

47720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

PL ISSN 0079-3701

MECHANIKA  
TEORETYCZNA  
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 18 • ZESZYT 1

WARSZAWA 1980

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

## SPIS TREŚCI

M. MALATYŃSKI, J. KLEPACZKO, Szacowanie efektów bezwładnościowych podczas szybkiej osiowej deformacji próbek walcowych Оценка инерциальных эффектов при быстрой деформации цилиндрического образца Estimation of inertial effects during the fast axial deformation of cylindrical samples	3
J. ОТТЕ, Przegląd krytyczny metod analizy osiowo-symetrycznego przepływu przez układy łopatkowe maszyn wirnikowych Критический обзор методов анализа осесимметрического течения через системы лопаток турбомашин Critical review of analysis methods of axially-symmetric flow through blades systems of turbo-machinery	25
A. ŚNUDZIKIEWICZ, J. KISŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI, Próba modyfikacji liniowego modelu dyskretnego o wielu stopniach swobody na przykładzie pojazdu szynowego Попытка модификации линейной дискретной модели о многих степенях свободы на примере рельсового поезда An attempt of the modification of a linear discrete model of multi degrees of freedom by a rail vehicle	51
Z. NOWAK, K. RUP, Zastosowanie metody uśredniania poprawek funkcjonalnych w obrazie transformacji Laplace'a Применение метода осреднения функциональных поправок в области преобразования Лапласа Application of Laplace transform to the method of averaging of functional corrections	71
K. ŻMIJEWSKI, Zginanie sprężystej powłoki w kształcie paraboloidy eliptycznej podpartej na żebrach Изгиб упругой оболочки в виде эллиптического параболоида опертого на ребрах Bending of an elastic shell in the form of an elliptic paraboloid supported on ribs	87
T. KUŹMIŚCIEWICZ, J. MARYŃIAK, Wpływ zjawiska odwijania przewodu kierowania i niektórych parametrów geometrycznych rakiety na jej stateczność dynamiczną Влияние разматывания троса управления и некоторых геометрических параметров ракеты на динамическую устойчивость Influence of cable's uncoiling and certain geometrical parameters of rocket on its dynamical stability	107 125

BIULETYN INFORMACYJNY

71-720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 1 8 · Z E S Z Y T 1

W A R S Z A W A 1 9 8 0

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

## КОМИТЕТ РЕДАКЦЫ

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY,  
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,  
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,  
JÓZEF WIĘCKOWSKI,  
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR NACZELNY,  
JACEK STUPNICKI — REDAKTOR,  
ANDRZEJ SZANIAWSKI — REDAKTOR,  
CZESŁAW WOŹNIAK — REDAKTOR,  
MONIKA WĄGROWSKA — REDAKTOR,  
ELŻBIETA OLSZEWSKA — SEKRETARZ

## РЕДАКЦЯ

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2268

---

Nakład 680, Ark. wydawniczych 12,75. Ark. drukarskich 9,25. Papier druk sat. IV kl. 70 g, 70 × 100.  
Oddano do składania I.XII.1979 r. Druk ukończono w maju 1980 r. Zam. 1481/12/79 Cena zł 30.—

---

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

## SZACOWANIE EFEKTÓW BEZWŁADNOŚCIOWYCH PODCZAS SZYBKIEJ OSIOWEJ DEFORMACJI PRÓBEK WALCOWYCH

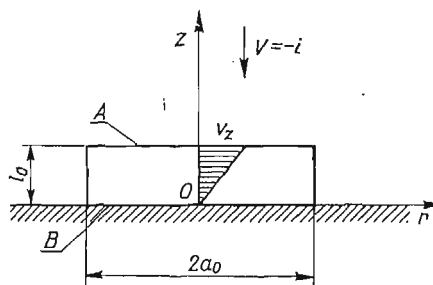
MAREK MALATYŃSKI, JANUSZ KLEPACZKO (WARSZAWA)

### 1. Uwagi wstępne

Spośród kilku metod doświadczalnych pomiaru charakterystyk umocnienia metali przy dużych prędkościach odkształcenia, istotne miejsce zajmują: zaproponowana przez KOLSKY'EGO [12] technika zmodyfikowanego pręta Hopkinsona oraz technika walec-pręt, której autorem jest HAUSER [7]. W obydwu wymienionych metodach doświadczalnych procesowi osiowego ściskania z dużymi prędkościami poddaje się krótkie próbki walcowe. Analiza falowa układu dwóch prętów, pomiędzy którymi znajduje się próbka, obciążonych gwałtownie w kierunku osiowym, umożliwia na podstawie kształtu fal zarejestrowanych przy pomocy odpowiednich czujników, znalezienie dynamicznej krzywej umocnienia  $\sigma(\epsilon)$  badanego materiału. Dokładny opis tej metody znajduje się np. w pracy KLEPACZKO [11].

Ponieważ proces ściskania próbki odbywa się z dużą prędkością w próbce występują efekty bezwładnościowe w kierunku osiowym i promieniowym. Obydwa te czynniki mogą w pewnych warunkach zakłócić prawidłowy pomiar dynamicznej krzywej umocnienia i zniekształcić interpretację wyników doświadczalnych.

Należy ponadto zaznaczyć że w zależności od wyboru powierzchni czołowej próbki na której określona jest doświadczalnie wartość naprężenia osiowego, przy założonym w obydwu przypadkach jednakowym polu prędkości, naprężenie to może być różne. Jest to typowe zjawisko dla procesów dynamicznych z uwzględnieniem bezwładności. Rysunek 1



Rys. 1. Pole prędkości dla ściskanego walca

przedstawia pole prędkości zakładane najczęściej w pracach teoretycznych. Możliwy jest zatem pomiar kształtu fal w prętach pomiarowych, z których obliczamy wartość naprężenia osiowego, na czole A próbki (czoło czynne) lub na czole B (czoło bierne). Możliwe jest

również określenie wartości średnicy naprężenia. Ponieważ wartości naprężeń osiowych oblicza się bezpośrednio z pomiaru oscylogramów, nazwano je dalej naprężeniami mierzo-nymi. W dalszej części pracy przyjęto następujące oznaczenia odpowiednio odniesionych naprężeń osiowych, tj. wzdłuż osi  $z$ :

- a) naprężenie na czole A –  $\sigma_M^A$
- b) naprężenie na czole B –  $\sigma_M^B$
- c) naprężenie średnie –  $\sigma_M = \frac{1}{2} [\sigma_M^A + \sigma_M^B]$

Zagadnienie to jest istotne, gdyż różni autorzy w analizie efektów bezwładności odnoszą otrzymane zależności opisujące naprężenie po korekcji do różnych powierzchni czołowych próbki, co znacznie utrudnia dyskusję i porównania. Dlatego konieczne staje się systematyczne przeanalizowanie czynników wpływających na wielkość efektów inercyjnych podczas ściskania próbek walcowych, ze szczególnym uwzględnieniem charakterystycznych warunków doświadczenia, które wynikają z przebiegu procesu falowego w prętach.

Głównym celem pracy jest analiza efektów bezwładnościowych, podanie zależności na poprawki bezwładnościowe oraz wyjaśnienie, w jakich warunkach doświadczalnych należy je stosować.

Rozwiązania zadania wolnego, a także szybkiego ściskania krótkiego walca umieszczonego między równoległymi, sztywnymi płaszczyznami podawane były przez różnych autorów. Analiza statyczna problemu ściskania walca, którego rozwiązanie przedstawili SIEBEL [16] oraz HILL [8] jest słuszna jedynie dla względnie krótkich próbek dla których deformacja wzdłuż długości próbki może być założona jako jednorodna, a jej przebieg jako izotermiczny. Przybliżone rozwiązanie zadania ściskania lepkosprężystego walca pomiędzy szorstkimi płytami podał CARLSON [2].

Założenie przyjmowane w opisie procesu powolnego ściskania nie są spełnione przy dużych prędkościach odkształcenia. Analizę szybkiego ściskania z uwzględnieniem efektów bezwładnościowych przeprowadza się zazwyczaj na gruncie teorii plastyczności lub też przy wykorzystaniu rozważań energetycznych. Sposobem pierwszym posłużył się LIPPMANN [15], który rozwiązał problem brzegowy szybkiego ściskania walca przy założeniu płaskiego, a następnie osiowosymetrycznego stanu odkształcenia z kinematyką ruchu materiału uwzględniającą wpływ promieniowy. HADDOW [6] rozwinął to zagadnienie i podał rozwiązanie dla szybkiego ściskania walca z modelem materiału Bingham'a wraz z uwzględnieniem tarcia na powierzchniach styku czoł walca ze stemplami. Przybliżoną analizę zachowania się krótkiego walca ściskanego dynamicznie podał w swej monografii JOHNSON [9]. Zakładając płaski stan odkształcenia i proces osiowosymetryczny określił on składową promieniową naprężenia, a później wartość naprężeń osiowych z dodatkową składową wynikającą z bezwładności. Podobne rozwiązanie podali w swych pracach KLEPACZKO [10] oraz DHARAN i HAUSER [4].

Bilans energetyczny próbki ściskanej dynamicznie wykorzystali KOLSKY [12], DAVIES i HUNTER [3] oraz SAMANTA [17]. Pierwszy z autorów pominął z założenia składową bezwładności osiowej, Davies i Hunter uwzględnili natomiast równoczesny wpływ bezwładności promieniowej i osiowej, Samanta wziął również pod uwagę składową konwekcyjną energii kinetycznej, związanej z kwadratem prędkości odkształcenia.

## 2. Stosowane poprawki bezwładnościowe w ściskanym walcu

KOLSKY [12] podał wyrażenie poprawkowe, w którym uwzględniono wpływ bezwładności promieniowej na wielkość mierzonych naprężeń osiowych w cienkiej ściskanej próbce. Wyrażenie to uzyskano z bilansu energii zakładając, że energia kinetyczna ruchu promieniowego materiału próbki powoduje nadwyżkę naprężenia w porównaniu z naprężeniem, jakie wystąpiłoby w stanie jednoosiowym przy równoczesnym zachowaniu jednakowego skrócenia próbki. Zależność Kolsky'ego przedstawia się w postaci:

$$(2.1) \quad \sigma_M - \sigma_S = \frac{1}{2} \nu_s a^2 \varrho_s \ddot{\epsilon},$$

gdzie:  $\sigma_M$  — jest średnim naprężeniem osiowym,  $\sigma_S$  jest naprężeniem osiowym potrzebnym do uzyskania takiego samego odkształcenia, jednak w warunkach jednowymiarowego stanu naprężenia,  $\nu_s$  — jest współczynnikiem Poissona,  $\varrho_s$  jest gęstością materiału próbki,  $a$  oznacza promień próbki,  $\ddot{\epsilon}$  jest przyspieszeniem odkształcenia.

Stosowanie tej poprawki dawało w doświadczeniach z użyciem zmodyfikowanego pręta Hopkinsona wyniki różniące się zaledwie o kilka procent w stosunku do mierzonych wartości naprężenia plastycznego płynięcia i według autora było istotne wtedy, gdy podczas procesu deformacji próbki występował gwałtowny wzrost prędkości odkształcenia. Kolsky używał w swych badaniach próbek bardzo cienkich, zapewniających równowagę naprężeń na obydwu czołach. Próbki te miały smukłość początkową  $s_0 = 0,05$ , gdzie  $s_0 = \frac{l_0}{d_0}$ ,  $l_0$  i  $d_0$  są odpowiednio początkową długością i początkową średnicą próbki.

DAVIES i HUNTER [3] podali rozwiniętą postać poprawki bezwładnościowej. Wymienieni autorzy przeprowadzili bilans energetyczny próbki ściskanej dynamicznie przez porównanie energii kinetycznej ruchu materiału próbki i energii deformacji z pracą sił zewnętrznych na przemieszczeniach w kierunku promieniowym i osiowym otrzymując następujące wyrażenie poprawkowe:

$$(2.2) \quad \sigma_M^B - \sigma_S = - \varrho_s \left( \frac{l^2}{6} - \frac{\nu_s^2 a^2}{2} \right) \ddot{\epsilon},$$

Pierwszy składnik ze wzoru (2.2) określa wartość bezwładności osiowej, drugi — bezwładności promieniowej. Zerowanie się wyrażenia w nawiasie daje warunek optymalnej geometrii próbki:

$$(2.3) \quad l = \sqrt{3} \nu_s a, \quad s_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \nu_s,$$

dla którego bezwładność promieniowa i osiową się znoszą. Davies i Hunter używali w swych badaniach próbek o smukłości  $s_0 = 0,5$ , co odpowiadało wyznaczonej smukłości optymalnej i według kryterium minimalizacji tarcia było korzystniejsze niż użycie próbek bardzo cienkich, np. wykorzystywanych przez Kolsky'ego.

KLEPACZKO [10] oraz DHARAN i HAUSER [4] przeprowadzili na gruncie teorii plastyczności analizę dynamicznego zachowania się próbki z uwzględnieniem bezwładności promieniowej. Z równania ruchu w kierunku promieniowym dla materiału nieściśliwego

otrzymano wartości składowej promieniowej naprężenia, a po wykorzystaniu warunku plastyczności Hubera-Misesa i hipotezy Haara-Kármána wyrażenie poprawkowe przyjmuje postać

$$(2.4) \quad \sigma_M - \sigma_S = \varrho_s a_0^2 \left[ \frac{1}{4(1-\varepsilon_z)} \ddot{\varepsilon} - \frac{3}{8(1-\varepsilon_z)^2} \dot{\varepsilon}^2 \right],$$

Podany przez wymienionych autorów wzór uwzględniał zmianę geometrii próbki podczas procesu odkształcenia.

SAMANTA [17] zwrócił uwagę, że analiza Daviesa-Huntera pomija część konwekcyjną pochodnej materialnej energii kinetycznej. Zakładając nieściśliwość materiału i prowadząc rozważania energetyczne analogicznie jak Davies i Hunter, Samanta otrzymał wzór poprawkowy, w którym jedno wyrażenie jest funkcją  $\ddot{\varepsilon}$ , drugie natomiast jest funkcją  $\dot{\varepsilon}^2$ . Wyrażenie związane z przyspieszeniem jest identyczne jak u Daviesa i Huntera, wyrażenie konwekcyjne (związane z  $\dot{\varepsilon}^2$ ) odgrywa mniejszą rolę, dając wyniki stanowiące kilka procent wartości pierwszego wyrażenia. Zależność Samanty ma postać

$$(2.5) \quad \sigma_M - \sigma_S = \varrho_s \left( \frac{l^2}{12} + \frac{d^2}{32} \right) \ddot{\varepsilon} - \varrho_s \left( \frac{d^2}{64} - \frac{l^2}{12} \right) \dot{\varepsilon}^2,$$

BERTHOLF i KARNES [1] przeprowadzili dwuwymiarową analizę falową zmodyfikowanego pręta Hopkinsona wykorzystując program numeryczny TOODY i maszynę cyfrową CDC 6600. Program numeryczny umożliwił znalezienie wszystkich składowych tensorów: naprężenia  $\sigma_{ij}$ , odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  i prędkości odkształcenia  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  we wszystkich punktach prętów i próbki dla zadanego czasu. Dla zbadania wpływu tarcia oraz efektów inercyjnych w próbce na mierzoną krzywą umocnienia, przeprowadzono szczegółowe obliczenia numeryczne dla próbki o różnej smukłości, zakładając dodatkowo rozmaite warunki tarcia na czołach próbki i prętów. Stwierdzono m.in., że dla próbek o smukłości  $s_0 < < \nu_s \sqrt{3/4}$  przeważa bezwładność promieniowa, natomiast dla większych wartości  $s_0$  poważniejszą rolę odgrywa bezwładność osiowa. Ogólny wpływ bezwładności rośnie wraz ze wzrostem prędkości odkształcenia  $\dot{\varepsilon}$ ; bezwładność wywołuje dodatkowo powstawanie oscylacji na znalezionej dynamicznej krzywej umocnienia. Bertholf i Karnes wykorzystali do porównań w swych obliczeniach poprawkę Daviesa-Huntera i jako wynik podali wykres, na którym rezultaty ich obliczeń numerycznych, przy założeniu prostokątnego impulsu wymuszenia w pręcie Hopkinsona, nałożone zostały na liniowe rozkłady względnej nadwyżki bezwładnościowej naprężenia w funkcji  $\ddot{\varepsilon}_{\max}$  dla różnych  $s_0$ , otrzymane z przekształconego wzoru Daviesa Huntera

$$(2.6) \quad \frac{\sigma_S - \sigma_M^B}{\sigma_M^B} = \frac{\ddot{\varepsilon}_{\max}}{\sigma_M^B} \frac{\varrho_s d^2}{6} \left[ \left( \frac{l}{d} \right)^2 - \frac{3}{4} \nu_s^2 \right],$$

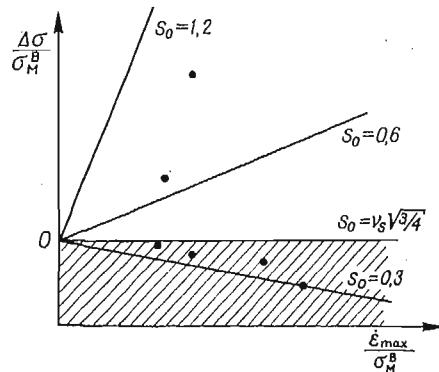
przy czym przyjęto tutaj warunek nieściśliwości  $\nu_s = \frac{1}{2}$ .

Wyniki Bertholfa i Karnesa pokazane są na rys. 2. Dodatnia (górną) część rysunku odpowiada obszarowi, na którym dominuje inercja osiowa, na ujemnej, tj. zakresowanej części rysunku, przeważa inercja promieniowa. Dwuwymiarowa analiza Bertholfa i Karne-



sa wymaga stosowania bardzo szybkiej maszyny cyfrowej o dużej pamięci, jak np. CDC 6600, przy czym czas trwania jednego cyklu obliczeniowego wynosi około dwóch godzin.

Ze względu na konieczność użycia, dla przeprowadzenia takiej analizy falowej, komputera wysokiej generacji, oraz z uwagi na długi czas obliczeń dla jednej geometrii próbki i warunków tarcia, rozwiązanie zadania jest bardzo kosztowne i pracochłonne. Tym bardziej stało się istotne opracowanie metody oraz wskazówek dla prostego oszacowania efektów inercyjnych, które pozwolą obliczyć przybliżone, ale poprawione wartości na-



Rys. 2. Udział bezwładności promieniowej i osiowej dla ściskanych dynamicznie próbek walcowych o różnej smukłości  $s_0$ , wg [1].

prężen, tj. sprowadzone do jednoosiowego stanu naprężenia. Pomimo iż opracowano już kilka sposobów szacowań poprawek bezwładnościowych i różni autorzy posługują się przy opracowywaniu wyników badań doświadczalnych różnymi poprawkami, nie wyjaśniono dotychczas, kiedy i w jakich warunkach każda z poprawek może być stosowana. Wielu autorów posługujących się zmodyfikowaną prętą Hopkinsona zaniebdywało efekty bezwładnościowe, inni wykorzystywali wymienione wyżej poprawki. Poprawkę Daviesa-Huntera, którą będziemy oznaczać indeksem **DH**, stosowali LINDHOLM [13], LINDHOLM i YEAKLEY [14], poprawką SAMANTY S posługiwał się jej autor [17], oszacowanie Klepaczko-Dharana-Hausera **KDH** wykorzystane było przez DHARANA i HAUSERA [4, 5], natomiast oszacowanie KOLSKY'EGO **K** przez jego autora [12].

### 3. Naprężenia inercyjne w wałcu ściskanym

Rozważmy próbkę cylindryczną poddaną szybkiemu ściskaniu między dwiema sztywnymi, równoległymi płytami. Warunki kinematyczne podane są na rys. 1; materiał założono jako nieściśliwy.

Powierzchnia czołowa  $z = 0$  jest nieruchoma, natomiast powierzchnia czołowa  $z = l$  porusza się z prędkością  $V = -l$ . Jeżeli  $a_0/l_0 > 1$  i płyty są idealnie gładkie, pole prędkości jest w przybliżeniu takie, jak dla quasi-statycznego problemu jednorodnego ściskania:

$$(3.1) \quad v_r = \frac{r}{2l} V,$$

$$(3.1) \quad v_\theta = 0,$$

[cd.]

$$v_z = -\frac{z}{l} V,$$

skąd

$$(3.2) \quad v_r = -\frac{1}{2} \frac{r}{z} v_z.$$

Promieniowa składowa przyspieszenia we współrzędnych walcowych ma postać:

$$(3.3) \quad \frac{dv_r}{dt} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial v_r}{\partial r} v_r + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z},$$

co przy wykorzystaniu (2.1) daje:

$$\begin{aligned} \frac{dv_r}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{r}{z} \frac{dv_z}{dt} - \frac{1}{2} \frac{r}{z} v_z \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} \cdot v_z \right) + v_z \left( \frac{1}{2} \frac{r}{z^2} v_z \right), \\ \frac{dv_r}{dt} &= \frac{r}{2z} \left( \frac{3}{2} \frac{v_z^2}{z} - \frac{dv_z}{dt} \right), \end{aligned}$$

natomiast dla  $z = l$ , tj. dla powierzchni A próbki

$$(3.4) \quad \frac{dv_r}{dt} = \frac{r}{2l} \left( \frac{3}{2} \frac{v_z^2}{l} - \frac{dv_z}{dt} \right).$$

Ponieważ proces deformacji traktujemy jako quasi-statyczny i bez tarcia, naprężenie  $\sigma_r$  nie zależy od  $z$  i równanie zachowania pędu w kierunku promieniowym  $r$  przyjmuje postać:

$$(3.5) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = \rho \frac{dv_r}{dt},$$

$$(3.6) \quad \sigma_r|_{r=a} - \sigma_r|_{r=r} = \rho \int_r^a \frac{dv_r}{dt} dr,$$

po podstawieniu (3.4) do (3.6) z warunkiem  $\sigma_r = 0$  dla  $r = a$  otrzymuje się

$$(3.7) \quad -\sigma_r = \rho \int_r^a \left( \frac{3v_z^2}{2l} - \frac{dv_z}{dt} \right) \frac{r}{2l} dr.$$

Ostatecznie po scałkowaniu w granicach  $r, a$ :

$$(3.8) \quad \sigma_r = \frac{\rho}{4l} \left( \frac{3v_z^2}{2l} - \frac{dv_z}{dt} \right) (r^2 - a^2)$$

Otrzymany wzór podaje wartość naprężeń promieniowych w funkcji odległości od środka próbki walcowej. Maksymalna wartość  $\sigma_r$  występuje w środku próbki, tj. dla  $r = 0$ . Jak wspomniano poprzednio, podobne wyprowadzenie podali w swych pracach KLEPACZKO [10] oraz DHARAN i HAUSER [4]. Wspomniani autorzy celem uproszczenia przyjęli, że  $\sigma_r$  jest niezależne od  $r$  i w całej próbce równa się  $\sigma_r|_{r=0}$ , stąd

$$(3.9) \quad \sigma_r = (\sigma_r)_{\max} = \frac{\rho a^2}{4l} \left( \frac{dv_z}{dt} - \frac{3v_z^2}{2l} \right).$$

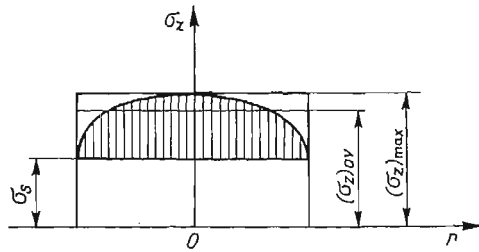
Korzystając z warunku plastyczności

$$\sigma_s = \sigma_z - \sigma_r$$

otrzymano wzór na wartość naprężeń  $\sigma_s$  przy idealnym ściskaniu, czyli wartość naprężeń mierzonych  $\sigma_z$  zmniejszonych o wartość naprężeń promieniowych stąd

$$(3.10) \quad \sigma_s = \sigma_z - \frac{\rho a^2}{4l} \left( \frac{dv_z}{dt} - \frac{3v_z^2}{2l} \right)$$

Rysunek 3 przedstawia rozkłady naprężeń osiowych wzdłuż promienia próbki, przy czym zakreskowana parabola odpowiada rozkładowi naprężeń promieniowych według zależności (3.8), natomiast przybliżenie prostą  $(\sigma_z)_{\max}$ , co zachodzi dla  $\sigma_r = (\sigma_r)_{\max}$  (3.9) przedstawia



Rys. 3. Rozkład naprężeń osiowych na promieniu próbki w procesie dynamicznego ściskania

stały rozkład naprężeń promieniowych według aproksymacji **KDH**. Jeśli przyjąć stały wzdłuż promienia rozkład naprężeń  $\sigma_r$ , w którym  $\sigma_r = (\sigma_r)_{\max}$  zastąpimy średnią całkową  $(\sigma_r)_{av}$  z rozkładu naprężeń po promieniu próbki, otrzymamy wówczas

$$(3.11) \quad (\sigma_r)_{av} \cdot 2a = 2 \cdot \int_0^a c(r^2 - a^2) dr,$$

$$\text{gdzie } c = \frac{\rho}{4l} \left( \frac{3v_z^2}{2l} - \frac{dv_z}{dt} \right),$$

$$(\sigma_r)_{av} = \frac{\rho a^2}{6l} \left( \frac{dv_z}{dt} - \frac{3v_z^2}{2l} \right).$$

Wzór na wartość naprężeń poosiowych przy idealnym ściskaniu przybiera wówczas postać

$$(3.12) \quad \sigma_s = \sigma_z - \frac{\rho a^2}{6l} \left( \frac{dv_z}{dt} - \frac{3v_z^2}{2l} \right).$$

Jeżeli uwzględnimy zmianę geometrii próbki podczas procesu deformacji i wprowadzimy geometrię aktualną

$$l = l_0(1 - \varepsilon_z), \quad a = \frac{a_0}{\sqrt{1 - \varepsilon_z^2}},$$

poprawka **KDH** opisana jest wzorem, gdy  $\sigma_z \equiv \sigma_M$ :

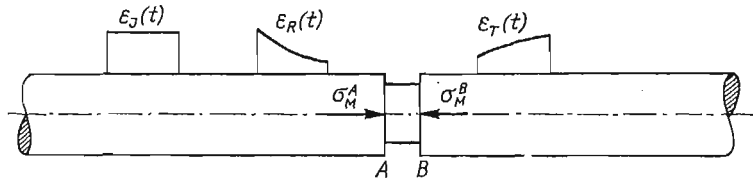
$$(3.13) \quad \sigma_s = \sigma_M - \frac{1}{6} \frac{a_0^2}{l_0^3} \frac{1}{(1 - \varepsilon_z)^2} \rho_s \frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{4} \left( \frac{a_0}{l_0} \right)^2 \frac{1}{(1 - \varepsilon_z)^3} \rho_s v_z^2.$$

Omawiając poprawki bezwładnościowe zaproponowane przez różnych autorów należy podkreślić, że w zależności od wyboru zarejestrowanych sygnałów stanowiących dane do obliczeń, zmianie ulega wykorzystywana w obliczeniach postać wzoru poprawkowego. Analiza matematyczna zjawiska propagacji fali sprężystej w zmodyfikowanym pręcie Hopkinsona prowadzi do podstawowych zależności:

$$(3.14) \quad \sigma_M = \frac{1}{2} E \left( \frac{F_b}{F_s} \right) [\varepsilon_J(t) + \varepsilon_R(t) + \varepsilon_T(t)],$$

gdzie  $\varepsilon_J(t)$ ,  $\varepsilon_R(t)$  i  $\varepsilon_T(t)$  są sygnałami wynikającymi z przejścia fali wzdłużnej w prętach, które są mierzone tensometrami elektrooporowymi odpowiednio dla fali wymuszającej, odbitej od czoła A pręta i próbki oraz transmitowanej przez próbkę i pręt odbierający (przechodzącej przez czoło B),  $F_b$ ,  $F_s$  są polami powierzchni przekroju prętów i próbki.

Na rys. 4 przedstawiono próbkę wraz z prętami, zaznaczając symbolicznie przebiegi fal w obydwu prętach.



Rys. 4. Schemat przebiegów falowych w zmodyfikowanym pręcie Hopkinsona. Powierzchnie A i B stanowią powierzchnie kontaktu pręta z próbką

Przy założeniu równowagi naprężenia na obydwu czołach próbki, co prowadzi do zależności

$$\varepsilon_J(t) + \varepsilon_R(t) = \varepsilon_T(t)$$

naprężenie w próbce  $\sigma_M$  jest proporcjonalne do  $\varepsilon_T(t)$ .

$$(3.15) \quad \sigma_M = E \left( \frac{F_b}{F_s} \right) \varepsilon_T(t).$$

Stosowany zazwyczaj układ elektroniczny zmodyfikowanego pręta Hopkinsona pozwala na oddzielną rejestrację wszystkich trzech sygnałów w funkcji czasu, natomiast używane programy obliczeniowe dla maszyny matematycznej wykorzystywać mogą jedną z dwóch podanych wyżej zależności. Program tzw. ścisły oparty jest na zależności (3.14), natomiast w programie uproszczonym wykorzystano zależność (3.15).

W przypadku pierwszym znajomość wartości wszystkich trzech fal pozwala obliczyć naprężenie ze wzoru:

$$(3.16) \quad \sigma_M = \frac{1}{2} [\sigma_M^A(t) + \sigma_M^B(t)],$$

gdzie  $\sigma_M^A$  i  $\sigma_M^B$  oznaczają naprężenia działające na czołach A i B prętów. Stąd naprężenie  $\sigma_M$  jest naprężeniem średnim w próbce. W przypadku drugim, gdy wykorzystujemy jedynie zarejestrowaną falę w pręcie odbierającym, obliczamy naprężenie działające na czole B pręta i próbki

$$(3.17) \quad \sigma_M = \sigma_B^M(t).$$

Problem wyboru procedury obliczeniowej przestaje mieć znaczenie dla bardzo cienkich próbek, gdyż wówczas zachodzi praktycznie równowaga sił na czołach A i B

$$(3.18) \quad \sigma_M^A(t) \approx \sigma_M^B(t),$$

skąd

$$\sigma_M = \frac{1}{2} [\sigma_M^A(t) + \sigma_M^B(t)] \cong \sigma_M^B(t).$$

Urządzenie typu wałec-pręt, a także zmodyfikowany pręt Hopkinsona z czujnikiem pojemnościowym na pręcie odbierającym dostarcza informacji jedynie o wielkości impulsu po jego przejściu przez próbkę, czyli na czole B pręta odbierającego i próbki. Spośród obydwu sposobów określania naprężeń w próbce powszechniejszą wydaje się metoda obliczania ich wartości na czole B pręta i próbki.

Wzory poprawkowe **K** i **KDH**, które uwzględniają jedynie bezwładność promieniową, ważne są w zasadzie tylko dla cienkich próbek i mogą być stosowane w obydwu systemach pomiaru naprężeń, a mianowicie na dwóch prętach, bądź też tylko na pręcie odbierającym.

Wzory poprawkowe **DH** i **S**, uwzględniając bezwładność promieniową i osiową próbki, zmieniają nieco swą postać w zależności od tego, czy naprężenie mierzone było na powierzchni kontaktu pręt odbierający-próbka (czoło B), czy też odniesione jest do środka próbki. Jeżeli  $\sigma_M^B$  jest średnim naprężeniem mierzonym w próbce, to:

$$(3.19) \quad \text{DH} \quad \sigma_s = \sigma_M - \rho_s \left( \frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{8} \right) \ddot{\epsilon},$$

$$(3.20) \quad \text{S} \quad \sigma_s = \sigma_M - \rho_s \left( \frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{8} \right) \ddot{\epsilon} - \rho_s \left( \frac{l^2}{12} - \frac{a^2}{16} \right) \dot{\epsilon}^2.$$

Jeżeli natomiast  $\sigma_M^B$  jest naprężeniem mierzonym na powierzchni styku pręt odbierający próbka (czoło B), to wówczas:

$$(3.21) \quad \text{DH} \quad \sigma_s = \sigma_M^B + \rho_s \left( \frac{l^2}{6} - \frac{a^2}{8} \right) \ddot{\epsilon},$$

$$(3.22) \quad \text{S} \quad \sigma_s = \sigma_M^B + \rho_s \left( \frac{l^2}{6} - \frac{a^2}{8} \right) \ddot{\epsilon} + \rho_s \left( \frac{l^2}{6} - \frac{a^2}{16} \right) \dot{\epsilon}^2$$

Wzory poprawkowe **K** i **KDH** zachowują taką samą postać przy obu rozważanych wyżej zasadach pomiaru naprężenia. Program numeryczny dla maszyny cyfrowej ODRA 1204, którym częściej posługiwano się przy obliczaniu wartości naprężeń  $\sigma_M(t)$  w próbce, oparty był na założeniu, że:

$$\sigma_M \sim \epsilon_x(t) \quad \text{czyli} \quad \sigma_M \cong \sigma_B^M(t).$$

Dlatego podana Tablica 1 poprawek bezwładnościowych wykorzystanych w dalszej części pracy, zawiera wzory dla przypadku, gdy naprężenie  $\sigma_M^B$  mierzone jest na powierzchni kontaktu B pręt odbierający-próbka. We wzorach podanych w Tablicy 1 ujednotaczono oznaczenia i wprowadzono geometrię aktualną próbki.

Tablica 1. Zestawienie poprawek bezwładnościowych z argumentem  $v_z$  na powierzchni B

L.p.	Nazwa poprawki			Składowa przyspiesz. $\times \varrho_s \frac{dv_z}{dt}$	Składowa konwekcyjna $\times \varrho_s v_z^2$		
1	Kolsky (1949) K	$\sigma_s =$	$\sigma_M^n$	$-\frac{1}{8} \frac{a_0^2}{l_0} \frac{1}{(1-\varepsilon_z)^2}$	—	—	—
2	Davies-Hunter (1963) DH	$\sigma_s =$	$\sigma_M^B$	$-\frac{1}{8} \frac{a_0^2}{l_0} \frac{1}{(1-\varepsilon_z)^2}$	$+l_0 \frac{1-\varepsilon_z}{6}$	—	—
3	Klepaczko- -Dharan- -Hauser (1969) KDH	$\sigma_s =$	$\sigma_M^B$	$-\frac{1}{4} \frac{a_0^2}{l_0} \frac{1}{(1-\varepsilon_z)^2}$	—	$-\frac{3}{8} \left(\frac{a_0}{l_0}\right)^2 \frac{1}{(1-\varepsilon_z)^3}$	—
4	KDH (1978)	$\sigma_s =$	$\sigma_M^B$	$-\frac{1}{6} \frac{a_0^2}{l_0} \frac{1}{(1-\varepsilon_z)^2}$	—	$+\frac{1}{4} \left(\frac{a_0}{l_0}\right)^2 \frac{1}{(1-\varepsilon_z)^3}$	—
5	Samanta S (1971)	$\sigma_s =$	$\sigma_M^B$	$-\frac{1}{8} \frac{a_0^2}{l_0} \frac{1}{(1-\varepsilon_z)^2}$	$+l_0 \frac{1-\varepsilon_z}{6}$	$+\frac{1}{16} \left(\frac{a_0}{l_0}\right)^2 \frac{1}{(1-\varepsilon_z)^3}$	$+\frac{1}{6}$

Tablica 2. Zestawienie poprawek bezwładnościowych z argumentami  $\dot{\varepsilon}$  i  $\ddot{\varepsilon}$  na powierzchni B

L.p.	Nazwa poprawki			Składowa przyspiesz. $\times \varrho_s \ddot{\varepsilon}$	Składowa konwekcyjna $\times \varrho_s \dot{\varepsilon}^2$		
1	Kolsky (1949) K	$\sigma_s =$	$\sigma_M^B$	$-\frac{1}{8} a_0^2 \frac{1}{1-\varepsilon_z}$	—	—	
2	Davies-Hunter (1963)DH	$\sigma_s =$	$\sigma_M^B$	$-\frac{1}{8} a_0^2 \frac{1}{1-\varepsilon_z}$	$+\frac{1}{6} l_0^2 (1-\varepsilon_z)^2$	—	—
3	Klepaczko (1969) Dharan-Hauser (1970) KDH	$\sigma_s =$	$\sigma_M^B$	$-\frac{1}{4} a_0^2 \frac{1}{1-\varepsilon_z}$	—	$-\frac{3}{8} a_0^2 \frac{1}{1-\varepsilon_z}$	—
4	KDH (1978)	$\sigma_s =$	$\sigma_M^B$	$-\frac{1}{6} a_0^2 \frac{1}{1-\varepsilon_z}$	—	$+\frac{1}{4} a_0^2 \frac{1}{1-\varepsilon_z}$	—
5	Samanta (1971) S	$\sigma_s =$	$\sigma_M^B$	$-\frac{1}{8} a_0^2 \frac{1}{1-\varepsilon_z}$	$+\frac{1}{6} l_0^2 (1-\varepsilon_z)^2$	$+\frac{1}{16} a_0^2 \frac{1}{1-\varepsilon_z}$	$+\frac{1}{6} l_0^2 (1-\varepsilon_z)^2$

Jako danych dla zbadania wielkości i zachowania się poprawek bezwładnościowych zawartych w Tablicy 1 użyto stabelaryzowanych wyników badań technicznie czystego aluminium (99,9% Al) dokonanych na zmodyfikowanym pręcie Hopkinsona i urządzeniu walec-pręt. Badania na zmodyfikowanym pręcie Hopkinsona wykonane zostały w Zakładzie Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN, natomiast badania na urządzeniu walec-pręt zostały przeprowadzone przez jednego z autorów w Division of Inorganic Materials Uniwersytetu Kalifornijskiego w Berkeley.

Z uwagi na to, że wykorzystywane dalej wyniki podane są w funkcji prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$ , a nie w funkcji prędkości uderzenia  $v_z$ , zestawienie stosowanych poprawek bezwładnościowych w funkcji  $\dot{\epsilon}$  i  $\ddot{\epsilon}$  podano w Tablicy 2.

#### 4. Analiza poprawek bezwładnościowych dla próbek Al badanych na zmodyfikowanym pręcie Hopkinsona (SHPB) i urządzeniu walec-pręt (BHB)

Celem analizy było znalezienie wartości bezwzględnych poprawek naprężenia dla rzeczywistych warunków doświadczenia, a także wartości względnych poprawek odniesionych do naprężeń mierzonych  $\sigma_M^B$ . Poprawki podano w funkcji  $\dot{\epsilon}$  i  $\ddot{\epsilon}$  dla wszystkich rozważanych procedur obliczeniowych. Dodatkowym wynikiem takiego podejścia jest możliwość pokazania wpływu poszczególnych składowych prędkości (składowej przyspieszeniowej i składowej konwekcyjnej) w zależności od zakresu prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$ , jak również wpływu poszczególnych członów we wzorach na wielkość poprawki.

Do przeprowadzenia analizy wybrano wyniki z trzech serii badań, wykonanych za pomocą BHB, próby 23 w serii 4, 53/2 w serii 10-A i 57/1 w serii 12 (w dalszej części pracy próbki oznaczać będziemy tylko numerem serii). Próby dobrane zostały w ten sposób, by każda z nich różniła się znacząco przebiegami  $\sigma(\epsilon)$  i  $\dot{\epsilon}(\epsilon)$ . Pierwsza z prób charakteryzuje się małą prędkością uderzenia  $v_z$  i stąd niskim poziomem uzyskanych naprężeń, druga większą prędkością uderzenia i wyższym poziomem naprężeń, w ostatniej z nich proces deformacji plastycznej zachodzi w czasie narastania impulsu wymuszającego. Dla porównania analizowano również wyniki badania dla próbki 17/5 przeprowadzonego na SHPB. Wykresy  $\sigma_M^B(\epsilon)$  i  $\dot{\epsilon}(\epsilon)$  dla analizowanych prób podane zostały na rysunkach od rys. 5a do rys. 5d.

W Tablicy 3 podano geometryczne dane badanych próbek oraz zakresy prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  i maksymalne przekształcenie  $\epsilon_{\max}$ .

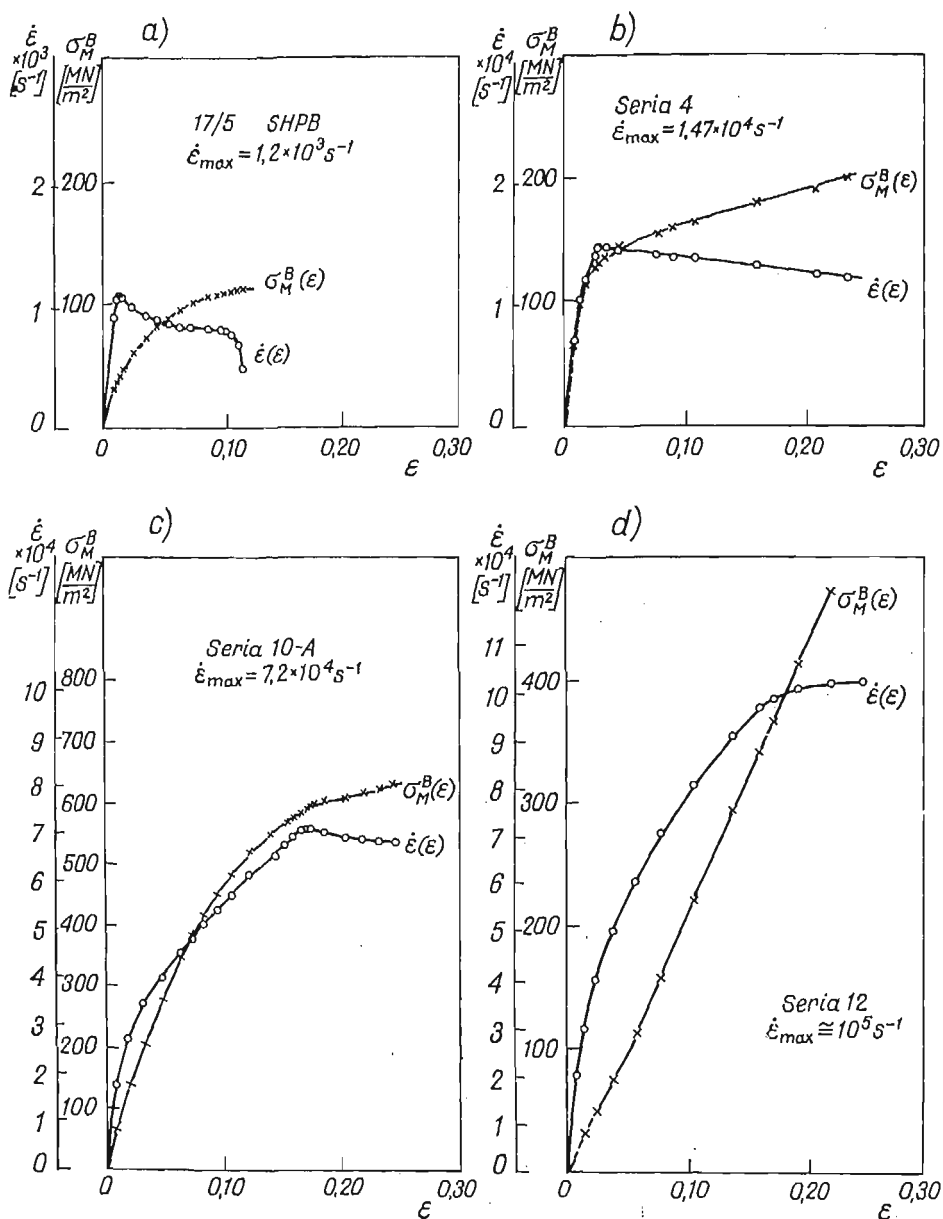
Wykorzystując zależność

$$\ddot{\epsilon} = \frac{d\dot{\epsilon}}{dt} = \frac{d\dot{\epsilon}}{d\epsilon} \dot{\epsilon}$$

przeprowadzono różniczkowanie graficzne doświadczalnie otrzymanych funkcji  $\dot{\epsilon}(\epsilon)$  i znaleziono wartości  $\ddot{\epsilon}$  dla wybranych wartości  $\epsilon$ . Dla wszystkich badanych przebiegów obliczono wartości poprawek **K**, **KDH**, **DH** i **S** podstawiając je do ogólnej zależności:

$$\sigma_s(\epsilon) = \sigma_M^B(\epsilon) - \Delta\sigma(\epsilon)$$

gdzie:  $\sigma_M^B(\epsilon)$  jest naprężeniem osiowym mierzonym w doświadczeniu na powierzchni B,  $\Delta\sigma(\epsilon)$  jest wartością odpowiedniej poprawki obliczoną według wybranej procedury,  $\sigma_s(\epsilon)$  jest naprężeniem poprawionym po uwzględnieniu danej procedury korekcyjnej.



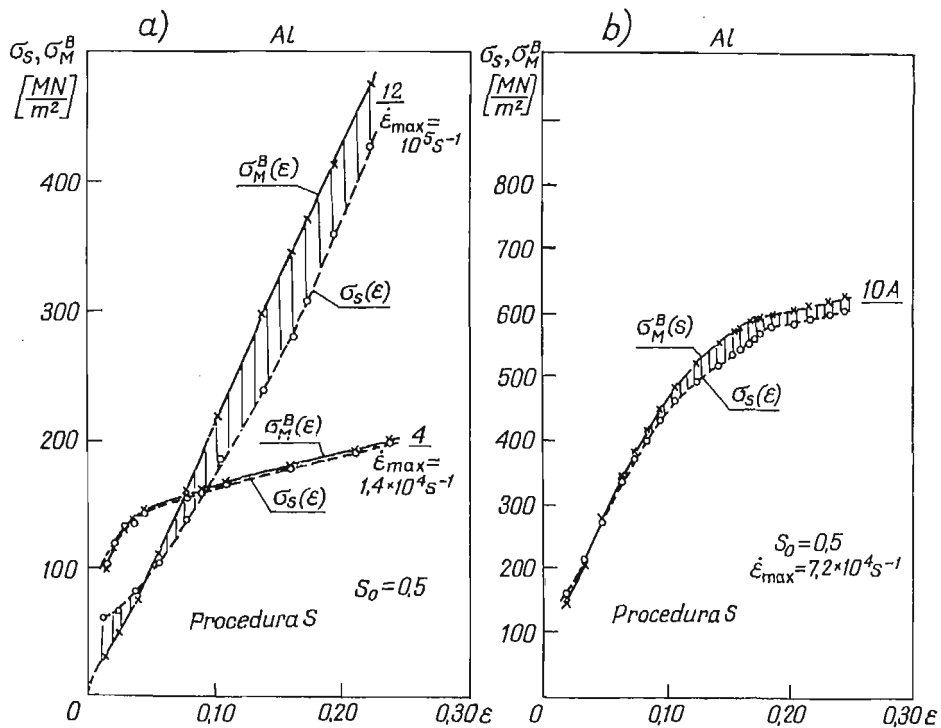
Rys. 5. Krzywe  $\sigma_M(\epsilon)$  i  $\dot{\epsilon}(\epsilon)$  dla badanych próbek: a — dane z SHPB; b — dane z BHB, seria 4; c — dane z BHB, seria 10-A; d — dane z BHB dla maksymalnych  $\dot{\epsilon}$ , seria 12

W ten sposób uzyskano poprawione dynamiczne krzywe umocnienia  $\sigma_S(\epsilon)$ ; rysunki 6a i 6b przedstawiają jedynie krzywe poprawione wg procedury S. Wartości naprężeń dla krzywych umocnienia otrzymanych za pomocą BHB zostały skorygowane o kilkanaście procent w stosunku do wartości naprężenia mierzonego  $\sigma_M^B$ , natomiast poprawki dla wyników z SHPB nie przekraczają jednego procenta wartości tego naprężenia. Krzywa



Tablica 3. Dane początkowe dla analizowanych przebiegów

L.p.	Oznaczenie próbki	Długość $l_0$ mm	Średnica $d_0$ mm	Smukłość $s_0 = l_0/d_0$	Zakres $\dot{\epsilon}$ s <sup>-1</sup>	Zakres $\epsilon$
1	seria 4 23	3.145	6.286	0.5	$1.4 \cdot 10^4$	0.25
2	seria 10-A 53/2	3.145	6.286	0.5	$7.2 \cdot 10^4$	0.25
3	seria 12 57/1	3.145	6.286	0.5	$10^5$	0.25
4	SHPB 17/5	6.00	12.05	0.5	$1.2 \cdot 10^3$	0.12



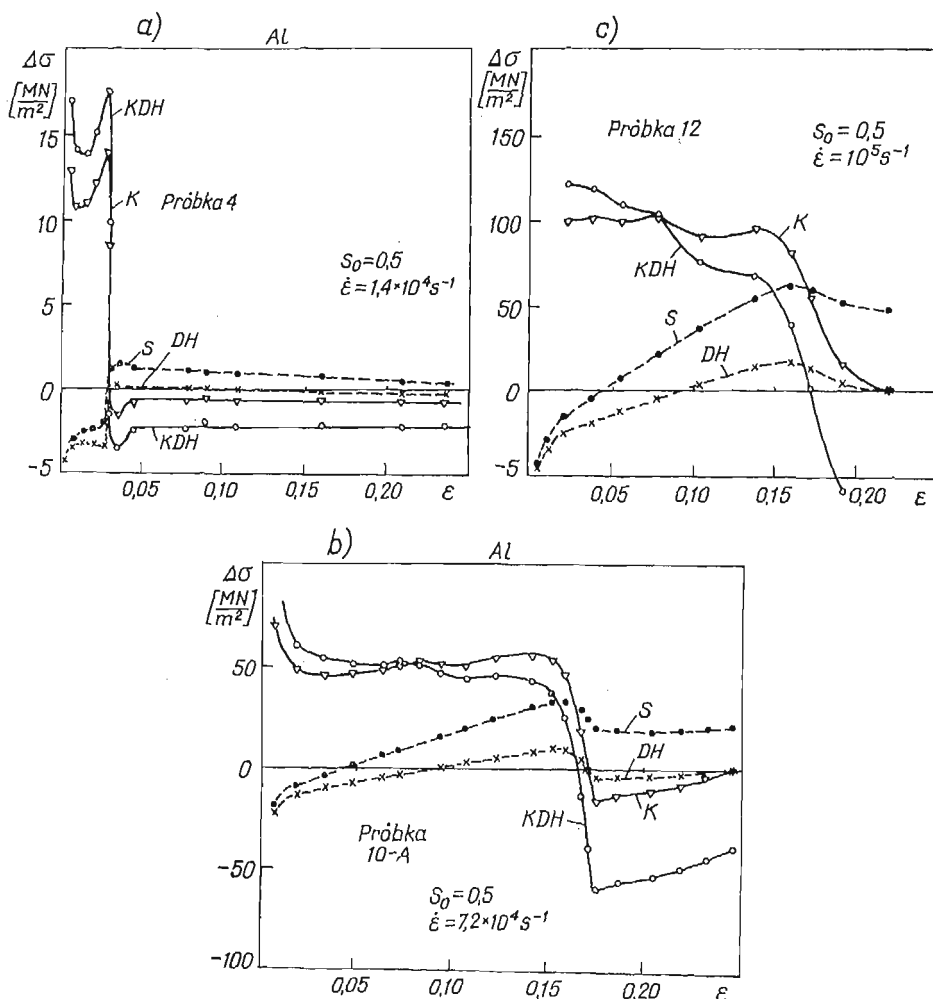
Rys. 6. Dynamiczne krzywe umocnienia  $\sigma(\epsilon)$  dla próbek Al badanych na urządzeniach walec-pręt (BHB), przed i po korekcji na bezwładność według procedury S; a — seria 4 i 12, b — seria 10-A

umocnienia dla aluminium otrzymana przy pomocy SHPB, mimo przeprowadzenia procedury korekcyjnej, nie jest więc w sposób znaczący zmieniona.

Wartości poprawek są funkcją smukłości próbek, prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  oraz przyspieszenia odkształcenia  $\ddot{\epsilon}$ , przy czym z przeprowadzonych obliczeń wynika, że wyrażenie związane z przyspieszeniem (będące funkcją  $\dot{\epsilon}$ ) odgrywa dużo poważniejszą rolę niż wyrażenie konwekcyjne (zależne od  $\dot{\epsilon}^2$ ). Wartość wyrażenia konwekcyjnego nie przekracza kilku procent wartości części przyspieszeniowej.

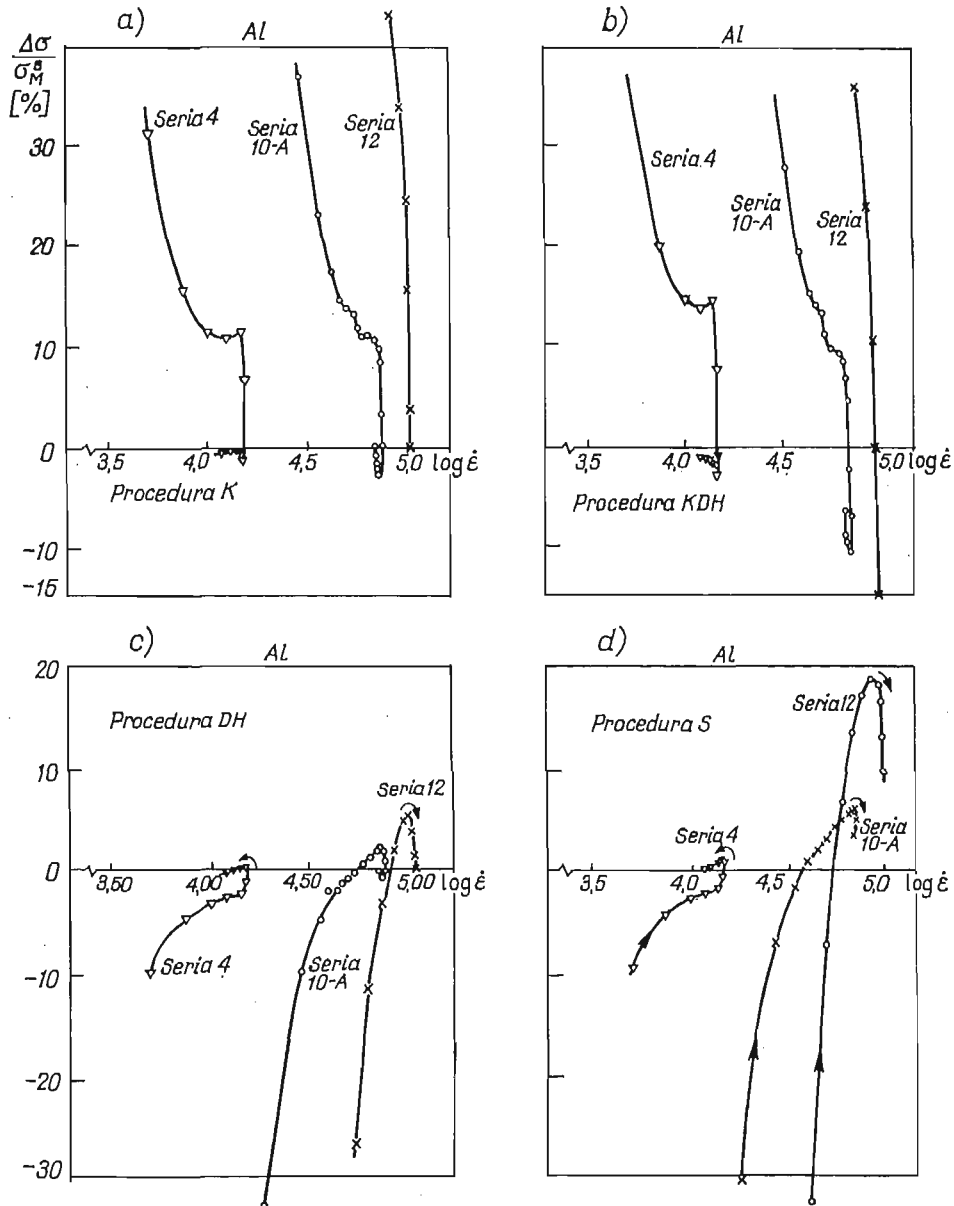
Wartości poprawek dla początkowej części przebiegu 12 obliczone przy pomocy każdej z procedur są nierealistycznie wysokie i przekraczają znaczenie wartości naprężeń  $\sigma_M^B$ .

Wywołane jest to bardzo wysokimi początkowymi wartościami  $\dot{\epsilon}$ , które wynikać mogą z błędów rejestracji odkształcenia lub małej dokładności różniczkowania graficznego stromego odcinka krzywej  $\dot{\epsilon}(\epsilon)$ . Dla wszystkich badanych tutaj przebiegów należy odrzucić



Rys. 7. Zmienność bezwzględnych wartości poprawek naprężenia w funkcji odkształcenia; a — seria 4; b — seria 10-A; c — seria 12.

jako niepewne wyniki w przedziale  $0 < \varepsilon < 0,03$  z uwagi na zaburzenia procesu deformacji zachodzące w początkowej fazie odkształcenia próbki wywołane zjawiskami falowymi, a także wspomniane niedokładności określenia  $\dot{\varepsilon}$ . Z przebiegu krzywych  $\sigma_s(\varepsilon)$  otrzymanych po korekcji można zaobserwować, że stosowanie różnych procedur korekcyjnych daje w pewnych przypadkach różne wyniki, przy czym krzywe korekcyjne  $\sigma_s(\varepsilon)$  znalezione przy użyciu poprawek **K** i **KDH** oraz **DH** i **S** mają parami zbliżony charakter i leżą na-



Rys. 8. Zmienność względnych wartości poprawek naprężenia w funkcji odkształcenia; a — wg procedury K; b — wg procedury KDH; c — wg procedury DH; d — wg procedury S

wzajem niedaleko siebie. Dowodzi to, że składowa przyspieszenia osiowego w wyrażeniu korekcyjnym, pomijana w poprawkach **KDH** i **K**, odgrywa znaczną rolę dla próbek o smukłości  $s_0 = 0,5$ .

Parami podobny charakter poprawek uwidacznia się znacznie bardziej na wykresach ich bezwzględnych wartości  $\Delta\sigma(\varepsilon)$ . Wyniki tego rodzaju obliczeń podano na rys. 7a, 7b oraz 7c. Zwraca uwagę fakt, że w dużym przedziale odkształceń poprawki **KDH** i **K** oraz **DH** i **S** mają parami przeciwne znaki. Nieznajomość zakresu stosowalności poszczególnych poprawek prowadzi więc do sytuacji, w której tylko od wyboru procedury poprawkowej zależy przebieg skorygowanej krzywej umocnienia  $\sigma_s(\varepsilon)$ , tzn. ewentualne obniżenie lub podwyższenie poziomu naprężenia plastycznego płynięcia na tej krzywej.

Zmiana znaku poprawek **DH** i **K** związana jest ze zmianą znaku  $\ddot{\varepsilon}$ , ponadto dla poprawek **DH** i w przybliżeniu **S** zmiana znaku następuje wówczas gdy składowa przyspieszeniowa związana z przyspieszeniem promieniowym zaczyna przeważać nad składową przyspieszeniową związaną z przyspieszeniem osiowym.

Zmienność względnej wielkości poprawki dla próbek o jednakowej smukłości  $s_0 = 0,5$  pokazana została na wykresach  $\frac{\Delta\sigma}{\sigma_M}(\log \dot{\varepsilon})$  przedstawionych na rys. 8a, 8b, 8c oraz 8d.

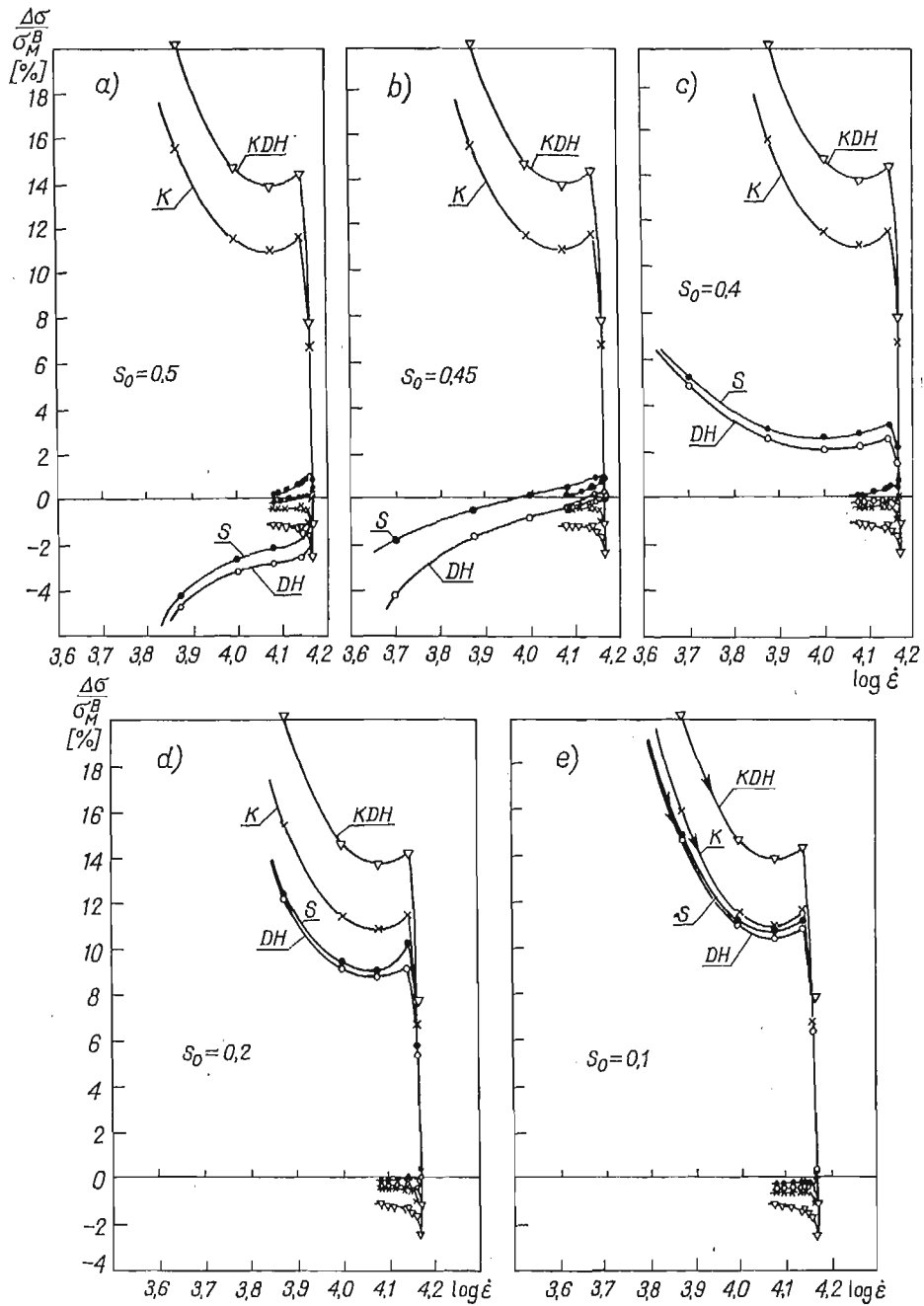
Poprawki **KDH** i **K** mają w tych współrzędnych charakter gwałtownie malejący (rys. 8a i b), natomiast **DH** i **S** — gwałtownie rosnący (rys. 8c i d), z wyjątkiem obszaru, w którym następuje opóźnienie prędkości odkształcenia (zmiana znaku  $\ddot{\varepsilon}$ ), a poprawki zaczynają odpowiednio rosnąć lub maleć. Dla poprawki **DH** wartości  $\frac{\Delta\sigma}{\sigma_M}$  w punkcie zmiany znaku  $\ddot{\varepsilon}$  są nieco niższe, w punkcie tym składowe bezwładności osiowej i promieniowej stają się sobie równe. Wyniki otrzymane na SHPB potwierdzają jakościowo charakter zjawiska.

Zasadniczą przyczyną rozbieżności między wynikami obliczeń poprawek **KDH** i **K** z jednej strony, a **DH** i **S** z drugiej jest fakt, iż tylko dwie ostatnie poprawki uwzględniają obok promieniowej również bezwładność osiową, ważną dla próbek smukłych, tj. względnie długich. Natomiast składowa konwekcyjna, występująca w poprawkach **DH** i **S**, daje nieznaczące różnice, co dobrze uwidacznia się na rysunkach.

### 5. Analiza wpływu geometrii próbki na wielkość efektów inercyjnych

Dla określenia przyczyn rozbieżności między wynikami obliczeń poprawek według różnych procedur, przeliczono ponownie wartości poprawek dla symulowanego procesu dynamicznego odkształcenia próbki z serii 4. Symulacja procesu zakładała zmianę smukłości próbki, przy zachowaniu bez zmian parametrów wymuszenia takich jak dla próbki 4, czyli przy niezmienionej historii prędkości odkształcenia  $\dot{\varepsilon}(\varepsilon)$ , równocześnie zachowując niezmienioną dynamiczną krzywą umocnienia  $\sigma_M^D(\varepsilon)$ . Założenie to jest właściwe, gdyż w praktyce doświadczalnej można dla każdej smukłości próbki uzyskać podobne przebiegi  $\dot{\varepsilon}(\varepsilon)$  jak podczas procesu deformacji analizowanego dla próbki 4.

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla poprawek **DH** i **S** przyjmując smukłość próbki zmienianą w granicach  $0,1 \leq s_0 \leq 0,5$ . Uzyskane wyniki, pokazane na rys. 9a, b, c, d oraz e, w postaci wykresów  $\frac{\Delta\sigma}{\sigma_M}(\log \dot{\varepsilon})$  potwierdziły, że już dla próbek o smukłości

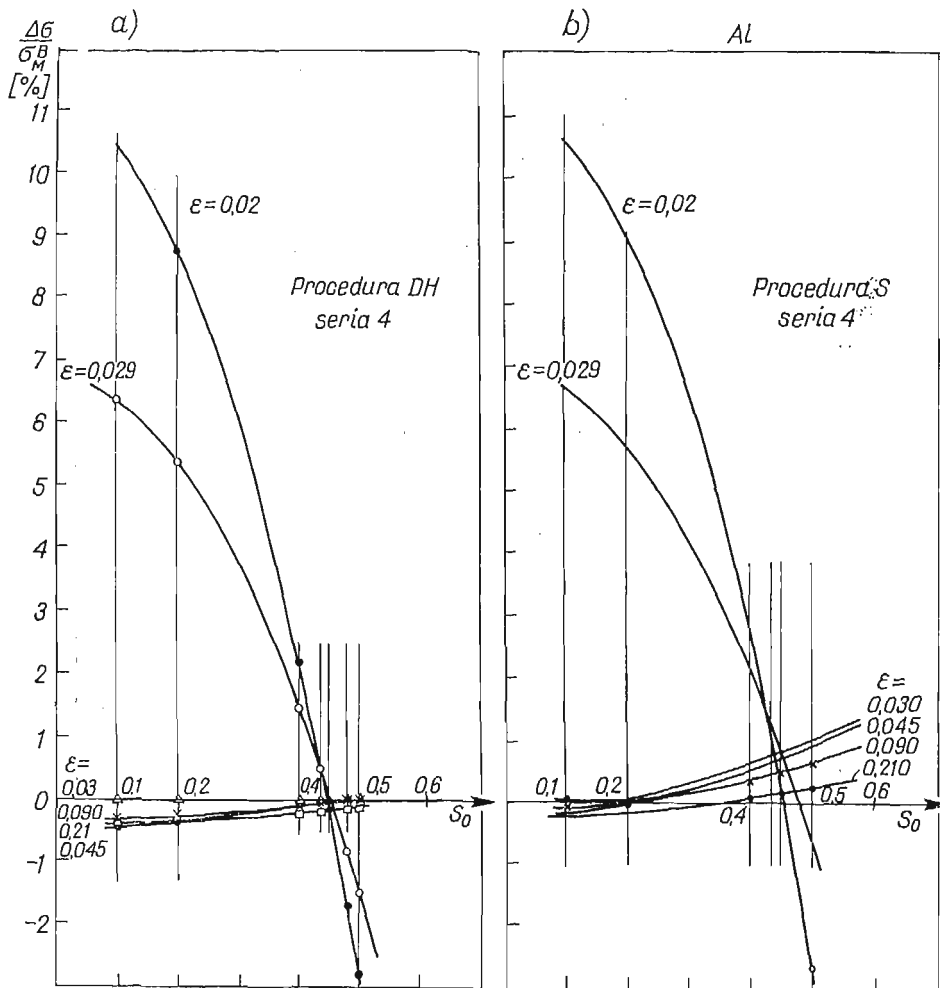


Rys. 9. Względne wartości poprawek naprężenia w funkcji odkształcenia dla próbek o różnej smukłości; a —  $s_0 = 0,5$ ; b —  $s_0 = 0,45$ ; c —  $s_0 = 0,4$ ; d —  $s_0 = 0,2$ ; e —  $s_0 = 0,1$

$s_0 = 0,4$  charakter poprawek **S** i **DH** staje się podobny do charakteru poprawek **KDH** i **K**, natomiast dla  $s_0 = 0,1$  naprężenia dla poprawek **DH** i **S** pokrywają się prawie z wartościami naprężeń dla poprawek **K**, nieznacznie tylko odbiegając od wartości naprężeń znalezionych według poprawki **KDH**. Różnice między wartościami naprężeń dla poprawek **DH** i **S** są niewielkie i maleją wraz z obniżaniem się smukłości próbki.

Przedstawione wyniki potwierdzają, że dla cienkich próbek o smukłości bliskiej 0.1 stosowanie procedury poprawkowej **K** jest dopuszczalne i nie prowadzi do znaczących błędów.

Poprawkę **KDH** możemy uważać za ograniczenie od góry wartości poprawek. Poważniejsze rozbieżności wyników otrzymanych przy pomocy różnych procedur zachodzą dla próbek długich tj. o dużej smukłości, gdyż poprawki **K** i **KDH** nie uwzględniają efektu bezwładności osiowej i w tym zakresie smukłości uznać je należy za nieprawidłowe.



Rys. 10. Zmienność względnych wartości poprawek DH i S w funkcji smukłości; a — seria 4, procedura DH; b — seria 4, procedura S

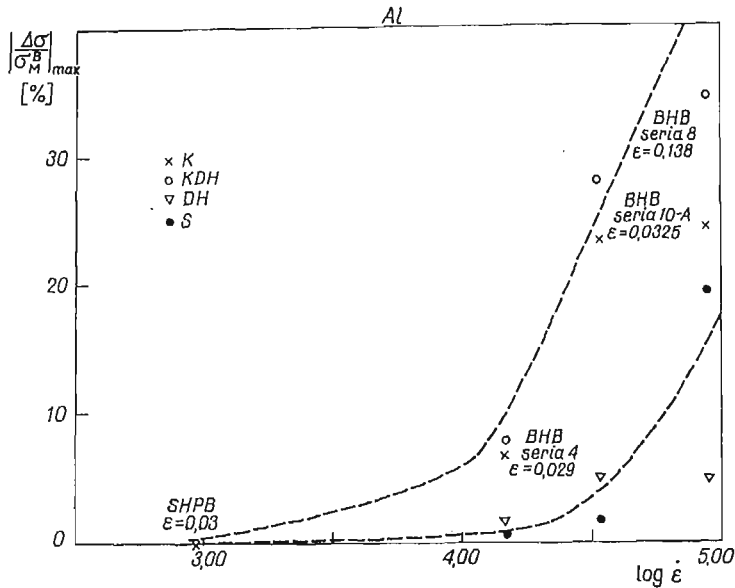
Zależność wielkości względnych poprawek bezwładnościowych w funkcji smukłości próbek przedstawiono na wykresie  $\frac{\Delta\sigma}{\sigma_M^B}(s_0)$  dla  $\varepsilon = \text{const}$ . Poprawkę względną obliczono dla próbki 4 według procedury **DH** i **S**. Wyniki obliczeń, pokazane na rys. 10a oraz 10b różnią się od rezultatów badań doświadczalnych podanych przez Lindholma [12]. Rezultatem wspomnianych badań był wykres  $\sigma_s(s_0)$  dla  $\varepsilon = \text{const}$ , z którego wynika, że wartość rzeczywistych naprężeń w próbce po korekcji według procedury Daviesa-Huntera praktycznie nie zależy od smukłości próbki. Z rys. 10 wynika, że dla odkształceń  $\varepsilon < 0,03$  wartość poprawki względnej maleje wraz ze wzrostem smukłości  $s_0$ , natomiast dla  $\varepsilon \geq 0,03$  wartość tej poprawki rośnie.

Charakter wykresu pozostaje taki sam, zarówno dla procedury **DH**, jak i **S**, z tym, że składowa konwekcyjna wprowadzona przez Samantę daje pewne podwyższenie wartości poprawki. Wartość odkształcenia  $\vartheta = 0,03$  dla próbki 4 odpowiada maksimum na wykresie  $\dot{\varepsilon}(\varepsilon)$ , w którym pochodna  $\frac{d\dot{\varepsilon}}{d\varepsilon}$ , a także przyspieszenie odkształceń  $\ddot{\varepsilon}$  zmieniają znak. Rodzina krzywych malejących  $\frac{\Delta\sigma}{\sigma_M^B}(s_0)$  staje się, począwszy od wartości  $\varepsilon \geq 0,03$  rodziną krzywych rosnących. Według procedury **DH** wartość poprawki dla próbki 4 w punkcie  $\varepsilon = 0,03$  wynosi zero, dla każdej wartości  $s_0$  ( $\ddot{\varepsilon} = 0$ ): według procedury **S** niezerową pozostaje tylko składowa konwekcyjna poprawki. Duże wartości poprawek dla odkształceń bliskich zeru spowodowane są dużymi wartościami  $\ddot{\varepsilon}$ , co wspomniano poprzednio i należy traktować je jako niepewne.

## 6. Dyskusja i wnioski

Przedstawiona zarówno jakościowa jak i ilościowa analiza wielkości i charakteru zmian poprawek bezwładnościowych podczas dynamicznego ściskania próbek walcowych wykazała złożoność analizowanego zjawiska oraz istnienie wielu możliwych przybliżeń w jego rozwiązaniu. Wzory poprawkowe omówione w pracy są jedynie pewnymi oszacowaniami, którymi należy odpowiednio się posługiwać, stąd wynikiem analizy są wnioski dotyczące właściwego zastosowania poprawek w przypadku rzeczywistych warunków doświadczalnych.

Zgodnie z oczekiwaniami stwierdzono, że efekty bezwładnościowe wzrastają w miarę zwiększania prędkości procesu ściskania, a więc przy zadanej geometrii próbki wraz ze wzrostem średniej prędkości odkształcenia. Zakres prędkości odkształcenia, w którym efekty bezwładności zaczynają w widoczny sposób wpływać na pomiar naprężenia plastycznego płynięcia pokazany został na rys. 11. Na wykresie tym sporządzonym w oparciu o dane dla aluminium z rys. 8a do 8d, przedstawiono maksymalne względne wartości poprawek naprężenia  $\left| \frac{\Delta\sigma}{\sigma_M^B} \right|_{\max}$  w funkcji  $\log \dot{\varepsilon}$ , przy czym wykresy odnoszą się do procedur poprawkowych obydwu rodzajów **K** i **KDH** oraz **DH** i **S**. Na podstawie rys. 11 można stwierdzić, że dla aluminium efekty bezwładnościowe zaczynają stanowić poważniejszy problem w określaniu dynamicznej krzywej umocnienia, tzn.  $\left| \frac{\Delta\sigma}{\sigma_M^B} \right|_{\max} \geq 5\%$ , dla prędkości



Rys. 11. Wielkości względnych poprawek bezwładnościowych w funkcji prędkości odkształcenia, otrzymanych przy zastosowaniu poszczególnych procedur

odkształcenia większych od  $10^4 \text{ s}^{-1}$ . Dla metali o większej gęstości efekty bezwładnościowe są bardziej zauważalne przy mniejszych wartościach prędkości odkształcenia.

Jako ważniejsze wnioski należy wymienić:

1. Wartość poprawek bezwładnościowych jest funkcją geometrii próbki oraz przyspieszenia odkształcenia  $\dot{\epsilon}$ , natomiast dla poprawek **KDH** i **S** jest ponadto funkcją kwadratu prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}^2$ .

2. Wartość poprawek bezwładnościowych naprężenia rośnie znacząco wraz ze wzrostem średniej prędkości odkształcenia.

3. Wyrażenie związane z przyspieszeniem tj. składowa poprawki naprężenia będąca funkcją  $\dot{\epsilon}$ , odgrywa dużo poważniejszą rolę niż wyrażenie konwekcyjne tj. składowa poprawki będąca funkcją  $\dot{\epsilon}^2$ .

4. Składowa przyspieszenia osiowego, pomijana w poprawkach **K** i **KDH** wpływa w decydujący sposób na znak naprężenia poprawkowego.

5. Korekcja początkowego odcinka krzywej umocnienia  $\epsilon < 0,03$  nie daje prawidłowych wyników dla wszystkich analizowanych poprawek, prawdopodobnie wskutek falowych zaburzeń procesu odkształcenia w początkowym okresie.

6. Dla próbek o smukłości  $s_0 \leq 0,2$  udział bezwładności osiowej w całkowitym wyrażeniu bezwładnościowym staje się znikomy i korekcja naprężenia prowadzona przy wykorzystaniu różnych procedur daje zgodne wyniki.

7. Dla próbek o smukłości  $s_0 > 0,2$  najdokładniejszą procedurą spośród stosowanych jest procedura poprawkowa Samanty. Procedura Daviesa-Huntera, która jest prostsza w przypadku obliczeń prowadzi jednak do wyników dostatecznie dokładnych.



## Literatura cytowana w tekście

1. L. D. BERTHOLF, C. H. KARNES, *Two-dimensional analysis of the split Hopkinson pressure bar system*, J. Mech. Phys. Solids, **23**, (1975) 1.
2. R. L. CARLSON, *Compression of a viscoplastic disk*. Trans. ASME Series D (J. Basic Engng), **86**, (1964). 700.
3. E. D. H. DAVIES, S. C. HUNTER, *The dynamic compression testing of solids by the method of the split Hopkinson bar*, J. Mech. Phys. Solids, **11** (1963) 155.
4. C. K. H. DHARAN, F. E. HAUSER, *Determination of stress-strain characteristics at very high strain rates*, Exp. Mech., **10** (1970) 370.
5. C. K. H. DHARAN, F. E. HAUSER, *High velocity dislocation damping in aluminium*, J. Appl. Phys., **44** (1973) 1468.
6. J. B. HADDOW, *On the compression of a thin disc.*, Int. J. Mech. Sci., **7** (1965) 657.
7. F. E. HAUSER, J. A. SIMMONS, J. E. DORN, *Strain rate effects in plastic wave propagation*, „Response of metals to high velocity deformation” ed. by P. G. Shewmon and V. F. Zackay, New York-London 1961.
8. R. HILL, *Mathematical theory of plasticity*, Oxford 1950.
9. W. JOHNSON, *Impact strength of materials*, London 1972.
10. J. KLEPACZKO, *Lateral inertia effects in the compression impact experiments*, IFTR Reports, **17** (1969).
11. J. KLEPACZKO, *Zmodyfikowany pręt Hopkinsona*, Mech. Teor. i Stos. **4** (1971) 479.
12. H. KOLSKY, *The propagation of stress pulses in viscoelastic solids*, Phil. Mag., **1** (1956) 693.
13. U. S. LINDHOLM, *Some experiments with the split Hopkinson pressure bar*, J. Mech. Phys. Solids, **12** (1964) 317.
14. U. S. LINDHOLM, L. M. YEAKLEY, *Dynamic deformation of single and polycrystalline aluminium*, J. Mech. Phys. Solids, **13** (1965) 41.
15. H. LIPPMANN, *Zur Dynamik des Schmiedens*, Arch. Eisenhüttenweis, **35** (1964) 507.
16. E. SIEBEL, *Grundlagen zur Berechnung des Kraft und Arbeitbedarf bei Schmieden und Walzen*, Stahl u. Eisen, **43** (1923) 1295.
17. S. K. SAMANTA, *Dynamic deformation of aluminium and copper at elevated temperatures*, J. Mech. Solids, **19** (1971) 117.

*Praca wykonana w problemie węzłowym 05.12 w ramach grupy tematycznej 06 pn. „Rozwijanie specjalnych metod badania własności wytrzymałościowych materiałów konstrukcyjnych”.*

## Резюме

ОЦЕНКА ИНЕРЦИАЛЬНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ВЫСТРОЙ ДЕФОРМАЦИИ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА

В работе приведены результаты и сравнения разных решений проблемы скоростного сжатия диска с учётом инерционных эффектов. Проблема эта важна с точки зрения экспериментальных исследований материалов в случае больших скоростей деформации, особенно при использовании метода модификационного стержня Гопкинсона и метода цилиндр-сержень. Систематически описано существующие оценки для осевой инерции, а также радиальной. Приведено анализ в которых случаях доминируют отдельные компоненты инерциального эффекта.

Для оценки количественной проведено вычисления отдельных оценок для реальных, полученных из экспериментов, скоростей деформации и ускорения деформации. Численный анализ представлен на примере поликристаллического алюминия. Показано, что в приближении инерциальные эффекты играют более серьёзную роль в измерении деформаций пластического течения при скоростях ряда  $10^4\text{s}^{-1}$  или больших.

## S u m m a r y

ESTIMATION OF INERTIAL EFFECTS DURING THE FAST AXIAL DEFORMATION OF  
CYLINDRICAL SAMPLES

The results and comparisons of different solutions for the problem of the fast compression of a thin disc are given with emphasis on the inertial effects. The problem is very important in the experimental investigations of the materials under high strain-rate, especially for the case of SHPB experiment and also block-bar test.

Systematic evaluation of the radial inertia and the axial inertia stress is performed. The conditions have been discussed under which the various components of the inertial effects dominate.

For quantitative estimation of the inertial effects the numerical calculation are given for various solutions in the case of real changes of strain rate and acceleration of strain obtained from experiment. Numerical analysis has been presented for polycrystalline aluminium. Results lead to the conclusion that the inertial effects are more important at the region of strain rates higher than  $10^4\text{s}^{-1}$ .

IPPT  
PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 czerwca 1978 roku*

---

PRZEGLĄD KRYTYCZNY METOD ANALIZY OSIOWO-SYMETRYCZNEGO PRZEPIYU  
PRZEZ UKŁADY ŁOPATKOWE MASZYN WIRNIKOWYCH

JOACHIM J. OTTE (GLIWICE)

1. Wstęp

1.1. Gwałtowny rozwój teoretycznych metod analizy przepływu płynu przez układy łopatkowe maszyn wirnikowych jaki miał miejsce w ostatnich 25 latach i jaki dokonuje się obecnie spowodował, że badania teoretyczne na równi z badaniami eksperymentalnymi kształtują postęp w dziedzinie analizy zjawisk przepływu. Istotną przyczyną powodującą zasadnicze jakościowe zmiany w zakresie metod obliczeniowych było pojawienie się szybko-działających elektronicznych maszyn cyfrowych. Otworzyły się tu zupełnie nowe perspektywy wynikające bezpośrednio ze wzrostu ilości i ścisłości informacji jakie można uzyskać z badań teoretycznych. Stało się możliwe uzyskanie rozwiązań numerycznych znacznej liczby problemów dla złożonych geometrii układów i przy niezbyt wielu założeniach upraszczających.

Do niewątpliwie podstawowych problemów hydro- i aerodynamiki maszyn wirnikowych (turbin, sprężarek, pomp i wentylatorów) należy zaliczyć badania przestrzennego nieustalonego przepływu płynu przez układy łopatkowe tych maszyn z uwzględnieniem rzeczywistych własności płynów. Złożoność tego zagadnienia, a przede wszystkim trudności stworzenia modelu matematycznego i następnie jego rozwiązania powodują konieczność czynienia pewnych uproszczeń, polegających zwykle na wyodrębnieniu i zachowaniu zasadniczych cech zjawiska a pominięciu mniej istotnych. Powszechnie stosowana koncepcja uproszczenia równań ruchu płynu lepkiego, dająca się ze względu na duże liczby Reynoldsa, zastosować w teoretycznych badaniach przepływu w maszynach wirnikowych, oparta jest na pojęciu warstwy przyściennej i polega na wyróżnieniu w przepływie dwóch obszarów, a mianowicie: obszaru strumienia głównego gdzie płyn traktuje się jako nielepki i obszaru warstw przyściennych, gdzie płyn traktuje się jako lepki. Dalsze uproszczenia to rozpatrywanie przepływu jako quasi-trójwymiarowego, gdzie obraz przepływu otrzymuje się w wyniku iteracyjnego procesu rozwiązywania dwóch zadań: a) przepływu płynu przy założeniu jego osiowej symetrii, czyli rozpatruje się przepływ na powierzchniach typu  $S'_2$  (rys. 1), b) opływu palisady profili na obrotowych powierzchniach prądu (powierzchnie typu  $S'_1$ ) uzyskanych w rezultacie rozwiązania poprzedniego zadania.

W aerodynamice formułuje się dwa odrębne zadania:

1) Zadanie podstawowe pierwotne, polegające na znalezieniu parametrów przepływu przy zadanych cechach geometrycznych układu przepływowego. Inaczej jest to zagadnienie analizy przepływu.

2) Zadanie odwrotne, polegające na wyznaczeniu cech geometrycznych układu przepływowego przy zadanych z góry parametrach przepływu. Używając innej nazwy jest to zadanie projektowe lub też zagadnienie syntezy przepływu.

Warto podkreślić, że o ile zagadnienie analizy jest dobrze postawione, tzn., że dla danej geometrii układu przepływowego uzyskuje się tylko jedno rozwiązanie, to zagadnienie syntezy nie ma jednoznacznego sformułowania, gdyż żądane parametry przepływu mogą być zrealizowane najczęściej przez wiele układów o różnych geometriach.

Niniejszy przegląd obejmuje jedynie prace dotyczące zagadnienia analizy osiowo-symetrycznego przepływu płynu na powierzchniach typu  $S'_2$ . Rozważania ograniczone są tu do obszaru strumienia głównego, przy czym obszar ten rozciąga się na podobszary zajęte wieńcami łopatkowymi jak i podobszary międzywieńcowe (przestrzenie międzywieńcowe). Rozpatruje się tu zarówno pojedyncze wieńce łopatkowe, stopnie jak i układy łopatkowe (wielostopniowe) maszyn wirnikowych o dowolnej ich geometrii.

1.2. Zdecydowana większość prac z dziedziny maszyn wirnikowych wykonywana jest w pracowniach i laboratoriach wielkich firm przemysłowych względnie w instytutach naukowych na zlecenie tychże firm. Biorąc to pod uwagę, zrozumiałym staje się fakt, że pewna część prac jest nieopublikowana lub też zastrzeżona do użytku wewnętrznego. Stąd też jakkolwiek niniejszy przegląd prac obejmuje praktycznie wszystkie dostępne pozycje literatury z zakresu analizy przepływu osiowo-symetrycznego w maszynach wirnikowych, to jednakże nie może on pretendować do kompletności.

W tym miejscu należy wyjaśnić pewne nieścisłości nomenklaturowe, gdyż bardzo często pojęcia: przepływ przestrzenny, trójwymiarowy, quasi-trójwymiarowy, quasi-przestrzenny, osiowosymetryczny bywają używane zamiennie, co nie zawsze jest poprawne i najczęściej jest źródłem nieporozumień. W miarę rozwoju aerodynamiki maszyn przepływowych obserwuje się jednak dążenie do bardziej ścisłego i precyzyjnego posługiwania się określonymi pojęciami, zgodnie z ich rzeczywistym znaczeniem. Przykładem może tu być pojęcie przepływu przestrzennego, które pojawiło się w momencie przejścia od modelu jednowymiarowego, gdzie obliczenia prowadzone na średniej średnicy kanału przepływowego, do modelu dwuwymiarowego, który w gruncie rzeczy jest osiowo-symetrycznym.

O przepływie przestrzennym trójwymiarowym można mówić wtedy gdy wielkości połowe opisujące ten przepływ są funkcjami trzech współrzędnych

$$\Phi = \Phi(r, \varphi, z).$$

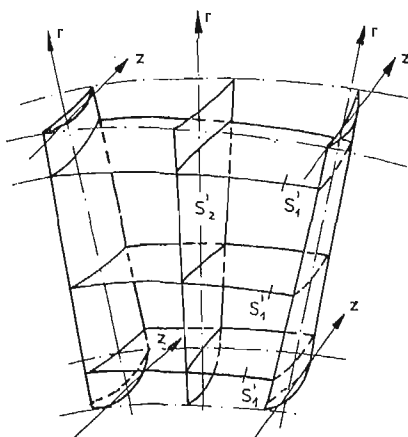
Takie ujęcie zagadnienia analizy przepływu stwarza oczywiście znaczną trudność, tak przy stawianiu warunków brzegowych jak i przede wszystkim przy rozwiązywaniu. Istotne uproszczenie obliczeń przepływu uzyskano przez wprowadzenie do rozważań względnych powierzchni przepływu. GOLLDSTEIN [16] zaproponował rozpatrzenie przepływu tylko na jednej, średniej powierzchni typu  $S_2$  (rys. 1), natomiast WU [65] wprowadził dwie rodziny powierzchni przepływu  $S_1$  i  $S_2$ , co pozwoliło sprowadzić zagadnienie przepływu przestrzennego (trójwymiarowego) do dwóch zagadnień dwuwymiarowych, gdzie wielkości połowe opisane są funkcjami:

$$\Phi_1 = \Phi_1[r(\varphi, z), \varphi, z]: \quad \Phi_2 = \Phi_2[r, \varphi(r, z), z]$$

W rezultacie operacji uśredniania względem współrzędnej obwodowej powierzchnię typu  $S_2$  otrzymuje się jako osiowo-symetryczną, oznaczaną dalej jako  $S'_2$  (rys. 1). W ten sposób dochodzi się do tzw. zagadnienia quasi-trójwymiarowego (quasi-przestrzennego) składającego się z dwóch zagadnień, z których jedno jest zagadnieniem przepływu osiowo-symetrycznego.

Dla przestrzeni międzywieńcowych, gdzie przepływ może być traktowany jako jednorodny i osiowo-symetryczny, zagadnienie quasi-trójwymiarowe sprowadza się do zagadnienia wyłącznie osiowo-symetrycznego.

W odniesieniu do metod analizy przepływu na powierzchniach typu  $S'_2$  stosowana jest przeważnie nazwa: metody analizy przepływu przez układy łopatkowe, jako że powierzchnie typu  $S'_2$  określone są w głównej mierze przez geometrię łopatek.



Rys. 1

1.3. Kluczowym zagadnieniem przy rozpatrywaniu przepływu płynu przez wieńce łopatkowe maszyn wirnikowych jest jego model matematyczny. Wraz ze wzrostem możliwości obliczeniowych maszyn cyfrowych obserwuje się tu stałą dążność do coraz większych uogólnień. Niewielka praktyczna przydatność modelu zaproponowanego przez Wu [65] sprawia, że istota problemów w zakresie sformułowania modelu matematycznego skupia się na odpowiednim uśrednieniu równań przestrzennego przepływu płynu celem uzyskania opisu przepływu na powierzchniach typu  $S'_2$ .

Pionierską pracą przedstawiającą model przepływu płynu przez wieńce łopatkowe jest praca LORENZA [31], gdzie rozpatrzono osiowo-symetryczny przepływ płynu nielepkiego i nieściśliwego. W równaniach ruchu w miejsce pochodnych względem kierunku obwodowego wprowadzana została siła masowa tzw. oddziaływania łopatek, co powoduje przyjęcie modelu przepływu przez wirnik o nieskończonej liczbie nieskończenie cienkich łopatek. Rozwinięcie tej idei znajduje się w pracy STODOLI [53]. Należy podkreślić, że w praktycznych obliczeniach model Loreza znajduje jeszcze obecnie swoje zastosowanie.

STIEPANOW [93] do modelu osiowo-symetrycznego przepływu przez wieńce łopatkowe doszedł przez uśrednienie wszystkich parametrów strumienia wzdłuż współrzędnej obwodowej i względem czasu. W wyniku tego w równaniach ruchu występuje uśredniona masowa

siła oddziaływania łopatek, prostopadła do pewnej średniej powierzchni strumienia. Takie podejście wykorzystano między innymi w późniejszych pracach [37], [40], [75], [84], [88], [89].

Rozwijając dalej koncepcję СТИЕРАНОВА, w pracach [90] i [97] wykazano, że masowa siła oddziaływania łopatek jak i współczynnik zwężenia przekroju przepływu wskutek skończonej grubości łopatek, pojawiają się w równaniach w wyniku przeprowadzenia operacji uśredniania wzdłuż wycinka obwodu pomiędzy dwoma ściankami kanału międzyłopatkowego. Przedstawiono tu także ściśle matematyczne związki między geometrią łopatek, siłami masowymi i uśrednionymi parametrami przepływu. Obliczenia wykonane w pracach [90] i [93] wykazały pełną przydatność modeli przepływu uzyskanych po przeprowadzeniu operacji uśredniania.

1.4. W literaturze przedmiotu podejmowano już próby opracowań przeglądowych, najczęściej w kontekście oceny aktualnego stanu i perspektyw rozwoju metod obliczeniowych przepływu [10], [13], [15], [19], [24], [29], [30], [40], [57], [64], [94], [95]. Problematyka analizy przepływu rozpatrywana była dosyć wycinkowo, przede wszystkim pod kątem umiejscowienia metod analizy w ogólnej tematyce badawczej maszyn wirnikowych. Niższa praca stanowi pewną próbę całościowego przedstawienia zagadnień analizy przepływu przez układy łopatkowe maszyn wirnikowych. Znaczna już ilość prac z tego zakresu powoduje, że trudno jest dokonać jednoznacznego precyzyjnego i jasnego ich podziału. Wprawdzie wszystkie prace jako na punkt wyjścia powołują się na podstawowe równania mechaniki płynów, to jednak trudność ich systematyzacji wynika z różnorodności założeń upraszczających czynionych świadomie i nieświadomie, różnorodności sposobów dochodzenia do równań końcowych jak i mnogości zastosowanych metod rozwiązywania. Niewątpliwie pomocnymi w tym przypadku mogą być między innymi takie kryteria jak: model przepływu, usytuowanie obszaru prowadzonej analizy przepływu w układzie łopatkowym, typ i forma końcowa równań różniczkowych opisujących zagadnienie analizy, zestaw niewiadomych w równaniach końcowych, metody rozwiązywania.

W przedstawionym niżej krytycznym przeglądzie metod analizy pokuszono się o ich pewną systematyzację częściowo wykorzystując wymienione kryteria. Wyróżniono tu cztery charakterystyczne, zasadniczo się od siebie różniące, grupy metod analizy osiowo-symetrycznego przepływu płynu przez układy łopatkowe maszyn wirnikowych. Są to:

- metody oparte na pojęciu linii prądu,
- metody oparte na pojęciu funkcji prądu,
- metody jednego parametru,
- metody tarczy wirowej.

## 2. Metody analizy wykorzystujące pojęcie linii prądu

Metody bazujące na pojęciu linii prądu stanowią większość prac z zakresu analizy osiowo-symetrycznego przepływu. Wynika to z faktu, że równania przepływu uzyskuje się tu w postaci dogodnej do interpretacji fizycznej oraz z tego że przyjęcie odpowiednich założeń odnośnie własności geometrycznych linii prądu, pozwala na znaczne uproszczenie tych równań.

Należy tu podkreślić, że z matematycznego punktu widzenia przyjęcie kształtu linii prądu jest nieuzasadnione, gdyż podlega ono określeniu w trakcie rozwiązywania zadania. W zależności więc od przyjętych założeń uzyskuje się odpowiedni model przepływu: od najbardziej prostego, gdy zakłada się przepływ wzdłuż linii prostej, do całkiem ogólnego gdy założeń takich się nie czyni.

**2.1. Model „stopnia cylindrycznego”.** W tzw. teorii „stopnia cylindrycznego” przyjmuje się, że merydionalne linie prądu (tworzące obrotowych powierzchni prądu) są liniami prostymi równoległymi do osi obrotu. Metody tej grupy nazywane są również, głównie przez badaczy angielskich, metodami równowagi promieniowej. Chodzi w tym przypadku o uproszczone równanie równowagi promieniowej cząstek płynu

$$(2.1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{c_u^2}{r}$$

opisujące przepływ w stopniu cylindrycznym.

Z założenia cylindryczności przepływu wynika, że wielkości prędkości promieniowych, kąta nachylenia linii prądu i krzywizny linii prądu przyjmują wartości zerowe czyli

$$(2.2) \quad c_r = 0, \quad \gamma = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial m} = 0$$

co znacznie ułatwia uzyskanie rozwiązania, pozwalając otrzymać je nawet w formie analitycznej. Zagadnienie przepływu w stopniu cylindrycznym jest bardzo wszechstronnie opracowane. W ogólnym sformułowaniu uwzględnia się tu promieniowe gradienty parametrów spoczynkowych na wlocie do wieńca jak i rozkład strat wzdłuż promienia. Obliczenia prowadzi się tylko w odniesieniu do przestrzeni międzywieńcowych.

W praktycznych obliczeniach inżynierskich model przepływu cylindrycznego jest jeszcze obecnie dosyć szeroko stosowany.

Literatura dotycząca tego zagadnienia jest obszerna, przy czym w miarę kompletne ujęcia znaleźć można w książkach [11], [22], [55], [56], [70], [79], [80], [81], [91], [100], z których na szczególną uwagę, ze względu na ogólne potraktowanie problemu zasługuje praca SIROTKINA [91].

**2.2. Model stopnia stożkowego.** Rozwinięciem i uogólnieniem teorii stopnia cylindrycznego na przypadek rozszerzania lub zwężania się merydionalnego przekroju kanału przepływowego jest model przepływu w stopniu stożkowym. Zakłada się tu, że linie prądu są prostoliniowymi tworzącymi stożkowych obrotowych powierzchni prądu. Znajduje to swoje odbicie w założeniach

$$\gamma \neq 0, \quad c_r \neq 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial m} = \frac{1}{r_k} = 0.$$

Przy rozwiązywaniu równania przepływu

$$(2.3) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{c_u^2}{r} - c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} - c_z \frac{\partial c_r}{\partial z},$$

które po uwzględnieniu założeń zapisać można jeszcze w postaci

$$(2.4) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{c_u^2}{r} - c_m \sin \gamma \frac{\partial c_m}{\partial m}$$

wykorzystuje się ([34], [74], [85], [96], [100]) fakt, że dla powierzchni stożkowych zachodzi relacja

$$(2.5) \quad \frac{\partial \operatorname{tg} \gamma}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{tg}^2 \gamma}{\partial r},$$

pozwalająca na uzyskanie w niektórych wypadkach rozwiązań analitycznych.

W innych pracach [11], [75], [85] bazujących na modelu przepływu stożkowego pochodne określające zmianę prędkości promieniowej i kąt nachylenia linii prądu zamienia się wielkościami

$$\frac{\partial c_r}{\partial z} = \frac{c_{ri} - c_{ri-1}}{z_i - z_{i-1}}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{r_i - r_{i-1}}{z_i - z_{i-1}}$$

co z konieczności przyjęcia dość znacznych odległości pomiędzy kolejnymi przekrojami (przechodzą one najczęściej przez kolejne szczeliny międzywieńcowe) powoduje, że jest to jednoznaczne z aproksymacją linii prądu odcinkami powierzchni stożkowej.

W przytoczonych wyrażeniach „i” oznacza kolejny punkt na danej linii prądu.

Należy zaznaczyć, że model przepływu stożkowego ma większe znaczenie dla zadań projektowych, gdyż w przypadku zagadnień analizy przepływu mogą mieć miejsce pewne rozbieżności w przyjętym kształcie linii prądu.

Jeżeli zrezygnuje się z założenia prostoliniowości linii prądu i przyjmie się je w przybliżeniu odpowiednio do kształtu linii ograniczających kanał przepływowy w przekroju merydionalnym, czyli gdy krzywizna linii prądu może być różna od zera, to mamy do czynienia z uogólnionym modelem stopnia stożkowego.

Kąt nachylenia  $\gamma$  oraz krzywiznę  $1/r_k$  zadaje się tu w przestrzeniach bezłopatkowych jako ciągle funkcje promienia. Funkcje te najczęściej obiera się jako liniowe lub paraboliczne [99]. Założenie rozkładu  $\gamma = \gamma(r)$ ,  $r_k = r_k(r)$  jest pewną hipotezą, której przyjęcie oznacza, że znane są pierwsza i druga pochodna merydionalnej linii prądu, lecz samo równanie tej krzywej tzn. położenie danej linii prądu jest nieznane i trzeba je określić w wyniku rozwiązania równań przepływu. Funkcje  $\gamma(r)$ ,  $r_k(r)$  powinny być dobrane w ten sposób [91] aby kształt linii prądu gładko przychodził w zarys merydionalnego przekroju kanału przepływowego. W zagadnieniach analizy założenia często się nie sprawdzają.

Model uogólnionego przepływu stożkowego wykorzystywany jest przede wszystkim w obliczeniach projektowych pojedynczych izolowanych stopni, przy czym oprócz hipotetycznego promieniowego rozkładu kąta nachylenia i krzywizny linii prądu uwzględnia się także promieniowe gradienty parametrów spoczynkowych strumienia płynu i promieniowy rozkład strat. Najbardziej ściśle sformułowanie takich zadań podano w pracy [91].

**2.3. Model przepływu falistego.** Analizując oddziaływanie łopatek i wpływ gradientów parametrów przepływu na ruch cząsteczek płynu w maszynie wielostopniowej można dojść do wniosku, że poruszają się one po torach, które w rzucie na płaszczyznę merydionalną osiową są liniami falistymi.

Często kolejne stopnie w wielostopniowych maszynach wirnikowych mogą być z pewnym przybliżeniem rozpatrywane jako powtarzające się (w języku niemieckim: Repetierstufen [55]) tzn., że pod względem cech geometrycznych stopnie te różnią się nieznacznie.



W takim przypadku oczekuje się, że również rozkłady parametrów przepływu będą się periodycznie powtarzały. Przy pewnych dodatkowych założeniach spełnione może to być dla płynu nieściśliwego, co zostało rozpatrzone przez SEIPPELA [47].

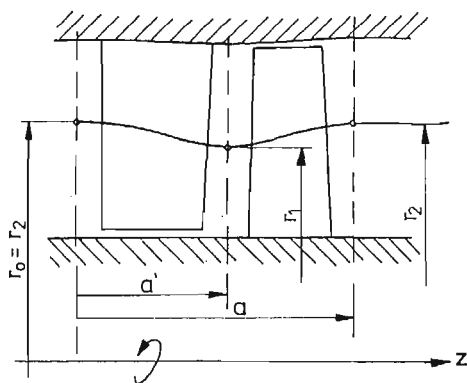
Powyższą koncepcję dla przepływu płynu ściśliwego rozwinął GYARMATHY [17], [55]. Uwzględniając różną szerokość wieńca stojanowego i wirnikowego, przyjęto tu następujące równanie linii prądu

$$(2.6) \quad r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) + \frac{1}{2}(r_2 - r_1) \cos \frac{2\pi Z}{a}$$

gdzie:

$$Z = z - \left( a' - \frac{a}{2} \right) \frac{1 - \cos \frac{2\pi z}{a}}{1 - \cos \frac{2\pi a'}{a}}$$

Pozostałe wielkości podano na rys. 2.



Rys. 2

Rozwiązania uzyskane przy założeniu periodyczności przepływu mają obecnie niewielkie znaczenie praktyczne. Mogą być ewentualnie przydatne w analizie wpływu niektórych cech geometrycznych wieńców na parametry przepływu.

Znacznie większe znaczenie praktyczne ma inny model przepływu falistego w którym rozpatrując parametry przepływu w kolejnych szczelinach (przestrzeniach) międzywieńcowych zakłada się, że przebieg merydionalnej linii prądu między dwoma kolejnymi przekrojami (rys. 3) może opisać formuła [55]

$$(2.7) \quad r = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{b} z - \delta \cos \frac{\pi z}{b}$$

gdzie:

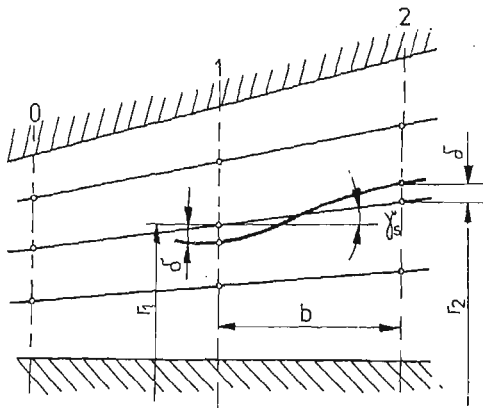
$$\delta = \frac{1}{2}(r_2 - r_1 - b \operatorname{tg} \gamma_s),$$

na podstawie której można obliczyć pierwszą i drugą pochodną

$$r' = \frac{r_2 - r_1}{b} + \frac{\pi\delta}{b} \sin \frac{\pi z}{b},$$

$$r'' = \frac{\pi^2 \delta}{b^2} \cos \frac{\pi z}{b},$$

co w konsekwencji pozwala obliczyć kąt nachylenia linii prądu i jej krzywiznę. Pierwszy i drugi składnik prawej strony równania linii prądu opisują przebieg średniej linii stożkowej.



Rys. 3

Jednym z założeń niniejszego modelu jest przyjęcie, że ekstrema merydionalnej linii prądu występują w rozpatrywanych przekrojach w przestrzeni międzywieńcowej, co odpowiednio uwzględnia trzeci składnik równania (2.7).

Rozkład parametrów określa się z równania równowagi promieniowej

$$(2.8) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{c_u^2}{r} + \frac{c_m^2}{r_k} \cos \gamma - c_m \frac{\partial c_m}{\partial m} \sin \gamma,$$

przy czym bardzo często zakłada się, że  $\partial c_m / \partial m \approx 0$ .

Przedstawiony sposób postępowania, mniej lub więcej uproszczony, jest najczęściej spotykany w pracach dotyczących tego zagadnienia przy czym pierwszeństwo w tym względzie należy się pracom Traupela. Podobnie zagadnienie to ujął VAVRA [58].

Hipoteza o falistym przebiegu linii prądu okazała się bardzo płodną dla szeregu prac. W pracy [51] sformułowano problem przepływu izentropowego w bardzo niewygodnej do prowadzenia obliczeń siatce współrzędnych naturalnych (ortogonalnych), gdzie równanie równowagi przyjmuje postać

$$(2.9) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{c_u^2}{r} \cos \gamma + \frac{c_m^2}{r_k}.$$

Jako krzywą łączącą poszczególne punkty linii prądu między wieńcami proponuje się tu linię sinusoidalną. Wu w dyskusji do tej pracy krytycznie ocenił możliwość aproksymacji linii prądu tylko na podstawie rozkładu parametrów w szczeliny międzywieńcowej.

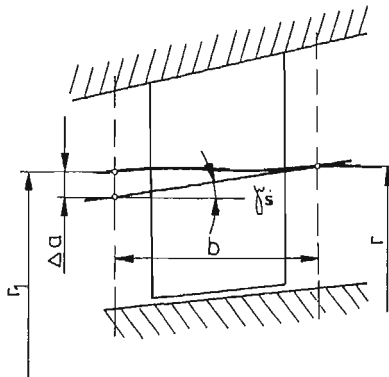
W innej pracy [8] bazującej na podobnym ujęciu zagadnienia, krzywiznę linii prądu określa się przy pomocy pochodnych  $\partial c_r/\partial r$  i  $\partial c_r/\partial z$  wprowadzając jednocześnie pewne dodatkowe wielkości szacowane na podstawie badań doświadczalnych. Celem uwzględnienia strat przepływu rozkłady prędkości uzyskane dla przepływu izentropowego mnoży się tu przez współczynniki prędkości.

W pracy [45] podano równanie równowagi promieniowej, w formie bezwymiarowej, przy zastosowaniu liczb Macha. Dla sumarycznego ujęcia wpływu tarcia wprowadzono uśrednioną po obwodzie wielkość strat. Krzywiznę określono zgodnie z postępowaniem podanym przez Traupela. Na podstawie analizy uzyskanych wyników stwierdzono m.in., że do aproksymacji przebiegu linii prądu w miejsce funkcji  $\cos$  bardziej odpowiednia byłaby funkcja  $\cos^2$ .

Do najbardziej wyczerpujących prac opartych na hipotezie falistego sinusoidalnego przepływu należą prace BMMERTA i FIEDLERA [2], [3], w których, wychodząc z podanych jak i poprzednio założeń, krzywiznę linii prądu określa się za pomocą następującej formuły

$$(2.10) \quad \frac{1}{r_k} = -\frac{\Delta a}{2} \frac{\pi^2}{b^2} \cos^3 \gamma_s,$$

gdzie poszczególne wielkości objaśniono na rys. 4.



Rys. 4

W ramach modelu płynu idealnego straty ujmują się tu poprzez promieniowy rozkład gradientu entropii. Uwzględnia się tu także gradienty energii całkowitej. W pracy [2] założono dodatkowo, że w rozpatrywanym przekroju  $\partial p/\partial z = 0$ .

Równanie końcowe służące do określenia rozkładu parametrów przepływu wzdłuż promienia uzyskano w następującej postaci:

$$(2.11) \quad w = C + \int \left[ \frac{1}{w} k(r) - f(r) - wg(r) \right] dr,$$

gdzie przez  $C$  oznaczono stałą całkowania. Powyższe równanie wraz z równaniem ciągłości rozwiązuje się na drodze kolejnych przybliżeń.

Oprócz hipotezy sinusoidalnego przebiegu linii prądu przyjmuje się niekiedy, że można ją przedstawić wielomianem odpowiednio wysokiego stopnia, jak to uczyniono w pracy [67], gdzie zakłada się w tym celu wielomian algebraiczny

$$r(z) = \sum_{n=0}^5 a_n z^n$$

Istnieją również prace [11], [71], w których dążono do chociażby przybliżonego uwzględnienia oddziaływania łopatek. Udało się to w stosunku do wieńców stojanowych, dla których przy szeregu uproszczeniach, między innymi przy założeniu, że  $\sin \gamma c_m \frac{\partial c_m}{\partial m} = 0$  wyrowadzono formuły określające rozkład parametrów za takimi wieńcami. Wydaje się, że metody te mają większą wartość poglądową aniżeli praktyczną.

Podstawową wadą wyżej opisanych metod jest to, że parametry określające geometrię linii prądu otrzymuje się na podstawie rozkładu parametrów przepływu w przestrzeniach międzywieńcowych, podczas gdy w przeważającej mierze układ przepływowy wypełniają wieńce łopatkowe.

**2.4. Model przepływu przez wieńce o długich kanałach międzyłopatkowych.** W odróżnieniu od wyżej rozpatrywanych modeli przepływu, gdzie zagadnienie stawiane jest w przestrzeniach międzywieńcowych, w niniejszym przypadku analizuje się przepływ w wyłącznie w przestrzeni międzyłopatkowej. Stąd w równaniach równowagi pojawia się człon odpowiadający oddziaływaniu łopatek na strumień. Odpowiednie równanie dla kierunku promieniowego przyjmuje więc postać:

$$(2.12) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{c_u^2}{r} + \frac{c_m^2}{r_k} \cos \gamma - c_m \frac{\partial c_m}{\partial m} \sin \gamma + F_{2r}$$

gdzie:  $F_{2r}$  jest składową promieniową siły oddziaływania łopatek. Rozwiązania poszukuje się przy założeniu osiowej symetrii przepływu co inaczej odpowiada analizie przepływu przez pewien „fikcyjny” wieńiec o nieskończonej liczbie łopatek.

Jakkolwiek pojęcie „długiego kanału międzyłopatkowego” nie jest ściśle sprecyzowane to można uznać, że dotyczy to wieńców gdzie względna podziałka i wysokość spełniają relacje  $t/l < 0,8$ ;  $h/l < 0,8$ .

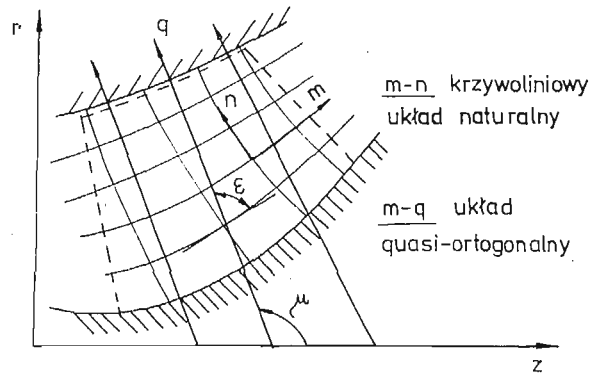
Zagadnienie analizy przepływu przy tak sformułowanym modelu zostało postawione w pracy [18] jak również w [54] i [55], głównie dla wieńców typu osiowo-promieniowego o długich kanałach prowadzących czynnik. Prowadząc rozważania w układzie współrzędnych normalnych (naturalnych) końcowe równania przepływu otrzymano tu w postaci

$$(2.13) \quad \frac{\partial w}{\partial n} + Pw + Q = 0,$$

gdzie przez  $P$  i  $Q$  oznaczono odpowiednie wyrażenia funkcyjne.

Według powyższej metody w pracy [23] przeprowadzono analizę przepływu w wirniku promieniowo-osiowej turbiny wodnej typu Francisca, natomiast w pracy [62] przeprowadzono analizę parametrów przepływu w wieńcu wirnikowym stopnia sprężającego z merydionalnym przyspieszeniem strumienia, również charakteryzującym się stosunkowo długim kanałem międzyłopatkowym.

Prowadzenie obliczeń w układzie współrzędnych krzywoliniowych (naturalnych) jest niezmiernie utrudnione przez zmiany położenia punktów węzłowych siatki przepływu w trakcie kolejnych iteracji. Problem uproszczenia procedur obliczeniowych przez wprowadzenie quasi-ortogonalnej siatki przepływu (rys. 5) rozpatrzono w pracy [25], [48],



Rys. 5

[63], [87]. Natomiast całkowanie równań wzdłuż dowolnych krzywych, w zastosowaniu do analizy parametrów strumienia w wirnikach turbin wodnych, przedstawiono w pracy [101].

W wyżej wymienionych pracach przepływ traktowany jest przeważnie jako izentropowy, a także jako homoenergetyczny. Ogólniejsze ujęcie zagadnienia analizy z uwzględnieniem strat przepływu jest rozpatrywane przez szereg autorów [21], [35], [48], [87]. Nieodwracalność zjawiska można ująć przez aproksymację przemian rzeczywistych politropami [48], względnie zadając rozkład współczynnika strat przepływu [21], [35] lub entropii [87]. W pracy [48], przy zastosowaniu quasi-ortogonalnego układu współrzędnych, otrzymano w ten sposób zasadnicze równanie przepływu w formie

$$(2.14) \quad w \frac{dw}{dq} = Aw^2 + Bw + C$$

gdzie  $q$  oznacza kierunek wyznaczony przez dowolną krzywą, zaś  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są wyrażeniami funkcyjnymi.

Otrzymane natomiast w pracy [35] równanie

$$(2.15) \quad w \frac{\partial w}{\partial n} + Pw^2 + Qw + T = 0,$$

gdzie:

$$P = \frac{\sin^2 \beta}{r_k} + \frac{\operatorname{ctg} \beta_p \sin \beta \cos \beta}{r} + (\operatorname{ctg} \beta_p \sin \gamma - \operatorname{tg} \delta \cos \gamma) \sin \beta \frac{\partial \cos \beta}{\partial m}$$

$$Q = \sin \beta \left[ 2\omega \operatorname{ctg} \beta_p + (\operatorname{ctg} \beta_p \sin \gamma - \operatorname{tg} \delta \cos \gamma) \cos \beta \frac{\partial w}{\partial m} \right],$$

$$T = -\frac{\partial h_0^*}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\zeta w_0^2)}{\partial n} + (\operatorname{ctg} \beta_p \sin \gamma - \operatorname{tg} \delta \cos \gamma) \sin \beta \cos \beta \frac{w_0^2}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial m}$$

podobne w formie do poprzedniego, stanowi rezultat uogólnienia modelu przepływu w stosunku do zagadnienia rozpatrzonego w pracach [18], [54], [55].

W przedstawionych metodach przepływ analizuje się wyłącznie na odcinku wieńca łopatkowego. Jest to jednocześnie jedna z głównych przyczyn znacznych błędów w określeniu parametrów w strefach brzegowych przy krawędzi wlotowej i wylotowej łopatek. Na przepływ w tych strefach bardzo istotnie wpływają warunki panujące w obszarach sąsiednich, co w obliczeniach nie znajduje swojego odbicia. To, że metody te zostały najwcześniej wykorzystane praktycznie wynika z regularnych kształtów o znacznej krzywiznie linii tworzących kanały przepływowe w przekroju merydionalnym (osiowym) ułatwiających wyznaczenie geometrii linii prądu i przyspieszających obliczenia.

**2.5. Ogólny model przepływu — metody krzywizny linii prądu.** Pod pojęciem ogólnego modelu przepływu należy rozumieć model bazujący na równaniach ruchu Eulera w których oddziaływanie łopatek na strumień modelowane jest odpowiednią siłą masową, przy czym zagadnienie stawia się w całym obszarze przepływu tzn., że przepływ rozpatruje się jednocześnie tak w przestrzeniach międzywieńcowych jak i międzyłopatkowych dla dowolnej geometrii układu przepływowego, nie czyniąc żadnych wcześniejszych założeń o charakterze rozwiązania.

W przybliżony sposób ujmuje się tu także dyspację energii związaną ze stratami przepływu. Obecnie we wszystkich placówkach zajmujących się badaniami zjawisk przepływu usilnie dąży się do praktycznego zrealizowania, w formie odpowiednio uniwersalnych programów obliczeniowych na EMC, metod analizy według przedstawionego wyżej modelu przepływu.

Jednym z trudniejszych problemów w metodach bazujących na pojęciu linii prądu jest wyznaczenie jej geometrii na podstawie położenia punktów węzłowych w poszczególnych przekrojach obliczeniowych. Poszukuje się tu funkcji aproksymujących na których można by wykonać m.in. takie operacje analityczne jak różniczkowanie z rozsądną dokładnością. Metody te zwane są metodami „krzywizny linii prądu” (streamline curvature method) [22], [25], [33], lub też metodami „ciągłości linii prądu” (streamline continuation method) [13].

Należy zwrócić tu uwagę, że nazwa metody krzywizny linii prądu (MKLP) pojawiła się dopiero przy rozwiązywaniu ogólnego modelu przepływu, jakkolwiek pojęcie krzywizny linii prądu występuje także w metodach bazujących na prostszych modelach (uogólniony model stopnia stożkowego, model przepływu falistego, model przepływu przez wieńce łopatkowe o długich kanałach). Nazwa ta nie w pełni oddaje więc specyfikę metody i według autora poprawniejsza byłaby nazwa metoda ciągłości linii prądu, która użyta została w pracy [13]. Uwzględniając jednak fakt, że wcześniej utrwaliła się i jest w użyciu nazwa MKLP, również w dalszych rozważaniach utrzymana zostanie ta nazwa.

W literaturze niewiele jest prac dotyczących analizy przepływu osiowo-symetrycznego i ujmujących w zadawalający sposób ogólny model przepływu. Do jednej z pierwszych należy zaliczyć pracę STIEPANOWA [93], w której między innymi rozpatrzono możliwość uwzględnienia strat w równaniach przepływu, a także przeanalizowano problem dokładności opisu osiowo-symetrycznego ruchu płynu równaniami uśrednionymi względem czasu i współrzędnej obwodowej.

Dalsze rozwinięcie teoretycznych podstaw analizy przepływu osiowo-symetrycznego zostało dokonane przez SIROTKINA [86], [87]. Zastrzeżenie może budzić tu realizacja założenia regularności linii prądu. Dotyczy to także pracy [82], w której podano m.in. wyniki analizy przepływu przez stopnie turbinowe.

Stosunkowo kompletny model przepływu przedstawiono w pracach [36], [38] w odniesieniu do czynnika nieściśliwego, oraz w pracy [37] w odniesieniu do płynu ściśliwego, gdzie zagadnienie analizy ujęto w formie uwzględniającej wymogi programowania na EMC. Rozwiązanie równania końcowego typu

$$(2.16) \quad c_m \frac{\partial c_m}{\partial r} + A c_m^2 + B c_m + C = 0,$$

gdzie  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są wyrażeniami funkcyjnymi określonymi osobno dla każdego podobszaru przepływu, uzyskuje się tu na drodze iteracyjnej.

Inny sposób przedstawienia linii prądu wykorzystano w pracy [44], gdzie merydionalne linie prądu będące funkcjami współrzędnej osiowej  $r_m = r_m(z)$  przy pomocy relacji

$$(2.17) \quad t_m = \int_{z_0}^z \frac{dz}{c_z}; \quad c_z = f(r_m, z)$$

przetransformowano na funkcję czasu. Podane w tej pracy wyniki eksperymentu wskazują na dostateczną ich zgodność z obliczeniami.

Metody opierające się na pojęciu linii prądu mają tę zaletę, że w równaniach opisujących przepływ łatwo można wyodrębnić poszczególne człony dokonując fizycznej interpretacji każdego z nich. Szeroka analiza wpływu takich członów występujących w równaniu równowagi promieniowej została przeprowadzona przez SMITHA [52].

W przedstawionych pracach większy nacisk położono na odpowiednie ujęcie modelu matematycznego mniej natomiast uwagi poświęcono praktycznej realizacji tych metod i konstrukcji efektywnych algorytmów obliczeniowych, co przy tego rodzaju metodach stanowi nierzadko o ich przydatności.

Zagadnieniem obliczeń numerycznych poświęcono rozdział w książce HORŁOCKA [22], pewne procedury podano także w pracach [37], [38], zaś w pracy [49] rozpatrzono problem numerycznego wyznaczania charakterystyk linii prądu wraz z analizą stosowanych w tym względzie metod.

Metoda rozwiązywania sformułowanych w analizie przepływu zagadnień brzegowych oparta jest w ogólności na koncepcji rozwiązywania równań różniczkowych „metodą prostych”. Z góry założone tu iteracyjne dochodzenie do ostatecznego rozwiązania, polegające na tym, że w jednym kroku obliczeniowym zakłada się charakterystyki geometryczne linii prądu a w następnym się je oblicza i przyjmuje do kolejnego kroku, wyłania jednakże kompleks problemów związanych ze stabilnością i zbieżnością procedur obliczeniowych. W trakcie kolejnych obliczeń iteracyjnych obserwuje się tu zjawisko „przenoszenia błędów”. Tym zagadnieniom, jak i problemom zbieżności i dokładności metod obliczeń numerycznych, wiele uwagi poświęcono w pracy [61]. Dla zabezpieczenia zbieżności procesu iteracyjnego wprowadza się najczęściej tzw. współczynniki (czynniki) relaksacji

[22], [37], [72], [73], [82], przy czym znajdują one zastosowanie przy określeniu nowych współrzędnych linii prądu i prędkości

$$(2.18) \quad \begin{aligned} r &= r^{(\mu)} + \omega_1 (r^{(\mu+1)} - r^{(\mu)}), \\ c_m &= c_m^{(\mu)} + \omega_2 (c_m^{(\mu+1)} - c_m^{(\mu)}), \end{aligned}$$

gdzie:

$\omega_1, \omega_2$  są czynnikami relaksacji, natomiast  $\mu$  jest numerem przybliżenia.

Obecnie metody krzywizny linii prądu bazujące na ogólnym modelu przepływu są w dalszym ciągu rozwijane. Istotnym momentem jest tu ograniczenie ze względu na liczbę Macha. Jakkolwiek bowiem równanie (2.16) wraz z uzupełniającym równaniem ciągłości w formie

$$\dot{m} = 2\pi \int_0^a \rho c_m r \cos \varepsilon dq$$

(gdzie  $q$  jest współrzędną quasi-ortogonalną) tworzą układ równań różniczkowo całkowy, to jednakże fakt zadawania odpowiednich warunków brzegowych na wlocie oraz wyznaczanie charakterystyk geometrycznych linii prądu na podstawie wszystkich punktów węzłowych danej linii powoduje, że układ ten ma charakter „eliptyczny”, czyli poprawność metody jest dotrzymywana dla liczb Macha  $M_m = c_m/a < 1$ . Ze względu na to, że ograniczenie to nie jest określone „jawnie”, w niektórych pracach [33] proponuje się stosowanie metod krzywizny linii prądu do wartości  $M_m = 1.1$ .

### 3. Metody analizy wykorzystujące pojęcie funkcji prądu

W odróżnieniu od metod opartych na pojęciu linii prądu, które rozwijały się stopniowo, dążąc do coraz bardziej ogólnego modelu, metody wykorzystujące pojęcie funkcji prądu, ze względu na bezpośredni związek z postęпами elektronicznej techniki obliczeniowej, znalazły zastosowanie od razu w ogólnym modelu przepływu.

Definycyjnie funkcja prądu w przepływie osiowo-symetrycznym opisana jest formułami

$$(3.1) \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = r\tau \rho c_z; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -r\tau \rho c_r$$

gdzie  $\tau$  jest współczynnikiem zwężenia przekroju, zaś  $\psi$  jest funkcją prądu.

Klasyczną już pracą wykorzystującą pojęcie funkcji prądu, nie tracącą nic ze swej aktualności, jest praca Wu [65], dająca początek współczesnym metodom analizy przepływu przestrzennego. Przez długi okres czasu była ona jednak przykładem luki między opisanym tu analitycznym modelem przepływu a możliwościami obliczeniowymi. W swej bezpośredniej formie model Wu może być zastosowany tylko do wieńców izolowanych (pojedynczych). W bardziej ścisłym ujęciu, zagadnienie analizowane przez Wu zostało rozpatrzone przez SIROTKINA [89], tak w odniesieniu do modelu przestrzennego jak i quasi-trójwymiarowego. W odróżnieniu od pracy [65] gdzie siły masowe oddziaływania łopatek określa się na podstawie rezultatów poprzedniego przybliżenia, siły te wyrażone są tu bezpośrednio przez niewiadomą funkcję  $\psi$ .



Wykorzystując pojęcie funkcji prądu w analizie przepływu osiowo-symetrycznego dochodzi się do zagadnień brzegowych opisanych równaniami różniczkowymi o pochodnych cząstkowych, które dla liczby Macha  $M_w = \frac{w}{a} < 1$  są typu eliptycznego, natomiast dla  $M_w > 1$  — typu hiperbolicznego.

Rozpatrując zagadnienie algorytmów i procedur obliczeniowych można w zakresie metod analizy opartych na pojęciu funkcji prądu wyróżnić dwie podstawowe metody pozwalające na numeryczne rozwiązanie otrzymanych tu równań różniczkowych. Są to metoda różnic skończonych oraz metoda elementów skończonych. Stosowanie tych metod wiąże się z ogromem pracy obliczeniowej, wymagającym z kolei szybko działających maszyn cyfrowych o dużej pojemności pamięci. Takie możliwości powstały dopiero w ostatnim dziesięcioleciu i stąd też od tego momentu datuje się dynamiczny rozwój metod analizy osiowo-symetrycznego przepływu, oparty na pojęciu funkcji prądu. Publikacji z tego zakresu jest jeszcze niewiele przy czym najczęściej są one napisane dość ogólnikowo.

Warto wspomnieć także o próbie analitycznego rozwiązania zagadnienia przepływu na powierzchni  $S'_2$ . W pracy [69] po transformacji obszaru przepływu na obszar prostokąta rozwiązania równania różniczkowego poszukiwano zgodnie z wariacyjną metodą Galerkiną. Ze względu na brak dalszych prac w tym zakresie metody analityczne nie zostały wyszczególnione.

**3.1. Metody różnic skończonych (metody siatek)** Metody te sprowadzają się w ogólnym zarysie do tego, że w obszarze płaskim w którym poszukiwane jest rozwiązanie wyróżnia się zbiór punktów będących punktami węzłowymi pewnej siatki, następnie równanie różniczkowe zastępuje się w tych węzłach odpowiednimi równaniami różnicowymi, które z kolei w oparciu o warunki brzegowe służą do wyznaczenia poszukiwanych wartości rozwiązania przybliżonego.

Pierwszą pracą bazującą na uproszczonym modelu Wu i wykorzystującą powyższą metodę obliczeń jest praca MARSHA [32]. Przedstawiono tu w ogólnym zarysie opis programu obliczeniowego metody analizy na średniej powierzchni przepływu. Otrzymane tu podstawowe równanie opisujące przepływ:

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + E \frac{\partial \psi}{\partial x} = Q(x, y),$$

gdzie  $x$  i  $y$  są współrzędnymi ukośnej siatki przepływu, po aproksymacji wyrażeniami różnicowymi, sprowadzono do postaci macierzowej

$$(3.3) \quad [M] \cdot [\psi] = [Q],$$

gdzie  $[M]$  jest macierzą pasmową, natomiast  $[\psi]$  i  $[Q]$  są macierzami kolumnowymi. Zapis macierzowy wykorzystano następnie przy konstrukcji programu obliczeniowego na EMC. Przedstawione wyniki wykazują dużą zgodność z rezultatami badań eksperymentalnych.

W pracy GOLDINA [68], w odniesieniu do metody siatek, rozważono możliwości otrzymania rozwiązania na drodze iteracyjnej, konkretne zaś zagadnienie analizy przepływu beztarciowego (izentropowego) przez stopnie osiowe zostało rozpatrzone w pracach BINIARISA [5], [6]. Rozwiązanie uzyskuje się tu na drodze iteracyjnych obliczeń relaksacyjnych. Przytoczone tu przykładowe wyniki obliczeń podobnie jak i w referacie [43] odnoszą się do stopni turbinowych.

W pracy [40] na bazie uogólnionego modelu przepływu z dyspacją energii sformułowano zagadnienie brzegowe sprowadzające się do rozwiązania nieliniowego eliptycznego równania różniczkowego o następującej postaci

$$(3.4) \quad A \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 2B \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + D \frac{\partial \psi}{\partial r} + E \frac{\partial \psi}{\partial z} = F,$$

opisującego przepływ płynu przez układy łopatkowe o dowolnej ich geometrii. W tej pracy, jak i we wcześniejszej [39] gdzie rozpatrzono tylko przepływ płynu nieściśliwego, algorytm obliczeń numerycznych oparto na iteracyjnej metodzie nadrelaksacyjnej. W pracach tych przedstawiono wyniki analizy przepływu w osiowym stopniu sprężającym. W pracy [12] podano natomiast rozwiązania osiowo-symetrycznego przepływu przez bezłopatkowy kanał wirnika promieniowego.

Interesującą procedurę iteracyjną rozwiązania zagadnienia przepływu przez stopnie maszyn wirnikowych przedstawiono w pracy [59]. Zasadniczą trudnością wydaje się tu być zachowanie stabilności procesu obliczeniowego.

Istotnym problemem w metodach funkcji prądu jest zagadnienie odpowiednio dokładnego uwzględnienia geometrii brzegów w równaniach różnicowych. W przypadku siatki prostokątnej [5], [6], [39], [40] uzyskuje się proste wyrażenia w węzłach wewnętrznych: skomplikowane natomiast dla węzłów leżących przy brzegu. W szczególnych przypadkach, pewnym ułatwieniem może być zastosowanie siatki równoległo-skośnej [32] lub transformacja obszaru przepływu w przekroju merydionalnym na obszar prostokąta [60], [69], [76], [77] co z kolei pozwala na stosowanie siatki prostokątnej.

W zależności od prędkości przepływu zmienia się typ równania (3.4). I tak przy założonym rozkładzie kątów łopatkowych równanie to jest eliptyczne dla liczb  $M_w = w/a < 1$ , natomiast przy założonym rozkładzie  $rc_n$  (jak np. w przestrzeniach międzywieńcowych) eliptyczność jest zachowana dla liczb  $M_m = c_m/a < 1$  [40]. Ta dwoistość ograniczeń może być wykorzystana do budowy odpowiednich algorytmów obliczeń przepływów przy  $M_w > 1$ . Rozpatrzone wyżej prace dotyczą wyłącznie rozwiązywania zagadnień typu eliptycznego.

Ważnym kierunkiem rozwoju metod obliczeniowych jest opracowanie efektywnych procedur numerycznych dla analizy przepływów transonicznych i naddźwiękowych w sprężarkach [14], [50] jak i ostatnich stopniach turbin [77]. Równania rządzące przepływem naddźwiękowym mają w tym zakresie charakterystyki rzeczywiste i stąd też do wyznaczenia takich przepływów zastosowano metodę charakterystyk [14], [50] w powiązaniu z metodami różnic skończonych.

Mając na uwadze dynamiczny rozwój techniki obliczeniowej można przewidywać dalszy rozwój metod opartych na pojęciu funkcji prądu i uwzględniających coraz bardziej ogólny model przepływu [92].

**3.2. Metody elementów skończonych.** Ostatnie lata to okres burzliwego rozwoju metody elementów skończonych, która znajduje sobie zastosowanie w różnych zagadnieniach fizyki i techniki. Jakkolwiek sama metoda elementów skończonych swoje początki związane ma z rozwiązywaniem zagadnień mechaniki budowli, to dzięki temu, że można ją sformułować również bezpośrednio na drodze matematycznej, wychodząc z równań

różniczkowych opisujących dane zagadnienie, znalazła m.in. także zastosowanie przy rozwiązywaniu problemów przepływu [66].

Do pierwszych opublikowanych prac przedstawiających zastosowanie metody elementów skończonych w odniesieniu do zagadnienia analizy przepływu przez wieńce łopatkowe należą prace ADLERA i KRIMERMANA [1] oraz HIRSCHA i WARZEE [20].

W pracy [20] końcowe równanie przepływu płynu sprowadzono do postaci quasi-harmonicznej

$$(3.5) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + Q = 0$$

zaś warunki brzegowe przedstawiono wyrażeniem

$$(3.6) \quad k \frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha(\psi - \psi_0) = 0.$$

Do rozwiązania powyższego zagadnienia zastosowano odmianę metody elementów skończonych polegającej na postępowaniu według ważonej metody residualnej Galerkina, gdzie funkcja wagi jest równa funkcji kształtu. Dyskretyzację oparto na czterobocznych krzywoliniowych izoparametrycznych elementach z 8 punktami węzłowymi umieszczonymi na ich brzegach. Rozpatrując zależności odnoszące się do poszczególnego elementu otrzymuje się standardową postać zbioru równań

$$(3.7) \quad [k]^e \{\psi\}^e = \{F\}^e$$

gdzie „macierz sztywności” (z analogii do problemu analizy naprężeń) określa się po przez

$$k_{i,j}^e = \int_E k \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega$$

Zachodzi także

$$(3.8) \quad F_i^e = \int_E Q N_i d\Omega,$$

gdzie

$N_i$  — funkcje kształtu.

Układ równań dla całego obszaru zapisuje się tu jako

$$(3.9) \quad [K] \{\psi\} = \{F\}$$

gdzie

$\{\psi\}$  jest macierzą kolumnową niewiadomych.

Układ równań (3.9) jest nieliniowy, co wymagało zastosowania procedury kolejnych przybliżeń. W algorytmie obliczeń wykorzystano tu także metodę relaksacji według formuły

$$(3.10) \quad \psi_i^{(\mu+1)} = \psi_i^{(\mu)} + \Omega [\psi_i^{(\mu+1)} - \psi_i^{(\mu)}],$$

gdzie  $\Omega$  jest czynnikiem relaksacji

## 4. Metody jednego parametru

Dążąc do ominięcia trudności występujących przy rozwiązywaniu równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych metodami siatek powstało szereg metod, które można określić nazwą „jednego parametru” (w języku angielskim: method of single parameter [22]). W metodach tych zadając charakter zmian wybranej wielkości przepływu wzdłuż promienia, z jednym parametrem wymagającym dodatkowego określenia, równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych sprowadza się do równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego, z którego właśnie określa się zmienność wprowadzonego parametru wzdłuż kierunku przepływu. Metody jednego parametru posługują się uogólnionym, w stosunku do modelu cylindrycznego i stożkowego, modelem przepływu: rozpatruje się tu bowiem również przepływ w obszarach wieńców łopatkowych.

Jeżeli założy się rozkład prędkości osiowej  $c_z$  wzdłuż promienia w formie następującej [98]

$$(4.1) \quad c_z = c_{z\dot{s}r} \left[ \bar{c}_{z\dot{s}r} + \lambda \sin \left( \frac{\nu-1}{\nu_z-1} \frac{\pi}{2} \right) \right]; \quad (\nu = r/r_{\dot{s}r}),$$

gdzie pierwszy człon charakteryzuje zmianę prędkości wynikającą z teorii stopnia cylindrycznego, zaś drugi jest poprawką uwzględniającą przyspieszenie promieniowe, to po wyznaczeniu z równania różniczkowego parametru  $\lambda$  jako zależności  $\lambda = \lambda(z)$  uzyskuje się możliwość dość prostego określenia parametrów przepływu w różnych przekrojach wzdłuż kierunku przepływu. Za podstawę przyjmuje się wielkości na średnim promieniu. Należy zwrócić uwagę, że przyjęcie powyższego rozkładu prędkości jest niczym innym jak tylko hipotezą.

Korzystając z formuły

$$(4.2) \quad \varrho c_z = (\varrho c_z)_{\dot{s}r} \left[ 1 + \frac{\lambda}{2} (\nu^2 - 1) \right]$$

w pracach [4], [22] rozpatrzono przepływ ściśliwy przy niecylindrycznych ściankach ograniczających kanału przepływowego.

Bardziej ogólnym w tym przypadku wydaje się jednak być założenie rozkładu funkcji prądu  $\psi$  [81], [83] jako

$$(4.3) \quad \psi = \psi_t(r, z) + \lambda(z)f(r, z)$$

gdzie rozkład  $\psi_t(r, z)$  ujmuje wszystkie główne czynniki charakteryzujące przepływ według teorii stopnia cylindrycznego, natomiast  $\lambda(z)f(r, z)$  jest poprawką uwzględniającą m.in. takie czynniki jak niecylindryczność przepływu. W pierwszym przybliżeniu funkcję  $f(r, z)$  przyjmuje się jako paraboliczną

$$(4.4) \quad f(r, z) = r_z(z)r_w(z) - 2rr_{\dot{s}r}(z) - r^2$$

Zgodnie z powyższymi formułami, po przekształceniu równań przepływu, uzyskuje się równanie różniczkowe typu

$$(4.5) \quad A \frac{d^2 \lambda}{dz^2} + B \frac{d \lambda}{dz} + C \lambda = D$$

które pozwala określić zależność  $\lambda = \lambda(z)$ .

Powyższymi metodami można w stosunkowo prosty i szybki sposób badać wpływ niektórych cech geometrycznych wieńców łopatkowych na parametry przepływu. Należy jednak pamiętać o tym, że poprawność otrzymanych wyników w bardzo dużym stopniu zależy od zgodności hipotetycznego rozkładu obranej wielkości przepływu z rozkładem rzeczywistym.

### 5. Metody tarczy wirowej

W metodzie tarczy wirowej (w jęz. ang. Actuator Disc Theory [22], w jęz. niem.: Wirbelscheibenmethode [46]) wieńiec łopatkowy zamienia się ekwiwalentną pierścieniową tarczą wirów o szerokości zerowej, wywołującą miejscowy przyrost składowej prędkości obwodowej. Model przepływu bazuje tu najczęściej na uproszczonym równaniu równowagi promieniowej, zaś zasadnicze rezultaty dotyczą płynu nieściśliwego.

Metody tarczy wirowej opisane są szerzej w pracach [22], [46]. Mają one swoje znaczenie przy rozpatrywaniu odwrotnego zagadnienia hydrodynamiki, pozwalając ocenić rozkłady prędkości w pewnej odległości od wieńca łopatkowego, bądź też określać wzajemne oddziaływanie wieńców. Można jednak stwierdzić, że ze względu na „sztuczność” modelu przepływu, metody tarczy wirowej nie znajdują większego praktycznego zastosowania.

### 6. Przegląd literatury krajowej

Mimo niemałego już krajowego potencjału w dziedzinie budowy takich maszyn wirnikowych jak turbiny, pompy i wentylatory, można zauważyć, że nie jest on poparty odpowiednim poziomem rozwoju prac podstawowych i opracowań aplikacyjnych z zakresu badania przepływu w tych maszynach.

Przynajmniej częściowym potwierdzeniem tego stanu są zakupy licencji konstrukcyjnych turbin energetycznych, pomp i wentylatorów. Świadczy o tym również przegląd prac z mechaniki płynów z dziesięciolecia 1958—1967 przeprowadzony w pracy [9], a także przegląd dorobku i ocena aktualnego stanu mechaniki cieczy i gazów w Polsce dokonana na I Krajowej Konferencji Mechaniki Cieczy i Gazów w 1974 r. w Jaszowcu. W referatach przeglądowych [28], [29] tej konferencji podkreślono m.in. konieczność opracowania pełnowartościowych metod numerycznego rozwiązywania zagadnień osiowo-symetrycznego i trójwymiarowego przepływu przez wieńce i stopnie maszyn wirnikowych „wobec na ogół prymitywnych metod stosowanych w kraju przy obliczaniu przepływu przez stopnie maszyn przepływowych” [29].

Prac dotyczących badania przepływu osiowo-symetrycznego jest niewiele. Wymienić tu należy książkę TULISZKI [56] gdzie rozpatrzono metodę wyznaczania rozkładu prędkości w szczelinach międzywieńcowych przy założeniu cylindryczności powierzchni ograniczających kanał przepływowy przy czym falistość linii prądu ujęto podobnie jak w pracy [17].

Przedstawiony tu sposób postępowania ma raczej większe znaczenie poglądowe aniżeli praktyczne. Praca [7] mimo tytułu traktującego o przepływie przestrzennym w gruncie

rzeczy dotyczy bardzo uproszczonego modelu przepływu stożkowego, natomiast praca [26] ze względu na szereg założeń upraszczających, a także małą przejrzystość nie posiada walorów użytkowych. Interesującą koncepcję formułowania zagadnienia trójwymiarowego przepływu jako zagadnienia wariacyjnego, głównie jednak w odniesieniu do zadania projektowego przedstawił KRAJEWSKI w pracy [27]. Nie znalazła ona jednak praktycznego zastosowania.

Pewnym przyczynkiem do rozwoju metod obliczeniowych są prace doktorskie [12], [41], [62]. Przedstawione w nich algorytmy jednak nie wykorzystują w pełni możliwości EMC decydujących o efektywności metod obliczeniowych.

Do prac bazujących już na współczesnym ujęciu problematyki teoretycznych badań mechanizmu przepływu przez wieńce łopatkowe można zaliczyć [35], [36], [37], [39], [40], [63].

### 7. Ocena dotychczasowych prac badawczych

Z przeprowadzonego przeglądu literatury wynika, że zagadnienie analizy przepływu stanowi temat wielu prac, przy czym podkreślić należy, że większość z liczby cytowanych prac powstała po roku 1970. Rozwój metod analizy obserwowany w ostatnim 15-leciu wiąże się bezpośrednio z postępami elektronicznej techniki obliczeniowej.

Stąd też szereg metod bazujących na prostych modelach przepływu, które poprzednio miały swoje uzasadnienie, w chwili obecnej tracą powoli rację bytu. Należy także podkreślić, że o ile pewne uproszczone modele przepływu mogą być jeszcze — uwzględniając nagromadzone doświadczenia — zastosowane z dobrym skutkiem do zagadnień syntezy układów łopatkowych, to w zagadnieniach analizy ich przydatność jest wielce problematyczna i uzasadnienie znajdują tylko metody oparte na ogólnych modelach przepływu.

Do metod pozwalających na obliczeniową realizację ogólnego modelu przepływu należy metoda krzywizny linii prądu (MKLP) oraz metoda funkcji prądu (MFP) w swych dwóch odmiennych wariantach wykorzystujących metodę różnic skończonych (MRS) względnie metodę elementów skończonych (MES). Trudno jest wydać jednoznaczny sąd odnośnie absolutnej wyższości którejsz z tych metod, gdyż zawsze istnieją pewne zagadnienia łatwiej poddające się analizie przy użyciu ściśle określonej metody. Oceniając jednak stan obecny można dokonać pewnych porównań i oceny poszczególnych metod.

Spśród przytoczonych wyżej metod, metoda KLP jest z pewnością najbardziej „subtelna” już chociażby ze względu na zastosowanie przy rozwiązywaniu równań tzw. „metody prostych”. Mając na uwadze nie rozwiązany jeszcze w pełni problem stabilności, zbieżności i dokładności obliczeń numerycznych, wymaga ona znacznego doświadczenia w prowadzeniu obliczeń. Wydaje się, że pewne zalety tej metody, w porównaniu z innymi metodami, uwidaczniają się w przypadku analizy pola przepływu w wieńcach typu osiowo-promieniowego, w których linie prądu posiadają wyraźnie określoną krzywiznę. Metoda ta zawodzi w przypadku nieregularnych brzegów obszaru przepływu. Należy podkreślić, że w literaturze przedmiotu, MKLP jest dotychczas najszerzej opisana, co nie znaczy jednak, że wyczerpująco. Oceniając perspektywy zastosowania tej metody, należy sądzić, że w coraz większym stopniu będzie ona wypierana przez MFP.

Ocena metody funkcji prądu w swej odmianie wykorzystującej metodę z różnic skończonych w dużym stopniu uzależniona jest od typu zastosowanej siatki przepływu. Dysponując algorytmem obliczeniowym bazującym na transformacji obszaru przepływu w celu zastosowania siatki prostokątnej, lub też algorytmem opartym na siatce krzywoliniowej, ocena tej metody w stosunku do pozostałych wypadów bardzo korzystnie. W tych przypadkach siatka obliczeniowa dobrze wypełnia przekrój kanału przepływowego, rozwiązując tym samym problem odpowiedniego uwzględnienia geometrii brzegu obszaru. Na korzyść przemawia także fakt, że przy rozpatrywaniu zagadnień dokładności, stabilności i zbieżności obliczeń numerycznych wykorzystuje się tu nagromadzone doświadczenia z rozwiązywania równań fizyki matematycznej. Jeżeli chodzi o ocenę czasu obliczeń na maszynie cyfrowej, to przeprowadzony przez autora eksperyment obliczeniowy wykazał, że metoda MFP+MRS charakteryzuje się w odniesieniu do metody MKLP krótszymi czasami obliczeń.

Metoda elementów skończonych znajduje się dopiero w początkowym stadium rozwoju i jej stan zaawansowania w zakresie rozwiązywania problemów mechaniki przepływów przez układy łopatkowe zdeterminowany jest raczej doświadczeniem wyniesionym z zastosowania tej metody w innych pokrewnych dziedzinach mechaniki. Pewną tego korzyścią jest możliwość wykorzystania niektórych gotowych podprogramów. Zalety MES to przede wszystkim bardzo dobre uwzględnienie geometrii brzegów obszaru obliczeniowego oraz w pewnej mierze łącząca się z tym wysoka dokładność obliczeń. Szerszego naświetlenia wymagają natomiast zagadnienia stabilności i zbieżności obliczeń. MES jest obecnie ubogo udokumentowana w literaturze i należy się liczyć z tym, że w miarę pojawienia się dalszych prac, zakres jej zastosowań będzie coraz większy.

Należy zauważyć, że wyżej opisane metody posiadają tę zasadniczą wadę, że można stosować je w zasadzie tylko do przepływów poddźwiękowych. W zakresie naddźwiękowym procedury obliczeniowe opierają się na metodzie charakterystyk, przy czym zagadnienie opracowania odpowiednio dokładnych i stosunkowo szybkich w praktycznym zastosowaniu metod analizy jest tu w dalszym ciągu aktualne. Problemom obliczeń przepływów transonicznych poświęcona jest m.in. praca [42].

Spośród opisanych trzech metod: MKLP, MFP+MRS oraz MFP+MES, najbardziej efektywną, biorąc pod uwagę całość działań prowadzących do otrzymania odpowiednio dokładnego wyniku, w ocenie autora, jest metoda MFP+MRS.

Postępy elektronicznej techniki obliczeniowej mogą z czasem dać pierwszeństwo metodzie MFP+MES.

Dalszy rozwój metod analizy wiąże się z opanowaniem pełnego modelu quasi-trójwymiarowego przepływu płynu, w którym oprócz zagadnień przepływu w tzw. strumieniu głównym dochodzą zagadnienia przepływu w warstwach przyściennych.

#### Zestawienie ważniejszych oznaczeń

- $c$  — prędkość bezwzględna
- $h^*$  — rotacja całkowita
- $m, n$  — współrzędne w układzie naturalnym
- $p$  — ciśnienie

$r, \varphi, z$  — współrzędne w układzie cylindrycznym

$r_k$  — promień krzywizny linii prądu

$S_1, S_2$  — oznaczenia powierzchni przepływu

$w$  — prędkość względna

$\beta$  — kąt położenia wektora prędkości względnej do kierunku obwodowego

$\beta_p$  — kąt powierzchni  $S'_2$  przy  $r = \text{const}$  względem kierunku obwodowego

$\gamma$  — kąt nachylenia merydionalnej linii prądu do osi  $z$

$\delta$  — kąt nachylenia powierzchni  $S_2$  przy  $z = \text{const}$  względem kierunku promieniowego

$\zeta$  — współczynnik strat przepływu

$\rho$  — gęstość płynu

$\psi$  — funkcja prądu

Indeksy

$i$  — dotyczy kolejnego punktu na linii prądu

$m$  — dotyczy kierunku wzdłuż merydionalnej linii prądu

$o$  — dotyczy wielkości w przekroju  $o$  znanych parametrach: na przykład na wlocie do układu

$r, u, z$  — dotyczy składowych w układzie  $r, \varphi, z$

#### Literatura cytowana w tekście

1. D. ADLER, Y. KRIMERMAN, *The Numerical Calculation of the Meridional Flow Field in Turbomachines Using the Finite Element Method*. Israel Journal of Technology, Vol. 12 (1974), pp. 268—274.
2. K. BAMMERT, K. FIELDER, *Zur Auslegung von axialen thermischen Turbomaschinen*. VDI-Z Nr 36, 104 (1962).
3. K. BAMMERT, K. FIEDLER, *Die Strömung in axialen Turbomaschinen*. Ingenieur-Archiv, Bd. XXXIII (1964).
4. G. S. BEAVERS, *A Parameter Theory for a Compressible Flow Through Variable Area Turbomachines*. AR Council, Rep. 25, 029 (1963).
5. S. BINIARIS, *Die Berechnung der quasideridimensionalen reibungs-freien kompressiblen Strömung in axialen Turbomaschinen*. VDI — Berichte Nr 193 (1973).
6. S. BINIARIS, *The Calculation of the Quasi — Three-Dimensional Flow in an Axial Gas Turbine*. Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, April (1975).
7. E. BŁAŻKO, *Obliczenia przepływu przestrzennego w zmiennych warunkach pracy ostatniego stopnia turbiny kondensacyjnej*. Zbiór prac z III Konferencji „Technologia Przepływowych Maszyn Wirnikowych”, Rzeszów 1973.
8. H. E. BRACHETTI, *Beitrag zur mehrdimensionalen Berechnung der Strömung durch Dampfturbinen*. Energie, Nr 2, Jahrg. 16 (1964).
9. I. BUKOWSKI, W. PROSNAK, *Kierunki rozwoju mechaniki płynów w dziesięcioleciu 1958—1967*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 3, 7, (1969).
10. W. R. DAVIS, D. A. J. MILLAR, *A Comparison of the Matrix and Streamline Curvature Methods of Axial Flow Turbomachinery Analysis, From a User's Point of View*. Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, October (1975).
11. M. E. DEJC, B. M. TROJANOVSKI, *Untersuchung und Berechnung axialer Turbinenstufen*. VEB Verlag Technik, Berlin (1973).
12. B. DEPTUŁA, *Przepływ czynnika nielepkiego przez promieniowe wieńce wirujące*. Politechnika Poznańska (1971) r., Praca doktorska.



13. L. S. DZUNG, C. SEIPPEL, *Aerodynamic Aspects of Blading Research*. Flow Research on Blading, Elsevier Publ. Company. Amsterdam—London—New York, (1970).
14. H.-H. FRÜHAUF, *Ein Differenzverfahren für die axialsymmetrische Überschallströmung in rotierenden Ringgittern mit lokalen Unterschallgebieten*. Forschung Ing.-Wesen, Nr 5, Bd 40 (1974).
15. H. GALLUS, *Results from Research Projects and the Determination and Reduction of Losses in Turbo-machines*. Łódź, 9.06, (1976), (Referat).
16. A. W. GOLDSTEIN, *Axisymmetric Supersonic Flow in Rotating Impellers*. NACA Rep. 1083 (1951).
17. G. GYARMATHY, *Der Einfluss der Auslegungsparameter auf die radiale Strömungsverteilung in Axial-turbinenstufen*. Forsch. Ing.-Wesen, Nr 5 Bd 33 (1967).
18. G. T. HAMRICK, A. GINSBURG, W. M. OSBORN, *Method of Analysis for Compressible Flow Through Mixed-Flow Centrifugal Impellers of Arbitrary Design*. NACA Report 1082 (1952).
19. W. R. HAWTHORNE, R. A. NOVAK, *The Aerodynamics of Turbo-Machinery*. Annual Review of Fluid Mechanics, v. 1 (1969).
20. CH. HIRSCH, G. WARZEE, *A Finite-Element Method for Through Flow Calculations in Turbomachines*. Journal of Fluids Engineering, September (1976).
21. M. HOFFMEISTER, G. SEIFERT, *Über die Bestimmung der meridionalen Stromlinien in einem Diagonalgitter bei Unterschallströmung*, Maschinenbautechnik H. 7, 16 (1967).
22. J. H. HORLOCK, *Axial Flow Turbines* (1966), (tłum. w języku rosyjskim).
23. W. JANSEN, *Flow Analysis in Francis Water Turbines*. Trans. ASME, Nr 3, ser. A (1967).
24. D. JAPIKSE, *REVIEW-Progress in Numerical Turbomachinery Analysis*. Trans. ASME, Journal of Fluids Engineering, December (1976).
25. T. KATSANIS, *Use of Arbitrary Quasi-Orthogonals for Calculating Flow Distribution in a Turbomachine*, Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, Nr 2, (1966).
26. B. KRAJEWSKI, *Nowa metoda obliczania przepływu przez wieńce maszyn wirnikowych*. Archiwum Budowy Maszyn, 3, 5 (1958).
27. B. KRAJEWSKI, *Variational Problems of the Theory of Threedimensional Flow Through Thermal Turbo-machinery*. Archiwum Mechaniki Stosowanej, 6, 15 (1963).
28. J. KRAL i inni, *Kierunki prac w dziedzinie mechaniki cieczy i gazów w świetle potrzeb krajowego przemysłu lotniczego*, I Krajowa Konferencja Mechaniki Cieczy i Gazów, Jaszowiec 1974. Referaty Przeglądowe, s. 109—126.
29. J. KRZYŻANOWSKI, *O niektórych aktualnych problemach maszyn przepływowych w dziedzinie mechaniki płynów*, I Krajowa Konferencja Mechaniki Cieczy i Gazów, Jaszowiec 1974. Referaty Przeglądowe, s. 127—139.
30. K. KUTARBA, A. WITKOWSKI, *Niektóre problemy analizy przepływu w wieńcach łopatkowych maszyn wirnikowych*. Zbiór prac z konferencji n.-t. „Wentylatory przemysłowe”, Gliwice—Katowice 1974
31. H. LORENZ, *Neue Theorie und Berechnung der Kreisellräder*. München u. Berlin: Oldenbourg (1906)
32. H. MARSH, *A Digital Computer Program for the Through-flow Fluid Mechanics in an Arbitrary Turbo, machine using a Matrix Method*. Reports and Memoranda, N 3509, July (1966).
33. R. A. NOVAK, *Streamline Curvature Computing Procedures for Fluid-Flow Problems*. Trans. ASME, Nr 4, ser. A (1967).
34. J. J. OTTE, *Rozkłady prędkości na wlocie i wylocie wirnika o stożkowym przepływie czynnika*. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Energetyka, z. 47, s. 113—127.
35. J. J. OTTE, *Równania przepływu płynu nieściśliwego w kanałach łopatkowych maszyn wirnikowych*. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Energetyka, z. 53, s. 131—143.
36. J. J. OTTE, *Osiowo-symetryczny przepływ płynu nieściśliwego w kanałach łopatkowych osiowych maszyn wirnikowych*, Archiwum Budowy Maszyn, 4, 22 (1975), s. 475—488.
37. J. J. OTTE, *A Method of Analysis of Axial-Symmetric Flow in Blade Channels of Turbines*. III Conference on Steam Turbines of Great Output, Gdańsk 1974. Prace IMP, Z. 70—72, s. 597—614.
38. J. J. OTTE, *Wyznaczenie pola prędkości i ciśnienia w kanałach łopatkowych osiowych maszyn wirnikowych przy przepływie płynu nieściśliwego*, Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Energetyka, z. 56.
39. J. J. OTTE, *Zagadnienia analizy przepływu nieściśliwego w układach łopatkowych osiowych maszyn wirnikowych*, Praca Konkursowa PTMTS, Łódź 1975, (niepublik.).

40. J. J. OTTE, *Metoda analizy przepływu przez układy lopatkowe maszyn wirnikowych*. Politechnika Śląska, Gliwice 1976, Praca doktorska.
41. R. PIEPRZYK, *Praca wielostopniowych sprężarek osiowych z niewichrowanymi łopatkami*, Politechnika Poznańska (1970). Praca doktorska.
42. R. PIEPRZYK, M. CIAŁKOWSKI, *Analiza porównawcza istniejących metod obliczania osiowosymetrycznego przepływu przez osiowe wieńce sprężarek transonicznych*. Praca na zlecenie 52-016/77 MR. I. 26, Poznań 1978.
43. M. RAIS, *A Method of Solution of Three-dimensional Flow of a Nonviscous Fluid Through Axial Turbine and Some Practical Applications*. VI Konference Parni Turbiny Velkeho Vykonu, Plezeň, (1975).
44. A. RENAUDIN, E. SOMM, *Quasi Three-Dimensional Flow in a Multistage Turbine Calculation and Experimental Verification*, Flow Research on Blading, Elsevier Publ. Company. Amsterdam—London—New York (1970) pp, 51—87.
45. H. SAUER, *Die Formen der dreidimensionalen Strömungen in axialen Gasturbinen und ihr Einfluss auf das Betriebsverhalten* [Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Rostock] H. 6/7, Jahrg, 19, Mathem. — Naturwissenschaftliche Reihe (1970).
46. H. J. SCHRÖDER, *Die Wirbelscheibenmethode in Anwendung auf die Auslegung axialer Turbomaschinen*, Fortschr.-Berichte VDI-Z., Reihe 7., Nr 28 (1972).
47. C. SEIPPEL, *Räumliche Strömung durch vielstufige Turbinen*. Brown Boveri Mitt. Nr 3, (1958).
48. Y. SENOO, Y. NAKASE, *An Analysis of Flow Through a Mixed Flow Impeller*. Trans. ASME, ser. A, Nr 1 (1972).
49. M. R. A. SHAALAN, H. DANESHYAR, *A Critical Assesment of Methods of Calculating Slope and Curvature of Streamlines in Fluid Problems*, Institution of Mechanical Engineers. Proceedings 1972, Vol. 186.
50. H. SIMON, *Entwicklungsarbeiten an Überschallaxialverdichterstufen*. Technische Rundschau. Nr 16, 21 (1974).
51. L. H. SMITH jr, S. C. TRAUOGOTT, G. F. WISLICENUS, *A Practical Solution of a Three-Dimensional Flow Problem of Axial-Flow Turbomachinery*, Trans. ASME, July (1953).
52. L. H. SMITH jr, *The Radial Equilibrium Equation of Turbomachinery*. Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, Nr 1. (1966).
53. A. STODOLA, *Dampf-und Gasturbinen*. V wyd. Berlin 1922, Springer Verlag.
54. W. TRAUPEL, *Die Theorie der Strömung durch Radialmaschinen*, Karlsruhe (1962). Verlag G. Braun.
55. W. TRAUPEL, *Thermische Turbomaschinen*. Bd 1, (1966). Springer Verlag.
56. E. TULISZKA, *Turbiny cieplne*. Warszawa (1973) WNT.
57. E. TULISZKA, *Wybrane zagadnienia przepływowe maszyn wirnikowych i działalność naukowo-badawcza Instytutu Techniki Ciepłej Politechniki Poznańskiej*, I Krajowa Konferencja Mechaniki Cieczy i Gazów, Jaszowiec (1974). Referaty Przeglądowe, s. 140—160.
58. M. H. VAVRA, *Aero-Thermodynamics and Flow in Turbomachines*. J. Wiley and Sons, New York (1960).
59. J. P. VEUILLOT, *Calculation of the Quasi Three-Dimensional Flow in a Turbomachine Blade Row* Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, January (1977).
60. J. WACHTER, B. SCHULZ, *Numerische Berechnung stationärer quasi-dreidimensionaler Strömungen in Kanälen beliebiger Formgebung, dargestellt am Beispiel eines Radialverdichter-Umlenkraumes*, Forsch. Ing-Wesen, 5, 43 (1977).
61. D. H. WILKINSON, *Stability, Convergence, and Accuracy of Two-Dimensional Streamline Curvature Methods using Quasi-Orthogonals*, Institution of Mechanical Engineers. Proceedings 1969—60, Vol. 184, Pt3G(1).
62. A. WITKOWSKI, *Analiza przepływu w kanałach lopatkowych osiowego wieńca sprężającego z merydionalnym przyspieszeniem strunienia*. Gliwice, (1971). Praca doktorska.
63. A. WITKOWSKI, *Zastosowanie kwasiortogonalnych współrzędnych do obliczeń przepływu w wieńcach sprężających o przestrzenie ukształtowanych kanałach międzylopatkowych*. Zeszyty Naukowe Pol, Śl. nr 372, Energetyka z. 47, (1973).
64. H. WOLF, *Gegenwärtiger Stand und Ausblick bei der aerodynamischen Berechnung axialer thermischer Turbomaschinen*. Mitteilungen aus dem Kraftwerksanlagenbau der DDR, H. 1, (1974).

65. WU CHAUNG-HUA, *A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbo-machines of Axial, Radial, and Mixed-Flow Types*. Trans. ASME, № 8 (1952).
66. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill, London (1971) (tłum. w języku polskim: Arkady Warszawa (1972)).
67. В. А. АБЛАМСКИЙ, *Расчет линий тока в меридиональном сечении осевой турбинной ступени*. Энергетическое машиностроение, выпуск 17 (1974).
68. А. В. ГОЛЬДИН, *Применение численных методов решения прямой осесимметричной задачи течения жидкости в проточной части гидромашин применительно к ЭЦВМ*. Энергомашиностроение, 4 (1969).
69. Ю. В. ГРЕЧАНИЧЕНКО, М. Е. ЛЕВИНА, *Расчет пространственного двупараметрического потока в ступени с произвольными меридиональными границами*. Энергетическое машиностроение, выпуск 1 (1966).
70. М. Е. ДЕЙЧ, Г. С. САМОЙЛОВИЧ, *Основы аэродинамики осевых турбомашин*. Москва 1959. Машгиз.
71. М. Е. ДЕЙЧ, Г. А. ФИЛИППОВ, *К расчету турбинных ступеней с длинными лопатками переменного профиля*. Теплоэнергетика 9 (1961).
72. Л. А. ДОФМАН, А. З. СЕРАЗЕТДИНОВ, М. Л. ЯСЕНОВСКАЯ, *Программирование расчета на ЭЦВМ вихревых течений идеальной жидкости в криволинейных кольцевых каналах*. Труды ЦКТИ, выпуск 74 (1966).
73. Л. А. ДОФМАН, *Численные методы в газодинамике турбомашин*. Ленинград (1974). Энергия.
74. Г. В. ЖУКОВСКИЙ, Ю. Н. МАЛЫШЕВ, *Приближенный расчет закрутки конусного потока в турбинных ступенях с длинными лопатками*. Труды ЦКТИ, выпуск 74 (1966).
75. М. И. ЖУКОВСКИЙ, *Аэродинамический расчет потока в осевых турбомашин*. Ленинград (1967). Машиностроение.
76. М. И. ЖУКОВСКИЙ, Ю. Е. КАРЯКИН, *Расчет вихревого течения газа в осесимметричных каналах*. Энергомашиностроение 7 (1971).
77. М. И. ЖУКОВСКИЙ, О. И. НОВИКОВА, Ф. Д. ПОПОВ, *Расчет пространственного потока в турбинных ступенях большой верности*. Теплоэнергетика 12 (1974).
78. Г. А. ЗАЛЬФ, *Тепловой расчет стационарных газовых турбин*. Москва—Ленинград (1964). Машиностроение.
79. Г. А. ЗАЛЬФ, В. В. ЗВЯГИНЦЕВ, *Тепловой расчет паровых турбин*. Москва—Ленинград (1961). Машиностроение.
80. И. И. КИРИЛЛОВ, *Теория турбомашин*. Изд. 2. Ленинград (1972). Машиностроение.
81. А. А. МОИСЕЕВ, А. М. ТОПУНОВ, Г. Я. ШНИЦЕР, *Длинные лопатки судовых турбин*. Ленинград (1969). Судостроение.
82. О. И. НОВИКОВА, *Расчет осесимметричного потока в проточной части осевых турбин*, Теплоэнергетика 4 (1965).
83. *Переменные режимы судовых турбинных установок*, НТО Судпрома, выпуск 82 (1966).
84. Г. Л. ПОДВИДЗ, *Расчет квазитрехмерного течения газа в межлопаточном канале осевой турбомашин*. Механика жидкости и газа 4 (1971).
85. В. Н. ПОКОМАРЕВ, Г. А. БОНДАРЕНКО, *К вопросу о реализации постоянства циркуляции в нецилиндрической турбинной ступени*. Известия вузов, Энергетика 6 (1972).
86. Я. А. СИРОТКИН, *Расчет осесимметричного вихревого потока невязкой сжимаемой жидкости в осевых турбомашин*. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение 2 (1961).
87. Я. А. СИРОТКИН, *Расчет осесимметричного вихревого течения невязкой сжимаемой жидкости в радиальных турбомашин*. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение 3 (1963).
88. Я. А. СИРОТКИН, *К постановке прямой задачи вихревого течения сжимаемой жидкости в турбомашин*, Инженерный журнал, т. III, выпуск 2 (1963).
89. Я. А. СИРОТКИН, *К постановке двумерных задач вихревого течения сжимаемой жидкости в турбомашин*, Инженерный журнал, т. 4, выпуск 2, (1964).
90. Я. А. СИРОТКИН, *Уравнения осредненного осесимметричного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости*. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа 2 (1967).

91. Я. А. Сироткин, *Аэродинамический расчет лопаток осевых турбомашин*. Москва (1972). Машиностроение.
92. Я. А. Сироткин, *Прикладные задачи газодинамического расчета осевых турбомашин*. Труды Всесоюзной Конф. по Газотурбинным Установкам, Москва (1972).
93. Г. Ю. Степанов, *Гидродинамика решеток турбомашин*. Москва (1962).
94. Г. Ю. Степанов, *Гидродинамическая теория решеток*. Механика в СССР за 50 лет. т. 2, с. 103—152. Москва (1970).
95. Г. Ю. Степанов, *Некоторые современные задачи гидродинамики решеток турбомашин*. Труды Всесоюзной Конф. по Газотурбинным Установкам. Москва (1972).
96. Б. С. Стечкин и др., *Теория реактивных двигателей*. Москва (1956).
97. Г. И. Топаж, И. Э. Этинберг, *Уравнения осредненного движения жидкости в рабочем колесе гидромашин*, Труды ЦКТИ, выпуск 61 (1965).
98. А. М. Топунов, А. Г. Даниловский, *К вопросу решения прямой задачи расчета пространственного осесимметричного потока*, Известия вузов, Энергетика 11 (1964).
99. Ю. И. Швец, *Профилирование турбинных ступеней с учетом искривления линий тока в меридиональной плоскости*. Теплоэнергетика 7 (1964).
100. Я. И. Шнез, *Газовые турбины*. Москва (1960). Машгиз.
101. И. Э. Этинберг, *Методика расчета осесимметричного потока в гидротурбинах*. Энергомашинностроение 11 (1973).

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 lipca 1978 roku*

---

PRÓBA MODYFIKACJI LINIOWEGO MODELU DYSKRETNEGO O WIELU STOPNIACH  
SWOBODY NA PRZYKŁADZIE POJAZDU SZYNOWEGO

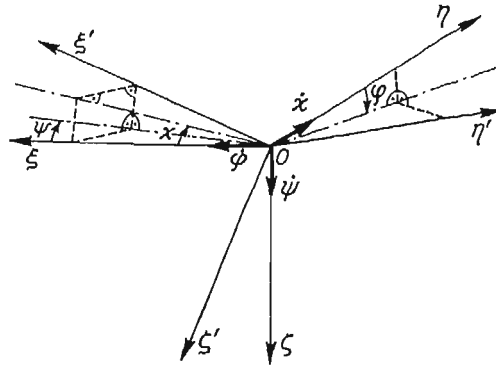
A. CHUDZIKIEWICZ, J. KISIŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Zagadnienie poprawy pewnych wybranych własności dynamicznych (wg przyjętych wcześniej kryteriów) istniejących dowolnych konstrukcji np. pojazdów szynowych, poprzez zmianę wektora parametrów nazywać będziemy modyfikacją obiektu [7].

Zadaniem modyfikacji będzie zmiana charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych charakteryzujących własności dynamiczne obiektu, tak aby wyeliminować lub zmniejszyć wpływ określonych przez przyjęte kryteria modyfikacyjne częstotliwości i postaci drgań własnych. Dokonać tego można w oparciu o zmianę parametrów sprężysto-tłumiących lub rozkład wielkości mas przy niezmiennych podstawowych parametrach konstrukcyjnych obiektu.

Model nominalny [2] dla wybranych konstrukcji pojazdów szynowych wyznaczony został na podstawie analizy konstrukcji [2, 3]. Dla wyznaczonych modeli nominalnych pojazdów szynowych używając układów współrzędnych jak na rys. 1 [2, 3] oraz korzy-



Rys. 1

stając z równań Lagrange'a drugiego rodzaju opisano ruch mas tych modeli [2, 3] otrzymując w ten sposób układ równań nieliniowych, w których występują nieliniowe charakterystyki elementów podatno-tłumiących oraz nieliniowości wynikające z opisu współrzędnych prędkości kątowych poszczególnych mas modelu nominalnego w układzie  $O_{\xi\eta}$  rys. 1 [2, 3, 12, 13]. Równania te zlinearyzowano korzystając z wyników badań eksperymentalnych [2, 3] oraz za pomocą znanych metod linearyzacji charakterystyk podatno-tłumiących [12, 13].

Po zlinearyzowaniu równań ruchu [2, 3] można je zapisać w postaci:

$$(1) \quad \mathbf{A}\ddot{\bar{q}} + \mathbf{B}\dot{\bar{q}} + \mathbf{C}\bar{q} = \bar{F}(t)$$

gdzie:

$$\dim \mathbf{A} = \dim \mathbf{B} = \dim \mathbf{C} = n \times n$$

$$\dim \bar{q} = \dim \bar{F} = n \times 1$$

$\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  macierz bezwładności, tłumień i sztywności  $i = 1, 2, \dots, n$

Układ równań (1) po elementarnych przekształceniach doprowadzono do postaci:

$$(2) \quad \dot{\bar{X}} = \mathbf{G}\bar{X}$$

gdzie:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} \quad \dot{\bar{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}_1 \\ \dot{\bar{q}}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \dim \mathbf{G} = 2n \times 2n$$

$$\bar{q}_1 = \dot{\bar{q}}_2 \quad \bar{q}_2 = \bar{q}$$

$\mathbf{G}$  — jest macierzą o budowie klatkowej w której macierze

$\mathbf{D}$  i  $\mathbf{E}$  otrzymano w wyniku przekształceń macierzy

$\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{I}$  — jest macierzą jednostkową  $\dim \mathbf{I} = n \times n$

Otrzymany w ten sposób model matematyczny poddano modyfikacji. Dla przeprowadzenia modyfikacji układu opisanego układem równań (1) lub (2) przyjęto następujące założenia [5, 7]:

- Struktura początkowa modyfikowanego układu  $S$  została zidentyfikowana z dostateczną dokładnością w przewidywanym do wystąpienia w rzeczywistym układzie zakresie częstotliwości.
- Znane są charakterystyki dynamiczne dyskretnego modelu układu.
- Modyfikacja układu  $S$  na układ  $S^*$  nie zmieni rzędu równań różniczkowych opisujących dynamikę układu.
- Układy  $S$  i  $S^*$  są strukturalnie stateczne (w sensie Andronowa-Pontriagina).
- Rzeczywiste siły zmuszające ruch układu są znane i zidentyfikowane.

Aby otrzymać żądane przebiegi charakterystyk dynamicznych należy zmodyfikować macierz wartości własnych o  $\Delta \lambda$  i macierz wektorów własnych o  $\Delta Y$  według żądanych kryteriów. Zmiana ta spowoduje zmianę macierzy  $\mathbf{G}$  o  $\Delta \mathbf{G}$  a co z tym związane jest zmianą macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  o  $\Delta \mathbf{A}$ ,  $\Delta \mathbf{B}$ ,  $\Delta \mathbf{C}$ .

Ostatnim etapem zmian będzie modyfikacja parametrów konstrukcyjnych rzeczywistego układu.

## 2. Metody stosowane do modyfikacji układów mechanicznych

Przedstawimy trzy metody modyfikacji układu mechanicznego. Są to dwie znane metody [7]: czułości, perturbacji oraz metoda modyfikacji elementów macierzy transmitancji bądź dynamicznej funkcji przejścia zaproponowana przez autorów.

Metoda czułości jest metodą różniczkową, w której modyfikacje wartości własnych, wektorów własnych i wymuszonych przebiegów ustalonych wyrażają się w wariacji parametrów konstrukcyjnych. Można w tej metodzie rozważać zagadnienie proste i odwrotne. Zagadnienie proste sprowadza się do poszukiwania wpływu wariacji wyrazów macierzy A, B, C na postać charakterystyk układu (wartości i wektorów własnych). Zagadnienie to rozwiązano w pracy [2] omawiając problemy teorii wrażliwości.

Modyfikacja z zastosowaniem metody czułości będzie wiązała się z zagadnieniem odwrotnym tj z realizacją żądanych zmian własności dynamicznych przez zmianę parametrów konstrukcyjnych. Rozważania nasze pokażemy na przykładzie układu S opisanego równaniem postaci (1) przy założeniu, że macierz B jest zerowa. O układzie wyjściowym S zakładamy, że został zidentyfikowany z dostateczną dokładnością w zakresie częstotliwości:

$$\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$$

$$\omega^2 \equiv \lambda^2$$

Zakładamy, że znane są zależności macierzy  $A(\bar{p})$ ,  $C(\bar{p})$  w funkcji wektora parametrów  $\bar{p} = [p_1, \dots, p_m]$

O macierzach  $A$ ,  $Y$  ( $A$  — macierz wartości własnych zwana też modalną,  $Y$  — macierz wektorów własnych) i wektorze  $\bar{q}$  zakładamy, że są ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami względem wektora  $\bar{p}$ . Pierwszym etapem badań są badania czułości mające na celu uszeregowania współrzędnych  $p_\alpha$  wektora  $\bar{p}$  w zależności ich wpływu na macierze  $A$ ,  $Y$ ,  $\bar{q}$ .

Przebieg tych badań opisano w pracy [2]. Końcowym efektem tych prac było uszeregowanie współrzędnych  $p_i$  wektora  $\bar{p}$  w zależności od ich wpływu na macierze  $A$ ,  $Y$ .

Mając ten etap pracy za sobą można przystąpić do modyfikacji układu metodą czułości.

Algorytm obliczeń tej metody można przedstawić w sposób następujący:

1° Wyznacz wektory  $\Delta S$  i  $S_{1\alpha}$  w postaci:

$$(3) \quad \Delta S = [\Delta \lambda_1, \dots, \Delta \lambda_n]^T$$

$$S_{1\alpha} = \left[ \frac{\partial \lambda_1}{\partial p_\alpha}, \dots, \frac{\partial \lambda_n}{\partial p_\alpha} \right]^T,$$

gdzie:

$$(4) \quad \frac{\partial \lambda_v}{\partial p_\alpha} = \bar{Y}_v^T [C_{1\alpha} - \lambda_v A_{1\alpha}] \bar{Y}_v,$$

$$C_{1\alpha} = \frac{\partial C}{\partial p_\alpha}; \quad A_{1\alpha} = \frac{\partial A}{\partial p_\alpha},$$

$\Delta \lambda_i$  — przyrost wartości własnej

$p_\alpha$  — współrzędna wektora  $\bar{p}$  (ustalony parametr konstrukcji)

$\bar{Y}_v$  — wektor własny odpowiadający  $\lambda_v$  wartości własnej

$A$ ,  $C$  — macierze, równania (1)

2° Oblicz wektory  $\Delta m$  i  $m_{1\alpha}$  wymiaru  $n^2 \times 1$ :

$$(5) \quad \Delta m = [\Delta m_1, \dots, \Delta m_n]^T$$

$$m = [m_{1\alpha}, \dots, m_{n\alpha}]^T$$

gdzie:

$$\begin{aligned} m_{i\alpha} &= \mathbf{M}_\alpha \cdot \mathbf{e}_i \\ \Delta m_i &= \Delta \mathbf{M} \mathbf{e}_i \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$\Delta \mathbf{M}$  — macierz związana z macierzą wektorów własnych  $\mathbf{Y}_i$  a macierzą przyrostu  $\Delta \mathbf{Y}$  następującą zależnością  $\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \cdot \Delta \mathbf{M}$ ,

$\mathbf{e}_i$  — wektor jednostkowy

$$\dim \Delta \mathbf{M} = n \times n, \quad \dim \Delta m_i = n \times 1$$

Macierz  $\mathbf{M}_\alpha$  jest następująca:

$$(6) \quad \mathbf{M}_\alpha = [m_{\nu\sigma}^\alpha] = \begin{cases} \frac{\bar{\mathbf{Y}}_\nu^T [\mathbf{C}_{1\alpha} - \lambda_\sigma \mathbf{A}_{1\alpha}] \bar{\mathbf{Y}}_\sigma}{\lambda_\sigma - \lambda_\nu}; & \sigma \neq \nu \\ -\frac{1}{2} \mathbf{Y}_\nu^T \mathbf{A}_{1\alpha} \mathbf{Y}_\nu; & \sigma = \nu, \end{cases}$$

$\nu, \sigma$  wskaźniki oznaczające wiersze i kolumny macierzy  $\mathbf{M}_\alpha$

3° Zbuduj macierze  $\mathbf{M}, \mathbf{S}$  w postaci

$$(8) \quad \begin{aligned} \mathbf{M} &= [\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_m] & \dim \mathbf{M} &= n^2 \times m \\ \mathbf{S} &= [\mathbf{S}_{11}, \dots, \mathbf{S}_{1m}] & \dim \mathbf{S} &= n \times m \end{aligned}$$

4° Wykorzystując zależności:

$$(9) \quad \Delta \mathbf{m} = \mathbf{M} \cdot \Delta \bar{\mathbf{p}}, \quad \Delta \mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \Delta \bar{\mathbf{p}},$$

Oblicz zmodyfikowany wektor parametrów  $\bar{\mathbf{p}}^*$

$$\bar{\mathbf{p}}^* = \bar{\mathbf{p}} + \Delta \bar{\mathbf{p}},$$

wg jednego ze wzorów:

$$(10) \quad \begin{aligned} \Delta \bar{\mathbf{p}} &= [\mathbf{M}^T \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^T \Delta \mathbf{m}, \\ \Delta \bar{\mathbf{p}} &= [\mathbf{S}^T \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{S}^T \Delta \mathbf{S}, \end{aligned}$$

gdzie oznaczenia i wymiary macierzy jak wyżej.

W praktycznych obliczeniach numerycznych bezpośrednie obliczenie wektora rekonstrukcji  $\Delta \bar{\mathbf{p}}$  ze wzorów (9) nastęrcza wiele trudności, gdyż pojawiają się osobliwości przy odwracaniu macierzy prostokątnych.

Trzeba więc, aby wektor  $\Delta \bar{\mathbf{p}}$  i  $\bar{\mathbf{p}}$  były tego samego stopnia. W praktyce najczęściej jest  $n > m$ , czyli liczba równań określających  $\Delta \bar{\mathbf{p}}$  jest większa od liczby niewiadomych, które zawiera ten wektor. Poszukuje się więc takiego  $\Delta \bar{\mathbf{p}}$ , który najlepiej w sensie odchylenia średnio kwadratowego spełnia jedną z relacji (9). Metoda wg przedstawionego toku postępowania może być stosowana tylko dla układu bez tłumienia. Dla układów w których macierz tłumień jest różna od zera należy stosować inne metody modyfikacji bądź prowadzić prace nad opracowaniem oddzielnego algorytmu modyfikacji układu z tłumieniem.

Metoda przedstawiona jest stosunkowo łatwa do stosowania, gdyż wymaga tylko prostych przekształceń macierzowych i bazuje się w niej bezpośrednio na parametrach konstrukcyjnych. Metodę tę można stosować również gdy po analizie wrażliwości widać, że jedynie nieliczne parametry mają istotny ilościowy wpływ na wariacje wartości i wektorów własnych dla których należy przeprowadzić ich modyfikację po przyjęciu kryteriów



wg których będziemy dążyli do zmiany określonych wartości własnych. Po przeprowadzeniu (zgodnie z przyjętymi kryteriami) modyfikacji należy powtórnie wyznaczyć wartości i wektory własne tj. określić nowe cechy układu powstałe na skutek zmian wektora parametrów  $\bar{p}$  o  $\Delta\bar{p}$ .

Sposób modyfikacji metodą perturbacji przedstawimy przy tych samych założeniach co przy metodzie czułości. Dla układu S niezmodyfikowanego, pomiędzy macierzami A, Y, C, A zachodzą następujące związki:

$$(13) \quad \begin{aligned} Y^T A Y &= I, & Y^T C Y &= A, \\ C Y - A Y A &= 0. \end{aligned}$$

W zmodyfikowanym układzie S\* związki (13) można przedstawić jako:

$$(14) \quad \begin{aligned} Y^{*T} A^* Y^* &= I, & Y^{*T} C^* Y^* &= A^*, \\ C^* Y^* - A^* Y^* A^* &= 0, \end{aligned}$$

gdzie:

$$(15) \quad \begin{aligned} C^* &= C + \mu \bar{C}, \\ A^* &= A + \mu \bar{A}, \end{aligned} \quad \mu \in [0, 1]$$

Elementy macierzy A\* i Y\* mogą być uważane za funkcje analityczne  $\mu$  i rozwijane w szereg potęgowy względem  $\mu$ . Otrzymamy wówczas:

$$(16) \quad \begin{aligned} A^* &= A + \mu A^{(1)} + \mu^2 A^{(2)} + \dots, \\ Y^* &= Y [I + \mu M^{(1)} + \mu^2 M^{(3)} + \dots]. \end{aligned}$$

Wstawiając (15) i (16) do związków (14) otrzymamy:

$$(17) \quad [I + \mu M^{T(1)} + \mu^2 M^{T(2)} + \dots] [I + \mu (M^{(1)} + \tilde{A}) + \mu^2 (M^{(2)} + \tilde{A}^2 M^{(1)} + \dots)] = 0,$$

gdzie  $\tilde{A} = Y^T \bar{A} Y$

oraz

$$(18) \quad \begin{aligned} [C Y + \mu \bar{C} Y] [I + \mu M^{(1)} + \mu^2 M^{(2)} + \dots] &= \\ = [A Y + \mu \bar{A} Y] [A + \mu (A^{(1)} + M^{(1)} A) + \mu^2 (A^{(2)} + M^{(1)} A^{(1)} + M^{(2)} A + \dots)] \end{aligned}$$

Przybliżenie zerowe odpowiada układowi niezmodyfikowanemu  $\bar{M} = \bar{K} = 0$  i prowadzi do zależności (13). W przypadku pierwszego przybliżenia porównując współczynniki w wyrażeniach pierwszego stopnia względem  $\mu$  w (17) i (18) otrzymamy

$$(19) \quad \begin{aligned} A M^{(1)} + \tilde{C} &= A^{(1)} + \tilde{A} A + M^{(1)} A, \\ M^{(1)} + \tilde{A} - M^{(1)} &= 0. \end{aligned}$$

Mając  $A^{(1)}$  i  $M^{(1)}$  można łatwo wyznaczyć

$$\tilde{C} = Y^T C Y, \quad \tilde{A} = Y^T \bar{A} Y \text{ oraz } \bar{C} \text{ i } \bar{A}$$

Mając  $\bar{C}$  i  $\bar{A}$  wyznaczymy C\* oraz A\* czyli nowe parametry układu. Metodę można stosować do poszukiwania nowych parametrów modelu w wyniku zmian wartości własnych układu S lub tylko niektórych składowych wektorów własnych układu.

Można więc realizować lokalną modyfikację w układzie bezmian dynamicznego zachowania się całego układu. Te własności metody nie są przydatne dla badanych przez nas

układów ponieważ dla nas istotna jest poprawa własności dynamicznych całego obiektu, co wymaga modyfikacji całego układu. Wynika to głównie z sformułowanych kryteriów wg których będzie przeprowadzana modyfikacja. Metoda ta może być stosowana dla modyfikacji podukładów obiektu ruchomego — pojazdu szynowego jeśli będą występowały lokalne — w sensie nie wpływające na cały układ (w podukładach) — szkodliwe postacie drgań. Metoda ta jest stosowana dla układów bez tłumienia (wg postaci przedstawionej w [7]).

Metody: czułości i perturbacji przedstawione w pracy [7] w zastosowaniach do zadań modyfikacji nie mogą być stosowane w przypadkach gdy macierz  $\mathbf{B} \neq 0$  tzn. gdy występują w układzie tłumienia. W takim przypadku modyfikację będzie można wykonać korzystając z metody opartej na zmianie elementów macierzy transmitancji. Zgodnie z zależnościami podanymi w pracy [5, 2] macierz transmitancji  $\mathbf{T}$  można przedstawić w postaci:

$$(20) \quad \mathbf{T} = [t_{ik}(j\omega)] = \left[ \sum_{l=1}^{2n} \frac{k_i^{(l)} W_k^{(l)}}{s - \lambda_l} \right],$$

$$i, k \leq 2n$$

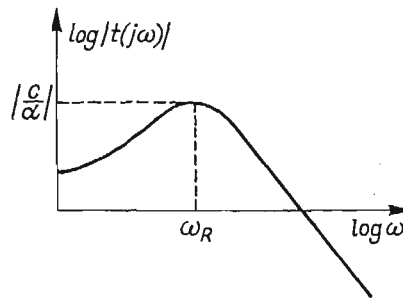
gdzie:

$$\lambda_l = \pm \alpha - j\omega; \quad s = j\omega$$

Elementarny składnik dowolnego wyrazu macierzy transmitancji  $t_{ik}(j\omega)$  pokazany na rys. 2 można zapisać jako

$$(21) \quad t(j\omega) = \frac{C_{ik}^{(l)}}{j\omega - (\pm \alpha + j\omega_l)}$$

przy czym  $C_{ik}^{(l)} = k_i^{(l)} W_k^{(l)}$ .



Rys. 2

Zgodnie z kryteriami wg których przeprowadzamy modyfikację zadanie nasze będzie polegało na wyeliminowaniu z postaci drgań odpowiadających danej współrzędnej, pewnych częstotliwości całkowicie lub na zmniejszeniu ich udziału w drganiach. Można to osiągnąć w następujący sposób: przesuwać w prawo lub w lewo położenie maksimum funkcji  $t(j\omega)$  dla danego  $\omega_l$  likwidując tym samym częstotliwości szkodliwe wynikające z podanych kryteriów (lub zmniejszając wartość funkcji  $t(j\omega)$  dla  $\omega_l$  poprzez zmniejszenie

wartości wyrażenia  $\left| \frac{C_{ik}}{\alpha} \right|$ . Ponieważ transmitancja  $t_{ik}(j\omega)$  jest sumą wyrażen postaci (21) więc jeżeli będziemy mogli wpływać na przebiegi  $t_{ik}(j\omega)$  zmienimy tym samym charakterystykę  $t_{ik}(j\omega)$ . Uogólniając metoda modyfikacji oparata na analizie macierzy transmitancji może polegać na:

- a) zmianie tylko wartości własnych układu;
- b) zmianie tylko wektorów własnych układu;
- c) jednoczesnej zmianie wartości i wektorów własnych.

Zmiany te spowodują konieczność znalezienia przyrostów  $\Delta A$  i  $\Delta Y$  macierzy  $A$  i  $Y$  oraz konieczność obliczenia przyrostu  $\Delta G$  macierzy  $G$  charakteryzującej badany układ (równanie 2).

Różniczkując zależność:

$$GY = YA$$

otrzymamy

$$dGY + GdY = dYA + YdA$$

a stąd

$$(22) \quad dG = YdAY^{-1} + dYAY^{-1} - GdYY^{-1}$$

Przechodząc do przyrostów skończonych wzór (22) przybierze postać:

$$(23) \quad \Delta G = Y\Delta AY^{-1} + \Delta YAY^{-1} - G\Delta YY^{-1}$$

w szczególnych przypadkach jeśli

$$(24) \quad \Delta A = 0 \Rightarrow \Delta G = \Delta YAY^{-1} - G\Delta YY^{-1}$$

$$(25) \quad \Delta Y = 0 \Rightarrow \Delta G = Y\Delta AY^{-1}$$

Powyższe zależności obowiązują dla małych zaburzeń wartości i wektorów własnych.

Korzystając ze wzoru (25) w przypadku zmiany tylko wartości własnych w prosty sposób można policzyć przyrost macierzy  $G$ . W przypadku zmiany wektorów własnych (zmniejszenie wartości modułu  $\left| \frac{C_{ik}^{(l)}}{\alpha_l} \right|$ ) obliczenie  $\Delta G$  staje się bardziej pracochłonne. Z zależności (22) będziemy korzystać w przypadku jednoczesnej zmiany wartości i wektorów własnych.

Łatwo zaobserwować, że znalezienie przyrostu  $\Delta A$  nie nastrocza wiele trudności. Trudności pojawiają się natomiast w przypadku przyrostu  $\Delta Y$ . Przypuśćmy, że chcemy zmniejszyć moduł wyrażenia

$$(26) \quad \left| \frac{C_{ik}^{(l)}}{\alpha_l} \right| = \left| \frac{k_i^{(l)} W_k^{(l)}}{\alpha_l} \right|$$

Zmieńmy  $k_i^{(l)}$  o  $dk_i^{(l)}$ . Odpowiada to zmianie macierzy  $Y$  o  $dY$

$$(27) \quad dY = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \boxed{dk_i^{(l)}} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} i$$

Ponieważ związek  $\mathbf{Y}^{-1} = [W_1, \dots, W_{2n}]^T$  podaje zależność między macierzą  $\mathbf{Y}$  a wierszami własnymi widać, że ulegną zmianie też wiersze własne.

Różniczkując wzór

$$\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y} = \mathbf{I}$$

otrzymujemy

$$(28) \quad d(\mathbf{Y}^{-1})\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^{-1}d\mathbf{Y} = 0 \Rightarrow d(\mathbf{Y}^{-1}) = -\mathbf{Y}^{-1}d\mathbf{Y}\mathbf{Y}^{-1}$$

stąd otrzymujemy

$$(29) \quad d(\mathbf{Y}^{-1}) = - \begin{bmatrix} \bar{W}_1 \\ \vdots \\ \bar{W}_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \boxed{dk_i^{(l)}} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{W}_1 \\ \vdots \\ \bar{W}_{2n} \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} \bar{W}_1 \\ \vdots \\ \bar{W}_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \bar{W}_i dk_i^{(l)} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -dk_i^{(l)} \begin{bmatrix} W_1^{(1)} \cdot W_1^{(l)}, \dots, W_1^{(1)} \cdot W_{2n}^{(s)} \\ \vdots \\ W_i^{(p)} \cdot W_r^{(l)} \\ \vdots \\ W_i^{(2n)} \cdot W_1^{(l)}, \dots, W_i^{(2n)} \cdot W_{2n}^{(l)} \\ \downarrow \\ r \end{bmatrix} \leftarrow p$$

Widzimy, że ulegną zmianie wszystkie wiersze własne, przy czym

$$(30) \quad dW_r^{(p)} = -W_1^{(p)} \cdot W_r^{(l)} \cdot dk_i^{(l)}.$$

Stąd ostateczny wynik

$$(31) \quad dC_{ip}^{(l)} = dk_i^{(l)} W_r^{(p)} + k_i^{(l)} dW_r^{(p)} = [W_r^{(p)} - k_i^{(l)} W_1^{(p)} W_r^{(l)}] dk_i^{(l)} = \gamma_{rip} dk_i^{(l)}$$

Stałą  $\gamma_{rip}$  można już łatwo obliczyć z macierzy  $\mathbf{Y}$  i  $\mathbf{Y}^{-1}$ .

Podstawiając

$$(32) \quad dC_{ip}^{(r)} = -\varepsilon C_{ip}^{(r)}; \varepsilon > 0$$

oraz przechodząc do przyrostów skończonych otrzymamy

$$(33) \quad dk_i^{(r)} = -\varepsilon \frac{C_{ip}^{(r)}}{\gamma_{rip}}.$$

Wzór (33) podaje zależności na zmianę (zaburzenie) układu wektorów własnych w przypadku zmiany wartości wyrażenia (26). Znając teraz  $\Delta\mathbf{Y}$  oraz  $\Delta\mathbf{A}$  ze wzoru (23) można znaleźć przyrost  $\Delta\mathbf{G}$ . Końcowym etapem obliczeń będzie znalezienie zaburzenia  $\Delta\bar{p}$  wektora parametrów  $\bar{p} = [p_1, \dots, p_m]$  realizującego zaburzenie  $d\mathbf{G}$ . Obliczenie  $\Delta\bar{p}$  można wykonać kilkoma sposobami. Podamy trzy z nich. Uszeregujemy macierz  $\mathbf{G}$  w wektor:

$$(34) \quad \bar{g} = [\mathbf{G}_{11}, \dots, \mathbf{G}_{ik}, \dots, \mathbf{G}_{mn}]$$

$$\dim \bar{g} = n^2$$

Niech  $J(n^2 \times m)$  będzie jacobianem  $\bar{g}$  względem układu parametrów  $\bar{p}$  wziętym w punkcie  $(p_1^0, \dots, p_m^0)$

$$J = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{G}_{11}, \dots, \mathbf{G}_{mn})}{\mathbf{D}(P_1^0, \dots, P_m^0)}$$

wtedy

$$(35) \quad d\bar{g} = Jd\bar{p}.$$

Korzystając ze wzoru (35) otrzymamy

$$(36) \quad d\bar{p} = (J^T J)^{-1} J^T \cdot d\bar{g},$$

gdzie:  $d\bar{g}$  jest zaburzeniem  $d\mathbf{G}$  przedstawionym w postaci wektorowej. Drugi sposób znalezienia nowego wektora parametrów  $\bar{p}^*$  oparty jest na minimalizacji wyrażenia podanego niżej. Mając  $\Delta\mathbf{G}$  obliczamy nową macierz

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} + \Delta\mathbf{G}$$

Pamiętając, że macierz  $\mathbf{G}$  jest funkcją wektora  $p$ , wektor zmodyfikowany  $p^*$  otrzymamy rozwiązując zadanie minimalizacji

$$(37) \quad \min_{\bar{p}} ||\mathbf{G}(\bar{p}^*) - \tilde{\mathbf{G}}||$$

przy ograniczeniach  $\bar{P}_{\min} \leq \bar{p} \leq \bar{P}_{\max}$

Rozwiązaniem zadania (37) będzie szukany zmodyfikowany wektor  $\bar{p}^*$ . Przedstawione powyżej metody obliczenia  $\Delta\bar{p}$  należy stosować w przypadku gdy zależność macierzy  $\mathbf{G}$  od wektora parametrów jest bardzo nieliniowa oraz gdy elementami wektora  $\bar{p}$  są parametry masowo-bezwładnościowe. Jeśli warunki te nie są spełnione to wówczas pokażemy, że można w bardzo łatwy sposób znaleźć wektor  $\Delta\bar{p}$ . Dla układu opisanego równaniem (2) macierz  $\Delta\mathbf{G}$  otrzymaną z (23) można przedstawić w postaci:

$$(38) \quad \Delta\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{c|c} \Delta\mathbf{G}_{11} & \Delta\mathbf{G}_{12} \\ \hline \mathbf{I} & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} -\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{B} & -\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{C} \\ \hline \mathbf{I} & 0 \end{array} \right],$$

gdzie:  $\dim\Delta\mathbf{G}_{11} = \dim\Delta\mathbf{G}_{12} = n \times n$

Korzystając z (38) można już w prosty sposób znaleźć  $\Delta\bar{p}$ , mianowicie

$$(39) \quad \begin{aligned} \Delta\mathbf{B} &= -\mathbf{A}^{-1} \cdot \Delta\mathbf{G}_{11} \Rightarrow \bar{p}_B \\ \Delta\mathbf{C} &= -\mathbf{A}^{-1} - \Delta\mathbf{G}_{12} \Rightarrow \bar{p}_C \end{aligned}$$

przy czym:  $\Delta\bar{p} = [\Delta\bar{p}_B, \Delta\bar{p}_C]$ .

Obliczone w ten sposób wektory  $\Delta\bar{p}_B, \Delta\bar{p}_C$  są wartościami poprawek elementów tłumiących macierzy  $\mathbf{B}$  i podatnych macierzy  $\mathbf{C}$ .

Jeżeli elementy macierzy  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{B}$  zależą liniowo od parametrów podatno-tłumiących obiektu rzeczywistego to ze związków (39) można w sposób bezpośredni otrzymać nowe wartości sprężystości i tłumienia łączników podatno-tłumiących. Mając te dane możemy już podać konkretne propozycje zmian konstrukcyjnych w badanym pojeździe. Jeżeli zależność elementów macierzy  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{B}$  od parametrów podatno-tłumiących obiektu rzeczywistego nie jest liniowa to wtedy otrzymanie nowych wartości parametrów podatno-tłumiących obiektu wymaga dodatkowo rozwiązania nieliniowego układu równań:

$$(40) \quad \begin{aligned} \Delta\bar{p}_B &= f'(\bar{c}), \\ \Delta\bar{p}_C &= f''(\bar{k}), \end{aligned}$$

gdzie:  $\bar{k}, \bar{c}$  — wektory zawierające elementy podatno-tłumiące obiektu rzeczywistego.

### 3. Określenie niektórych kryteriów modyfikacji modeli pojazdów szynowych

Dla przeprowadzenia modyfikacji modelu należy określić kryteria w obszarze częstotliwości wg których należałoby prowadzić zmiany konstrukcyjne tak aby nowe własności dynamiczne modelu spełniały żądane warunki. Kryteria, które podamy poniżej będą wynikać z następujących przesłanek:

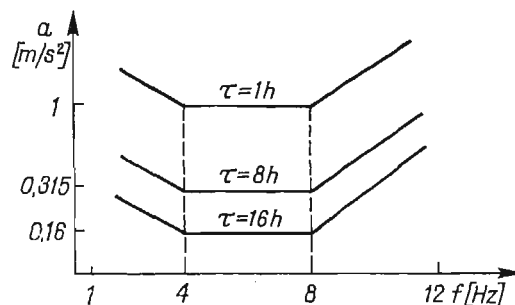
- warunków pracy obsługi;
- warunków pracy urządzeń;
- komfortu jazdy pasażera.

**3.1. Kryterium modyfikacji wynikającej z warunków pracy ludzi.** Rozpatrując warunki pracy ludzi w przypadku występowania drgań należy podać na jakiego rodzaju drgania narażone jest ciało ludzkie w różnych warunkach pracy. Według standardów podanych przez ISO [8] wyróżniamy trzy rodzaje oddziaływania wibracji na człowieka:

- 1) wibracje przenoszone są na całe ciało lub na większą powierzchnię ciała gdy ciało zanurzone jest w ośrodku drgającym.
- 2) wibracje przenoszone na ciało jako całość poprzez powierzchnię podtrzymującą (nogi osoby stojącej, oparte plecy itp).
- 3) wibracje przenoszone są poprzez poszczególne części ciała w przypadku gdy do nich przyłożone są elementy drgające (np. drążki sterujące, kierownice, wiertarki, młoty pneumatyczne).

Badania przeprowadzone przez ISO obejmowały tylko zakres częstotliwości (1 ÷ 80) Hz. Dotyczyły one między innymi sprawności ludzi w warunkach gdy poddawani są oni w czasie pracy drganiom.

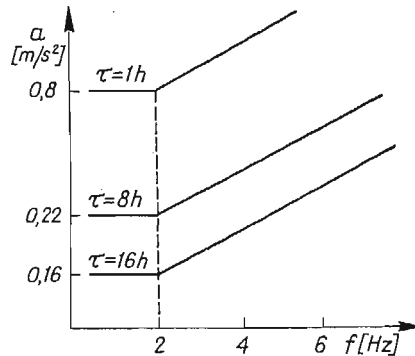
Z badań tych wynika, że sprawność człowieka narażonego na działanie drgań mechanicznych maleje po pewnym czasie na skutek zmęczenia np. podczas jazdy pojazdu. Zmniejszenie zdolności do pracy uzależnione jest w rzeczywistości od wielu czynników i występuje w różnym stopniu u różnych osób. Jednym z czynników są drgania którym poddawany jest człowiek. Na rys. 3 dla drgań pionowych i na rys. 4 dla drgań poprzecznych



Rys. 3

pokazano graficznie zależności amplitudy przyspieszeń od częstotliwości dla poszczególnych czasów odczuwania zmęczenia  $\tau$ . Wykresy te wyznaczono na podstawie badań eksperymentalnych.

Badania wykazały, że wartość przyspieszeń drgań niebezpiecznych dla człowieka ze względu na jego sprawność, dla drgań pionowych zawarta jest w przedziale 4—8 Hz, a dla drgań w kierunku poziomym i poprzecznym od 1 Hz do 2 Hz. Przedstawione wyniki są kryterium dla jakich częstotliwości dynamiczne funkcje przejścia powinny posiadać wartości charakterystyki amplitudowej mniejszych od 1.



Rys. 4

**3.2. Kryteria modyfikacji wynikające ze spokojności jazdy.** Podane zostaną niektóre kryteria matematyczne pozwalające określić stopień spokojności jazdy pojazdu, tj. będące jednym z mierników komfortu pasażera. Są to:

— Kryterium Sperlinga

Oznaczamy przez  $W_z$  współczynnik spokojności jazdy określony wzorem zgodnie z pracą [2, 9]

$$(41) \quad W_z = 2,7 \sqrt[10]{a^3 f^5},$$

lub

$$(42) \quad W_z = 0,846K \sqrt[10]{\frac{b^3}{f}},$$

gdzie:  $a$  — amplituda przemieszczeń dla danej częstotliwości  $f$  bądź  $a = \sqrt{S(f)}$  dla drgań losowych

$b$  — amplituda przyspieszeń dla danej częstotliwości

$f$  — częstotliwość drgań w [Hz]

$K$  — współczynnik określający wrażliwość organizmu na daną częstotliwość podany w [9]  $k \in \langle 0.8 \div 1.35 \rangle$

$S(f_i)$  — wartość estymatora funkcji gęstości spektralnej dla  $i$ -tego pasma częstotliwości

Klasyfikację spokojności jazdy podano w tabeli w oparciu o [14]

— Kryterium Dieckmanna

Jest to kryterium stosowane częściej w pojazdach samochodowych ale podajemy je dla obrazu całości zagadnienia. Określa się współczynnik uzupełnienia  $k$  następująco [11]:

$$(43) \quad k = \begin{cases} af^2 & \text{dla } f \leq 5\text{Hz} \\ 5af & \text{dla } 5\text{Hz} \leq f \leq 40\text{Hz} \\ 20a & \text{dla } f > 40\text{ Hz} \end{cases}$$

gdzie:  $a$  oznacza amplitudę drgań, a  $f$  — częstotliwość.

W zależności od wartości  $k$  ocenia się stopień odczuwania drgań korzystając z wytyczonych przedstawionych w pracy [11].

Tablica 1

$W_z$ drgania pionowe	$W_z$ drgania poziome	ocena
1—1.5	1—1.5	b. dobra
2	2—2.3	dobra
2.5—3	3—3.5	zadowalająca
3.5—4	4—4.5	dopuszczalna
4	—	niedopuszczalna

W przypadku drgań losowych o szerokim paśmie częstotliwości, w celu znalezienia zastępczej średniej kwadratowej przyspieszeń, dzieli się pasmo częstotliwości na odpowiednie przedziały, a następnie określa się średnie kwadratowe przyspieszeń dla każdego z przedziałów. Z otrzymanych wartości oblicza się średnią kwadratową zastępczą.

$$(44) \quad a_z = \sqrt{\sum_i a_{si}^2 k_{vi}},$$

gdzie:  $a_{si}$  — średnia kwadratowa przyspieszeń dla  $i$ -tego przedziału częstotliwości

$k_{vi}$  — współczynnik redukcji dla  $i$ -tego przedziału częstotliwości

Wartość  $k_{vi}$  można dobrać korzystając z [11].

W przypadku gdy na człowieka oddziaływują w sposób ciągły w czasie  $t_1, t_2, \dots, t_n$  drgania o różnych widmach występujących przyspieszeń, oblicza się zredukowany czas oddziaływania

$$(45) \quad T_z = \sum_{i=1}^n t_i \frac{T}{T_i},$$

gdzie:  $t_i$  — rzeczywisty czas występowania  $i$ -tego widma częstotliwości

$T$  — dopuszczalny czas oddziaływania drgań występujących w czasie  $t$

$T_i$  — dopuszczalny czas oddziaływania drgań odpowiadających zastępczej średniej kwadratowej amplitudzie w  $i$ -tym okresie czasu.

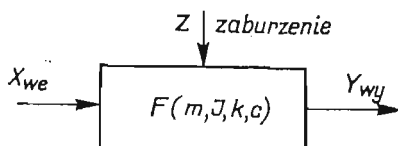
Jeżeli z obliczeń okaże się, że

$$(46) \quad T_z < T,$$

to można wtedy przyjąć, że drgania są poniżej tej granicy jaką przyjęto za dopuszczalną do znalezienia czasów  $T$  oraz  $T_i$  [8]. Przedstawiliśmy kryteria, które posłużą nam do cyfrowej modyfikacji przyjętego modelu matematycznego, mając na uwadze warunki pracy ludzi oraz komfort jazdy pasażera.



**3.3. Kryteria modyfikacyjne wynikające z warunków pracy urządzeń i wymuszeń działających na układ.** Pojazdy szynowe wyposażone są w różnego rodzaju urządzenia, które w całości bądź niektóre ich elementy są konstrukcjami mechanicznymi. Własności dynamiczne takiego urządzenia bądź elementu charakteryzuje funkcja przejścia zależna od elementów bezwładnościowych  $m$  i sprężysto-tłumiących  $k, c$  [10] rys. 5



Rys. 5

Warunkiem prawidłowego przetwarzania sygnału  $x_{we}$  na sygnał  $y_{wy}$  jest aby postacie drgań własnych nie pokrywały się z częstotliwościami drgań zewnętrznych, które najczęściej będą drganiami podstawy do której przymocowane jest dane urządzenie.

Na rys. 5 drgania te przedstawione są w postaci sygnału  $z$ , który reprezentuje zakłócenia pracy danego urządzenia. Należy więc znaleźć postacie drgań własnych charakteryzujących dane urządzenie, tj. określić postać rozwiązania dla współrzędnej uogólnionej  $q_i$ , analitycznie bądź eksperymentalnie mającej wpływ na warunki pracy urządzenia. Następnie przeprowadzić analizę czy we współrzędnej  $q_i$  występują postacie własne o częstotliwościach zbliżonych z postaciami własnymi urządzeń instalowanych na pojeździe. Wynik tej analizy będzie kryterium dla modyfikacji pojazdu bądź urządzeń.

Pojazdy szynowe będące w ruchu poddawane są wymuszeniom mającym w części charakter kinematyczny. Wymuszenia te będą pochodzić od nierówności występujących w torze. Może się okazać, że dla niektórych prędkości jazdy pojazdu szynowego częstotliwości wymuszeń będą w tym samym zakresie co częstotliwości w postaci własnych drgań pojazdu. Wystąpi więc sprzężenie dynamiczne między wymuszeniem a pojazdem i dynamiczna funkcja przejścia będzie dla tych częstotliwości większa od jedności. Ten zakres częstotliwości będzie stanowił kryterium modyfikacyjne.

**3.4. Przykłady niektórych kryteriów modyfikacyjnych sformułowanych dla badanych typów pojazdów szynowych.** W pracach [2, 3, 5] zbudowano i zidentyfikowano model matematyczny lokomotywy elektrycznej EU07. Na pracę człowieka w kabinie maszynisty wpływ posiadać będą drgania opisywane współrzędną  $q_{14}$  [2, 3], której postać analityczna jest następująca:

$$(49) \quad q_{14} = \operatorname{Re} \left( \sum_{i=1}^{17} \bar{x}_i e^{\lambda_i t} \right),$$

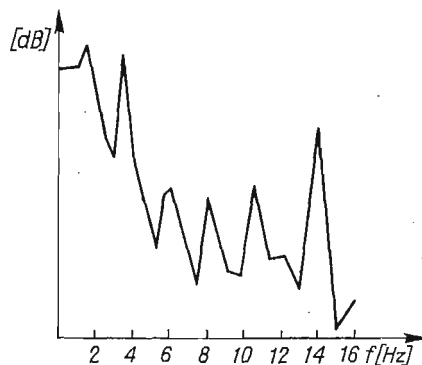
gdzie:  $\bar{x}_i$  — wektor własny;  $\lambda_i$  — wartość własna.

Po wyznaczeniu wektorów i odpowiadających im wartości własnych [2, 5] widać, że na ruch środka kabiny maszynisty wpływ będą posiadały następujące częstotliwości:

$$\begin{aligned} \lambda_{10} = f_{10} = 8,62 \text{ Hz}, & \quad \lambda_{11} = f_{11} = 7,14 \text{ Hz}: \\ \lambda_{12} = f_{12} = 3,26 \text{ Hz}, & \quad \lambda_{13} = f_{13} = 2,2 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Wyniki te potwierdzone zostały badaniami eksperymentalnymi. Po analizie spektralnej realizacji opisujących ruch środka kabiny maszynisty uzyskano estymatory gęstości widmowej w których maxima występują dla tych samych częstotliwości jakie otrzymano w wyniku obliczeń wektorów i wartości własnych [2].

Otrzymane częstotliwości porównano z wykresami na rys. 3. Z porównania wynika kryterium modyfikacyjne; tj. konieczność zmiany parametrów konstrukcyjnych tak, aby wyeliminować częstotliwości  $f_{11}$ . Gdy porównamy częstotliwości postaci własnych układu, z częstotliwościami postaci własnych niektórych elementów urządzeń ZRK [10] to widać, że należałoby zmodyfikować konstrukcję elementu tak, aby postaci własne drgań tych urządzeń były różne od częstotliwości  $f_{10}$  i  $f_{11}$ . Przy badaniu nierówności geometrycznych toru metodami geodezyjnymi otrzymano długości fal tych nierówności. Dla prędkości 80 km/godz. częstotliwości tych nierówności są w granicach 0,2 do 3,5 Hz. Wyznaczono również dynamiczne funkcje przejścia z modelu matematycznego i badań eksperymentalnych dla wagonu towarowego z wózkami 25 TN, które przedstawiono na rys. 6. Z porów-



Rys. 6

nia dynamicznych funkcji przejścia i wymuszeń pochodzących od geometrycznych nierówności toru widać, że dla drgań pionowych cechy dynamiczne układu eliminują działanie wymuszenia, tak więc w tym przypadku nie należy dokonywać zmian konstrukcyjnych dla poprawy własności dynamicznych obiektu.

#### 4. Przykład obliczeniowy modyfikacji układu mechanicznego metodą zmian elementów macierzy transmitancji

Na podstawie powyższych ogólnych zależności został napisany program realizujący modyfikację obiektu poprzez zmianę transmitancji. Formułując zadanie skorzystano z następującego twierdzenia:

Na to, aby układ równań różniczkowych pierwszego rzędu (2) był równoważny pewnemu układowi równań różniczkowych drugiego stopnia postaci (1) potrzeba i wystarcza, aby wartości własne i wektory własne macierzy  $G$  spełniały warunki:

- a) wartości własne są rzeczywiste albo parami sprzężone,
- b) sprzężonym wartościom własnym odpowiadają sprzężone wektory własne,

c) jeżeli  $\bar{V} = [V_1, V_2, \dots, V_n, V_{n+1}, \dots, V_{2n}]^T$  jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ , to

$$V_1 = \lambda \cdot V_{n+1},$$

$$V_2 = \lambda \cdot V_{n+2},$$

$$V_n = \lambda \cdot V_{2n}.$$

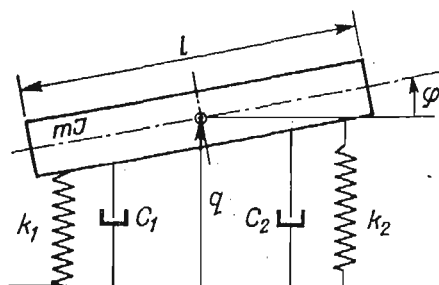
Własności *a* i *b* zapewniają, że macierz **G** utworzona wg wzoru  $\mathbf{G} = \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{Y}^{-1}$ , **Y** — macierz wektorów własnych jest rzeczywista a z własności *c* wynika, że **G** ma postać

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Przykładową modyfikację przeprowadzono dla modelu ramy wózka pokazanego na rys. 7. Ruch swobodny takiego układu można zapisać w postaci:

$$(50) \quad \left. \begin{aligned} m\ddot{q} + (C_1 + C_2)\dot{q} + \frac{1}{2}l(C_1 - C_2)\dot{\varphi} + (k_1 + k_2)q + \frac{1}{2}l(k_1 - k_2)\varphi &= 0, \\ \mathbf{I}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}l(C_1 - C_2)\dot{q} + \frac{1}{4}l(C_1 + C_2)\dot{\varphi} + \frac{1}{2}l(k_1 - k_2)q + \frac{1}{4}l^2(k_1 + k_2)\varphi &= 0, \end{aligned} \right\}$$

gdzie: oznaczenia jak na rys. 7.



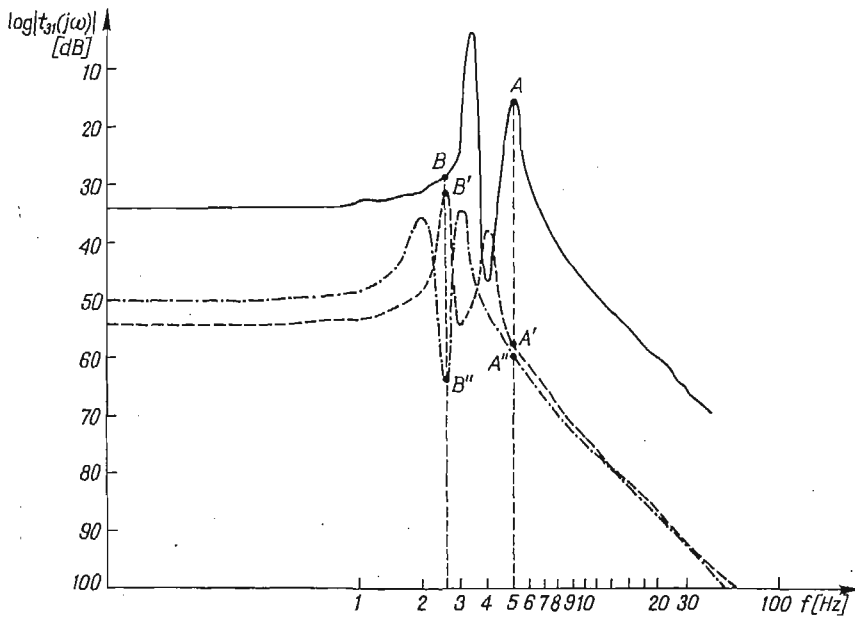
Rys. 7

Modyfikację wykonano zmieniając jedynie wartości własne. W opisanym przykładzie dokonano modyfikacji transmitancji  $t_{31}(j\omega)$  odpowiadającej współrzędnej  $q$ . Wektor parametrów w naszym przykładzie był postaci  $\bar{p} = [C_1, C_2, k_1, k_2]^T$ . W dodatku nr 1 zamieszczono algorytm programu dla obliczeń numerycznych modyfikacji wykonywanych na maszynie cyfrowej Odra 1325.

Wykres transmitancji  $t_{31}(j\omega)$  przed modyfikacją przedstawiono na rys. 8 (linia ciągła).

Zadaniem modyfikacji było zmniejszenie wpływu częstotliwości  $f_A = 5\text{Hz}$  i  $f_B = 2,5\text{Hz}$  na ruch współrzędnej  $q$  ze względu na szkodliwe oddziaływanie częstotliwości  $f_A$  na człowieka — zgodnie z rys. 3 oraz ze względu na występowanie częstotliwości  $f_B$  w wymuszeniu pochodzącym od geometrycznych nierówności toru.

W wyniku pierwszej modyfikacji uzyskano: zniesienie maksimum w p-kcie **A** oraz wyraźne zmniejszenie wzmocnienia dla częstotliwości  $f_A$ . Pojawiło się jednak maksimum



Rys. 8

w punkcie  $f_B = 2,5$  Hz. W wyniku drugiej modyfikacji zlikwidowano maksimum w punkcie  $f_B$ . Na rys. 8 pokazano wykresy transmitancji: po pierwszej modyfikacji (linia przerywana) i po drugiej modyfikacji (linia kropkowana). Ogólnie widać, że nastąpiło zmniejszenie wzmocnienia nie tylko dla interesujących nas częstotliwości  $f_A$  i  $f_B$  lecz w całym paśmie częstotliwości.

Wyniki obu modyfikacji pokazano w Tabelicy 2.

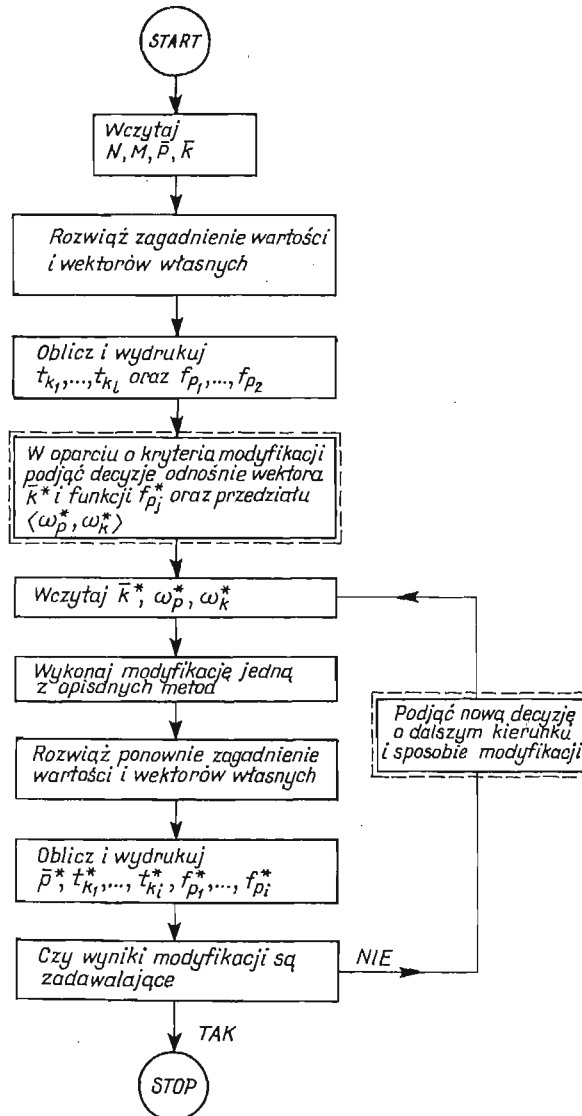
Tabelica 2

	Wektor parametrów				Punkt A		Punkt B	
	tłumienie	tłumienie	sprężyst.	sprężyst.	$f_A$ [Hz]	Wzm [dB]	$f_B$ [Hz]	Wzm [dB]
Przed modyfikacją	$C_1$	$C_2$	$k_1$	$k_2$	5.2	-15.7	2.5	-28
Po I modyfikacji	$1.2C_1$	$1.3C_2$	$\frac{2}{3}k_1$	$\frac{1}{2}k_2$	5.2	-56.7	2.5	-30.5
Po II modyfikacji	$0.7C_1$	$1.25C_2$	$\frac{2}{5}k_2$	$\frac{3}{10}k_2$	5.2	-60	2.5	-64

5. Wnioski

Przedstawiona metoda modyfikacji zidentyfikowanych modeli matematycznych jest skuteczna i daje pozytywne rezultaty. Metoda zmiany własności dynamicznych obiektu poprzez zmianę elementów macierzy transmitancji bądź dynamicznych funkcji przejścia jest możliwa do stosowania dla układu opisanego równaniami ruchu gdy macierze **A**, **B** i **C** (zgodnie z oznaczeniami użytymi w równaniu (1)) są różne od zera.

Opracowana procedura analityczna oparta jest na znanych elementach algebry liniowej i rachunku macierzowego a sam algorytm postępowania zarówno w części analitycznej



Rys. 1.1

jak i numerycznej dla procesu modyfikacji (przedstawiony przez autorów) sformułowany jest ogólnie i może być stosowany dla dowolnego modelu liniowego.

Dla pojazdu szynowego przedstawiono niektóre kryteria dla modyfikacji będące jednocześnie częścią warunków jakie powinny spełniać pojazdy szynowe w zakresie dynamiki dla poprawnej ich pracy. Warunki te sprecyzowano jedynie w obszarze częstotliwości.

Przedstawiony algorytm obliczeń numerycznych może być stosowany dla dowolnego modelu liniowego.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. MADEJ, *Praca doktorska*. Biblioteka PW. Warszawa, (1972).
2. J. KISIŁOWSKI, *Dynamika układu tor-pojazd*. Prace ITPW, Zeszyt 15. Warszawa, (1978).
3. A. CHUDZIKIEWICZ, J. DROŹDZIEL, J. KISIŁOWSKI, W. KUS, *Próba wyznaczenia modelu matematycznego wybranej konstrukcji pojazdu szynowego*. Archiwum Budowy Maszyn. Tom XXV, Zeszyt 3, Warszawa, (1978).
4. D. J. GROBNEWELD, A. D. de PATER, *The motion of a railway vehicle placed on rotating rollers*. Delft University of Technology. Report nr 486 June, (1974).
5. A. CHUDZIKIEWICZ, J. DROŹDZIEL, J. KISIŁOWSKI, W. KUS, *On the dynamic analysis of a chosen traction rail vehicle*. Referat wygłoszony na XI Konferencji Dynamiki Maszyn. Libice (1977) CSRS.
6. M. F. WERIGO, S. N. POPOW, i inni, *Wzajemnejstwie puti i podwiznogo sostawa i waproxy razzczetow puti. Trudy Instytutu Żelazno-Dorożnogo Transporta*. Wypusk 97. (1959).
7. G. LALLEMENT, *Modyfikacje własności dynamicznych układów liniowych. Sympozjum Dynamiki Maszyn PAN. Jabłonna*, (1974).
8. *Investigation of boxcar vibrations*. Federal Railroad Administration. September, 1970.
9. K. ŻENKEL, *Problemy kmitani na motorowych lokomotiwach*. Materiały Konferencji VSD. Żylin — Smoleowice, 1972.
10. J. KISIŁOWSKI, *Elementy analizy układu stykowego na przykładzie przekaźnika SRG*. Praca IT PW. Zeszyt 11. Warszawa, 1975.
11. J. LAZENDOERFER, *Badanie pojazdów symochodowych WKŁ*. Warszawa, (1977).
12. J. KISIŁOWSKI, A. SZULCZYK, *Próba uzasadnienia wprowadzenia niektórych założeń przy budowie modelu nominalnego wagonu towarowego z wózkami 25TN*. Pojazdy Szynowe zeszyt 1. Poznań, 1979.
13. J. GIERGIEL, *Zagadnienie tłumienia drgań*. Wyd. AGH, Kraków 1974.
14. W. GRZESIKIEWICZ, J. OSIECKI, J. PIOTROWSKI, *Podstawy dynamiki pojazdów szynowych*. Wydawnictwo PW, Warszawa, 1972.

#### Dodatek 1

Dla metody modyfikacji własności dynamicznych modelu w oparciu o zmianę elementów macierzy transmitancji, opracowano program numeryczny w języku Algol 1900 na EMC Odra 1325. Schemat blokowy tego programu został przedstawiony na rys. 1.1. Na schemacie tym użyto następujących oznaczeń:

$N$  — wymiar problemu (wymiarowość macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  w równaniu (1))

$M$  — wymiar wektora parametrów  $\bar{P}$

$\bar{p}$  — początkowa wartość wektora parametrów

$\bar{k}$  — wektor zawierający numery interesujących nas 1 elementów macierzy transmitancji  $\bar{k} = [k_1, \dots, k_1]$

$t_{k1}, \dots, t_{kl}$  — 1 elementów macierzy transmitancji

$f_{p1}, \dots, f_{pi}$  — odpowiednie funkcje przejścia

- $\bar{k}^x$  — wektor zawierający numery tych elementóv macierzy transmitancji, które należy zmienić
- $f_{p1}^x, \dots, f_{pj}^x$  — funkcje przejścia które należy zmodyfikować
- $\langle \omega_p^*, \omega_k^* \rangle$  — przedział w dziedzinie częstotliwości w którym dokonujemy modyfikacji
- $\bar{p}^x$  — wektor parametróv po wykonaniu modyfikacji.

Na schemacie linią przerywaną zaznaczono miejsca, w których po otrzymaniu wynikóv obliczeń, człowiek musi podjąć decyzję o kierunku i sposobie zmian własności dynamicznych badanego modelu. Podstawową częścią omawianego programu jest procedura obliczająca wektory, wiersze i wartości własne opracowane, w oparciu o algorytm podany przez Wilkinsona. Próby skorzystania z gotowych procedur bibliotecznych maszyny serii Odra zakończyły się niepowodzeniem, z uwagi na złe uwarunkowanie macierzy  $\mathbf{G}$  i jej dużą wymiarowość (w pracy [3] badano model dla którego  $\dim \mathbf{G} = 68 \times 68$ ). Pozostałe procedury programu zostały w całości opracowane przez autoróv.

Р е з ю м е

ПОПЫТКА МОДИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ  
О МНОГИХ СТЕПЕНЯХ СВОБОДЫ НА ПРИМЕРЕ РЕЛЬСОВОГО ПОЕЗДА

В работе представлено известные методы синтеза динамики дискретной линейной модели и предложено новый метод синтеза опираясь на модификации матрицы передаточной функции. Основой в анализе диналшки являются собственные числа и векторы, матрица передаточной функции, а также динамические функции передачи, которые рассчитано для векторного уравнения состояния, полученного в результате преобразования системы дифференциальных линейных уравнений второго порядка, являющихся математической моделью исследованного объекта. В методе, который авторы предлагают, задачу синтеза осуществлено путем модификации динамических функций передачи на базе элементов матрицы передаточной функции исследованного уравнения состояния. Заключительным результатом было получит вектор конструктивных параметров, выполняющий требуемые динамические свойства системы. Представлено также, для разного рода рельсовых поездов, критерии необходимы на этапе синтеза. Вычисления были выполнены для модели о двух степенях свободы.

S u m m a r y

AN ATTEMPT OF THE MODIFICATION OF A LINEAR DISCRETE MODEL  
OF MULTI DEGREES OF FREEDOM BY A RAIL VEHICLE

We give a review of synthesis methods of a discrete linear model dynamics and propose a new method of synthesis based on a modification of the transfer functions matrix. The basis for the synthesis constitute eigen-values and eigen-vectors, transfer functions matrix and dynamic functions of transmission, estimated for vector equation of state obtained as a result of transformation of the system of linear differential equations of the second order with constant coefficients corresponding to a mathematical model of the investigated object. In the proposed method the problem of synthesis has been realized through a modification of dynamic functions of transmission based on elements of transmittation matrix of the investigated equation of state. Our purpose was to obtain the vector of constructive parameters realizing expected properties of a dynamic system. For different types of rail vehicles criteria necessary at the stage of synthesis problem were introduced. The calculation has been performed for a model with two degrees of freedom.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
INSTYTUT TRANSPORTU  
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lipca 1978 roku.*





## ZASTOSOWANIE TRANSFORMACJI LAPLACE'A W METODZIE UŚREDNIANIA POPRAWEK FUNKCJONALNYCH

ZBIGNIEW N O W A K, KAZIMIERZ R U P (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

W pracy [2] przedstawiono oryginalną modyfikację zastosowania metody uśredniania poprawek funkcjonalnych do przybliżonego rozwiązywania równania różniczkowego typu parabolicznego opisującego nieizotermiczny przepływ cieczy newtonowskiej. Umożliwia ona aplikację wymienionej, analitycznej metody przybliżonej rozwiązania równań różniczkowych bez konieczności wprowadzania pojęcia „głębokości wnikania ciepła” (np. przy rozwiązywaniu równania przewodnictwa cieplnego). Tę konieczność ominięto w pracy [2] przez wykorzystanie do obliczania wartości początkowych (stałych całkowania) warunku polegającego na spełnieniu postulatu minimum całki z kwadratu odchylenia.

W pierwszej części niniejszej pracy przedstawiono propozycję zastosowania metody uśredniania poprawek funkcjonalnych w obrazie przekształcenia całkowego Laplace'a. Wykazano, że w ten sposób eliminuje się konieczność wyznaczania wartości początkowych z dodatkowych postulatów. Powracając następnie do dziedziny oryginału, otrzymano poszukiwane pole temperatury w ustalonym, laminarnym przepływie nieściśliwej cieczy newtonowskiej przez prostoosiową rurę kołową, w pierwszym i drugim przybliżeniu. Podano również sposób konstruowania dowolnego,  $n$ -tego przybliżenia.

W drugiej części pracy przedstawiono odmienny wariant zastosowania metody uśredniania poprawek funkcjonalnych do tego samego zagadnienia brzegowego, w którym wykorzystano, do wyznaczania wartości początkowych, postulat minimum całki z odchylenia. Wykazano, że w obu przypadkach otrzymuje się identyczne postacie funkcji przybliżonej opisującej pole temperatury. W ten sposób udowodniono, że zastosowanie metody uśredniania poprawek funkcjonalnych w obrazie przekształcenia całkowego Laplace'a determinuje automatycznie wybór kryterium, z którego należy wyznaczyć wartości początkowe w przypadku nie stosowania transformacji Laplace'a. W oparciu o konkretny przykład liczbowy wykazano, że zastosowana w pracy modyfikacja metody uśredniania poprawek funkcjonalnych daje wysoki stopień aproksymacji rozwiązania dokładnego już w drugim przybliżeniu.

Następnie porównano rozwiązanie przybliżone równania różniczkowego omówionego w pracy [2] w przypadkach, gdy do wyznaczania wartości początkowych stosuje się dwa kryteria, a mianowicie: postulat minimum całki z odchylenia oraz warunek minimum całki z kwadratu odchylenia. Stwierdzono, że nieco wyższy stopień dokładności aproksymacji otrzymuje się w przypadku zastosowania postulatu minimum całki z kwadratu odchylenia.

## Oznaczenia

$a = \frac{\lambda}{\gamma \cdot c_p}$	współczynnik wyrównania temperatury,
$A = R\sqrt{TPe}$	parametr
$C$	stała
$d$	średnica rury
$Nu$	liczba Nusselta (4.3),
$p$	zmienna zespolona,
$Pe = \frac{\bar{w} \cdot R}{a}$	liczba Pecleta,
$q_1(X), q_2(X), \dots, q_n(X)$	współczynniki funkcyjne (parametry swobodne),
$q_s$	strumień ciepła na ścianie rury,
$q^*$	bezwymiarowy strumień ciepła na ścianie rury,
$r$	współrzędna promieniowa,
$R$	promień rury,
$t$	temperatura,
$t_s$	temperatura ścianki rury,
$t_0$	temperatura początkowa,
$T = \frac{t-t_0}{t_s-t_0}$	bezwymiarowa temperatura,
$w(\varrho)$	prędkość lokalna cieczy,
$w$	prędkość średnia,
$x$	współrzędna osiowa,
$X = \frac{1}{Pe} \cdot \frac{x}{R}$	bezwymiarowa współrzędna,
$X_1 = 2X$	bezwymiarowa współrzędna,
$\nabla t = \frac{\partial t_s}{\partial x}$	osiowy gradient temperatury na ścianie rury,
$\Theta = \frac{t-t_0}{A}$	bezwymiarowa temperatura,
$\bar{\theta}$	temperatura średnia,
$\varrho = \frac{r}{R}$	bezwymiarowa współrzędna promieniowa.

## 2. Przedstawienie proponowanej modyfikacji

Jak wiadomo [1, 2], metoda uśredniania poprawek funkcjonalnych jest analityczną, wewnętrzną metodą przybliżoną rozwiązywania równań różniczkowych, całkowych i różniczkowo-całkowych, której idea przewodnią polega w ogólności na zastąpieniu samej, poszukiwanej funkcji (lub jej pochodnej), ciągłej w pewnym obszarze, przez jej średnią całkową w tym obszarze. Omawiana metoda wykazuje, w porównaniu z innymi analitycznymi metodami przybliżonymi, następujące zalety:

a) względna łatwość wyznaczania funkcji aproksymującej rozwiązanie ściśle,  
 b) możliwość wyznaczania dowolnego,  $n$ -tego przybliżenia. Warto przy tym dodać, że wyznaczona w pierwszym przybliżeniu funkcja aproksymująca nie ulega zmianie przy konstruowaniu następnego przybliżenia (podobnie w metodzie Kantorowicza, zmodyfikowanej przez Kerra [3]),

c) eliminuje intuicyjny wybór funkcji aproksymującej rozwiązanie ściśle.

Poniżej przedstawiono ideę przewodnią proponowanej modyfikacji zastosowania metody uśredniania poprawek funkcjonalnych na przykładzie równania różniczkowego, opisującego pole temperatury w ustalonym, laminarnym przepływie nieściśliwej cieczy newtonowskiej przez prostoosiową rurę kołową. To równanie otrzymuje się z ogólnych równań opisujących ruch cieczy lepkiej [4, 5], tj. równania energii, pędu i ciągłości, przy następujących założeniach upraszczających:

- 1) nieściśliwa ciecz newtonowska przepływa ustalonym ruchem laminarnym przez prostoosiową rurę kołową,
- 2) własności fizyczne ( $\eta$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $C$ ) cieczy nie zależą od temperatury,
- 3) brak jest wewnętrznych źródeł ciepła (pomija się dysypację energii przepływającej cieczy, wywołaną tarciami wewnętrznymi),
- 4) przepływ ciepła w kierunku promieniowym jest znacznie intensywniejszy niż przepływ ciepła w kierunku osiowym,
- 5) pomijamy wpływ pola jednostkowych sił masowych.

Przedmiotowe równanie różniczkowe przyjmuje w omawianym przypadku postać [2]:

$$(2.1) \quad 2(1 - \varrho^2) \frac{\partial t}{\partial X} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial t}{\partial \varrho} \right),$$

zaś warunki brzegowe zapisują się następująco:

$$(2.2) \quad X \leq 0, \quad 0 \leq \varrho \leq 1 \Rightarrow t = t_0$$

$$(2.3) \quad X > 0, \quad \varrho = 1 \Rightarrow t = t_0 + AX$$

$$(2.4) \quad X > 0, \quad \varrho = 0 \Rightarrow \frac{\partial t}{\partial \varrho} = 0$$

Przejęcie warunku brzegowego w postaci (2.3) wynikało z konieczności porównania otrzymanego poniżej rozwiązania przybliżonego z rozwiązaniem ścisłym, zawartym w pracy [7].

Równanie różniczkowe (2.1) wraz z warunkami brzegowymi (2.2), (2.3), i (2.4) poddane zostanie przekształceniu całkowemu Laplace'a po zmiennej bezwymiarowej  $X$ . Po jego wykonaniu, transformaty współczynników funkcyjnych  $q_1, q_2, \dots$  zostaną wyznaczone za pomocą metody uśredniania poprawek funkcjonalnych. Warto tutaj zaznaczyć, że omawiana metoda nie była dotychczas stosowana w podobnym przypadku. W dostępnej dla autorów literaturze z tego zakresu wykorzystano wprawdzie transformację Laplace'a, ale przekształcone równanie rozwiązywano następnie metodą Galerkin [6, 7, 8, 9]. Po raz pierwszy zaproponował powyższą technikę WEINER [6] do przybliżonego rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego. Ten sam tok postępowania stosowano następnie w pracach [7, 8, 9].

Po wyznaczeniu za pomocą omawianej metody współczynników funkcyjnych w dziedzinie obrazu przekształcania całkowego Laplace'a, zastosujemy następnie odwrotne przekształcenie Laplace'a otrzymując poszukiwane rozwiązanie przybliżone w dziedzinie oryginału. Warto już w tym miejscu podkreślić, że zastosowanie transformacji Laplace'a do omawianego zagadnienia umożliwi wyznaczenie współczynników funkcyjnych, a następnie pola temperatury bez konieczności określania wartości początkowych z dodatkowych postulatów.

Po wykonaniu przekształcenia całkowego Laplace'a równanie (2.1) przyjmuje postać:

$$(2.5) \quad 2(1-\varrho^2)p \cdot \bar{t} - 2(1-\varrho^2)t_0 = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varrho} \right)$$

zaś warunki brzegowe (2.3) i (2.4) zapisują się następująco:

$$(2.6) \quad \bar{t}(\varrho, p) \Big|_{\varrho=1} = \frac{t_0}{p} + \frac{A}{p^2},$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varrho} \Big|_{\varrho=0} = 0$$

gdzie:

$$(2.8) \quad \bar{t}(\varrho, p) = \int_0^{\infty} t(\varrho, X) \exp(-pX) dX.$$

Równanie różniczkowe (2.5) przy warunkach brzegowych (2.6) i (2.7) rozwiązane zostanie za pomocą metody uśredniania poprawek funkcjonalnych. Zgodnie z jej ideą przewodnią, aproksymuje się równanie (2.5) w pierwszym przybliżeniu, następującym równaniem:

$$(2.9) \quad 2(1-\varrho^2)p\bar{q}_1 - 2(1-\varrho^2)t_0 = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial \varrho} \right),$$

gdzie:

$$(2.10) \quad \bar{q}_1 = 2 \int_0^1 \bar{t}_1 \cdot \varrho d\varrho.$$

Po dwukrotnym scałkowaniu równania (2.9) względem zmiennej  $\varrho$  otrzymuje się pierwsze przybliżenie pola temperatury w postaci:

$$(2.11) \quad \bar{t}_1 = \left( \frac{1}{2}\varrho^2 - \frac{1}{8}\varrho^4 \right) p\bar{q}_1 - \left( \frac{1}{2}\varrho^2 - \frac{1}{8}\varrho^4 \right) t_0 + \bar{q}_{1,2} \ln \varrho + \bar{q}_{1,3}.$$

Występujące w równaniu (2.11) transformaty współczynników funkcyjnych  $\bar{q}_1, \bar{q}_{1,2}, \bar{q}_{1,3}$  wyznacza się w oparciu o warunki brzegowe (2.6) i (2.7). Otrzymujemy:

$$(2.12) \quad \begin{cases} \bar{q}_{1,2} = 0 \\ \bar{q}_{1,3} = \frac{t_0}{p} + \frac{3}{8}t_0 + \frac{A}{p^2} - \frac{3}{8}p\bar{q}_1 \end{cases}$$

Podstawiając (2.12) do (2.11) znajdziemy

$$(2.13) \quad \bar{t}_1 = \frac{1}{8}(1-\varrho^4)p\bar{q}_1 - \frac{1}{2}(1-\varrho^2)p\bar{q}_1 - \frac{1}{8}(1-\varrho^4)t_0 + \frac{1}{2}(1-\varrho^2)t_0 + \frac{t_0}{p} + \frac{A}{p^2}$$

Celem wyznaczenia niezdeteminowanej transformaty współczynnika funkcyjnego  $\bar{q}_1$  podstawiamy (2.13) do (2.10). Po wykonaniu całkowania (2.10) oraz po pewnym uporządkowaniu otrzymuje się:

$$(2.14) \quad q_1 = \frac{\frac{1}{6}t_0 + \frac{t_0}{p} + \frac{A}{p^2}}{1 + \frac{1}{6}p}$$

Następnie podstawiamy (2.14) do (2.13) uzyskując pierwsze przybliżenie pola temperatury w płaszczyźnie obrazu przekształcenia Laplace'a:

$$(2.15) \quad \bar{t}_1 = \frac{1}{8}(1-\varrho^4) \frac{\frac{1}{6}t_0p + t_0 + \frac{A}{p}}{1 + \frac{1}{6}p} - \frac{1}{2}(1-\varrho^2) \frac{\frac{1}{6}t_0p + t_0 + \frac{A}{p}}{1 + \frac{1}{6}p} + \\ - \frac{1}{8}(1-\varrho^4)t_0 + \frac{1}{2}(1-\varrho^2)t_0 + \frac{t_0}{p} + \frac{A}{p^2}.$$

Powracając za pomocą tablic transformat [10] do dziedziny oryginału otrzymujemy poszukiwane pole temperatury cieczy w pierwszym przybliżeniu:

$$(2.16) \quad t_1(\varrho X)c = t_0 + AX + \frac{A}{2} [1 - \exp(-6X)] \left[ \frac{1}{4}(1-\varrho^4) - (1-\varrho^2) \right].$$

W celu podwyższenia stopnia dokładności otrzymanego rozwiązania przybliżonego, rozwiążemy równanie (2.5) w drugim przybliżeniu. Jego konstrukcja w płaszczyźnie obrazu przekształcenia całkowego Laplace'a za pomocą metody uśredniania poprawek funkcjonalnych wykazuje odmienne cechy w porównaniu z przypadkiem, kiedy wykorzystuje się metodę Galerkiną. Zasadnicza różnica wynika z odmiennej techniki konstruowania rozwiązań przybliżonych w wymienionych metodach. W szczególności: w metodzie uśredniania poprawek funkcjonalnych każde następne przybliżenie buduje się zawsze w oparciu o przybliżenie poprzednie [1, 2].

Zgodnie z ideą przewodnią omawianej metody, równanie (2.5) przyjmuje w przypadku drugiego przybliżenia, w płaszczyźnie obrazu przekształcenia Laplace'a, postać:

$$(2.17) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial \bar{t}_2}{\partial \varrho} \right) = 2(1-\varrho^2) \left[ \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial X} \right] + 2(1-\varrho^2)p\bar{q}_2 - 2(1-\varrho^2)t_0,$$

przy czym transformata pochodnej

$$(2.18) \quad \left[ \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial X} \right] = \mathcal{L} \left[ \frac{\partial t_1}{\partial X} \right] = \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial t_1}{\partial X} \right] \exp[-pX] dX.$$

Uwzględniając (2.16) w (2.18), a następnie podstawiając otrzymane wyrażenie do (2.17) znajdziemy:

$$(2.19) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial t_2}{\partial \varrho} \right) = \frac{2A}{p} (1 - \varrho^2) + \frac{A}{1 + \frac{1}{6}p} (1 - \varrho^2) \left[ \frac{1}{4} (1 - \varrho^4) - (1 - \varrho^2) \right] + \\ + 2(1 - \varrho^2)p\bar{q}_2 - 2(1 - \varrho^2)t_0.$$

Po dwukrotnym scałkowaniu równania (2.19) względem zmiennej  $\varrho$  otrzymuje się drugie przybliżenie pola temperatury w płaszczyźnie obrazu przekształcenia całkowego Laplace'a:

$$(2.20) \quad \bar{t}_2 = \frac{2A}{p} \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{16} \varrho^4 \right) + \frac{A}{1 + \frac{1}{6}p} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{16} \varrho^4 - \frac{1}{36} \varrho^6 + \frac{1}{64} \varrho^8 \right) + \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{8} \varrho^4 + \frac{1}{36} \varrho^6 \right) \right] + 2 \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{16} \varrho^4 \right) p\bar{q}_2 + 2 \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{16} \varrho^4 \right) t_0 + \bar{q}_{22} \ln \varrho + \bar{q}_{23}.$$

Występujące w równaniu (2.20) transformaty współczynników funkcyjnych  $\bar{q}_{22}$  i  $\bar{q}_{23}$  wyznacza się z warunków brzegowych (2.6) i (2.7). Po podstawieniu wyznaczonych transformat do (2.20) otrzymujemy:

$$(2.21) \quad \bar{t}_2 = \frac{A}{8p} (1 - \varrho^4) - \frac{A}{2p} (1 - \varrho^2) + \frac{A}{1 + \frac{1}{6}p} \left[ \frac{3}{16} (1 - \varrho^2) - \frac{7}{64} (1 - \varrho^4) + \right. \\ \left. + \frac{5}{144} (1 - \varrho^6) - \frac{1}{256} (1 - \varrho^8) \right] + \frac{1}{8} (1 - \varrho^4) p\bar{q}_2 - \frac{1}{2} (1 - \varrho^2) p\bar{q}_2 + \\ - \frac{1}{8} (1 - \varrho^4) t_0 + \frac{1}{2} (1 - \varrho^2) t_0 + \frac{t_0}{p} + \frac{A}{p^2}.$$

Zgodnie z ideą przewodnią omawianej metody, transformatę współczynnika funkcyjnego  $\bar{q}_2$  wyznacza się z następującego wyrażenia [1, 2]:

$$(2.22) \quad \bar{q}_2 = 2 \int_0^1 \bar{t}_2 \varrho d\varrho - \bar{q}_1.$$

Podstawiając (2.21) oraz (2.14) do (2.22) otrzymuje się po scałkowaniu każdorazowo jedno równanie algebraiczne, którego rozwiązanie determinuje ostatecznie współczynnik  $\bar{q}_2$ . Fakt ten stanowi poważną zaletę metody uśredniania poprawek funkcjonalnych w porównaniu z innymi metodami przybliżonymi, które — zastosowane w podobnym przypadku — wymagają rozwiązania układu równań algebraicznych.

W rozważanym przypadku drugiego przybliżenia pola temperatury transformata współczynnika funkcyjnego  $\bar{q}_2$  przyjmuje postać:

$$(2.23) \quad \bar{q}_2 = \frac{\frac{1}{6} t_0 + \frac{t_0}{p} + \frac{A}{p^2}}{1 + \frac{1}{6}p} \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{6}p} \right) - \frac{A}{6p} \frac{1}{1 + \frac{1}{6}p} + \frac{7A}{160} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{6}p \right)^2}.$$

Podstawiając (2.23) do (2.21) otrzymuje się drugie przybliżenie poszukiwanego pola temperatury w płaszczyźnie obrazu przekształcenia całkowego Laplace'a. Dokonując następnie przekształcenia odwrotnego znajdziemy w rezultacie poszukiwane pole temperatury w drugim przybliżeniu. Realizując przekształcenie odwrotne posłużono się tablicami transformat [10], otrzymując ostatecznie:

$$(2.24) \quad t_2(\varrho, X) = t_0 + AX + \frac{1}{8}A(1 - \varrho^4) - \frac{1}{2}A(1 - \varrho^2) + A \left[ \frac{67}{80}(1 - \varrho^2) + \right. \\ \left. - \frac{187}{320}(1 - \varrho^4) + \frac{5}{24}(1 - \varrho^6) - \frac{3}{128}(1 - \varrho^8) \right] \exp(-6X) + \\ + \frac{69}{40}(1 - \varrho^2)AX \exp(-6X) - \frac{69}{160}(1 - \varrho^4)AX \exp(-6X).$$

Konstrukcja  $n$ -tego przybliżenia w dziedzinie obrazu przekształcenia całkowego Laplace'a przyjmuje, dla rozważanego przez nas równania (2.5), postać

$$(2.25) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial \bar{t}_n}{\partial \varrho} \right) = 2(1 - \varrho^2) \left[ \frac{\partial \bar{t}_{n-1}}{\partial X} \right] + 2(1 - \varrho^2)p \cdot \bar{q}_n + 2(1 - \varrho^2)t_0.$$

Do wyznaczania transformaty współczynnika funkcyjnego  $\bar{q}_n$  wykorzystuje się, zgodnie z ideą metody uśredniania poprawek funkcjonalnych [1], wyrażenie:

$$(2.26) \quad \bar{q}_n = 2 \int_0^1 \bar{t}_n \cdot \varrho d\varrho - \bar{q}_{n-1}.$$

Tok postępowania przy wyznaczaniu kolejnych przybliżeń jest analogiczny, jak w przypadku przybliżenia drugiego.

### 3. Zastosowanie postulatu minimum całki z odchylenia do wyznaczania wartości początkowych

W celu wykazania pewnych związków pomiędzy wynikami uzyskanymi za pomocą technik wykorzystujących transformację Laplace'a oraz technik posługujących się wyznaczaniem wartości początkowych z dodatkowych postulatów, przedmiotem naszych rozważań będzie ponownie równanie różniczkowe (2.1) wraz z warunkami brzegowymi (2.2), (2.3) i (2.4).

Zgodnie z ideą przewodnią metody uśredniania poprawek funkcjonalnych [1, 2] aproksymujemy równanie (2.1), w pierwszym przybliżeniu, następującym równaniem:

$$(3.1) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial t_1}{\partial \varrho} \right) = 2(1 - \varrho^2)q_1(X),$$

przy czym współczynnik funkcyjny  $q_1(X)$  określa wyrażenie:

$$(3.2) \quad q_1(X) = 2 \int_0^1 \frac{\partial t_1(\varrho X)}{\partial X} \varrho d\varrho.$$

Całkując równanie (2.1) dwukrotnie po zmiennej  $\varrho$  otrzymuje się pierwsze przybliżenie poszukiwanego pola temperatury:

$$(3.3) \quad t_1(\varrho, X) = \frac{1}{2} \left( \varrho^2 - \frac{1}{4} \varrho^4 \right) q_1(X) + q_{12} \ln \varrho + q_{13}.$$

Po uwzględnieniu w równaniu (3.3) warunków brzegowych (2.3) i (2.4) znajdujemy:

$$(3.4) \quad t_1(\varrho, X) = \frac{1}{8}(1-\varrho^4)q_1(X) - \frac{1}{2}(1-\varrho^2)q_1(X) + AX + t_0.$$

W celu wyznaczenia niewiadomej  $q_1(X)$  podstawiamy (3.4) do wyrażenia (3.2). Po wykonaniu całkowania tego ostatniego otrzymuje się, podobnie jak w pracy [2], jedno równanie różniczkowe zwyczajne, z którego wyznacza się  $q_1(X)$ . W omawianym przez nas przypadku ma ono postać:

$$(3.5) \quad \dot{q}_1(X) + 6q_1(X) = 6A.$$

Równanie (3.5) daje się łatwo całkować [12] i w rezultacie otrzymuje się:

$$(3.6) \quad q_1(X) = A + C \exp(-6X).$$

Stałą całkowania  $C$  w równaniu (3.6) wyznaczymy z postulatu minimum całki z odchylenia. Jako odchylenie przyjmujemy w naszym przypadku, podobnie jak w [2, 3], wyrażenie:

$$(3.7) \quad \varepsilon = t(\varrho, 0) - t_n(\varrho, 0).$$

Wymieniony postulat przyjmuje zatem postać:

$$(3.8) \quad \int_S [t(\varrho, 0) - t_1(\varrho, 0)] dS = \text{minimum}.$$

Założmy ponadto, że wyrażenie (3.8) osiąga minimum absolutne, które jest równe zeru. Uwzględniając w (3.8) warunek brzegowy (2.2) i wyrażenie (3.4), otrzymamy:

$$(3.9) \quad \int_0^1 \left[ \frac{1}{2}(1-\varrho^2)q_1(0) - \frac{1}{8}(1-\varrho^4)q_1(0) \right] \varrho d\varrho = 0.$$

Po wykonaniu całkowania (3.9) otrzymuje się jedno równanie algebraiczne, z którego znajdujemy:

$$(3.10) \quad \begin{cases} q_1(0) = A + C = 0 \Rightarrow C = -A, & \text{czyli} \\ q_1(x) = A[1 - \exp(-6X)]. \end{cases}$$

Zatem pierwsze przybliżenie poszukiwanego pola temperatury cieczy opisuje ostatecznie funkcja:

$$(3.11) \quad t_1(\varrho, X) = t_0 + AX + \frac{A}{2} [1 - \exp(-6X)] \left[ \frac{1}{4}(1-\varrho^4) - (1-\varrho^2) \right].$$

Zgodnie z ideą stosowanej metody, równanie (2.1) aproksymuje się w drugim przybliżeniu równaniem:

$$(3.12) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial t_2}{\partial \varrho} \right) = 2(1-\varrho^2) \frac{\partial t_1}{\partial X} + 2(1-\varrho^2)q_2(X),$$

gdzie:

$$(3.13) \quad q_2(X) = 2 \int_0^1 \frac{\partial t_2}{\partial X} \varrho d\varrho - q_1(X).$$



Podstawiając (3.11) do (3.12), a następnie całkując dwukrotnie to ostatnie po zmiennej  $\varrho$ , otrzymuje się:

$$(3.14) \quad t_2(\varrho, X) = 6A \exp(-6X) \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{36} \varrho^4 - \frac{1}{16} \varrho^6 + \frac{1}{64} \varrho^8 \right) + \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{8} \varrho^4 + \frac{1}{36} \varrho^6 \right) \right] + \left( \frac{1}{2} \varrho^2 - \frac{1}{8} \varrho^4 \right) q_2(X) + q_{22} \ln \varrho + q_{23} + 2A \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{16} \varrho^4 \right),$$

lub po wykorzystaniu warunków brzegowych (2.3) i (2.4):

$$(3.15) \quad t_2(\varrho, X) = 6A \exp(-6X) \left[ \frac{3}{16} (1 - \varrho^2) - \frac{7}{64} (1 - \varrho^4) + \frac{5}{144} (1 - \varrho^6) + \right. \\ \left. - \frac{1}{256} (1 - \varrho^8) \right] + \frac{1}{8} (1 - \varrho^4) q_2(X) - \frac{1}{2} (1 - \varrho^2) q_2(X) + \\ + \frac{1}{8} A (1 - \varrho^4) - \frac{1}{2} A (1 - \varrho^2) + t_0 + AX.$$

Podstawiając następnie wyrażenie (3.11) i (3.15) do (3.13) i wykonując przepisane całkowanie tego ostatniego otrzymuje się jedno równanie różniczkowe zwyczajne, które po uporządkowaniu przyjmuje postać:

$$(3.16) \quad \dot{q}_2(X) + 6q_2(X) = -\frac{69}{20} A \exp(-6X).$$

Równanie (3.16) daje się łatwo scałkować [11] i jego rozwiązanie ma postać:

$$(3.17) \quad q_2(X) = \left( C_2 - \frac{69}{20} AX \right) \exp(-6X).$$

Stałą całkowania  $C$  w równaniu (3.17) wyznacza się, podobnie jak dla pierwszego przybliżenia, żądając spełnienia postulatu minimum całki z odchylenia. Warunek ten przyjmuje postać:

$$(3.18) \quad \int_0^1 \left\{ (-6A) \left[ \frac{3}{16} (\varrho - \varrho^3) - \frac{7}{64} (\varrho - \varrho^5) + \frac{5}{144} (\varrho - \varrho^7) - \frac{1}{256} (\varrho - \varrho^9) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\varrho - \varrho^3) q_2(0) - \frac{1}{8} (\varrho - \varrho^5) q_2(0) + \frac{1}{2} A (\varrho - \varrho^3) - \frac{1}{8} A (\varrho - \varrho^5) \right\} d\varrho = 0.$$

Warunek (3.18) dostarcza jednego równania algebraicznego, z którego wyznacza się niewiadomą  $q_2(0)$ . W naszym przypadku otrzymamy:

$$(3.19) \quad q_2(0) = \frac{23}{40} A,$$

a stąd

$$(3.20) \quad q_2(X) = A \left( \frac{23}{40} - \frac{69}{20} X \right) \exp(-6X).$$

Podstawiając (3.20) do wyrażenia (3.15) otrzymujemy ostatecznie drugie przybliżenie poszukiwanego pola temperatury cieczy:

$$(3.21) \quad t_2(\varrho, X) = t_0 + AX + \frac{1}{8}A(1-\varrho^4) - \frac{1}{2}A(1-\varrho^2) + A \left[ \frac{67}{80}(1-\varrho^2) + \right. \\ \left. - \frac{187}{320}(1-\varrho^4) + \frac{5}{24}(1-\varrho^6) - \frac{3}{128}(1-\varrho^8) \right] \exp(-6X) + \\ + \frac{69}{40}(1-\varrho^2)AX \exp(-6X) - \frac{69}{160}(1-\varrho^4)AX \exp(-6X).$$

Ogólnie, w  $n$ -tym przybliżeniu, aproksymuje się równanie (2.1), w metodzie uśredniania poprawek funkcjonalnych, następującym równaniem:

$$(3.22) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial t_n}{\partial \varrho} \right) = 2(1-\varrho^2) \frac{\partial t_{n-1}}{\partial X} + 2(1-\varrho^2) q_n(X),$$

przy czym:

$$(3.23) \quad q_n(X) = 2 \int_0^1 \frac{\partial t_n}{\partial X} \varrho d\varrho - q_{n-1}(X).$$

Warto tutaj wyraźnie podkreślić, że wyrażenie (3.23) dostarcza dla każdego przybliżenia tylko jednego równania różniczkowego zwyczajnego, podczas gdy, np. w oryginalnej metodzie Kantorowicza, otrzymuje się w podobnym przypadku układ równań różniczkowych zwyczajnych.

#### 4. Dyskusja

Porównując odpowiednio funkcje przybliżone: (2.16) i (3.11) oraz (2.24) i (3.21) można stwierdzić, co następuje: 1° zastosowanie początkowo transformacji całkowej Laplace'a do równania różniczkowego liniowego, a następnie metody uśredniania poprawek funkcjonalnych w obrazie przekształcenia Laplace'a daje identyczne wyniki, jak w przypadku zastosowania metody uśredniania poprawek funkcjonalnych bez wykorzystania transformacji Laplace'a, ale pod warunkiem, że stałą całkowania (wartość początkową) wyznacza się z postulatu minimum całki z odchylenia (3.7). Innymi słowy, przekształcenie Laplace'a determinuje wybór kryterium, z którego jest wyznaczona stała całkowania dla danej metody przybliżonej. Tak np. dla metody Galerkina lub Kantorowicza wymienioną stałą wyznacza, w podobnych przypadkach, zastosowanie przekształcenia Laplace'a lub postulat minimum całki z kwadratu odchylenia [7, 9, 12];

2° zastosowanie przekształcenia Laplace'a, a następnie metody uśredniania poprawek funkcjonalnych lub innych metod (np. Galerkina lub Kantorowicza) ułatwia wprawdzie tok obliczeń, ale jest możliwe jedynie w przypadku zagadnienia brzegowego lub początkowego, opisanego liniowymi równaniami różniczkowymi;

3° wymienione w punkcie 2° ograniczenie nie występuje przy zastosowaniu techniki wykorzystującej metodę uśredniania poprawek funkcjonalnych, gdy stałą całkowania wyznacza się z postulatu minimum całki z odchylenia (3.7);

4° stosując metodę uśredniania poprawek funkcjonalnych można stałą całkowania wyznaczyć oczywiście z innych kryteriów, np. z postulatu minimum całki z kwadratu odchy-

lenia [2, 3, 12]. Przy zastosowaniu innych metod przybliżonych wykorzystano w podobnych przypadkach również metodę kollokacji na brzegu [13];

5° wybór jednego z przytoczonych kryteriów do wyznaczania stałej całkowania ma istotny wpływ na stopień dokładności końcowego rozwiązania przybliżonego. Dla potwierdzenia tego faktu przedstawiamy poniżej rozwiązanie przybliżone równania różniczkowego, opisującego podobny, nieizotermiczny przepływ cieczy w rurze kołowej, o postaci:

$$(4.1) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho} \right) = (1 - \varrho^2) \frac{\partial T}{\partial X_1},$$

ale przy następujących warunkach brzegowych:

$$(4.2) \quad X_1 \leq 0, \quad 0 \leq \varrho \leq 1 \Rightarrow T = 0,$$

$$(4.3) \quad X_1 > 0, \quad \varrho = 1 \Rightarrow T = 1,$$

$$(4.4) \quad X_1 > 0, \quad \varrho = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \varrho} = 0.$$

Zgodnie z ideą przewodnią metody uśredniania poprawek funkcjonalnych, aproksymujemy równanie (4.1) następującym równaniem w pierwszym przybliżeniu:

$$(4.5) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial T_1}{\partial \varrho} \right) = (1 - \varrho^2) q_1(X_1),$$

gdzie:

$$(4.6) \quad q_1(X) = 2 \int_0^1 \frac{\partial T_1}{\partial X_1} \varrho d\varrho.$$

Całkując równanie (4.5) dwukrotnie po zmiennej  $\varrho$  otrzymujemy, po uwzględnieniu warunków brzegowych (4.3) i (4.4), pierwsze przybliżenie pola temperatury:

$$(4.7) \quad T_1 = \frac{1}{16} (1 - \varrho^4) q_1(X_1) - \frac{1}{4} (1 - \varrho^2) q_1(X_1) + 1.$$

Podstawiając (4.7) do (4.6) otrzymuje się, po wykonaniu przypisanego całkowania, jedno równanie różniczkowe zwyczajne w postaci:

$$(4.8) \quad \frac{1}{12} \ddot{q}_1(X_1) + q_1(X_1) = 0,$$

którego całka ogólna wynosi:

$$(4.9) \quad q_1(X_1) = C_3 \exp(-12X_1).$$

Stała całkowania  $C_3$  wyznaczymy, podobnie jak poprzednio, z postulatu minimum całki z odchylenia, czyli z warunku:

$$(4.10) \quad \int_S \int [T(\varrho, 0) - T_1(\varrho, 0)] dS = \text{minimum}.$$

Zakładając, podobnie jak poprzednio, że wyrażenie (4.10) jest równe zeru, otrzymujemy:

$$(4.11) \quad \int_0^1 \left[ \frac{1}{16} (1 - \varrho^4) q_1(0) - \frac{1}{4} (1 - \varrho^2) q_1(0) + 1 \right] \varrho d\varrho = 0,$$

a stąd:

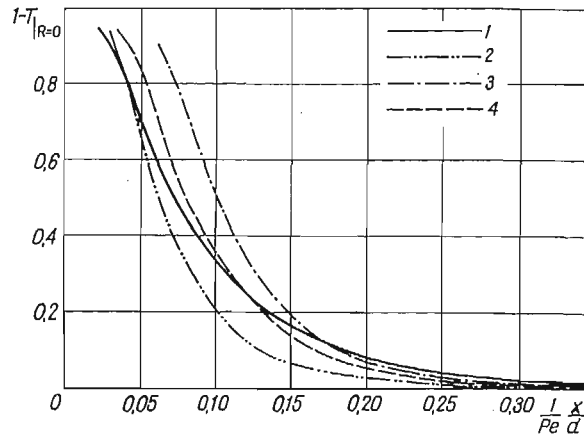
$$(4.12) \quad q_1(0) = C_3 = 12.$$

Zatem pierwsze przybliżenie pola temperatury cieczy ma, w omawianym przez nas zagadnieniu brzegowym, postać:

$$(4.13) \quad T_1(\varrho, X_1) = \frac{3}{4}(1-\varrho^4)\exp(-12X_1) - 3(1-\varrho^2)\exp(-12X_1) + 1.$$

Postępując podobnie jak w przypadku wyznaczania pierwszego przybliżenia, otrzymamy następującą postać drugiego przybliżenia pola temperatury cieczy:

$$(4.14) \quad T_2(\varrho, X_1) = \left[ \frac{9}{64}(1-\varrho^8) - \frac{5}{4}(1-\varrho^6) + \frac{561}{160}(1-\varrho^4) - \frac{201}{40}(1-\varrho^2) \right] \exp(-12X_1) + \left[ \frac{207}{40}(1-\varrho^4) - \frac{207}{10}(1-\varrho^2) \right] X_1(-12X_1) + 1.$$



Rys. 1. Rozkład bezwymiarowej temperatury cieczy wzdłuż osi rury 1 — rozwiązanie ścisłe [4], 2 — wyrażenie (4.13) 3 — wyrażenie (4.14), 4 — wyrażenie (4.15)

W pracy [2] rozwiązano równanie (4.1) przy identycznych warunkach brzegowych, również za pomocą metody uśredniania poprawek funkcjonalnych. Do wyznaczania wartości początkowych zastosowano jednak warunek polegający na spełnieniu postulatu minimum całki z kwadratu odchylenia. Otrzymano następującą postać drugiego przybliżenia pola temperatury cieczy:

$$(4.15) \quad T_2(\varrho, X_1) = \left[ \frac{15}{152}(1-\varrho^8) - \frac{50}{57}(1-\varrho^6) + \frac{36985}{15162}(1-\varrho^4) - \frac{26090}{7581} \right] (1-\varrho_2) \exp(-12X_1) + \left[ \frac{69}{19}(1-\varrho^4) - \frac{276}{19}(1-\varrho^2) \right] X_1(-12X_1) + 1.$$

Na rys. 1 porównano przebieg zmian bezwymiarowej temperatury cieczy w osi rury kołowej w/g zależności (4.13) (4.14) i (4.15) z rozwiązaniem ścisłym znalezionym w pracy [4].

5. Przykład liczbowy

W celu zilustrowania przeprowadzonych rozważań oraz przeprowadzenia pewnych porównań otrzymanych rozwiązań przybliżonych z wynikami rozwiązania ścisłego, wykonano przykład liczbowy.

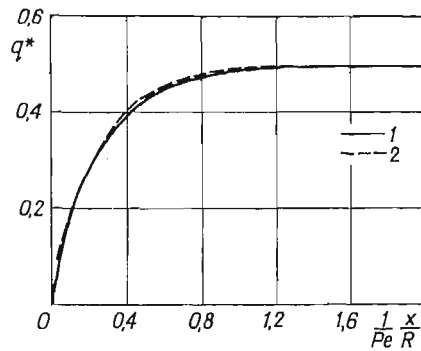
Jak wiadomo, strumień ciepły na ścianie rury można wyznaczyć z zależności [4, 5, 7]:

$$(5.1) \quad q_s = -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial t}{\partial \varrho} \Big|_{\varrho=1}$$

Podstawiając do (5.1) wyrażenie (3.21) otrzymamy, po prostych przekształceniach:

$$(5.2) \quad q^* = -\frac{q_s R}{\lambda A} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{4}{5} + \frac{69}{20} X \right) \exp(-6X) \right]$$

Na rys. 2 porównano zależność (5.2) z rozwiązaniem, znalezionym w pracy [7]. Jak widać, uzyskano już w drugim przybliżeniu wysoki stopień dokładności.



Rys. 2. Przebieg zmian wartości strumienia ciepła na ścianie rury przy jej liniowym wzroście temperatury 1 — rozwiązanie otrzymane w pracy [7] 2 — rozwiązanie otrzymane w niniejszej pracy

Liczbę Nusselta, charakteryzującą proces wymiany ciepła, można zapisać w postaci [4, 5, 7]:

$$(5.3) \quad Nu = \frac{-2 \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho} \right) \Big|_{\varrho=1}}{\Theta - \Theta_s},$$

gdzie:

$$(5.4) \quad \Theta = \Theta_2 = \frac{t_2(\varrho, X) - t_0}{A} = X - \frac{1}{8}(3 - 4\varrho^2 + \varrho^4) + \left[ \frac{67}{80}(1 - \varrho^2) + \right. \\ \left. - \frac{187}{320}(1 - \varrho^4) + \frac{5}{24}(1 - \varrho^6) - \frac{3}{128}(1 - \varrho^8) + \frac{69}{40}(1 - \varrho^2)X - \frac{69}{160}(1 - \varrho^4)X \right] \exp(-6X).$$

Bezwymiarową temperaturę średnią  $\bar{\Theta}$  w wyrażeniu (5.3) wyznaczono z zależności:

$$(5.5) \quad \bar{\Theta}(X) = \frac{\int_0^1 w(\varrho)\Theta_2(\varrho, X)\varrho d\varrho}{\int_0^1 w(\varrho)\varrho d\varrho},$$

otrzymując ostatecznie:

$$(5.6) \quad \bar{\Theta}(X) = X + \frac{11}{48} + \left( \frac{91}{384} + \frac{253}{320}X \right) \exp(-6X).$$

Ponieważ bezwymiarowa temperatura ścianki rury wynosi

$$(5.7) \quad \Theta|_{\varrho=1} = \Theta_s = X$$

zatem wyrażenie (5.3) można przepisać w postaci:

$$(5.8) \quad \text{Nu} = \frac{1 - \left( \frac{4}{5} + \frac{69}{20}X \right) \exp(-6X)}{\frac{11}{48} + \left( \frac{91}{384} + \frac{253}{320}X \right) \exp(-6X)}$$

Graniczna wartość liczby Nu wynosi

$$(5.9) \quad \lim \text{Nu} = 4,363636\dots$$

i pokrywa się dokładnie z wynikiem analitycznych obliczeń ścisłych [4, 5, 7].

## 6. Wnioski

1° Przedstawiona w niniejszej pracy oraz w rozprawie [2] modyfikacja metody uśredniania poprawek funkcjonalnych umożliwia rozszerzenie jej zastosowania w zagadnieniach konwekcji wymuszonej i przewodzenia ciepła.

2° Zastosowanie metody uśredniania poprawek funkcjonalnych:

- a) eliminuje intuicyjny wybór postaci funkcji aproksymujących,
- b) umożliwia łatwiejszy dobór odpowiednich funkcji przybliżonych w porównaniu z innymi, analitycznymi metodami przybliżonymi.

3° Zastosowanie omawianej metody w obrazie przekształcania całkowego Laplace'a:

- a) eliminuje konieczność, wyznaczania wartości początkowych z dodatkowych postulatów,
- b) determinuje wybór kryterium, z którego należy wyznaczyć wartości początkowe w przypadku niestosowania transformacji Laplace'a. Jest nim postulat minimum całki z odchylenia.

4° W przeliczonym w p. 4 przykładzie wyższy stopień dokładności aproksymacji rozwiązania ścisłego uzyskano przez zastosowanie do wyznaczenia wartości początkowych postulat minimum całki z kwadratu odchylenia.

## Literatura cytowana w tekście

1. Ю. Д. Соколов, *О методе осреднения функциональных поправок*, УМЖ, 1, 9, (1957).
2. K. RUP, *Modyfikacja metody uśredniania funkcjonalnych poprawek w zagadnieniach konwekcji wymuszonej i przepływu ciepła*, Mech. Teor. i Stos., 1, 16, (1978).
3. В. КРАЈЕВСКИ, *Modyfikacja metody Kantorowicza*, Archiwum Termodynamiki i Spalania, 4, 7, (1976).
4. Б. С. ПЕТУХОВ, *Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах*, Москва (1967).
5. W. M. KAYS, *Convective heat and mass transfer*, Mc Graw-Hill Book Company, (1967).
6. J. H. WEINER, *A Method for the Approximate Solution of the Heat Equation*, WADC Techn. Rep. 54—427, (AD 97343), (1955).
7. П. В. Цой, *Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса*, Энергия, Москва (1971).
8. D. DICKER, M. B. FRIEDMAN, *Solutions of Heat-Conduction Problems with Nonseparable Domains*, J. Appl. Mech., Transactions of the ASME, ser E, 85, (1963).
9. В. КРАЈЕВСКИ, *Application of variational methods to problems of unsteady heat flow*, Arch. Mech. Stosowanej, 5, 20, (1968).
10. Praca zbiorowa, *Poradnik inżyniera — Matematyka*, WNT Warszawa (1971).
11. Н. М. МАТВЕЕВ, *Дифференциальные уравнения*, Минск (1976).
12. В. КРАЈЕВСКИ, *Ein directes Variationsverfahren zur Behandlung der Wärmeübertragungsprobleme für erzwungene Konvektion*, Int. J. Heat Mass Transfer, 16, (1973).
13. Н. Е. ВЕТНЭЛ, *A generalized Galerkin — Kantorovich treatment of transient evaporation through a finite region*, Int. J. Heat Mass Transfer, 11, 10, (1967).

## Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОПРАВOK  
В ОБЛАСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Предложена работа является продолжением модификации метода осреднения функциональных поправок, изложенной в работе [2]. Здесь применено этот приближенный метод в области преобразования Лапласа, что исключило необходимость определения начальных значений. Через дополнительные требования. Кроме этого указано, что применение метода осреднения функциональных поправок в области преобразования Лапласа определяет автоматический критерий из которого надо определить начальную величину при использовании этого метода минуя интегральные преобразования.

В обсужденном случае требование минимум интеграла из отклонения является этим критерием. Приближенные результаты расчета сравнено с точным решением. Анализ полученных решений во втором приближении показал, что они хорошо согласуются с точными решениями. Кроме того сравнено приближенные решения, найдены в настоящей работе и работе [2], в которых применено два различных требования, а именно: минимум интеграла из отклонения и минимум интеграла из квадрата отклонения. Во втором случае получено повышенную точность аппроксимации.

## Summary

APPLICATION OF LAPLACE TRANSFORM TO THE METHOD OF AVERAGING OF  
FUNCTIONAL CORRECTIONS

This paper constitutes an extension of the averaging method of functional corrections discussed and applied in [2] to a differential parabolic equation of transport phenomena. The method in consideration is here used in the region of Laplace transform. The procedure makes it possible to determine the initial values without using additional conditions. Moreover it is shown that such an application of the method

discussed determines in a natural way the condition from which the initial values are to be found when the Laplace transform is not being employed. In the case discussed it is the condition of the minimum of integral deviation.

It was pointed out in a numerical example that a very good accuracy of the trial solution already in the second approximation step was obtained.

Besides, different trial solutions of the equation discussed in the paper [2] were compared when choosing two conditions for determining the initial values i.e. the condition of the minimum of integral deviation and that of the minimum of integral quadratic deviation. It was pointed out that the second condition gives a better accuracy of the trial solution with respect to the exact one.

INSTYTUT APARATURY PRZEMYSŁOWEJ I ENERGETYKI  
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 21 sierpnia 1978 roku.*

---



ZGINANIE SPRĘŻYSTEJ POWŁOKI W KSZTAŁCIE PARABOLOIDY ELIPTYCZNEJ  
PODPARTEJ NA ŻEBRACH

KRZYSZTOF HENRYK ŻMIJEWSKI (WARZAWA)

1. Wstęp

Przedmiotem pracy jest rozwiązanie problemu zginania powłoki sprężystej w kształcie paraboloidy eliptycznej, o małej wyniosłości, rozpiętej na planie prostokąta i podpartej wzdłuż brzegów na sprężystych żebrach.

Rozważono powłokę wykonaną z materiału liniowo-sprężystego, jednorodnego i izotropowego, o sztywności warunkującej występowanie odpowiednio małych przemieszczeń.

Punktem wyjścia jest układ trzech przemieszczeniowych równań różniczkowych liniowej teorii powłok, spełniających założenia Kirchhoffa-Love'a oraz uwzględniających uproszczenia wprowadzone przez W. Z. Własowa dla powłok o małych wyniosłościach.

Pomimo oczywistego dużego znaczenia praktycznego opisanego problemu nie znaleziono jego analitycznego rozwiązania w dostępnej literaturze technicznej. Istniejące rozwiązania analityczne ograniczają się jedynie do prostego przypadku przegubowo-przesuwne podparcia brzegów powłoki. Rozwiązanie takie, wykorzystując metody pojedynczych lub podwójnych szeregów Fouriera, można znaleźć w wielu monografiach, m.in. [2], [3].

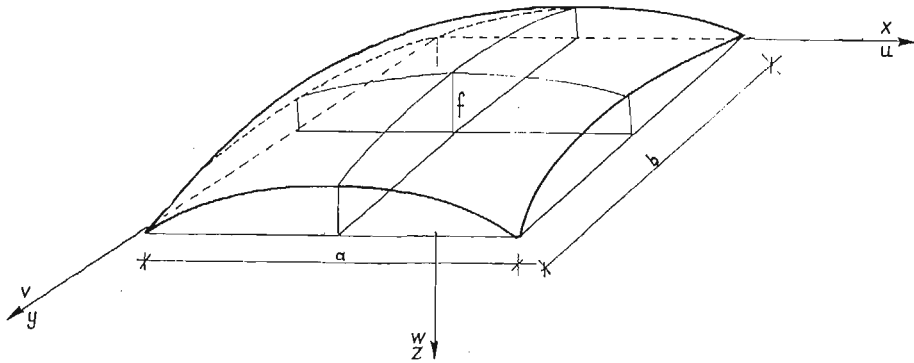
Ogólny algorytm rozwiązywania problemów brzegowych z zakresu statyki i dynamiki powłok o małych wyniosłościach rozpiętych na planie prostokąta, opracowany za pomocą metody skończonej transformacji Fouriera, podano w pracach Z. MAZURKIEWICZA [4] oraz Z. MAZURKIEWICZA i A. WIWEGERA [5].

Zastosowanie metody różnic skończonych do rozwiązania rozważanego zagadnienia można znaleźć m.in. w znanej monografii A. A. NAZAROWA [2], pracach P. WILDEGO i in. [6] oraz E. MALERSKIEGO [7]. Natomiast rozwiązanie uzyskane za pomocą metody elementów skończonych podali m.in. O. C. ZIENKIEWICZ [8], J. SZMELTER i in. [9], J. J. CONNOR i C. BERBBIA [10].

W niniejszej pracy podano (opracowany przy zastosowaniu metody skończonej transformacji Fouriera) algorytm rozwiązania problemów brzegowych powłoki w kształcie paraboloidy eliptycznej. Szczegółowo opisano przypadek zginania powłoki rozpiętej na planie kwadratu i podpartej wzdłuż brzegów na sprężystych żebrach. Dokonano analizy wpływu warunków brzegowych oraz niektórych parametrów geometrycznych na pracę statyczną rozważanej powłoki. Zbadano numerycznie zbieżność rozwiązania. Otrzymane wartości wielkości statycznych i geometrycznych przedstawiono na wykresach aksometrycznych. Uzyskane wyniki porównano z wynikami otrzymanymi za pomocą metody różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym oraz metody elementów skończonych. Podano wnioski i uwagi dotyczące oceny praktycznej użyteczności metod zastosowanych do rozwiązania problemu stanowiącego przedmiot rozprawy.

## 2. Niektóre związki i równania teorii powłok o małych wyniosłościach

Rozważmy sprężystą, jednorodną, izotropową powłokę o stałej grubości i małej wyniosłości rozpiętą na planie prostokąta (rys. 1), poddaną działaniu dowolnego obciążenia normalnego.



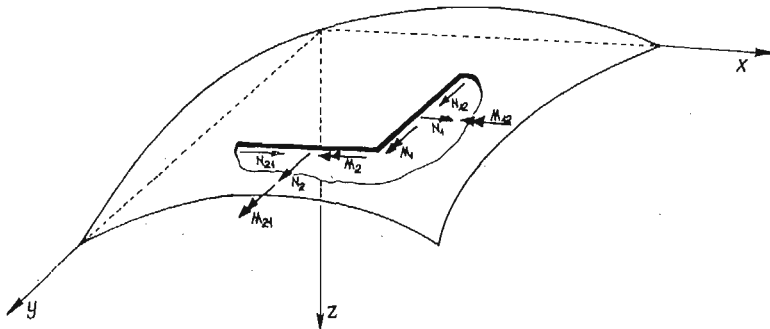
Rys. 1

Znany z technicznej teorii powłok W. Z. WŁASOWA [1] układ trzech równań różniczkowych opisujący stan przemieszczeń takiej powłoki ma postać:

$$(2.1) \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x} = 0,$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + k_1 N_1 + 2k_{12} N_{12} + k_2 N_2 + p = 0,$$

gdzie w odniesieniu do środkowej powierzchni powłoki (rys. 2),  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_{12}$  oznaczają wewnętrzne siły normalne oraz styczne,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_{12}$  — momenty zginające i skręcające,  $\nu$  — współczynnik Poissona,  $E$  — moduł Younga,  $h$  — grubość powłoki,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_{12}$  — krzywizny środkowej powierzchni powłoki,  $p$  — obciążenie.



Rys. 2

Zgodnie z teorią Własowa siły wewnętrzne występujące w równaniach (2.1), (2.2) określone są następująco:

$$(2.3) \quad N_1 = A \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_1 + \nu k_2) w \right], \quad N_2 = A \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - (k_2 + \nu k_1) w \right],$$

$$N_{12} = B \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{12} w \right),$$

$$(2.4) \quad M_1 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_2 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{12} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$(2.5) \quad A = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad B = \frac{Eh}{2(1+\nu)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Krzywizny powłoki o małej wyniosłości wyrażamy za pomocą wzorów:

$$(2.6) \quad k_1 = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \quad k_{12} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}, \quad k_2 = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2},$$

gdzie  $Z = Z(x, y)$  jest równaniem środkowej powierzchni powłoki.

W pracy tej rozważono powłoki o stałych krzywiznach. Ogólne równanie powierzchni środkowej takiej powłoki ma postać:

$$(2.7) \quad Z(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + \frac{1}{2}(k_1 x^2 + 2k_{12} xy + k_2 y^2).$$

Warunki brzegowe na krawędziach powłoki wzmocnionych żebrami można zapisać następująco:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} M_1 \Big|_{x=0}^{\pm} \mp \frac{\partial M_{s2}^*}{\partial y} &= 0, & M_2 \Big|_{y=0}^{\pm} \mp \frac{\partial M_{s1}^*}{\partial x} &= 0, \\ N_1 \Big|_{x=0}^{\pm} \pm \frac{\partial^2 M_{n2}^*}{\partial y^2} &= 0, & N_2 \Big|_{y=0}^{\pm} \pm \frac{\partial^2 M_{n1}^*}{\partial x^2} &= 0, \\ N_{12} \Big|_{x=0}^{\pm} \pm \frac{\partial N_{\pm}^*}{\partial y} &= 0, & N_{12} \Big|_{y=0}^{\pm} \pm \frac{\partial N_{\pm}^*}{\partial x} &= 0, \\ Q_1 \Big|_{x=0}^{\pm} \pm \frac{\partial^2 M_{t2}^*}{\partial y^2} \pm k_2 N_2^* &= 0, & Q_2 \Big|_{y=0}^{\pm} \pm \frac{\partial^2 M_{t1}^*}{\partial x^2} \pm k_1 N_1^* &= 0, \end{aligned}$$

gdzie  $Q_1, Q_2$  — sprowadzone siły poprzeczne

$$(2.9) \quad Q_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial y}, \quad Q_2 = \frac{\partial M_2}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial x}.$$

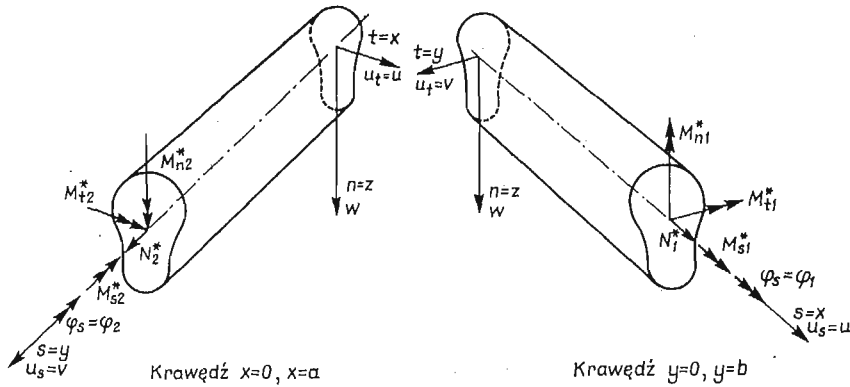
Symbolem (\*) oznaczono wielkości odnoszące się do żeber krawędziowych,  $N^*$  oznacza siłę podłużną,  $M_s^*$  — moment skracający,  $M_n^*$  — moment zginający w płaszczyźnie poziomej,  $M_t^*$  — moment zginający w płaszczyźnie pionowej, indeks 1 odpowiada tu krawędziom równoległym do osi  $x$ , 2 — osi  $y$  (rys. 3).

Przyjęto, że oś geometryczna żebra leży na środkowej powierzchni powłoki, a więc krzywizna żebra jest równa odpowiedniej krzywiznie powłoki.

Siły wewnętrzne występujące w żebrach wyrażamy za pomocą wzorów:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} N^* &= EF \left( \frac{\partial u_s}{\partial s} - kw \right), & M_s^* &= GJ_s \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}, \\ M_i^* &= -EJ_1 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, & M_{ii}^* &= -EJ_2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2}. \end{aligned}$$

gdzie  $F$  oznacza pole przekroju poprzecznego żebra  $J_1, J_2, J_s$  — momenty bezwładności przy zginaniu i skręcaniu,  $G$  — moduł sprężystości poprzecznej,  $s, t$  — współrzędne ( $x$  lub  $y$ ) styczna  $i$  binormalna do osi żebra.



Rys. 3

### 3. Podstawowe wzory i związki metody skończonej transformacji Fouriera wykorzystane w pracy

Przedstawimy podstawowe związki i niekonwencjonalne oznaczenia wykorzystane dalej przy transformacji funkcji jednej i dwóch zmiennych (por. [4]).

Zakładamy, że funkcje transformowane spełniają warunki Dirichleta w przedziale  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ .

Skończoną transformację Fouriera funkcji jednej zmiennej  $f(x)$  w przedziale  $0 \leq x \leq a$  określa wzór:

$$(3.1) \quad T_m^k(f) = \int_0^a f(x) \Psi_k(\alpha_m x) dx, \quad k = 1, 2; m = 0, 1, \dots,$$

gdzie:

$$\alpha_m = m\pi/a, \quad \Psi_1(\cdot) = \sin(\cdot), \quad \Psi_2(\cdot) = \cos(\cdot).$$

Odwrotną transformację funkcji  $f(x)$  w przedziale  $0 \leq x \leq a$  wyrażamy za pomocą szeregu Fouriera:

$$(3.2) \quad f(x) = \frac{2}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m T_m^k(f) \Psi_k(\alpha_m x), \quad k = 1, 2; m = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie:

$$\lambda_m = \begin{cases} 1/2 & \text{dla } m = 0, \\ 1 & \text{dla } m \neq 0. \end{cases}$$

Całkując przez części otrzymujemy:

$$(3.3) \quad T_m^1 \left( \frac{df}{dx} \right) = -\alpha_m T_m^2(f), \quad T_m^2 \left( \frac{df}{dx} \right) = B_m(f) + \alpha_m T_m^1(f).$$

gdzie  $B_m(f)$  nazywamy wyrażeniem brzegowym funkcji  $f(x)$ , ma ono postać:

$$(3.4) \quad B_m(f) = f(a)(-1)^m - f(0), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Skończoną transformację Fouriera funkcji dwóch zmiennych  $f(x, y)$  w przedziale  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  zapisujemy następująco:

$$(3.5) \quad T_{mn}^{kl}(f) = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \Psi_k(\alpha_m x) \Psi_l(\beta_n y) dx dy, \quad k, l = 1, 2;$$

$$\alpha_m = m\pi/a, \quad \beta_n = n\pi/b. \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Transformację odwrotną funkcji  $f(x, y)$  wyrażamy za pomocą podwójnego szeregu Fouriera:

$$(3.6) \quad f(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} T_{mn}^{kl}(f) \Psi_k(\alpha_m x) \Psi_l(\beta_n y), \quad k, l = 1, 2;$$

$$m, n = 0, 1, 2, \dots$$

wprowadzając oznaczenie:  $\lambda_{mn} = \lambda_m \lambda_n$ .

Wyrażenia brzegowe funkcji  $f(x, y)$  mają postać:

$$(3.7) \quad B_{mn}(f) = f(a, b)(-1)^{m+n} - f(a, 0)(-1)^m - f(0, b)(-1)^n + f(0, 0),$$

$$B_{mn}^{1k}(f) = (-1)^m T_n^k \{f(a, y)\} - T_n^k \{f(0, y)\}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(3.8) \quad B_{mn}^{2k}(f) = (-1)^n T_m^k \{f(x, b)\} - T_m^k \{f(x, 0)\}, \quad k = 1, 2.$$

Całkując przez części znajdujemy:

$$(3.9) \quad T_{mn}^{1k} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\alpha_m T_{mn}^{2k}(f), \quad T_{mn}^{2k} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = B_{mn}^{1k}(f) + \alpha_m T_{mn}^{1k}(f),$$

$$B_{mn}^{21} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\alpha_m B_{mn}^{22}(f), \quad B_{mn}^{22} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = B_{mn}(f) + \alpha_m B_{mn}^{21}(f).$$

Analogiczne związki można otrzymać dla pochodnej  $\partial f/\partial y$ .

Korzystając ze wzorów (3.5), (3.6) łatwo stwierdzić, że skończona transformacja Fouriera funkcji  $f(x, y)$  spełnia następujący związek:

$$(3.10) \quad T_{mn}^{kl}(f) = \frac{4}{ab} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} Q_{mni j}^{klrs} T_{ij}^{rs}(f), \quad k, l, r, s = 1, 2, \dots,$$

$$m, n = 0, 1, \dots,$$

przy czym

$$(3.11) \quad Q_{mni j}^{klrs} = \int_0^a \int_0^b \Psi_k(\alpha_m x) \Psi_r(\alpha_i x) \Psi_l(\beta_n y) \Psi_s(\beta_j y) dx dy.$$

Wzór (3.10) jest słuszny dla każdej kombinacji indeksów  $r, s$ .

## 4. Transformacja równań równowagi

Po zastosowaniu do równań równowagi (2.1) transformacji  $T_{mn}^{21}$ ,  $T_{mn}^{12}$  oraz wyrażeniu  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_{12}$  za pomocą wzorów (2.3) i wykorzystaniu związków (3.9) doprowadzamy układ (2.1) do postaci:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} (A\alpha_m^2 + B\beta_n^2)u_{mn}^{(1)} + (A\nu + B)\alpha_m\beta_n v_{mn}^{(1)} + B\beta_n(U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}) - N_{mn}^{(1)} + \\ + (k_1 + \nu k_2)A\alpha_m w_{mn}^{(1)} - 2k_{12}B\beta_n w_{mn}^{(2)} = 0, \\ (A\nu + B)\alpha_m\beta_n u_{mn}^{(1)} + (A\beta_n^2 + B\alpha_m^2)v_{mn}^{(1)} + B\alpha_m(U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}) - N_{mn}^{(2)} + \\ + (k_2 + \nu k_1)A\beta_n w_{mn}^{(1)} - 2k_{12}B\alpha_m w_{mn}^{(2)} = 0, \end{aligned}$$

gdzie:

$$(4.2) \quad w_{mn}^{(1)} = T_{mn}^{11}(w), \quad w_{mn}^{(2)} = T_{mn}^{22}(w), \quad u_{mn}^{(1)} = T_{mn}^{21}(u), \quad v_{mn}^{(1)} = T_{mn}^{12}(v),$$

$$(4.3) \quad U_{mn}^{(1)} = B_{mn}^{22}(u), \quad U_{mn}^{(2)} = B_{mn}^{12}(v), \quad N_{mn}^{(1)} = B_{mn}^{11}(N_1), \quad N_{mn}^{(2)} = B_{mn}^{21}(N_2).$$

Rozwiązując równania (4.1) względem  $u_{mn}^{(1)}$  i  $v_{mn}^{(1)}$  otrzymujemy:

$$(4.4) \quad u_{mn}^{(1)} = E_{mn}^{(1)}w_{mn}^{(1)} + F_{mn}^{(1)}w_{mn}^{(2)} + B_{mn}^{(1)}, \quad v_{mn}^{(1)} = E_{mn}^{(2)}w_{mn}^{(1)} + F_{mn}^{(2)}w_{mn}^{(2)} + B_{mn}^{(2)},$$

wyrażenia  $E_{mn}^{(l)}$ ,  $F_{mn}^{(l)}$  oraz  $B_{mn}^{(l)}$  ( $l = 1, 2$ ) — zależne wyłącznie od warunków brzegowych mają postać:

$$(4.5) \quad E_{mn}^{(1)} = \frac{\alpha_m}{\Delta_{mn}^2} \{k_2 \alpha_{mn} - k_1 [\alpha_m^2 + (2 + \nu)\beta_n^2]\}, \quad E_{mn}^{(2)} = \frac{\beta_n}{\Delta_{mn}^2} \{k_1 \beta_{mn} - k_2 [\beta_n^2 + (2 + \nu)\alpha_m^2]\},$$

$$(4.6) \quad F_{mn}^{(1)} = 2k_{12} \frac{\beta_n}{\Delta_{mn}^2} \beta_{mn}, \quad F_{mn}^{(2)} = 2k_{12} \frac{\alpha_m}{\Delta_{mn}^2} \alpha_{mn},$$

$$(4.7) \quad B_{mn}^{(1)} = \frac{-1}{\Delta_{mn}^2} \left\{ \beta_n \beta_{mn} (U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}) - \frac{1}{AB} [A\beta_n^2 + B\alpha_m^2] N_{mn}^{(1)} + (\nu A + B) \alpha_m \beta_n N_{mn}^{(2)} \right\},$$

$$B_{mn}^{(2)} = \frac{-1}{\Delta_{mn}^2} \left\{ \alpha_m \alpha_{mn} (U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}) - \frac{1}{AB} [(A\alpha_m^2 + B\beta_n^2) N_{mn}^{(2)} + (\nu A + B) \alpha_m \beta_n N_{mn}^{(1)}] \right\},$$

$$(4.8) \quad \Delta_{mn}^2 = (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2, \quad \alpha_{mn} = \alpha_m^2 - \nu \beta_n^2, \quad \beta_{mn} = \beta_n^2 - \nu \alpha_m^2.$$

Zastosujemy teraz transformację  $T_{mn}^{11}$  do równania (2.2). Korzystając ze wzorów (2.4), (2.5) oraz (3.9) przekształcamy to równanie następująco:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} A(k_1 + \nu k_2)\alpha_m u_{mn}^{(1)} + k_{12}(1 - \nu)(\beta_n u_{mn}^{(2)} + \alpha_m v_{mn}^{(2)}) + (k_2 + \nu k_1)\beta_n v_{mn}^{(1)} + \\ + \{D\Delta_{mn}^2 + A(k_1 + k_2)^2 + 2(1 - \nu)(k_{12}^2 - k_1 k_2)\} w_{mn}^{(1)} + B_{mn}^{(3)} = p_{mn}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$(4.10) \quad B_{mn}^{(3)} = \alpha_m M_{mn}^{(1)} + \beta_n M_{mn}^{(2)} + D(\alpha'_{mn} W_{mn}^{(1)} + \beta'_{mn} W_{mn}^{(2)} + \gamma'_{mn} W_{mn}^{(0)}),$$

$$(4.11) \quad M_{mn}^{(1)} = B_{mn}^{11}(M_1), \quad M_{mn}^{(2)} = B_{mn}^{21}(M_2),$$

$$(4.12) \quad W_{mn}^{(0)} = B_{mn}(w), \quad W_{mn}^{(1)} = B_{mn}^{11}(w), \quad W_{mn}^{(2)} = B_{mn}^{21}(w),$$

$$(4.13) \quad T_{mn}^{11}\{p\} = p_{mn},$$

$$(4.14) \quad u_{mn}^{(2)} = T_{mn}^{12}(u), \quad v_{mn}^{(2)} = T_{mn}^{21}(v).$$

$$(4.15) \quad \alpha'_{mn} = [\alpha_m^2 + (2 - \nu)\beta_n^2]\alpha_m, \quad \beta'_{mn} = [\beta_n^2 + (2 - \nu)\alpha_m^2]\beta_n, \quad \gamma'_{mn} = 2(1 - \nu)\alpha_m\beta_n.$$

Na podstawie wzoru (3.10) możemy wyznaczyć współczynniki  $u_{mn}^{(2)}$  i  $v_{mn}^{(2)}$ :

$$(4.16) \quad u_{mn}^{(2)} = \frac{4}{ab} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} Q_{mni}^{1221} u_{ij}^{(1)}, \quad v_{mn}^{(2)} = \frac{4}{ab} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} Q_{mni}^{2112} v_{ij}^{(1)}.$$

Podstawiając do równania (4.9) związki (4.4) oraz (4.16) otrzymujemy:

$$(4.17) \quad w_{mn}^{(1)} = \frac{1}{D_{mn}} \left( p_{mn} - Z_{mn} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} S_{mni} w_{ij}^{(1)} \right),$$

gdzie:

$$(4.18) \quad D_{mn} = D\Delta_{mn}^2 + 2B \left[ 2k_{12}^2 + \frac{1+\nu}{\Delta_{mn}^2} (k_1 \beta_n^2 + k_2 \alpha_m^2)^2 \right],$$

$$(4.19) \quad Z_{mn} = B_{mn}^{(3)} + H_{mn}^{(1)} + H_{mn}^{(2)},$$

$$(4.20) \quad S_{mni} = \frac{4Ak_{12}}{ab} (G_{mn} + J_{mni} + R_{mni}),$$

$$(4.21) \quad H_{mn}^{(1)} = \frac{4\Delta k_{12}}{ab} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{rs} (\beta_n Q_{mnr}^{1221} B_{rs}^{(1)} + \alpha_m Q_{mnr}^{2112} B_{rs}^{(2)}),$$

$$H_{mn}^{(2)} = E_{mn}^{(1)} N_{mn}^{(1)} + E_{mn}^{(2)} N_{mn}^{(2)} - \frac{1+\nu}{1-\nu} B G_{mn} (U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}),$$

$$(4.22) \quad G_{mn} = \frac{\gamma_{mn}}{\Delta_{mn}^2} (k_1 \beta_n^2 + k_2 \alpha_m^2), \quad J_{mni} = \beta_n Q_{mni}^{1221} E_{ij}^{(1)} + \alpha_m Q_{mni}^{2112} E_{ij}^{(2)},$$

$$R_{mni} = \frac{4}{ab} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{rs} Q_{rsi}^{2211} (\beta_n Q_{mni}^{1221} F_{rs}^{(1)} + \alpha_m Q_{mni}^{2112} F_{rs}^{(2)}).$$

Układ równań (4.17) może być również przedstawiony w innej postaci:

$$(4.23) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [S_{mni} - D_{ij} \delta_{im} \delta_{jn}] w_{ij}^{(1)} = p_{mn} - Z_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \dots,$$

gdzie  $\delta_{im}$ ,  $\delta_{jn}$  oznaczają symbole Kroneckera.

Związki (4.3), (4.11), (4.12) zapisujemy w zmienionej formie korzystając przy tym z następujących oznaczeń:

$$(4.24) \quad \begin{aligned} u_n^{(i)} &= T_n^2 \{v(l_i, y)\},_{i=1,2} & u_m^{(i)} &= T_m^2 \{u(x, l_i)\},_{i=3,4} \\ w_n^{(i)} &= T_n^1 \{w(l_i, y)\},_{i=1,2} & w_m^{(i)} &= T_m^1 \{w(x, l_i)\},_{i=3,4} \\ n_n^{(i)} &= T_n^1 \{N_1(l_i, y)\},_{i=1,2} & n_m^{(i)} &= T_m^1 \{N_2(x, l_i)\},_{i=3,4} \\ m_n^{(i)} &= T_n^1 \{M_1(l_i, y)\},_{i=1,2} & m_m^{(i)} &= T_m^1 \{M_2(x, l_i)\},_{i=3,4} \\ l_1 &= 0, \quad l_2 = a, & l_3 &= 0, \quad l_4 = b. \end{aligned}$$

Na podstawie (3.8), (4.24) otrzymujemy:

$$(4.25) \quad \begin{aligned} U_{mn}^{(l)} &= (-1)^m u_n^{(2l)} - u_n^{(2l-1)}, & W_{mn}^{(l)} &= (-1)^m w_n^{(2l)} - w_n^{(2l-1)}, \\ N_{mn}^{(l)} &= (-1)^m n_n^{(2l)} - n_n^{(2l-1)}, & M_{mn}^{(l)} &= (-1)^m m_n^{(2l)} - m_n^{(2l-1)}, \\ & & l &= 1, 2. \end{aligned}$$

Jeżeli funkcje opisujące warunki brzegowe są znane wtedy można łatwo znaleźć wartość wyrażenia  $Z_{mn}$ . Rozwiązanie pewnej skończonej liczby równań (4.23) zezwala na obliczenie skończonej liczby współczynników  $w_{mn}$  oraz przemieszczeń i sił wewnętrznych, przy czym dokładność rozwiązania rośnie wraz ze wzrostem liczby równań. W przypadku, gdy współczynniki (4.24) nie są znane, wówczas wyznaczamy je korzystając z odpowiednich warunków brzegowych.

### 5. Algorytm rozwiązywania problemów brzegowych

— powłoka w kształcie paraboloidy eliptycznej

Rozważmy zginanie powłoki w kształcie paraboloidy eliptycznej, dla której przyjmujemy:

$$(5.1) \quad k_1 = k_2 = k, \text{ przy } k_{12} = 0.$$

W tym przypadku wzory (4.5), (4.6) oraz (4.18 ÷ 21) upraszczają się do postaci:

$$(5.2) \quad E_{mn}^{(1)} = -k(1+\nu) \frac{\alpha_m}{\Delta_{mn}}, \quad E_{mn}^{(2)} = -k(1+\nu) \frac{\beta_n}{\Delta_{mn}},$$

$$(5.3) \quad F_{mn}^{(1)} = F_{mn}^{(2)} = 0,$$

$$(5.4) \quad D_{mn} = D \square_{mn} = D(\Delta_{mn}^2 + \kappa^4), \quad \kappa^4 = 12(1-\nu^2)k^2/h^2,$$

$$(5.5) \quad S_{mnlj} = 0,$$

$$(5.6) \quad H_{mn}^{(1)} = 0, \quad H_{mn}^{(2)} = \frac{k(1+\nu)}{\Delta_{mn}} [\alpha_m N_{mn}^{(1)} + \beta_n N_{mn}^{(2)} - 2B \alpha_m \beta_n (U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)})].$$

Uwzględniając wyrażenia (5.2 ÷ 6) zapisujemy układ równań (4.23) oraz wzory (4.4) następująco:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} w_{mn} &= w_{mn}^{(1)} = \frac{1}{D_{mn}} (p_{mn} - Z_{mn}), \\ u_{mn} &= u_{mn}^{(1)} = E_{mn}^{(1)} w_{mn} + B_{mn}^{(1)}, \quad v_{mn} = v_{mn}^{(1)} = E_{mn}^{(2)} w_{mn} + B_{mn}^{(2)}. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu pracy zajmiemy się dwoma praktycznymi rodzajami podparć powłoki.

**5.1. Powłoka podparta przegubowo przesuwnie.** Rozważmy powłokę podpartą zgodnie z następującymi warunkami brzegowymi (rys. 4a):

$$(5.8) \quad \begin{aligned} v &= 0, \quad w = 0, \quad N_1 = 0, \quad M_1 = 0 && \text{dla } x = 0, x = a, \\ u &= 0, \quad w = 0, \quad N_2 = 0, \quad M_2 = 0 && \text{dla } y = 0, y = b. \end{aligned}$$



W tym przypadku jest  $B_{mn}^{(1)} = B_{mn}^{(2)} = 0$  oraz  $Z_{mn} = 0$ , a współczynniki rozwinięcia funkcji przemieszczeń w podwójne szeregi Fouriera znajdujemy bezpośrednio ze wzoru (5.7):

$$w_{mn} = \frac{P_{mn}}{D_{mn}}, \quad u_{mn} = E_{mn}^{(1)} \frac{P_{mn}}{D_{mn}}, \quad v_{mn} = E_{mn}^{(2)} \frac{P_{mn}}{D_{mn}}.$$

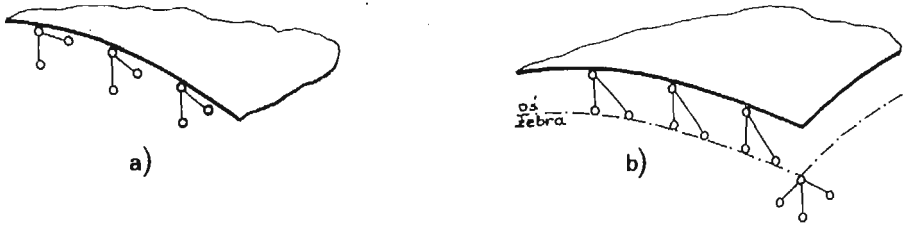
Jeżeli powłoka poddana została działaniu równomiernie rozłożonego obciążenia  $p(x, y) = \text{const}$ , wtedy na podstawie definicji (3.5) oraz (4.13) otrzymujemy:

$$(5.9) \quad p_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{dla } m, n = 0, 2, 4, \dots, \\ \frac{4p}{\alpha_m \beta_n} & \text{dla } m, n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Zatem funkcję opisującą ugięcie środkowej powierzchni powłoki można w rozważanym przypadku wyrazić za pomocą następującego szeregu:

$$(5.10) \quad w^0(x, y) = \frac{16p}{Dab} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} F_m^{(-1)}(y) \sin \alpha_m x, \quad F_m^{(-1)} = \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\beta_n^{-1}}{\square_{mn}} \sin \beta_n y.$$

Podobnie znajdujemy funkcje opisujące pozostałe wielkości geometryczne i statyczne. Sumy szeregów funkcyjnych typu  $F_m^{(-1)}(y)$  można przedstawić w postaci zamkniętej [12].



Rys. 4

**5.2. Powłoka podparta żebrowo.** Rozważmy powłokę o brzożebrych wzmocnionych żebrowo, podpartą przegubowo nieprzesuwnie tylko w narożach. Zakładamy, że sztywności belek krawędziowych odpowiadające skręcaniu i zginaniu w płaszczyźnie poziomej są równe zeru, natomiast żebra przenoszą oddziaływania pionowe i styczne (rys. 4b). W tym przypadku warunki brzegowe (2.8) mają postać:

$$(5.11) \quad M_1|_{x=a} = 0, \quad M_2|_{y=b} = 0, \quad N_1|_{x=0} = 0, \quad N_2|_{y=0} = 0,$$

$$(5.12) \quad N_{12}|_{x=0} \pm \frac{\partial N_2^*}{\partial y} = 0, \quad N_{12}|_{y=b} \pm \frac{\partial N_1^*}{\partial x} = 0,$$

$$Q_1|_{x=0} \pm \frac{\partial^2 M_{12}^*}{\partial y^2} \pm kN_2^* = 0, \quad Q_2|_{y=b} \pm \frac{\partial^2 M_{11}^*}{\partial x^2} \pm kN_1^* = 0,$$

oraz

$$(5.13) \quad \left. \begin{aligned} w = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \\ M_{12}^* = 0, \quad M_{21}^* = 0, \end{aligned} \right\} \text{ w punktach } (0, 0), (a, 0), (0, b), (a, b)$$

(powłoka podparta przegubowo nieprzesuwnie w narożach).

Siły wewnętrzne wyrażone są za pomocą wzorów (2.3 ÷ 4), (2.9 ÷ 10).

Warunki brzegowe (5.11) oraz  $w = 0$  w narożach powłoki będą spełnione jeżeli we wzorach (4.7), (4.10) przyjmiemy:

$$(5.14) \quad N_{mn}^{(1)} = N_{mn}^{(2)} = 0, \quad M_{mn}^{(1)} = M_{mn}^{(2)} = 0, \quad W_{mn}^{(0)} = 0.$$

Należy jeszcze spełnić warunki (5.12), (5.13).

Na podstawie (5.14) oraz uwzględniając (4.10), (4.19) przekształcamy związek (5.7)<sub>1</sub> następująco:

$$(5.15) \quad w_{mn} = \frac{1}{D_{mn}} \left[ p_{mn} - D(\alpha'_{mn} W_{mn}^{(1)} + \beta'_{mn} W_{mn}^{(2)}) + Ehk \frac{\alpha_m \beta_n}{\Delta_{mn}} (U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}) \right].$$

We wzorze (5.15) występują niewiadome współczynniki  $W_{mn}^{(i)}$ ,  $U_{mn}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , które (pamiętając o (4.25)) można wyznaczyć ze statycznych warunków brzegowych.

Na podstawie (5.12), (3.2), (3.6) otrzymujemy dla brzegów  $x = 0$ ,  $x = a$ :

$$(5.16) \quad \frac{2}{a} \sum_{m=0}^{\infty} (\pm 1)^m \lambda_m T_{mn}^{22} (N_{12}) \pm T_n^2 \left( \frac{\partial N_2^*}{\partial y} \right) = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$(5.17) \quad \frac{2}{a} \sum_{m=0}^{\infty} (\pm 1)^m \lambda_m T_{mn}^{21} (Q_1) \pm T_n^1 \left( \frac{\partial^2 M_{12}^*}{\partial y^2} \right) \pm T_n^1 (kN_2^*) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Równania dla krawędzi  $y = 0$ ,  $y = b$  mają analogiczną postać.

Zgodnie z (2.9) oraz po uwzględnieniu (2.4), (4.25)<sub>2</sub>, (5.14) transformacja siły  $Q_1$  przyjmuje postać:

$$(5.18) \quad T_{mn}^{21} (Q_1) = D[\alpha'_{mn} w_{mn} + \alpha''_{mn} W_{mn}^{(1)} + \gamma''_{mn} W_{mn}^{(2)}],$$

$$(5.19) \quad \alpha''_{mn} = \alpha_m^2 + 2(1-\nu)\beta_n^2, \quad \gamma''_{mn} = (2-\nu)\alpha_m\beta_n.$$

Stosując skończoną transformację Fouriera  $T_n^1$  do następnych członów równania (5.17) oraz pamiętając o (5.13) otrzymujemy następujący nieskończony układ równań:

$$(5.20) \quad \frac{2D}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{(i)} \{ \alpha'_{mn} w_{mn} + \alpha''_{mn} W_{mn}^{(1)} + \gamma''_{mn} W_{mn}^{(2)} \} +$$

$$+ (-1)^i \{ (EJ^{(i)} \beta_n^4 + k^2 EF) w_n^{(i)} + EFk \beta_n u_n^{(i)} \} = 0,$$

$$\lambda_m^{(i)} = \lambda_m \varepsilon_m^{(i)}, \quad \varepsilon_m^{(i)} = (1-)^{(i+1)m}, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Podstawiając do równań (5.20) w miejsce  $w_{mn}$  prawą stronę wyrażenia (5.15) doprowadzamy ten układ do postaci:

$$(5.21) \quad Q_n^{(i)} + D \left\{ R_n^{(3-i)} w_n^{(2)} - \tilde{R}^{(i)} w_n^{(1)} + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{(i)} \gamma''_{mn} [(-1)^n w_m^{(4)} - w_m^{(3)}] \right\} +$$

$$+ Ehk \beta_n \left\{ A_n^{(3-i)} u_n^{(2)} - \tilde{A}^{(i)} u_n^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m^{(i)} \alpha_m \alpha'_{mn}}{\Delta_{mn} \square_{mn}} [(-1)^n u_m^{(4)} - u_m^{(3)}] \right\},$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

$$(5.22) \quad R_n^{(i)} = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{(i)} \left( \alpha'_{mn} - \frac{\alpha_{mn}^{\prime 2}}{\square_{mn}} \right), \quad \tilde{R}_n^{(i)} = R_n^{(i)} - (-1)^i (J^{(i)} \beta_n^4 + k^2 F^{(i)}) \frac{Ea}{2D},$$

$$(5.23) \quad A_n^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^{(i)} \frac{\alpha_m \alpha'_{mn}}{\Delta_{mn} \square_{mn}}, \quad \tilde{A}_n^{(i)} = A_n^{(i)} - (-1)^i \frac{aF^{(i)}}{2h},$$

$$(5.24) \quad Q_n^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^{(i)} p_{mn} \frac{\alpha'_{mn}}{\square_{mn}}, \quad \gamma_{mn}''' = \gamma_{mn}'' - \frac{\alpha'_{mn} \beta'_{nm}}{\square_{mn}}.$$

Przekształćmy teraz układ równań (5.16). Zgodnie z (2.3)<sub>2</sub>, (5.1) i (3.9) jest:

$$(5.25) \quad T_{mn}^{22}(N_{12}) = B \{ B_{mn}^{22}(u) + \beta_n T_{mn}^{21}(u) + B_{mn}^{12}(v) + \alpha_m T_{mn}^{12}(v) \},$$

a po wykorzystaniu wzorów (4.2), (4.3), (5.7) i uwzględnieniu związków (4.7), (4.25)<sub>1</sub>, (5.2) otrzymujemy:

$$(5.26) \quad T_{mn}^{22}(N_{12}) = 2B(1+\nu) \left\{ \frac{\alpha_m^2 \beta_n^2}{\Delta_{mn}^2} (U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}) - k \frac{\alpha_m \beta_n}{\Delta_{mn}} w_{mn} \right\}.$$

Po przeprowadzeniu transformacji pozostałych członów (5.16) znajdujemy następujący nieskończony układ równań:

$$(5.27) \quad E h \frac{2}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{(i)} \left\{ \frac{\alpha_m^2 \beta_n^2}{\Delta_{mn}^2} (U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}) - \frac{k \alpha_m \beta_n}{\Delta_{mn}} w_{mn} \right\} + \\ - (-1)^i \{ E F^{(i)} \beta_n (\beta_n u_n^{(i)} + k w_n^{(i)}) - B_n (N_2^{*(i)}) \} = 0, \quad i = 1, 2., \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Łatwo zauważyć, że dla  $m = n = 0$  równania (5.27) są spełnione jeżeli jest:

$$(5.28) \quad B_0(N_2^{*(i)}) = 0.$$

Biorąc pod uwagę (3.4), (5.28) wprowadzamy oznaczenia:

$$(5.29) \quad r^{(i)} = N_2^{*(i)}(0) = N_2^{*(i)}(b), \quad i = 1, 2.$$

Na podstawie (5.28) rozpoczynamy sumowanie w (5.27) od  $m = 1$ , zatem można przyjąć  $\lambda_m^{(i)} = \varepsilon_m^{(i)}$ . Po uwzględnieniu związków (5.15) zapisujemy nieskończony układ równań (5.27) w następującej postaci:

$$(5.30) \quad -\beta_n E h k \left\{ \frac{B_n^{(i)}}{D} - A_n^{(3-i)} w_n^{(2)} + \tilde{A}_n^{(i)} w_n^{(1)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m \beta'_{nm}}{\Delta_{mn} \square_{mn}} [(-1)^n w_m^{(4)} - w_m^{(3)}] \right\} + \\ + \beta_n^2 E h \left\{ S_n^{(3-i)} v_n^{(2)} - \tilde{S}_n^{(i)} v_n^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2}{\square_{mn}} [(-1)^n u_m^{(2)} - u_m^{(1)}] \right\} - (-1)^i \frac{a}{2} [(-1)^n - 1] r^{(i)} = 0,$$

$$i = 1, 2., \quad n = 1, 2, \dots,$$

gdzie:

$$(5.31) \quad S_n^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^{(i)} \frac{\alpha_m^2}{\square_{mn}}, \quad \tilde{S}_n^{(i)} = S_n^{(i)} - (-1)^i \frac{aF^{(i)}}{2h},$$

$$(5.32) \quad B_n^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^{(i)} \frac{\alpha_m p_{mn}}{\Delta_{mn} \square_{mn}}.$$

Należy jeszcze zapisać równania umożliwiające spełnienie warunku  $u = 0$ ,  $v = 0$  w narożach powłoki. Po wykorzystaniu wzorów (3.2) i (4.24) znajdujemy:

$$u(l_i, l_j) = \frac{2}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{(i)} u_m^{(j)}, \quad v(l_i, l_j) = \frac{2}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{(i)} u_n^{(j)},$$

$$i = 1, 2., \quad j = 3, 4., \quad i = 3, 4., \quad j = 1, 2..$$

Dodając i odejmując stronami powyższe równania dla  $i = 1, 2$  oraz dla  $i = 3, 4$  otrzymujemy:

$$(5.33) \quad \frac{a}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [(-1)^m - 1] u_m^{(j)} = 0, \quad \frac{b}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n - 1] u_n^{(j)} = 0,$$

$$j = 3, 4., \quad j = 1, 2.,$$

$$(5.34) \quad \sum_{m=0}^{\infty} [(-1)^m - 1] \lambda_m u_m^{(j)} = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n - 1] \lambda_n u_n^{(j)} = 0,$$

$$j = 3, 4., \quad j = 1, 2..$$

Równania (5.21), (5.30), (5.33) nie zawierają współczynników  $u_0^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4.$ , współczynniki te obliczamy korzystając z równań (5.34).

Związki (5.21), (5.30), (5.33), (5.34) uzupełnione odpowiednimi równaniami dla brzegów  $y = 0$ ,  $y = b$  stanowią nieskończony układ algebraicznych równań liniowych o symetrycznej macierzy współczynników z niewiadomymi  $u_m^{(i)}$ ,  $w_m^{(i)}$ ,  $r^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4.$  Należy zwrócić uwagę, że niewiadome poziome reakcje w narożach  $r^{(i)}$  istnieją również wtedy, gdy sztywności żeber  $EF^{(i)}$  równe są zeru.

Rozwiązując skończoną liczbę równań tego układu można obliczyć w/w niewiadome i wyznaczyć ze wzoru (5.15) współczynniki  $w_{mn}$ . W efekcie umożliwia to znalezienie współczynników  $u_{mn}$ ,  $v_{mn}$  a następnie wyznaczenie funkcji opisujących przemieszczenia i siły wewnętrzne.

Jeżeli powłoka rozpięta jest na planie kwadratu ( $a = b$ ,  $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$ ,  $\alpha_n = \beta_n = \frac{n\pi}{a}$ ) i obciążona symetrycznie wtedy otrzymany uprzednio układ równań ulega znacznej redukcji:

$$(5.35) \quad \frac{1}{2} Q_n - D \left[ \bar{R}_n w_n + \sum_{m=1,3}^{\infty} \gamma_{mn}''' w_m \right] - E h k \alpha_n \left[ \bar{A}_n v_n + \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{\alpha_m \alpha'_{mn}}{(\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \square_{mn}} u_m \right] = 0$$

$$- \frac{\kappa^4}{2k} \alpha_n B_n - E h k \alpha_n \left[ \bar{A}_n w_n + \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{\alpha_m \alpha'_{nm}}{(\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \square_{mn}} w_m \right] -$$

$$- E h \alpha_n^2 \left[ \bar{S}_n v_n + \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{\alpha_m^2}{\square_{mn}} u_m \right] - \frac{a}{2} r = 0,$$

$$(5.35) \quad -\frac{a}{2} \sum_{m=1,3}^{\infty} u_m = 0, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

[cd.]

$$\bar{A}_n = \frac{1}{2}(A_n + \tilde{A}_n), \quad \bar{R}_n = \frac{1}{2}(R_n + \tilde{R}_n), \quad \bar{S}_n = \frac{1}{2}(S_n + \tilde{S}_n).$$

Niewiadomymi w układzie równań (5.35) są współczynniki  $u_m$ ,  $w_m$ ,  $r$ .

Ugięcia środkowej powierzchni powłoki określone są teraz następująco:

$$(5.36) \quad w(x, y) = w^0(x, y) + \frac{8}{a^2} \sum_{m=1,3}^{\infty} w_m \{ [F_m^{(3)}(x) + (2-\nu)\alpha_m^2 F_m^{(1)}(x)] \sin \alpha_m y + \\ + [F_m^{(3)}(y) + (2-\nu)\alpha_m^2 F_m^{(1)}(y)] \sin \alpha_m x \} - \\ - \frac{8}{Da^2} \sum_{m=1,3}^{\infty} u_m \alpha_m [F_m^{(1)}(x) \sin \alpha_m y + F_m^{(1)}(y) \sin \alpha_m x].$$

Występujące we wzorze (5.36) składniki z indeksem  $(0)$  oznacza ugięcie określone dla powłoki podpartej przegubowo przesuwnie (zgodnie z warunkami (5.8)). Wielkość ta została wyrażona za pomocą wzoru (5.10). Symbole  $F_m^{(1)}$ ,  $F_m^{(3)}$  oznaczają sumy trygonometrycznych szeregów funkcyjnych. Sumy te można przedstawić w postaci zamkniętej [12].

Pozostałe przemieszczenia oraz siły wewnętrzne można określić w podobny sposób.

## 6. Rozwiązania numeryczne

Na podstawie algorytmu przedstawionego w poprzednim punkcie zbudowano program na EMC Odra 1204 (zestaw D) w języku Algol 1204.

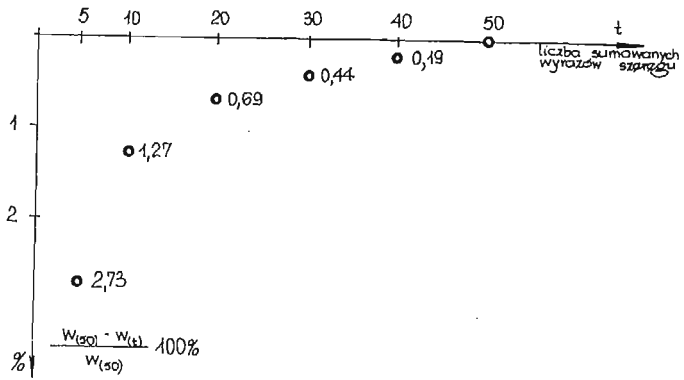
Program STF (Skończona Transformacja Fouriera) umożliwia obliczanie przemieszczeń, momentów zginających i skręcających oraz sił normalnych i stycznych dla powłoki w kształcie paraboloidy eliptycznej o krawędziach wzmocnionych żebrami, rozpiętej na planie kwadratu. Powłoka poddana została działaniu obciążenia ciągłego  $p = \text{const}$ . W programie uwzględniono możliwość sprężystego podparcia naroży w kierunkach osi  $x$  i  $y$ .

Mając na uwadze symetrię ustroju i obciążenia względem osi  $x = a/2$ ,  $y = a/2$  obliczono wielkości geometryczne i statyczne dla 1/4 powłoki.

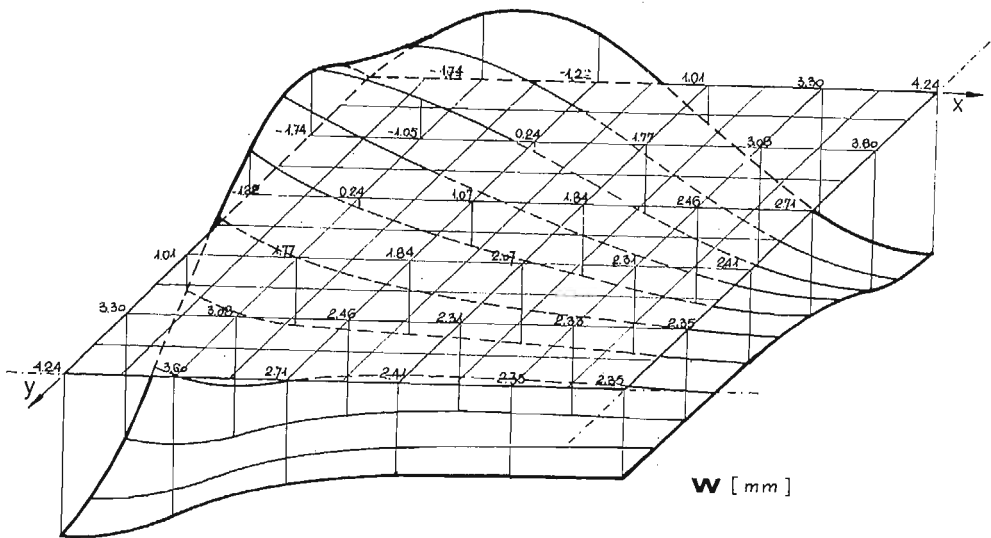
Za pomocą programu STF przeprowadzono analizę czterech następujących przykładów:

Przykład 1.

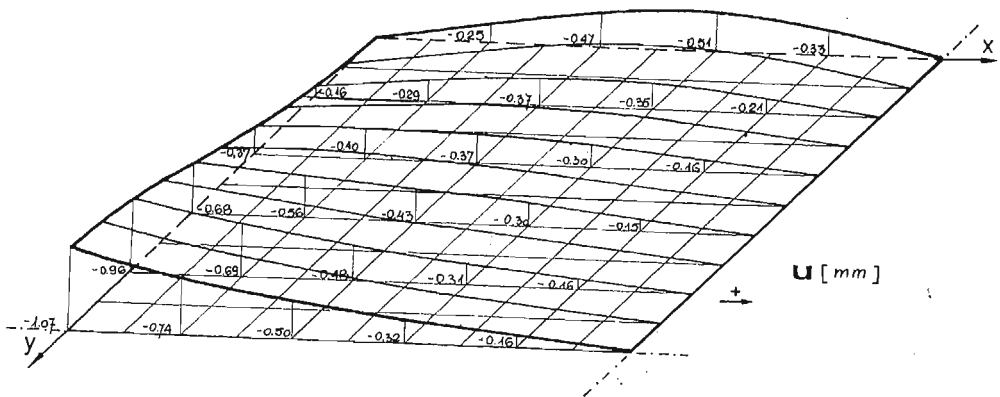
Wyznaczono przemieszczenia i siły wewnętrzne dla powłoki o swobodnych brzegach przy następujących danych:  $a = 20.0$  m — rozpiętość powłoki,  $k = 0.04$  1/m — krzywizna powłoki,  $h = 0.06$  m — grubość powłoki,  $E = 3.4 \times 10^7$  kN/m<sup>2</sup> — moduł Younga,  $\nu = 1/6$  — współczynnik Poissona,  $p = 3$  kN/m<sup>2</sup> — obciążenie. Zbadano zbieżności uzyskanego rozwiązania porównując wartości maksymalnego ugięcia powłoki wyznaczone przy uwzględnieniu 5, 10, 20, 30, 40, 50 wyrazów szeregu (rys. 5).



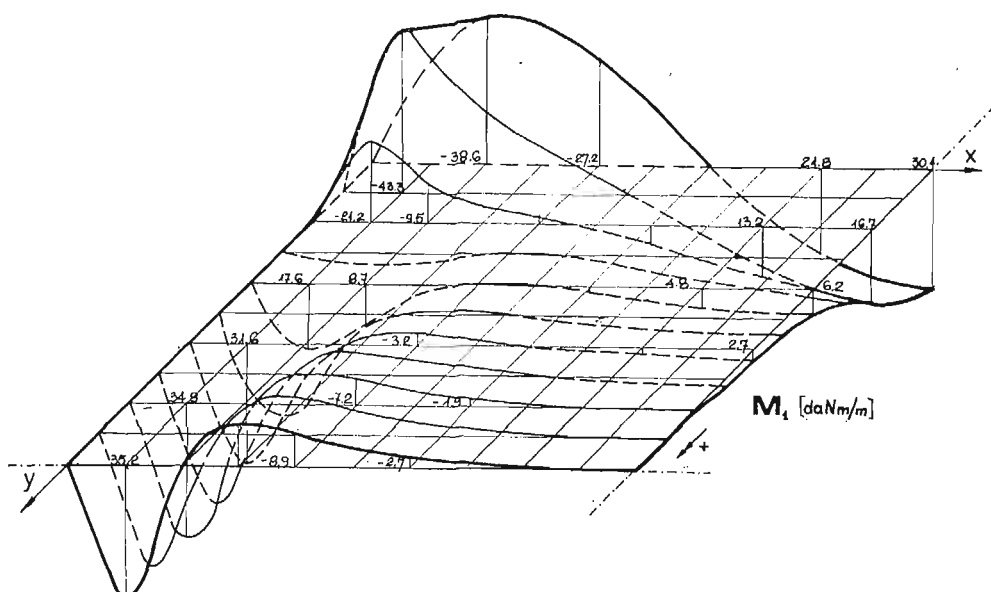
Rys. 5



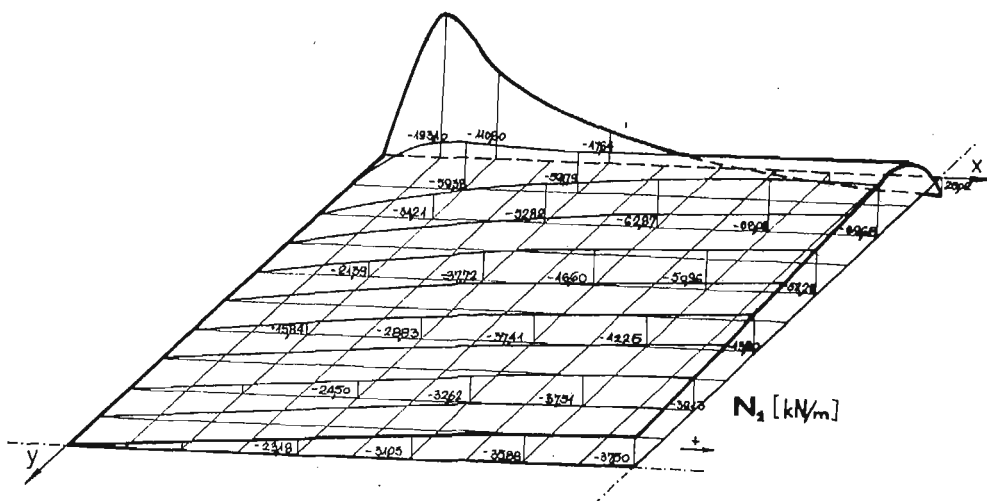
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



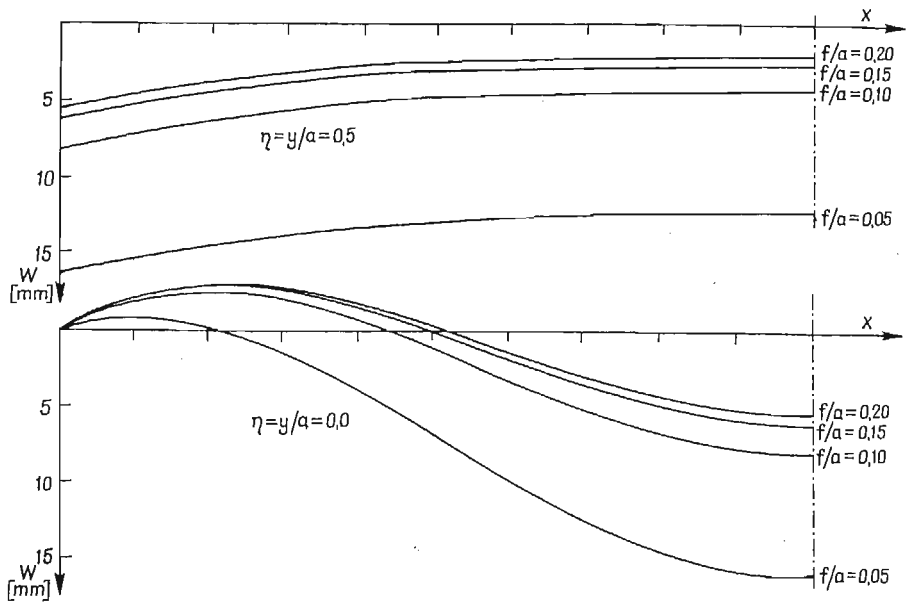
Rys. 9

## Przykład 2.

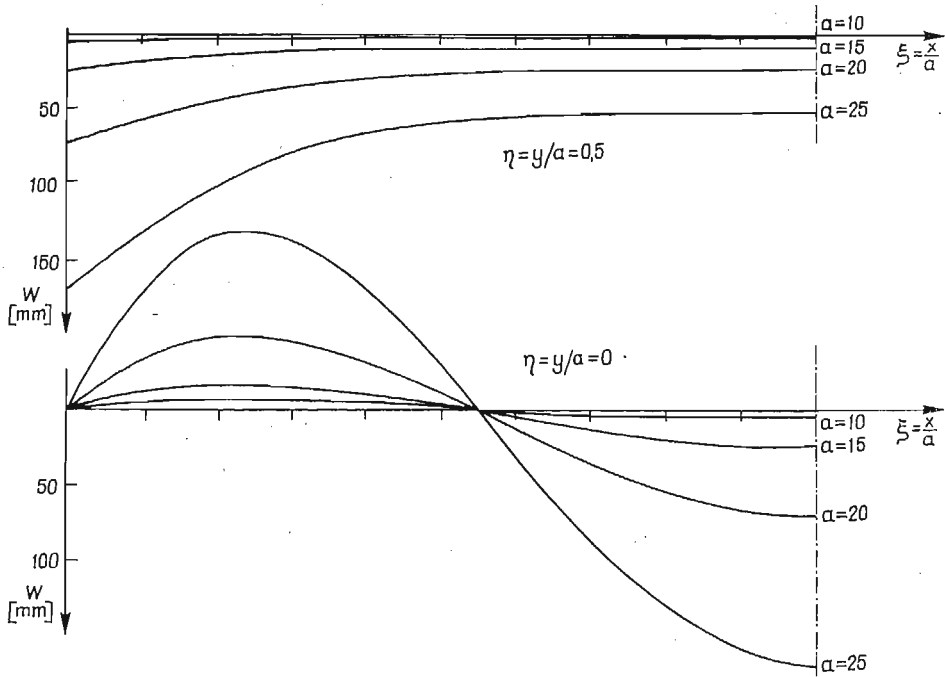
Brzeg powłoki wzmocniony żebrami o przekroju prostokątnym  $0.2 \times 0.4$  m,  $J_1 = 1,067 \times 10^{-3}$  m<sup>4</sup> — moment bezwładności żebra,  $F = 8.0 \times 10^{-2}$  m<sup>2</sup> — pole przekroju żebra. Pozostałe dane jak w przykładzie 1. Wyniki przedstawiono na rys. 6÷9.

## Przykład 3.

Zbadano wpływ wyniosłości powłoki na kształt powierzchni ugięcia. Przyjęto:  $a = 10$  m,  $f/a = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$ : pozostałe dane jak w przykładzie 1. Na rys. 10 przedstawiono ugięcia powłoki wzdłuż osi symetrii oraz wzdłuż brzegu.



Rys. 10



Rys. 11



Przykład 4.

Analizie poddano wpływ rozpiętości powłoki na wielkość ugięcia. Przy stałej wyniosłości  $f/a = 0.2$  przyjmowano:  $a = 5, 10, 15, 20, 25$  m.

## 7. Analiza wyników i wnioski

W rozwiązaniu problemu brzegowego założono, że poziome reakcje narożne przyłożone są styczne do krawędzi powłoki; dlatego też na brzegu w okolicynaroża siły  $N_1$  i  $N_2$  dążą do zera, a siły styczne  $N_{1,2}$  przyjmują wartości niezerowe. Zaburzenia te mają charakter lokalny i wynikają z przyjętego sposobu transformacji równań równowagi.

Na podstawie przedstawionych wyników obliczeń można podać kilka szczegółowych wskazań dotyczących projektowania rozważanego ustroju.

1. Szczególne wyteżenie materiału powłoki występuje w okolicy naroża. Spowodowane jest ono, jak można sądzić, działaniem dużych reakcji skupionych. Obliczone reakcje wynoszą:

— dla powłoki bez żeber  $R_z = 300$  kN,  $R_x = R_y = 436$  kN

— dla powłoki z żebrami  $R_z = 300$  kN,  $R_x = R_y = 437$  kN.

Należy zwrócić uwagę na istnienie w pobliżu podpory bardzo dużych momentów zginających rozciągających górne włókna powłoki.

2. Nieprzesuwność naroży jest podstawowym wymogiem gwarantującym małe przemieszczenia środkowej powierzchni powłoki. Pomimo że paraboloida eliptyczna jest powierzchnią nierozwijałną, to jednak przemieszczenia wyznaczone dla powłoki o przesuwnych narożach wykraczają znacznie poza zakres dopuszczający stosowanie liniowej teorii powłok.

3. Analiza wyników z przykładów 1 i 2 wskazuje wyraźnie na korzystny wpływ żebra krawędziowego. Współpraca żebra powoduje znaczne zmniejszenie wartości przemieszczeń i sił wewnętrznych bez istotnej zmiany sposobu pracy powłoki.

4. W środkowym obszarze powłoki panuje stan naprężeń zbliżony do bezmomentowego. Modyfikacja warunków brzegowych wpływa nieznacznie na siły wewnętrzne w tym obszarze.

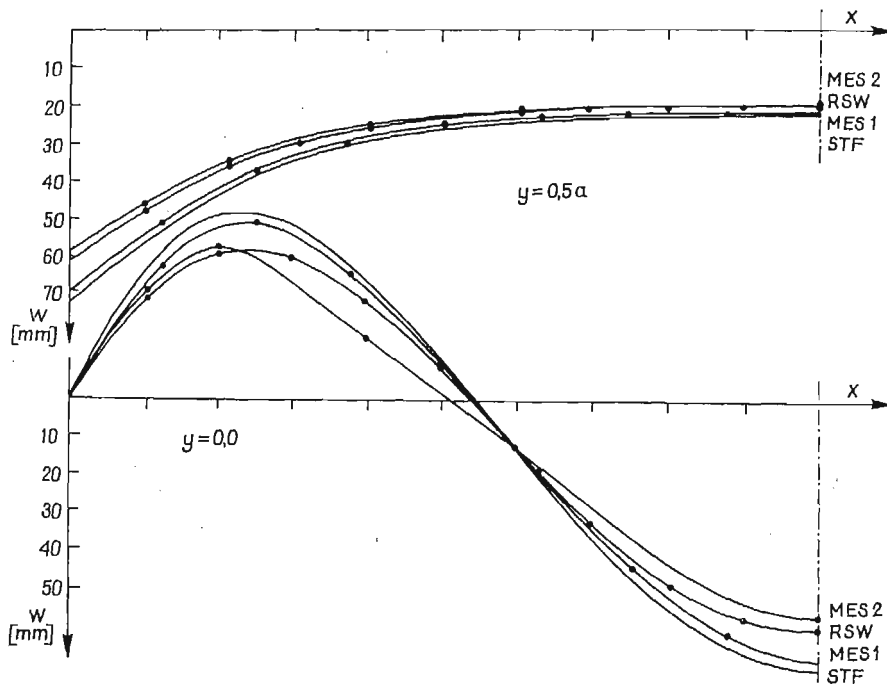
Powyższe uwagi zgodne są z wnioskami uzyskanymi na podstawie badań modelowych [11]. Ze względu na brak dokładnych danych dotyczących modelu nie przeprowadzono analizy porównawczej wyników.

Wyniki otrzymane za pomocą przedstawionej w pracy metody (STF) wykazują zadowalającą zgodność z wynikami uzyskanymi przy wykorzystaniu metod numerycznych t.j. metody różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym (RSW) i dwóch wersji metody elementów skończonych (MES 1, MES 2).

Rozwiązania wykorzystujące metodę elementów skończonych znaleziono przy podziale jednej czwartej powłoki na 25 elementów, przy czym w wersji MES 1 podział jest równomierny, a w MES 2 podział zagęszczono w okolicy naroża. Obliczenia wersji MES 1 zostały przeprowadzone w University of Wales w Swansea. Przyjęto elementy prostokątne o 28 stopniach swobody (semiloof shell element). Rozwiązanie oznaczone MES 2 otrzymane zostało

za pomocą programu opisanego w pracy [9], obliczenia wykonano w WAT w Warszawie. W przypadku metody RSW przyjęto podział  $10 \times 10$ , natomiast w rozwiązaniu za pomocą skończonej transformacji Fouriera uwzględniono 30 wyrazów szeregu. Na rys. 12 przedstawiono wykresy ugięć powłoki w przekrojach  $y = 0$ ,  $y = a/2$  otrzymane za pomocą w/w metod (dane jak dla przykładu 1).

Zamieszczone w pracy przykłady liczbowe dotyczą powłoki rozpiętej na planie kwadratu i obciążonej równomiernie. Łatwo zauważyć, że opracowany algorytm numeryczny metody skończonej transformacji Fouriera można bez trudności zastosować w przypadku prostokątnego planu powłoki i dowolnego obciążenia. Można wtedy również otrzymać zamkniętą postać współczynników macierzy nieskończonych układów równań oraz przedstawić za pomocą pojedynczych szeregów poszukiwane funkcje opisujące wielkości geometryczne i statyczne. Możliwe jest też uwzględnienie innych schematów współpracy żeber.



Rys. 12

Podstawowe zalety zbudowanego algorytmu metody STF to: stabilność układu równań i szybka zbieżność rozwiązania. Program wykorzystujący ten algorytm cechuje mała liczba transmisji danych, małe wymagania dotyczące pamięci zewnętrznej, krótki czas działania i duża elastyczność. Wymienione zalety predysponują zastosowanie metody STF w przypadku wielokrotnego rozwiązywania tego samego problemu przy różnych parametrach (np. w zagadnieniach optymalizacyjnych).

W podsumowaniu można wnioskować, że w odniesieniu do przykładu opisanego w pracy, przy wykorzystaniu niedużych EMC, najbardziej efektywna jest metoda skończonej

transformacji Fouriera. Przy zastosowaniu tej metody wyniki wykazują najlepszą zbieżność, a wartości uzyskane za pomocą metod numerycznych (RSW, MES1, MES2) dążą do w/w wyników w miarę zwiększania liczby stopni swobody dyskretyzowanej powłoki.

#### Literatura cytowana w tekście

1. W. Z. WŁASOW, *Obszczaja teoria oboloczek i jejo priloženije w technike*, Gos. Izdat. Techniko-Teoret. Lit. Moskwa, Leningrad (1949).
2. A. A. NAZAROW, *Osnowy teorii i metody raszczeta pologich oboloczek*, Izdat. Lit. po Stroit. Moskwa, Leningrad (1966).
3. P. SEIDE, *Smal Elastic Deformation of Thin Shells*, Noordhoff Int. Pub. Leyden (1975).
4. Z. MAZURKIEWICZ, *General Solution of the Dynamics and Statics Problem of Shallow Elastic Shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., 15 z. 9 (1967).
5. Z. MAZURKIEWICZ, A. WIWEGER, *Static and Dynamic Problems of Elastic Shells of Small Rise*, Arch. Mech. Stos. 2. 20 (1968).
6. E. BIELEWICZ, J. WACHOWIAK, P. WILDE, *Analiza statyczna przekrycia jednosłupowego*, Arch. Inż. Łąd., 1, 13 (1967).
7. E. MALERSKI, *Analiza statyczna przekrycia złożonego z powłok HP*, Inż. i Bud., 6 (1971).
8. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa (1972).
9. J. SZMELTER, M. DACKO, S. DOBROCIŃSKI, W. WIECZOREK, *Programy metody elementów skończonych*, Arkady, Warszawa (1973).
10. J. J. CONNOR, C. BERBBIA, *Stiffnes Matrix for Shallow Rectangular Shell Element*, Journal of the Engineering Mechanics Divison, ASCE Vol. 93, No. 5 Oct. 1967.
11. O. DĄBROWSKI, *Badania modelowe zaburzeń brzegowych w dwukrzywiznowej powloce wypukłej*, Inż. i Bud. 4 (1962).
12. K. H. ŻMIJEWSKI, *Zginanie sprężystej powłoki w kształcie paraboloidy eliptycznej podpartej na żebrach*, Praca dokt. Politechnika Warszawska, (1977).

#### Резюме

#### ИЗГИБ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ В ВИДЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА ОПЕРТОГО НА РЕБРАХ

Рассматривается задача изгиба упругой, пологой и тонкой оболочки, в виде эллиптического параболоида, растянутой на плане квадрата и опертой на упругих ребрах. Исходной точкой является система трех дифференциальных уравнений в перемещениях известна из технической теории оболочек В. З. Власова.

Решение, выполняющее краевые условия получено методом конечной трансформации Фурье. Задача сведена к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Неизвестными являются коэффициенты разложения перемещений на краях оболочки в ряд Фурье и горизонтальная угловая реакция.

В работе даны численные примеры перемещений и внутренних сил в равномерно нагруженной оболочке. Результаты сравнены с результатами полученными численными методами (конечных разностей и конечных элементов).

## S u m m a r y

BENDING OF AN ELASTIC SHELL IN THE FORM OF AN ELLIPTIC PARABOLOID  
SUPPORTED ON RIBS

Bending problem is considered of an elastic, shallow, thin shell in the form of an elliptic paraboloid, stretched over a square and supported on elastic ribs. A point of departure constitutes system of three differential equations in terms of displacements, known from the technical shell theory of V. Z. Vlasov [1].

In order to obtain a solution satisfying the boundary conditions the method of finite Fourier transform has been applied. The problem has been reduced to the solution of an infinite system of algebraic equations. The unknowns in the system are the coefficients of the expansion of the displacements on the shell boundary in to the single Fourier series and the horizontal corner reaction.

Numerical examples of displacements and internal forces have been computed for a shell loaded uniformly. The results have been compared with those obtained by numerical methods (finite differences and finite elements).

INSTYTUT MECHANIKI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH  
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 1 września 1978 roku.*

---

## WPLYW ZJAWISKA ODWIJANIA PRZEWODU KIEROWANIA I NIEKTÓRYCH PARAMETRÓW GEOMETRYCZNYCH RAKIETY NA JEJ STATECZNOŚĆ DYNAMICZNĄ

TADEUSZ KUŹMICEWICZ, JERZY MARYNIAK (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

W większości przeciwpancernych rakiet kierowanych sygnały sterujące są przekazywane ze stanowiska naprowadzania na rakiety za pośrednictwem tzw. przewodów kierowania. Przewód kierowania umieszczany jest w rakiecie na szpuli. Szpula jest umieszczona w rakiecie tak, że jej oś podłużna pokrywa się z osią podłużną rakiety. Z chwilą startu rakiety jeden koniec przewodu pozostaje na stanowisku kierowania i przewód zaczyna odwijać się ze szpuli. W czasie odwijania przewód wykonuje ruch obiegowy wokół osi podłużnej rakiety. Zakres prędkości tych rakiet kierowanych przewodowo zawiera się w przedziale od 85 m/s w zestawach I generacji (Cobra), do 280 m/s w zestawach II generacji (HOT). Jak wykazały badania [8] przewód kierowania rozwijany z takimi prędkościami jest obciążony znacznymi siłami dynamicznymi i aerodynamicznymi.

W pracach dotyczących stateczności samolotów i szybowców holujących bądź też holowanych za pośrednictwem liny [11, 12, 13, 19] uwzględniano wpływ liny wprowadzając dodatkowe siły lub siły i momenty w punkcie zamocowania liny.

W rozważanych przypadkach holowania lina nie wykonywała gwałtownych ruchów w miejscu jej zamocowania ani też wzdłuż swej długości.

W przypadku odwijania przewodu z lecącej rakiety oprócz hamującego oddziaływania naciągu przewodu pojawia się inny efekt a mianowicie raketowy ciąg przewodu. Znajomość zjawiska odwijania przewodu kierowania z lecącej rakiety i jego wpływu na stateczność rakiety może być wykorzystana w ewentualnych zmianach konstrukcyjnych węzła rakiety zawierającego szpulę z przewodem.

Stabilizujący charakter naciągu przewodu [10, 22] może być np. wykorzystany dla przesunięcia płatów do przodu i zwiększenia tylnej części rakiety zawierającej szpulę.

W niniejszej pracy przedstawione zostaną badania wpływu takich parametrów rakiety jak średnica szpuli oraz położenie środka masy na jej stateczność dynamiczną.

### 2. Różniczkowe równania ruchu

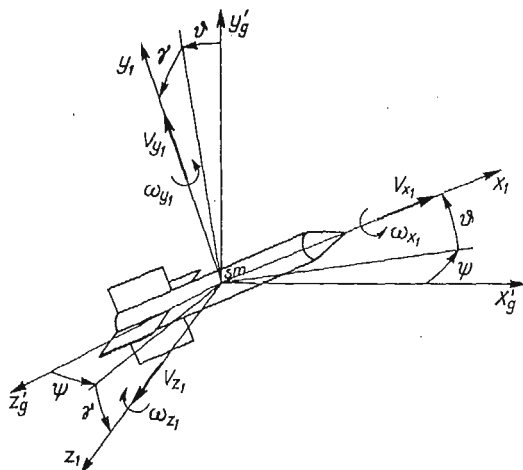
Równania ruchu rakiety z uwzględnieniem zjawiska odwijania przewodu kierowania wyprowadzono rozpatrując małe zakłócenia od ustalonego lotu poziomego, prostoliniowego. Pozwoliło to na linearyzację równań ruchu. Linearyzacja umożliwiła uzyskanie rozwiązania w prostej postaci wygodnej do analizy stateczności.

Założono, że przed zakłóceniem rakietą znajdowała się w płaszczyźnie pionowej i posiadała następujące stałe parametry:

$$\begin{aligned} \omega_{y_1,0} = \omega_{z_1,0} = 0; \quad \gamma_0 = 0; \quad V_{z_1,0} = 0 \\ \vartheta_0 = \text{const} \neq 0; \quad \alpha_0 = \text{const} \neq 0; \quad \omega_{x_1,0} = \text{const} \neq 0; \quad V_{x_1,0} = \text{const} \neq 0; \\ V_{y_1,0} = \text{const} \neq 0 \end{aligned}$$

Małe zmiany prędkości liniowej, kątowej oraz kątowego położenia rakiety oznaczono następująco:

- $v_x, v_y, v_z$  — składowe małych zmian prędkości liniowej rakiety w układzie współrzędnych związanych z rakieta,
- $\gamma_1$  — zmiana kąta przechylenia,
- $\psi_1$  — zmiana kąta odchylenia,
- $\vartheta_1$  — zmiana kąta pochylenia,
- $\dot{\gamma}_1$  — zmiana prędkości kątowej przechylania,
- $\dot{\psi}_1$  — zmiana prędkości kątowej odchylenia,
- $\dot{\vartheta}_1$  — zmiana prędkości kątowej pochylenia.



Rys. 1

Zakłócenia lotu ustalonego, tzn. zmiany prędkości liniowej, kątowej oraz położenia kątowego wywołują zmiany siły aerodynamicznej, momentu aerodynamicznego oraz zmianę naciągu przewodu.

Po uwzględnieniu powyższych założeń otrzymano liniowy układ równań ruchu dla małych zakłóceń:

$$\begin{aligned} m \left( \frac{dv_x}{dt} - V_{y_1,0} \bar{\omega}_{z_1} \right) &= X_1^{\omega_{x_1}} \bar{\omega}_{x_1} + X_1^{\omega_{y_1}} \bar{\omega}_{y_1} + X_1^{\omega_{z_1}} \bar{\omega}_{z_1} + X_1^{v_x} v_x + X_1^{v_y} v_y + \\ &\quad + X_{1N}^{\vartheta} \vartheta_1 + X_{1N}^{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}_1 + X_{1C}^{v_x} v_x + X_{1C}^{v_y} v_y + X_{1C}^{v_z} v_z, \\ m \left( \frac{dv_y}{dt} - V_{x_1,0} \bar{\omega}_{z_1} \right) &= Y_1^{\omega_{x_1}} \bar{\omega}_{x_1} + Y_1^{\omega_{z_1}} \bar{\omega}_{z_1} + Y_1^{v_x} v_x + Y_1^{v_y} v_y + Y_1^{v_z} v_z + \\ &\quad + Y_{1C}^{v_x} v_x + Y_{1C}^{v_y} v_y + Y_{1C}^{v_z} v_z + Y_{1N}^{\vartheta} \vartheta_1 + Y_{1N}^{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m \left( \frac{dv_z}{dt} + V_{y_1 0} \bar{\omega}_{x_1} - V_{x_1 0} \bar{\omega}_{y_1} \right) &= Z_1^{\omega_{x_1}} \bar{\omega}_{x_1} + Z_1^{\omega_{y_1}} \bar{\omega}_{y_1} + Z_1^{v_x} v_x + Z_1^{v_z} v_z + \\
 &\quad + Z_{1N}^{\vartheta} \dot{\vartheta}_1 + Z_{1N}^{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}_1 + Z_{1C}^{v_x} v_x + Z_{1C}^{v_y} v_y + Z_{1C}^{v_z} v_z, \\
 J_{x_1} \frac{d\bar{\omega}_{x_1}}{dt} &= L^{\omega_{x_1}} \bar{\omega}_{x_1} + L^{\omega_{y_1}} \bar{\omega}_{y_1} + L_N^{\vartheta} \dot{\vartheta}_1 + L_N^{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}_1 + L_C^{v_x} v_x + L_C^{v_y} v_y + L_C^{v_z} v_z, \\
 (2.1) \quad J_{y_1} \frac{d\bar{\omega}_{y_1}}{dt} + (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{x_1 0} \bar{\omega}_{z_1} &= M^{\omega_{x_1}} \bar{\omega}_{x_1} + M^{\omega_{y_1}} \bar{\omega}_{y_1} + M^{v_x} v_x + M^{v_z} v_z + \\
 &\quad + M_N^{\vartheta} \dot{\vartheta}_1 + M_N^{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}_1 + M_C^{v_x} v_x + M_C^{v_y} v_y + M_C^{v_z} v_z, \\
 J_{z_1} \frac{d\bar{\omega}_{z_1}}{dt} + (J_{y_1} - J_{x_1}) \omega_{x_1 0} \bar{\omega}_{y_1} &= N^{\omega_{x_1}} \bar{\omega}_{x_1} + N^{\omega_{y_1}} \bar{\omega}_{y_1} + N^{\omega_{z_1}} \bar{\omega}_{z_1} + N^{v_x} v_x + \\
 &\quad + N^{v_y} v_y + N_N^{\vartheta} \dot{\vartheta}_1 + N_N^{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}_1 + N_C^{v_x} v_x + N_C^{v_y} v_y + N_C^{v_z} v_z, \\
 \bar{\omega}_{x_1} &= \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\psi_1}{dt} \sin \vartheta_0, \\
 \bar{\omega}_{y_1} &= \frac{d\psi_1}{dt} \cos \vartheta_0, \\
 \bar{\omega}_{z_1} &= \frac{d\vartheta_1}{dt}.
 \end{aligned}$$

Pochodne aerodynamiczne występujące w układzie równań (2.1) są wyprowadzone i omówione w pracy [3].

Oddziaływanie przewodu kierowania na raketę uwzględniono przez wprowadzenie do prawych stron równań (2.1) składowych siły i momentu siły naciągu przewodu wyrażonych jako iloczyny pochodnych liniowych i odpowiednich zmian parametrów lotu rakiety. Wprowadzeniu pochodnych liniowych poświęcono rozdział 3.

### 3. Pochodne liniowe

Przy określaniu sił działających na raketę pochodzących od przewodu kierowania założono liniowy charakter zmian sił w zależności od małych zmian kąta pochylenia rakiety  $\vartheta$  oraz kątowej prędkości rakiety  $\dot{\gamma}$ .

**3.1. Pochodne liniowe naciągu przewodu.** Przez analogię do pochodnych liniowych (współczynników sił) zastosowanych w badaniu stateczności holowanych szybowców [11, 12, 13, 14, 19] wprowadzono pochodne liniowe przewodu kierowania zwane dalej pochodnymi liniowymi.

Pochodne liniowe składowych sił naciągu przewodu  $T$  względem kąta pochylenia  $\vartheta$  i prędkości kątowej  $\dot{\gamma}$  określono następująco:

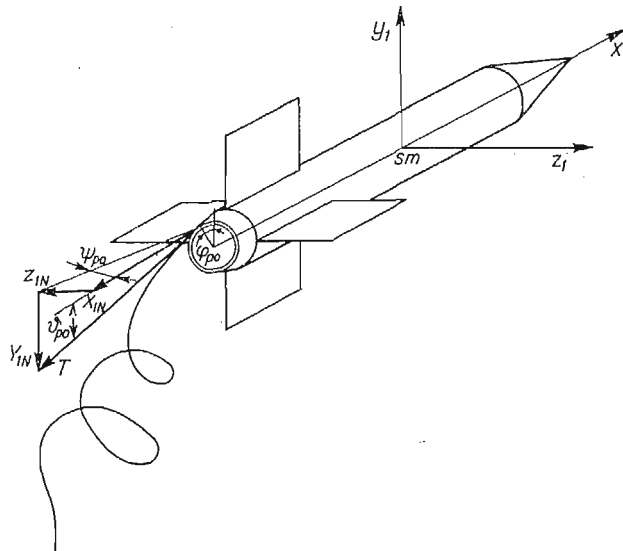
$$\begin{aligned}
 X_{1N}^{\vartheta} &= \frac{\partial X_{1N}}{\partial \vartheta}, & X_{1N}^{\dot{\gamma}} &= \frac{\partial X_{1N}}{\partial \dot{\gamma}}, \\
 (3.1) \quad Y_{1N}^{\vartheta} &= \frac{\partial Y_{1N}}{\partial \vartheta}, & Y_{1N}^{\dot{\gamma}} &= \frac{\partial Y_{1N}}{\partial \dot{\gamma}}, \\
 Z_{1N}^{\vartheta} &= \frac{\partial Z_{1N}}{\partial \vartheta}, & Z_{1N}^{\dot{\gamma}} &= \frac{\partial Z_{1N}}{\partial \dot{\gamma}}.
 \end{aligned}$$

Zmiany sił pochodzące od przewodu przedstawione za pomocą pochodnych linowych są następujące:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} dX_{1N} &= X_{1N}^{\theta} d\theta + X_{1N}^{\dot{\gamma}} d\dot{\gamma}, \\ dY_{1N} &= Y_{1N}^{\theta} d\theta + Y_{1N}^{\dot{\gamma}} d\dot{\gamma}, \\ dZ_{1N} &= Z_{1N}^{\theta} d\theta + Z_{1N}^{\dot{\gamma}} d\dot{\gamma}. \end{aligned}$$

Kierunek siły  $T$  pochodzącej od przewodu kierowania względem rakiety opisano kątami  $\vartheta_{po}$ ,  $\psi_{po}$  i  $\varphi_{po}$  (rys. 2) a odpowiednie jej składowe na osie układu współrzędnych związanego z rakieta wynoszą:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} X_{1N} &= -T \cos \vartheta_{po} \cos \psi_{po}, \\ Y_{1N} &= -T \sin \vartheta_{po}, \\ Z_{1N} &= -T \cos \vartheta_{po} \sin \psi_{po}. \end{aligned}$$



Rys. 2

Kąty przyłożenia naciągu przewodu do rakiety są zmienne i opisane następująco:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \vartheta_{po} &= -\vartheta_r \cos \varphi_{po} - \psi_r \sin \varphi_{po}, \\ \psi_{po} &= \vartheta_r \sin \varphi_{po} - \psi_r \cos \varphi_{po}. \end{aligned}$$

Zmianę naciągu przewodu otrzymano po zróżniczkowaniu zależności (3.3):

$$(3.5) \quad \begin{aligned} dX_{1N} &= -T^{\theta} \cos \vartheta_{po} \cos \psi_{po} d\theta - T^{\dot{\gamma}} \cos \vartheta_{po} \cos \psi_{po} d\dot{\gamma}, \\ dY_{1N} &= -T^{\theta} \sin \vartheta_{po} d\theta - T^{\dot{\gamma}} \sin \vartheta_{po} d\dot{\gamma}, \\ dZ_{1N} &= -T^{\theta} \cos \vartheta_{po} \sin \psi_{po} d\theta - T^{\dot{\gamma}} \cos \vartheta_{po} \sin \psi_{po} d\dot{\gamma}. \end{aligned}$$



Po przyrównaniu (3.5) do (3.2) otrzymano następujące wyrażenia na pochodne liniowe:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} X_{1N}^\vartheta &= -T^\vartheta \cos \vartheta_{po} \cos \psi_{po}, \\ Y_{1N}^\vartheta &= -T^\vartheta \sin \vartheta_{po}, \\ Z_{1N}^\vartheta &= -T^\vartheta \cos \vartheta_{po} \sin \psi_{po}, \\ X_{1N}^{\dot{\gamma}} &= -T^{\dot{\gamma}} \cos \vartheta_{po} \cos \psi_{po}, \\ Y_{1N}^{\dot{\gamma}} &= -T^{\dot{\gamma}} \sin \vartheta_{po}, \\ Z_{1N}^{\dot{\gamma}} &= -T^{\dot{\gamma}} \cos \vartheta_{po} \sin \psi_{po}. \end{aligned}$$

Pochodne liniowe momentów naciągu przewodu względem kąta pochylenia  $\vartheta$  i prędkości przechylenia  $\dot{\gamma}$  rakiety określono następująco:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} L_N^\vartheta &= \frac{\partial L_N}{\partial \vartheta}, & L_N^{\dot{\gamma}} &= \frac{\partial L_N}{\partial \dot{\gamma}}, \\ M_N^\vartheta &= \frac{\partial M_N}{\partial \vartheta}, & M_N^{\dot{\gamma}} &= \frac{\partial M_N}{\partial \dot{\gamma}}, \\ N_N^\vartheta &= \frac{\partial N_N}{\partial \vartheta}, & N_N^{\dot{\gamma}} &= \frac{\partial N_N}{\partial \dot{\gamma}}. \end{aligned}$$

Zmiany momentów sił pochodzące od naciągu przewodu przedstawione za pomocą pochodnych liniowych są następujące:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} dL_N &= L_N^\vartheta d\vartheta + L_N^{\dot{\gamma}} d\dot{\gamma}, \\ dM_N &= M_N^\vartheta d\vartheta + M_N^{\dot{\gamma}} d\dot{\gamma}, \\ dN_N &= N_N^\vartheta d\vartheta + N_N^{\dot{\gamma}} d\dot{\gamma}. \end{aligned}$$

Składowe naciągu przewodu (3.3) dają następujące momenty sił:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} L_N &= -\frac{1}{2} d_{sz} Z_{1N} \cos \varphi_{po} - \frac{1}{2} d_{sz} Y_{1N} \sin \varphi_{po}, \\ M_N &= -Z_N l_p + \frac{1}{2} d_{sz} X_{1N} \sin \varphi_{po}, \\ N_N &= Y_{1N} l_p + \frac{1}{2} d_{sz} X_{1N} \cos \varphi_{po}. \end{aligned}$$

Podstawiając (3.3) do (3.9) otrzymujemy:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} L_N &= -\frac{1}{2} T d_{sz} (\cos \vartheta_{po} \sin \psi_{po} \cos \varphi_{po} + \sin \vartheta_{po} \sin \varphi_{po}), \\ M_N &= T \left( \frac{1}{2} d_{sz} \cos \vartheta_{po} \cos \psi_{po} \sin \varphi_{po} - l_p \cos \vartheta_{po} \sin \psi_{po} \right), \\ N_N &= T \left( l_p \sin \vartheta_{po} + \frac{1}{2} d_{sz} \cos \vartheta_{po} \cos \psi_{po} \cos \varphi_{po} \right). \end{aligned}$$

Zmianę momentów sił otrzymano po różniczkowaniu (3.10):

$$\begin{aligned}
 dL_N &= -\frac{1}{2} d_{sz} (\cos \vartheta_{po} \sin \psi_{po} \cos \varphi_{po} + \sin \vartheta_{po} \sin \varphi_{po}) (T^\vartheta d\vartheta + T^\gamma d\dot{\gamma}), \\
 (3.11) \quad dM_N &= \left( \frac{1}{2} d_{sz} \cos \vartheta_{po} \cos \psi_{po} \sin \varphi_{po} - l_p \cos \vartheta_{po} \sin \psi_{po} \right) (T^\vartheta d\vartheta + T^\gamma d\dot{\gamma}), \\
 dN_N &= \left( l_p \sin \vartheta_{po} + \frac{1}{2} d_{sz} \cos \vartheta_{po} \cos \psi_{po} \cos \varphi_{po} \right) (T^\vartheta d\vartheta + T^\gamma d\dot{\gamma}).
 \end{aligned}$$

Po przyrównaniu współczynników przy elementach  $d\vartheta$  i  $d\dot{\gamma}$  w (3.8) i (3.11) otrzymano następujące wyrażenia na pochodne linowe momentów siły przewodu:

$$\begin{aligned}
 L_N^\vartheta &= -\frac{1}{2} T^\vartheta d_{sz} (\cos \vartheta_{po} \sin \psi_{po} \cos \varphi_{po} + \sin \vartheta_{po} \sin \varphi_{po}), \\
 M_N^\vartheta &= T^\vartheta \left( \frac{1}{2} d_{sz} \cos \vartheta_{po} \cos \psi_{po} \sin \varphi_{po} - l_p \cos \vartheta_{po} \sin \psi_{po} \right), \\
 N_N^\vartheta &= T^\vartheta \left( l_p \sin \vartheta_{po} + \frac{1}{2} d_{sz} \cos \vartheta_{po} \cos \psi_{po} \cos \varphi_{po} \right), \\
 (3.12) \quad L_N^\gamma &= -\frac{1}{2} T^\gamma d_{sz} (\cos \vartheta_{po} \sin \psi_{po} \cos \varphi_{po} + \sin \vartheta_{po} \sin \varphi_{po}), \\
 M_N^\gamma &= T^\gamma \left( \frac{1}{2} d_{sz} \cos \vartheta_{po} \cos \psi_{po} \sin \varphi_{po} - l_p \cos \vartheta_{po} \sin \psi_{po} \right), \\
 N_N^\gamma &= T^\gamma \left( l_p \sin \vartheta_{po} + \frac{1}{2} d_{sz} \cos \vartheta_{po} \cos \psi_{po} \cos \varphi_{po} \right).
 \end{aligned}$$

**3.2. Pochodne linowe ciągu raketowego przewodu kierowania.** Odwijający się przewód daje efekt ciągu raketowego. Wielkość ciągu przewodu jest funkcją prędkości odwijania i została określona w pracy [20] i wynosi:

$$(3.13) \quad P_p = m_s V^2.$$

Składowe ciągu przewodu na osie układu współrzędnych związanej z raketą wynoszą:

$$\begin{aligned}
 (3.14) \quad X_{1c} &= m_s V_0^2 \cos \vartheta_{po} \cos \psi_{po}, \\
 Y_{1c} &= m_s V_0^2 \sin \vartheta_{po}, \\
 Z_{1c} &= m_s V_0^2 \cos \vartheta_{po} \sin \psi_{po}.
 \end{aligned}$$

Zmiana prędkości liniowych rakiety powoduje zmianę prędkości liniowej odwijania przewodu. Przyjmując ustalone prędkości rakiety w układzie współrzędnych związanych z raketą jako  $V_{x_1,0}$ ,  $V_{y_1,0}$ ,  $V_{z_1,0}$  oraz odpowiednio ich małe zmiany  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  po rozwinięciu w szereg Taylora wokół ustalonej prędkości rakiety otrzymujemy przyrost ciągu przewodu:

$$\begin{aligned}
 (3.15) \quad & P_p(V_{x_1,0} + v_x, V_{y_1,0} + v_y, V_{z_1,0} + v_z) - P_p(V_{x_1,0}, V_{y_1,0}, V_{z_1,0}) = \\
 & = \frac{\partial P_p}{\partial v_x} \cdot v_x + \frac{\partial P_p}{\partial v_y} \cdot v_y + \frac{\partial P_p}{\partial v_z} \cdot v_z + \frac{\partial^2 P_p}{\partial v_x^2} v_x^2 + \frac{\partial^2 P_p}{\partial v_y^2} v_y^2 + \frac{\partial^2 P_p}{\partial v_z^2} v_z^2 + \dots
 \end{aligned}$$

Pomijając nieliniowe składniki jako małe drugiego rzędu, przyrost ciągu przewodu wynosi:

$$(3.16) \quad dP_p = \frac{\partial P_p}{\partial v_x} v_x + \frac{\partial P_p}{\partial v_y} v_y + \frac{\partial P_p}{\partial v_z} v_z$$

Przyrosty ciągu przewodów wywołane zmianami  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  zostały przedstawione w postaci:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial P_p}{\partial v_x} v_x &= \frac{\partial X_{1c}}{\partial v_x} v_x + \frac{\partial Y_{1c}}{\partial v_x} v_x + \frac{\partial Z_{1c}}{\partial v_x} v_x, \\ \frac{\partial P_p}{\partial v_y} v_y &= \frac{\partial X_{1c}}{\partial v_y} v_y + \frac{\partial Y_{1c}}{\partial v_y} v_y + \frac{\partial Z_{1c}}{\partial v_y} v_y, \\ \frac{\partial P_p}{\partial v_z} v_z &= \frac{\partial X_{1c}}{\partial v_z} v_z + \frac{\partial Y_{1c}}{\partial v_z} v_z + \frac{\partial Z_{1c}}{\partial v_z} v_z. \end{aligned}$$

Po zróżniczkowaniu (3.14) względem  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  otrzymujemy:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} X_{1c}^{v_x} &= 2m_s V_{x_1 0} \cos \vartheta_{p_0} \cos \psi_{p_0}, \\ Y_{1c}^{v_x} &= 2m_s V_{x_1 0} \sin \vartheta_{p_0}, \\ Z_{1c}^{v_x} &= 2m_s V_{x_1 0} \cos \vartheta_{p_0} \sin \psi_{p_0}, \\ X_{1c}^{v_y} &= 2m_s V_{y_1 0} \cos \vartheta_{p_0} \cos \psi_{p_0}, \\ Y_{1c}^{v_y} &= 2m_s V_{y_1 0} \sin \vartheta_{p_0}, \\ Z_{1c}^{v_y} &= 2m_s V_{y_1 0} \cos \vartheta_{p_0} \sin \psi_{p_0}, \\ X_{1c}^{v_z} &= 2m_s V_{z_1 0} \cos \vartheta_{p_0} \cos \psi_{p_0}, \\ Y_{1c}^{v_z} &= 2m_s V_{z_1 0} \sin \vartheta_{p_0}, \\ Z_{1c}^{v_z} &= 2m_s V_{z_1 0} \cos \vartheta_{p_0} \sin \psi_{p_0}. \end{aligned}$$

Pochodne ciągu raketowego przewodu (3.18) przez analogię do pochodnych aerodynamicznych stateczności, pochodnych linowych stateczności zostały nazwane jako pochodne stateczności ciągu przewodu. Korzystając z pochodnych stateczności ciągu przewodu (3.18) zmiany sił ciągu przewodu mają postać:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} dX_{1c} &= X_{1c}^{v_x} v_x + X_{1c}^{v_y} v_y + X_{1c}^{v_z} v_z, \\ dY_{1c} &= Y_{1c}^{v_x} v_x + Y_{1c}^{v_y} v_y + Y_{1c}^{v_z} v_z, \\ dZ_{1c} &= Z_{1c}^{v_x} v_x + Z_{1c}^{v_y} v_y + Z_{1c}^{v_z} v_z. \end{aligned}$$

Zmiany siły ciągu przewodu (3.19) dają zmiany momentów ciągu przewodu:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} dL_c &= y_1 dZ_{1c} - z_1 dY_{1c}, \\ dM_c &= z_1 dX_{1c} - x_1 dZ_{1c}, \\ dN_c &= x_1 dY_{1c} - y_1 dX_{1c}. \end{aligned}$$

Podstawiając współrzędne punktu przyłożenia przewodu oraz zależności (3.18) i (3.19) do (3.20) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} dL_c &= d_{sz} m_s V_{x_1 0} (\cos \vartheta_{p_0} \sin \psi_{p_0} \cos \psi_{p_0} + \sin \vartheta_{p_0} \sin \varphi_{p_0}) v_x + \\ &+ d_{sz} m_s V_{y_1 0} (\cos \vartheta_{p_0} \sin \psi_{p_0} \cos \varphi_{p_0} + \sin \vartheta_{p_0} \sin \varphi_{p_0}) v_y + \\ &+ d_{sz} m_s V_{z_1 0} (\cos \vartheta_{p_0} \sin \psi_{p_0} \cos \varphi_{p_0} + \sin \vartheta_{p_0} \sin \varphi_{p_0}) v_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dM_c &= 2m_s V_{x_1,0} \cos \vartheta_{p_0} \left( l_p \sin \psi_{p_0} - \frac{1}{2} d_{sz} \cos \psi_{p_0} \sin \varphi_{p_0} \right) v_x + \\
&+ 2m_s V_{y_1,0} \cos \vartheta_{p_0} \left( l_p \sin \psi_{p_0} - \frac{1}{2} d_{sz} \cos \psi_{p_0} \sin \varphi_{p_0} \right) v_y + \\
&+ 2m_s V_{z_1,0} \cos \vartheta_{p_0} \left( l_p \sin \psi_{p_0} - \frac{1}{2} d_{sz} \cos \psi_{p_0} \sin \varphi_{p_0} \right) v_z, \\
dN_c &= -2m_s V_{x_1,0} \left( l_p \sin \vartheta_{p_0} + \frac{1}{2} d_{sz} \cos \vartheta_{p_0} \cos \psi_{p_0} \cos \varphi_{p_0} \right) v_x + \\
&- 2m_s V_{y_1,0} \left( l_p \sin \vartheta_{p_0} + \frac{1}{2} d_{sz} \cos \vartheta_{p_0} \cos \psi_{p_0} \cos \varphi_{p_0} \right) v_y + \\
&- 2m_s V_{z_1,0} \left( l_p \sin \vartheta_{p_0} + \frac{1}{2} d_{sz} \cos \vartheta_{p_0} \cos \psi_{p_0} \cos \varphi_{p_0} \right) v_z.
\end{aligned}
\tag{3.21}$$

Wprowadzając pochodne linowe momentów ciągu raketowego przewodu zmiany momentów ciągu można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
dL_c &= \frac{\partial L_c}{\partial v_x} v_x + \frac{\partial L_c}{\partial v_y} v_y + \frac{\partial L_c}{\partial v_z} v_z, \\
dM_c &= \frac{\partial M_c}{\partial v_x} v_x + \frac{\partial M_c}{\partial v_y} v_y + \frac{\partial M_c}{\partial v_z} v_z, \\
dN_c &= \frac{\partial N_c}{\partial v_x} v_x + \frac{\partial N_c}{\partial v_y} v_y + \frac{\partial N_c}{\partial v_z} v_z.
\end{aligned}
\tag{3.22}$$

Przyrównując współczynniki przy  $v_x$ ,  $v_y$  i  $v_z$  w (3.21) i (3.22) otrzymujemy zależności na pochodne linowe momentów ciągu przewodu:

$$\begin{aligned}
L_c^{v_x} &= d_{sz} m_s V_{x_1,0} (\cos \vartheta_{p_0} \sin \psi_{p_0} \cos \varphi_{p_0} + \sin \vartheta_{p_0} \sin \varphi_{p_0}), \\
L_c^{v_y} &= d_{sz} m_s V_{y_1,0} (\cos \vartheta_{p_0} \sin \psi_{p_0} \cos \varphi_{p_0} + \sin \vartheta_{p_0} \sin \varphi_{p_0}), \\
L_c^{v_z} &= d_{sz} m_s V_{z_1,0} (\cos \vartheta_{p_0} \sin \psi_{p_0} \cos \varphi_{p_0} + \sin \vartheta_{p_0} \sin \varphi_{p_0}), \\
M_c^{v_x} &= 2m_s V_{x_1,0} \cos \vartheta_{p_0} \left( l_p \sin \psi_{p_0} - \frac{1}{2} d_{sz} \cos \psi_{p_0} \sin \varphi_{p_0} \right), \\
M_c^{v_y} &= 2m_s V_{y_1,0} \cos \vartheta_{p_0} \left( l_p \sin \psi_{p_0} - \frac{1}{2} d_{sz} \cos \psi_{p_0} \sin \varphi_{p_0} \right), \\
M_c^{v_z} &= 2m_s V_{z_1,0} \cos \vartheta_{p_0} \left( l_p \sin \psi_{p_0} - \frac{1}{2} d_{sz} \cos \psi_{p_0} \sin \varphi_{p_0} \right), \\
N_c^{v_x} &= -2m_s V_{x_1,0} \left( l_p \sin \vartheta_{p_0} + \frac{1}{2} d_{sz} \cos \vartheta_{p_0} \cos \psi_{p_0} \cos \varphi_{p_0} \right), \\
N_c^{v_y} &= -2m_s V_{y_1,0} \left( l_p \sin \vartheta_{p_0} + \frac{1}{2} d_{sz} \cos \vartheta_{p_0} \cos \psi_{p_0} \cos \varphi_{p_0} \right), \\
N_c^{v_z} &= -2m_s V_{z_1,0} \left( l_p \sin \vartheta_{p_0} + \frac{1}{2} d_{sz} \cos \vartheta_{p_0} \cos \psi_{p_0} \cos \varphi_{p_0} \right).
\end{aligned}
\tag{3.23}$$

Równania ruchu rakiety (2.1) po uwzględnieniu pochodnych linowych i aerodynamicznych zapisane macierzowo przyjmują postać:

$$(4.1) \quad P\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{Q}\mathbf{u} = 0,$$

gdzie  $\mathbf{u}$  macierz kolumnowa zakłóceń

$$\mathbf{u} = \text{col}[\dot{\gamma}_1, \dot{\vartheta}_1, \dot{\psi}_1, v_x, v_y, v_z, \gamma_1, \vartheta_1, \psi_1]$$

$$P = [p_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, 9 \\ j = 1, 2, \dots, 9 \end{array}$$

$$Q = [q_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, 9 \\ j = 1, 2, \dots, 9 \end{array}$$

Po przekształceniu i pomnożeniu lewostronnie (4.1) przez macierz odwrotną  $P^{-1}$  otrzymujemy:

$$(4.2) \quad \mathbf{u} = R\mathbf{u},$$

gdzie macierz stanu  $R$  ma postać:

$$R = P^{-1}(-Q).$$

Rozwiązanie układu (4.2) jest liniową kombinacją wszystkich rozwiązań szczególnych i przy różnych wartościach własnych ma postać:

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^g C_j \mathbf{u}_{wj} \exp \lambda_j t$$

gdzie

$\mathbf{u}_{wj}$  — wektor własny odpowiadający  $j$ -tej wartości własnej,

$C_j$  — stałe wyznaczone z warunków początkowych będących wartościami zakłóceń od ruchu ustalonego dla chwili  $t = 0$ ,

$\lambda_{j,j+1} = \xi_{j,j+1} \pm i\eta_{j,j+1}$  — wartości własne macierzy stanu  $R$

$\xi_j$  — współczynnik tłumienia,

jeżeli  $\xi_j < 0$  wahania są tłumione, tzn. ruch obiektu jest stateczny,

$\eta_j$  — częstotści oscylacji o okresie  $T_j = \frac{2\pi}{\eta_j}$ .

Rozwiązanie zagadnienia sprowadza się więc do wyznaczenia wartości własnych macierzy stanu  $R$ . Wyznaczenie wektorów własnych, odpowiadających wartościom własnym pozwala na identyfikację ruchów rakiety.

#### 5. Przykład liczbowy i wnioski

Obliczenia stateczności dynamicznej prowadzone dla przeciwpancernej rakiety klasy Bölkow — Cobra kierowanej przewodowo.

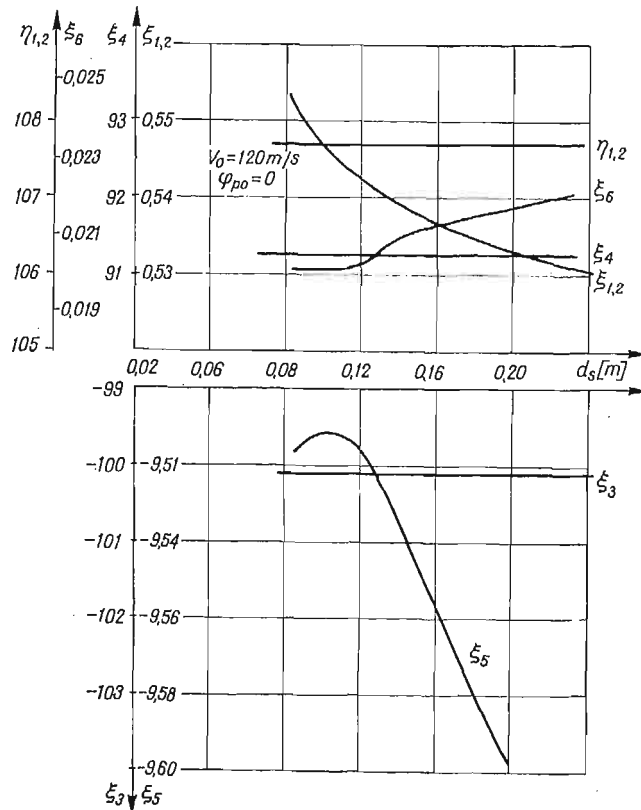
Do obliczeń przyjęto następujące charakterystyki geometryczne i masowe rakiety

$$\begin{array}{ll} L = 1,07 \text{ m} & G = 9,5 \text{ kG} \\ D = 0,120 \text{ m} & I_{x1} = 0,0025 \text{ kGs}^2\text{m} \\ L_s = 0,290 \text{ m} & I_{y1} = I_{z1} = 0,025 \text{ kGs}^2\text{m} \\ B = 0,470 \text{ m} & \end{array}$$

Obliczenia stateczności dynamicznej rakiety bez przewodu i z uwzględnieniem oddziaływania przewodu kierowania prowadzono dla prędkości lotu ustalonego w zakresie  $60 \div 140$  m/s. W obliczeniach zbadano wpływ kąta obiegu przewodu w szczeliny na wyjściu, średnicy szpuli z nawiniętym przewodem oraz położenie środka masy rakiety na jej stateczność dynamiczną. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 3 ÷ 7.

Na podstawie wektorów własnych dokonano identyfikacji ruchów rakiety. Odpowiednim wartościom własnym odpowiadają następujące ruchy rakiety:

- $\lambda_{1,2} = \xi_{1,2} \pm i\eta_{1,2}$  — oscylacje prędkości  $v_y$  sprzężone z oscylacjami prędkości kątowej pochylenia  $\dot{\vartheta}_1$  (przy prędkości  $V_0 = 120$  m/s oscylacje  $v_y$  przechodzą w oscylacje  $v_x$  sprzężone z prędkością kątową  $\dot{\vartheta}_1$  prędkością  $v_z$  i prędkością kątową odchylenia  $\dot{\psi}_1$ ),
- $\lambda_3$  — aperiodyczne zmiany prędkości  $v_z$  sprzężone ze zmianami prędkości kątowej odchylenia  $\dot{\psi}_1$ ,
- $\lambda_4$  — aperiodyczne zmiany prędkości  $v_z$  sprzężone z prędkością  $v_y$  i prędkością kątową pochylenia  $\dot{\vartheta}_1$ ,
- $\lambda_5$  — aperiodyczne zmiany prędkości kątowej przechylenia  $\dot{\gamma}_1$  sprzężone z prędkością  $v_z$  i prędkością kątową odchylenia  $\dot{\psi}_1$ ,
- $\lambda_6$  — aperiodyczne zmiany kąta odchylenia  $\psi_1$  sprzężone ze zmianami kąta przechylenia  $\gamma_1$ ,



Rys. 3

- $\lambda_7$  aperiodyczne zmiany prędkości  $v_x$  sprzężone z prędkością  $v_y$ , prędkością kątową  $\dot{\psi}_1$  oraz kątem przechylenia  $\gamma_1$ ,
- $\lambda_8$  aperiodyczne zmiany prędkości  $v_x$  sprzężone z kątami przechylenia  $\gamma_1$  i odchylenia  $\psi_1$ .

**5.1. Wpływ średnicy szpuli na stateczność.** Wpływ średnicy szpuli na stateczność przebadano w zakresie  $d_s = (0,086 \div 0,200)$  m dla prędkości lotu ustalonego  $V_0 = 120$  m/s i kąta przyłożenia przewodu na wyjściu z rakiety  $\varphi_{po} = 0^\circ$ .

Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 3. Zmianę współczynników tłumienia prędkości poprzecznych w funkcji średnicy szpuli, na którą nawinięty jest przewód kierowania, przedstawiono na rys. 3. Tłumienie  $\xi_{1,2}$  szybkich oscylacji prędkości  $v_y$  sprzężonej z prędkością  $v_z$  i prędkościami kątowymi  $\dot{\psi}_1$  i  $\dot{\psi}_1$  rośnie wraz ze wzrostem średnicy nawinięcia przewodu kierowania na szpulę. Częstość oscylacji nie zmienia się. Współczynniki tłumionych ( $\xi_3$ ) i nietłumionych ( $\xi_4$ ) prędkości  $v_z$  sprzężonych z prędkością kątową odchylenia  $\dot{\psi}_1$  nie zależą od średnicy szpuli.

Współczynniki tłumienia ruchów kątowych rakiety są zależne od średnicy szpuli (rys. 3). Aperiodyczne zmiany prędkości przechylenia rakiety  $\dot{\gamma}_1$  są tłumione w całym zakresie średnicy szpuli. Dla  $d_s < 0,110$  m tłumienie jest niewielkie, a dla  $d_s > 0,110$  m silnie wzrasta. Kątowe ruchy rakiety  $\psi_1$  sprzężone z  $\gamma_1$  są aperiodycznie nietłumione ( $\xi_6$ ). Ze wzrostem średnicy szpuli tłumienie tych ruchów maleje.

**5.2. Wpływ kąta  $\varphi_{po}$  na stateczność.** Przewód kierowania, odwijając się ze szpuli umieszczonej równolegle osią podłużną do osi podłużnej rakiety, zmienia punkt przyłożenia do rakiety.

Dla zbadania wpływu punktu przyłożenia na stateczność dynamiczną przyjęto do obliczeń cztery punkty określone kątem  $\varphi_{po} = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ . Obliczenia przeprowadzono dla prędkości lotu ustalonego  $V_0 = 120$  m/s i dla średnicy szpuli  $d_s = 0,110$  m. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 4.

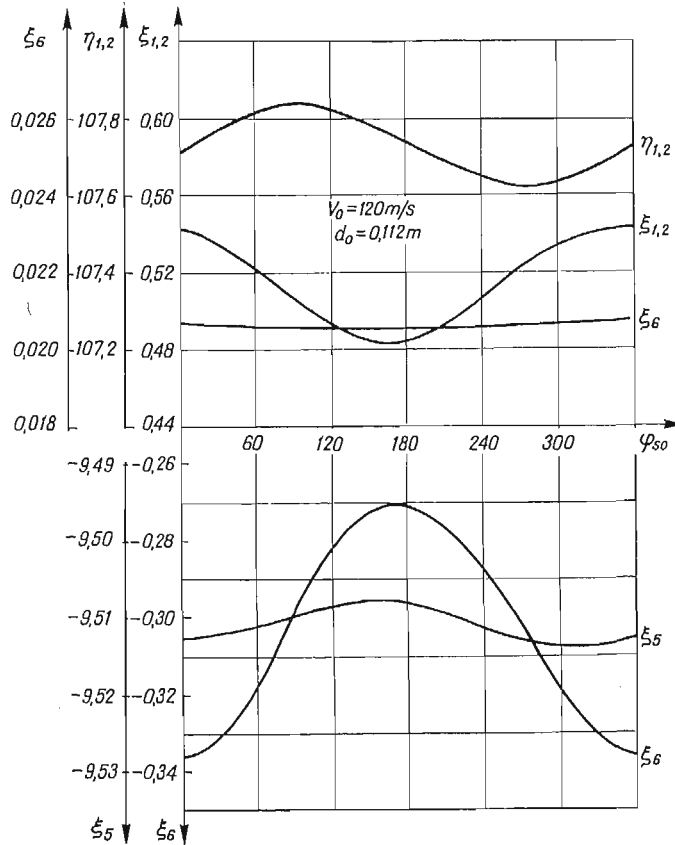
Współczynnik tłumienia  $\xi_5$  prędkości kątowej sprzężonej z prędkościami  $v_x, v_z$  i prędkości kątowej  $\dot{\psi}_1$  zmienia się oscylacyjnie w granicach 0,5%. Znacznie większy wpływ ma położenie przewodu na zmianę współczynnika tłumienia  $\xi_6$  kąta odchylenia  $\psi_1$  sprzężonego z kątem przechylenia  $\gamma_1$ . Współczynnik  $\xi_6$  zmienia się oscylacyjnie w funkcji kąta  $\varphi_{po}$ , najmniejszy jest przy  $\varphi_{po} = 180^\circ$  a największy przy  $\varphi_{po} = 0$ ; maksymalna różnica wynosi 9,3%.

Zmiana współczynnika  $\xi_{1,2}$  szybkich oscylacji prędkości  $v_x$  sprzężonej z prędkościami  $\dot{\psi}_1, v_z$  i  $\dot{\psi}_1$  wynosi 12%. Częstość oscylacji  $\eta_{1,2}$  zmienia się nieznacznie. Współczynnik  $\xi_{1,2}$  zmienia się oscylacyjnie w funkcji  $\varphi_{po}$ . Zmiana częstości  $\eta_{1,2}$  jest przesunięta w fazie w stosunku do zmiany  $\xi_{1,2}$ .

Największy wpływ zmiany położenia przewodu występuje w współczynnikach tłumienia  $\xi_7, \xi_8$  prędkości podłużnych  $v_x$  sprzężonych z kątem przechylenia  $\gamma_1$  (rys. 4). Współczynniki tłumienia  $\xi_7, \xi_8$  zmieniają się oscylacyjnie w funkcji kąta  $\varphi_{po}$ , największe wartości osiągają przy  $\varphi_{po} = 180^\circ$  a najmniejsze przy  $\varphi_{po} = 0^\circ$ . Maksymalna zmiana  $\xi_7$  wynosi 36,5%, a  $\xi_8$  — 23,8%.

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że zmiana położenia przewodu na wyjściu z rakiety ma największy wpływ na zmianę prędkości podłużnej rakiety (zmiana współ-

czynników tłumienia  $\xi_{1,2}$  — 12%,  $\xi_7$  — 36,5% i  $\xi_8$  — 23,7%) i mniejszy wpływ na ruchy kątowe. Nie ma natomiast wpływu na zmiany prędkości poprzecznych środka masy rakiety.



Rys. 4

**5.3. Wpływ położenia środka ciężkości na stateczność.** W celu przebadania wpływu odległości wyjścia przewodu z kadłuba od środka ciężkości rakiety zmieniano w obliczeniach położenie środka ciężkości. Szpula z przewodem umieszczana jest w tylnej części kadłuba, zmiana długości kadłuba pociągałaby za sobą zmianę charakterystyk masowych i aerodynamicznych i uniemożliwiałaby analizę porównawczą otrzymanych wyników obliczeń.

Obliczenia prowadzono dla trzech położenia środka ciężkości  $\bar{x}_{sc} = 0,54; 0,4; 0,3$ , ustalonej średnicy szpuli  $d_s = 0,110 \text{ m}$  oraz kąta przyłożenia przewodu  $\varphi_{p0} = 0$ .

Na rys. 5 przedstawiono zależność współczynnika tłumienia  $\xi_{1,2}$  w funkcji  $\bar{x}_{sc}$ . Zmniejszenie odległości środka ciężkości rakiety (co jest równoznaczne zwiększeniu odległości przyłożenia przewodu kierowania do środka ciężkości) powoduje ustalenie się małych zmian prędkości  $v_y$  sprzężonych z prędkością kątową pochylania  $\dot{\varphi}_1$ , prędkością  $v_z$  oraz prędkością odchylenia  $\dot{\psi}_1$ .



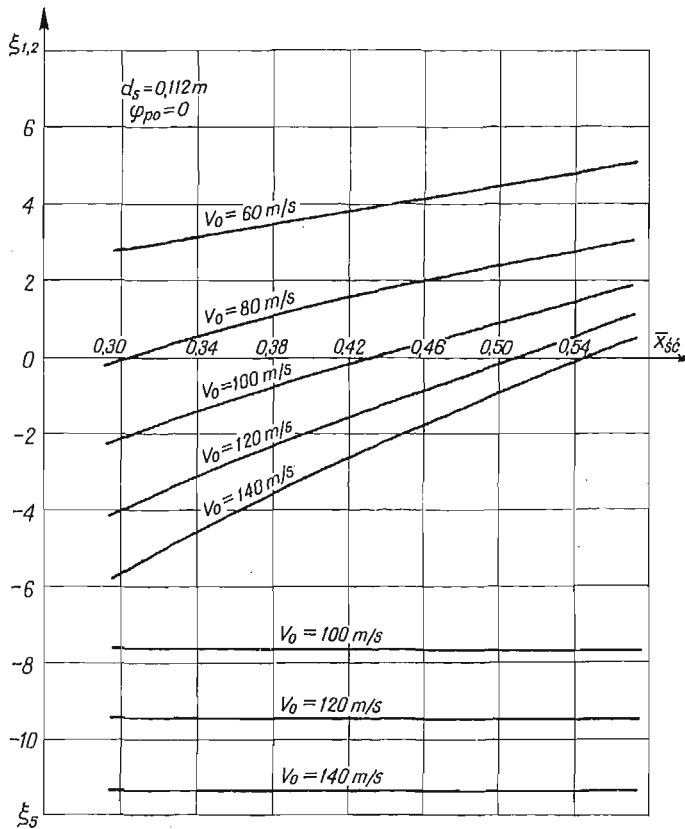
Również tłumione ( $\xi_3$ ) małe zmiany prędkości  $v_z$  sprzężone z prędkością kątową odchylenia ze zmniejszaniem się wielkości są silniej tłumione (rys. 6).

Nietłumione ruchy kątowe  $\psi_1$  sprzężone z kątem przechylenia  $\gamma_1$  ze wzrostem odległości punktu przyłożenia przewodu są coraz szybciej narastające. Współczynnik  $\xi_6$  ze zmniejszaniem się  $\bar{x}_{s\dot{c}}$  rośnie (rys. 7).

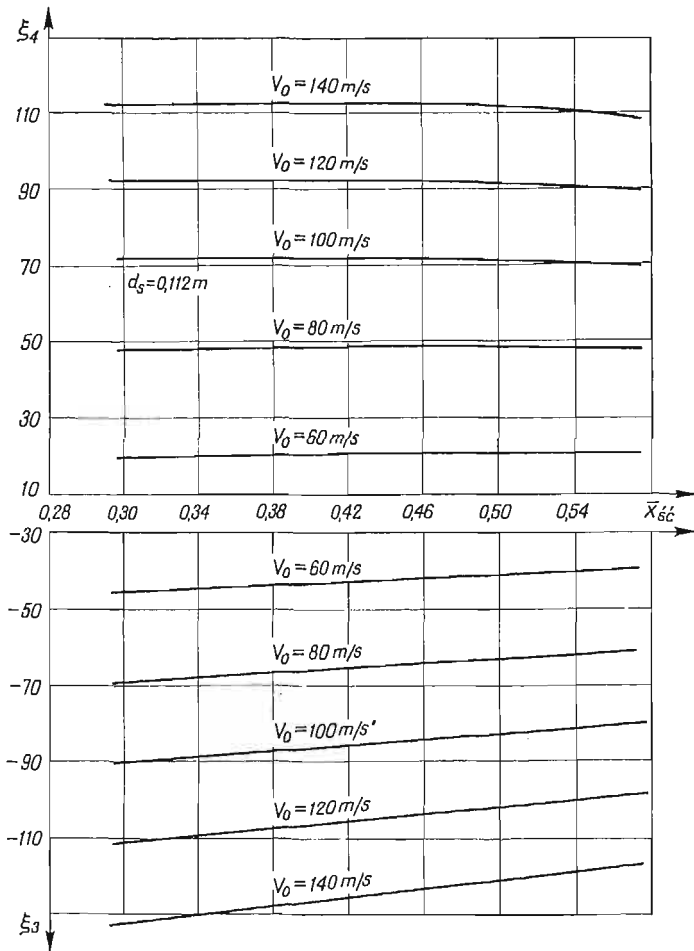
Przewód kierowania ze wzrostem odległości jego punktu przyłożenia od środka ciężkości powoduje, dla prędkości lotu ustalonego  $V_0 = 100$  m/s, ustatecznianie się prędkości  $v_y$  sprzężonej z  $\dot{\psi}_1(\xi_{1,2})$ , prędkości  $v_z$  sprzężonej z  $\dot{\psi}_1(\xi_3)$ . Współczynnik tłumienia  $\xi_{1,2}$  prędkości  $v_y$  maleje przy  $\bar{x}_{s\dot{c}} = 0,3$  37-krotnie, współczynnik tłumienia  $\xi_3$  prędkości  $v_z$  maleje o 10%. Ruchy kątowe rakiety  $\psi_1$  sprzężone z  $\gamma_1$  oraz  $\dot{\gamma}_1$  sprzężone z  $v_z$  nie zależą w sposób istotny od odległości przyłożenia przewodu od środka ciężkości.

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że:

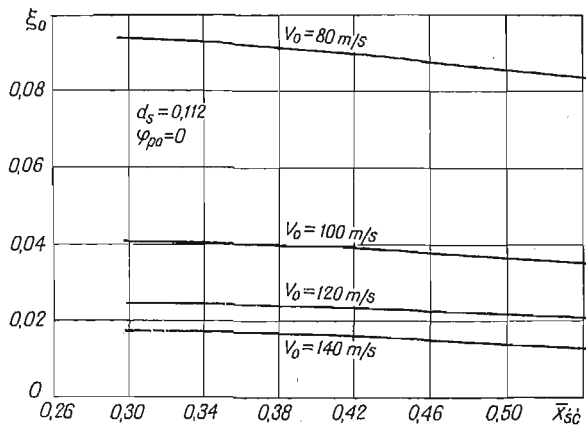
- 1) wzrost średnicy szpuli z przewodem kierowania
  - zwiększa tłumienie prędkości pionowej sprzężonej z prędkością kątową pochylenia ( $\xi_{1,2}$ , rys. 3),
  - zwiększa tłumienie prędkości kątowej przechylenia sprzężonej z prędkością boczną i prędkością kątową odchylenia ( $\xi_5$ , rys. 3),
  - zmniejsza tłumienia kąta odchylenia sprzężonego z kątem przechylenia ( $\xi_6$ , rys. 3),



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

- nie wpływa na tłumienie prędkości bocznej sprzężonej z prędkością kątową odchylenia i prędkością kątową pochylenia ( $\xi_3, \xi_4$ , rys. 3).
- 2) Obieganie przewodu na wyjściu z rakiety powoduje oscylacyjną zmianę stateczności dynamicznej (rys. 4).
- 3) Wzrost zapasu stateczności statycznej
  - ustatednia prędkość poprzeczną środka masy sprzężoną z prędkością kątową odchylenia i prędkością kątową pochylenia ( $\xi_3$ , rys. 6),
  - unistatednia kąt odchylenia ( $\xi_6$ , rys. 7).

#### Ważniejsze oznaczenia

- $X_1, Y_1, Z_1$  [kG] — składowe siły aerodynamicznej w układzie współrzędnych związanym z rakieta,
- $X_{1N}, Y_{1N}, Z_{1N}$  [kG] — składowe naciągu przewodu w układzie współrzędnych związanym z rakieta,
- $X_{1C}, Y_{1C}, Z_{1C}$  [kG] — składowe ciągu rakietowego przewodu w układzie współrzędnych związanym z rakieta,
- $L, M, N$  [kGm] — składowe momentu aerodynamicznego w układzie współrzędnych związanym z rakieta,
- $L_N, M_N, N_N$  [kGm] — składowe momentu naciągu przewodu w układzie współrzędnych związanym z rakieta,
- $L_C, M_C, N_C$  [kGm] — składowe momentu ciągu rakietowego przewodu w układzie współrzędnych związanym z rakieta,
- $T$  [kG] — naciąg w przewodzie kierowania,
- $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$  [1/s] — składowe prędkości kątowej rakiety w układzie związanym z rakieta,
- $\bar{\omega}_{x_1}, \bar{\omega}_{y_1}, \bar{\omega}_{z_1}$  [1/s] — składowe zmiany prędkości kątowej rakiety,
- $\gamma, \vartheta, \psi$  [rad] — kąt przechylenia, pochylenia i odchylenia rakiety,
- $\gamma_1, \vartheta_1, \psi_1$  [rad] — małe zmiany kąta przechylenia, pochylenia i odchylenia rakiety,
- $V_{x_1}, V_{y_1}, V_{z_1}$  [m/s] — składowe prędkości rakiety w układzie współrzędnych związanym z rakieta,
- $v_x, v_y, v_z$  [m/s] — małe zmiany składowych prędkości rakiety,
- $V_0$  [m/s] — całkowita prędkość lotu ustalonego rakiety,
- $\vartheta_{p_0}, \psi_{p_0}$  [rad] — składowe początkowe kątowego położenia przewodu na wyjściu z rakiety leżące odpowiednio w płaszczyznach symetrii rakiety  $O_{x_1z_1}$  i  $O_{x_1y_1}$ .
- $\varphi_{p_0}$  [rad] — kąt obiegu przewodu w szczelinie na wyjściu z rakiety,
- $\vartheta_r, \psi_r$  [rad] — stałe wartości uwarunkowane kształtem tylnej części kadłuba rakiety, siłą odklejania liny oraz prędkością odwijania,
- $d_s$  [m] — średnica szpuli,
- $d_{sz}$  [m] — średnica szczeliny rozwijania,
- $l_p$  [m] — odległość przyłożenia przewodu do kadłuba od środka masy rakiety,

- $m_s$  [kGs<sup>2</sup>m<sup>-2</sup>] — masa przewodu na jednostkę długości,  
 $\lambda = \xi \pm i\eta$  — wartości własne układu równań różniczkowych,  
 $\xi$  — współczynnik tłumienia,  
 $\eta$  — częstość oscylacji.

## Literatura cytowana w tekście

1. S. ETKIN, *Dynamics of Flight*, New York — London (1959).
2. S. ETKIN, *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley, New York (1972).
3. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, Cz. I i II, PWN, Warszawa (1961).
4. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT Warszawa (1971).
5. R. GUTOWSKI, R. VOGT, *Opis matematyczny kierowanego ruchu rakiety o zmiennej masie z uwzględnieniem oddziaływania rozwijających się przewodów*, PTUiR (1975). Zeszyt 13 Rok V.
6. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, Warszawa PWN (1971).
7. С. А. ГОРБАТЕНКО, Э. М. МАКАТОВ, Ю. Ф. ПОЛУПЦИН, Л. В. ШЕФТЕЛЬ, *Механика полёта*, — Машиностроение, Москва 1969.
8. T. KUŹMICEWICZ, *Dynamika liny odwijającej się z ruchomego obiektu latającego* — *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* 1, 13 (1975).
9. T. KUŹMICEWICZ, *Współczynniki sił przewodu kierowania ppk — pochodne linowe*, PTUiR, Nr 15, (1976).
10. T. KUŹMICEWICZ — *Wpływ przewodu kierowania na stateczność rakiety*. Praca doktorska, Politechnika Warszawska (1976) (nie publikowana).
11. J. MARYNIAK, *Uproszczona analiza stateczności podłużnej szybowca w locie holowanym*. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 1, 5 (1967).
12. J. MARYNIAK, *Stateczność dynamiczna podłużna szybowca w zespole holowniczym*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 3, 5 (1967).
13. J. MARYNIAK, *Uproszczona analiza stateczności bocznej szybowca holowanego na linie*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 1, 7 (1969).
14. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej — Mechanika* nr 32, Warszawa (1975).
15. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA, *Badanie teoretyczne własności dynamicznych lotu obiektów zrzucanych z samolotu*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*. Warszawa (1977).
16. S. MINOVIČ, *Dinamičke jednačino kretanja upravljivog, rotirajućeg osno simertičnog projektila*, *Naucnotehnčki PREGLED Beograd* br. 4 i 5 (1966).
17. S. MINOVIČ, *Komplekzene aerodinamičko prenosne funkcije esosimetrične letelice koja lagano rotira svedene na normalizovan oblik*, *Naucnotehnčki PREGLED, Beograd* br 5 (1970).
18. K. OGATA, *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*, WNT, Warszawa (1974).
19. G. PALJARUCI, J. MARYNIAK, *Uticaј brino leta na ravnotežu i dinamičke karakteristike jedrilice, vucene uzertem od strane teskog svјona*, *Materiały XIII Jugosłowiańskiego Kongresu Mechaniki*, Sarajevo, A4-5 (1975).
20. R. VOGT, *Dynamika naprowadzania raketowych pocisków przeciwpancernych kierowanych przewodowo*. Praca doktorska, Politechnika Warszawska (1971).
21. R. VOGT, *Zasady i właściwości modelowania matematycznego procesów sterowania ruchem rakiet* — PTUiR Rok IV, zeszyt 11 (1974).
22. T. KUŹMICEWICZ, J. MARYNIAK, *Stateczność dynamiczna obiektu latającego odwijającego z pokładu liny*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 1, 17 (1979).

## Резюме

ВЛИЯНИЕ РАЗМАТЫВАНИЯ ТРОСА УПРАВЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫХ  
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РАКЕТЫ НА ДИНАМИЧЕСКУЮ  
УСТОЙЧИВОСТЬ

В работе рассматривается влияние эффектов размотки (напряжения и ракетной тяги) троса управления противотанковой ракеты на её динамическую устойчивость. В работе рассмотрено также влияние диаметра катушки и расположения центра массы ракеты на её устойчивость. Используя метод малых возмущений произведена линеаризация уравнений движения ракеты. Влияние троса учтено путём введения в уравнения движения коэффициентов силы, напряжения и ракетной тяги троса управления.

Решение системы линейных уравнений сведено к вопросу вычисления собственных значений и соответствующих им собственных векторов матрицы. Исследования влияния разматывания троса управления на динамическую устойчивость произведено для противотанковой ракеты класса Бельков-Кобра.

## Summary

INFLUENCE OF CABLE'S UNCOILING AND CERTAIN GEOMETRICAL PARAMETERS  
OF ROCKET ON ITS DYNAMICAL STABILITY

The main purpose of this paper is an analysis of the effect of cable's uncoiling i.e. cable's tension and propulsion on the dynamical stability. In the calculation we have investigated the influence of reel's diameter and position of rocket's gravity center on the stability. Equations of rocket's motion were linearized by the method of small perturbations. The influence of the cable was introduced by taking into account cable's tension and propulsion in the equation of motion. The solution of the linear differential equations is based on the calculation of the eigenvalues and eigenvectors of the state matrix. A numerical example of the investigated problem has been discussed.

WOJSKOWY INSTYTUT TECHNICZNY UZBROJENIA  
I INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 października 1978 roku*



# BIULETYN INFORMACYJNY

## 25 LAT POLSKICH KONFERENCJI MECHANIKI CIAŁA STAŁEGO<sup>(1)</sup>

### 1. Wprowadzenie

Można z przekonaniem wyrazić pogląd, że konferencje naukowe poświęcone mechanice ciała stałego, a odbywające się u nas prawie corocznie od 1953 r. stanowią niezwykle ważny czynnik rozwoju nauk mechanicznych w Polsce wpływający na wzrost świadzeń tych nauk na rzecz społeczeństwa zarówno w sensie ułatwiania tworzenia nowych wartości naukowych jak i wpływania na powstawanie i krzepnięcie kompetentnego środowiska naukowego.

Społeczeństwo nakłada na inżynierów i badaczy z tej dziedziny wiedzy, wiele obowiązków zarówno natury poznawczej jak i praktycznej, a m.in. obowiązek tworzenia lepszych metod projektowania niezawodnych konstrukcji, lepszych metod przetwórstwa materiałów, ujęcia zjawisk mechaniki ośrodków biologicznych. Kurczące się zasoby materiałów, troska o środowisko naturalne i warunki życia następnych pokoleń te obowiązki współcześnie zwiększają.

Mechanika jest istotną dziedziną wiedzy i praktycznej działalności inżynierskiej. Warto na tym miejscu posłużyć się określeniem jej przedmiotu oraz jej związku z działalnością praktyczną, podanym w Uchwale Drugiego Kongresu Nauki Polskiej: „Mechanika jest jedną z podstaw przyrodoznawstwa i stanowi bazę poznawczą dla wszystkich obszarów techniki. Wiąże się ona ściśle z innymi działami nauki: fizyką, chemią, matematyką. Obecnie mechanika wkracza do coraz innych działów wiedzy: do geologii i geofizyki oraz do biologii. Mechanika wpływa na rozwój konstrukcji i technologii w budowie maszyn, metalurgii, budownictwie, górnictwie i rolnictwie. Zadania swe mechanika może wypełniać w oparciu o badania doświadczalne. Stąd pochodzą prawa fenomenologiczne, stanowiące podstawę uogólnień teoretycznych” [1], [2].

To określenie przedmiotu i charakteru mechaniki ułatwia przypomnienie ogólnego schematu jej działań, począwszy od poznawczych a skończywszy na praktycznych. Można powiedzieć, że uczeni wyjawiają prawidłowości istniejące w naturze a inżynierowie tworzą na tej podstawie nowe obiekty. Z tego schematycznego ujęcia przedmiotu i zakresu mechaniki wynika wyraźnie jej dwoisty charakter. Jest on bowiem z jednej strony dziedziną działalności intelektualnej a więc dziedziną kultury umysłowej, z drugiej zaś strony znajduje wyraz w działalności inżynierskiej, jest więc dziedziną kultury materialnej [3], [4].

Mechanika ciała stałego w pierwszym etapie badań określa w sposób obiektywny własności realnych materiałów w warunkach różnych oddziaływań fizycznych. Jej następnym etapem jest synteza mechanicznego zachowania się materiałów, przedstawiana w postaci matematycznych modeli materiałów. Wymagania późniejszych zastosowań inżynierskich narzucają warunek, aby matematyczny model odzwierciedlał rzeczywistość w sposób możliwie najpełniejszy a zarazem prosty. Często ograniczamy się do badania modeli szczegółowych opisujących tylko niektóre prawidłowości.

Z chwilą, gdy znane są własności mechaniczne i zaproponowany został model matematyczny zjawiska następuje opracowanie odpowiednich metod rozwiązywania układów równań opisujących problemy mechaniki. Najczęściej mamy do czynienia z metodami rozwiązywania problemów brzegowych i początkowych gdyż problemy mechaniki prowadzą zwykle do układów równań różniczkowych. Powstają więc np. metody określania przemieszczeń, stateczności, nośności granicznej, czasu zniszczenia przy pełzaniu, niezawodności i innych wielkości.

<sup>(1)</sup> Rozszerzony tekst wystąpienia na otwarciu XX-tej Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego, Kozubnik, wrzesień 1978

Następnym ważnym działem jest dostarczanie rozwiązań odpowiedniej liczby szczegółowych problemów i nagromadzanie w ten sposób wiedzy, która m.in. służy do podniesienia kultury naukowej środowiska i jego kwalifikacji zawodowych. Gdy znane są metody, istnieją rozwiązania i zgromadzone jest dostateczne doświadczenie następuje przygotowanie naukowo uzasadnionych reguł i metod projektowania a w rezultacie norm i wskazówek do projektowania np. konstrukcji w zakresie oceny ich niezawodności i bezpieczeństwa.

Nawet to schematyczne ujęcie dziedziny, metod działania i celów wskazuje na wielorakość problemów mechaniki oraz określa jej prawidłowości. Polskie Konferencje Mechaniki Ciała Stałego odegrały i odgrywają poważną rolę w kształtowaniu naszej mechaniki, wpłynęły na jej rozwój oraz przyczyniły się do międzynarodowego oddziaływania tej dziedziny polskiej kultury.

Dwudziestopięciolecie od chwili pierwszej Konferencji stwarza dobrą okazję do refleksji, a równocześnie stanowi dostatecznie długi okres umożliwiający prześledzenie ewolucji tematyki, rozprzestrzeniania się zainteresowań tą dyscypliną wiedzy w kraju, pojawiania się osobowości twórczych i powstawania szkół naukowych, oraz na wyrobienie sobie poglądu na nierównomierności rozwoju poszczególnych działów mechaniki i poszczególnych ośrodków.

## 2. Historia

Pierwsza konferencja na temat mechaniki ciała stałego zorganizowana została z inicjatywy Witolda Nowackiego i Wacława Olszaka przez Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych w 1953 r. i odbyła się pod przewodnictwem Wacława Olszaka w Karpaczu. Poświęcona ona była teorii sprężystości, teorii plastyczności i reologii. Konferencje przekształciły się w imprezy prawie coroczne, organizowane konsekwentnie przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki, który powstał jesienią 1953.

Kilka pierwszych konferencji miało charakter szkoleniowy. Trwały one po dwa tygodnie i dotyczyły głównie problemów klasycznych tzn. zagadnień teorii sprężystości i mechaniki budowli. Do roku 1969 włącznie wszystkie konferencje organizowane były przez Wacława Olszaka. Informacje o miejscach konferencji, liczbie uczestników krajowych i zagranicznych oraz o liczbie wygłoszonych referatów zawiera Tablica 1. Widać, że od początku uczestniczyli w nich goście zagraniczni. Można też dostrzec, że od dziesięciu lat liczba uczestników i liczba referatów stosunkowo się ustaliły.

Ewolucję tematyki konferencji omówimy oddzielnie, ale tu warto już zaznaczyć, że z biegiem lat i w miarę wzrostu liczby pracowników naukowych uprawiających mechanikę następowało przesunięcie uwagi od zagadnień tradycyjnych teorii sprężystości i teorii plastyczności ku problemom i metodom współczesnej mechaniki ośrodków ciągłych. Miało to nawet odzwierciedlenie w nazwach konferencji, które stały się Konferencjami Mechaniki Ciała Odształcalnych aby w 1969 r. przybrać nazwę Polskich Konferencji Mechaniki Ciała Stałego. Organizowane od tej chwili są w zasadzie jako coroczne imprezy na przemian przez Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych oraz Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych IPPT PAN. Aczkolwiek poświęcone są one całości zagadnień mechaniki ciała stałego, każdoroczna konferencja ma nieco odmienny profil. Profil jest kształtowany głównie przez referaty problemowe. Referaty problemowe przygotowane są przez wybitnych twórców, a często przez światowe autorytety. Liczba referatów problemowych wynosi zwykle od 10 do 15.

Konferencja w 1971, którą organizował Antoni Sawczuk odbyła się w Krościenku nad Dunajcem, miejscu urodzenia w dniu 4 stycznia 1871 r. Maksymiliana Tytusa Hubera. Uczony ten, profesor kolejno Politechnik: Lwowskiej, Warszawskiej i Gdańskiej zasłużył się dla rozwoju rodzimej mechaniki i zyskał uznanie międzynarodowe przez swe osiągnięcia badawcze w teorii plastyczności i w teorii płyt anizotropowych a w badaniach naukowych potrafił łączyć teorię z zastosowaniami, śledząc nurt mechaniki od pelzania przez modelowanie i opracowywanie metod, aż do rozwiązywania zagadnień praktycznych.

Konferencji w 1973 r. w Zakopanem przewodniczył Henryk Zorski, a w jej tematyce zwrócono uwagę na mechanikę ośrodków mikropolarnych, mechanikę ośrodków złożonych i ziarnistych, termodynamikę ośrodków ciągłych, metody numeryczne. Wprowadzono obrady w dwóch sekcjach równoległych.

Konferencję, która odbyła się w 1974 r. w Krynicy organizował Piotr Perzyna a w jej tematyce podkreślono problemy optymalizacji, dynamiki konstrukcji, metod wariacyjnych oraz analizy funkcjonalnej w mechanice ośrodków niesprężystych.



W r. 1975 Henryk Zorski zorganizował kolejną konferencję w Szczyrku. Tym razem problematykę skierowano, przez dobór referatów problemowych, na zagadnienia mechaniki pękania i zniszczenia, termodynamikę ośrodków ciągłych, problematykę losową w mechanice, zagadnienia falowe.

Kolejnej konferencji, która w 1976 r. odbyła się w Wiśle, przewodniczył Zenon Mróz. Tym razem uwaga skupiona została na problematyce mechaniki górotworu, mechaniki doświadczalnej, na tematyce pól

**Tablica 1. Konferencje Mechaniki Ciała Stałego**

Nr	Rok	Miejscowość	Liczba referatów wygłosz.	Liczba uczestników		
				kraj.	zagr.	ogółem
I	1953	Karpacz	33	77	3	80
II	1954	Międzyzdroje	32	84	2	86
III	1955	Karpacz	33	64	2	66
IV	1957	Krynica	46	81	6	87
V	1959	Gdańsk	63	80	14	94
VI	1961	Olsztyn	67	91	10	101
VII	1962	Krynica	71	101	12	113
VIII	1964	Zakopane	90	100	25	125
IX	1965	Augustów	84	99	21	120
X	1966	Kołobrzeg	85	98	22	149
XI	1967	Olszówka	94	123	21	144
XII	1969	Jaszowiec	113	158	27	185
XIII	1970	Jaszowiec	brak danych			
XIV	1971	Krościenko	131	157	47	204
XV	1973	Zakopane	162	194	58	252
XVI	1974	Krynica	114	142	66	208
XVII	1975	Szczyrk	135	165	76	241
XVIII	1976	Wisła	137	152	80	232
XIX	1977	Piaski	110	47	93	140
XX	1978	Kozubnik	141	163	57	220

sprężonych, stateczności, mechanice zniszczenia, metodach stochastycznych mechaniki, zagadnieniach ośrodków złożonych, termomechanice. Tematyka tej konferencji, podobnie jak innych była jednak znacznie szersza, odzwierciedlając zakres zainteresowań polskich mechaników. Na konferencji znany specjalista z zakresu metod doświadczalnych Mechaniki Perykles Theocaris podkreślił, że Polskie Konferencje Mechaniki Ciała Stałego powinny się przerodzić w Konferencje Europejskie, gdyż takimi właściwie są poprzez istotę przedstawianych prac i znaczny udział uczestników zagranicznych.

Konferencję w 1977 r., która odbyła się w Piaskach koło Rucianego, organizował Marek Sokołowski: skupiła ona swe zainteresowania na zagadnieniach mechaniki kruchego zniszczenia oraz na problematyce teorii nielokalnych i statystycznych ujęć mechaniki.

Jubileuszowa dwudziesta konferencja zorganizowana w Kozubniku w 1978 r. niemal dokładnie w dwadzieścia pięć lat po pierwszej skupia uwagę na zagadnieniach termomechaniki i jej związków z przemysłem hutniczym, na matematycznych problemach mechaniki, problematyce pełzania materiałów i konstrukcją, dynamice ośrodków materialnych, mechanice zniszczenia materiałów ciągliwych, optymalizacji. Daje ona okazję do oceny rozwoju mechaniki w Polsce w okresie tego dwudziestopięcioletnia, na zwrócenie uwagi na silne jej podstawy matematyczne i jej umiejętność podejmowania programów badawczych wynikających z potrzeb różnych gałęzi nowoczesnych przemysłu.

### 3. Ewolucja tematyki

Przygotowane na każdą konferencję i wydane streszczenia przedstawionych prac oraz tematyka referatów problemowych umożliwiają analizę ewolucji zainteresowań polskiej mechaniki. Główna linia, którą można wyśledzić w tematyce konferencji, wiedzie od klasycznych zagadnień liniowej sprężystości, włączając zagadnienia teorii płyt i naprężeń cieplnych, poprzez zagadnienia mechaniki nieliniowej takie jak teoria plastycznego płynięcia, reologia i nośność graniczna, następnie poprzez zagadnienia teorii dyslokacji, zagadnienia falowe w sprężystości i niesprężystości, poprzez tematykę sprężeń termo- i elektro-sprężystych, mechanikę ośrodków zorientowanych do problematyki geometrycznie nieliniowej, do mechaniki pęknięcia i zniszczenia, do teorii nielokalnych ośrodka ciągłego i zagadnień stochastycznych w mechanice.

Może najlepiej będzie przedstawić tematykę kilku konferencji aby tę ewolucję zainteresowań zilustrować. Nie będzie można w podobny sposób zilustrować dojrzałości prac i rozwoju „kultury mechanicznej” uczestników, gdyż nie są to rzeczy porównywalne w taki sam sposób. Wybierzemy dla przykładu konferencje, które odbyły się w latach 1957, 1969 i 1978.

Tematyka, która charakteryzuje konferencję krynicką w 1957 r. obejmuje zagadnienia zginania i stateczności płyt sprężystych, ortotropia sprężystą, plastyczność ośrodków niejednorodnych, drgania sprężyste. Wyłonić można dwie główne grupy a mianowicie: zagadnienia sprężystości takie jak ortotropia, naprężenia termiczne i problemy falowe oraz zagadnienia plastyczności obejmujące zarówno podstawy niejednorodności i anizotropii plastycznej jak i problemy nośności granicznej płyt i powłok. Można już więc odróżnić m.in. dwa nurty naszej mechaniki, które w ciągu następnych lat doprowadziły do ujęć monograficznych i utworzenia zespołów i ośrodków naukowych.

W roku 1969 w czasie konferencji w Jaszowcu tematyka obejmowała np. zjawiska dynamiczne w ciałach stałych, statystyczną teorię dyslokacji, mechanikę ośrodków polarnych, nośność graniczną elementów o złożonych kształtach, optymalną niejednorodność, zagadnienia plastyczności konstrukcji takie jak przystosowanie i geometryczna nieliniowość, wzmocnienie plastyczne np. gęstościowe. Daje się zaobserwować większy udział prac doświadczalnych.

Konferencja w Wiśle w 1976 r. charakteryzuje się tematyką dotyczącą zniszczenia, nieliniowych modeli materiałów, dynamicznych problemów ośrodków i konstrukcji, termomechaniki. Można więc stwierdzić rozwinięcie się zainteresowań i przesuwanie się uwagi na zagadnienia, którymi interesuje się współczesna mechanika w świecie. Wiele z zagadnień stanowiących dawniej przedmiot uwagi zostało już ujęte w monografie opracowane nawet przez tych twórców, którzy na pierwszych konferencjach naukowych debiutowali ze swoją tematyką i metodyką badań.

Wybrano przykładowo trzy konferencje odległe o spore okresy czasu również i z tego powodu, że na ich przykładzie zilustrujemy później rozwijanie się i rozprzestrzenianie się mechaniki. Z analizy tematyki

i streszczeń wszystkich konferencji można też wysnuć wniosek o zakresie i metodzie a właściwie o rozwoju sposobu ujmowania zagadnień mechaniki. W pierwszym okresie konferencje charakteryzowały się przedstawianiem zagadnień opracowywanych na ogół znanymi lub ulepszanymi metodami. Daje się zaobserwować następnie opracowywanie metod rozwiązywania zagadnień odnoszących się do znanych modeli matematycznych. Kolejno zaczynają się pojawiać opracowania przedstawiające koncepcje nowych modeli np. nielokalnych, wzmocnieniowych czy odnośnych sprzężeń. Wreszcie zaczynają pojawiać się prace odnoszące się do obiektywnego określania własności i charakteru materiałów, poznawania prawidłowości reagowania materiału na oddziaływania mechaniczne i inne oddziaływania fizyczne. Można więc wysnuć wniosek, że mechanika w Polsce rozwijała się od szczególnych zadań i metod do uogólnień. Jest to zrozumiałe przez fakt, że odpowiednio zmieniały się kwalifikacje badaczy, poszerzał się zakres ich zainteresowań oraz pogłębiał sposób ujmowania zagadnień w miarę dojrzewania środowiska i zwiększania sprawności w oparowaniu działów matematyki. Widać więc jak konferencje przez kryteria, krytykę i atmosferę wpłynęły na ukształtowanie się środowiska naukowego, które pierwotnie w powojennym okresie było szczupłe i miało jedynie niewielką grupę doświadczonych badaczy.

O tym jak na przestrzeni lat wzrosło nasze środowisko naukowe i jak prace zyskały oddźwięk w zagranicznych ośrodkach świadczy wiele faktów. Tu jednak zatrzymamy się na jednej obiektywnej wiadomości odnoszącej się do liczby polskich czasopism które są recenzowane w Applied Mechanics Reviews. Opinie tego czasopisma przeglądowego odnoszą się do prac z mechaniki i jej zastosowań. W roku 1953 w Applied Mechanics Reviews odnotowaliśmy tylko 7 czasopism, z których prace były recenzowane lub wzmiankowane, a mianowicie Archiwum Mechaniki Stosowanej, Inżynieria i Budownictwo, Przegląd Mechaniczny, Przegląd Techniczny, Technika Lotnicza, Czasopismo Techniczne i Bulletin International de l'Academie Polonaise des Sciences et des Lettres. W roku 1976 takich recenzowanych czasopism było już 31. Świadczy to też o roli jaką Polska Akademia Nauk spełniła w tym zakresie powołując do życia szereg nowych czasopism obejmujących nie tylko mechanikę ale i wiele dziedzin jej pokrewnych. Warto może nadmienić, że 22 z tych wydawnictw jest czasopismami lub wydawnictwami seryjnymi PAN.

W pewnym sensie również o dojrzewaniu polskiej mechaniki może świadczyć wyciągnięte na podstawie analizy Applied Mechanics Reviews stwierdzenie, że w 1953 r. recenzowanych było ok. 30 prac polskich podczas gdy w roczniku 1976 można już znaleźć ok. 200 recenzji lub wzmianek.

Śledząc tematykę Polskich Konferencji Mechaniki Ciała Stałego i posługując się pewnymi reperami można więc w sposób dość obiektywny ocenić rozwój rodzimej mechaniki. Do interesujących spostrzeżeń można też dojść analizując bliżej uczestnictwo w konferencjach.

#### 4. Uczestnictwo w konferencjach

Ogólna liczba uczestników oraz liczba referatów podane były w Tablicy I. W pierwszym okresie z uwagi na szkoleniowy charakter konferencji i niewielką liczbę pracowników zajmujących się mechaniką w sposób twórczy liczba uczestników około 2 do 2,5 krotnie przekraczała liczbę przedstawianych prac. Świadczy to o dużej liczbie uczestników biernych. Ostatnimi laty ten stosunek wynosi około 1,5.

Innym wnioskiem z analizy danych liczbowych jest stwierdzenie, że w ostatnich kilku latach stosunek uczestników krajowych do zagranicznych jest nieco większy i waha się w granicach od 2 do 3. Świadczy to o tym, że konferencje przyciągają wielu mechaników z innych krajów i że konferencje mają międzynarodowy charakter.

Warto nadmienić, że uczestnikami konferencji w ciągu tego dwudziestopięcioletnia było wielu wybitnych mechaników światowych. Dla ilustracji i nie zmiernie do pełnego przedstawienia tego uczestnictwa podamy tytułem przykładu, że w konferencjach brali udział (niektórzy parokrotnie) S. A. Ambarcumian, N. K. Arutiunian, J. Babuska, J. F. Bell, T. Belytschko, B. A. Boley, J. D. Campbell, J. Carlsson, N. Cristescu, A. C. Eringen, G. Fichera, A. M. Freudental, C. Gavarini, W. Goldsmith, M. Gurtin, A. A. Iliuszyn, L. M. Kaczanow, S. Kaliszky, W. T. Koiter, E. Kröner, Th. Lehmann, W. A. Łomakin, A. I. Łurie, G. Maier, T. Manacorda, J. Mandel, Ch. Massonnet, J. Miklowitz, S. Murakami, B. Nayrolles, A. Phillips, H. L. D. Pugh, Yu. N. Rabotnov, K. A. Reckling, J. Rice, G. I. N. Rozvany, M. A. Save, G. C. Sih, I. N. Sneddon, V. V. Sokolovskii, E. Sternberg, P. S. Symonds, P. S. Theocaris, T. Tokuoka,

R. A. Toupin, Ya. S. Ufland, M. Williams, Y. Yamada, H. Ziegler, O. C. Zienkiewicz oraz wielu innych. Obecność, referaty i dyskusje z wybitnymi uczonymi miały niewątpliwy wpływ na ukształtowanie się środowiska naukowego mechaniki oraz upowszechnianie wyników naszych dociekań.

Zagraniczni uczestnicy konferencji pochodzą z ośrodków naukowych wielu krajów. Generalnie biorąc w każdej imprezie biorą udział wybitni uczeni i młodszy pracownicy naukowcy z Francji, Stanów Zjednoczonych Ameryki Północnej, Związku Radzieckiego i Wielkiej Brytanii. Dla przykładu wymienimy, że w XX-tej konferencji brali udział przedstawiciele 18 krajów, a mianowicie poza wymienionymi uprzednio: Arabii Saudyjskiej, Belgii, Brazylii, Bułgarii, Czechosłowacji, Finlandii, Jugosławii, Japonii, NRD, RFN, Rumunii, Szwecji, Włoch i Węgier. Podobna sytuacja ma miejsce na wszystkich konferencjach ostatnich kilkunastu lat.

Ośrodki, z których pochodzą zagraniczni uczestnicy konferencji to w głównej mierze poważne centra naukowe jak Uniwersytet Moskiewski, Syberyjski Oddział Akademii Nauk SRR, Uniwersytet Leningradzki, Uniwersytet Browna, Kalifornijski Instytut Technologiczny, Uniwersytet Northwestern, Federalny Instytut Technologiczny w Zurychu, Uniwersytet w Cambridge, Oxford, Glasgow, Instytut Politechniczny w Paryżu, Uniwersytety w Mediolanie i Rzymie, Monachium, Karlsruhe, Montrealu, Królewski Instytut Technologiczny w Sztokholmie, wiele instytutów Akademii Nauk Krajów Socjalistycznych oraz liczne inne ośrodki uniwersyteckie i badawcze.

O międzynarodowym charakterze konferencji oraz o współpracy mechaników polskich z zagranicznymi kolegami świadczy przedstawianie wyników wspólnych badań. O ile przedtem wspólne prace przedstawiane były sporadycznie o tyle od konferencji odbytej w Krościenku w 1971 r. przeciętnie przedstawiano po trzy takie referaty, a w przypadku konferencji w Wiśle w 1976 r. nawet sześć.

Ważne są wnioski odnoszące się do uczestnictwa polskiego. Ogólną cechą ostatniego dziesięciolecia jest, że uczestnicy z ośrodków uniwersyteckich i przemysłowych spoza IPPT PAN stanowią ok. 2/3 liczby uczestników polskich. W ostatnich kilku latach liczba uczestników z ośrodków uniwersyteckich nieco się zmniejsza jak się okazuje z przyczyn administracyjnych i, wydaje się, wskutek zastosowania przez niektóre ośrodki błędnych koncepcji rozwoju nauk.

Konferencje pozwalają na wyciągnięcie istotnego wniosku odnośnie do nierównomierności rozwoju mechaniki w Polsce, a więc co do nierównomierności zainteresowania się ośrodków politechnicznych problematyką naukową mechaniki. Wiele np. politechnik i specjalistycznych szkół technicznych, gdzie problemy mechaniki z konieczności muszą stanowić istotny element w wykształceniu współczesnego inżyniera np. specjalności budowlanych, mechanicznych, górniczych, nie utrzymują kontaktu z nauką krajową i światową, której osiągnięcia i problemy dyskutowane są w czasie Polskich Konferencji Mechaniki Ciała Stałego. Dla zilustrowania tego wniosku posłużymy się Tablicą 2. Przedstawione w niej liczby odnoszą się do referatów zgłoszonych przez pracowników różnych ośrodków akademickich, w których działają szkoły techniczne.

Tablica 2 wykazuje, że badania naukowe z zakresu mechaniki w Polsce skupiają się w uczelniach i instytutach warszawskich. Drugim poważnym ośrodkiem nauk mechanicznych jest Kraków. Można też stwierdzić, że takie ośrodki związane z przemysłem jak śląski czy wrocławski są niezwykle słabo reprezentowane w manifestacjach naukowych z zakresu mechaniki. Wiele uczelni technicznych nie jest prawie reprezentowanych przez okres dwudziestolecia w tych ważnych imprezach naukowych. Niewątpliwie odzwierciedla to stan badań podstawowych, a może i atmosferę w stosunku do tych badań. Jest jednak rzeczą oczywistą, że właściwa służba nowoczesnemu przemysłowi może być dokonywana jedynie nowoczesnymi środkami i przy wykorzystaniu współczesnej wiedzy. Jestem przekonany, że sytuacja, którą zilustrowaliśmy tu na przykładzie szczegółowego, ale niezwykle ważnego dla gospodarki działu jakim jest mechanika, zostanie odpowiednio przeanalizowana przez zainteresowane uczelnie. Tę sytuację o nierównomierności zainteresowania rozwojem i zastosowaniami mechaniki w kraju może również zilustrować myśl, odnosząca się przykładowo do XVII-tej konferencji, która odbyła się w 1976 r. w Wiśle. Przedstawiony tam jest procentowy udział poszczególnych ośrodków krajowych w pracach zgłoszonych do przedstawiania na tej konferencji. Przykład ten odzwierciedla dość dobrze istniejącą sytuację gdyż dane z Tablicy 2 wykazują konsekwentnie tę samą tendencję i umożliwiają wykonanie odpowiednich graficznych przedstawień dla innych konferencji.

Na podstawie analizy uczestnictwa w omawianej sekwencji imprez naukowych można jeszcze wyciągnąć wniosek odnośnie do osobowości twórczych, które kształtowały i kontynuują rozwój mechaniki w Pol-

Tablica 2. Liczba referatów z ośrodków akademickich

Ośrodek	1957	1959	1961	1962	1964	1965	1966	1967	1969	1970	1971	1973	1974	1975	1976
	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII
Częstochowa															1
Gdańsk	2	1		3				1	1		3	3		2	2
Gliwice			1	1	1							2	3		1
Kielce											3	2	7	6	3
Kraków	10	7	10	11	11	13	15	12	14	20	15	21	16	11	15
Lublin									1						
Łódź	1	1	1	1	1	7	5	4	5	3	4	1	1	2	4
Opole															1
Poznań						1	2	1	3	4	1	1		5	4
Rzeszów													1		1
Warszawa	26	40	46	39	52	49	49	56	66	70	81	87	51	58	63
Wrocław	1	3			2	1	2	5	2	1	1	2	1	2	
Zgłoszone Prace pol. ogółem	40	50	58	55	67	63	73	79	92	98	108	119	80	86	95
Ogólna licz. referatów zgłoszonych	46	63	67	61	90	85	85	96	113	149	160	200	141	149	170

sce. Konsekwentnie na wielu konferencjach, głównie w pierwszym piętnastoleciu przedstawiali wyniki swych badań Witold Nowacki i Wacław Olszak. Na tych konferencjach przedstawiane były koncepcje odnoszące się do termosprężystości dynamicznej, mechaniki ośrodków mikropolarnych, mechaniki ujmującej wpływy sprzężeń, niejednorodności i anizotropii plastycznej.

W pewnym okresie na konferencjach przedstawiane były przez Sylwestra Kaliskiego zagadnienia falowe ośrodków sprężystych i niesprężystych oraz sprzężeń magneto-mechanicznych. Nieznacznie później aktywny udział rozumiany tu jako przedstawianie wyników własnych badań na co najmniej kilkunastu konferencjach, czasem po dwie czy nawet trzy prace niekiedy wykonywane we współpracy z młodszymi kolegami należy np. do Zenona Mroza, Piotra Perzyny, Jana Rychlewskiego, Antoniego Sawczuka, Wojciecha Szczepińskiego, Gwidona Szefera, Czesława Woźniaka, Henryka Zorskiego, Michała Życzkowskiego.

Można wyśledzić, jak pojawiają się następnie nazwiska aktywnych uczestników np. Andrzej Drescher, Maria Duszek, Jan Andrzej König, Janusz Klepaczek, Bogdan Raniecki, Kazimierz Sobczyk, Zenon Waszczyszyn, Tomasz Wierzbicki, Krzysztof Wilmański. Ostatnich kilka lat pozwala wyodrębnić czynny udział z oryginalną tematyką i oryginalnymi wynikami np. Andrzeja Dragona, Tomasza Hueckla, Michała Kleibera, Witolda Kosińskiego, Henryka Stolarskiego — jeśli ograniczyć się do tematyki i metodologii bardziej mi znanych.

Obserwując ewolucje tematyki w ogóle może warto również zwrócić uwagę na jeszcze jeden aspekt odnoszący się do ewolucji tematyki poszczególnych twórców. Wyraźnie ujawnia się tu prawidłowość, że nie można przez całe życie pozostawać w jednym temacie badawczym. W imię rozwoju aparatu naukowego, gromadzenia wyników szczegółowych następuje ujmowanie osiągnięć w monografie i przechodzenie do nieco innej tematyki lub ogólniejszego potraktowania zagadnień opracowywanych uprzednio.

Kontynuacja i rozwój polskiej mechaniki, pewne nierównomierności geograficzne jej twórczego rozwijania, pojawianie się nowych osobowości twórczych może więc być w pewien sposób ilościowo ujęte na podstawie tematyki i uczestnictwa w Polskich Konferencjach Mechaniki Ciała Stałego.

## 5. Wnioski

Można stwierdzić, że Polskie Konferencje Mechaniki Ciała Stałego odegrały, dzięki m.in. ich konsekwencji i regularności, bardzo poważną rolę w rozwoju i okrzepnięciu naszej mechaniki. O ile inne i potrzebne konferencje specjalistyczne, imprezy organizowane przez Komitet Mechaniki lub Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, inne imprezy np. dwustronne konferencje mechaników polskich, radzieckich, francuskich, włoskich, szwedzkich czy niemieckich, konferencje Euromechu czy innych organizacji międzynarodowych, odbywające się w Polsce Sympozja Międzynarodowej Unii Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej IUTAM mają istotne znaczenie dla powstawania środowiska naukowego, to w tym procesie tworzenia tego środowiska Konferencje odgrywają znaczną rolę właśnie przez systematyczność. Systematyczność nie oznacza skostnienia. Tematyka każdej konferencji wnosi nowe elementy, zarówno poznawcze jak i metodologiczne. Osobowość zespołu organizującego poszczególne konferencje ma duży wpływ na zaakcentowanie niektórych działów, na ukazywanie nowych perspektyw. Konferencje są bardzo żywe i po dwudziestu pięciu latach można ocenić jak wpływały one na nasze życie naukowe.

W pierwszym rzędzie widać jak w tematyce konferencji odbijała się aktualna twórczość mechaników i można na podstawie tych imprez prześledzić ewolucję i osiągnięcia z tej dziedziny wiedzy. Na tych konferencjach przedstawiają swe koncepcje ciągle Witold Nowacki i Wacław Olszak. Śledząc programy i wspominając osobiste przeżycia warto podkreślić, że na tych spotkaniach wszyscy przedstawialiśmy i przedstawiamy wyniki naszych dociekań i nasze koncepcje. Dla przykładu i ograniczając się do tematyki bliższej moim osobistym zainteresowaniom i kompetencjom mogę przytoczyć takie fakty jak to, że na tych zebraniach przedstawiane zostawały najpierw, nim uzyskały oddźwięk międzynarodowy, propozycje Zenona Mroza odnoszące się do opisu zjawisk wzmocnienia plastycznego, cyklicznej plastyczności czy optymalizacji, teoria równań konstytutywnych Jana Rychlewskiego, koncepcje Piotra Perzyny na temat równań lepko-plastyczności i termomechaniki oraz opracowania Wojciecha Szczepińskiego traktujące o prawach odkształcenia plastycznego i o metodach teorii plastyczności w zastosowaniu do projektowania elementów

konstrukcji, ujęcia niejednorodności plastycznej, nasze prace o nośności granicznej konstrukcji i mechanice konstrukcji plastycznych.

Na tych konferencjach generacja naszych uczniów i współpracowników demonstruje żywotność polskiej mechaniki. Znowu ograniczając się do bliższej mi tematyki podam kilka przykładów, które jak i w poprzednim przypadku mają charakter osobisty a nie ogólny ale nawet i w takim przypadku warto przykłady podawać, gdyż nadaje to ocenie w pewnym sensie wymiar odpowiedzialności za jej dokonywanie. Tak więc na tych konferencjach Jan Andrzej König przedstawiał i rozwijał np. swoje koncepcje i ujęcia teorii przystosowania konstrukcji sprężysto-plastycznych, Maria Duszek omawiała mechanikę silnie odkształcalnych konstrukcji plastycznych, Bogdan Raniecki swe koncepcje i ujęcia na temat sprężonej termoplastyczności i praktycznego zastosowania jej przewidywań do analizy procesów hartowania metali, z kolei Michał Kleiber przedstawiał swoje ujęcie mechaniki silnie odkształcalnych konstrukcji sprężysto-plastycznych i sprężysto-lepkoplastycznych podając proponowane metody numerycznego rozwiązywania takich nieliniowych zadań i ukazując wyniki uzyskane przy zastosowaniu proponowanego ujęcia. Zagadnienia doświadczalne z zakresu dynamiki materiałów niesprężystych i oryginalne propozycje i realizacje w zakresie aparatury na tych konferencjach omawiał Janusz Klepaczeko.

Nawet ta niepełna i bardzo osobista w sensie doboru tematyki ocena pozwala przekonać się o tej ważnej roli jaką spełniają Konferencje dla formowania się i rozwoju indywidualności twórczych. Każde kilka kolejnych Konferencji pozwala dostrzec wyłaniającą się nową tematykę i oryginalne ujmowanie zjawisk mechaniki przez pojawiające się osobowości twórcze.

Niewątpliwą zasługą tych dorocznych imprez jest stworzenie klimatu dla rzetelności i pracowitości, które muszą towarzyszyć uzdolnieniom, jeśli chce się osiągnąć indywidualną pozycję naukową opartą na własnych osiągnięciach naukowych.

Oprócz spostrzeżeń odnoszących się do rozwoju i osiągnięć naszej mechaniki Polskie Konferencje Mechaniki Ciała Stałego pozwalają na szereg wniosków na temat jej słabości. W pierwszym rzędzie, jak to już podkreślaliśmy wcześniej, wyraźnie wynika z tych spotkań, że współczesna mechanika w Polsce nie rozwija się równomiernie. Odpowiedzialność za ten stan rzeczy w dużej mierze ponoszą szkoły wyższe utożsamiając, jak mi się wydaje, zadania szkoły w zakresie mechaniki z uprawianiem działalności rutynowej na potrzeby gospodarki.

Można też, analizując programy Konferencji, wyciągnąć wniosek o nierównomierności rozwoju różnych działów mechaniki co w szczególności dotyczy współczesnej mechaniki doświadczalnej. Zagadnienia doświadczalne i nierutynowe badania znajdują jeszcze niedostateczne odbicie w programach Konferencji, co z kolei jest odbiciem aktualnej rzeczywistości. Nie ujawnia się mechanika obiektów biologicznych, słabe wydają się być związki mechaników i metalurgów, słabo ujawnia się mechanika przetwórstwa materiałów.

Wyciągając ogólny wniosek z analizy Konferencji Mechaniki z okazji jubileuszowego, dwudziestego spotkania następującego w ćwierć wieku od pierwszego spotkania można stwierdzić, że odzwierciedlają one dość dobrze rozwój i aktualny stan polskiej mechaniki, jej osiągnięcia i słabości, pozwalają prześledzić rozwój indywidualności twórczych. Umożliwiają ocenę dojrzałości środowiska naukowego jego możliwości rozwijania tej dyscypliny nauki, a zarazem świadczą o potencjale naukowym umożliwiającym dokonywanie rzetelnych świadczeń dla gospodarki. Z uwagi na swój dwoisty charakter mechanika jest nauką wyprzedzającą a zarazem wspomagającą technologie i jej przemiany są ściśle związane z rozwojem technologii. Praktycystyczne podejście a czasami nawet mająca miejsce demagogiczna czy koniunkturalna interpretacja działania i celów mechaniki, nieuchronnie prowadzi do szkód. Warto pamiętać że wewnętrzna rola współdziałania nauki z inżynierią jest taka, iż w miarę jak poszczególne działy mechaniki rozwijają się i Krzepną wchodzi one w skład warsztatu inżyniera. Te procesy mają swój wewnętrzny czas, swoje autonomię czne prawa, których znajomość jest niezbędna w programowaniu i wykorzystywaniu osiągnięć naukowych w gospodarce.

Tematyka, przebieg i wyniki Polskich Konferencji Mechaniki Ciała Stałego świadczą o tym, że spełniają one bardzo ważną rolę w naszym życiu naukowym i wpływają na przenikanie metod naukowych do działalności praktycznej, gdyż osiągnięcia teoretyczne i związane z tym dojrzałość środowiska naukowego powodują, że mechanicy polscy podejmują w odpowiedzialny sposób ważne społecznie programy badawcze, gdyż nowoczesne technologie wymagają współczesnej mechaniki.

Podziękowanie: Mgr inż. Tomasz Lekszycki okazał mi dużą pomoc w opracowywaniu części ilościowej tej analizy i oceny.

#### Literatura cytowana w tekście

1. *Nauka w służbie Narodu, Uchwała II Kongresu Nauki Polskiej*, Warszawa (1973) s. 18.
2. J. RYCHLEWSKI, Referat syntetyczny Sekcji Mechaniki, II Kongres Nauki Polskiej t. 2, cz. II 595—624, PWN, Warszawa 1975.
3. A. SAWCZUK, *O roli mechaniki w technice*, Nauka Polska Nr 11—12, 1977, 51—54.
4. A. SAWCZUK, W. K. NOWACKI, *Nauki mechaniczne w działalności Polskiej Akademii Nauk*, Nauka Polska, Nr 6, 1978, 37—49.
5. A. KRÓLIKOWSKA, *Analiza działalności wydawniczej konferencji naukowych i szkoleniowych w Polsce w zakresie mechaniki ciała stałego*, Materiał przygotowany na II Kongres Nauki Polskiej, Warszawa 1972.
6. Streszczenia prac i programy konferencji (Archiwum ZMOC).

*Antoni Sawczuk*

### DZIAŁALNOŚĆ KOMITETU MECHANIKI PAN I MECHANIKA W POLSCE PO DRUGIM NARODOWYM KONGRESIE NAUKI

#### 1. Rola Komitetu poświęconego naukom mechanicznym

1.1. Komitet poświęcony naukom mechanicznym działa w Polskiej Akademii Nauk od 1960 r. Został on powołany z inicjatywy WITOLDA NOWACKIEGO, a pierwszym jego przewodniczącym był WACŁAW OLSZAK. Obecnie pod nazwą Komitet Mechaniki jest on jednym z 17 Komitetów podległych Wydziałowi Nauk Technicznych. Przedmiotem zainteresowania Komitetu jest mechanika ciała stałego oraz mechanika cieczy i gazów, zarówno w ich aspekcie poznawczym jak i ich zastosowań w naukach technicznych.

1.2 W pierwszym okresie działania Komitet skupiał swe zainteresowania na zaznajomieniu się ze stanem i kierunkami rozwoju nauki światowej w dziedzinie mechaniki oraz dyscyplin pokrewnych, zwłaszcza w dyscyplinach technicznych, z myślą o właściwym ukierunkowaniu badań z zakresu mechaniki w Polsce i zastosowaniu uzyskanych wyników naukowych w gospodarce. Obecnie główne działania Komitetu mają na celu rozwój badań podstawowych, zarówno teoretycznych, jak i doświadczalnych; opracowywanie modeli matematycznych materiałów i procesów mechanicznych; opracowywanie metod analitycznych, doświadczalnych i numerycznych; rozwiązywanie równań mechaniki i równań ujmujących sprzężenia z innymi polami fizycznymi; opracowywanie ogólnych metod i technik rozwiązywania problemów mechaniki wspólnych dla wielu działów inżynierii.

W obecnej kadencji władz Akademii Komitet liczy 63 członków, w tym 20 członków Polskiej Akademii Nauk. Od 1972 i w kadencji 1978—81 przewodniczącym Komitetu Mechaniki jest ANTONI SAWCZUK, natomiast WŁADYSŁAW FISZDON i WOJCIECH SZCZEPIŃSKI są zastępcami przewodniczącego. Honorowym przewodniczącym wybrany został WACŁAW OLSZAK. Obowiązki Sekretarza naukowego pełni WOJCIECH NOWACKI. W pracach sekcji i zespołów Komitetu bierze udział około 160 osób ze wszystkich ośrodków uniwersyteckich kraju oraz z wielu instytutów naukowych i przemysłowych. Struktura Komitetu ulegała zmianie w poszczególnych okresach, stosownie do skupienia uwagi na niektórych szczególnych zagadnieniach mechaniki i jej rozwoju. Obecnie w Komitecie działają następujące Sekcje: Podstaw Mechaniki, której przewodniczy HENRYK ZORSKI, Mechaniki Cieczy i Gazów, pod przewodnictwem WŁODZIMIERZA PROSNAKA, Mechaniki Ciała Stałego, którą kieruje PIOTR PERZYNA oraz MECHANIKI TEORETYCZNEJ, której przewodniczy ROMAN GUTOWSKI. Ponadto działają następujące Zespoły: Mechanik



Doświadczalnej Ciała Stałego, któremu przewodzi JACEK STUPNICKI, Mechaniki Zniszczenia Materiałów pod kierunkiem STANISŁAWA KOCAŃDY oraz Nauczania Mechaniki, którym kieruje GWIDON SZEFER.

1.3. Wiele istotnych działań mających na celu zapewnienia efektywnego rozwoju mechaniki w Polsce, stosownie do możliwości i potrzeb kraju jest prowadzonych przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN. Należą do nich takie przedsięwzięcia jak organizacja ogólnopolskich konferencji naukowych na temat mechaniki stosowanej, wydanie szeregu czasopism naukowych na wysokim poziomie oraz wydawanie monografii — w serii „Biblioteka Mechaniki Stosowanej”.

1.4. Uwagę rozwojowi mechaniki i ożywieniu życia naukowego w całym kraju poświęca Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Do takich działań należą lokalne zebrania naukowe w ośrodkach uniwersyteckich, sympozja specjalistyczne, konkursy na prace z zakresu mechaniki oraz wydawnictwa.

1.5. Komitet Mechaniki skupia swą uwagę na zagadnieniach o nieco odmiennym i o raczej ogólniejszym charakterze, mianowicie na sprawach takich jak: np. opracowywanie ekspertyz o stanie badań i tendencjach rozwojowych w nauce światowej oraz opracowywanie programów rozwoju poszczególnych dziedzin mechaniki w kraju i wykorzystaniu jej osiągnięć w działalności gospodarczej, inicjowanie odpowiednich przedsięwzięć wydawniczych mających na celu ożywienie działalności naukowej w niektórych dziedzinach: organizowanie specjalistycznych konferencji międzynarodowych o znaczeniu dla rozwoju odpowiednich badań w Polsce: organizowanie w porozumieniu z Biurem Kształcenia Kadr PAN konferencji szkoleniowych; inicjowanie i przeprowadzenie konferencji dwustronnych z mechanikami z innych krajów; opiniowanie programów nauczania mechaniki w uniwersytetach i w wyższych szkołach technicznych z myślą o racjonalizacji treści wykładów i szybkim wprowadzeniu do programów nowych osiągnięć mechaniki zarówno z zakresu ujęć teoretycznych jak i nowoczesnych metod analitycznych oraz numerycznych. Komitet współdziała również z międzynarodowymi organizacjami o pokrewnym charakterze, a w szczególności z Międzynarodową Unią Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (IUTAM).

1.6. Wydaje się celowe przedstawienie pewnej syntezy działań i dokonań w zakresie organizacji życia naukowego w dziedzinie mechaniki i ocena tych działań ze stanowiska postanowień Drugiego Kongresu Nauki Polskiej który określił cele m.in. dla nauk podstawowych z uwagi na potrzeby rozwoju kultury i gospodarki. Uwaga skupiona zostanie głównie na działaniach Komitetu Mechaniki a to z tytułu jego obowiązków statutowych i odpowiedzialności względem środowiska naukowego.

## 2. Postanowienia Drugiego Kongresu Nauki Polskiej

2.1. W trosce o rozwój kultury narodowej i mając na uwadze potrzeby naszej gospodarki uchwały Drugiego Kongresu Nauki Polskiej podkreślały potrzebę rozwijania w Polsce takich dziedzin jak a) mechanika pól naprężeń i odkształceń w ciałach stałych, b) teoria materiałów, rozumiana jako podstawy inżynierii własności mechanicznych, c) mechanika punktów i brył sztywnych, d) mechanika cieczy i gazów, e) mechanika mechanizmów i konstrukcji ruchomych, f) mechanika przetwórstwa materiałów, g) sprzężenia pól mechanicznych i niemechanicznych w ciałach stałych, h) mechanika górotworu i gruntów, i) mechanika obiektów biologicznych.

2.2. W dyskusjach poprzedzających Drugi Kongres Nauki i w czasie Kongresu zwracano uwagę na szereg niedociągnięć w rozwoju niektórych dziedzin i kierunków mechaniki. Za najbardziej niepokojące zjawiska uznano m.in.

a) nierównomierność rozwoju poszczególnych działów mechaniki i opóźnienia w opracowywaniu i zastosowaniu metod umożliwiających wykorzystanie osiągnięć współczesnej mechaniki w projektowaniu i wykonywaniu materiałów, maszyn, urządzeń i budowli.

b) niedostateczne wyposażenie laboratoryjne i wiążące się z tym trudności rozwoju badań doświadczalnych mechaniki, a również przewaga badań rutynowych.

c) niedostateczny poziom badań w niektórych ośrodkach uczelnianych i resortowych, wybór niewłaściwej lub przestarzałej tematyki, co wpływa na kształtowanie poziomu naukowego młodej kadry i na dojrzałość wyników.

2.3. Można stwierdzić, że od chwili Kongresu nastąpiły pewne korzystne zmiany i ożywienie w wielu dziedzinach mechaniki i w zakresie wykorzystania potencjału naszej mechaniki w gospodarce. Powstały odpowiednie ogólnopolskie programy badawcze zmierzające do skoncentrowania wysiłku na określonych celach z zakresu rozwoju mechaniki i przenikania jej osiągnięć do praktyki. W rezultacie ustaleń Kongresu utworzono w Komitecie Mechaniki nowe sekcje oraz zespoły o wyraźnie sprecyzowanych celach działania. Rozwijały się stosownie do wewnętrznej dynamiki dyscyplin, obecności osobowości twórczych oraz podjętych postanowień badania w zakresie mechaniki punktów i brył sztywnych, w zakresie mechaniki cieczy i gazów oraz mechaniki ciała stałego. Nastąpił rozwój metod numerycznych mechaniki i ukształtowały się początki własnych systemów obliczeń wytrzymałościowych. Rozwinęły się metody doświadczalne w mechanice ciała stałego, aczkolwiek narastają trudności aparatury pomiarowej.

Polska ma poważny potencjał naukowy w dziedzinie mechaniki. Istnieją szkoły naukowe i indywidualności twórcze wzbogacające kulturę naukową i techniczną oraz znajdujące uznanie międzynarodowe.

### 3. Mechanika teoretyczna

3.1. Od kilku lat obserwujemy u nas ożywienie zainteresowania problematyką naukową mechaniki teoretycznej. Ożywienie to nastąpiło w dużej mierze z inicjatywy Komitetu Mechaniki PAN przywiązującego dużą wagę do prawidłowego ukształtowania i rozwoju tej ważnej dla działalności naukowej i inżynierskiej dyscypliny.

Działaniami mającymi na celu właściwy rozwój mechaniki teoretycznej zajmuje się Sekcja Mechaniki Teoretycznej, utworzona w 1972 r. Skupia ona czynnych pracowników naukowych z równych ośrodków badawczych i jednoczy środowisko naukowe w zakresie mechaniki teoretycznej. Podstawowym jej zadaniem jest inspiracja twórczości naukowej w ośrodkach macierzystych poszczególnych członków sekcji.

Jako główny cel pracy przyjęto rozwój w kraju takich kierunków mechaniki teoretycznej jak mechanika analityczna, stateczność i stabilizacja ruchu, teoria drgań nieliniowych, modyfikacja i synteza oraz ruch programowany układów, metody stochastyczne w mechanice teoretycznej.

3.2. Dorobek krajowy z zakresu mechaniki teoretycznej jest skromny w porównaniu z osiągnięciami i poziomem światowym. W nawiązaniu do postanowień Drugiego Kongresu Nauki Polskiej okresowo skupiono uwagę na mechanice punktów i brył sztywnych, głównie poprzez obmyślanie programu i charakteru konferencji szkoleniowych.

Zorganizowano kilka konferencji szkoleniowych z mechaniki analitycznej, teorii stateczności i stabilizacji ruchu i teorii drgań nieliniowych. Można już odnotować pierwsze efekty tej działalności. Wielu z uczestników tych konferencji wykorzystuje poznane metody i idee w swych naukowych pracach m.in. w pracach doktorskich i habilitacyjnych oraz w referatach wygłaszanych na krajowych i międzynarodowych konferencjach. Odnosi się to zarówno do pracowników zatrudnionych w placówkach naukowo-badawczych jak i do pracowników z zaplecza naukowo-technicznego. Zorganizowane przez Sekcję dyskusje naukowe w różnych ośrodkach przyczyniły się do polepszenia współpracy i ściślejszego wzajemnego oddziaływania placówek naukowo-badawczych w zakresie mechaniki teoretycznej.

3.3. Formy działania Sekcji Mechaniki Teoretycznej zmierzają do tego, aby powiększyć w kraju liczbę pracowników nauki rozwijających twórczo mechanikę teoretyczną i unowocześnić tematykę stosownie do współczesnych potrzeb. Opracowana została ekspertyza na temat stanu mechaniki analitycznej w Polsce i koniecznych działań w kierunku zapewnienia odpowiedniego rozwoju tej dyscypliny.

Biorąc pod uwagę stan kadrowy, potrzeby naukowego i społeczno-gospodarczego rozwoju kraju oraz uchwały Drugiego Kongresu Nauki Polskiej, Sekcja zamierza skupić uwagę na następujących kierunkach badań podstawowych: a) teoria i praktyka budowania modeli fizycznych dla celów generowania równań ruchu, b) metody jakościowego i ilościowego badania równań ruchu, a w szczególności stateczności i stabilizacji, c) teorii drgań nieliniowych, d) rozwój metod umożliwiających zastosowanie komputerów do analizy i syntezy równań ruchu.

W dalszym ciągu swej działalności Sekcja Mechaniki Teoretycznej ma zamiar utrzymać dotychczasowe cele i formy działania oraz wprowadzić pewne ich rozszerzenie, poprzez organizowanie konferencji naukowych na wybrane tematy, m.in. na temat stateczności ruchu, jak też poprzez organizowanie zebrań nauko-

wych z referatami wprowadzającymi o charakterze ekspertyz, zawierającymi również sformułowania nierozwiązanych dotychczas problemów.

3.4 W minionym pięcioleciu zbyt wielu pracowników naukowo-badawczych było zaangażowanych w rozwiązanie zagadnień utylitarnych o charakterze rutynowym. Wydaje się celowe by bardziej skupić pracowników naukowo-badawczych, zainteresowanych badaniami podstawowymi z zakresu mechaniki teoretycznej i zastosowaniem osiągnięć współczesnej mechaniki w działalności inżynierskiej w co najwyżej kilku planach węzłowych lub resortowych. W bieżącym planie pięcioletnim tylko pozornie taką szansę stwarza problem międzyresortowy I-23 — „Mechanika ciał stałych, cieczy i gazów”, gdyż stojące do dyspozycji w tym problemie środki finansowe umożliwiają uwzględnienie zaledwie kilku projektów badawczych z zakresu mechaniki teoretycznej. Skromne środki finansowe i zbyt sztywna struktura organizacyjna placówek badawczych spowodowały, że większość pracowników naukowo-badawczych zainteresowanych rozwojem badań naukowych i mających dyspozycje oraz kwalifikacje do badań podstawowych pracuje nad rozwiązaniem zagadnień w większości o charakterze rutynowym.

#### 4. Mechanika Cieczy i Gazów

4.1. Uchwały i zalecenia Drugiego Kongresu Nauki Polskiej dotyczące mechaniki płynów, odnosily się zarówno do spraw organizacyjnych, jak i do kierunków badań. Zmierzaly do wyrównania dysproporcji pomiędzy stanem i rozwojem mechaniki płynów z jednej strony, a innych dziedzin mechaniki z drugiej. W zakresie realizacji tych postulatów Sekcja uczyniła dotychczas niewiele. Rozpatrując zagadnienie w skali krajowej można stwierdzić, że pogorszeniu uległo nauczanie mechaniki płynów w Politechnikach, w rezultacie pewnych działań organizacyjnych wychodzących poza zakres działania Komitetu. Zdarza się, że uczą tego przedmiotu osoby przypadkowe, bez należytych kwalifikacji. Upatrując podstawowe zagrożenie rozwoju mechaniki płynów właśnie w wadliwym kształceniu, Sekcja Mechaniki Cieczy i Gazów postanowiła skoncentrować swą uwagę aktualnie na sprawach kształcenia — dostatecznie szeroko rozumianego. Przeprowadziła już jedną konferencję poświęconą treści i programom nauczania mechaniki płynów.

4.2. Mechanika płynów ma do odnotowania niejaki osiągnięcia za lata 1973—1978, bardziej jednak w badaniach o charakterze zastosowań podstawowych. Osiągnięcia mają przede wszystkim Instytut Maszyn Przepływowych PAN w Gdańsku oraz Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT w Warszawie. W ośrodkach szkolnictwa wyższego uzyskano wyniki dotyczące turbulencji ruchu wody w rzekach, strumieni dwufazowych i w jednolitej teorii systemu profilów. Ocena osiągnięć przedstawiona zostanie w przygotowywanej na jesień 1979 ekspertyzie dotyczącej mechaniki płynów. Ceniąc wysoko poszczególne rezultaty, Sekcja uważa, że można wypowiedzieć zdanie, iż coś takiego, jak Polska Szkoła Mechaniki Płynów jeszcze nie istnieje.

Nie wnikając w szczegółowe warunki realizacji badań podstawowych mechaniki płynów w odniesieniu do wyposażenia laboratoryjnego, należy jednak odnotować brak odpowiednich urządzeń liczących jako zdecydowaną przeszkodę w rozwoju numerycznej mechaniki płynów. Przeszkoda ta obniża szansę powodzenia polskich uczonych już choćby dlatego, że wydłuża niesłychanie czas realizacji dobrych nawet i oryginalnych pomysłów.

4.3. Należy jednak stwierdzić, że w dziedzinie mechaniki cieczy i gazów nastąpiło ożywienie i podniesienie poziomu naukowego środowiska hydro- i aerodynamików. Szczególnie ważnym działaniem w tym zakresie było zapoczątkowanie regularnych krajowych konferencji mechaniki cieczy i gazów. Znaczenie mają również okresowe międzynarodowe konferencje naukowe.

Kilku uczonych, specjalistów z zakresu mechaniki cieczy i gazów, uczestniczy w pracach organizacji międzynarodowych, czynnie działa w komitetach naukowych sympozjów i kongresów, oraz w komitetach redakcyjnych czasopism międzynarodowych.

#### 5. Mechanika Ciała Stałego

5.1. Mechanika ciała stałego wzbogaciła się w ostatnim okresie o nowe koncepcje w dziedzinie teorii materiałów i nowe wyniki w warunkach złożonych oddziaływań sprzężeń. Podstawowym zadaniem

Komitetu w tym zakresie było propagowanie i popieranie badań dotyczących podstaw teorii ośrodków ciągłych oraz rozwijanie nowych kierunków badań w mechanice ciała stałego. Działanie prowadzono poprzez zebrania problemowe, konferencje szkoleniowe, ogólnokrajowe seminaria, sympozja i konferencje naukowe.

5.2. Drugi Kongres Nauki Polskiej zdecydowanie podkreślił celowość i konieczność badań na temat mechaniki pól naprężeń i odkształceń w ciałach stałych oraz sprzężeń pól mechanicznych i niemechanicznych w tego typu ośrodkach materialnych. Problematyka ta wchodzi w zakres zainteresowań dwóch Sekcji Komitetu. Sekcja Podstaw Teorii Ośrodków Ciągłych jako swe główne zadanie stawia sobie propagowanie i popieranie badań w zakresie zarówno fizycznych, jak i matematycznych podstaw teorii ośrodków ciągłych. Zadanie to jest realizowane przede wszystkim poprzez organizację konferencji naukowych we współpracy ze specjalistycznymi stowarzyszeniami naukowymi zagranicznymi. Jednym z działań była współpraca przy organizowaniu międzynarodowego stowarzyszenia poświęconego zastosowaniu matematyki czystej w mechanice.

5.3. Aktualna sytuacja w światowej mechanice i matematyce wymagała stworzenia organizacji, której celem byłoby popieranie wszystkich działań w dziedzinach nauki znajdujących się na pograniczu mechaniki i matematyki. W 1977 r. przy dużym udziale i inicjatywie Sekcji powołano towarzystwo pod nazwą „The International Society for the Interaction of Mechanics and Mathematics”.

Zadania jakie stawia się przed Towarzystwem są następujące:

- a) działalność na polu matematyki i mechaniki w celu szybkiego rozwoju dziedzin znajdujących się na styku matematyki i mechaniki,
- b) systematyczne przekazywanie mechanikom nowych metod matematyki, po uprzednio dokonanej ocenie ich przydatności,
- c) systematyczne informowanie matematyków o problemach mechaników których rozwiązanie wymaga odpowiednich dziedzin matematyki, jednocześnie stanowiących źródło inspiracji badań dla matematyków.

Powołano na okres 4 lat pierwszy Komitet Wykonawczy Towarzystwa, którego Prezesem jest WITOLD NOWACKI a Sekretarzem HENRYK ZORSKI. Siedzibą towarzystwa w latach 1977—1981 jest Polska.

5.4. W zakresie mechaniki ciała stałego szczególny nacisk zostanie położony na następujące zagadnienia: a) nielokalne i pseudokontynuálne teorie ośrodków mechanicznych, uwzględnienie mikrostruktury ośrodka, zarówno deterministycznej jak i statystycznej, b) analiza współdziałania pól mechanicznych, termicznych i elektromechanicznych, c) rozprzestrzenianie się fal w ośrodkach stochastycznie niejednorodnych.

5.5. Sekcja Mechaniki Ciała Stałego jako główne zadanie stawia sobie rozwijanie nowych kierunków badań w nieliniowej mechanice ciała stałego. Formami działania są zebrania problemowe, konferencje szkoleniowe, sympozja, organizowane często wspólnie z innymi organizacjami naukowymi.

Przedmiotem dyskusji problemowych były ostatnio np. metody optymalizacji w mechanice ciała stałego, zagadnienia dyskretyzacji w mechanice ciał stałych, przegląd polskich badań z zakresu mechaniki materiałów kompozytowych, analiza programów wykładów z zakresu mechaniki ośrodków ciągłych w uczelniach technicznych.

5.6. W mechanice ciała stałego możemy odnotować w ostatnich latach wiele wyników naukowych. Potwierdzają one istotną pozycję polskiej mechaniki w niektórych działach mechaniki światowej oraz wpływają na podnoszenie poziomu kultury naukowej środowiska krajowego. Oddziaływanie mechaniki w kraju odbywa się poprzez specjalistyczne problemy węzłowe i międzyresortowe, w szczególności poprzez problem 05.12. i I-23. Działalność zmierzająca do integracji środowiska naukowego i podniesienia poziomu badań w kraju jest w dużym stopniu związana z wykonywaniem Uchwał Drugiego Kongresu Nauki Polskiej.

5.7. Należy podkreślić oddźwięk jaki m.in. polska mechanika ciała stałego znajduje się w świecie naukowym. Kilkunastu uczonych wchodzi do Komitetów redakcyjnych specjalistycznych czasopism międzynarodowych. Polscy mechanicy ciała stałego powoływani zostają przez specjalistyczne organizacje międzynarodowe do Komitetów naukowych sympozjów i kongresów oraz jako referenci generalni w wielu imprezach.

## 6. Mechanika Doświadczalna

6.1. W wyniku podkreślenia w Uchwałach Drugiego Kongresu Nauki Polskiej konieczności uzupełnienia osiągnięć mechaniki teoretycznej i stosowanej w Polsce szerokim rozwojem badań doświadczalnych została powołana przez Komitet w 1972 Sekcja Mechaniki Doświadczalnej. W wyniku tych działań obok dotychczas głównie czysto usługowego charakteru badań doświadczalnych, pojawiło się w ostatnim okresie zainteresowanie tematyką podstawową. Badania doświadczalne dotyczyły reologii w normalnych i niskich temperaturach, wytrzymałości zmęczeniowej, mechaniki pękania, mechaniki ośrodków sypkich, mechaniki kontaktu oraz naprężeń własnych. Rozwijane były metody badań, a w szczególności elastooptyki do badań konstrukcji przestrzennych, metoda elastooptycznej warstwy powierzchniowej, metoda holografii w zastosowaniu do badań kształtu, przemieszczeń i odkształceń. Prowadzone były prace w zakresie termomemisji, emisji akustycznej i defektoskopii ultradźwiękowej.

Badania doświadczalne znajdują, poprzez swe wyniki, uznanie uwidaczniające się w publikowaniu prac w czasopismach międzynarodowych oraz w wykorzystaniu wyników badań doświadczalnych i metod doświadczalnych mechaniki nagrodami naukowymi Polskiej Akademii Nauk.

6.2. W ostatnich latach nastąpiła poprawa sytuacji w badaniach doświadczalnych o charakterze podstawowym. Przyczyniły się do tego głównie następujące elementy. Po pierwsze stworzenie odpowiedniego klimatu dla rozwoju metod doświadczalnych. Po drugie dotacje na rozwój metod doświadczalnych mechaniki z funduszków stojących do dyspozycji Polskiej Akademii Nauk oraz w problemie węzłowym 05.12. „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”. Ponadto do rozwoju przyczyniło się nawiązanie współpracy z ośrodkami zagranicznymi kultuwującymi badania doświadczalne.

6.3. Podjęto realizację szeroko zakrojonego programu organizacji konferencji szkoleniowych na temat metod doświadczalnych np. metody warstwy optycznie czulej badań konstrukcji metodami holografii, wykorzystanie metody rastrów do badań odkształceń. Te konferencje szkoleniowe wpływają w istotny sposób na rozwój i poziom badań doświadczalnych mechaniki w Polsce.

6.4. Dziedziny, w których metody doświadczalne powinny dać poważne efekty to mechanika kontaktu, mechanika pękania i reologia, mechanika ośrodków anizotropowych, biomechanika. Prowadzone są przygotowania do działania na temat dalszego szkolenia pracowników naukowych i naukowo-technicznych, oraz opracowania podręczników na temat badań doświadczalnych. Podejmowane są próby poprawy sytuacji w zakresie aparatury. Należy jednak podkreślić fakt narastania trudności w zakresie unowocześniania aparatury badawczej a niekiedy nawet utrzymania jej na poziomie sprawności technicznej. Realizacja Uchwał Drugiego Kongresu w zakresie mechaniki doświadczalnej może być poważnie utrudniona. Trzeba odnotować, że nastąpił znaczny rozwój kadry, co wpłynęło na dalszą intensyfikację badań doświadczalnych mechaniki. Nastąpiła specjalizacja ośrodków, jednocześnie wiele ośrodków prowadzi współpracę w zakresie realizacji wspólnych badań. Powstało szereg unikalnych urządzeń (lasery argonowe i lasery impulsowe do holografii), układy do badań materiałów w warunkach dynamicznych i w niskich temperaturach. Istnieją istotne trudności w zakresie zakupów inwestycyjnych nowej aparatury. Część aparatury jest unieruchomiona z powodu braku serwisu i części zamiennych. Pewne przepisy finansowe uniemożliwiają tworzenie zespołów grupujących specjalistów z różnych dziedzin i współpracę interdyscyplinarną, co stanowi bardzo poważne utrudnienie w działalności badawczej.

6.5. Można stwierdzić, że kierunki rozwoju zalecane w Uchwałach Drugiego Kongresu Nauki Polskiej są przestrzegane i pomimo szeregu trudności natury organizacyjnej oraz trudności finansowych istnieją realne możliwości przyspieszenia rozwoju mechaniki doświadczalnej w Polsce.

## 7. Mechanika Pękania i Zniszczenia Materiałów

7.1. Odczuwane od dawna i podkreślane w Uchwałach Drugiego Kongresu Nauki Polskiej potrzeby gospodarcze i naukowe w zakresie m.in. zapewnienia trwałości i niezawodności wytrzymałościowej maszyn i budowli, opracowania naukowych metod analizy i projektowania wytrzymałościowego z uwzględnieniem pękania materiałów spowodowały powołanie w 1978 r. w Komitecie Mechaniki PAN Zespołu Mechaniki Zniszczenia Materiałów.

Zespól ma za zadanie intensyfikację badań w tej nowej a ważnej dla zastosowań przemysłowych dziedzinie mechaniki oraz wprowadzenie osiągnięć współczesnej mechaniki ciała stałego do zagadnień projektowania wytrzymałościowego konstrukcji i urządzeń przemysłowych.

7.2. Dotychczas zebrano informacje o stanie badań, osiągnięciach i o działalności ośrodków krajowych zajmujących się zagadnieniami pęknięcia i zniszczenia materiałów. Opracowana została i przedyskutowana pierwsza wersja oceny stanu badań w Polsce na ten temat. Obmyślono program i zorganizowano pierwsze seminarium Zespołu oraz rozpoczęto przygotowania kursów szkoleniowych z udziałem wybitnych specjalistów zagranicznych z zakresu mechaniki powstawania i rozprzestrzeniania się uszkodzeń materiałów.

7.3. Stosowanie do badawczych konieczności i mając na uwadze wskazania Drugiego Kongresu Nauki Polskiej stoją przed Zespołem Mechaniki Zniszczenia Materiałów następujące zadania: a) scalanie wysiłków nad badaniami podstawowymi, teoretycznymi i doświadczalnymi, w możliwie szerokim zakresie mechaniki pęknięcia i zniszczenia zarówno metali, jak i niemetalu. Nacisk położony jest na bliższe powiązania metod doświadczalnych, badania zjawisk pęknięcia i zniszczenia z nieliniową mechaniką, na problemy modelowania matematycznego zjawisk rozwoju pęknięć oraz na opracowania metod analitycznych obliczania zjawisk pęknięcia i zniszczenia, b) przedstawienie propozycji kierunków badań, uwarunkowanych potrzebami poznawczymi i użytkowymi, c) organizowanie okresowych seminariów poświęconych szczegółowym problemom mechaniki pęknięcia i zniszczenia, na których będą przedstawione prace różnych ośrodków oraz opracowania przeglądowe, d) organizowanie konferencji szkoleniowych o różnych poziomach, mających na celu przyswojenie przez uczestników podstaw teoretycznych i doświadczalnych z zakresu mechaniki pęknięcia sprężysto-plastycznego, teorii uszkodzeń oraz kryteriów zniszczenia. Będą to kursy zarówno dla inżynierów, jak i dla pracowników naukowych i dydaktycznych.

7.4. Obserwując wzrost zainteresowania problematyką zniszczenia można już obecnie odnotować nowe rozwiązania w zakresie dynamiki m.in. prędkości rozprzestrzeniania się pęknięć, lokalizacji odkształceń plastycznych, wpływu efektów termicznych i prędkości odkształcania na pole szczelin, plastycznego pęknięcia metali, nukleacji szczelin, pęknięcia w warunkach pelzania i kierunkowości defektów międzyziarnistych.

7.5. W najbliższych latach szczególnie nacisk będzie położony na badania teoretyczne i doświadczalne w zakresie nieliniowej mechaniki zniszczenia, a zwłaszcza energii rozwoju pęknięcia, określania współczynników koncentracji naprężeń, stref plastycznego odkształcenia wokół pęknięć, zatrzymywania się pęknięcia w warunkach obciążeń losowych i przy nagłych przeciążeniach.

Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że podstawowe badania doświadczalne wymagają na ogół kosztownej aparatury, której zakup również w następnym pięcioleciu będzie przypuszczalnie bardzo ograniczony. Postuluje się zatem możliwe skoncentrowanie środków finansowych w wybranych ośrodkach oraz w sprawdzonych w działaniu projektach badawczych. Podjęte zostaną opracowania wydawnictw książkowych o zróżnicowanym poziomie, w celu wprowadzenia środowiska technicznego we współczesną problematykę i metody mechaniki zniszczenia oraz ułatwienia mu korzystania z dostępnej wiedzy na ten temat dla racjonalnego projektowania wytrzymałościowego.

## 8. Komputerowe Metody Mechaniki

8.1. Ważnym obszarem działań w mechanice jest rozwój metod umożliwiających zastosowanie opracowanych modeli matematycznych zachowania się materiałów w działalności praktycznej. Idzie o wprowadzenie do działalności inżynierskiej osiągnięć współczesnej mechaniki. Wiele z działów mechaniki szczególnie nieliniowej, wymaga zastosowania metod komputerowych rozwiązania zagadnień inżynierskich.

W celu rozwijania metod komputerowych mechaniki ciała stałego powołano w 1972 r. Zespól w Komitecie Mechaniki. Celem Zespołu który istniał do 1978 r. było opracowanie raportu o stanie numerycznych metod obliczeń wytrzymałościowych w Polsce, ożywienie działalności badawczej, w szczególności w rozwijaniu zainteresowania opracowaniem metod i algorytmów obliczeń z dziedziny mechaniki nieliniowej, ustalenia kierunków rozwoju badań w zakresie metod komputerowych. Problematyka numeryczna była podkreślana w Uchwałach Drugiego Kongresu Nauki Polskiej.

8.2. W rezultacie działań zorganizowano odbywające się co dwa lata ogólnopolskie konferencje na temat metod komputerowych w mechanice konstrukcji, przeprowadzono pewne działania unifikacyjne na temat zapisów i programów obliczeń numerycznych w mechanice ciała stałego i mechanice konstrukcji. Stworzone zostało wydawnictwo ciągłe pt: „Mechanika i Komputer”, które wkrótce powinno przekształcić się w czasopismo.

Nastąpiło podniesienie poziomu naukowego prac związanych z zastosowaniem komputera w mechanice ciała stałego, opracowane zostały elementy systemów obliczeniowych, np. na temat metody sztywnych elementów skończonych, metody elementów skończonych w zastosowaniu do zagadnień sprężystych a również programy z zakresu mechaniki nieliniowej i metod programowania liniowego w analizie i projektowaniu konstrukcji sprężysto-plastycznych.

## 9. Nauczanie Mechaniki

9.1. Ważnym zagadnieniem, które pojawiło się przed mechaniką jest sprawa modernizacji treści nauczania mechaniki w wyższych uczelniach technicznych i uniwersytetach.

Rozwój współczesnej mechaniki i potrzeby rozwojowe, np. różnych działów technologii, energetyki, przemysłu chemicznego i innych, wymagają wczesnego wprowadzenia do programów nauczania aktualnych osiągnięć naukowych i współczesnych metod mechaniki. Zagadnienia te odczuwane są przez specjalistów wszystkich Sekcji Komitetu. Poszczególne Sekcje rozpoczęły działania mające na celu napełnienie wykładów współczesną wiedzą, w celu przyspieszenia działań i skutków. W Komitecie został powołany w 1978 r zespół, którego zadaniem jest dokonanie oceny treści obecnych programów nauczania mechaniki, opracowanie treści programów nauczania poszczególnych dziedzin mechaniki i przygotowanie makiet współczesnych podręczników z różnych dziedzin mechaniki. Chodzi o unowocześnienie treści nauczania podstaw mechaniki i takie przedstawienie materiału, które daje jednolite ujęcie problemów sprężystości, plastyczności, wytrzymałości, pełzania i zniszczenia w ramach mechaniki ośrodków ciągłych.

9.2. Mechanika rozwinęła się znacznie w ostatnim dwudziestoleciu. Cechą ogólną tego rozwoju jest pojawienie się nowych problemów głównie opisywanych równaniami nieliniowymi, duże nagromadzenie wiedzy. W technologii następuje co 10—20 lat radykalna zmiana. Problemów stawianych przez współczesny przemysł krajów technologicznie rozwiniętych nie można rozwiązywać korzystając wyłącznie z rozwiązań, które daje mechanika zeszłych stuleci czy nawet dziesięcioleci. Pojawia się konieczność odpowiedniego przekazywania informacji naukowej z dziedziny mechaniki. Dlatego nauczanie mechaniki musi uwzględniać nie tylko klasyczną wiedzę ale musi zawierać duży ładunek współczesnej wiedzy, powinno podawać syntetyczne przedstawienie głównych zależności dostarczanych przez mechanikę i dziedziny z których wyników ona korzysta.

Dlatego potrzebne było podjęcie przez ogólnopolskie grono działań, których celem jest określenie zasad uwspółcześnienia nauczania mechaniki zracjonalizowania tego nauczania, doprowadzenie do wyrównania poziomu nauczania mechaniki, wyeliminowanie empiryzmu ale nie doświadczeń, z nauk inżynierskich.

9.3. Powołany Zespół w pierwszym rzędzie ma na celu ustalenie aktualnych i przyszłych potrzeb wykształcenia inżyniera w zakresie mechaniki, w szczególności głębokiej znajomości przez studenta cech materiałów i matematycznych opisów materiałów, głębszej znajomości kinematyki stanu odkształcenia i dynamiki stanu naprężeń, bardziej ogólnego zrozumienia sprzężeń mechanicznych i termicznych, magnetycznych, chemicznych itp. Opracowany zostanie zakres merytorycznej treści nauczania mechaniki i podjęte działania mające na celu praktyczną realizację współczesnego nauczania mechaniki. Wynikną stąd niewątpliwie wskazówki do opracowania podręczników zawierających współczesną treść mechaniki.

9.4. Przeprowadzone przed powołaniem Zespołu działania doprowadziły do opracowania propozycji (makiet) podręczników z mechaniki ośrodków ciągłych. Prace szczegółowe na temat treści nauczania mechaniki prowadzone są przez specjalistyczne Sekcje Komitetu. Działania te mają za zadanie m.in. przełamanie wielkiej bezwładności instytucji zajmujących się nauczaniem oraz ułatwienie w osiągnięciu przez studentów i inżynierów poziomu wiedzy wymaganej przez przemysł krajów technologicznie rozwiniętych.

## 10. Ważniejsze osiągnięcia

10.1. Odkrycia i osiągnięcia naukowe, opracowania odnoszące się do metod wykorzystywania tych osiągnięć nie mogą być opracowywane ze zbyt krótkiego dystansu. Nie jest więc ani właściwe ani możliwe podawanie subiektywnych ocen czy subiektywnych klasyfikacji osiągnięć.

Można osiągnięcia ocenić na podstawie krystalizowania się indywidualności twórczych, powstawania grup naukowych o zasięgu międzynarodowym, oddziaływania publikacji polskich autorów i wydawania zagranicą ich książek, udziału indywidualności twórczych w podnoszeniu poziomu naukowego w kraju i rozprzestrzeniania współczesnej wiedzy w dziedzinie mechaniki. Inną łatwiejszą formą jest wyszczególnienie jako trwałych osiągnięć dzieł czy rezultatów wyróżnionych nagrodami państwowymi, nagrodami Sekretarza Naukowego PAN i nagrodami wydziałowymi.

10.2. Mechanika polska w okresie po Drugim Kongresie Nauki Polskiej ma osiągnięcia wyrażające się w utrzymaniu i okrzepnięciu, np. przez poszerzenie bazy w postaci większej liczby indywidualności twórczych w skali międzynarodowej, tej pozycji jaką mechanika ta zdobyła poprzednio. Mechanika polska ma utrwaloną pozycję międzynarodową.

10.3. Za osiągnięcia uważać można monografie specjalistyczne opracowane w tym okresie. Nie jest właściwe podawanie nazw tych opracowań. Liczbę znaczących monografii można ocenić na około dzieścięć.

Wyróżniono nagrodami Sekretarza Naukowego PAN w ciągu ostatnich trzech lat 14 opracowań naukowych obejmujących różne działy mechaniki jak np. rozwinięcie metody pokryw elastooptycznych, analizę i optymalizację płyt plastycznych oraz metodę analizy procesów urabiania gruntów, metody modelowania cyfrowego budynków wysokich, flatter samolotów lekkich, metodę obliczania przekryć strukturalnych, metodę racjonalnej analizy wytrzymałościowej płyt budownictwa uprzemysłowionego, mechanikę cieczy lepkoplastycznych, podstawy numerycznej analizy konstrukcji w zakresie dużych deformacji sprężysto-plastycznych, stateczności konstrukcji prętowych oraz inne zagadnienia.

W tym samym okresie nagrodami Wydziału Nauk Technicznych wyróżniono działalność siedmiu twórców z dziedziny mechaniki.

10.4. Należy rozumieć jako osiągnięcie rozpoczęcie realizacji dziesięciotomowego dzieła encyklopedycznego „Mechanika Techniczna”, którego pierwszy tom „Sprężystość” ukazał się w 1978 r, a dalsze tomy są w druku.

## 11. Inne działania Komitetu

11.1. Ważnym elementem działalności Komitetu, a więc wykonywania i rozwijania postanowień Drugiego Kongresu Nauki Polskiej, jest opiniowanie i ocena ogólnopolskich planów badawczych. Pewne działania w tym zakresie wynikają z odpowiednich zarządzeń władz Akademii ale większość merytorycznych opracowań wynika z inicjatywy własnej. Specjalne zespoły analizują i przedstawiają opinie na temat poszczególnych problemów badawczych lub zahaczających o mechanikę. Opracowane są lub znajdują się w opracowaniu ekspertyzy takie jak np: raport o stanie mechaniki doświadczalnej w Polsce, ocena roli mechaniki w zagadnieniach bezpieczeństwa pojazdów przy zderzeniach, ocena stanu i kierunków rozwoju w Polsce metody elementów skończonych w zastosowaniu do zagadnień mechaniki konstrukcji, raport o nauczaniu mechaniki ośrodków ciągłych: o nauczaniu mechaniki płynów, o mechanice teoretycznej i inne. Raport o stanie mechaniki doświadczalnej wykazał, że wiele cennego sprzętu badawczego znajduje się w ośrodkach zajmujących się badaniami rutynowymi lub nie jest wogóle wykorzystane. Są to rezultaty decyzji podejmowanych najczęściej bez wysłuchania opinii niezależnych środowisk naukowych.

Komitet zobowiązany jest do dokonywania okresowych ocen wartości merytorycznej wydawnictw naukowych Polskiej Akademii Nauk z zakresu mechaniki. Celem analizy jest dążenie do osiągnięcia właściwego uprofilowania periodyków oraz wskazanie luk, które należałoby wypełnić z uwagi na rozwój nauki światowej oraz nasze potrzeby naukowe i gospodarcze.

11.2. Opinie i ekspertyzy służą jako podstawa wyjściowa do podejmowania szczegółowych akcji. Przekazywane są Władzom Akademii do wykorzystania lub też stanowią pomoc w działaniach specjalistów z określonych dziedzin, ułatwiając merytoryczną współpracę. Działalność opiniodawcza stanowi istotny



czynnik właściwego kształtowania rozwoju mechaniki, ale sam rozwój dyscypliny zależy od talentów i indywidualności twórczych.

11.3. Ponieważ główna uwaga Komitetu jest skupiona na rozwoju dyscypliny naukowej mechaniki oraz wzbogaceniu zasobów wiedzy w tej dziedzinie, z myślą o możliwie szerokim wykorzystaniu tej wiedzy i metod w praktyce inżynierskiej, sporo miejsca w działalności Komitetu zajmuje organizowanie konferencji szkoleniowych oraz organizacja sympozjów o wysokim poziomie naukowym, a w tym w szczególności takich międzynarodowych spotkań naukowych, które przynoszą korzyści bądź rozwojowi odpowiednich badań u nas, bądź też pozwalają na przedstawienie na szerszym forum oryginalnych osiągnięć polskiej mechaniki. W zakresie tego rodzaju działalności można wyróżnić następujące grupy spotkań międzynarodowych:

- a) sympozja organizowane w ramach międzynarodowych stowarzyszeń naukowych, jak międzynarodowa Unia Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (IUTAM), czy Europejskie Kolokwia Mechaniki EUROMECH, sympozja organizowane w ramach stowarzyszenia „Współdziałania Mechaniki i Matematyki”.
- b) sympozja dwustronne, a więc imprezy wspólne mechaników polskich i mechaników tych krajów, z którymi szczególnie żywa i owocna jest współpraca naukowa, tzn. prowadzone są badania w ramach wspólnych programów prac,
- c) konferencje szkoleniowe w ważnych dla nas działach mechaniki,
- d) konferencje specjalistyczne z udziałem uczonych zagranicznych,
- e) prowadzone przy współpracy Komitetu doroczne konferencje mechaniki ciała stałego oraz konferencje mechaniki cieczy i gazów.

W ciągu ostatnich ośmiu lat zorganizowano wiele tego typu imprez, które zostawiły trwały ślad w rozwoju naszej i światowej mechaniki.

## 12. Niektóre konieczne kierunki rozwoju badań

12.1. Okres, który minął od Drugiego Kongresu Nauki Polskiej jest zbyt krótki, aby mógł doprowadzić do radykalnych zmian w mechanice w Polsce albo do rozwiązania wszystkich problemów wyróżnionych przez Kongres jako ważne dla rozwoju kultury i gospodarki naszego kraju. Radykalne zmiany z reguły doprowadzają do niszczenia struktur, szkół i nawyków, które nauka wyprodukowała, do rozbijania zespołów naukowych i do dominacji karierowiczostwa lub oportunistów.

Zasadnicze kierunki wyznaczają na Kongresie dla mechaniki nie wymagają zmiany. Zmiany pojawiają się jeśli idzie o koncentrację wysiłku i o wybór najwłaściwszej, ze stanowiska naszych przyszłych potrzeb, tematyki. Istotnym czynnikiem jest pojawienie się indywidualności twórczych. Dla badań naukowych wzbogacających naszą wiedzę i kulturę jest to bardzo ważny element w rozwoju i ukierunkowaniu. Wymagają rozwoju naszej kultury i gospodarki wydają się wskazywać, że zainteresowania mechaniki powinny skupiać się na dwóch głównych potrzebach tzn. związanych z technologiami przyszłości oraz z potrzebami teraźniejszości.

12.2. Przyszłe potrzeby życia społecznego i gospodarki wymagają zainteresowania się problemami sprzężeń mechanicznych, biomechaniki i nowych źródeł energii, energetyką związaną z rozpadem i z syntezą. Potrzeby teraźniejszości i bliskiej przyszłości wymagają m.in. głębokiego zajęcia się losową mechaniką ośrodków ciągłych i konstrukcji, niezawodnością, zmęczeniem i ścieralnością, zniszczeniem materiałów, mechaniką materiałów złożonych i większym udziałem współczesnych metod i wyników mechaniki w inżynierii materiałowej, mechaniką ośrodków wielofazowych i porowatych, mechaniką kontaktu i smarowania, problemami dynamiki, mechaniką tąpnięcia i kruszenia skał, mechaniką gruntów, działaniem obciążeń cyklicznych.

12.3. Niezwykle ważną sprawą jest opracowywanie metod rozwiązywania zagadnień dla opracowanych modelu złożonych zjawisk mechanicznych. Idzie o metody analityczne, numeryczne i doświadczalne prowadzące do efektywnych rozwiązań problemów inżynierskich. Dlatego też odpowiednio ważne miejsce w programach rozwoju badań w zakresie nauk mechanicznych powinno zajmować opracowywanie metod umożliwiających wykorzystywanie nowych wyników z dziedziny nauk mechanicznych w praktyce inżynierskiej-

opracowywanie aparatury specjalistycznej np. do badań zjawisk pełzania, plastyczności, ośrodków sypkich, ośrodków złożonych, rozprzestrzeniania się spękań, opracowywanie instrukcji projektowania budowli, maszyn i urządzeń np. z uwagi na ich wytrzymałość, stateczność, wytrzymałość cykliczną i zniszczenie.

### 13. Uwagi końcowe

13.1. Zainteresowanie się Polskiej Akademii Nauk sprawami mechaniki wywarło istotny wpływ na rozwój dyscypliny i na jej aktualny stan w Polsce, zarówno jako nauki poznawczej, jak i nauki stosowanej. Pomogło ono w ukształtowaniu się specyficznych kierunków naukowych, spowodowało wzrost kwalifikacji kadr badawczych i stworzyło system inspiracji badań oraz merytorycznej oceny postępów badań w postaci konferencji naukowych, konferencji szkoleniowych, czasopism, serii wydawniczych. Innymi słowy, doprowadziło do powstania środowiska naukowego, kompetentnie i krytycznie oceniającego metody i wyniki badań. Umożliwiło rozwój wielu talentów i doprowadziło dzięki temu do obecności polskiej mechaniki w nauce światowej.

13.2. Dzięki rozwojowi bazy poznawczej i kompetencji zawodowej mechaników możliwe stało się podjęcie w odpowiedzialny sposób pewnych programów badań zmierzających np. do ulepszenia i unowocześnienia metod obliczeniowych i projektowania konstrukcji oraz procesów technologicznych, a także oszczędności materiałów przez racjonalne projektowanie. Nowoczesne technologie wymagają współczesnej mechaniki i to głównie w postaci wiedzy i efektywnych metod rozwiązywania zagadnień praktycznych.

13.3. Rozwój mechaniki polskiej został oceniony na Drugim Kongresie Nauki Polskiej, gdzie sformułowano w Uchwałach określone zadania. Wydaje się, że od tego czasu nastąpiły dalsze korzystne zmiany i ożywienie w wielu dziedzinach, np. w zakresie mechaniki punktów i brył sztywnych, a częściowo i w zakresie mechaniki cieczy i gazów. Mechanika ciała stałego wzbogaciła się o nowe koncepcje w dziedzinie teorii materiałów w warunkach złożonych oddziaływań. Nastąpił rozwój metod numerycznych i ukształtowały się załączki własnych systemów obliczeniowych, w tym również dla zagadnień nieliniowych. Rozwinęły się metody doświadczalne mechaniki, jednak dalszy ich rozwój jest zagrożony w związku z trudnościami unowocześnienia aparatury pomiarowej. Podjęto działania zmierzające do unowocześnienia nau czania mechaniki oraz ku popularyzacji nowych osiągnięć i metod mechaniki w ośrodku zawodowym. Potrzebne są działania w zakresie mechaniki ośrodków biologicznych, czy mechaniki procesów przetwórstwa.

13.4. Sądzimy, że dalsze inicjatywy mechaników polskich i przedsięwzięcia Komitetu Mechaniki zmierzające do rozwoju badań naukowych i kształtowania środowiska naukowego i wzrostu zakresu oddziaływań praktycznych mechaniki spotkają się z odpowiednim zrozumieniem i znajdą odpowiednie poparcie w dalszej działalności Akademii, gdyż rozwój mechaniki w Polsce został dokonany w rezultacie szacunku dla rzetelności, pracowitości i talentu.

*Warszawa, w sierpniu 1979 r.*

*Antoni Sawczuk  
Wojciech Krzysztof Nowacki*

### XVI DOROCZNY ZJAZD TOWARZYSTWA (AMERYKAŃSKIEGO) NAUK INŻYNIERSKICH EVANSTON (USA) 5-7 WRZEŚNIA 1979 r.

Amerkańskie Towarzystwo Nauk Inżynierskich (Society of Engineering Science) zrzesza pracowników nauki w dziedzinie nauk inżynierskich i inżynierów zarówno ze Stanów Zjednoczonych A.P. jak i innych krajów. Towarzystwo to zostało założone w roku 1963. Celem jego jest wymiana i promocja nowych idei i informacji między naukami inżynierskimi oraz fizyką teoretyczną i stosowaną, chemią i matematyką. W tym celu Towarzystwo organizuje spotkania i konferencje celem przedstawiania i rozpowszechniania wspomnianych idei i informacji, a także przyczynia się do ich publikacji. Aczkolwiek Towarzystwo nie posiada oficjalnego czasopisma to jednak International Journal of Engineering Science będzie się starać

publikować prace członków Towarzystwa pod warunkiem zachowania poziomu prac publikowanych w kwartalniku. Informacje z życia Towarzystwa i inne, interesujące jego członków, są rozpowszechniane kwartalnie poprzez „The Engineering Science and Perspective”, wydawane techniką małej poligrafii.

Na 3 dniowym, XVI Spotkaniu członków Towarzystwa w Northwestern University (Evanston) wygłoszono 3 referaty generalne oraz około 200 półgodzinnych referatów na 36 sesjach problemowych. Zaproszonych referatów było 121, zgłoszonych przez autorów 79, oprócz tego kilka zapowiedzianych referatów nie wygłoszono. Konferencja stała na bardzo wysokim poziomie i obejmowała szeroki zakres tematyczny. Niewątpliwą wadą były równoczesne obrady, naogół w ośmiu równoległych sekcjach. Oczywiście w tym układzie nie było możliwe wysłuchanie pokrywających się wykładów, czasem o zbliżonej tematyce, lub metodzie rozwiązywania zagadnienia. Wykłady generalne były następujące:

B.A. Bolt, „Fale sejsmiczne w pobliżu źródła”, W. H. Munk, „Badanie oceanu z pomocą dźwięku”, oraz I. N. Sneddon, „Technika transformacji całkowych w teorii sprężystości”. Profesor Sneddon był szczególnie honorowanym uczestnikiem Zjazdu. 4 sesje nosiły nazwę „sesje sneddonowskie” i dotyczyły mechaniki pęknięcia, zagadnień kontaktowych, zagadnień mechaniki cieczy i metod matematycznych. Z okazji jubileuszu 60 lecia przewodniczący wręczył prof. I. N. Sneddonowi medal pamiątkowy Towarzystwa. Profesor B. A. Boley został wybrany członkiem honorowym Towarzystwa. Trudno w tym krótkim sprawozdaniu wymienić chociażby tytuły wszystkich, czy tylko zasługujących na wymienienie, referatów. Ogranicze się do podania haseł pod jakimi odbywały się poszczególne sesje: dynamika gruntów — 3 sesje, inkluzje — 2 sesje, zagadnienia odwrotne — 3 sesje, teoria drgań, kompozyty, metoda elementów skończonych — po 2 sesje, mechanika pęknięcia — 3 sesje. Na sesji termodynamiki ośrodków ciągłych wykłady wygłoszili, między innymi, C. Truesdell, M. E. Gurtin, D. R. Owen i J. Serrin. Inne sesje dotyczyły następujących zagadnień: cieczy i przepływy, metody obliczeniowe w teorii plastyczności, propagacja fal, teoria sprężystości odkształceń skończonych, niestateczności w zakresie niesprężystym i plastycznym, metody perturbacji, metod obliczeniowych, metod jakościowych w mechanice ciała stałego, lepkosprężystości, skończonych odkształceń w teorii plastyczności metali, bezpiecznej technologii i mechaniki pęknięcia w zagadnieniach reaktorów nuklearnych i optymalizacji konstrukcji.

Konferencja była reprezentatywnym przeglądem większości współczesnych zagadnień inżynierskich związanych z mechaniką. Przedstawione zostały ciekawe próby nowych ujęć teoretycznych, np. prof. G. C. Sih — mechanika pęknięcia z uwzględnieniem wpływu dyfuzji wilgoci, korozji i temperatury. Zazdrość budziła łatwość wykorzystania techniki obliczeniowej i skala prac doświadczalnych. Wydany został wstępny i końcowy program Zjazdu oraz streszczenia referatów.

*Z. Olesiak*

#### **7 KONFERENCJA DOT. ZAGADNIEN I METOD FIZYKI TEORETYCZNEJ KARL-MARX-STADT (NRD) 18—22 CZERWCA 1979 R.**

Konferencja została zorganizowana staraniem Wydziałów Matematyki i Budowy Maszyn Politechniki w Karl-Marx-Stadt oraz Towarzystwa Matematycznego NRD. Wygłoszono na niej dwa wykłady specjalne, otwierający i zamykający konferencje, 20 wykładów sekcyjnych — 1 godzinnych, oraz 70 komunikatów naukowych — 20-minutowych. W związku z setną rocznicą urodzin Alberta Einsteina, wykład inauguracyjny (prof. H. J. Treder, Poczdam) był poświęcony Einsteinowi i jego dziełu. Wykład plenarny zamykający Konferencję (prof. K. Hennig, Berlin) dotyczył dynamicznych zagadnień mechaniki budowli. Tematyka Konferencji była bardzo rozstrzelona, w zasadzie można było wyróżnić trzy główne grupy tematyczne, a mianowicie: zagadnienia matematyki stosowanej, zagadnienia informatyki i techniki obliczeniowej oraz różne zagadnienia mechaniki, zarówno teoretyczne jak i problemy inżynierskie wzięte z praktyki. W Konferencji wzięło udział około 210 uczestników, w tym 15 uczestników z Polski, 17 z CSRS, 6 z ZSRR, 5 z RFN, 2 z Bułgarii, oraz po jednym z Holandii i Rumunii. Referaty sekcyjne (godzinne) wygłoszili uczeni z NRD (8 referatów) ze Związku Radzieckiego (5 referatów na zaplanowanych 9), z RFN (2 referaty) oraz po jednym z Polski, Holandii, Bułgarii, CSRS i Rumunii. Referatów 20-minutowych było: 8 polskich, 7 czechosłowackich i jeden bułgarski, pozostałe wygłoszili uczestnicy z NRD. Z powodu różnorodnej tematyki, oraz równoczesnych obrad w dwóch (w przypadku referatów sekcyjnych) i w trzech (w przypadku referatów 20-minutowych) sekcjach, omówienie Konferencji musi być subiektywne.

Wyróżniłbym tu referaty T. G. Gegelii (Tbilisi): O zagadnieniach mikropolarnej termosprężystości i termodyfuzji, A. W. Biczadze (Moskwa): O pewnym układzie nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, L. Jentscha (Karl-Marx-Stadt): Zagadnienia matematycznej teorii sprężystości ciał skokowo niejednorodnych, M. N. Spijkera (Leiden, Holandia): O podstawach stateczności rozwiązań — referat z informatyki, M. N. Janienki (Nowosybirsk): Algorytmy obliczeniowe w zagadnieniach fizyki matematycznej i mechaniki ośrodków ciągłych, J. Brillii (Bratysława): O uogólnieniu metody elementów skończonych na równania paraboliczne i quasi-hiperboliczne, oraz W. Wendlanda (Darmstadt, RFN): O rozwiązywaniu eliptycznych zagadnień brzegowych z pomocą równań całkowych w zagadnieniach mechaniki.

Polscy uczestnicy wygłosili 8 komunikatów, z których wymienię: J. Szarskiego (Kraków): Nieskończony układ parabolicznych równań różniczkowo-funkcyjnych oraz J. Wolską-Bochenek (Warszawa): Równania całkowe typu zagadnienia Stefana. Ponadto referaty wygłosili koledzy M. Dryja, M. Lurski, A. Palczewski, T. Styś, D. Szymańska-Kolodziej i J. Wójtowicz. Niżej podpisany, w referacie sekcyjnym, mówił o zagadnieniach termosprężystości ośrodka mikropolarnego.

*Z. Olesiak*

#### WYKAZ KONFERENCJI I SYMPOZJÓW Z DZIEDZINY MECHANIKI ORGANIZOWANYCH W POLSCE W 1980 ROKU

1. Kompozyty i konstrukcje w budownictwie  
12—13.05, Łódź, Komitet Mechaniki PAN, Instytut Inżynierii Budowlanej Politechniki Łódzkiej prof. M. Suchar
2. Szkoła-kurs „Sprężysto-plastyczne modele ośrodków rozdrobnionych”  
19—23.05, Jabłonna, Instytut Budownictwa Wodnego PAN
3. IX Sympozjum Drgania w układach fizycznych  
21—24.05, Błażejewko k/Kórnik, Oddział Poznański PTMTiS oraz Instytut Mechaniki Technicznej Politechniki Poznańskiej
4. Współczesna mechanika zniszczenia materiałów  
16—23.06, Jabłonna, Komitet Mechaniki PAN i IPPT PAN, prof. S. Kocańda
5. XXII Krajowa Konferencja Mechaniki Ciała Stałego  
2—9.09, Gołuli, IPPT PAN, Komitet Mechaniki PAN, doc. dr A. König
6. IV Krajowa Konferencja Mechaniki Płynów  
8—13.09, Burzenin k/Wielunia, Komitet Mechaniki PAN oraz Politechnika Łódzka Instytut Maszyn Przepływowych, prof. Wł. Prosnak
7. Problemy lokalne w płytach i powłokach  
15—17.09, Jabłonna, (Euromech), Oddział Warszawski PTMTiS oraz Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej, prof. S. Łukasiewicz
8. Sympozjum polsko-włoskie „Zagadnienia dynamiczne teorii sprężystości”  
22—25.09, Jabłonna, Komitet Mechaniki PAN i Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych IPPT PAN, prof. H. Zorski
9. IX Sympozjum badań doświadczalnych w mechanice ciała stałego wrzesień, Warszawa, Oddział Warszawski PTMTiS, Komitet Mechaniki PAN oraz Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej, prof. Z. Brzoska
10. Plastyczność i zniszczenie ośrodków złożonych  
wrzesień, Jabłonna, Komitet Mechaniki PAN, Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN, prof. G. Szefer
11. II Konferencja naukowo-techniczna Hydroforum 80 „Problemy rozwoju hydraulicznych maszyn wirowych ze szczególnym uwzględnieniem potrzeb energetyki”  
wrzesień, Porąbka-Kozubnik, Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk

12. Defekty i zniszczenie  
13—17.10, Kazimierz, Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych IPPT PAN
13. Zastosowanie metod topologii i analizy funkcjonalnej do badania modeli matematycznych mechanik teoretycznej  
październik, Jabłonna, Komitet Mechaniki PAN, prof. R. Gutowski
14. Problemy losowe w mechanice konstrukcji  
listopad, Gdańsk, Instytut Konstrukcji Budowlanych Politechniki Gdańskiej
15. Podstawy projektowania maszyn i urządzeń energetycznych w okresie 1976—1980  
IV kwartał, Gdańsk, Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk
16. Zastosowanie metody mory do badań konstrukcji budowlanych i maszynowych  
Jabłonna, Komitet Mechaniki PAN, Politechnika Warszawska Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa, doc. dr hab. J. Jastrzębski

### MIĘDZYNARODOWE KONFERENCJE W 1981 R.

1. International Conference on Creep and Fracture of Engineering Materials and Structures  
24—27 March, 1981, Dr B. Willshire Dept. of Metallurgy University College, Swansea SA 2 8PP, U.K.
2. a) International Conference on Numerical Methods in Thermal Problems, 7—10 July 1980  
b) International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, 13—16 July 1981  
Wenecja, Włochy,  
Dr B. Schrefler  
Istituto di Construnoni, Pouti e Strade  
Facolta D'Ingegneria  
Universita Di Padova, 35100 Padova, Italy

Konferencja: III Europejskie Kolokwium Mechaniki Pękania  
(The Third European Colloquium on Fracture- ECF 3) odbędzie się w dniach 8—10 września 1980 r.  
Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science and Technology, Exhibition Road,  
London SW72BX, Dr J. C. Radon.

### ZAWIADOMIENIE

W kwietniu 1981 roku na Dolnym Śląsku odbędzie się V Konferencja „Metody komputerowe w mechanice konstrukcji” poświęcona przeglądowi zastosowań metod komputerowych w szeroko rozumianej mechanice konstrukcji ze szczególnym uwzględnieniem zagadnień nieliniowych, optymalizacji, wspomaganie badań eksperymentalnych, podstaw metod numerycznych. Organizatorem jest Sekcja Mechaniki Konstrukcji KILiW PAN oraz Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej. Informacji udziela i wstępne zgłoszenia przyjmuje (do 15.09.1980 wraz z jednostronicowymi streszczeniami referatów) Komitet Organizacyjny, Politechnika Wrocławska, Instytut Inżynierii Lądowej, Wybrzeże Wyspiańskiego 27 50-370 Wrocław, tel 220994.

### ZAWIADOMIENIE

Drugie USA—ZSRR sympozjum pt. „Pęknięcie materiałów kompozytowych” (Fracture of Composite Materials), 3—5 września 1980 r. Bethlehem. Organizator prof. G. C. Sih, Institute of Fracture Mechanics, Lekigh University, Bethlehem, Pensylwania 18015.



**W następnym zeszycie ukaza się prace:**

- K. SOB CZYK, Drgania konstrukcji i stochastyczne modele uszkodzeń  
Случайные колебания и стохастические модели разрушения  
Random vibrations and stochastic models for structural failures
- W. PIETRASZKIEWICZ, Niektóre problemy nieliniowej teorii powłok  
Некоторые проблемы нелинейной теории оболочек  
Some problems of nonlinear theory of shells
- J. ORKISZ, Powłoki pneumatyczne  
Пневматические оболочки  
Pneumatic structures
- M. KLEIBER, Nieliniowa, statyczna i dynamiczna analiza powłok metodą elementów skończonych  
Нелинейный статический и динамический расчёт оболочек методом конечных элементов  
Nonlinear static and dynamic analysis of shells by the finite element method
- M. WOŹNIAK, Równania bilansu i zasady zachowania w porowatych ciałach wieloskładnikowych  
Уравнения баланса и принципы сохранения для простых многокомпонентных сред  
The balance equations and conservation law for multiconstituent porous media
- J. KLEPACZKO, J. GARBARSKI, Próba dynamicznego rozciągania tworzyw sztucznych  
Ударное растяжение полимеров  
Dynamic tension test of polymers
- K. A. MLADENOV, Dynamika pręta obciążonego dwiema siłami śledzącymi  
Динамическое поведение стержня под действием двух следящих сил  
Dynamics of a bar under two follower forces
- S. WIŚNIEWSKI, Określenie gęstości strumienia ciepła na podstawie pomiarów nieustalanej temperatury jednostronnie ogrzewanej płytki płaskiej  
Определение плотности теплового потока на основе измерений нестационарной температуры одностронне обогреваемой плоской пластинки  
Determination of the heat flux density basis on the measurements of nonsteady temperature of one-side heated flat plate
- A. GAJEWSKI, Optymalne kształtowanie prętów ściskanych siłą skierowaną do bieguna przy potęgowym prawie fizycznym  
Оптимальное проектирование стержней,жимаемых центральной силой, при степенном физическом законе  
Optimal design of the bars, compressed by a polar force subject to the power physical law
- S. OKOŃSKI, Wgłębianie narzędzia z periodycznym zarysem klinowym w ośrodek plastyczny  
Внедрение инструмента с периодическим клиновым профилем в пластическую среду  
Indentation of a periodically wedge-shaped tool into plastic material

Cena zł 30.—

Warunki prenumeraty  
Cena prenumeraty krajowej  
rocznie zł 120.—  
półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do 10 czerwca na I półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscribe's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona — Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland, Please send payments to the account of Ars Polona — Ruch in Bank Handlowy S. A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA* jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)

Mech. Teor. T. 18, z. 1, s. 1—148, Warszawa 1980, Indeks 36523

---