

TREŚĆ: Prof. Dr. K. Weigel: Triangulacja bez pomiarów kątowych. (Dokończenie). — Prof. A. Kuryłło: Żelbetowe konstrukcje szkieletowe w budowie wysokich domów. — Inż. M. Bessaga: Zastosowanie zasady Castigliana do obliczania ram wieloprzęsłowych. (Ciąg dalszy). — Wiadomości z literatury technicznej. — Recenzje i krytyki. — Nekrologja. Sprawy Towarzystwa.

Dr. K. Weigel

Profesor Politechniki Lwowskiej.

Triangulacja bez pomiarów kątowych.

(Dokończenie).

IV. Wyznaczenie długości boków trójkątów przy pomocy pośrednio ewent. bezpośrednio mierzonych odcinków i prawo przenoszenia się błędów przy zastosowaniu tej metody.

Zastanówmy się teraz, w jaki sposób możnaby otrzymać długość S z mniejszym błędem średnim.

Przyczyną, że błąd długości S wypada dość znaczny przy użyciu dotychczasowych metod pomiaru, jest niekorzystne prawo przenoszenia się błędów w łańcuchach trójkątów; należy zatem obmyśleć taki sposób wyznaczania długości S , któremu odpowiadałoby korzystniejsze prawo przenoszenia się błędów.

W tym celu proponuję następujący sposób pomiaru długości S .

Wyobraźmy sobie, że długość S składa się z r odcinków, których długość przeciętna wynosi A tak, że można położyć:

$$S = rA. \quad (30)$$

Długości poszczególnych odcinków A nie mierzymy bezpośrednio, lecz pośrednio przy pomocy r stosunkowo krótkich podstaw a , z których przechodzi się łańcuchami trójkątów, o ile możności równobocznych do boków A (ewentualnie — gdy stosunek $m = \frac{A}{a}$ jest liczbą niewielką — rombami).

Zauważyć jednak należy, że dokładność pomiaru długości a mniejszej od podstawy b będzie też i odpowiednio mniejszą, gdyż błąd bezpośredniego pomiaru długości wzrasta z jej pierwiastkiem, zatem:

$$\mu_a = a \sqrt{a}, \quad \mu_b = a \sqrt{b}, \quad (31)$$

a dalej:
$$\frac{\mu_a}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad \frac{\mu_b}{b} = \frac{1}{\sqrt{b}}, \quad (32)$$

a w konsekwencji:

$$\frac{\mu_a}{a} : \frac{\mu_b}{b} = \frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{b}} \quad (33)$$

Błąd średni odcinka A powstały z rozwinięcia długości a należałoby (w założeniu, że a znajdują się pośrodku sieci podstawowych) urobić wedle wzoru (13):

$$\mu'_A = \frac{\mu}{3\rho} a m \sqrt{m} = \frac{\mu}{3\rho} A \sqrt{m}. \quad (34)$$

Uwzględniając jednak, że kształt trójkątów użytych przy rozwinięciu podstawy a nie będzie zawsze równoboczny jak też i to, że błąd średni kątowy przy stosunkowo krótkich bokach sieci (ze względu na błędy centrowania i t. p.) będzie większy niż odpowiadający mu błąd kątowy wzoru (13), przyjmijmy na błąd średni μ'_A w miejsce wzoru (34) wzór następujący:

$$\mu'_A = \frac{2\mu}{3\rho} a m \sqrt{m} = \frac{\mu}{309400} a m \sqrt{m}. \quad (35)$$

(Przyjęcie wzoru (35) powoduje, że wartość na μ możemy przyjąć w obu wzorach (13) i (35) jednakową):

Błąd śr. względny długości A jest zatem:

$$\frac{\mu'_A}{Am} = \frac{\mu'_A}{A} = \frac{2\mu}{3\rho} \sqrt{m} = \frac{\mu \sqrt{m}}{309400}. \quad (35a)$$

Urabiając stosunek błędów względnych podstawy a do jej rozwinięcia:

$$\frac{\mu_a}{a} : \frac{2\mu \sqrt{m}}{3\rho} = \operatorname{tg} \kappa = \frac{3\mu_a \rho}{2\mu a \sqrt{m}} = \approx 309400 \frac{\mu_a}{a \mu \sqrt{m}}, \quad (36)$$

obliczamy następnie jak poprzednio całkowity błąd względny na długości A :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_A}{A} &= \frac{\mu_a}{a \sin \kappa} = \frac{\mu'_A}{A \cos \kappa} = \\ &= \frac{2\mu}{3\rho \cos \kappa} \sqrt{m} = \approx \frac{\mu \sqrt{m}}{309400 \cos \kappa}. \end{aligned} \quad (36a)$$

Powracając do wyznaczenia błędu średniego długości S , otrzymamy ze względu na związek (30):

$$\mu^2_S = r \mu^2_A; \quad (37)$$

a dalej:
$$\frac{\mu_S}{S} = \frac{\sqrt{r}}{S} \mu_A = \frac{\sqrt{r}}{rA} \mu_A = \frac{\mu_A}{A} \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (38)$$

Zatem błąd względny długości S , otrzymany tą drogą, wynosi:

$$\frac{\mu_S}{S} = \frac{2\mu}{3\rho \cos \kappa} \sqrt{\frac{m}{r}} = \approx \frac{\mu}{309400 \cos \kappa} \sqrt{\frac{m}{r}}. \quad (39)$$

Dla porównania dokładności obu omawianych metod pomiaru przedkładam dalsze dwie tabele III i IV, (p. str. 322), z których pierwsza podaje błędy względne długości S przy zastosowaniu łańcuchów trójkątów opartych na podstawach $b = 8 \text{ km}$, zaś druga błędy względne długości S mierzonych przy pomocy r oddzielnych odcinków A , przy czym $A = a \cdot m$ powstały z rozwinięcia podstaw $a = 0.5 \text{ km}$. Wyniki dobrano w ten sposób, że $S = Bn$ względnie $S = Bp$, a zarazem około $A r = a m r$.

Błąd względny podstaw $b = 8 \text{ km}$ przyjęto $\frac{1}{1000000}$, natomiast błąd względny podstaw $a = 0.5 \text{ km}$ wynosi wedle wzoru (33):

$$\frac{\mu_a}{a} = \frac{\mu_b}{b} \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{1000000} \cdot 4 = \frac{1}{250000}.$$

Porównanie tabel III i IV wykazuje wielką przewagę sposobu pomiaru długości odcinkami nad pomiarem przy użyciu łańcuchów trójkątów. I tak biorąc na uwagę $S = 128 \text{ km}$ otrzymujemy przy użyciu łańcuchów trójkątów w najkorzystniejszym przypadku (kwadraty z przekątniami) błąd względny długości S około $\frac{1}{224000}$, podczas gdy przy użyciu przy pomiarze wyłącznie 4000-metrowych odcinków (założenie dość niekorzystne), otrzymujemy błąd względny tej samej długości równy około $\frac{1}{567000}$, który spada dla odcinków 3000-metrowych do około $\frac{1}{739000}$.

Możnaby jednak postawić zarzut, że przy mierzeniu długości S natrafimy po drodze wyjątkowo na przeszkody dłuższe niż 5000 m (jakie wykazano w tabeli IV), dlatego podaję jeszcze przypadek, w którym

III
Pomiar długości S przy użyciu łańcuchów trójkątów.

$b=8 \text{ km}, \frac{\mu_b}{b} = \frac{1}{1000000}, \frac{\mu_\lambda}{\lambda} = \frac{1}{300000}, \text{tg } \nu = 0,3, \mu = 1'', B = 32 \text{ km}$						
Łańcuch złożony z	Polożenie boku podstawowego B	$S =$	z wzorów (26)–(29) $\text{tg } \psi$ (w zaokrągleniu)	$\frac{\mu_s}{S} = \frac{\mu'_s}{S \cos \psi}$		
				dla $n=3$ ($S=96 \text{ km}$)	dla $n=4$ ($S=128 \text{ km}$)	dla $n=5$ ($S=160 \text{ km}$)
trójkątów równob. \triangle	na skraju łańcucha	nB	$\frac{309400}{287800 \sqrt{n}} = \frac{1,077}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{151700}$	$\frac{1}{136210}$	$\frac{1}{124760}$
kwadratów z przekąt. \square	"	"	$\frac{357250}{287800 \sqrt{n}} = \frac{1,244}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{167550}$	$\frac{1}{151700}$	$\frac{1}{139630}$
				dla		
				$p=3$ ($S=96 \text{ km}$)	$p=4$ ($S=128 \text{ km}$)	$p=5$ ($S=160 \text{ km}$)
trójkątów równob. \triangle	pośrodku łańcucha	pB	$\frac{618800}{287800 \sqrt{p}} = \frac{2,154}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{223890}$	$\frac{1}{210530}$	$\frac{1}{199310}$
kwadratów z przekąt. \square	"	"	$\frac{714500}{287800 \sqrt{p}} = \frac{2,487}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{235640}$	$\frac{1}{223890}$	$\frac{1}{213650}$

IV
Pomiar długość S przy użyciu r odcinków A , mierzonych pośrednio.

$a=500 \text{ m}, \frac{\mu_a}{a} = \frac{1}{250000}, \frac{\mu'_A}{A} = \frac{\mu \sqrt{m}}{309400}, \mu = 1''^*$						
m	A	$\text{tg } \alpha = \frac{309400}{250000 \sqrt{m}}$	$\frac{\mu_s}{S} = \frac{1}{309400} \sqrt{\frac{m}{r}}$			
10	5000 m	0,39136	$r=19$ $\frac{1}{897140}$	95 km	$r=26$ $\frac{1}{464590}$	180 km
			$r=32$ $\frac{1}{515420}$	160 km	$r=40$ $\frac{1}{633840}$	160 km
8	4000 m	0,43756	$r=24$ $\frac{1}{490980}$	128 km	$r=32$ $\frac{1}{566910}$	128 km
			$r=40$ $\frac{1}{637560}$	160 km	$r=53$ $\frac{1}{820730}$	169 km
6	3000 m	0,50524	$r=32$ $\frac{1}{637560}$	160 km	$r=43$ $\frac{1}{738940}$	129 km
			$r=48$ $\frac{1}{911360}$	128 km	$r=64$ $\frac{1}{1052380}$	128 km
4	2000 m	0,61880	$r=48$ $\frac{1}{911360}$	128 km	$r=80$ $\frac{1}{1176560}$	160 km

długość $S=128 \text{ km}$ składa się z czterech równych części, na które przypadają różne odcinki; i tak na:

$\frac{S}{4} = 32 \text{ km}$	przypada $m=64$ bezpośrednio mierzonych odcinków $a=500 \text{ m}$,
$\frac{S}{4}$	" $r_1=16$ pośrednio " " $A_1=2000 \text{ m}$,
$\frac{S}{4}$	" $r_2=8$ " " " $A_2=4000 \text{ m}$,
$\frac{S}{4}$	" $r_3=4$ " " " $A_3=8000 \text{ m}$.

Wobec powyższych założeń jest:

$$\mu_s^2 = m \mu_a^2 + r_1 \mu_{A,1}^2 + r_2 \mu_{A,2}^2 + r_3 \mu_{A,3}^2, \quad (40)$$

a ponieważ [z uwzględnieniem wzoru (35)]:

$$\mu_{A,i}^2 = m_i^2 \mu_a^2 + \frac{S^2}{16 r_i^2} \left(\frac{\mu}{309400} \right)^2 m_i, \quad (41)$$

*) Przyjęcie usprawiedliwione wobec niekorzystnie przyjętego błędu rozwinięcia $\frac{\mu'_A}{A}$.

przeto:

$$\mu_s^2 = m \mu_a^2 + r_1 m_1^2 \mu_a^2 + \frac{S^2 m_1}{16 r_1} \left(\frac{\mu}{309400} \right)^2 + r_2 m_2^2 \mu_a^2 + \frac{S^2 m_2}{16 r_2} \left(\frac{\mu}{309400} \right)^2 + r_3 m_3^2 \mu_a^2 + \frac{S^2 m_3}{16 r_3} \left(\frac{\mu}{309400} \right)^2 \quad (42)$$

Kładąc, jak dotychczas $\mu_a : a = 1 : 250000$ oraz $\mu = 1''$, oraz dzieląc (42) przez $S^2 = 16 m^2 a^2$ i pierwiastkując, otrzymujemy ze względu na to, że $309400^2 = 250000^2 \times 1,2376^2$:

$$\frac{\mu_s}{S} = \frac{1}{1000000} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + 1,2376^2 \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} \right)},$$

lub po wstawieniu wartości: (43)

$$\frac{\mu_s}{S} = \frac{1}{1000000} \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 1,2376^2 \left(\frac{1}{4} + 1 + 4 \right)}, \quad (44)$$

$$\frac{\mu_s}{S} = \frac{1}{461500}$$

Widzimy, że nawet dla tak niekorzystnych założeń błąd względny długości S wypada przy zastosowaniu nowej metody pomiaru znacznie mniejszy niż przy użyciu łańcuchów trójkątów.

Pozatem trzeba jeszcze zwrócić uwagę na to, że gdy odległość boków podstawowych B (baz) wynosi 300 km , a więc przy założeniu dość gęstym podstaw, łańcuch trójkątów oparty na boku B ma właściwie długość około 150 km , a zatem błędy wypadają jeszcze większe. Naturalnie błędy te wzrastają jeszcze znacznie więcej, gdy odległość podstaw jest większą np. 400 lub 500 km . W tych przypadkach nowa metoda pomiaru wykazuje bardzo silną przewagę nad dotychczas używaną.

V. Bliższe omówienie triangulacji bez pomiarów kątowych.

Nim przystąpimy do omówienia bliższych szczegółów podanej tu metody triangulacyjnej, należy zaznaczyć zasadniczą różnicę, jaka istnieje między siećmi nietyłko rzędu I-go i rzędów wyższych (II, III i t. d.), ale nawet między siećmi rzędu I-go głównymi, a siećmi tegoż rzędu wypełniającymi.

Sieci główne są podstawą dla wszelkich dalszych pomiarów triangulacyjnych; w konsekwencji powinny zatem pola ich trójkątów obejmować możliwie jak naj-

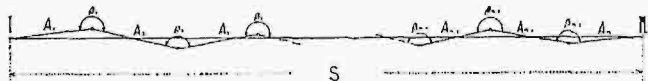
większe obszary, jednak przy osiągnięciu przy pomiarach możliwie najdokładniejszego wyznaczenia długości ich boków. W ten sposób powstaje z boków owych sieci niejako sztywna rama, a wszelkie pomiary triangulacyjne dalszych sieci mają charakter tylko interpolacyjny. Błędy sieci głównej przenoszą się na cały system triangulacyjny równocześnie wyrównywany, podczas gdy błędy sieci innych mają znaczenie tylko lokalne.

W myśl powyższej zasady starano się obierać boki trójkątów głównych możliwie jak największe, używając dla pomiarów kątowych jak najdokładniejszych teodolitów; przyczem jednak okazało się, że w praktyce można zastosować najczęściej trójkąty o bokach wynoszących zaledwie trzydzieści kilka kilometrów, a to z powodu przeszkód terenowych, atmosferycznych refrakcji bocznej i t. p.

Jeżeli zatem chcemy przy tejsamej dokładności wyznaczenia wierzchołków trójkątów zwiększyć ich pole, nie może to nastąpić przy użyciu dotychczasowej metody, ale trzeba wzajemne położenie wierzchołków trójkątów wyznaczyć metodą inną, o korzystniejszym prawie przenoszenia błędów.

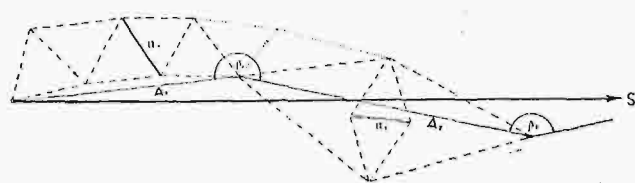
Metoda triangulacji bez pomiarów kątowych spełnia powyżej postawione zadanie, gdyż można przy jej użyciu nie tylko zwiększyć pola poszczególnych trójkątów, ale także i dokładność wyznaczenia ich boków. Oczywiście, że nie zawsze będzie jej można użyć w praktyce ze względu na dość znaczną ilość podstaw, które należy obrać w pobliżu boków sieci głównej. Nie będzie to jednak rzeczą tak trudną, jakby się na pierwszy rzut oka zdawało, tak że będzie ją można zastosować nie tylko w terenie płaskim, ale nawet i pagórkowatym.

Trójkąty (w przybliżeniu równoboczne) sieci głównej będziemy starali się zakładać jak największe, ograniczymy jednak długości ich boków S do $0.02 a_0$ (a_0 wielka półkula elipsoidy odniesienia), ze względów na późniejsze sieci wypełniające, oraz i tę okoliczność, że przy bokach około $0.02 a_0$ nie potrzeba jeszcze zamieniać kątów sferoidalnych na sferyczne. Dla pomierzenia długości I—II wynoszącej około $0.02 a_0$, odpowiadającej około 128 km , obieramy w przybliżeniu na linii I—II poligon, łączący oba te punkty, o bokach od 2 do 10 (względnie wyjątkowo nieco więcej) km , jak to uwidoczniło na rys. 5.



Rys. 5.

Długości poszczególnych boków tego poligonu I, $1=A_1$, $2=A_2$ itd. otrzymujemy przez rozwinięcie odpowiednio zakładanych podstaw, jak przedstawiono na rys. 6. Kąty wierzchołkowe β otrzymujemy



Rys. 6.

bądź przez ich bezpośredni pomiar, bądź obliczając je z dwu sąsiednich sieci naraz wziętych. Następnie wyznaczamy na podstawie przybliżonych współrzędnych geograficznych punktów I i II promień kuli, na której przeprowadzamy obliczenie współrzędnych sferycznych

wierzchołków poligonu I—II, przyczem — o ile długość łuku I—II nie przekracza $0.02 a_0$ — można przyjąć, że odpowiada on łukowi na kuli o promieniu $\frac{1}{2}(R_I + R_{II})$, (R_I i R_{II} są średnimi promieniami krzywizny dla szerokości geogr. φ_I i φ_{II}). Na tej kuli obliczamy przy pomocy łatwego rachunku długość łuku I—II z poligonu sferycznego między temi punktami o bokach A i kątach β . Ponieważ każdy bok powyższego poligonu będzie wyznaczony z inną dokładnością należy wyznaczyć błąd średni łuku I—II, a to w celu wprowadzenia stosownych wag przy późniejszym wyrównaniu sieci.

Błąd długości I—II omówiliśmy w poprzednim rozdziale, zakładając, że poszczególne odcinki A leżą ściśle na łuku I—II, ponieważ jednak wierzchołki poligonu I—II będą leżały bardzo blisko łuku I—II (co się da zawsze uskuteczyć w praktyce mimo przeszkód terenowych, tylko że czasem trzeba będzie kąt β wyznaczyć pośrednio z dwu sąsiadujących ze sobą sieci — jak to zaznaczono na rys. 6 —), można poprzednio wprowadzone błędy średnie dla długości I—II uważać za odpowiednie w naszym przypadku.

Natomiast błąd długości S spowodowany błędami kątów β jest zupełnie bez znaczenia, jak to łatwo można udowodnić, przy pomocy średniego błędu poprzecznego, który i pod względem azymutalnym jest dla nas bez znaczenia, gdyż poligonu I—II użyjemy tylko dla wyznaczenia długości S .

W ten sposób powstanie sieć trójkątów o bokach około $0.02 a_0$ mierzonych pośrednio; natomiast kąty tych trójkątów n. p. trójkąta I—II—III o bokach a , b , c i kątach α , β , γ wyznaczymy na podstawie wzoru:

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{s-b}{R} \sin \frac{s-c}{R}}{\sin \frac{s}{R} \sin \frac{s-a}{R}}}, \quad (\text{z kontrolami } \sin \frac{\alpha}{2} \text{ lub } \cos \frac{\alpha}{2}), \quad (46)$$

przyczem R jest odwrotnością pierwiastka miary krzywizny w środku ciężkości trójkąta $K = \frac{1}{3}(K_I + K_{II} + K_{III})$:

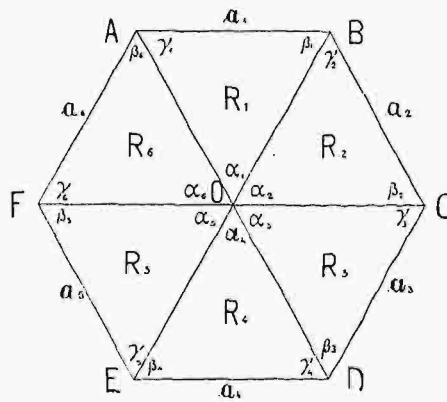
$$R = \frac{1}{\sqrt{K}}, \quad \dots \dots \dots (47)$$

zaś K_I , K_{II} i K_{III} są miarami krzywizny (odwrotnościami kwadratów średnich promieni) w wierzchołkach trójkąta.

Ponieważ trójkąty o bokach około $0.02 R$ obejmują obszar około 7000 km^2 , główna sieć trójkątów przy zastosowaniu opisywanej tu metody dla rozmierzania kraju nawet stosunkowo dość dużego będzie składała się z niewielu trójkątów.

VI. Wyrównanie głównej sieci trójkątów, o bokach mierzonych i sieci wypełniających.

Ponieważ trójkąty sieci głównej będą mniej więcej równoboczne, przeto sześć trójkątów zgrupowanych dookoła pewnego punktu utworzy sieć promienistą, jak to uwidoczniło na rys. 7.



Rys. 7.

Sieć ta obejmująca obszar około 42000 km^2 wymaga spełnienia tylko jednego geometrycznego warunku, a mianowicie, aby suma kątów przy punkcie środkowym była równa 360° .

Poszczególne α obliczamy

*

z wzoru (46), który dla oznaczeń na rys. 7 należy napisać we formie następującej:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{s_i - r_i}{R_i} \sin \frac{s_i - r_k}{R_i}}{\sin \frac{s_i}{R_i} \sin \frac{s_i - \alpha_i}{R_i}}}, \quad \dots \quad (48)$$

przyczem kontrolą mogą być odpowiednie wzory na $\sin \frac{\alpha}{2}$ i $\cos \frac{\alpha}{2}$, a prócz tego osobno obliczone ekscesy sferyczne i dalsze dwa kąty poszczególnych trójkątów:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{s_i - \alpha_i}{R_i} \sin \frac{s_i - r_k}{R_i}}{\sin \frac{s_i}{R_i} \sin \frac{s_i - r_i}{R_i}}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma_i}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{s_i - \alpha_i}{R_i} \sin \frac{s_i - r_i}{R_i}}{\sin \frac{s_i}{R_i} \sin \frac{s_i - r_k}{R_i}}}, \end{aligned} \right\} \dots \quad (49)$$

$s_i = \frac{\alpha_i + r_i + r_k}{2}$, R_i promień kuli, wyznaczony dla trójkąta o kątach α_i , β_i i γ_i z krzywizn jego wierzchołków.

Warunek „zamknięcia horyzontu” dookoła punktu 0 opiewa dla kątów α bezbłędnych:

$$\sum_{i=1}^6 \alpha - 360^\circ = 0, \quad \dots \quad (50)$$

natomiast ze względu na to, że α są obliczone z boków pomierzonych otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^6 \alpha - 360^\circ = \omega, \quad \dots \quad (51)$$

a ostatecznie:

$$\delta \alpha_1 + \delta \alpha_2 + \delta \alpha_3 + \delta \alpha_4 + \delta \alpha_5 + \delta \alpha_6 + \omega = 0. \quad (52)$$

Jeżeli oznaczymy w trójkącie boki literami a , b , c , a odpowiadające im kąty α , β , γ , to z uwagi na związek:

$$\cos \frac{\alpha}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos \alpha, \quad \dots \quad (53)$$

otrzymamy po zróżniczkowaniu:

$$\left. \begin{aligned} -\sin \frac{\alpha}{R} \frac{\Delta \alpha}{R} &= -\sin \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} \frac{\Delta b}{R} + \cos \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \frac{\Delta c}{R} - \\ &\quad - \cos \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \frac{\Delta c}{R} + \sin \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} \frac{\Delta c}{R} - \\ &\quad - \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \sin \alpha \Delta \alpha, \end{aligned} \right\} (54)$$

a w następstwie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial a} &= \frac{1}{\sin \frac{b}{R} \sin \gamma R} = \frac{1}{\sin \frac{c}{R} \sin \beta R} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial b} &= \left(-\operatorname{ctg} \frac{c}{R} + \operatorname{ctg} \frac{b}{R} \cos \alpha \right) \frac{1}{R} = -\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\sin \frac{b}{R}} \frac{1}{R} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial c} &= \left(-\operatorname{ctg} \frac{b}{R} + \operatorname{ctg} \frac{c}{R} \cos \alpha \right) \frac{1}{R} = -\frac{\operatorname{ctg} \beta}{\sin \frac{c}{R}} \frac{1}{R} \end{aligned} \right\} (55)$$

Ze względu na związki (55) otrzymamy warunek (52) (przy oznaczeniach odnoszących się do rys. 7) we formie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial a_2} \delta a_2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial a_3} \delta a_3 + \frac{\partial \alpha_4}{\partial a_4} \delta a_4 + \frac{\partial \alpha_5}{\partial a_5} \delta a_5 + \\ + \frac{\partial \alpha_6}{\partial a_6} \delta a_6 + \left(\frac{\partial \alpha_6}{\partial r_1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial r_1} \right) \delta r_1 + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial r_2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial r_2} \right) \delta r_2 + \\ + \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial r_3} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial r_3} \right) \delta r_3 + \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial r_4} + \frac{\partial \alpha_4}{\partial r_4} \right) \delta r_4 + \\ + \left(\frac{\partial \alpha_4}{\partial r_5} + \frac{\partial \alpha_5}{\partial r_5} \right) \delta r_5 + \left(\frac{\partial \alpha_5}{\partial r_6} + \frac{\partial \alpha_6}{\partial r_6} \right) \delta r_6 + \omega = 0, \end{aligned} \right\} (56)$$

a ponieważ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i}{\partial a_i} &= \operatorname{cosec} \frac{r_i}{R_i} \operatorname{cosec} \gamma_i \frac{\rho}{R_i} = \operatorname{cosec} \frac{r_k}{R_i} \operatorname{cosec} \beta_i \frac{\rho}{R_i}, \\ \text{zaś } \frac{\partial \alpha_i}{\partial r_i} &= -\operatorname{ctg} \gamma_i \operatorname{cosec} \frac{r_i}{R_i} \cdot \frac{\rho}{R_i}, \\ \frac{\partial \alpha_i}{\partial r_k} &= -\operatorname{ctg} \beta_i \operatorname{cosec} \frac{r_k}{R_i} \cdot \frac{\rho}{R_i}, \end{aligned} \right\} (57)$$

przyczem $\rho'' = 206265''$, będzie ostatecznie:

$$\left. \begin{aligned} \rho \operatorname{cosec} \frac{r_1}{R_1} \operatorname{cosec} \gamma_1 \frac{\delta a_1}{R_1} + \rho \operatorname{cosec} \frac{r_2}{R_2} \operatorname{cosec} \gamma_2 \frac{\delta a_2}{R_2} + \dots \\ \dots + \rho \operatorname{cosec} \frac{r_6}{R_6} \operatorname{cosec} \gamma_6 - \rho \left(\operatorname{ctg} \beta_6 \operatorname{cosec} \frac{r_1}{R_6} \cdot \frac{1}{R_6} + \right. \\ \left. + \operatorname{ctg} \gamma_1 \operatorname{cosec} \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_1} \right) \delta r_1 - \rho \left(\operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{cosec} \frac{r_2}{R_1} \cdot \frac{1}{R_1} + \right. \\ \left. + \operatorname{ctg} \gamma_2 \operatorname{cosec} \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{1}{R_2} \right) \delta r_2 - \dots \\ \dots - \rho \left(\operatorname{ctg} \beta_6 \operatorname{cosec} \frac{r_5}{R_5} \cdot \frac{1}{R_5} + \right. \\ \left. + \operatorname{ctg} \gamma_6 \operatorname{cosec} \frac{r_6}{R_6} \cdot \frac{1}{R_6} \right) \delta r_6 + \omega = 0. \end{aligned} \right\} (58)$$

Ponieważ każdy bok a i r jest wyznaczony z różną dokładnością, należy zastosować przy wyrównaniu wagi odwrotnie proporcjonalne do kwadratów błędów boków a i r .

Oczywiście, że gdy ilość punktów centralnych, dookoła których zgrupowano trójkąty będzie c , zwiększy się i ilość geometrycznych warunków z jednego na c warunków (gdyż pola trójkątów nie pokrywają się), do których trzeba dołączyć warunki Laplace'a w przypadku, gdy na niektórych wierzchołkach (lub na wszystkich) wykonano odpowiednie obserwacje astronomiczne.

Jak tedy widać wyrównanie jest w przypadku tego rodzaju sieci głównych bardzo proste.

Pozostaje jeszcze do omówienia kwestja sieci wypełniających poszczególne trójkąty sieci głównej.

Po wyrównaniu sieci głównych, a temsamem i ustaleniu długości S poszczególnych boków trójkątów, przystępujemy do wyrównania poligonów o bokach A , przy pomocy których obliczaliśmy niewyrównane długości boków trójkątów. W ten sposób uzyskujemy w pobliżu ortodrom łączących wierzchołki punktów triangulacyjnych dość znaczną liczbę punktów, które możemy uważać za punkty I-rzędne. Jeżeli długości boków trójkątów pierwszorzędnych wyznaczanych kątowno przyjmujemy około trzydziestu kilku *km*, powstanie w polu każdego trójkąta głównego miejsce tylko na 3 punkty tr., których położenie łatwo wyznaczymy nawiązując się do poprzednio w pobliżu boków trójkątów ustalonych punktów. Sieci wypełniające I-rzędne będą zatem bardzo niewielkie i każda będzie się mieściła w jednym z trójkątów głównych, przez co wyrównanie ich będzie również bardzo proste.

VII. Wnioski ostateczne.

Zestawiając zalety jak też i wady sieci triangulacyjnych bez pomiarów kątowych należy zaznaczyć, jak następuje:

a) Na korzyść nowej metody przemawia:

1. znaczne zwiększenie dokładności wyznaczenia położenia punktów sieci głównej;
2. obejmowanie przy niewielkiej ilości punktów sieci głównej bardzo wielkich przestrzeni, (a przeto możliwość łączenia sieci oddzielnie dla siebie założonych bez zakładania gęstej sieci punktów);
3. powstanie w pobliżu boków sieci głównej wielkiej ilości punktów użytych na początku jako punktów poligonowych dla wyznaczenia długości boków sieci,

na których opieramy następnie sieci wypełniające pola poszczególnych trójkątów;

4. łatwe i przejrzyste wyrównanie sieci głównych;

5. łatwe nawiązanie punktów sieci wypełniających (trójkąty) do sieci głównej;

6. odpadają zupełnie koszta wież triangulacyjnych, co stanowi znaczną oszczędność, równoważącą koszta zakładania i pomiaru baz.

b) Przeciw zastosowaniu podanej przezemnie metody przemawiają właściwie tylko trudności (względnie koszta), jakie mogą się wyłonić przy obiorze względnie

rozwinieciu dość licznych — aczkolwiek krótkich — podstaw.

Jak z powyższego zestawienia wynika, metoda triangulacji bez pomiarów kątowych jest w krajach nizinnych i lekko pagórkowatych bezwarunkowo bardzo korzystną, natomiast może się okazać w terenach trudnych zbyt kosztowną; jeżeli nam jednak zależy na zwiększeniu dokładności osiąganą dotychczas przy triangulacji, należy jej dać bezwzględnie pierwszeństwo przed metodą dotychczas używaną.

Prof. A. Kuryłło.

Żelbetowe konstrukcje szkieletowe w budowie wysokich domów.

Jak wiadomo, ojczyzną wysokich domów, zwanych także „drapaczami chmur“ lub nawet „niebotykami“, jest Ameryka. Tam też, mając należyte uzasadnienie, rozwinęły się i ustaliły typy i sposoby wykonania tak pod względem ogólnego ukształtowania budowli, jak i co do zastosowania odpowiednich materiałów budowlanych.

Wprawdzie w Europie niekoniecznie musimy się posługiwać wzorami amerykańskimi i wysokie domy nie muszą i nie powinny zapełniać naszych miast przyszłości, to przecież w niektórych wypadkach ustrój taki wskazany być może warunkami miejscowymi.

Przy rozpatrywaniach wstępnych w wielu umysłach powstaje wątpliwość czy zastosować szkielet nośny stalowy czy też żelbetowy, względnie kombinowany. Utarło się niezbyt uzasadnione twierdzenie, że dla budowli szkieletowych niższych wskazany jest szkielet nośny żelbetowy, natomiast dla budowli o znacznych wysokościach jedynym rozwiązaniem jest szkielet stalowy.

Niewątpliwie, warunków budowy wysokich domów w Ameryce nie można porównywać z warunkami naszymi. Możemy jednak mieć i dla naszych stosunków pewną orientację co do racjonalności zastosowanego ustroju w budowie wysokich domów, jeżeli rozpatrzemy ustrój, wykonanego przed paru laty, pierwszego budynku tego typu w Budapeszcie¹⁾. W związku z rozbudową budynku kasy chorych przewidziano w projekcie część środkową w postaci wieży. Wieża ma u podstawy przekrój kwadratowy $17,85 \times 17,85$ m; wysokość nad terenem wynosi 68,80 m. Ponad parterem posiada wieża 17 pięter (rys. 1). Na wysokości 43 m przekrój wieży przechodzi w ośmiobok, a na wysokości 56 m powraca do kwadratu $11,85 \times 11,85$ m. Ustrój nośny wieży stanowi szkielet żelbetowy.

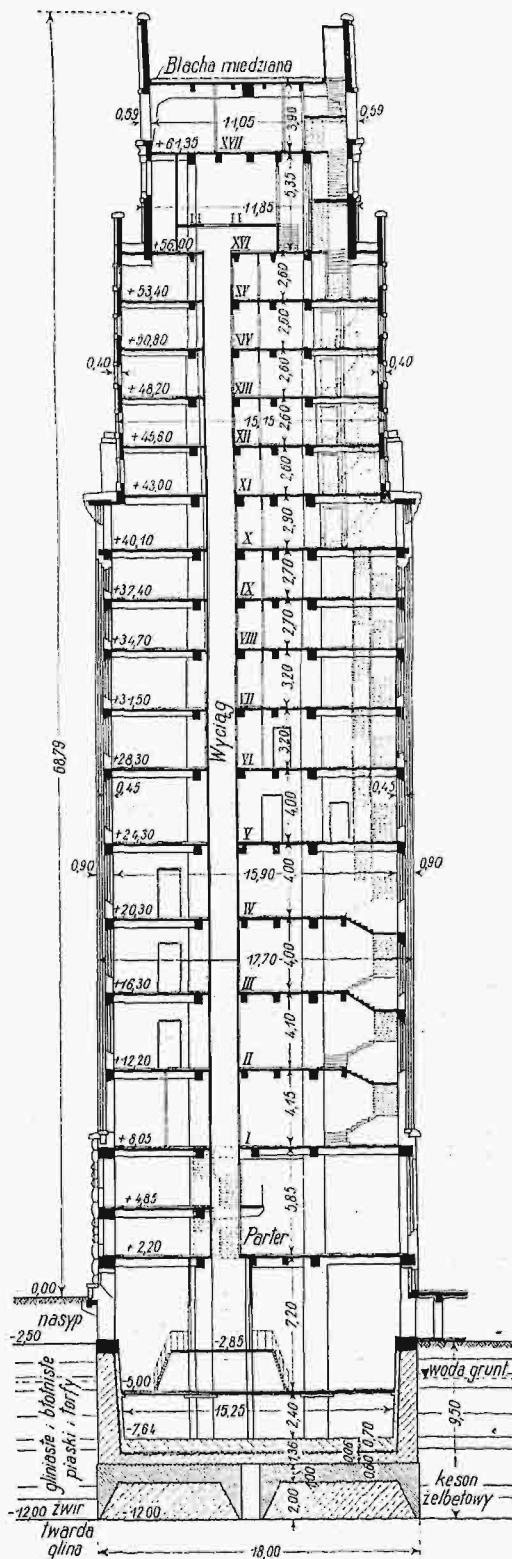
Pytanie czy należy stosować szkielet stalowy czy żelbetowy wyłoniło się również przy tej budowie. Zwolennicy szkieletu stalowego nie tylko twierdzili, że szkielet żelbetowy będzie droższy, ale nadto, że w Ameryce budowli o takich wysokościach nie wykonywano z zastosowaniem szkieletu żelbetowego. Okazuje się jednak (według podanego źródła), że np. w r. 1929 wykonano w Ameryce następujące żelbetowe wysokie domy:

w Toronto	dom o wysokości 94,5 m	o 26 piętrach
„ Seattle	„	84 „ „ 23 „
„ Minneapolis	„	80 „ „ 19 „

Już w r. 1922 wykonano w Dallas (Texas) żelbetowy dom 78 m wysoki o 18 piętrach, w latach 1923 do 1925 dom o wysokości 100 m w Montevideo.

Ostatecznie ustrój żelbetowy, przy rozbudowie budynku kasy chorych w Budapeszcie, okazał się tańszy od stalowego, a pozatem lepiej odpowiadał wa-

¹⁾ H. Székely: „Das erste Turmhaus in Budapest“, *Beton u. Eisen* 1932.



Rys. 1. Przekrój pionowy części środkowej budynku kasy chorych w Budapeszcie.

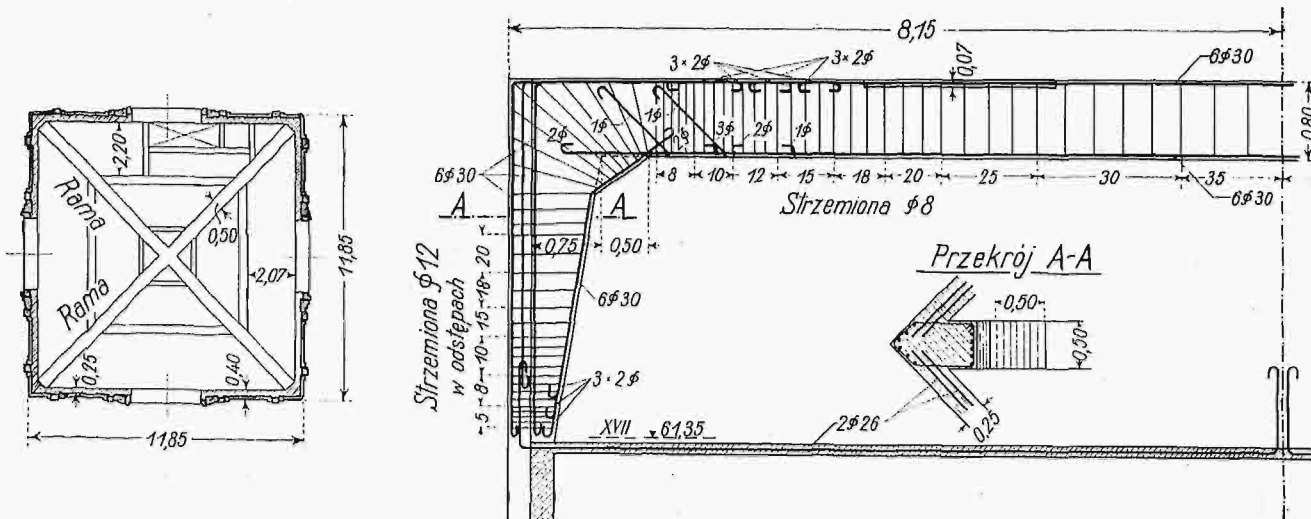
runkom architektonicznym. Wieża otrzymała w najniższych dwóch piętrach okładzinę kamienną, powyżej okładzinę z klinkierów.

Do wykonania konstrukcji nośnej użyto betonu o stosunku mieszanki 300 kg cementu marki „Citadur“ na 1 m³ betonu. Kontrolę betonu przeprowadzano przy pomocy prób kostkowych i przy pomocy belek próbnych. Kostki o długości krawędzi 20 cm wykonano przy temperaturze - 3° C. Wytrzymałość kostkowa wyno-

Stropy górne (dla archiwum) obliczono dla obciążenia użytkowego 1000 kg/m², stropy dolne (lokale biurowe) liczone na 400 kg/m².

Całość konstrukcji, złożona ze słupów zewnętrznych i wewnętrznych, złączonych stropami, obliczano jako wielopiętrowy ustrój ramowy.

Każdy ze słupów wewnętrznych przenosi u spodu obciążenie 1000 t. Słupy te, przy założeniu dopuszczalnego ciśnienia 50 kg/cm², otrzymały przekrój kwadra-



Rys. 2. Ustrój dachu części środkowej budynku kasy chorych w Budapeszcie.

siła po 4 dniach 418 kg/cm², po 7 dniach 496 kg/cm². Kontrola betonu przy pomocy belek próbnych, wykonywanych przy temperaturze + 5° C, okazała po 48 godzinach wytrzymałość na ciśnienie 473 kg/cm².

Wnętrze wieży posiada ubikacje przeznaczone na biura i archiwum, a nadto wyciąg i klatki schodowe.

Najwyższa część konstrukcji żelbetowej, tworząca dach płaski, wytworzona jest z dwóch krzyżujących się ram dwuprzegubowych (rys. 2), o rozpiętości 15,60 m w świetle.

towy 1,30×1,30 m, a wzmocnienie wkładkami wynosiło 2,5%.

Oparcie fundamentów na twardej glinie uskutecz-niono przy pomocy fundacji pneumatycznej z zastosowaniem kesonów żelbetowych.

Powyższy przykład żelbetowej konstrukcji szkieletowej stwierdza (w warunkach niezbyt różnych od naszych) możliwość ekonomicznego zastosowania ustroju żelbetowego do budowy domów o znacznych wysokościach.

Inż. Mieczysław Bessaga.

Zastosowanie zasady Castigliana do obliczania ram wieloprzęsłowych.

(Ciąg dalszy).

B) Ramy o słupach u dołu doskonale utwierdzonych.

W tym wypadku dla obliczenia danego ustroju ramowego n -przęsłowego zachodzi potrzeba wyznaczenia $3(n+1)$ niewiadomych, a to $2(n+1)$ reakcyj pionowych i poziomych $A_0, A_1, \dots, A_n, H_0, H_1, \dots, H_n$ oraz $(n+1)$ momentów utwierdzenia $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$.

Dla uzyskania równań możliwie symetrycznej postaci wprowadzimy jako dodatkowe szukane niewiadome nie same momenty utwierdzenia M_i , lecz ilorazy $\frac{M_i}{l}$, (posiadające wymiar sił) t. j. ilorazy z momentów utwierdzenia przez długość przęsła poziomego.

Tym sposobem otrzymamy ostatecznie układ równań linjowych (V), złożony z $(3n+4)$ równań, zawierający $3n+4$ niewiadomych: $A_0, A_1, \dots, A_n, H_0, H_1, \dots, H_n, \frac{M_0}{l}, \frac{M_1}{l}, \dots, \frac{M_n}{l}, t_{00}, t_{01}$, następującego kształtu:

$$(V) \left\{ \begin{aligned} a_{00} A_0 + \dots + a_{0,n-1} A_{n-1} + b_{00} H_0 + \dots + b_{0,n-1} H_{n-1} + \\ + e_{00} \frac{M_0}{l} + \dots + e_{0,n-1} \frac{M_{n-1}}{l} + n \cdot t_{00} = \psi_{00} \end{aligned} \right.$$

$$(V) \left\{ \begin{aligned} a_{n-1,0} A_0 + \dots + a_{n-1,n-1} A_{n-1} + b_{n-1,0} H_0 + \dots \\ + b_{n-1,n-1} H_{n-1} + e_{n-1,0} \frac{M_0}{l} + \dots \\ + e_{n-1,n-1} \frac{M_{n-1}}{l} + 1 \cdot t_{00} = \psi_{n-1,0} \\ c_{00} A_0 + \dots + c_{0,n-1} A_{n-1} + d_{00} H_0 + \dots + d_{0,n-1} H_{n-1} + \\ + f_{00} \frac{M_0}{l} + \dots + f_{0,n-1} \frac{M_{n-1}}{l} + 1 \cdot t_{01} = \psi_{01} \\ \dots \\ c_{n-1,0} A_0 + \dots + c_{n-1,n-1} A_{n-1} + d_{n-1,0} H_0 + \dots \\ + d_{n-1,n-1} H_{n-1} + f_{n-1,0} \frac{M_0}{l} + \dots \\ + f_{n-1,n-1} \frac{M_{n-1}}{l} + 1 \cdot t_{01} = \psi_{n-1,1} \\ 0 \cdot A_0 + \dots + 0 \cdot A_{n-1} + 0 \cdot H_0 + \dots + d_{nn} H_n + \\ + 0 \cdot \frac{M_0}{l} + \dots + f_{nn} \frac{M_n}{l} + 1 \cdot t_{01} = \psi_{n1} \\ g_{00} A_0 + \dots + g_{0,n-1} A_{n-1} + h_{00} H_0 + \dots + h_{0,n-1} H_{n-1} + \end{aligned} \right.$$

$$(V) \begin{cases} +m_{00} \frac{M_0}{l} + \dots + m_{0,n-1} \frac{M_{n-1}}{l} + 1 \cdot t_{00} = \psi_{02} \\ \dots \\ g_{n-1,0} A_0 + \dots + g_{n-1,n-1} A_{n-1} + \dots + h_{n-1,0} H_0 + \dots \\ + h_{n-1,n-1} H_{n-1} + m_{n-1,0} \frac{M_0}{l} + \dots \\ + m_{n-1,n-1} \frac{M_{n-1}}{l} + 1 \cdot t_{00} = \psi_{n-1,2} \\ 0 \cdot A_0 + \dots + 0 \cdot A_{n-1} + 0 \cdot H_0 + \dots + h_{nn} H_n + \\ + 0 \cdot \frac{M_n}{l} + \dots + m_{nn} \frac{M_n}{l} + 1 \cdot t_{00} = \psi_{n2} \\ n \cdot A_0 + \dots + 1 \cdot A_{n-1} + 0 \cdot H_0 + \dots + 0 \cdot H_n + \\ + \frac{M_0}{l} \cdot 1 + \dots + \frac{M_n}{l} \cdot 1 = \psi_2 \\ 0 \cdot A_0 + \dots + 0 \cdot A_{n-1} + 1 \cdot H_0 + \dots + 1 \cdot H_n + \\ + 0 \cdot \frac{M_0}{l} + \dots + 0 \cdot \frac{M_n}{l} = \psi_3 \end{cases}$$

Współczynniki przy niewiadomych w powyższym układzie tworzą wyznacznik symetryczny $D_{3n}(3n+4)$ -go rzędu, którego ostatnia kolumna (i analogicznie ostatni wiersz) posiada na $n+1$ -szym, $n+2$ -gim, ... $2n+1$ -szym miejscu jedynek, a pozostałe zera, w przedostatniej zaś kolumnie (wierszu) przychodzi najpierw malejący szereg liczb naturalnych $n, n-1, \dots, 1$, następnie zera w ilości $(n+1)$, dalej jedynek również w ilości $(n+1)$, a wreszcie na końcu zera. Po odrzuceniu dwóch ostatnich kolumn i wierszy pozostaje wyznacznik symetryczny $(3n+2)$ -giego rzędu \bar{D}_{3n} , złożony z 9 charakterystycznych grup. Cztery z tych grup, a to lewa górna D_a , środkowa górna D_{ah} , lewa średnia D_{ha} , oraz „centryczna“ D_h , są zupełnie identyczne z poprzednio rozpatrywanymi grupami, w ten sam sposób oznaczonymi.

Pozostaje więc do rozpatrzenia dalszych 5 grup, a mianowicie górna prawa D_{am} , środkowa prawa D_{hm} , wreszcie dolne: lewa, średnia i prawa t. j. D_{ma}, D_{mh} i D_m .

Grupa D_{am} składa się z n wierszy, $n+1$ kolumn, przyczem po skreśleniu ostatniej kolumny złożonej ze samych zer pozostaje z niej wyznacznik kwadratowy \bar{D}_{am} , o wyrazach e_{ik} , określonych wzorami:

$$e_{ik_1} = \frac{1}{l^3} \int_{il}^{nl} l \cdot (x-i) dx = \frac{1}{2} (n-i)^2 \quad (k_1 \leq i)$$

$$e_{ik_2} = \frac{1}{l^3} \int_{k_2 i}^{nl} l(x-il) dx = \frac{1}{2} [(n-i)^2 - (k_2-i)^2] \quad (k_2 > i)$$

Grupa D_{am} jest zupełnie podobna do grupy D_{ah} , z której powstaje przez podzielenie wszystkich jej wyrazów przez γ . Można by zauważyć, że podobieństwo grup D_{am} i D_{ah} przeszłoby w identyczność, gdyby za podstawę przy wyprowadzaniu równań układu (V), wprowadzić jako niewiadome ilorazy $\frac{M_i}{h}$, zamiast $\frac{M_i}{l}$,

Poniżej podano wyznacznik D_{3n} dla $n=3$.

$\frac{27}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{2}\gamma$	$\frac{8}{2}\gamma$	$\frac{5}{2}\gamma$	0	$\frac{1}{2} \cdot 9$	$\frac{1}{2} \cdot 8$	$\frac{1}{2} \cdot 5$	0	3	0
$\frac{14}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{2}\gamma$	$\frac{4}{2}\gamma$	$\frac{3}{2}\gamma$	0	$\frac{1}{2} \cdot 4$	$\frac{1}{2} \cdot 4$	$\frac{1}{2} \cdot 3$	0	2	0
$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}\gamma \cdot 1$	$\frac{1}{2}\gamma \cdot 1$	$\frac{1}{2}\gamma \cdot 1$	0	$\frac{1}{2} \cdot 1$	$\frac{1}{2} \cdot 1$	$\frac{1}{2} \cdot 1$	0	1	0
$\frac{9}{2}\gamma$	$\frac{4}{2}\gamma$	$\frac{1}{2}\gamma$	$\frac{1}{3}\gamma^3 \kappa + 3\gamma^2$	$2\gamma^2$	γ^2	0	$\frac{1}{2}\gamma^2 \kappa + 3\gamma$	2γ	γ	0	0	1
$\frac{8}{2}\gamma$	$\frac{4}{2}\gamma$	$\frac{1}{2}\gamma$	$2\gamma^2$	$\frac{1}{3}\gamma^3 \kappa + 2\gamma^2$	γ^2	0	2γ	$\frac{1}{2}\gamma^2 \kappa + 2\gamma$	2γ	0	0	1
$\frac{5}{2}\gamma$	$\frac{3}{2}\gamma$	$\frac{1}{2}\gamma$	γ^2	γ^2	$\frac{1}{3}\gamma^3 \kappa + \gamma^2$	0	γ	γ	$\frac{1}{2}\gamma^2 \kappa + \gamma$	0	0	1
0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}\gamma^3 \kappa$	0	0	0	$\frac{1}{2}\gamma^2 \kappa$	0	1
$\frac{1}{2} \cdot 9$	$\frac{1}{2} \cdot 4$	$\frac{1}{2} \cdot 1$	$\frac{1}{2}\gamma^2 \kappa + 3\gamma$	2γ	γ	0	$\gamma \kappa + 3$	2	1	0	1	0
$\frac{1}{2} \cdot 8$	$\frac{1}{2} \cdot 4$	$\frac{1}{2} \cdot 1$	2γ	$\frac{1}{2}\gamma^2 \kappa + 2\gamma$	γ	0	2	$\gamma \kappa + 2$	1	0	1	0
$\frac{1}{2} \cdot 5$	$\frac{1}{2} \cdot 3$	$\frac{1}{2} \cdot 1$	γ	γ	$\frac{1}{2}\gamma^2 \kappa + \gamma$	0	1	1	$\gamma \kappa$	0	1	0
0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}\gamma^2 \kappa$	0	0	0	$\gamma \kappa$	1	0
3	2	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

w tym bowiem wypadku w wyrażeniach na moment zgięcia w dowolnym miejscu przeseł poziomych występowałyby zarówno niewiadome H_i , jak i $\frac{M_i}{l}$ pomnożone przez ten sam współczynnik h .

Grupa D_{hm} jest wyznacznikiem symetrycznym $(n+1)$ -szego rzędu, którego wyrazy f_{ik} wynikają z wzorów:

$$f_{ik_1} = \frac{1}{l^3} \int_{il}^{nl} l \cdot h \cdot dx = \gamma(n+i) \quad (k_1 < i)$$

$$f_{ii} = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{1}{l^3} \int_0^h l z dz + \frac{1}{l^3} \int_{il}^{nl} l h dx = \frac{1}{2} \gamma^2 \kappa + \gamma(n-i)$$

$$f_{ik_2} = \frac{1}{l^3} \int_{k_2 i}^{nl} l \cdot h \cdot dx = \gamma(n-k_2) \quad (k_2 > i)$$

Wyrazy f_{ii} na głównej przekątnej tworzą — idąc od dołu ku górze — postęp arytmetyczny, którego pierwszym wyrazem jest $\frac{1}{2} \gamma^2 \kappa$, różnicą zaś γ . Wyrazy na lewo od głównej przekątnej, leżące w jednym wierszu są sobie równe, przyczem wyrazy różnych wierszy tworzą — idąc od dołu ku górze — również postęp arytmetyczny $0, \gamma, 2\gamma, \dots$. Z powodu symetrii są przez to samo także i wyrazy na prawo od głównej przekątnej zupełnie określone.

Co się tyczy grupy D_{ma} , złożonej z $(n+1)$ wierszy, n kolumn, to po odrzuceniu ostatniego wiersza, składającego się ze samych zer, zamienia się ona w wyznacznik kwadratowy \bar{D}_{ma} , który to wyznacznik można otrzymać z omawianego wyżej wyznacznika \bar{D}_{am} , przez zamianę kolumn tego ostatniego na wiersze, a wierszy na kolumny. W podobny sposób powstaje grupa D_{mh} , tworząca symetryczny wyznacznik kwadratowy $(n+1)$ -go rzędu, z grupy D_{hm} — z powodu symetrii są zresztą te grupy zupełnie ze sobą identyczne.

Pozostaje jeszcze ostatnia, dziewiąta grupa D_m . Stanowi ona wyznacznik symetryczny $(n+1)$ -szego rzędu, złożony z wyrazów m_{ik} , określonych wzorami:

$$m_{ik_1} = \frac{1}{l^3} \int_{il}^{nl} l^2 dx = n i \quad (k_1 < i)$$

$$m_{ii} = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{1}{l^3} \int_0^h l \cdot l dz + \frac{1}{l^3} \int_{il}^{nl} l \cdot l dx = \gamma \cdot \kappa + (n-i)$$

$$m_{ik_2} = \frac{1}{l^3} \int_{k_2 i}^{nl} l \cdot l dx = n - k_2 \quad (k_2 > i)$$

Wyrazy na głównej przekątnej m_{ii} tworzą postęp arytmetyczny, którego pierwszym wyrazem (idąc od dołu ku górze) jest $\gamma \kappa$, różnicą zaś 1. Wyrazy na lewo od głównej przekątnej, leżące w jednym wierszu, są sobie równe, przyczem wyrazy różnych wierszy tworzą szereg liczb naturalnych $0, 1, \dots, n$. Z powodu symetrii wyznacznika D_m są tem samem i wyrazy na prawo od głównej przekątnej określone.

Przystępujemy z kolei do wyznaczenia prawych stron równań układu (V) t. j. wyrażeń ψ . Zauważymy przede wszystkim, iż wyrażenia $\psi_{i0}, \psi_{i1}, \psi_2, \psi_3$ — dla poszczególnych obciążeń — otrzymamy z wzorów, poprzednio podanych pod A); pozostają zatem jedynie wyrażenia ψ_{i2} , których wartość podano poniżej.

a) Ciężar skupiony pionowy P w punkcie $(i+\alpha) \cdot l$:

$$\begin{aligned} \psi_{k_1, 2} &= P \cdot \frac{1}{l^3} [n - (i+\alpha)]^2 \\ (k_1 < i) \\ \psi_{k_2, 2} &= P \cdot \frac{1}{l^3} \{ [n - (i+\alpha)]^2 - [k_2 - (i+\alpha)]^2 \} \\ (k_2 > i) \end{aligned}$$

b) Obciążenie pionowe, jednostajnie rozłożone q' , między punktami $(i+\alpha)l, (i+\beta)l, (0 \leq \alpha < \beta \leq l)$.

$$\begin{aligned} \psi_{k_1, 2} &= \frac{1}{l^3} \int_{(i+\alpha)l}^{(i+\beta)l} q' \frac{[x - (i+\alpha)l]^2}{2} \cdot l \cdot dx + \\ &+ \frac{1}{l^3} \int_{(i+\beta)l}^{nl} q' (\beta - \alpha) \left[x - \left(i + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) l \right] \cdot l \cdot dx \\ \psi_{k_2, 2} &= \frac{1}{l^3} \int_{k_2 l}^{nl} q' (\beta - \alpha) l \cdot \left[x - \left(i + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) l \right] \cdot l \cdot dx. \\ (k_2 > i) \end{aligned}$$

c) Siła pozioma skupiona Z , w długości ah od spodu i -tego słupa.

$$\begin{aligned} \psi_{k_1, 2} &= Z \gamma \cdot (1 - \alpha) (n - i) \\ (k_1 < i) \\ \psi_{i, 2} &= Z \left\{ \frac{1}{2} \gamma^2 \alpha \cdot (1 - \alpha^2) - \gamma^2 \alpha \cdot \alpha (1 - \alpha) + (1 - \alpha) \cdot \gamma (n - i) \right\} \\ \psi_{k_2, 2} &= Z \cdot \gamma \cdot (1 - \alpha) (n - k_2). \\ (k_2 > i) \end{aligned}$$

d) Obciążenie poziome, jednostajnie rozłożone q'' , działające na i -ty słupek między przekrojami ah i $\beta h, (0 \leq \alpha < \beta \leq h)$:

$$\begin{aligned} \psi_{k_1, 2} &= q'' (\beta - \alpha) h \cdot \left(1 - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \gamma \cdot (n - i) \\ (k_1 < i) \\ \psi_{i, 2} &= \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{1}{l^3} \cdot \int_{ah}^{\beta h} \frac{q'' (z - ah)^2}{2} \cdot l \cdot dz + \\ &+ \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{1}{l^3} \cdot \int_{\beta h}^{ah} q'' (\beta - \alpha) h \cdot \left(z - \frac{\alpha + \beta}{2} h \right) \cdot l \cdot dz + \\ &+ \frac{1}{l^3} \cdot \int_{ii}^{nl} q'' (\beta - \alpha) h \cdot \left(1 - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot h \cdot l \cdot dx \\ \psi_{k_2, 2} &= q'' (\beta - \alpha) h \cdot \left(1 - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \gamma \cdot (n - k_2). \\ (k_2 > i) \end{aligned}$$

e) Pionowe równe ciężary P , działające w połowie każdego przęsła poziomego:

$$\begin{aligned} \psi_{i, 2} &= P \cdot \frac{1}{l^3} [(2i+1)^2 + (2i+3)^2 + \dots + (2n-1)^2] = \\ &= P \cdot \frac{1}{l^3} \sum_{k=i}^{n-1} (2k+1)^2. \end{aligned}$$

f) Pionowe, równe ciężary P , działające w $1/s, 2/s, \dots, (s-1)/s$ części rozpiętości każdego przęsła poziomego:

$$\psi_{i, 2} = P \cdot \frac{1}{2s^2} \sum_i^{n-1} [(sk+1)^2 + (sk+2)^2 + \dots + (sk+s-1)^2].$$

g) Obciążenie pionowe, jednostajnie rozłożone q' , działające na całej rozpiętości wszystkich przęseł poziomych:

$$\psi_{i, 2} = q' l \cdot \frac{1}{6} (n^3 - i^3).$$

h) Obciążenie poziome, jednostajnie rozłożone q' , działające na całą wysokość i -tego słupa:

$$\begin{aligned} \psi_{k_1, 2} &= q'' h \cdot \frac{1}{2} \gamma \cdot (n - i) \\ (k_1 < i) \\ \psi_{i, 2} &= q'' \cdot \left\{ \frac{1}{6} \gamma^2 \alpha + \frac{1}{2} \gamma (n - i) \right\} \\ \psi_{k_2, 2} &= q'' h \cdot \frac{1}{2} \gamma \cdot (n - k_2) \\ (k_2 > i) \end{aligned}$$

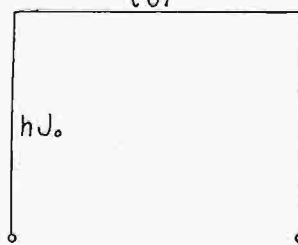
C) Przykłady z obliczania ram jednoprzęsłowych i dwuprzęsłowych.

Poniżej wyprowadzono zasadnicze wzory na obliczanie ram jednoprzęsłowych o rozporze prostej, łamanej symetrycznej oraz parabolicznej (a to zarówno dla wypadku słupów u dołu przegibnie umocowanych jak i słupów doskonale utwierdzonych) oraz na obliczanie ram dwuprzęsłowych o słupach przegibnie umocowanych i rozporach prostych, równej długości. Obliczanie to sprowadza się przede wszystkim do wyznaczenia: 1. wartości wyznacznika D_{2n} względnie D_{3n} , 2. podwyznaczników, odpowiadających poszczególnym współczynnikom przy niewiadomych, wreszcie 3. wyrażeń ψ . Raz obliczone wartości wyznacznika D_{2n} względnie D_{3n} , oraz podwyznaczników dla pewnego typu ramy, służą za podstawę wszystkich dalszych obliczeń dla najrozmaitszych wypadków obciążeń zewnętrznych, które to obciążenia wpływają jedynie na wielkość wyrażeń ψ . Tworząc iloczyny wyrażeń ψ przez odpowiednie podwyznaczniki i dodając te iloczyny (naprzemian ze znakiem tym samym i przeciwnym) a otrzymaną sumę dzieląc przez wyznacznik D_{2n} wzgl. D_{3n} , otrzymamy ostatecznie znak i wielkość szukanej reakcji poziomej, pionowej lub momentu utwierdzenia.

I. Rama jednoprzęsłowa, dwuprzegubowa o rozporze prostej.

$$D_{2,1} = \begin{vmatrix} a_{00} & b_{00} & b_{01} & 1 & 0 \\ c_{00} & d_{00} & d_{01} & 0 & 1 \\ e_{10} & d_{10} & d_{11} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \gamma & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma & \frac{1}{3} \gamma^3 \alpha + \gamma^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \gamma^3 \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_{2,1} = \frac{1}{3} \gamma^2 \cdot (2 \gamma \alpha + 3)$$



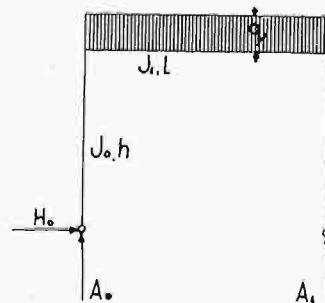
Rys. 6.

Minory (podwyznaczniki) odpowiadające wyrazom pierwszej, drugiej i trzeciej kolumny, t. j. powstałe z wyznacznika $D_{2,1}$, przez skreślenie wiersza i kolumny, w której dany wyraz leży, przedstawiają się, jak następuje:

$$\begin{aligned} A_{00} &= 0 & B_{00} &= 0 & B_{01} &= 0 \\ C_{00} &= 0 & D_{00} &= +1 & D_{01} &= +1 \\ C_{10} &= 0 & D_{10} &= +1 & E_{11} &= +1 \\ \Phi_{2, \alpha_0} &= (-\frac{1}{3} \gamma^2 \alpha) (2 \gamma \alpha + 3) & \Phi_{2, h_0} &= -\frac{1}{2} \gamma & \Phi_{2, h_1} &= -\frac{1}{2} \gamma \\ \Phi_{3, \alpha_0} &= 0 & \Phi_{3, h_0} &= -\frac{1}{3} \gamma^3 \alpha & \Phi_{3, h_1} &= +\frac{1}{3} \gamma^3 \alpha + \gamma^2 \end{aligned}$$

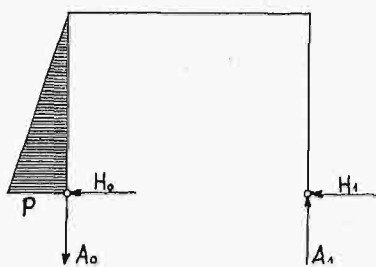
Stąd ogólne wzory na obliczanie reakcji A_0, H_0, H_1 :

$$\begin{aligned} A_0 &= \psi_2 \\ H_0 &= (\psi_{01} - \psi_{11} - \frac{1}{2} \gamma \cdot \psi_2 + \frac{1}{3} \gamma^3 \alpha \cdot \psi_3) : [\frac{1}{3} \gamma^2 (2 \gamma \alpha + 3)] \\ H_1 &= [-\psi_{01} + \psi_{11} + \frac{1}{2} \gamma \cdot \psi_1 + (\frac{1}{3} \gamma^3 \alpha + \gamma^2) \cdot \psi_3] : [\frac{1}{3} \gamma^2 (2 \gamma \alpha + 3)]. \end{aligned}$$



Rys. 7.

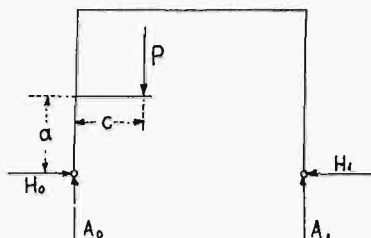
$$\begin{aligned} a) \\ \psi_{01} &= \frac{1}{3} \gamma \cdot q l \\ \psi_{11} &= 0 \\ \psi_2 &= \frac{1}{2} \cdot q l \\ \psi_3 &= 0 \end{aligned}$$



Rys. 8.

$$\psi_2 = \frac{p h}{2} \left(-\frac{1}{3} \gamma\right)$$

$$\begin{aligned} \psi_{01} &= \frac{\kappa}{l^3} \int_0^h \frac{p z^2}{2} z dz - \\ &\quad - \frac{\kappa}{l^3} \int_0^h \frac{p z^3}{6 h} z dz + \\ &\quad + \frac{1}{l^3} \int_0^l \frac{p h}{2} \cdot \frac{2}{3} h \cdot h dx \\ \psi_{01} &= \frac{p h}{2} \left(+\frac{1}{6} \gamma^3 \kappa + \frac{2}{3} \gamma^2 \right) \\ \psi_{11} &= 0 \\ \psi_3 &= \frac{p h}{2} \cdot (+1) \end{aligned}$$



Rys. 9.

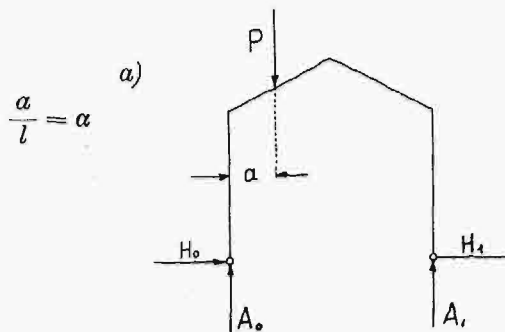
$$\frac{c}{l} = \delta$$

$$\frac{a}{l} = \alpha$$

$$\begin{aligned} \psi_{01} &= \frac{\kappa}{l^3} \int_a^h -P c \cdot z \cdot dz + \\ &\quad + \frac{1}{l^3} \int_0^l P(x-c) h \cdot dx = \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} \delta \kappa (\gamma^2 - \alpha^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \gamma - \gamma \delta \right\} \cdot P \\ \psi_{11} &= 0 \\ \psi_2 &= (1 - \delta) \cdot P \\ \psi_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{00} &= 0 & B_{00} &= 0 & B_{01} &= 0 \\ C_{00} &= 0 & D_{00} &= +1 & D_{10} &= +1 \\ C_{10} &= 0 & D_{10} &= +1 & D_{11} &= +1 \\ \Phi_{2, \sigma_0} &= -\frac{2}{3} \gamma^2 \sigma (\gamma_1 \kappa + \\ &\quad + 3) - \frac{2}{3} \varphi \sigma (3 \gamma + \varphi) & \Phi_{2, \kappa} &= -\gamma \sigma - \frac{1}{2} \varphi \sigma & \Phi_{2, \gamma_1} &= -\gamma \sigma - \\ & & & & & -\frac{1}{2} \varphi \sigma \\ \Phi_{3, \sigma_0} &= 0 & \Phi_{3, \kappa} &= -\frac{1}{3} \gamma^2 \cdot \gamma_1 \kappa \sigma & \Phi_{3, \gamma_1} &= \frac{1}{3} \gamma^2 \gamma_1 \kappa \sigma + \\ & & & & & + 2 \gamma^2 \sigma + 2 \gamma \varphi \sigma + \\ & & & & & + \varphi^2 \sigma \end{aligned}$$

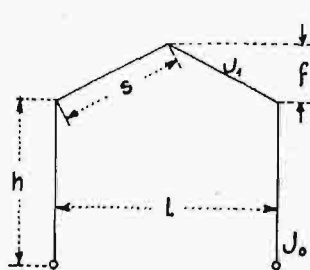
Ogólne wzory na obliczanie reakcyj: $A_0 = \psi_2$
 $H_0 = [\psi_{01} - \psi_{11} - (\gamma + \frac{1}{2} \varphi) \cdot \sigma \cdot \psi_2 + \frac{1}{3} \gamma^2 \cdot \gamma_1 \kappa \cdot \sigma \cdot \psi_3] : D_{2,1}$
 $H_1 = [-\psi_{01} + \psi_{11} + (\gamma + \frac{1}{2} \varphi) \cdot \sigma \cdot \psi_2 + (\frac{1}{3} \gamma^2 \cdot \gamma_1 \kappa + 2 \gamma^2 \sigma + 2 \gamma \varphi + \frac{2}{3} \varphi^2) \sigma \cdot \psi_3] : D_{2,1}$



$$\frac{a}{l} = \alpha'$$

Rys. 11.

II. Rama jednoprzęsłowa, dwuprzegubowa o rozporze łamanej symetrycznej.



Rys. 10.

$$\begin{aligned} \frac{f}{l} &= \varphi & \frac{h}{s} &= \gamma_1 \\ \frac{h}{l} &= \gamma = \frac{h}{s} \cdot \frac{s}{l} = \gamma_1 \cdot \sigma \\ \frac{s}{l} &= \sigma & \frac{I_0}{I_1} &= \kappa \end{aligned}$$

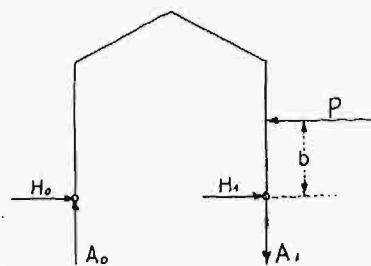
Wzory na obliczenie współczynników układu równań są w tym wypadku następujące:

$$\begin{aligned} a_{00} &= \frac{1}{l^3} \int_0^l x^2 ds = \frac{1}{l^3} \int_0^l x^2 dx \cdot 2\sigma = \frac{2}{3} \sigma \\ b_{00} &= \frac{1}{l^3} \int_0^{l/2} x \left(h + \frac{2fx}{l} \right) dx \cdot 2\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{l^3} \int_{l/2}^l x \left[h + \frac{2f(l-x)}{l} \right] dx \cdot 2\sigma = \gamma \sigma + \frac{1}{3} \varphi \sigma \\ c_{00} &= b_{00} = \gamma \sigma + \frac{1}{3} \varphi \sigma \\ d_{00} &= \frac{\kappa}{l^3} \int_0^h z^2 dz + \frac{1}{l^3} \int_0^{l/2} \left(h + \frac{2fx}{l} \right)^2 dx \cdot 2\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{l^3} \int_{l/2}^l \left[h + \frac{2f(l-x)}{l} \right]^2 dx \cdot 2\sigma = \\ &= \frac{1}{3} \gamma^2 \cdot \gamma_1 \kappa \cdot \sigma + 2 \gamma^2 \sigma + 2 \gamma \varphi \sigma + \frac{2}{3} \varphi^2 \sigma \\ d_{11} &= \frac{\kappa}{l^3} \int_0^h z^2 dz = \frac{1}{3} \gamma^2 \gamma_1 \kappa \sigma \end{aligned}$$

$$D_{2,1} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} \sigma & \gamma \sigma + \frac{1}{3} \varphi \sigma & 0 & 1 & 0 \\ \gamma \sigma + \frac{1}{3} \varphi \sigma & \frac{1}{3} \gamma^2 \gamma_1 \kappa \sigma + 2 \gamma^2 \sigma + 2 \gamma \varphi \sigma + \frac{2}{3} \varphi^2 \sigma & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \gamma^2 \gamma_1 \kappa \sigma & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_{2,1} = \frac{2}{3} \gamma^2 \sigma (\gamma_1 \kappa + 3) + \frac{2}{3} \varphi \sigma (3 \gamma + \varphi)$$

$$\begin{aligned} \psi_{01} &= \frac{1}{l^3} \int_a^{l/2} P(x-a) \left(x + \frac{2fx}{l} \right) dx \cdot 2\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{l^3} \int_{l/2}^l P(x-a) \left[x + \frac{2f(l-x)}{l} \right] dx \cdot 2\sigma = \\ &= \left\{ \gamma (1-\alpha)^2 + \frac{1}{3} \varphi (3-6\alpha+4\alpha^3) \right\} \cdot \sigma \cdot P \\ \psi_{11} &= 0 \\ \psi_2 &= (1-\alpha) \cdot P \\ \psi_3 &= 0 \end{aligned}$$



$$\frac{b}{l} = \beta$$

Rys. 12.

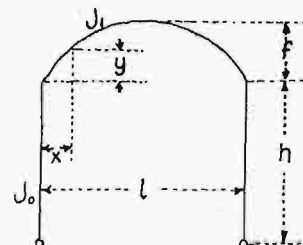
$$\begin{aligned} \psi_{01} &= 0 \\ \psi_{11} &= \frac{\kappa}{l^3} \int_b^h -P(z-b) z dz = \\ &= \left\{ -\frac{1}{6} \gamma_1 \kappa (2 \gamma^2 + \right. \\ &\quad \left. + \beta^2 \cdot \frac{\beta}{\gamma} - 3 \beta \gamma) \right\} \cdot \sigma \cdot P \\ \psi_2 &= \beta \cdot P \quad \psi_3 = -1 \cdot P \end{aligned}$$

III. Rama jednoprzęsłowa dwuprzegubowa o rozporze parabolicznej.

$$\begin{aligned} \frac{f}{l} &= \varphi & \frac{I_1}{I_0} &= \kappa \\ \frac{h}{l} &= \gamma & y &= \frac{4fx(l-x)}{l^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{00} &= \frac{1}{l^3} \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} \\ b_{00} &= \frac{1}{l^3} \int_0^l \left[h + \frac{4fx(l-x)}{l^2} \right] x dx = \\ &= \frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{3} \varphi \end{aligned}$$

$$a_{00} = \frac{1}{3} \quad b_{01} = 0 \quad c_{00} = b_{00} = \frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{3} \varphi$$



Rys. 13.

$$d_{00} = \frac{\kappa}{l^3} \int_0^h z^2 dz + \frac{1}{l^3} \int_0^l \left[h + \frac{\pm f x (l-x)}{l^2} \right]^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3} \gamma^3 \kappa + \gamma^2 + \frac{4}{3} \varphi \gamma + \frac{8}{15} \varphi^2$$

$$d_{01} = 0 \quad c_{10} = d_{10} = 0 \quad d_{11} = \frac{1}{3} \gamma^3 \kappa$$

$$D_{2,1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{3} \varphi & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{3} \varphi & \frac{1}{3} \gamma^3 \kappa + \gamma^2 + \frac{4}{3} \gamma \varphi + \frac{8}{15} \varphi^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \gamma^3 \kappa & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_{2,1} = \frac{1}{15} [5 \gamma^2 (2 \gamma \kappa + 3) + 4 \varphi (5 \gamma + 2 \varphi)]$$

$$A_{00} = 0$$

$$B_{00} = 0$$

$$B_{01} = 0$$

$$C_{00} = 0$$

$$D_{00} = +1$$

$$D_{01} = +1$$

$$C_{10} = 0$$

$$D_{10} = +1$$

$$D_{11} = +1$$

$$\bar{D}_{2,0} = -\frac{2}{3} \gamma^2 \kappa - \gamma^2 - \frac{4}{3} \gamma \varphi - \frac{8}{15} \varphi^2$$

$$\bar{D}_{2,h_0} = -\frac{1}{3} \varphi - \frac{1}{2} \gamma$$

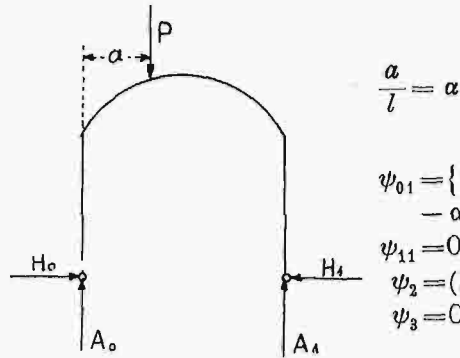
$$\bar{D}_{2,h_1} = -\frac{1}{3} \varphi - \frac{1}{2} \gamma$$

$$\bar{D}_{3,0} = 0$$

$$\bar{D}_{3,h_0} = -\frac{1}{3} \gamma^3 \kappa$$

$$\bar{D}_{3,h_1} = \frac{1}{3} \gamma^3 \kappa + \gamma^2 + \frac{4}{3} \varphi \gamma + \frac{8}{15} \varphi^2$$

Ogólne wzory na obliczanie reakcyj: $A_0 = \psi_2$
 $H_0 = [\psi_{01} - \psi_{11} - (\frac{1}{3} \varphi + \frac{1}{2} \gamma) \psi_2 + \frac{1}{3} \gamma^3 \kappa \cdot \psi_3]: D_{2,1}$
 $H_1 = [-\psi_{01} + \psi_{11} + (\frac{1}{3} \varphi + \frac{1}{2} \gamma) \psi_2 + (\frac{1}{3} \gamma^3 \kappa + \gamma^2 + \frac{4}{3} \varphi \gamma + \frac{8}{15} \varphi^2) \psi_3]: D_{2,1}$



$$\frac{a}{l} = \alpha$$

$$\psi_{01} = \left\{ \frac{1}{2} \gamma (1 - \alpha)^2 + \frac{1}{3} \varphi (1 - \alpha^4) - \frac{2}{3} \alpha \varphi (1 - \alpha^2) \right\} \cdot P$$

$$\psi_{11} = 0$$

$$\psi_2 = (1 - \alpha) \cdot P$$

$$\psi_3 = 0.$$

Rys. 14.

(Dok. nast.).

Wiadomości z literatury technicznej.

Żelazo - beton.

— Wyznaczanie odstępów przerw skurczowych w sztywnych ustrojach żelbetonowych omawia prof. W. Paszkowski. Słusznie twierdzi autor, że wielkość naprężeń, powstających wskutek skurczu zależną jest od sztywności i od przekroju słupów i belek ramy. Autor podaje przybliżony sposób obliczenia w tym wypadku sił działających na końcu słupów. Ta przybliżona metoda jest jednak dla praktyki jeszcze za wawia.

Dr. M. Thullie.

Drugi.

— Zmniejszenie podatków samochodowych w Gdańsku. Senat Gdański zmniejszył ostatnio podatki samochodowe dla samochodów osobowych i motocykli o 50%, zaś dla ciężarowych i autobusów o 25%. Zarządzenie to uzasadnia Senat silnym zanikiem ruchu motorowego, co z jednej strony spowodowało ubytek w podatkach samochodowych, z drugiej zaś podcina również niektóre gałęzie handlu i przemysłu (handel samochodami i materiałami pędnymi, warsztaty reparacyjne, garaże i t. p.). Należy oczekiwać, iż zarządzenie to wprowadzi pewne ożywienie w wspomnianych zakładach.

— Światłne sygnały ostrzegawcze na przejazdach kolejowych. Z powodu licznych wypadków na przejazdach kolejowych w poziomie rozpoczęto w Niemczech próby z zastosowaniem w tych niebezpiecznych miejscach świetlnych sygnałów ostrzegawczych.

Mianowicie istniejący a powszechnie znany znak ostrzegawczy jest zaopatrzony w latarnię ze światłem migotliwym, która rzuca w kierunku drogi zasadniczo światło białe, zaś w momencie zbliżania się pociągu — czerwone, sygnalizujące niebezpieczeństwo. Światła te są o takiej sile, iż nawet w jasny, słoneczny dzień są łatwo spostrzegalne z odległości 100 m. Ażeby umożliwić należytą obserwację również osobom cierpiącym na daltonizm, zastosowano różne okresy migania się latarni; dla światła białego 40 razy w minucie, czerwonego 100 razy.

Włączanie światła czerwonego odbywa się samoczynnie przez zbliżający się pociąg. (Verkehrstechnik Nr. 24/32).

— Ilość stacji benzynowych w Europie. Wedle przeprowadzonej statystyki obecna ilość stacji benzynowych w państwach, posiadających znaczniejszy park samochodowy przedstawia się następująco: Anglja — 99.000, Francja — 78.000, Niemcy — 55.000, Belgja — 19.600, Szwecja — 14.800, Szwajcarja — 14.600, Danja — 10.300, Norwegja — 4.800. Ciekawe są przy tem daty porównawcze, w rozli-

czeniu na ilość posiadanych pojazdów mechanicznych (łącznie z motocyklami). I tak na jedną stację wypada następująca ilość pojazdów: W Anglji — 22, Francji — 25, Niemczech — 27, Belgji — 11, Szwecji i Danji — 14, Szwajcarji 9, Norwegji — 12. Jak widać z powyższych dat, rentowność takich stacji nie musi być zbyt wielką. (Verkehrstechnik Nr. 23/32).

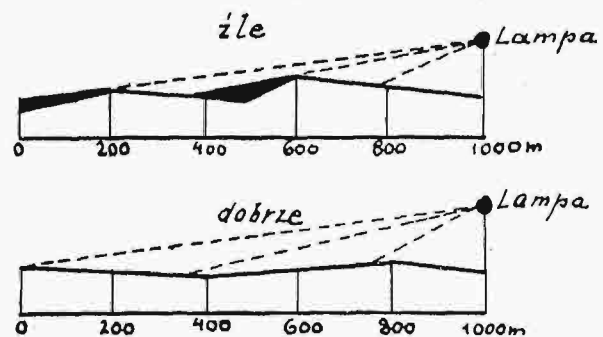
E. B.

Lotnictwo.

— Ukształtowanie lotnisk i ich nawierzchnia. Bezpieczeństwo ruchu lotniczego wymaga oprócz drobnych aparatów i obsługi, również pewnych przestrzeni do startu i lądowania.

Start jest stosunkowo mało niebezpieczny dla pola lotniczego, albowiem w tym momencie znaczna część ciężaru przeluconą jest na skrzydła. Natomiast jest tor lotniczy silnie narażony w chwili lądowania, albowiem przejeżdżając on musi oddziaływać dynamicznie aparatu, wywołane podskokami, a wielkość tych oddziaływań wedle badań amerykańskich, wynosi około 2,5 wartości oddziaływań statycznych. W tych warunkach jest rzeczą zrozumiałą, iż lądowiska ziemne nie mogą być uważane za odpowiednie a wytwarzane w nich bruzdy i doły, uniemożliwiają z czasem ich użycie.

Wymogi techniczne odnoszące się do placów lotniczych będą obejmowały: 1. należyte ukształtowanie rzutu poziomego, przekroju podłużnego i poprzecznego, 2. odwodnienie i 3. utrwalenie z pomocą odpowiedniej nawierzchni.



ad 1. Jakkolwiek odnośnie do ukształtowania dróg startowych i lądowniczych są zapatrywania jeszcze podzielone, to jednak zasadniczo założenie ich jest w zależności od kierunku wiatru, albowiem tak start jak i lądowanie odbywa się zawsze pod wiatr. Układ dróg startowych i lądowniczych wychodzi przeważnie promienisto bądź to ze środka lotniska, bądź to z placu przed budynkiem portowym. Długość drogi startowej, zależną od czasu wzlotu najcięższych, na lotnisku

używanych aparatów, określa się dzisiaj na 500—700 m, przyczem wymaga się tylko nieznacznych spadków, a nadto takiego założenia w przekroju podłużnym, by nie powstawały w nocy przy oświetleniu reflektorami partje zacienione (patrz rys.).

O ile koszt na to pozwolą, pożądane jest zaopatrzenie w nawierzchnię całego lotniska; ponieważ jest to prawie z reguły niemożliwe, przeto ubezpieczenie rozciąga się tylko na pewne pasy szerokości co najmniej 30 m (lepiej 50 m). Drogi startowe i lądownicze powinny posiadać obustronny spadek poprzeczny około 1:100 oraz zarys przekroju w kształcie płaskiej paraboli.

ad 2. Lotnisko powinno być z reguły odrenowane. Jest rzeczą naturalną, iż w pierwszym rzędzie odnosić się to będzie do dróg startowych i lądowniczych, które otrzymają na swych partjach krawężnych równoległe do osi idące dreny zbiorcze, założone w głębokości poniżej zamarzania, o średnicy 18 cm. Dreny te ułożone na 5 cm gr. warstwie żwiru, otrzymują przykrycie również żwirowe (ziarno 10—15 m/m); ostatnie 15 cm od powierzchni przykrywa się bitumowanym tłuczniem o ziarnie 30 m/m, który ułożony jest równo z sąsiadującym terenem.

ad 3. Nawierzchnia dróg startowych i lądowniczych powinna być nieprzepuszczalną, elastyczną, dostatecznie szorstką, celem uniknięcia poślizgu kół samolotu oraz łatwą do naprawy. Wymienionym warunkom najlepiej odpowiadają rozliczne nawierzchnie bitumiczne, przyczem z uwagi na łatwość naprawy pierwszeństwo mają typy maziowe i asfaltowe wykonywane na zimno.

Najprymitywniejszy typ ubezpieczenia stanowić będzie wyrównanie terenu i skropienie go substancjami bitumicznymi. Osiągnięciem przez to uszczelnienie drogi oraz zapobieganie się wytwarzaniu pyłu przy ruchu śmigła. Skropienie to musi być perjodycznie powtarzane. Wydatek bitumu około 2 kg/m².

W Ameryce i Anglii używają również odmiennej metody (Mixed-in-place), polegającej na tem, iż materiał ziemny wydobywa się maszynowo na głębokość 10—20 cm z partji drogi startowej lub lądowniczej, skrusza się go i wymieszuje z bitumem, następnie zaś układa się na wywalcowanym podtorzu i stęży z pomocą 8 t wału.

Przy bardzo mialkim materiale dodaje się do niego drobnego tłucznia, celem stężenia warstwy i oszczędności w lepszym bitumicznym.

Tego rodzaju nawierzchnia może się okazać odpowiednią przy nieznacznym ruchu. Gdy ruch na lotnisku żywy a nadto w użyciu są samoloty ciężkie, natenczas staje się nieodzownem zastosowanie normalnych nawierzchni bitumicznych, znanych w budownictwie drogowym.

Dla celów utrwalenia placów przed hangarami i dworcami lotniczymi szerokie zastosowanie znajduje beton. (*Asphalt u. Teer* Nr. 29/1932). E. B.

— **Prawne podstawy lotnictwa międzynarodowego.** Sprawę tę omawia Dr. A. Wegerdt w niemieckim „Tygodniku ruchowo-technicznym“ (nr. 12 z r. 1932, str. 161). W samych początkach lotnictwa utrwaliło się przeświadczenie, że bez międzynarodowych podstaw prawnych lotnictwo rozwinać się nie może i w rzeczywistości wyłoniły się w tym kierunku międzynarodowe postanowienia, zanim poszczególne państwa głos zabrały, musiały się więc one zastosować do pierwszych.

Paryska konferencja z 13. X. 1919 r. z wyłonioną „Commision Internationale de Navigation Aérienne“ t. z. C i n a stworzyła takie podstawy, zmodyfikowane w jesieni r. 1929. Do „Cina“ należy 29 państw.

Poza „Cina“ istnieją dwa związki: C i a n a (Conventio Ibero-Americana de Navigation Aerea), założony na konferencji iberyjsko amerykańskiej w Madrycie w r. 1926 i panamerykański, utworzony na konferencji panamerykańskiej w Hawannie w r. 1928. W podstawach swoich prawnych

wzorowały się one na „Cina“, nie różnią się wiele od niego i nie zdobyły sobie znaczenia. Rozpłyną się one pod wpływem pierwszego związku.

Państwa, nienależące do związków, a między niemi Niemcy, naturalnym układem rzeczy, muszą się stosować do przepisów związkowych i na ich podstawie zawierać ugody z poszczególnymi państwami.

— **Polska komunikacja lotnicza** istnieje od r. 1922, a od r. 1929 utrzymywana jest przez przedsiębiorstwo państwowo-samorządowe P. L. L. „Lot“. Wygodne samoloty, w zimie ogrzewane, mieszczą do dziesięć osób, ceny jazd odpowiadają cenom kolejowym II klasą, przewożą pocztę i towary. List kosztuje 50 groszy, kartka 35 gr. wewnątrz kraju. Bezpieczeństwo pełne, wysoka regularność.

„Lot“ utrzymuje komunikację z Warszawą do Bydgoszczy, Gdańska-Gdyni, Katowic, Krakowa, Lwowa, Poznania, Wilna. Z Krakowa do Wiednia, z Poznania do Bydgoszczy, z Katowic do Krakowa i Wiednia. Ze Lwowa do Czerniowic, Bukaresztu, z Sofji do Salonik, z Wilna do Rygi, Tallina. Czasy lotów między temi miejscowościami zamykają się w 1 do 3 godz. Inż. A. W. Krüger.

Statyka budowli.

— **Przyczynek do ogólnego rozwiązania problemu wybożenia.** Jest to napis rozprawki profesora Politechniki Warszawskiej M. Broszki, wyciągu z I tomu rozpraw międzynarodowego stowarzyszenia mostowego. Autor już przed paru laty zakwestjonował prawdziwość teorii wybożenia Engessera-Kármana. Przed rokiem ogłoszono wyniki doświadczeń niemieckiego związku stalowego, które wykonał w Berlinie W. Rein. Wyniki tych doświadczeń nie dały się w zupełności pogodzić z teorią Engesser-Kármana tak, że Rein ogłosił poprawioną metodę Engesser-Kármana, aby dostosować ją do wyników doświadczeń. Udało mu się to dopiero po przyjęciu dowolnych współczynników zawieszających. Prof. Broszko udowadnia, że teoria Reina nie jest prawdziwa i wykazuje zupełną zgodność wyników doświadczeń ze swą teorią. Dr. M. Thullie.

Wytrzymałość materiałów.

— **Zastosowanie betonu glinowego** omawia Dr. Kragen w *Cemencie* (1932, str. 130). Podaje on dokładne wskazówki dla wykonania budowli z betonu glinowego i ostrożności, jakie zachować należy. Inżynierowie, którzy mają w praktyce do czynienia z betonem glinowym, powinni dobrze ten artykuł przestudjować, by uniknąć katastrof, podobnych do katastrofy przy budowie domu przy ulicy Kętrzyńskiego we Lwowie. Dr. M. Thullie.

RECENZJE I KRYTYKI.

Sprawozdanie Związku Polskich Hut Żelaznych.

W tych dniach ukazało się pod powyższym tytułem sprawozdanie z działalności Związku Polskich Hut Żelaznych w r. 1931. Sprawozdanie to w treściwy sposób przedstawia sytuację hutnictwa żelaznego w okresie pogłębiania się kryzysu. Z niego dowiadujemy się, że wytwórczość hutnictwa w roku sprawozdawczym spadła w stosunku do poziomu wytwórczości przedwojennej w dziale wielkich pieców do 83%, w stalowniach do 62% i w walcowniach do 62%. Przeżywany kryzys zmienił charakter hutnictwa polskiego, przekształcając go z hutnictwa, opierającego swój byt o rynek wewnętrzny, w hutnictwo, pracujące na wywóz. Wśród rynków, zaopatrujących się w żelazo polskie, pierwsze miejsce zajmuje w roku sprawozdawczym Z. S. R. R. Na ten rynek wywieźliśmy 311.581 ton, czyli 93% ogólnego premjowanego wywozu wytworów walcowniczych.

Warunki, na jakich doszły te zamówienia do skutku, były bardzo uciążliwe dla hut, szczególnie ze względu na zachwianie się kursu waluty angielskiej i trudności w dy-

skontowaniu weksli sowieckich. Jeżeli hutnictwo podjęło się wykonania tych zamówień, to jedynie wskutek braku zapotrzebowania na rynku krajowym.

W stosunku do produkcji wywóz wytworów walcowanych zagranicę wyniósł w roku sprawozdawczym 45,2% wobec 18,9% w r. 1928, 16,9% w r. 1929 i 39,5% w r. 1930.

Tak znaczny stosunkowo wywóz był wynikiem skurczonej pojemności rynku wewnętrznego. Zużycie żelaza na głowę ludności spadło w r. 1931 do 12,7 kg (wobec 35,9 kg w r. 1928). Ogólna suma wpływów Syndykatu wyniosła 157,972.000 zł., ogólna suma faktur, charakteryzująca działalność przedsiębiorstwa zmniejszyła się o 37—64% w stosunku do r. 1928.

Pod wpływem zmniejszonego popytu na wytwory hutnicze na rynku wewnętrznym oraz trudności eksportowych, huty zmuszone były zredukować stopień zatrudnienia poszczególnych działów wytwórczych, zwalniając przytem znaczną liczbę zatrudnionych robotników.

Największa fala redukcji robotników przypada na luty, marzec i grudzień roku sprawozdawczego. W ciągu tych trzech miesięcy zwolniono przeszło 4 tysiące robotników. W pozostałych miesiącach redukcje były mniejsze. Ogółem w ciągu roku sprawozdawczego zwolniono w hutnictwie żelaznym 5.658 robotników.

Stan zatrudnienia przy końcu r. 1931 wyniósł 34.864 robotników. Ogólny zarobek w gotówce łącznie z dodatkami socjalnymi wyniósł 96,848.263 zł.

W roku sprawozdawczym huty żelazne wpłaciły z tytułu podatków państwowych i komunalnych sumę zł. 14,762.542.

Ogólna suma wpłat na świadczenia socjalne wyniosła zł. 24,068.732.

W światowej wytwórczości surowki hutnictwo polskie zajmuje 16 miejsce, w wytwórczości stali natomiast 12.

Sprawozdanie podaje szczegółową statystykę produkcji poszczególnych działów wytwórczych, statystykę dowozu tworzyw hutniczych jak rudy, koks, żelastwo, statystykę płac i zarobków robotniczych, wreszcie statystykę podziału wytwórczości na rynku wewnętrznym i zagranicą. Niektóre zagadnienia zobrazowano w sprawozdaniu powyższem w postaci wykresów.

Na szczególną uwagę zasługują rozdziały p. t. „Polityka Handlowa“ i „Sprawy Przewozowe“. W rozdziałach tych zobrazowano akcję Związku co do realizacji postulatów hutnictwa w zakresie spraw celnych i spraw taryfowo-komunikacyjnych. Ponadto w rozdziale „Postęp Techniczny“ omówiono prace inwestycyjne w hutnictwie, wykonywane mimo ciężkiego kryzysu, w celu osiągnięcia oszczędności w produkcji poszczególnych działów wytwórczych. Proce te były wykonywane przeważnie we własnym zakresie, t. zn. z materiału własnego i we własnych warsztatach.

Kończy się sprawozdanie rozdziałem „Metody Pracy“, w którym Związek przedstawił sposób załatwiania poszczególnych kwestyj, wynikających na tle sytuacji kryzysowej.

Dowiadujemy się ze sprawozdania, że ciężar prac związkowych spoczywał na barkach Prezydium, które zbierało się mniej więcej raz na 2 tygodnie, poza tem czynne były w Związku następujące komisje: celna, traktatowa, taryfowo-komunikacyjna, statystyczna, normalizacyjna i wydawnicza. Niezależnie od prac w komisjach, delegaci Związku wchodzili w skład Izby Przemysłowo-Handlowej w Sosnowcu, a ponadto brali udział w pracach Państwowej Rady Kolejowej, Rady Ochrony Pracy poszczególnych komisji ministerjalnych.

Dobrze pomyślany układ graficzny i rozplanowanie treści korzystnie wyróżnia to sprawozdanie pośród innych.

Inż. B. Nawrocki: „Personel a marnotrawstwo“ Wydawnictwo „Ligi Pracy“. Cena zł. 0,80. Stron 24.

Na półkach księgarskich ukazała się ciekawa broszurka na zaniedbany u nas temat roli człowieka w usprawnieniu wytwórczości i o udziale personelu w usuwaniu marnotrawstwa.

Kwestja pobudzenia pomysłowości pracowników i uzyskania inicjatywy w kierunku złagodzenia kryzysu gospodarczego ujęta została w sposób interesujący i mocno poparta argumentami zaczerpniętymi z życia. Dowiadujemy się, iż na całym świecie pracownik polski uchodzi za bardzo zdolnego. Ford twierdzi, iż polscy robotnicy z pośród wszystkich cudzoziemców są najsprytniejsi, a roczne oszczędności, jakie zakłady Forda otrzymały z ulepszeń, dokonanych przez polskich pracowników, zatrudnionych w zakładach Forda, przewyższają sumę kapitału zakładowego Banku Polskiego.

Słusznie więc wywodzi autor, że w rydwan postępu i walki z bolączkami życia codziennego, z kryzysem i bezrobociem należy koniecznie wprząc pracowników zarówno fizycznych jak i umysłowych.

Broszurka ta, jak również zapowiedziana w niej obszerniejsza praca na temat udziału personelu w usuwaniu marnotrawstwa wzbudzi niezawodnie szersze zainteresowanie zarówno wśród pracodawców, jak i pracobiorców.

NEKROLOGJA.

Inż. Tadeusz Kobylański, Radca P. K. P., długoletni członek Polskiego Towarzystwa Politechnicznego, zmarł we Lwowie 1-go listopada br. w 62 roku życia. Śp. Kobylański po ukończeniu studjów na Politechnice lwowskiej, pracował przy budowach kolei w Małopolsce wschodniej, a przejściowo także w Istrii. Później poświęcił się kolejowej służbie drogowej, najpierw w Dyrekcji lwowskiej, jako Naczelnik Sekcji utrzymania kolei w Przeworsku, później w Dyrekcji stanisławowskiej, jako Naczelnik Oddziału drogowego w Kołomyży. Na tem stanowisku zastała go też śmierć. Śp. Kobylański od lat najmłodszych, poświęcał się z całym oddaniem pracy społecznej i patriotycznej, dzięki zaletom swego charakteru cieszył się zawsze uznaniem swych przełożonych, przywiązaniem i szacunkiem kolegów i podwładnych.

Cześć Jego pamięci!

SPRAWY TOWARZYSTWA.

Sekcja Mechaników P. T. P. zawiadamia, iż Laboratorium maszynowe P. L. organizuje cykl referatów i sprawozdań z wykonanych prac.

1932. 14/XI. Inż. Wiciński: „Dalszy rozwój bezkorbowej silniko-sprężarki“. 21/XI. Inż. Samolewicz: „O pewnym problemie bezkorbowej silniko-sprężarki“. 28/XI. Dr. Szczeniowski (z Warszawy): „O regulacji gaźników samochodowych“. 12/XII. Inż. Wiśniowski Henryk: „O badaniu

gaźników samochodowych“. 19/XII. Inż. Huculak: „Sprawozdanie z wycieczki naukowej zagranicę“ (chłodnictwo).

1933. 9/I. Inż. Ziółkowski: „O przeróbce chemicznej metanu“. 16/I. Inż. Bujak: „Trudności spalania w Dieslach szybkoobrotowych“. 23/I. Inż. Ochęduszek Stanisław: „Problem opóźnienia zapłonu olejów pędnych“. 30/I. Prof. Dr. Witkiewicz: „O turbinie spalinowej“.

Posiedzenia odbywać się będą stale w poniedziałki w sali wykładowej Laboratorium Maszynowego Politechniki (ul. Ujejskiego 5 I. p.) o godzinie 18,30.

Redaktor naczelny i odpowiedzialny Prof. Inż. Emil Bratro.

Nakładem Polskiego Towarzystwa Politechnicznego we Lwowie. Pierwsza Związkowa Drukarnia we Lwowie, ul. Lindego 1. 4.