4.4), w którym $S_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$. We współrzędnych głównych równania (4.4) będą [5]:

$$(4.5) \quad \ddot{\bar{q}}_i + \bar{\omega}_{0i}^2 \bar{q}_i = \lambda_i (1 - \varrho_i) \tilde{S}_i(\bar{q}_1, \bar{q}_2), \quad i = 1, 2$$

gdzie:

$$(4.6) \quad \lambda_i^2 = \frac{1}{\frac{1}{\beta} + \varrho_i^2}, \quad i = 1, 2,$$

$$(4.7) \quad \varrho_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\beta} \pm \frac{1}{2\beta} \sqrt{4 + \beta^2},$$

$$(4.8) \quad \bar{\omega}_{01,02}^2 = 1 + \frac{\beta}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{4 + \beta^2}.$$

Nieliniowy układ równań (4.5) zastępujemy układem liniowym

$$(4.9) \quad \ddot{\bar{q}}_i + \bar{\omega}_i^2 \bar{q}_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

¹⁾ Ciałem quasi-sztywnym nazywamy ciało lokalnie odkształcalne [3].

Kwadraty częstości obliczamy korzystając z wzorów (2.17), które w tym przypadku będą następujące:

$$(4.10) \quad \bar{\omega}_1^2 = \frac{5}{4\bar{Q}_2\bar{Q}_1^3} \int_{-\bar{Q}_1}^{\bar{Q}_1} \int_{-\bar{Q}_2}^{\bar{Q}_2} [\bar{\omega}_{01}^2 \bar{q}_1 + aA \operatorname{sgn}(A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2) |A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2|^{3/2} - \\ - A^2\bar{q}_1 - AB\bar{q}_2] \bar{q}_1^3 d\bar{q}_1 d\bar{q}_2,$$

$$(4.11) \quad \bar{\omega}_2^2 = \frac{5}{4\bar{Q}_1\bar{Q}_2^3} \int_{-\bar{Q}_1}^{\bar{Q}_1} \int_{-\bar{Q}_2}^{\bar{Q}_2} [\bar{\omega}_{02}^2 \bar{q}_2 + aB \operatorname{sgn}(A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2) |A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2|^{3/2} - \\ - AB\bar{q}_1 - B^2\bar{q}_2] \bar{q}_2^3 d\bar{q}_1 d\bar{q}_2,$$

gdzie:

$$(4.12) \quad A = \lambda_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2\beta} \sqrt{4 + \beta^2} \right), \\ B = \lambda_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2\beta} \sqrt{4 + \beta^2} \right).$$

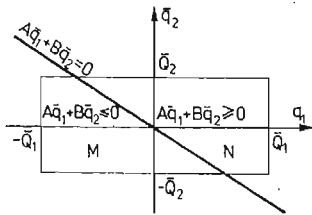
Ażeby obliczyć całki we wzorze (4.10) i (4.11) w których występuje $\operatorname{sgn}(A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2)$ należy zbadać znak wyrażeń A i B . Ponieważ $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\beta > 0$ więc $A > 0$ i $B > 0$. Dziełimy obszar całkowania na dwa obszary M i N prostą o równaniu $A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2 = 0$. Należy wyróżnić dwa przypadki przy uwzględnieniu, że $\frac{A}{B} > 0$.

— przypadek I $\bar{Q}_2 \leq \frac{A}{B} \bar{Q}_1$

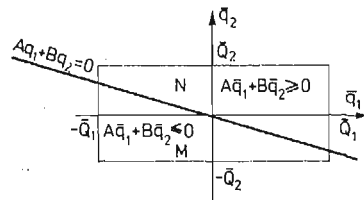
— przypadek II $\bar{Q}_2 \geq \frac{A}{B} \bar{Q}_1$

W przypadku pierwszym obszar całkowania jest podzielony jak na rys. 3, a podobszary M i N określone następująco:

$$M = \left\{ \begin{array}{l} -\bar{Q}_1 \leq \bar{q}_1 \leq -\frac{B}{A} \bar{q}_2 \\ -\bar{Q}_2 \leq \bar{q}_2 \leq \bar{Q}_2 \end{array} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{B}{A} \bar{q}_2 \leq \bar{q}_1 \leq \bar{Q}_1 \\ -\bar{Q}_2 \leq \bar{q}_2 \leq \bar{Q}_2 \end{array} \right\},$$



Rys. 3.



Rys. 4.

Dla drugiego przypadku rys. 4 mamy:

$$M = \left\{ \begin{array}{l} -\bar{Q}_1 \leq \bar{q}_1 \leq \bar{Q}_1 \\ -\bar{Q}_2 \leq \bar{q}_2 \leq -\frac{A}{B} \bar{q}_1 \end{array} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{array}{l} -\bar{Q}_1 \leq \bar{q}_1 \leq \bar{Q}_1 \\ -\frac{A}{B} \bar{q}_1 \leq \bar{q}_2 \leq \bar{Q}_2 \end{array} \right\}$$

W obszarze M spełniony jest warunek $A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2 \leq 0$, więc $\text{sgn}(A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2) = -1$, ponadto $|A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2| = -A\bar{q}_1 - B\bar{q}_2$. W obszarze N mamy $A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2 \geq 0$, więc $\text{sgn}(A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2) = 1$ oraz $|A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2| = A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2$.

Uwzględniając powyższe po obliczeniu całek otrzymamy:

w przypadku pierwszym, czyli dla $\bar{Q}_2 \leq \frac{A}{B} \bar{Q}_1$

$$(4.13) \quad \bar{\omega}_1^2 = \bar{\omega}_{01}^2 + \frac{2a}{7B} \left\{ \frac{16}{429A^3} \left[\frac{(A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{13/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^5} - \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{13/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^5} \right] - \right. \\ \left. - \frac{8}{33A^2} \left[\frac{(A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{11/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^4} - \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{11/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^4} \right] + \frac{2}{3A} \left[\frac{(A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{9/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{9/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^3} \right] - \frac{(A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{7/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^2} + \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{7/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^2} \right\} - A^2,$$

$$(4.14) \quad \bar{\omega}_2^2 = \bar{\omega}_{02}^2 + \frac{2a}{B^3} \left\{ \frac{1}{13A} \left[\frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{13/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^5} - \frac{(A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{13/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^5} \right] - \right. \\ \left. - \frac{3}{11} \left[\frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{11/2}}{\bar{Q}_2^5} - \frac{(A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{11/2}}{\bar{Q}_2^5} \right] + \frac{A\bar{Q}_1}{3\bar{Q}_2^5} [(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{9/2} - \right. \\ \left. - (A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{9/2}] - \frac{A^2 \bar{Q}_1^2}{7\bar{Q}_2^5} [(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{7/2} - (A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{7/2}] \right\} - B^2,$$

w przypadku drugim, czyli $\bar{Q}_2 \leq \frac{A}{B} \bar{Q}_1$

$$(4.15) \quad \bar{\omega}_1^2 = \bar{\omega}_{01}^2 + \frac{2a}{A^3} \left\{ \frac{1}{13B} \left[\frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{13/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^5} - \frac{(B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{13/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^5} \right] - \right. \\ \left. - \frac{3}{11\bar{Q}_1^5} [(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{11/2} - (B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{11/2}] + \frac{B\bar{Q}_2}{3\bar{Q}_1^5} [(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{9/2} - \right. \\ \left. - (B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{9/2}] - \frac{B^2 \bar{Q}_2^2}{7\bar{Q}_1^5} [(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{7/2} - (B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{7/2}] \right\} - A^2,$$

$$(4.16) \quad \bar{\omega}_2^2 = \bar{\omega}_{02}^2 + \frac{2a}{7A} \left\{ \frac{16}{429B^3} \left[\frac{(B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{13/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^5} - \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{13/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^5} \right] - \right. \\ \left. - \frac{8}{33B^2} \left[\frac{(B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{11/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^4} - \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{11/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^4} \right] + \frac{2}{3B} \left[\frac{(B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{9/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{9/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^3} \right] - \frac{(B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{7/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^2} + \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{7/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^2} \right\} - B^2.$$

Łatwo można wykazać, że dla warunków początkowych (4.1) maksymalne wartości współrzędnych głównych będą

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \bar{Q}_1 &= \frac{\varrho_2 \bar{V}_0}{\lambda_1 \bar{\omega}_1 (\varrho_2 - \varrho_1)}, \\ \bar{Q}_2 &= \frac{\varrho_1 \bar{V}_0}{\lambda_2 \bar{\omega}_2 (\varrho_1 - \varrho_2)}, \end{aligned}$$

gdzie: $\bar{V}_0 = \frac{b}{\kappa} V_0$.

Wartości $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ obliczono na komputerze traktując parametry a, β jako stałe, \bar{V}_0 jako zmienne. Rozwiązując układ równań (4.9) możemy powrócić do współrzędnych naturalnych \bar{x}_1, \bar{x}_2 , które będą określone następująco:

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= \lambda_1 \bar{Q}_1 \sin \bar{\omega}_1 \tau + \lambda_2 \bar{Q}_2 \sin \bar{\omega}_2 \tau, \\ \bar{x}_2 &= \lambda_1 \varrho_1 \bar{Q}_1 \sin \bar{\omega}_1 \tau + \lambda_2 \varrho_2 \bar{Q}_2 \sin \bar{\omega}_2 \tau. \end{aligned}$$

Układ równań (4.2), podobnie jak i równoważny mu (w sensie przyjętej metody rozwiązania) układ (4.9), opisuje ruch środków mas podczas ich kontaktu, czyli dla $t \in [0, \tau_k]$ gdzie τ_k jest nieznanym czasem kontaktu. Można go wyznaczyć z warunku

$$(4.19) \quad \bar{x}_1(\tau) - \bar{x}_2(\tau) = 0,$$

bowiem w końcowej chwili uderzenia przemieszczenia środków obu mas są jednakowe.

Maksymalną siłę uderzenia $\bar{F} = \max_{\tau} \bar{F}(\tau)$ wyznaczono z równania

$$(4.20) \quad \bar{F}(\tau) = \bar{k}_{1z} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2),$$

w którym $\bar{F}(\tau)$ jest bezwymiarową wielkością reprezentującą stosunek siły uderzenia $F(t)$ do ciężaru $m_2 g$, bezwymiarowa zastępcza sztywność $\bar{k}_{1z} = \frac{k_{1z}}{k_2}$ dana jest wzorem (3.18).

Wyniki obliczeń przedstawia rys. 5 i 6.

Z kolei obliczymy maksymalne ugięcie sprężyny skrajnej. Jest to wielkość o tyle interesująca, że w przyjętym modelu reprezentuje maksymalne odkształcenie ciała uderzanego, wynikające z jego podatności ogólnej. Ponieważ omawiane maksimum występuje z reguły w drugiej fazie ruchu, czyli dla $t > \tau_k$, przeto należy najpierw określić stan kinematyczny układu w chwili $t = \tau_k$ a mianowicie $x_1(\tau_k) = x_2(\tau_k)$, $\dot{x}_1(\tau_k)$, $\dot{x}_2(\tau_k)$. Postulujemy sprężysty charakter uderzenia tzn., że współczynnik restytucji $R = 1$. Dalszy ruch ciała ma więc charakter swobodnych drgań oscylatora harmonicznego o masie m_2 z liniowymi więzami sprężystymi o sztywności k_2 . Współczynnik uderzenia μ , zdefiniowany jako stosunek maksymalnego ugięcia dynamicznego sprężyny o sztywności k_2 do jej statycznego ugięcia pod ciężarem bijaka określony jest wzorem [9]

$$(4.21) \quad \mu = \beta \sqrt{\bar{x}_2^2 + \dot{\bar{x}}_2^2}.$$

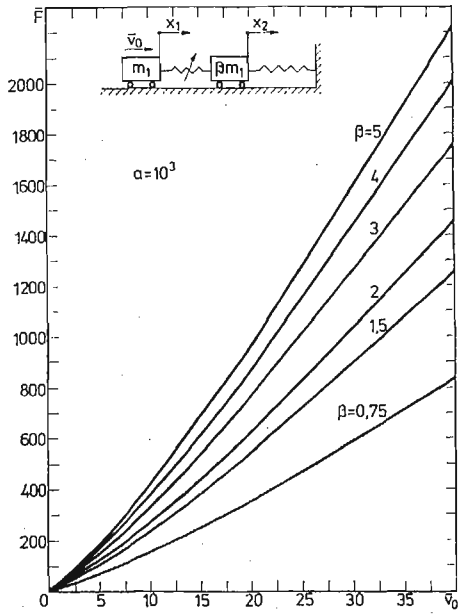
Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 7, natomiast na rys. 8 pokazano wpływ podatności lokalnej na współczynnik uderzenia.

5. Uwagi końcowe i wnioski

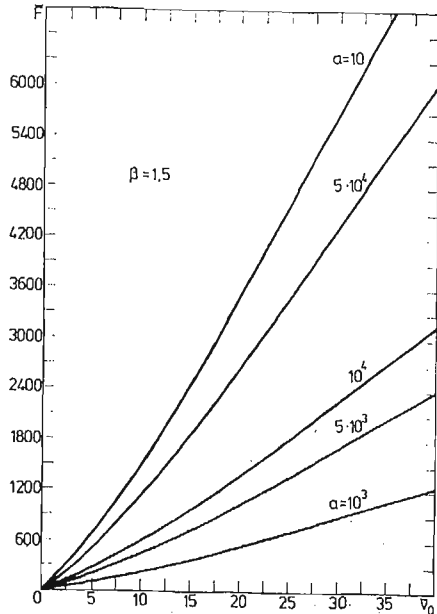
Układ dwumasowy rozpatrywany w p. 2 wraz z przyjętym sposobem obciążenia, może być modelem rozmaitych mechanizmów o działaniu udarowym. Podczas pracy takiego mechanizmu, na masę m_1 (reprezentującą np. bijak, tłok itp.) działa obciążenie

impulsowe. Druga masa połączona jest z pierwszą więzami sprężystymi, liniowymi, zaś z podłożem (tzn. osłoną, obudową, łożyskami itp.) więzami nieliniowo-sprężystymi.

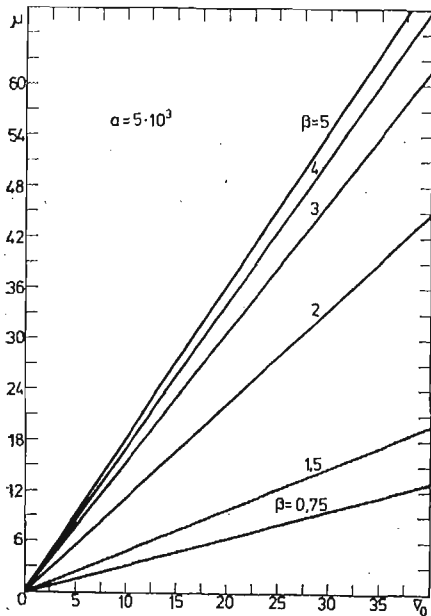
Pozwala to uwzględnić duże (geometrycznie nieliniowe) odkształcenia tego ciała, które może być uformowane na kształt belki, wału itp.



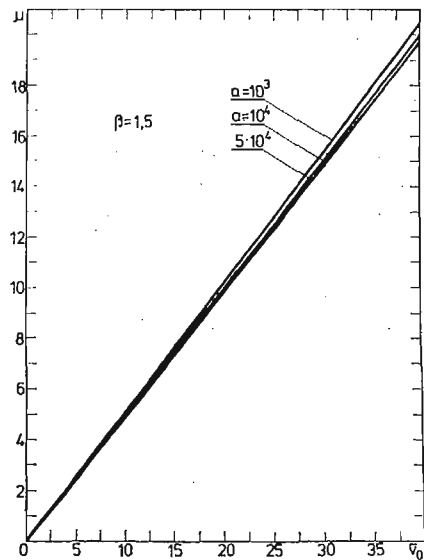
Rys. 5.



Rys. 6.



Rys. 7.



Rys. 8.

Jak widać z rys. 2 (i wielu innych przedstawionych w pracy [15]) w zakresie badanych parametrów maksimum współczynnika μ_2 jest większe od maksimum μ_1 , a zmiany tych współczynników wraz ze wzrostem τ_0 mają charakter oscylacyjny. Ze względów wytrzymałościowych korzystne jest tak dobierać parametry układu, aby odpowiadało im lokalne minimum współczynników uderzenia. Natomiast dla układu z nieliniowością Hertza [15] można przyjąć, że μ jest funkcją tylko prędkości bijaka i stosunku mas, bowiem zmienia się on nieznacznie (w zakresie badanych sztywności) przy zmianie sztywności lokalnej (rys. 7, 8), a jego wzrost jest liniowy przy wzroście prędkości bijaka V_0 .

Na wartość maksymalnej siły uderzenia duży wpływ ma podatność lokalna α , przy czym jak widać na rys. 6 ze wzrostem podatności lokalnej rośnie wartość tej siły.

Literatura cytowana w tekście

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Москва 1958.
2. W. BOGUSZ, *Normal modes nonlinear vibrations in two degrees of freedom systems*, Zagadnienia drgań nieliniowych, PWN, Warszawa, 1963.
3. R. GRYBÓŚ, *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*, PWN, Warszawa 1969.
4. С. Н. НАГАШИ, *Дрғаня нелинейные в укладках физических*, WNT, Warszawa 1968.
5. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Дрғаня и фале в цiałach stalych*, PWN, Warszawa 1966.
6. Z. MAGIERA-ULLRICH, *Дрғаня normalne układów nieliniowych o dwóch stopniach swobody*, praca doktorska, Politechnika Poznańska, 1970.
7. Я. Г. ПАНОВКО, *Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах теории упругих колебаний*, Инж. Сборник, 13, Москва 1952.
8. Я. Г. ПАНОВКО, *Основы прикладной теории упругих колебаний*, Машиностр. Москва 1967.
9. Н. К. СНИТКО, *Динамика сооружений*, Гостройиздат, Москва 1960.
10. R. M. ROSENBERG, C. P. ATKINSON, *On the natural modes and their stability in nonlinear two-degree-of-freedom systems*, Journal of Applied Mechanics, 3, 1959.
11. R. M. ROSENBERG, *Normal modes of nonlinear dual-mode systems*, Journal of Applied Mechanics, 2, 1960.
12. P. M. РОЗЕНБЕРГ, *О свободных колебаниях нормального типа нелинейных систем общего класса с двумя степенями свободы*, Сбор. пер. иностр. статей, Механика 5, 69, 1961.
13. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Postacie drgań przy rezonansie nieliniowego układu o dwóch stopniach swobody*, Archiwum Budowy Maszyn, 9, 1962.
14. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Normal modes of a nonlinear two degrees-of-freedom system and their properties*, Zagadnienia drgań nieliniowych, 5, PWN, Warszawa 1963.
15. H. WOJCIECHOWSKI, *Uderzenie w układzie nieliniowo-dyskretnym o dwu stopniach swobody*, praca doktorska, Politechnika Śląska, 1978.
16. S. ЗЕМВА, *Анализа дрғані*, PWN, Warszawa 1957.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В СИСТЕМЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ТИПА ДУФФИНГА И ГЕРЦА

В статье рассматривается способ линеаризации нелинейной консервативной системы с двумя степенями свободы возбужденной непериодической нагрузкой или ударом. Линеаризацию нелинейных уравнений движения проведено после предварительного введения главных координат.

Особенно проводились исследования системы, которой движение было вынуждено нагрузкой типа трёхугольного импульса. Кроме того рассматривается двухмассовая система, в которых пружина соединяющая массы имеет характеристику типа Герца. Движение такой системы возбуждалось приданием массе m_1 начальной скорости V_0 . Для обеих систем определено динамические коэффициенты.

S u m m a r y

THE DETERMINATION OF DYNAMIC FACTORS IN A SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM AND DUFFING-HERTZ NONLINEARITY

In the paper the linearization method of the non-linear conservative system with the two degrees of freedom has been considered. The system is excited by aperiodic or impact loads. The linearization of the non-linear motion equations has been performed after having introduced the main coordinates. The system excited by triangular pulse has been tested in particular. Besides, the two-mass system with joining spring of Hertz characteristics has been considered. The system has been excited by the motion impart of the mass m_1 with the initial velocity v_0 . For both systems the dynamic factors have been introduced.

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 maja 1980 roku.

O WYKORZYSTANIU FUNKCJI WŁASNYCH DO OPISU DRGAŃ WYMUSZONYCH PODATNIE
PODPARTYCH ASYMETRYCZNYCH WAŁÓW

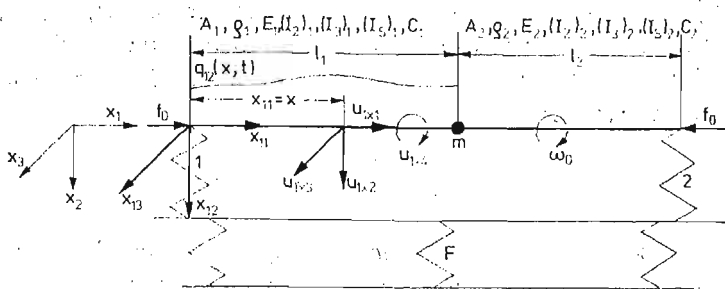
JANUSZ KOLEŃDA (GDAŃSK)

1. Wstęp

Drgania linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętej i podatności fundamentów rozpatrywano w pracach [1], [2] i [3] przy założeniu, że wymuszenia mogą być traktowane jako siły skupione. Drgania wymuszone podatnie podpartych asymetrycznych wałów przy obciążeniach rozłożonych nie były dotychczas analizowane w literaturze. Zagadnienie to rozpatrzone poniżej, przy czym do rozwiązania wykorzystano funkcje własne drgań. Przyjęto, że funkcje własne drgań podatnie podpartego asymetrycznego wału są znane. Sposób ich wyznaczenia przedstawiono w pracach [4] i [5]. W niniejszej pracy rozpatrzone także przypadek wymuszeń skupionych.

2. Drgania podatnie podpartego asymetrycznego wału przy obciążeniach rozłożonych

Obliczeniowy schemat rozpatrywanego układu przedstawiono na rys. 1. Zachowuje się oznaczenia i założenia, jak w pracy [5]. Przyjmuje się, że na pierwszy odcinek wału działa



Rys. 1.

w płaszczyźnie x_{11} , x_{12} obciążenie rozłożone $q_{12}(x, t)$ i drgania tego odcinka w ruchomym układzie współrzędnych x_{11} , x_{12} , x_{13} opisują się niesprzężonymi równaniami:

$$(2.1) \quad \varrho_1 \ddot{u}_{1x1} - E_1 u_{1x1}^{\text{II}} = 0, \quad (\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (') = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$(2.2) \quad (\varrho A)_1 (\ddot{u}_{1x2} - \omega_0^2 u_{1x2}) + f_0 u_{1x2}^{\text{II}} + (EI_2)_1 u_{1x2}^{\text{IV}} = q_{12},$$

$$(2.3) \quad (\varrho A)_1 (\ddot{u}_{1x3} - \omega_0^2 u_{1x3}) + f_0 u_{1x3}^{\text{II}} + (EI_3)_1 u_{1x3}^{\text{IV}} = 0,$$

$$(2.4) \quad (I_2)_1 \ddot{u}_{1x4} - C_1 u_{1x4}^{\text{II}} = 0.$$

Na skutek podatności konstrukcji podpierającej mogą wystąpić sprzężenia pomiędzy drganiami u_{ix1} , u_{ix2} , u_{ix3} oraz u_{ix4} .

Warunki, jakie spełniają macierze podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej w poszczególnych przypadkach sprzężeń, omówiono w pracy [3]. Rozpatrując ogólny przypadek drgań wymuszonych przy sprzężeniach pomiędzy w/w drganiami zakłada się, że znane są częstości nietłumionych drgań swobodnych układu ω_k i funkcje $u_{ix\alpha}^{(k,\mu)}(x)$, stanowiące składniki funkcji własnych drgań podatnie podpartego asymetrycznego wału [5]

$$(2.5) \quad \bar{u}_{ix\alpha}^{(k)} = \sum_{\mu=-r}^r u_{ix\alpha}^{(k,\mu)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2.$$

Jak ukazano w pracy [4], w ogólnym przypadku sprzężeń drgania swobodne podatnie podpartego asymetrycznego wału opisują się zależnościami

$$(2.6) \quad u_{ix\alpha}(x, t) = \sum_{k,\mu} u_{ix\alpha}^{(k,\mu)}(x) \tau^{(k,\mu)}(t),$$

w których funkcje czasu $\tau^{(k,\mu)}$ są identyczne dla wszystkich sprzężonych drgań $u_{ix\alpha}$ ($i = 1, 2, \alpha = 1, 2, 3, 4$), gdyż wpływ parametrów układu i sprzężeń na amplitudy drgań uwzględniają funkcje $u_{ix\alpha}^{(k,\mu)}$ [4], [5].

Funkcje $\tau^{(k,\mu)}$ są rozwiązaniami równań

$$(2.7) \quad \ddot{\tau}^{(k,\mu)} + (\omega_k + \mu\omega_0)^2 \tau^{(k,\mu)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm r.$$

Dzięki istnieniu sprzężeń pomiędzy drganiami stałe rozwiązań równań (2.7) wyznaczono w pracach [4] i [5] z warunków początkowych, określających w chwili $t = 0$ jedynie stan odkształceń giętnych wału w płaszczyznach x_{i1} , x_{i2} .

Gdy znany jest stan obciążeń wału w płaszczyznach x_{i1} , x_{i2} ($q_{12}(x, t) \neq 0$, $q_{22}(x, t) = 0$), również poszukiwać będziemy drgań wymuszonych wału w postaci (2.6), dokonując rozkładu funkcji q_{12} w szereg według układu funkcji własnych drgań giętnych pierwszego odcinka w płaszczyźnie x_{11} , x_{12} :

$$(2.8) \quad q_{12}(x, t) = \sum_k \bar{u}_{1x2}^{(k)}(x) q_{12}^{(k)}(t).$$

Mnożąc (2.8) przez $\bar{u}_{1x2}^{(k)}$ i całkując obustronnie otrzymane równanie po x w przedziale $[0, l_1]$ otrzymuje się z uwzględnieniem (2.5) i ortogonalności funkcji $u_{1x2}^{(k,\mu)}$

$$(2.9) \quad q_{12}^{(k)}(t) = \frac{\int_0^{l_1} q_{12}(x, t) \bar{u}_{1x2}^{(k)}(x) dx}{\int_0^{l_1} \sum_{\mu=-r}^r [u_{1x2}^{(k,\mu)}(x)]^2 dx}.$$

Podstawienie (2.6) dla $\alpha = 2$ oraz (2.8) do równania (2.2) daje dla każdego k i μ równanie:

$$(2.10) \quad \frac{\ddot{\tau}^{(k,\mu)}}{\tau^{(k,\mu)}} + \frac{f_0}{(\rho A)_1} \frac{(u_{1x2}^{(k,\mu)})^{II}}{u_{1x2}^{(k,\mu)}} + \left(\frac{EI_2}{\rho A} \right)_1 \frac{(u_{1x2}^{(k,\mu)})^{IV}}{u_{1x2}^{(k,\mu)}} - \omega_0^2 = \frac{q_{12}^{(k)}}{(\rho A)_1 \tau^{(k,\mu)}}.$$

Uwzględniając, że zachodzi relacja [5]

$$(2.11) \quad \frac{f_0}{(\rho A)_1} \frac{(u_{1x2}^{(k,\mu)})^{II}}{u_{1x2}^{(k,\mu)}} + \left(\frac{EI_2}{\rho A} \right)_1 \frac{(u_{1x2}^{(k,\mu)})^{IV}}{u_{1x2}^{(k,\mu)}} - \omega_0^2 = (\omega_k + \mu\omega_0)^2,$$

otrzymuje się równania

$$(2.12) \quad \ddot{\tau}^{(k,\mu)} + (\omega_k + \mu\omega_0)^2 \tau^{(k,\mu)} = \frac{q_{12}^{(k)}}{(\rho A)_1},$$

z których dla $(\omega_k + \mu\omega_0) \neq 0$ wynika

$$(2.13) \quad \tau^{(k,\mu)} = \frac{1}{(\rho A)_1(\omega_k + \mu\omega_0)} \int_0^t q_{12}^{(k)}(\tau) \sin[(\omega_k + \mu\omega_0)(t - \tau)] d\tau.$$

Rozpatrywany układ jest traktowany jako liniowy, zatem zgodnie z zasadą superpozycji drgania wału w przypadku występowania dodatkowych obciążeń rozłożonych $q_{11}(x, t)$, $q_{13}(x, t)$ i $q_{14}(x, t)$ w równaniach (2.1), (2.3) i (2.4) określone są zależnościami (2.6) i wyrażeniem

$$(2.14) \quad \tau^{(k,\mu)} = \sum_{\alpha=1}^4 \tau_{\alpha}^{(k,\mu)}.$$

Funkcje $\tau_{\alpha}^{(k,\mu)}$ są rozwiązaniami równań

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \ddot{\tau}_1^{(k,\mu)} + (\omega_k + \mu\omega_0)^2 \tau_1^{(k,\mu)} &= \frac{1}{\rho_1} q_{11}^{(k)}, \\ \ddot{\tau}_2^{(k,\mu)} + (\omega_k + \mu\omega_0)^2 \tau_2^{(k,\mu)} &= \frac{1}{(\rho A)_1} q_{12}^{(k)}, \\ \ddot{\tau}_3^{(k,\mu)} + (\omega_k + \mu\omega_0)^2 \tau_3^{(k,\mu)} &= \frac{1}{(\rho A)_1} q_{13}^{(k)}, \\ \ddot{\tau}_4^{(k,\mu)} + (\omega_k + \mu\omega_0)^2 \tau_4^{(k,\mu)} &= \frac{1}{(I_s)_1} q_{14}^{(k)}, \end{aligned}$$

w których $q_{1\alpha}^{(k)}$ wynoszą:

$$(2.16) \quad q_{1\alpha}^{(k)} = \frac{\int_0^{l_1} q_{1\alpha} \bar{u}_{2x\alpha}^{(k)} dx}{\int_0^{l_1} \sum_{\mu=-r}^r (u_{1x\alpha}^{(k,\mu)})^2 dx}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Gdy drugi odcinek wału również poddany jest wymuszeniom rozłożonym, to należy podobnie dodać do funkcji $\tau^{(k,\mu)}$ odpowiednie człony. Przykładowo, jeśli płaszczyzna X_1, X_3 jest pozioma i wał przedstawiony na rys. 1 znajduje się w polu sił wywierających na jednostkę długości i -tego odcinka pionowe obciążenia $Q_i(x, t) = \text{const}$, to drgania i -tego odcinka oraz funkcje $\tau^{(k,\mu)}$ można przedstawić w postaci (2.6) i

$$(2.17) \quad \tau^{(k,\mu)} = \tau_{12}^{(k,\mu)} + \tau_{13}^{(k,\mu)} + \tau_{22}^{(k,\mu)} + \tau_{23}^{(k,\mu)}.$$

W celu wyznaczenia poszczególnych funkcji $\tau_{i\alpha}^{(k,\mu)}$ (2.17) należy odnieść obciążenia Q_i do ruchomych układów współrzędnych obu odcinków wału. Jeśli ruchomy układ współ-

rzędnych x_{21} , x_{22} , x_{23} drugiego odcinka jest obrócony w kierunku wirowania wału o kąt δ_2 względem ruchomego układu współrzędnych x_{11} , x_{12} , x_{13} pierwszego odcinka i w chwili $t = 0$ oś x_{12} jest zwrócona pionowo w dół, to przy prędkości kątowej wirowania wału ω_0 obciążenia rozłożone w ruchomych układach współrzędnych wynoszą w dowolnej chwili t :

$$(2.18) \quad \begin{aligned} q_{12} &= Q_1 \cos \omega_0 t, & q_{13} &= -Q_1 \sin \omega_0 t, \\ q_{22} &= Q_2 \cos(\omega_0 t + \delta_2), & q_{23} &= -Q_2 \sin(\omega_0 t + \delta_2). \end{aligned}$$

Funkcje $\tau_{i\alpha}^{(k,\mu)}$ są zatem rozwiązaniami równań

$$(2.19) \quad \ddot{\tau}_{i\alpha}^{(k,\mu)} + (\omega_k + \mu\omega_0)^2 \tau_{i\alpha}^{(k,\mu)} = \frac{1}{(\rho A)_i} q_{i\alpha}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \quad \alpha = 2, 3$$

w których $q_{i\alpha}^{(k)}$ są zgodnie z (2.16) i (2.18) następującymi funkcjami czasu:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} q_{12}^{(k)} &= Q_1 \cos \omega_0 t \frac{\int_0^{l_1} \bar{u}_{1x2}^{(k)} dx}{\int_0^{l_1} \sum_{\mu=-r}^r (u_{1x2}^{(k,\mu)})^2 dx}, & q_{13}^{(k)} &= -Q_1 \sin \omega_0 t \frac{\int_0^{l_1} \bar{u}_{1x3}^{(k)} dx}{\int_0^{l_1} \sum_{\mu=-r}^r (u_{1x3}^{(k,\mu)})^2 dx}, \\ q_{22}^{(k)} &= Q_2 \cos(\omega_0 t + \delta_2) \frac{\int_0^{l_2} \bar{u}_{2x2}^{(k)} dx}{\int_0^{l_2} \sum_{\mu=-r}^r (u_{2x2}^{(k,\mu)})^2 dx}, \\ q_{23}^{(k)} &= -Q_2 \sin(\omega_0 t + \delta_2) \frac{\int_0^{l_2} \bar{u}_{2x3}^{(k)} dx}{\int_0^{l_2} \sum_{\mu=-r}^r (u_{2x3}^{(k,\mu)})^2 dx}. \end{aligned}$$

W celu uwzględnienia tłumienia wewnętrznego w wale oraz w filmie olejowym łożysk i w konstrukcji podpierającej wał wykorzystać można pewne relacje, dotyczące drgań swobodnych układu niezachowawczego [5]. W pracy [5] założono, że tłumione drgania swobodne podatnie podpartego asymetrycznego wału mogą być opisane zależnościami (2.6), w których funkcje $u_{i\alpha}^{(k,\mu)}$ są wyznaczone jak dla układu zachowawczego, natomiast funkcje $\tau^{(k,\mu)}$ są przy zastąpieniu częstości ω_k zespolonymi częstościami $\tilde{\omega}_k = \bar{\omega}_k + j\bar{\omega}_k$ drgań swobodnych układu z tłumieniem rozwiązaniami równań:

$$(2.21) \quad \ddot{\tau}^{(k,\mu)} + 2\bar{\omega}_k \dot{\tau}^{(k,\mu)} + [(\bar{\omega}_k + \mu\omega_0)^2 + \bar{\omega}_k^2] \tau^{(k,\mu)} = 0.$$

Przyjęcie analogicznego założenia w odniesieniu do opisu drgań wymuszonych przy wykorzystaniu funkcji własnych prowadzi w przypadkach rozpatrywanych w niniejszej pracy do zastąpienia (2.12) równaniem

$$(2.22) \quad \ddot{\tau}^{(k,\mu)} + 2\bar{\omega}_k \dot{\tau}^{(k,\mu)} + [(\bar{\omega}_k + \mu\omega_0)^2 + \bar{\omega}_k^2] \tau^{(k,\mu)} = \frac{1}{(\rho A)_i} q_{i\alpha}^{(k)}$$

i do wprowadzenia podobnych zmian w równaniach (2.15), (2.19).

3. Drgania podatnie podpartego asymetrycznego wału przy wymuszeniach skupionych

Wykorzystanie funkcji własnych do opisu drgań podatnie podpartego asymetrycznego wału przy wymuszeniach skupionych nie różni się w istotny sposób od podobnego zagadnienia przy obciążeniach rozłożonych. Przykładowo, jeśli nie występują obciążenia rozłożone i w płaszczyźnie x_{11}, x_{12} działa w punkcie $x = \xi$ prostopadłe do osi wału siła skupiona $f_{12}^w(t)$, to równanie (2.2) przyjmuje postać:

$$(3.1) \quad (\rho A)_1 (\ddot{u}_{1x_2} - \omega_0^2 u_{1x_2}) + f_0 u_{1x_2}'' + (EI_2)_1 u_{1x_2}^{IV} = \delta(x - \xi) f_{12}^w(t),$$

gdzie δ oznacza dystrybucję Diraca. Poszukując drgań wymuszonych wału w postaci (2.6) należy rozłożyć funkcję $\delta(x - \xi) f_{12}^w(t)$ w szereg według układu funkcji własnych drgań giętnych pierwszego odcinka w płaszczyźnie x_{11}, x_{12} :

$$(3.2) \quad \delta(x - \xi) f_{12}^w(t) = \sum_k \bar{u}_{1x_2}^{(k)}(x) q_{12}^{(k)}(t).$$

Zważywszy, że

$$(3.3) \quad \int_0^{l_1} \delta(x - \xi) f_{12}^w(t) \bar{u}_{1x_2}^{(k)}(x) dx = f_{12}^w(t) \bar{u}_{1x_2}^{(k)}(\xi),$$

otrzymuje się w odróżnieniu od (2.9)

$$(3.4) \quad q_{12}^{(k)} = f_{12}^w(t) \frac{\bar{u}_{1x_2}^{(k)}(\xi)}{\int_0^{l_1} \sum_{\mu=-r}^r [u_{1x_2}^{(k,\mu)}(x)]^2 dx}.$$

Funkcje $\tau^{(k,\mu)}$ są rozwiązaniami równań (2.12) (lub (2.22) przy uwzględnieniu tłumienia w układzie), do których należy podstawić (3.4).

Rozpatrzenie w oparciu o zasadę superpozycji przypadków działania większej liczby sił skupionych lub równoczesnego występowania obciążeń skupionych i rozłożonych nie nastęrcza trudności.

4. Uwagi końcowe

Drgania wymuszone bardziej złożonych układów z asymetrycznymi wałami (np. układów rozpatrywanych w pracach [1] i [2]) mogą być wyznaczane analogicznie jak w p. 2 i 3 niniejszej pracy. Przedstawione w p. 3 podejście stanowi alternatywny sposób rozwiązania zagadnienia drgań podatnie podpartych asymetrycznych wałów przy wymuszeniach skupionych w stosunku do metody opisanej w pracy [1]. W metodzie tej stosuje się macierze przejścia, odnoszące się do poszczególnych odcinków obliczeniowych. Biorąc pod uwagę, że wymaga się przy tym dokonania podziału wału (linii wałów) na odcinki obliczeniowe m.in. w miejscach działania sił skupionych, wykorzystanie funkcji własnych do analizy drgań wymuszonych może się okazać bardziej celowe w przypadkach występowania sił skupionych w odpowiednio licznych przekrojach wału.

Literatura cytowana w tekście

1. J. KOLENDA, *Drgania wymuszone linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętej i podatności fundamentów. Metoda identyfikacji podatności fundamentów linii wałów*, Mech. Teor. i Stos., 4, 16, 1978.
2. J. KOLENDA, *Uściślony opis drgań wymuszonych linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności na zginanie i podatności fundamentów*, Mech. Teor. i Stos., 1, 17 1979.
3. J. KOLENDA, *Wymuszone drgania gięte podatnie podpartego asymetrycznego wału*. Mech. Teor. i Stos. 3, 18, 1980.
4. J. KOLENDA, *Sprężone drgania prętów z więzami zależnymi od częstości*, W Redakcji Zeszytów Nauk. Politechniki Gdańskiej, Bud. Okrętowe
5. J. KOLENDA, *Swobodne i wymuszone drgania podatnie podpartego asymetrycznego wału*, Zeszyty Nauk. Politechniki Gdańskiej, nr 319, Budownictwo Okrętowe 32, 1980

Резюме

О ИСПОЛЬЗОВАНИИ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ АСИММЕТРИЧЕСКИХ ВАЛОВ НА ПОДАТЛИВЫХ ФУНДАМЕНТАХ

Работа касается вынужденных изгибных, продольных и крутильных колебаний вала с асимметрией изгибной жесткости, описанных несопряженными линейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Учитывается сопряжения между колебаниями вследствие податливого подкрепления вала и трение в системе. Рассматривается случаи распределенных и сосредоточенных возмущений. Решения представляется при помощи разложений в ряды по собственным формам.

Summary

USE OF MODES FOR DESCRIPTION OF FORCED VIBRATIONS OF FLEXIBLE SUPPORTED ASYMMETRICAL SHAFTS

The paper deals with flexural, longitudinal and torsional forced vibrations of a shaft with an asymmetry of a flexural rigidity, being governed by non-coupled linear partial differential equations. The couplings between vibrations due to the flexibility of the shaft support as well as a damping in the analysed system are taken into account. The cases of distributed and discrete loadings are considered. Solutions are expressed in terms of the normal modes.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
INSTYTUT OKRĘTOWY

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 października 1979 roku.

NIEIZOTERMICZNY, LAMINARNY PRZEPIY W NIENEWTONOWSKIEJ
CIECZY W KRÓTKIEJ RURZE

KAZIMIERZ R U P (KRAKÓW)

I. Wstęp

Do licznej grupy substancji wykazujących własności nienewtonowskie należą roztwory i stopy polimerów o dużej masie cząsteczkowej, oraz liczne zawiesiny ciał stałych w cieczach. Nieizotermiczne przepływy wymienionych płynów odgrywają podstawową rolę w takich gałęziach przemysłu jak przemysł tworzyw sztucznych, włókien sztucznych, farb i lakierów, farmaceutyczny i inne.

Zagadnienie nieizotermicznych, laminarnych przepływów cieczy nienewtonowskich było przedmiotem wielu prac. Za pomocą metody rozdzielania zmiennych określono w [1] pole temperatury cieczy spełniającej empiryczne równanie Ostwalda de Waele w przypadku płaskiego przepływu Couette przy termicznych warunkach brzegowych pierwszego rodzaju.

W pracach [2] i [3] analizowano pole temperatury w podobnych cieczach lecz w przypadku przepływu przez rury kołowe z uwzględnieniem efektów dysypacji wiskotycznej. Zakładając w [2] i [3] stałą temperaturę ścianki rury rozwiązano równanie energii cieczy za pomocą metody perturbacji.

Eksperymentalną analizę dotyczącą nieizotermicznych przepływów cieczy pseudo plastycznych realizowanych w rurach kołowych ogrzewanych stałym strumieniem ciepła przedstawiono w pracach [4] i [5]. W niniejszej pracy podjęto próbę analitycznego, przybliżonego rozwiązania równania energii cieczy pseudo plastycznych i dilatantnych w przypadku przepływu przez rurę kołową. Na ściance rury założono konwekcyjną wymianę ciepła, a więc termiczne warunki brzegowe trzeciego rodzaju.

Do rozwiązania tak postawionego problemu wykorzystano w pracy acłwmetodę Kármána-Pohlhausena [6].

Otrzymane wyniki przedstawiono w sposób graficzny, a w jednym szczeólnym przypadku porównano z innymi otrzymanymi za pomocą metod ścisłych [7].

Oznaczenia

$$a = \frac{k}{\rho c_p} \quad \text{współczynnik przewodzenia temperatury}$$

$$Bi = \frac{2\alpha \cdot r_s}{k} \quad \text{liczba Biota}$$

- c_p ciepło właściwe
 k współczynnik przewodnictwa cieplnego
 m parametr reologiczny w równaniu (1)
 n wskaźnik płynięcia

$$Pe = \frac{V_{\max} \cdot r_s}{a} \quad \text{liczba Pecleta}$$

- r współrzędna
 r_s promień rury
 t temperatura
 t_0 temperatura początkowa
 T_m temperatura średnia
 V prędkość
 y współrzędna mierzona od ścianki rury
 α współczynnik przejmowania ciepła
 δ bezwymiarowa grubość termicznej warstwy przyściennej
 ρ gęstość cieczy
 μ dynamiczny współczynnik lepkości płynu newtonowskiego
 τ_{zr} naprężenie styczne

2. Analiza problemu

Rozważać będziemy nieizotermiczny przepływ cieczy nienewtonowskiej o niezmiennych wraz ze zmianą temperatury własnościach fizycznych realizowany w rurze kołowej.

Na ściance rury założono warunek konwekcyjnej wymiany ciepła. Warunek taki odpowiada wymianie ciepła pomiędzy cieczą a ścianką rury zgodnie z prawem Newtona.

Opisane wyżej zagadnienie rozwiązane zostanie w tej pracy przy następujących założeniach:

- 1) przepływ cieczy jest ustalony, laminarny i charakteryzuje się osiową symetrią
- 2) ciecz posiada w przekroju wejściowym stałą temperaturę
- 3) uwzględniamy efekty dysypacji wiskotycznej,
- 4) pomijamy wpływ przewodności cieplnej cieczy wzdłuż osi przepływu ($Pe \gg 100$).

Własności reologiczne rozważanych w pracy cieczy opisywać będziemy za pomocą znanej zależności potęgowej [1, 2, 3]

$$(2.1) \quad \tau_{zr} = -m \left| \frac{dV}{dr} \right|^{n-1} \cdot \frac{dV}{dr}$$

Zależność (2.1) zwana jest również równaniem empirycznym Ostwalda de Waele. Należy zaznaczyć że zależność (2.1) opisuje w sposób dostatecznie dokładny własności reologiczne znacznej grupy cieczy „czysto” lepkich ale w zakresie umiarkowanych szybkości ścinania. Natomiast dla szybkości ścinania zmierzających do zera lub do nieskończoności zależność (2.1) traci interpretację fizyczną. W zależności od współczynnika płynięcia n zależność (2.1) obejmuje: ciecze pseudoplastyczne ($n < 1$), ciecze newtonowskie ($n = 1$, $m = \mu$), ciecze dilatantne ($n > 1$).

Uwzględniając założenia 1-4 oraz zależność (2.1) równanie energii cieczy można zapisać w postaci

$$(2.2) \quad \rho c_p V \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + m \left| \frac{dV}{dr} \right|^{1/N-1} \left(\frac{dV}{dr} \right)^2,$$

gdzie:

$$V = V_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_s} \right)^{N+1} \right]$$

$$N = \frac{1}{n},$$

$$V_{\max} = \frac{1}{N+1} r_s^{N+1} \left[-\frac{1}{2m} \frac{dp}{dz} \right]^N.$$

Drugi składnik prawej strony równania (2.2) reprezentuje wewnętrzne źródło ciepła powstałe w wyniku dysypacji wiskotycznej. Równanie różniczkowe (2.2) rozwiązane zostanie przy następujących warunkach brzegowych:

$$(2.3a) \quad z \leq 0, \quad 0 \leq r \leq r_s, \quad t = t_0(\text{const}),$$

$$(2.3b) \quad z > 0, \quad r = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial r} = 0,$$

$$(2.3c) \quad z > 0, \quad r = r_s, \quad -k \frac{\partial t}{\partial r} = \alpha(t-t').$$

Schemat rozważanego przepływu przedstawiono na rys. 1. Dla uogólnienia dalszych rozważań wprowadzimy następujące wyrażenia bezwymiarowe:

$$(2.4a) \quad Z = \frac{1}{Pe} \cdot \frac{z}{r_s},$$

$$(2.4b) \quad y = 1 - \frac{r}{r_s},$$

$$(2.5) \quad T = \frac{t-t'}{t_0-t'}.$$

Podstawiając do (2.2) wyrażenia (2.4a), (2.4b), (2.5) oraz uwzględniając liczbę Brinkmana

$$(2.6) \quad \text{Br} = (N+1)^{1/N+1} \frac{m \cdot r_s^2}{k \cdot (t_0-t')} \left[\frac{V_{\max}}{r_s} \right]^{1/N+1},$$

otrzymamy

$$(2.7) \quad [1 - (1-y)^{N+1}] \frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{1}{1-y} \frac{\partial}{\partial y} \left[(1-y) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \text{Br}(1-y)^{N+1}.$$

Warunki brzegowe (2.3a), (2.3b) i (2.3c) zapiszemy odpowiednio

$$(2.8a) \quad Z \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad T = 1,$$

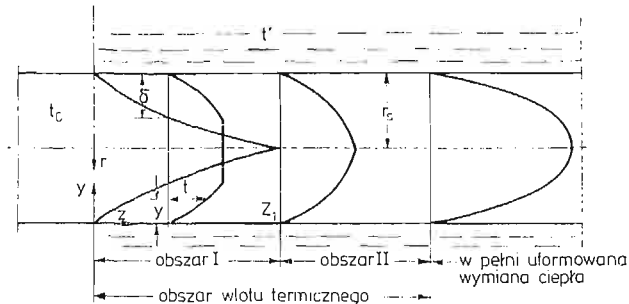
$$(2.8b) \quad Z > 0, \quad y = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0,$$

$$(2.8c) \quad Z > 0, \quad y = 0, \quad -\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{2} \text{Bi}T = 0.$$

Równanie różniczkowe (2.7) wraz z warunkami brzegowymi (2.8a), (2.8b) i (2.8c) rozwiązane zostanie za pomocą metody Kármána—Pohlhausena [6].

Zgodnie z ideą przewodnią zastosowanej metody rozwiązanie równania (2.7) przy warunkach (2.8a), (2.8b) i (2.8c) przeprowadza się w dwóch obszarach oddzielnie, rys. 1.

Pierwszy obszar charakteryzuje się nieufornym procesem wymiany ciepła. W obszarze tym grubość termicznej warstwy przyściennej narasta od zera do jedności.



Rys. 1. Schemat przepływu w obszarze wlotu termicznego.

Drugi obszar charakteryzuje się bardziej uformowanym procesem wymiany ciepła. W tym obszarze grubość termicznej warstwy przyściennej traci interpretację fizyczną.

Wprowadzając do rozważań pojęcie grubości termicznej warstwy przyściennej δ , oprócz warunków (2.8a), (2.8b) i (2.8c) obowiązują w pierwszym obszarze ponadto:

$$(2.9a) \quad y = \delta(Z), \quad T = 1,$$

$$(2.9b) \quad y = \delta(Z), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

Zgodnie z ideą zastosowanej metody funkcję aproksymującą dokładne pole temperatury w pierwszym obszarze przyjmujemy

$$(2.10) \quad \begin{aligned} T &= a_0 + a_1 y + a_2 y^2, & 0 \leq y \leq \delta, \\ T &= 1, & \delta \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

Współczynniki funkcyjne w (2.10) wyznaczamy w oparciu o warunki (2.8c), (2.9a) i (2.9b).

Wynoszą one:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{Bi} \frac{2Bi}{4 + \delta Bi}, & a_1 &= \frac{2Bi}{4 + \delta Bi}, \\ a_2 &= -\frac{1}{2\delta} \frac{2Bi}{4 + \delta Bi}. \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia nieznannej funkcji $\delta = \delta(Z)$ całkujemy równanie (2.7) w granicach od 0 do $\delta(Z)$ po zmiennej y otrzymując:

$$(2.12) \quad \int_0^\delta \left\{ [1 - (1-y)^{N+1}] (1-y) \frac{\partial T}{\partial Z} \right\} dy = (1-y) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta} - \\ - (1-y) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} + \text{Br} \int_0^\delta (1-y)^{N+2} dy.$$

Uwzględniając reguły różniczkowania całki po parametrze (reguła Leibniza) oraz uwzględniając warunek (2.9b) równanie (2.12) przyjmuje postać:

$$(2.13) \quad \frac{d}{dZ} \int_0^\delta [1 - (1-y)^{N+1}] (1-y) T(yZ) dy - \\ - [1 - (1-\delta)^{N+1}] (1-\delta) \frac{d\delta}{dZ} = - \frac{\delta T}{\partial y} \Big|_{y=0} + \text{Br} \int_0^\delta (1-y)^{N+2} dy.$$

Podstawiając (2.10) i (2.11) do wyrażenia (2.13) po wykonaniu całkowania otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne

$$(2.14) \quad 4(N+3)\text{Bi} \frac{1}{A_3} \left[-A_4 \frac{(1-\delta)^{N+4}}{\delta^2} - \frac{1}{N+3} + \right. \\ \left. + \frac{8\delta - 3\delta^2}{12} + \left(-\frac{2\delta^2 - \delta^3}{24} \right) \text{Bi} - \frac{1}{2} A_1 \text{Bi} + A_2 \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{2\delta} A_2 \text{Bi} \right] \frac{d\delta}{dZ} = 1,$$

gdzie,

$$(2.15) \quad A_1 = \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4}, \\ A_2 = \frac{1}{N+3} - \frac{2}{N+4} + \frac{1}{N+5}, \\ A_3 = (4 + \delta \text{Bi}) \{ 2(N+3)\text{Bi} - \text{Br}(4 + \delta \text{Bi}) [1 - (1-\delta)^{N+3}] \}, \\ A_4 = A_2 \left[1 + (N+4)\delta + \frac{\text{Bi}}{2} \delta + \frac{N+3}{4} \text{Bi} \delta^2 \right].$$

Równanie różniczkowe (2.14) całkujemy przy następującym warunku (2.16)

$$(2.16) \quad Z = 0, \quad \delta = 0$$

otrzymując

$$(2.17) \quad Z = \int_0^\delta \frac{4(N+3)\text{Bi}}{A_3} \left[-A_4 \frac{(1-\delta)^{N+4}}{\delta^2} - \frac{1}{N+3} + \right. \\ \left. + \frac{8\delta - 3\delta^2}{12} + \left(\frac{2\delta^2 - \delta^3}{24} \right) \text{Bi} - \frac{1}{2} A_1 \text{Bi} + A_2 \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{2\delta} A_2 \text{Bi} \right] d\delta.$$

Całkę (2.17) można stosunkowo łatwo wyznaczyć w sposób analityczny w przypadku pominięcia efektów dysypacji wiskotycznej to jest gdy $\text{Br} = 0$. I tak posługując się tablicami całek [8] otrzymano po scałkowaniu (2.17) w przypadkach:

a) $Br = 0, N = 1$ (ciecz newtonowska)

$$(2.18) \quad Z(\delta) = \frac{\delta^5}{150} + \left(\frac{1}{120Bi} - \frac{3}{80} \right) \delta^4 + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{15Bi} - \frac{2}{45Bi^2} \right) \delta^3 + \frac{1}{Bi} \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{5Bi} + \frac{4}{15Bi^2} \right) \delta^2 - \frac{1}{Bi^2} \left(\frac{4}{3} + \frac{16}{5Bi} + \frac{32}{15Bi^2} \right) \delta + \frac{1}{Bi^3} \left(\frac{16}{3} + \frac{64}{5Bi} + \frac{128}{15Bi^2} \right) \ln \left(\frac{4 + \delta Bi}{4} \right),$$

b) $Br = 0, N = 2$ (ciecz pseudoplastyczna)

$$(2.19) \quad Z(\delta) = -\frac{\delta^6}{252} + \left(\frac{2}{75} - \frac{2}{525Bi} \right) \delta^5 + \left(\frac{2}{105Bi^2} + \frac{1}{30Bi} - \frac{3}{40} \right) \delta^4 + \left(\frac{1}{12} - \frac{2}{15Bi} - \frac{8}{45Bi^2} - \frac{32}{315Bi^3} \right) \delta^3 + \frac{1}{Bi} \left(\frac{64}{105Bi^3} + \frac{16}{15Bi^2} + \frac{4}{5Bi} + \frac{1}{4} \right) \delta^2 - \frac{1}{Bi^2} \left(\frac{512}{105Bi^3} + \frac{128}{15Bi^2} + \frac{32}{5Bi} + 2 \right) \delta + \frac{1}{Bi^3} \left(\frac{2048}{105Bi^3} + \frac{512}{15Bi^2} + \frac{128}{5Bi} + 8 \right) \ln \left(\frac{4 + \delta Bi}{4} \right).$$

Ze względu na dużą pracochłonność przy analitycznym całkowaniu wyrażenie (2.17) scałkowano również numerycznie metodą Simpsona dla kilku wybranych wartości parametrów Bi , Br i N . Podobnie jak w pierwszym obszarze również w drugim obszarze wymiany ciepła pole temperatury cieczy aproksymujemy wielomianem drugiego stopnia

$$(2.20) \quad T = b_0 + b_1 y + b_2 y^2, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Jak wspomniano wyżej w drugim obszarze wymiany ciepła grubość termicznej warstwy przyściennej traci sens.

Współczynniki funkcyjne b_0 , b_1 , b_2 wyznaczamy w równaniu (2.20) w oparciu o warunki (2.8b) i (2.8c). Ostatecznie wyrażenie (2.20) przyjmie postać

$$(2.21) \quad T = \frac{1}{2} b_1 \left[\frac{4 + Bi}{Bi} - (1 - y)^2 \right].$$

Aby wyznaczyć nieznaną współczynnik b_1 w równaniu (2.21) podstawiamy ostatnie do równania (2.7). Równanie (2.7) całkujemy następnie po zmiennej y w granicach od 0 do 1. Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne

$$(2.22) \quad \frac{db_1}{dZ} + \frac{2}{\frac{1}{2} \frac{4 + Bi}{Bi} - \frac{1}{4} - \frac{1}{N + 3} - \frac{1}{Bi} \frac{4 + Bi}{Bi} - \frac{1}{N + 5}} \cdot b_1 = \frac{2 Br}{N + 3}.$$

Równanie (2.22) można łatwo całkować analitycznie w ogólnej postaci, a więc dla dowolnych wartości parametrów Bi , Br i N .

Po scałkowaniu (2.22) otrzymuje się

$$(2.23) \quad b_1(Z) = \frac{2 Br}{M(N + 3)} + C \cdot \exp(-MZ)$$

gdzie:

$$M = \frac{2}{\frac{1}{2} \frac{4+Bi}{Bi} - \frac{1}{4} - \frac{1}{N+3} \frac{4+Bi}{Bi} + \frac{1}{N+5}}$$

Stałą całkowania w równaniu (2.23) wyznacza się z warunku spójności rozwiązań w pierwszym i drugim obszarze.

Warunek spójności (zszycia) ma w rozważanym przypadku postać

$$(2.24) \quad Z = Z_1, \quad b_1 = \frac{2Bi}{4+Bi}.$$

W (2.24) Z_1 oznacza wartość bezwymiarowej współrzędnej Z w rozwiązaniu dla pierwszego obszaru, dla której $\delta(Z_1) = 1$.

Warunek (2.24) wynika z porównania temperatury cieczy na końcu pierwszego obszaru i na początku drugiego.

Uwzględniając (2.24) w wyrażeniu (2.23) stała całkowania wyniesie

$$(2.25) \quad C = \left[\frac{2Bi}{4+Bi} - \frac{2Br}{M(N+3)} \right] \exp(MZ_1).$$

Podstawiając (2.25) do (2.23) otrzymamy zależność określającą współczynnik funkcyjny $b_1(Z)$. W dalszym ciągu odstawiamy wymieniony współczynnik $b_1(Z)$ do wyrażenia (2.21) otrzymując w rezultacie pole temperatury cieczy w drugim obszarze. Ma ono postać

$$(2.26) \quad T(y, Z) = \left[\frac{4+Bi}{Bi} - (1-y)^2 \right] \left[\frac{Bi}{4+Bi} - \frac{Br}{M(N+3)} \right] \cdot \exp[M(Z_1 - Z)] + \frac{Br}{M(N+3)} \left[\frac{4+Bi}{Bi} - (1-y)^2 \right].$$

Ostatecznie można powiedzieć, że pole temperatury cieczy w pierwszym i drugim obszarze wymiany ciepła opisują wyrażenia (2.10) i (2.26) odpowiednio. Dysponując powyższymi rozwiązaniami wyznaczamy liczbę Nusselta charakteryzującą proces wymiany ciepła.

Odnosząc współczynnik przejmowania ciepła α do różnicy temperatur pomiędzy temperaturą średnią cieczy i temperaturą powierzchni wewnętrznej rury liczbę Nusselta wyznaczamy z zależności

$$(2.27) \quad Nu = \frac{2\alpha \cdot r_s}{k} = \frac{2}{T_m} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}$$

W wyrażeniu (2.27) T_m jest temperaturą średnią cieczy, którą należy wyznaczyć z zależności

$$(2.28) \quad T_m = \frac{\int_0^1 VT(1-y)dy}{\int_0^1 V(1-y)dy}.$$

Dla pierwszego obszaru wymiany ciepła temperatura średnia cieczy wyznaczona z (2.28) wynosi

$$(2.29) \quad T_m = 1 - \frac{2(N+3)}{N+1} \frac{\delta \text{Bi}}{4 + \delta \text{Bi}} \left[\frac{(1-\delta)^{N+5}}{\delta^2} A_2 - \frac{A_2}{\delta^2} + \frac{2A_1}{\delta^2} - \frac{1}{N+3} + \frac{4\delta - \delta^2}{12} \right]$$

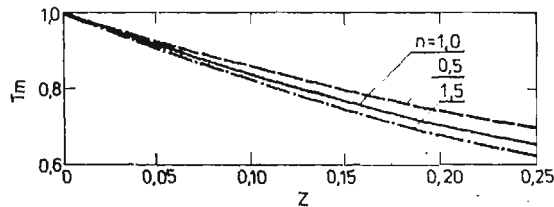
gdzie A_1 i A_2 określone są zależnościami (2.15).

Odpowiednia temperatura średnia w drugim obszarze wymiany ciepła ma postać

$$(2.30) \quad T_m = \left\{ \frac{\text{Br}}{M(N+3)} + \left[\frac{\text{Bi}}{4 + \text{Bi}} - \frac{\text{Br}}{M(N+3)} \right] \cdot \exp[M(Z_1 - Z)] \right\} \cdot \left[\frac{4 + \text{Bi}}{\text{Bi}} - \frac{2(N+3)}{N+1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{N+5} \right) \right]$$

W celu zobrazowania przeprowadzonych rozważań wykonano przykłady liczbowe. Uzyskane wyniki przedstawiono w sposób graficzny.

Wartości parametrów Bi , Br i N założono identyczne w obu obszarach wymiany ciepła. Na podstawie zależności (2.29) i (2.30) sporządzono zależność graficzną zmian temperatury średniej cieczy wzdłuż osi rury. Zależność powyższą przy pominięciu efektów dysypacji wiskotycznej przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Średnia temperatura cieczy wzdłuż osi przepływu dla: $\text{Bi} = 1$, $\text{Br} = 0$.

W celu dokonania analizy porównawczej przytoczono w tabelicy 2.1 rozwiązanie ściśle otrzymane w [7] dla następujących wartości parametrów: $\text{Bi} = 2$, $\text{Br} = 0$, $N = 1$ (ciecz newtonowska, brak faktów dysypacji wiskotycznej).

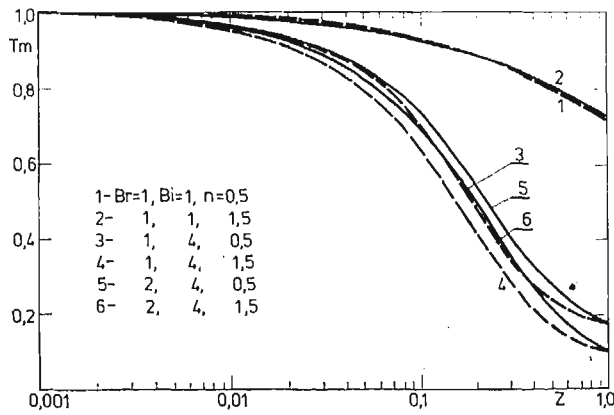
Wyniki liczbowe zamieszczone w tabelicy 2.1 pozwalają stwierdzić, że rozwiązanie przybliżone otrzymane w pracy aproksymuje wystarczająco dokładnie w pierwszym i drugim obszarze wymiany ciepła odpowiednie rozwiązanie ściśle.

W celu przedstawienia efektów dysypacji wiskotycznej na rozkład temperatury średniej cieczy wzdłuż osi przepływu wykonano rys. 3. Na rysunku tym przedstawiono krzywe dla następujących wartości parametrów $\text{Bi} = 1, 4$; $\text{Br} = 1, 2$; $N = 2, 2/3$.

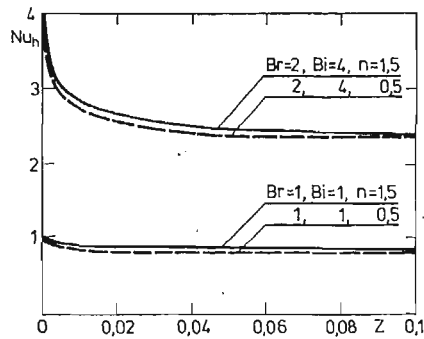
Wpływ parametrów Bi , Br i N na zmiany liczby Nusselta wzdłuż osi przepływu cieczy przedstawiono na rysunku 4.

Tablica 1. Porównanie wyników otrzymanych w pracy z wynikami rozwiązania ścisłego

Lp.	Bi = 1, Br = 0, N = 1		
	Z	T [°] (roz. ścisłe)	T
1	0,00008	0,99986	0,99985
2	0,00183	0,99666	0,99653
3	0,00732	0,98690	0,98657
4	0,01721	0,97003	0,96940
5	0,03106	0,94748	0,94634
6	0,03911	0,93479	0,93333
7	0,05500	0,91049	0,90825
8	0,07000	0,88833	0,88520
9	0,10000	0,84589	0,84082



Rys. 3. Oddziaływanie dysypacji wiskotycznej na zmiany średniej temperatury cieczy wzdłuż osi przepływu.



Rys. 4. Przebieg zmian liczby Nusselta wzdłuż kierunku przepływu.

3. Uwagi końcowe

Zastosowanie metody całkowej Kármána-Pohlhausena do rozwiązania postawionego w pracy problemu umożliwia uzyskanie wyników charakteryzujących się stosunkowo wysokim stopniem aproksymacji rozwiązania ścisłego w obu rozważanych obszarach.

Zakładając różne wartości parametrów Bi , Br i N określono ich wpływ na pole temperatury cieczy. Stwierdzono, że w przypadku braku wewnętrznych źródeł ciepła ($Br = 0$) przy tej samej wartości liczby Biota temperatura średnia cieczy pseudoplastycznych ($n = 0,5$) jest wyższa od temperatury średniej cieczy newtonowskich ($n = 1$) i cieczy dilatantnych ($n = 1,5$).

Przeanalizowano również oddziaływanie dysypacji wiskotycznej na pole temperatury cieczy stwierdzając jej istotny wpływ zwłaszcza na zmiany temperatury średniej. Z rysunku 3 wynika, że efekt dysypacji wiskotycznej wyraźnie zmniejsza oddziaływanie zmian współczynnika płynięcia n na przebieg temperatury średniej cieczy zwłaszcza w obszarze $Z \approx 1$.

Na rysunku 4 łatwo zauważyć, że wartość liczby Nusselta zależy szczególnie od zmian liczby Biota.

Warto zaznaczyć, że zależność (2.18) i (2.19) w przypadku założenia $Bi \rightarrow \infty$ mogą służyć do określenia pola temperatury cieczy przepływającej w rurze kołowej o stałej temperaturze ścianki.

Literatura cytowana w tekście

1. E. M. MITWALLY, *Heat Transfer in Plane Couette Flow with Additional Pressure Gradient Including Entrance Effects for a Non-Newtonian Fluid*, AICHE J., 6, 24, 1978.
2. Y. P. SHIH, J. D. TSOU, *Extended Leveque Solutions for Heat Transfer to Power Law Fluids in Laminar Flow in a Pipe*, Chem. Eng. J., 15, 1978.
3. S. M. RICHARDSON, *Extended Leveque Solutions for Flows of Power Law Fluids in Pipes and Channels*, Int. J. Heat Mass Transfer, 10, 22, 1979.
4. R. MAHALINGAM, L. O. TILTON, J. M. COULSON, *Heat Transfer in Laminar Flow of Non-Newtonian Fluids*, Chem. Eng. Sci., 30, 1975.
5. C. E. BASSET, J. R. WELTZ, *Non-Newtonian Heat Transfer in the Thermal Entrance Region of Uniformly Heated Horizontal Pipes*, AICHE J., 21, 1975.
6. A. K. MOHANTY, S. B. ASTHANA, *Laminar flow in the entrance region of a smooth pipe*, J. Fluid Mech., 3, 90, 1979.
7. J. SCHENK, Y. M. DUMORE, *Heat transfer in Laminar flow through cylindrical tubes*, Appl. Sci. Res., 1, A4 1953.
8. J. M. RYŻYK, J. S. GRADSZTEIN, *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*, PWN, W-wa, 1964.

Р е з ю м е

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ, ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ НА ТЕРМИЧЕСКОМ ПОЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ТРУБЫ.

Для исследования влияния теплового граничного условия третьего рода на перенос тепла при вынужденной ламинарной конвекции в неньютоновской жидкости на начальном тепловом участке круглой трубы решается уравнение энергии интегральным методом. Неньютоновское поведение среды охарактеризовано степенной моделью. Рассматриваются однородные и полностью

развитые профили скорости. Свойства жидкости считаются постоянными. Учитывается эффект выделения тепла за счёт вязкой диссипации. Сделан вывод, что число Био, число Бринкмана и коэффициент „ n ” могут оказывать влияние на локальное число Нуссельта. Сравнение полученных результатов с имеющимися решениями для ньютоновских жидкостей показало хорошее соответствие между ними.

S u m m a r y

LAMINAR FLOW OF A NON-NEWTONIAN FLUID IN THE THERMAL ENTRANCE REGION OF A SMOOTH PIPE

To investigate the influence of the temperature boundary condition of the third kind on the laminar heat transfer of a pipe, the energy equation is solved by applying the momentum integral method. The power-law model characterises the non-Newtonian behavior. Uniform and fully developed velocity profiles are considered. Constant fluid properties are assumed. The effect of heat generation by viscous dissipation is included. It is concluded that there can be a significant influence of Biot number, Brinkman number and flow index non mean temperature and local Nusselt number. The results are compared with the available solutions for Newtonian fluid an excellent agreement has been found.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 kwietnia 1980 roku.

BIULETYN INFORMACYJNY

KURS SZKOLENIOWY NT. „ZASTOSOWANIE METOD TOPOLOGII I ANALIZY FUNKCJONALNEJ W MECHANICE TEORETYCZNEJ”.

W dniach 20 - 30 października 1980 roku odbył się w Jabłonie kurs szkoleniowy na temat wybranych metod topologii i analizy funkcjonalnej w mechanice, zorganizowany przez Sekcję Mechaniki Teoretycznej, Komitetu Mechaniki PAN.

Podstawy dynamiki topologicznej zostały przedstawione przez prof. Romana Gutowskiego z Politechniki Warszawskiej. Uwagę w tym wykładzie skupiono na podstawowych pojęciach i twierdzeniach dotyczących układu dynamicznego, ruchów i trajektorii, zbiorów niezmienniczych, punktów spoczynku, punktów i zbiorów granicznych, stateczności w sensie Lagrange'a, ruchu po torusie i jego stateczności w sensie Poissona, punktów błędzących i niebłędzących, zbioru ruchów centralnych, zbiorów minimalnych ruchów rekurencyjnych i prawie rekurencyjnych oraz ich związku ze zbiorami minimalnymi.

Elementy analizy wypukłej przedstawił prof. Adam Piskorek z Uniwersytetu Warszawskiego. W tym wykładzie przedstawiono pojęcia podstawowe analizy wypukłej i jej twierdzeń oraz ukazano ich zastosowania. W szczególności, poza preliminariami funkcjonalno-analitycznymi, rozważania dotyczyły dwoistości i słabej topologii, funkcji wypukłych, ciągłych i półciągłych dolnie, punktowych kresów górnych ciągłych funkcji afinicznych, gamma regularyzacji, funkcji sprzężonych i dwusprzężonych, subbróźniczkalności oraz minimizacji funkcji wypukłych i nierówności wariacyjnych.

Doc. Jerzy Kurlandzki z Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN przedstawił konstrukcję nowego formalizmu wariacyjnego w przestrzeni transformacji Fouriera. Zwrócono uwagę na to, że podstawowe pojęcia tego formalizmu takie jak równania Eulera — Lagrange'a, funkcjonal działania, funkcje Lagrange'a oraz związane z nimi zasady zachowania mają formę analogiczną do formalizmu klasycznego. Pokazano na związku tego formalizmu oraz różnice z formalizmem klasycznym oraz na możliwości zastosowania jego w fizyce i technice.

Wprowadzenie do równań różniczkowych w przestrzeni Banacha było celem wykładu prof. Jerzego Muszyńskiego z Politechniki Warszawskiej. Pokazano, że wiele znanych wyników dla równań w R^n przenosi się na równania abstrakcyjne przy założeniu, że ich prawe strony spełniają warunki Lipschitza. Przedstawiono klasyczną teorię istnienia i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego w postaci twierdzeń typu Picarda-Lindelöfa. Podano przykład, gdy twierdzenie typu Peano nie ma miejsca dla równań w przestrzeni Banacha. W przypadku równań liniowych podano twierdzenia typu Lapunowa o stabilności.

Dr Katarzyna Litewska przedstawiła metodę sprowadzania zagadnień mieszanych dla cząstkowych równań ewolucyjnych do odpowiednich zagadnień początkowych dla równań operatorowych, wykorzystując teorię silnie ciągłych półgrup. Zastosowanie tej metody pokazano na przykładzie zagadnienia początkowego dla struny nieskończonej.

Organizatorem i Kierownikiem kursu szkoleniowego był Prof. R. Gutowski, Przewodniczący Sekcji Mechaniki Teoretycznej Komitetu Mechaniki PAN.

Roman Gutowski

SPRAWOZDANIE Z KONFERENCJI

„Problemy losowe w mechanice konstrukcji” — Gdańsk, 14, 15 listopada 1980 r.

Organizatorami konferencji byli:

Instytut Konstrukcji Budowlanych Politechniki Gdańskiej, — Sekcja Mechaniki Konstrukcji Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, — Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Oddział w Gdańsku.

Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego był prof. Eugeniusz Bielewicz.

W konferencji uczestniczyły 62 osoby. W czasie obrad wygłoszono 23 referaty:

1. Andrzej Baranowski, Analiza drgań losowych układów dynamicznych ciągle-dyskretnych,
2. Eugeniusz Bielewicz, Krzysztof Dobrowolski, Mirosław Skowronek, Ogólny program na EMC dla losowych zagadnień w powłokach toroidalnych,
3. Eugeniusz Bielewicz, Mirosław Skowronek, Analiza wpływu losowych odchyłeń geometrii dla pewnego typu konstrukcji powłokowej,
4. Kazimierz Biernatowski, Niezawodność współdziałania konstrukcji z podłożem gruntowym,
5. Zdzisław Bodarski, Hartmut Pasternak, Analiza i prognoza jakości toru podsuwnicowego za pomocą łańcuchów Markowa,
6. Czesław Branicki, Statyka i dynamika siatek wiszących z losowymi niedokładnościami geometrii,
7. Czesław Branicki, Paweł Kłosowski, Analiza numeryczna problemu statycznego pewnego typu siatki wiszącej z imperfekcjami geometrycznymi,
8. Aleksander Bzowy, Zastosowanie metody analizy przedziałowej w zagadnieniu płyty na sprężystym podłożu,
9. Tadeusz Chmielewski, Jerzy Chrobak, Analiza stochastyczna drgań liniowych układów dyskretnych,
10. Wacław Dobosz, Budowa modelu statycznego estymującego przemieszczenie na zaporze,
11. Krzysztof Doliński, Dynamika sztywno-plastycznej powłoki cylindrycznej obciążonej stochastycznym ciśnieniem wewnętrznym,
12. Ryszard Ganowicz, Pełzanie prostych konstrukcji wykonanych z materiałów o losowych własnościach,
13. Władysław Grzesiak, Zagadnienie stochastycznie nieliniowych drgań konstrukcji wspornikowej,
14. Wojciech Karmowski, Aproksymacja funkcji określonej w obszarze płaskim zbiorem wartości eksperymentalnych w dowolnie rozmieszczonych punktach,
15. Wojciech Karmowski, Janusz Orkisz, Wygładzanie krzywych eksperymentalnych uwzględniające fizyczną funkcję rozrzutu danych,
16. Władysław Knabe, Wpływ losowości podatności podpór na maksymalny moment zginający w belce ciąglej na trzech podporach,
17. Janusz Murzewski, Ewa Irzyk, Projektowanie belek wieloprzęsłowych z uwzględnieniem niezawodności systemu.
18. Janusz Murzewski, Andrzej Machowski, Wytrzymałość plastyczna stochastycznie jednorodnych prętów rozciąganych,
19. Jerzy Onysyk, Zastosowanie metody Monte-Carlo do oceny stanu naprężenia w elementach betonowych z uwzględnieniem zjawisk reologicznych,
20. Aleksander Panek, Estymacja parametrów układów statycznych — filtr o skończonej pamięci,
21. Ryszard Sygulski, Badania modelowe w tunelu aerodynamicznym drgań przekrycia membranowego,
22. Béla Szentiványi, Static analysis of gridworks on elastic supports in case of stochastically linear and nonlinear problems,
23. Zbigniew Kowal, Wacław Łaban, Wojciech Seidel, Teoretyczna aproksymacja empirycznych parametrów losowego wyciężenia prętów wybranych modeli struktur przestrzennych.

Referaty od 1 do 22 zostały opublikowane na prawach rękopisu w materiałach konferencji i wcześniej rozesłane do uczestników konferencji.

Odbyło się również spotkanie dyskusyjne pt. „Czy uwzględnienie losowości prowadzi do istotnego postępu w teorii konstrukcji?”. Wprowadzenia do dyskusji dokonał — oraz spotkanie prowadził — prof. Piotr Wilde.

Obrady i spotkanie dyskusyjne miały żywy przebieg, dając możliwość do wymiany poglądów i stanowisk różnych zespołów krajowych zajmujących się zagadnieniami losowymi w mechanice.

Eugeniusz Bielewicz

Zawiadomienie o konferencjach.

1. Symposium poświęcone pamięci profesora Wacława Olszaka organizuje CISM, w czerwcu 1983. Tytuł symposium „Plasticity today”. Streszczenia referatów (o objętości nie mniej niż 500 słów) należy przesyłać do końca grudnia 1982 na adres CISM Symposium Plasticity today, Piazza Garibaldi 18, 33100 Udine, Italy

2. 1983 Tokyo International Gas Turbine Congress
23—28 października 1983.

Adres: Sansei International Inc.

4-1-21, Toranomon, Minato-ku, Tokyo 105, Japan

3. Third international symposium on flow visualisation

6—9 września 1983

Ann Arbor, Michigan 48109 (Prof. Wan-Jei Yang)

4. Doroczna konferencja GAMM odbędzie się w dniach 28 do 31 marca w Hamburgu

5. The third international conference on numerical methods in thermal problems

The University of Washington, Seattle, USA

2—5 sierpień 1983

6. International conference on numerical methods in laminar and turbulent flow

8—11 sierpień 1983

The University of Washington, Seattle, USA

7. Fourth International Conference on Mathematical Modeling

15, 17 sierpień 1983

Zurych, Szwajcaria

Adres do korespondencji: Prof. X.J.R. Avula, School of Engineering, University of Missouri-Rolla, Missouri 65401 USA

Wyniki konkursu.

Oddział PTMETS w Częstochowie zorganizował w 1981 r. ogólnopolski konkurs na najlepszą pracę doświadczalną z mechaniki. Wpłynęły trzy prace.

Sąd konkursowy przyznał:

III nagrodę w wysokości 6000 zł mgr inż. Piotrowi Doerfferowi (Gdańsk) za pracę „Badanie wpływu kształtu krawędzi spływu profili naddźwiękowych na straty w falach uderzeniowych”, wyróżnienie w wysokości 4000 zł. dr inż. Jerzemu Wąsowskiemu (Warszawa) za pracę „Optyczna metoda wyznaczania krzywizny płyt w czasie rzeczywistym”

W następnym Zeszycie ukażą się prace:

Cz. WOŹNIAK, Analiza niestandardowa w mechanice newtonowskiej punktu materialnego (I).

Нестандартный анализ в ньютоновской механике материальной точки (I).

Nonstandard analysis in Newtonian Mechanics of mass point (I).

R. GUTOWSKI, Wrażliwość rozwiązań równania liniowych drgań membrany na zmiany współczynników równania.

Чувствительность решений уравнения линейных колебаний мембраны относительно изменений его коэффициентов.

Sensivity of solutions of linear equation for a vibrating membrane to variation of equation coefficients.

- K. CIEŚLIŃSKI, O pewnym matematycznym modelu procesu kolmatacji wymiarowej w szczelinach i jego zastosowaniu.
 Математическая модель процесса кольматации на щелях и его применение.
 On a mathematical model of calmatage process in cracks and its application.
- S. MATYSIAK, Z. OLESIAK, O pewnych własnościach naprężeń w kompozytach lamelkowych.
 О некоторых свойствах напряжений в композиционных материалах с лентообразными волокнами.
 Properties of stresses in composites with ribbon-like inclusions.
- C. KOMORZYŃSKI, J. STURNICKI, Wpływ podatliwości pierścieni wzmacniających na pracę kompensatorów mieszkowych.
 Влияние податливости укрепляющих колец на работу компенсаторов сильфонного типа
 Influence of the rigidity of reinforcing rings on the work of expansion joints.
- S. KASPRZYK, R. ZIERNICKI, *Drgania giętne belki wywołane poruszającym się układem dyskretnym.*
 Поперечные колебания балки вынужденные движущейся механической системой из сосредоточенными параметрами.
 Transverse vibrations of a beam forced by discrete material system moving on it.
- M. NOWAK, Analizy opis starzenia się poliamidu 6 niszczonego zmęczeniowo.
 Аналитическое описание старения усталостно разрушаемого полиамида 6.
 Analitical description of aging of polyamide 6 subjected to fatigue failure.
- K. VARSAMOV i inni, Wyznaczanie prędkości przepływu wywołanej wirowym stożkiem.
 Вычисление скорости порожденной вихревым конусом.
 On the calculation of the velocity induced by a vortex-source.
- B. BORKOWSKA-PAWLAK, W. KORDYLEWSKI, Warunek utraty stabilności konwekcji swobodnej w warstwie porowatej.
 Условие потери стабильности естественной конвекции в пористом слое.
 Loss of stability condition for free convection in a porous layer.
- St. DROBIAK, Lepkość wirowa w osiowo-symetrycznych strugach zawirowanych.
 Турбулентная вязкость осе — симметричной закрученной струи.
 Eddy viscosity in axially symmetric swirling jets.

- H. WOJCIENOWSKI, Wyznaczenie współczynników uderzenia w układzie o dwu stopniach swobody z nieliniowością typu Duffinga i Hertza. 315
 Определение динамических коэффициентов в системе с двумя степенями свободы с нелинейностью типа Дуффинга и Герца
 The determination of dynamic factors in a system with two degrees of freedom and Duffing-Hertz nonlinearity.
- J. KOŁENDA, O wykorzystaniu funkcji własnych do opisu drgań wymuszonych podatnie podpartych asymetrycznych wałów. 331
 О использовании собственных форм для описания вынужденных колебаний асимметрических валов на податливых фундаментах.
 Use of modes for description of forced vibrations of flexible supported asymmetrical shafts.
- K. RUP, Nieizotermiczny, laminarny przepływ nienewtonowskiej cieczy w krótkiej rurze. 337
 Неизотермическое ламинарное течение неньютоновской жидкости на термическом начальном участке трубы.
 Laminar flow of a non-newtonian fluid in the thermal entrance region of a smooth pipe.
- Biuletyn Informacyjny 349

Cena zł 30.—

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
półrocznie zł 60.—
rocznie zł 120.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku bieżącego i na cały rok następny,
- do 10 czerwca na II półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki społecznej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW — w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmują RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy. Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona — Ruch in Bank Handlowy S. A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17 pokój 1724)

Mcch. Teor. T. 19, z. 2, s. 165—352, Warszawa 1981, Indeks 36523

86