

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Wydział Elektryczny

ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr inż. Tomasz Grzywacz

Dekompozycja obszarowa w dyfuzyjnej tomografii optycznej

Promotor

prof. dr hab. Jan Sikora

Warszawa, 2010



pracę tą dedykuję mojej żonie Agnieszce i Rodzicom



Chciałbym podziękować:

- promotorowi prof. dr hab. inż. Janowi Sikorze, za opiekę podczas studiów doktoranckich, ukierunkowanie moich działań oraz cenne wskazówki i uwagi jakich udzielał mi w czasie wykonywania całej pracy,
- pracownikom Zakładu Systemów Pomiarowo-Diagnostycznych Instytutu Elektrotechniki, a zwłaszcza dr inż. Stefanowi Wójtowiczowi za pomoc w trakcie realizacji pracy doktorskiej,
- mojej żonie za to, że cierpliwie znosiła zarówno moje niepowodzenia jak i sukcesy podczas pokonywania poszczególnych etapów pracy.

Tomasz Grzywacz



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>11</b>
1.1	Cel i teza pracy . . . . .	12
1.2	Przegląd zawartości rozprawy . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Dyfuzyjna tomografia optyczna</b>	<b>15</b>
2.1	Wstęp . . . . .	15
2.2	Optyczne własności tkanki . . . . .	17
2.3	Techniki eksperymentalne . . . . .	18
2.3.1	Systemy falowe stałe . . . . .	19
2.3.2	Systemy dziedziny częstotliwości . . . . .	20
2.3.3	Systemy dziedziny czasu . . . . .	21
2.3.4	Zależności pomiędzy systemami . . . . .	22
2.4	Zastosowania . . . . .	22
2.4.1	Obrazowanie piersi . . . . .	23
2.4.2	Obrazowanie główki niemowlęcia . . . . .	24
2.4.3	Obrazowanie aktywności mózgu . . . . .	24
2.4.4	Inne zastosowania w medycynie . . . . .	25
2.4.5	Zastosowania przemysłowe . . . . .	27
2.5	Zagadnienie proste . . . . .	28
2.6	Zagadnienie odwrotne . . . . .	29
2.6.1	Metody różnicowe . . . . .	29
2.6.2	Metoda nieliniowych najmniejszych kwadratów . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Modele transportu światła</b>	<b>33</b>
3.1	Równanie RTE . . . . .	34

3.2	Równanie dyfuzji jako przybliżenie równania RTE . . . . .	36
3.3	Modele hybrydowe . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Metody numeryczne w dyfuzyjnej tomografii optycznej</b>	<b>41</b>
4.1	Metoda elementów skończonych . . . . .	42
4.2	Metoda elementów brzegowych . . . . .	43
4.3	Wybór metody numerycznej . . . . .	44
4.4	Dekompozycja obszarowa . . . . .	46
4.4.1	Dekompozycja „z nakładaniem” . . . . .	47
4.4.2	Dekompozycja „bez nakładania” . . . . .	48
4.4.3	Dekompozycja problemu brzegowego na przykładzie kondensatora walcowego — rozwiązanie analityczne . . . . .	49
4.4.4	Model kondensatora — dekompozycja z nakładaniem . . . . .	50
4.4.5	Model kondensatora — dekompozycja bez nakładania . . . . .	52
4.5	Dekompozycja czterowarstwowego modelu sferycznego opisanego za pomo- cą przybliżenia dyfuzyjnego równania transportu . . . . .	56
4.5.1	Sformułowanie problemu . . . . .	56
4.5.2	Brzegowe równanie całkowe i numeryczna implementacja . . . . .	57
4.5.3	Numeryczna implementacja za pomocą metody elementów brze- gowych . . . . .	59
4.5.4	Czterowarstwowy model sferyczny . . . . .	62
4.6	Czterowarstwowy model głowy niemowlaka . . . . .	71
4.7	Wyniki . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Macierz widoczności</b>	<b>75</b>
5.1	Określanie wklęsłości i wypukłości powierzchni . . . . .	77
5.2	Metody podziału przestrzeni . . . . .	79
5.3	Podział przestrzeni siatką regularną . . . . .	80
5.4	Podział przestrzeni siatką oktetową . . . . .	81
5.5	Wyznaczanie macierzy widoczności . . . . .	82
5.6	Porównanie algorytmu macierzy widoczności z siatką oktetową i regularną	85
5.7	Podsumowanie . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Wnioski końcowe i podsumowanie</b>	<b>89</b>



# Lista symboli

$\Phi$  – funkcja potencjalna (np. potencjał elektryczny [V] w elektrostatyce temperatura [°C] w przewodnictwie ciepła lub gęstość fotonów w Dyfuzyjnej Tomografii Optycznej)

$q$  – pochodna funkcji  $\Phi$  w kierunku normalnym do linii brzegowej, skierowana na zewnątrz rozpatrywanego obszaru  $\left(\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial n}\right)$

$T$  – temperatura [°C] lub [°K]

$G$  – funkcja Greena

$\mathbf{n}$  – wektor jednostkowy (wersor) normalny do brzegu, skierowany na zewnątrz badanego obszaru

$\mathbf{r}$  – wektor położenia

$\mathbf{s}$  – wektor kierunkowy

$x, y, z$  – współrzędne kartezjańskie [m]

$r, \Theta, z$  – współrzędne cylindryczne [m,rad,m]

$\Omega$  – obszar, w którym poszukujemy rozkładu funkcji stanu

$\xi, \eta$  – współrzędne układu lokalnego

$N_i, M_i$  – bazowe funkcje interpolacji w  $i$ -tym węźle

$J(\xi)$  – jacobian transformacji

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$  – macierze zawierające odpowiednio całki z pochodnej normalnej funkcji Greena oraz całki z funkcji Greena

$R$  – odległość pomiędzy punktem źródła a punktem obserwacji [m]

$w_i$  – funkcje wagi (na przykład dla kwadratury Gaussa-Legendre'a)

$L$  – długość elementu brzegowego [m]

$c(\mathbf{r})$  – współczynnik równania całkowego

$k$  – liczba falowa równa  $\sqrt{j\omega\mu\gamma}$  [ $\text{m}^{-2}$ ]

$D$  – współczynnik dyfuzji [ $\text{m}$ ]

$I_n$  – zmodyfikowana funkcja Bessela I-ego rodzaju i  $n$ -tego rzędu

$K_0$  – zmodyfikowana funkcja Bessela II-ego rodzaju, zerowego rzędu

$K_1$  – zmodyfikowana funkcja Bessela II-ego rodzaju, pierwszego rzędu

$\mathcal{L}[\cdot]$  – transformata Laplace'a

$i = \sqrt{-1}$  lub  $j = \sqrt{-1}$

$\omega$  – pulsacja [ $\text{rad/s}$ ]

$f$  – częstotliwość [ $\text{Hz}$ ]

$\gamma$  – konduktywność [ $1/(\Omega \text{m})$ ] lub [ $\text{S/m}$ ]

$\varepsilon$  – przenikalność elektryczna [ $\text{F/m}$ ]

$c$  – prędkość światła [ $\text{mm/ps}$ ] lub [ $\text{m/s}$ ]

$\mu_a$  – współczynnik pochłaniania [ $\text{mm}^{-1}$ ]

$\mu_s$  – współczynnik rozpraszania [ $\text{mm}^{-1}$ ]

$\mu_s'$  – zredukowany współczynnik rozpraszania [ $\text{mm}^{-1}$ ]

$L_d$  – droga tłumienia [ $\text{mm}$ ]

$\delta$  – funkcja delta Diraca

$\mathcal{V}$  – zero-jedynkowa funkcja widoczności

$g$  – współczynnik kształtu [ $1/\text{m}^2$ ]

$F$  – funkcjonał

$\alpha$  – współczynnik równy 2 lub 3 w zależności od wymiaru przestrzeni

# Rozdział 1

## Wprowadzenie

Dyfuzyjna tomografia optyczna (DTO) jest techniką obrazowania najintensywniej rozwijaną od ostatniej dekady XX w., głównie dzięki postępowi w dziedzinie pomiarów optycznych i wzrostowi wydajności obliczeniowej komputerów. DTO jest techniką, w której obrazy uzyskuje się na podstawie pomiarów światła widzialnego lub podczerwonego na powierzchni obiektu. Tomograficzne obrazy ludzkiego ciała są bardzo cennymi narzędziami diagnozy klinicznej. Mimo, iż istnieją wydajne metody obrazowania narządów i tkanek o dużej dokładności takie jak rentgenowska tomografia komputerowa czy tomografia rezonansu magnetycznego, wciąż poszukuje się nowych technik. Szczególny nacisk kładzie się na rozwój metod nieinwazyjnych i nieszkodliwych dla organizmu żywego. Tomografia optyczna doskonale wpisuje się w nurt tych badań spełniając te kryteria i potencjalnie pozwala na stworzenie systemu umożliwiającego ciągłe monitorowanie stanu zdrowia pacjenta. Dodatkowo, oprócz aplikacji biomedycznych następuje wzrost zainteresowania zastosowaniem technik optycznych w przemyśle. Należy tu wspomnieć o tomografii optycznej procesowej, wykorzystywanej do tej pory głównie w analizie przepływów substancji wielofazowych.

W tomografii optycznej światło emitowane przez źródło laserowe jest wprowadzane do obiektu, a jego natężenie mierzy się na powierzchni przy użyciu czułych detektorów. Proces ten jest powtarzany dla kolejnych położań źródła światła. W oparciu o pomiary wyznaczany jest rozkład absorpcji i rozpraszania światła wewnątrz obiektu [5,6]. Mogą być też poszukiwane inne fizjologiczne własności takie jak stopień natlenienia krwi czy ilość wody w tkance. Niezwykle ważne jest poprawne zamodelowanie rozchodzenia się światła w ośrodkach przezroczystych (np. płyn rdzeniowo-mózgowy). Modele propagacji światła

uważane za wydajne [121] często nie radzą sobie z poprawnym odwzorowaniem rozkładu fotonów w tego typu ośrodkach. Dzieje się tak ze względu na ich naturę, bowiem wywodzą się z równań opisujących kinetyczną teorię gazów [29, 30]. Brak cząstek oddziałujących na fotony (rozpraszanie i absorpcja) powoduje, iż model jest nieadekwatny i nie może być stosowany. Dlatego do właściwego zaalokowania warunków brzegowych w warstwach przezroczystych wykorzystuje się głównie metody hybrydowe 3.3. W niniejszej pracy do rozwiązania tego problemu zaproponowano metodę bazującą na algorytmach grafiki komputerowej, a zwłaszcza na metodzie śledzenia promieni (ang. *ray tracing*). Opracowany algorytm określa widoczność węzłów warstwy zapisując informacje w „macierzy widoczności” 5.

Problem tworzenia obrazu w tomografii optycznej jest nieliniowym, źle uwarunkowanym zagadnieniem odwrotnym [9, 25, 40, 41]. Dlatego nawet małe błędy w pomiarach czy modelowaniu mogą powodować duże zniekształcenia w generowanych obrazach. Nie ma bezpośrednich metod rozwiązania tego problemu i dlatego definiuje się go typowo jako problem minimalizacji, którego iteracyjne rozwiązanie wymaga wielokrotnych rozwiązań zagadnienia prostego. Istnieje zatem potrzeba posiadania obliczeniowo wykonalnego modelu zagadnienia prostego, który będzie jak najdokładniej opisywał transport światła w danym ośrodku.

## 1.1 Cel i teza pracy

Celem pracy jest zaprojektowanie i implementacja metod przyspieszenia analizy zagadnienia prostego dyfuzyjnej tomografii optycznej. Problem odwrotny, czyli na przykład zadanie monitorowania krwotoków śródmózgowych wcześniaków w czasie rzeczywistym wymaga wielokrotnych, kosztownych obliczeniowo rozwiązań zagadnienia prostego.

Praca stanowi studium na temat metod i algorytmów wykorzystywanych w DTO. Autor postawił za cel główny implementację algorytmów dekompozycji obszarowej w celu podniesienia wydajności lub niejednokrotnie umożliwienia wykonania obliczeń zagadnienia prostego tego rodzaju tomografii. Dodatkowym celem stało się rozwiązanie problemu alokacji warunków brzegowych w warstwach nierozpraszających i nieabsorbujących światła. Do zrealizowania powyższych zadań należało:

1. opracowanie metod dekompozycji obszarowej dla analizy zadania prostego dyfuzyj-

- nej tomografii optycznej,
2. zaimplementowanie algorytmów dekompozycji i rozwiązanie zagadnienia prostego,
  3. opracowanie i implementacja metod podziału przestrzeni w procesie tworzenia obrazu,
  4. implementacja algorytmów kroczenia po zdyskretyzowanej przestrzeni 3D,
  5. opracowanie i implementacja algorytmu tworzenia „macierzy widoczności”,
  6. weryfikacja otrzymanych wyników na podstawie rozwiązania problemu uzyskanego jednorazowo bez żadnych metod dekompozycji.

Na podstawie przeprowadzonych analiz teoretycznych i symulacji numerycznych autor sformułował następującą tezę.

**„Dekompozycja obszarowa oraz zmodyfikowane metody grafiki komputerowej pozwalają na ograniczenie czasu obliczeń numerycznych w rozwiązywaniu zagadnienia prostego dyfuzyjnej tomografii optycznej”**

## 1.2 Przegląd zawartości rozprawy

Rozprawa została podzielona na 6 rozdziałów. Poszczególne rozdziały zawierają: W pierwszym z nich zawarto wprowadzenie w tematykę dyfuzyjnej tomografii optycznej (DTO) oraz cel i tezę rozprawy.

Rozdział 2 omawia zagadnienie proste i odwrotne DTO. Ponadto stanowi przegląd technik eksperymentalnych, które są bazą dla aplikacji teorii tomografii optycznej.

W rozdziale 3 umieszczono opis modeli rozchodzenia się światła, a mianowicie: równanie transportu promieniowania (ang. *radiative transfer equation* RTE), przybliżenie dyfuzyjne równania RTE (ang. *diffusion approximation* DA) oraz metodę łączoną RTE-DA. W tej części pracy przedstawiono wady i zalety powyższych metod w kontekście zastosowań w DOT.

Rozdział 4 to przegląd metod numerycznych stosowanych w DTO. Rozdział zawiera opis metod deterministycznych umożliwiających rozwiązanie równań transportu światła. Najwięcej uwagi poświęcono dekompozycji obszarowej (ang. *domain decomposition* DD)

oraz metodzie elementów brzegowych (MEB). Ponadto rozdział zawiera przykłady zastosowań opracowanych metod dekompozycji obszarowej. Przedstawiono tam zarówno idealizowane problemy umożliwiające weryfikację poprawności metod, jak i jeden duży problem t.j. DTO głowy niemowlaka.

Rozdział 5 opisuje sposób tworzenia macierzy widoczności dla warstwy modelu głowy niemowlaka zawierającej płyn rdzeniowo-mózgowy. Został tu sformułowany matematycznie problem przesłania i widoczności punktów rozmieszczonych na powłokach ograniczających modelowaną warstwę. W rozdziale przedstawiono numeryczny algorytm tworzenia macierzy widoczności jak i związaną z nim analizę metod dyskretyzacji przestrzeni wokół badanego modelu.

Rozdział 6 zawiera podsumowanie uzyskanych wyników i wypływające z niniejszej pracy wnioski. Znajduje się tu również zestawienie najważniejszych osiągnięć autora.

# Rozdział 2

## Dyfuzyjna tomografia optyczna

### 2.1 Wstęp

W tomografii optycznej światło emitowane przez podczerwone źródło laserowe jest wprowadzane do obiektu przy użyciu jednego z wielu włókien światłowodowych podłączonych do obiektu. Jego pomiaru dokonuje się we wszystkich pozostałych włóknach, które wówczas pracują jako detektory światłoczułe. Taki proces pomiarowy jest przeprowadzany dla każdego z położań źródła. W oparciu o pomiary, konstruuje się rozkład współczynników absorpcji i rozpraszania wewnątrz obiektu.

DTO ma wiele potencjalnych zastosowań zwłaszcza w zakresie obrazowania medycznego. Na możliwości te decydujący wpływ ma tkanka ludzka, która zarówno rozprasza jak i absorbuje światło podczerwone. Pewne cechy czynią DTO szczególnie przydatną w obrazowaniu medycznym, tj.:

1. procedura pomiarowa jest nieinwazyjna, a promieniowanie niejonizujące. Pacjent nie musi przyjmować tzw. środków kontrastujących, ani też nie jest narażony na ryzyko wystąpienia chrób związanych z przyjęciem nadmiernych dawek szkodliwego promieniowania jonizującego,
2. metody optyczne mogą dostarczyć informacji o stopniu natlenienia oraz ilości (objętości) krwi w tkance. Należy zaznaczyć, iż w przebiegu leczenia wczesniaków jest to jedyna technologia pozwalająca na monitoring dynamiki krwotoków śródmózgowych będących główną przyczyną ich śmierci,
3. oprzyrządowanie jest relatywnie tanie i przenośne.

Potencjalne zastosowania DTO w medycynie są ściśle powiązane z powyższymi cechami i obejmują:

1. wykrywanie i klasyfikację raka piersi. Metody optyczne dają nadzieję na wykrywanie wczesnych stadiów choroby nowotworowej. DTO jest postrzegane jako technologia wspomagająca w diagnostyce przesiewowej, pozwalająca uniknąć niepotrzebnych biopsji,
2. monitoring chorób naczyń obwodowych,
3. monitoring główki niemowlaka,
4. obrazowanie aktywności mózgu.

Główne ograniczenie w stosowaniu DTO stanowi szybkie osłabianie światła w medium rozpraszającym, co negatywnie wpływa na obrazowanie dużych objętości.

Propagacja światła w materii biologicznej jest zazwyczaj opisana przez teorię przewodzenia (ang. *transport theory*). Teoria przewodzenia może być modelowana przez metody stochastyczne tj. Monte Carlo [26] oraz przez metody deterministyczne [11, 12, 16] bazujące na opisie przewodzenia światła równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Ogólnie przyjętym modelem propagacji światła w medium o własnościach rozpraszających jest równanie RTE (ang. *Radiative Transfer Equation*). Niestety w wielu przypadkach RTE jest obliczeniowo nieopłacalne aby mogło być stosowane w praktyce i dlatego stosuje się modele przybliżone. W środowisku wysoce rozpraszającym RTE jest aproksymowane przez równanie dyfuzji. W wielu typach tkanek dominuje rozpraszanie i przybliżenie propagacji światła równaniem dyfuzji może być uważane za dobry model. Jednakże takie przybliżenie nie może być wykorzystywane w mediach słabo rozpraszających tj. płyn rdzeniowo-mózgowy i w pobliżu wysoce skolimowanych źródeł światła często używanych w DTO. Aby obejść ograniczenia wynikające z równania dyfuzji odnośnie silnie skupionych źródeł oraz obszarów słabo i w ogóle nierozpraszających stosuje się rozwiązania hybrydowe gdzie np. przybliżenie równaniem dyfuzji jest połączone z metodą Monte Carlo lub modelem energetycznym (ang. *radiosity*) [99]. Rozwiązania analityczne RTE i równania dyfuzji są często ograniczone do pewnych uproszczonych geometrii, przez co ich wykorzystanie w DTO jest ograniczone. Do ich rozwiązania stosuje się zatem metody numeryczne, zazwyczaj metodę różnic skończonych (MRS) i metodę elementów skończonych (MES).



MES jest ogólnie uważana za metodę bardziej elastyczną w implementowaniu różnych warunków brzegowych oraz modelowaniu złożonych geometrii, a zatem jest częściej wybierana jako metoda do rozwiązywania równań opisujących rozchodzenie się światła w tkankach.

Na pomiar propagacji światła w DTO bezpośredni wpływ mają jakość światłowodów oraz ich połączenie (sprzęg) z obiektem. Efekty połączeniowe powodują nieznane straty amplitudy i przesunięcia fazowe w mierzonych sygnałach. Jeśli te straty nie są efektywnie kalibrowane lub modelowane objawiają się jako poważne artefakty<sup>1</sup> na konstruowanych obrazach. Typowo, błędy w modelowaniu optody [24, 26] objawiają się jako perturbacje absorpcji i rozpraszania w jej pobliżu. Jednym ze sposobów skompensowania tych strat jest użycie „obrazowania różnicowego” [105]. „Obrazowania różnicowe” tworzy obrazy z niewielką liczbą artefaktów i nie może być stosowane gdy wymagane jest pozyskanie bardzo dokładnych własności optycznych lub gdy pomiar odniesienia nie jest możliwy. Aby uzyskać obrazy końcowe należy użyć specjalistycznego sprzętu kalibrującego zgodnie z opracowanym protokołem kalibracji [66]. Znanych jest wiele metod kalibracji strat optody źródła i detektora [121]. Jednakże właściwa kalibracja strat źródła i detektora jest trudna do zaimplementowania na poziomie sprzętowym.

## 2.2 Optyczne własności tkanki

W DTO obrazy odzwierciedlające optyczne własności danego ośrodka są konstruowane w oparciu o pomiary światła podczerwonego na jego powierzchni. Na propagację światła w danym medium mają wpływ absorpcja i rozpraszanie. W przypadku absorpcji energia jest przekazywana poprzez promieniowanie do wnętrza medium. Wielkością, która opisuje absorpcję w danym medium jest współczynnik absorpcji  $\mu_a [mm^{-1}]$ , który odpowiada ilości zdarzeń absorpcji (pochłonięcia fotonu) na jednostkę długości.

Rozpraszanie jest zjawiskiem, w którym kierunek radiacji (promieniowania) zmienia się wewnątrz danego medium. Nowy kierunek rozchodzenia się fotonów zależy od właściwości ośrodka rozpraszającego i ich początkowego kierunku. Właściwości rozpraszające

---

<sup>1</sup>W technikach tomograficznych, artefakty to wady będące skutkami ubocznymi stosowania algorytmów rekonstrukcji obrazu. Objawiają się jako nie odpowiadające żadnej strukturze anatomicznej sztuczne wtrącenia na oglądanym obrazie

danego medium są opisane przez dwie wielkości, a mianowicie współczynnik rozpraszania i „funkcję rozpraszania fazy” (ang. *scattering phase function*). Współczynnik rozpraszania  $\mu_s[mm^{-1}]$  opisuje prawdopodobieństwo, z którym cząsteczka zmieni kierunek po przebyciu pewnego dystansu. „Funkcja rozpraszania fazy”  $\Theta(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}')$ , gdzie  $\hat{\mathbf{s}}$  i  $\hat{\mathbf{s}}'$  są kierunkami radiacji przed i po wystąpieniu rozpraszania, opisuje prawdopodobieństwo, że cząsteczka zostanie rozproszona w danym kierunku przez szczególny ośrodek rozpraszający. Trzecią wielkością wpływającą na propagację światła w medium jest współczynnik załamania światła (ang. *refractive index*)  $n_{in}$ , będący stosunkiem prędkości światła w próżni do tej w badanym ośrodku. W wielu zastosowaniach DTO współczynnik ten przyjmuje się jako stały we wnętrzu danego medium.

Większość tkanek ludzkiego ciała cechuje własność rozpraszania światła. W jej wyniku, światło po przebyciu zaledwie kilku milimetrów zmienia kierunek rozchodzenia się. Zjawisko to może być porównane z procesem dyfuzji w gazach. Różne typy tkanek posiadają odmienne własności rozpraszające (tabela 2.1), co leży u podstaw tworzenia obrazów. Mimo, że w materii biologicznej współczynnik rozpraszania jest zwykle większy niż współ-

Tabela 2.1. Współczynniki absorpcji  $\mu_a$  i rozpraszania  $\mu_s$  światła wewnątrz główki niemowlęcia

	$\mu_a[mm^{-1}]$	$\mu_s[mm^{-1}]$
Skóra i tkanka miękka:	0.018	4.75
Kość czaszki:	0.016	4
Istota szara:	0.048	1.25
Istota biała:	0.036	2.5
Płyn rdzeniowo-mózgowy:	0.0048	0.16

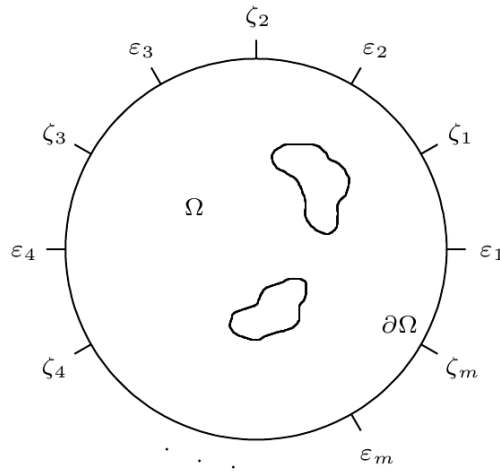
czynnik absorpcji, większa część interesujących informacji związana jest z absorpcją.

## 2.3 Techniki eksperymentalne

Urządzenia eksperymentalne w DTO można podzielić na trzy klasy, a mianowicie: systemy falowe stałe (ang. *continuous wave systems*), systemy dziedziny częstotliwości (ang. *frequency-domain systems*) i systemy dziedziny czasu (ang. *time-domain systems*). We wszystkich systemach podstawowa idea akwizycji danych jest ta sama. W urządzeniu eksperymentalnym, grupa źródeł światła i detektorów jest umieszczona na brzegu  $\partial\Omega$  obiektu  $\Omega$ .

Przykładowa dwu-wymiarowa ilustracja typowego systemu pomiarowego DTO została przedstawiona na rys. 2.1, gdzie  $m$  źródeł jest przyłączonych w punktach  $\epsilon_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , zaś  $m$  detektorów w punktach  $\zeta_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Monochromatyczne światło podczerwone wprowadzane jest do obiektu przy użyciu jednego ze źródeł przy  $\epsilon_j$ . W tym samym czasie jego rozproszona część jest mierzona przy użyciu detektorów umieszczonych w  $\zeta_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Następnie cały proces pomiarowy jest powtarzany dla wszystkich  $m$  położzeń źródeł.



Rysunek 2.1. Ilustracja systemu pomiarowego TO. Źródła  $\epsilon_j$  i detektory  $\zeta_k$  są położone na brzegu  $\partial\Omega$  obiektu  $\Omega$

### 2.3.1 Systemy falowe stałe

Oprządkowanie tego systemu używa źródeł o stałym natężeniu światła i mierzy natężenie  $\Gamma(\omega = 0)$  przetransmitowanego światła po stronach pomiarowych (natężenie DC). Wiele tego typu systemów zostało opracowanych dla TO. Posiadają one jednak kilka wad związanych z obrazowaniem falą ciągłą. Po pierwsze, pomiary natężenia są bardziej wrażliwe na optyczne własności tkanki w pobliżu powierzchni i na efekty sprzężeń przy powierzchni, niż na optyczne własności głębszych warstw tkanki [53]. Po drugie, zjawiska absorpcji i rozpraszania nie mogą być rozróżniane tylko w oparciu o pomiary natężenia [10]. Tak więc, pomiary pochodzące z systemów falowych stałych są zwykle używane do obrazowania różnicowego, gdzie tworzony obraz powstaje z różnicy pomiędzy danymi pomierzonymi, a danymi uzyskanymi z pomiarów referencyjnych. Pomiarów referencyjnych dokonuje się przy użyciu odpowiednio skalibrowanego sprzętu. Metody kompensacji

strat na optodach źródłowych oraz detektorach wymagają zastosowania specjalistycznego sprzętu oraz protokołu kalibracji, które to zostały szczegółowo przedstawione w [66, 88]. Zaletą urządzeń obrazowania wykonanych w tej technologii jest szybkość zbierania danych co umożliwia błyskawiczne uzyskanie tymczasowego rozwiązania [94, 107, 112].

Dwa pozostałe systemy pomiarowe, tzn. system dziedziny częstotliwości oraz system dziedziny czasu generują nieco więcej informacji. Otrzymamy zarówno rozkład absorpcji jak i rozpraszania bez konieczności wykonywania pomiarów referencyjnych.

### 2.3.2 Systemy dziedziny częstotliwości

W systemach dziedziny częstotliwości (ang. *Frequency-domain systems*) [31, 35, 45, 49, 85, 88] źródło światła jest modulowane amplitudowo. Częstotliwość sygnału wynosi około kilkuset MHz, a mierzone jest osłabienie amplitudy oraz przesunięcie fazowe transmitowanego sygnału [118].

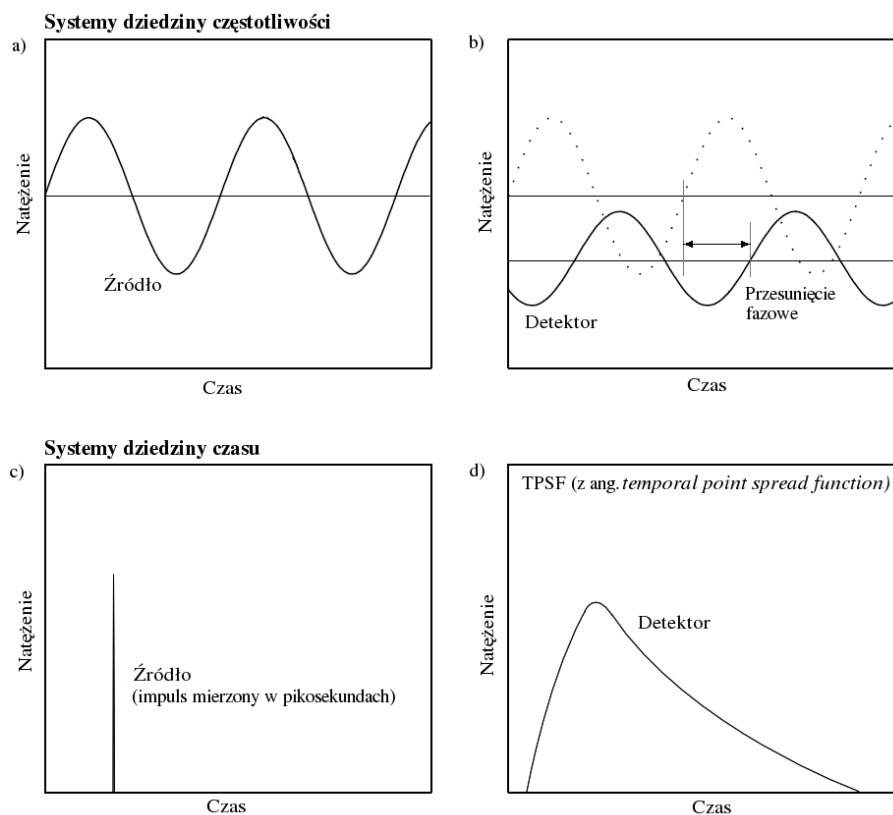
W trakcie propagacji fali poprzez tkankę rozpraszanie powoduje, iż część fotonów przemierza znacznie dłuższy dystans niż inne. Skutkuje to zmniejszeniem amplitudy sygnału. Całowity wzrost odległości pokonywanych przez fotony w tkance w stosunku do odległości w powietrzu powoduje przesunięcie fazowe mierzonego sygnału. Zatem wzrost współczynnika rozpraszania danego ośrodka będzie przyczyną większego opóźnienia sygnału oraz redukcji jego amplitudy. Z kolei wzrost liczby zdarzeń absorpcji ograniczy ilość fotonów, które przemierzą pełen dystans od źródła do detektora. W konsekwencji spowoduje to redukcję przesunięcia fazowego sygnału. Reasumując fala opuszczająca tkankę zawiera informacje o współczynnikach absorpcji i rozpraszania ośrodka zakodowaną w przesunięciu fazowym, głębokości modulacji oraz składowej stałej natężenia sygnału [9, 60].

Systemy dziedziny częstotliwości mają tę przewagę nad systemami dziedziny czasu, że są znacznie mniej wrażliwe na osłabienie sygnału w punkcie styku przetwornika i tkanki [8, 61]. Mimo, iż gorsza jakość tego połączenia zmniejszy średnie natężenie sygnału to jego składowe stała i zmienna będą osłabiane proporcjonalnie pozostawiając głębokość modulacji na stałym poziomie. Przesunięcie fazowe ulegnie tylko nieznacznej zmianie. Dodatkowo urządzenia systemu dziedziny częstotliwości są stosunkowo niedrogie, łatwe w rozbudowie i użyciu [53].

Z kolei wadą tego typu systemów jest to, że dają mniej informacji o badanym ośrodku w stosunku do systemów dziedziny czasu [118].

Diagram chwilowego zachowania się transmitowanego światła  $\Gamma(\omega)$  podczas pomiaru w dziedzinie częstotliwości przedstawia górny rząd na rys. 2.2. Rysunek przedstawia modulowany amplitudowo sygnał wejściowy a) oraz osłabiony i przesunięty w fazie sygnał zmierzony b).

Typy danych jakie otrzymujemy z pomiarów w dziedzinie częstotliwości to: amplituda  $|\Gamma(\omega)|$  i przesunięcie fazowe  $arg(\Gamma(\omega))$ . W wielu przypadkach obrazu konstruuje się z użyciem danych: logarytmu amplitudy  $\log|\Gamma(\omega)|$  i przesunięcia fazowego. Alternatywnie części rzeczywiste i urojone pomiarów,  $Re(\Gamma(\omega))$  i  $Im(\Gamma(\omega))$ , również mogą być wykorzystane [109, 111].



Rysunek 2.2. Diagram czasowego zachowania się przetransmitowanego światła podczas pomiaru w DTO. Górny rząd przedstawia sygnały wejściowe a) i wyjściowe b) pomiaru w dziedzinie częstotliwości. Dolny rząd pokazuje odpowiednio to samo lecz dla pomiaru w dziedzinie czasu

### 2.3.3 Systemy dziedziny czasu

W systemach dziedziny czasu (ang. *Time-domain systems*) [22, 44, 58, 61, 89], krótki (kilka pikosekund) impuls światła jest podawany na wejście, a mierzony jest „czasowy” rozkład

$\gamma(t)$  przetransmitowanych fotonów [53, 59, 105]. Ten czasowy rozkład jest znany jako (ang. *temporal point spread function* TPSF) chwilowa funkcja rozprzestrzeniania punktowego [39, 90]. Diagram „czasowego” zachowania się przetransmitowanego sygnału świetlnego  $\Gamma(t)$  podczas pomiaru w dziedzinie czasu jest zilustrowany w dolnym rzędzie na rys. 2.2. Rysunek pokazuje wejściowy impuls światła c) i przetransmitowane TPSF d). W systemach dziedziny czasu, czasy pomiarów są zazwyczaj dłuższe niż w systemach dziedziny częstotliwości. Jednak z drugiej strony, systemy dziedziny czasu oferują bardzo wrażliwe pomiary nawet przez dużej grubości tkankę [53].

### 2.3.4 Zależności pomiędzy systemami

Pomiary wykonane w dziedzinie czasu i częstotliwości są ze sobą powiązane poprzez transformację Fouriera:

$$\Gamma(\omega) = \int_0^{\infty} \Gamma(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.1)$$

W rzeczywistości, w niektórych przypadkach system dziedziny czasu jest używany do wykonania pomiarów, zaś ich wyniki poddane transformacji Fouriera są używane do konstrukcji obrazów. Więcej o parametrach pracy obydwu systemów oraz o zależnościach między nimi można znaleźć w [7].

Problemy związane z wrażliwością opisanych powyżej schematów pomiarowych oraz wybór odpowiednich danych pomiarowych, najlepiej nadających się do tworzenia obrazów są wciąż przedmiotem wielu badań [5, 11, 108, 110]. Jeśli chodzi o porównanie wydajności poszczególnych systemów to nie ma zbyt wielu publikacji na ten temat. W pracach opisanych w [96] dokonano porównania systemów pod kątem jakości amplitudy i fazy mierzonego sygnału oraz generowanych obrazów. W wyniku tych działań został stworzony protokół oceny wydajności oprzyrządowania do pomiaru migracji fotonów [66].

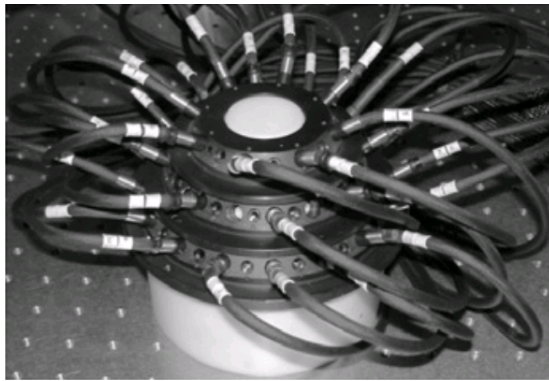
## 2.4 Zastosowania

Jest kilka kwestii, które faworyzują TO jako technikę obrazowania. Po pierwsze, metody optyczne mogą dostarczyć informacji o stopniu natlenienia i objętości krwi w tkance. W dodatku możliwe jest dostarczenie funkcjonalnych informacji o konkretnej tkance. Po drugie, procedura pomiarowa jest nieinwazyjna, a samo promieniowanie jest niejonizujące. TO jest zatem bardzo bezpieczna. Po trzecie, oprzyrządowanie jest stosunkowo niedro-

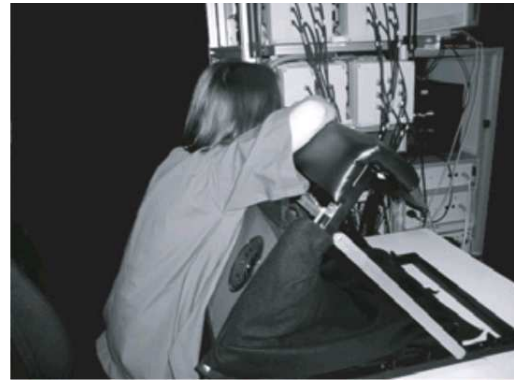
gie i przenośne. Rzeczą, która ogranicza zastosowania TO jest silne tłumienie światła w medium. Wada ta uniemożliwia skanowanie obiektów o dużych objętościach.

### 2.4.1 Obrazowanie piersi

Guzy nowotworowe charakteryzują się zwiększonym unaczynieniem i w związku z tym mają inne własności absorpcyjne niż otaczająca je zdrowa tkanka [25, 26]. Zatem TO jest niejako naturalną metodą w lokalizowaniu ognisk zmian nowotworowych. Dodatkowo możliwa jest klasyfikacja różnych typów guzów [125, 126]. Wadą TO jest jej stosunkowo



a)



b)

Rysunek 2.3. Wiązka światłowodów przymocowana do trzech obręczy stanowiących stożek pomiarowy a) oraz pacjentka przy stanowisku do mammografii optycznej b) [125]

niska rozdzielczość przestrzenna w odniesieniu do tomografii komputerowej. Jednakże TO ma kilka korzystnych cech, które w wielu przypadkach dają jej przewagę nad technikami klasycznymi. W odróżnieniu od tomografii komputerowej, wrażliwość aparatury optycznej jest niezmienna przy badaniu zarówno młodszych jak i starszych kobiet. Wykorzystywane w TO promieniowanie niejonizujące czyni ten rodzaj badania szczególnie przydatnym dla młodszych kobiet (obserwuje się wzrost zachorowań), gdyż prawdopodobieństwo spowodowania choroby w badaniach rentgenowskich jest większe niż prawdopodobieństwo wykrycia guza. Dodatkowo metody optyczne nie wymagają swoistej kompresji-ściskania piersi, co może być bolesne dla pacjentek. Do tej pory opracowano wiele technik obrazowania piersi. Badania kliniczne, które zostały przeprowadzone opisano między innymi w [42, 49, 58, 95].

## 2.4.2 Obrazowanie głowy niemowlęcia

Uszkodzenia mózgowi wcześniaków mogą prowadzić do ich trwałego kalectwa, a nawet śmierci. Uszkodzenie mózgu jest powodowane kiedy zaopatrzenie w krew i tlen pewnych jego części jest zaburzone lub całkowicie przerwane. Obecnie takie schorzenia są diagnozowane klinicznie przez ultradźwięki, co daje jedynie informacje anatomiczne oraz przez MRI i spektroskopię magnetycznego rezonansu jądrowego (ang. *Nuclear Magnetic Resonance* NMR). TO może dostarczyć informacji o hemodynamicznych zmianach w mózgu, a zatem stanowi system do identyfikowania niemowlaków zagrożonych chorobą (określania stopnia ryzyka), do diagnozowania choroby oraz do monitorowania procesu leczenia. Obecnie metody obrazowania 3D dostarczają wiernych (dokładnych) obrazów tomograficznych mózgu niemowlaka [6,8,9]. Metod tych używa się do monitorowania zmian objętości krwi i jej natlenienia oraz do obrazowania aktywności kory mózgowej.



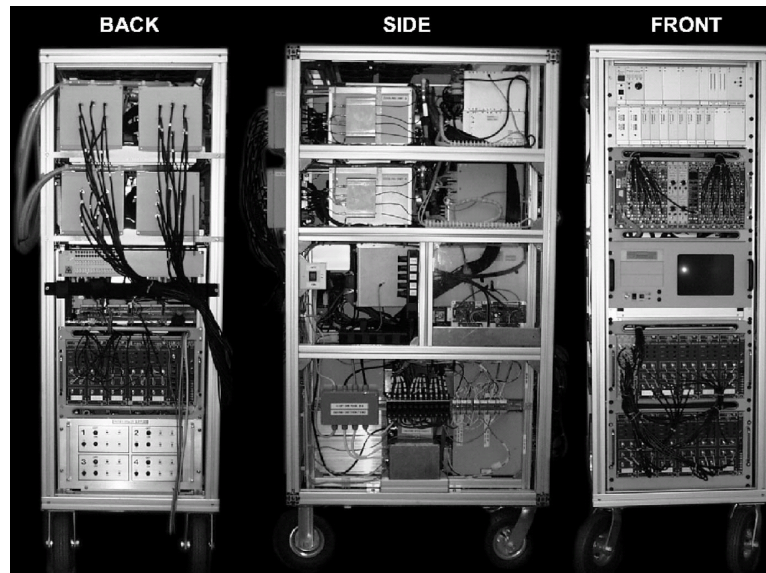
Rysunek 2.4. Hełm używany w TO wykonany z pianki pochłaniającej światło podczerwone a) umieszczony na głowie dziesięcio dniowego noworodka b) [8,9,60]

## 2.4.3 Obrazowanie aktywności mózgu

Metody optyczne zostały dobrze zbadane jeśli chodzi o obrazowanie aktywności mózgu, zarówno u dzieci jak i u dorosłych. W TO obrazowanie funkcjonowania mózgu jest możliwe dzięki jego własnościom absorpcji i rozpraszania światła podczerwonego. Mimo, że TO cechuje się niską rozdzielczością przestrzenną, to posiada kilka zalet w stosunku do innych technik obrazowania, choćby do obecnie najpopularniejszej techniki MRI (ang. *Magnetic Resonance Imaging*). Po pierwsze, TO może być używana do rozróżniania oxy-



hemoglobiny i deoxy-hemoglobiny. Po drugie, posiada doskonałą rozdzielczość czasową dzięki możliwości dokonywania pomiaru na całej powierzchni obiektu (a nie tylko w płaszczyźnie) podczas jednej projekcji. Po trzecie, sprzęt TO jest przenośny (patrz rys. 2.5) i cechuje się niewielkimi rozmiarami w stosunku do obecnie stosowanych technik [105]. Większość obrazów odzwierciedlających różnice pomiędzy różnymi stanami pracy mó-



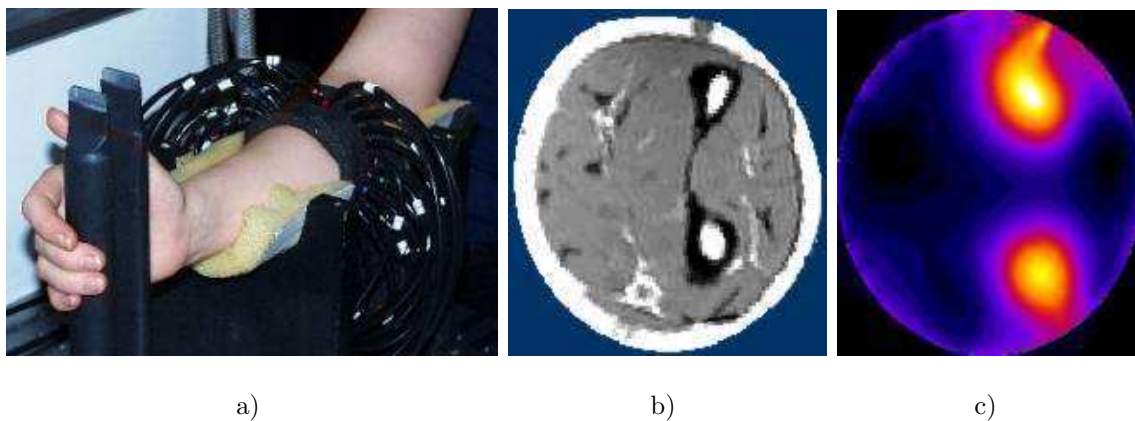
Rysunek 2.5. 32-kanalowy system tomografii optycznej dziedziny czasu umieszczony w standardowej 19-o calowej obudowie. Tomograf został skonstruowany na Uniwersytecie UCL w Londynie

zgu, zostało wykonanych przy użyciu uproszczonych założeń odnośnie geometrii tkanki i jej własności optycznych. Metody obrazowania 3D zostały wykorzystane do monitorowania hemodynamiki ludzkiego mózgu i konstruowania obrazów aktywności kory mózgowej (ang. *motor cortex*) [6, 9].

#### 2.4.4 Inne zastosowania w medycynie

TO została użyta do obrazowania ludzkiego przedramienia [67]. Otrzymane obrazy przekroju poprzecznego przedramienia odzwierciedlały rozkład współczynników rozpraszania i absorpcji światła podczerwonego. Dzięki użyciu źródła światła o dwóch długościach fali (780 i 820 *nm*) możliwe było zobrazowanie zmian fizjologicznych zachodzących w tkankach przedramienia podczas prostych ruchów zaciskania dłoni (rys. 2.6).

Za kolejny przykład zastosowań tomografii optycznej mogą posłużyć osiągnięcia prof. A. Kowczyka z UMK w Toruniu. Pod jego kierownictwem zaprojektowano i wykonano



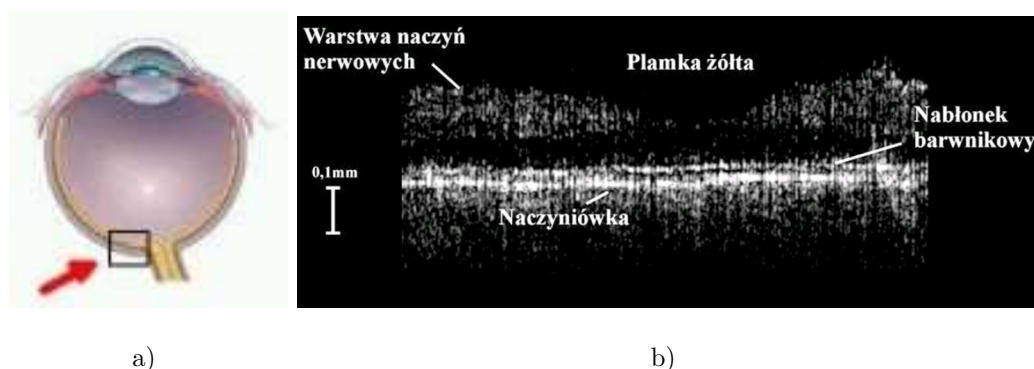
Rysunek 2.6. Rysunek przedstawia eksperymentalne stanowisko do tomografii optycznej przedramienia wraz z miernikiem siły ścisku palców dłoni a). Na przekrojach poprzecznych przedramienia znajdują się odpowiednio skan MRI b) oraz rozkład rozpraszania c) uzyskany przy fali o długości  $780\text{ nm}$ . Wartość współczynnika rozpraszania mieściła się w zakresie  $0.6 - 2.0\text{ mm}^{-1}$  [66,67]



Rysunek 2.7. Urządzenie prototypowe do spektralnej tomografii optycznej (SOCT) skonstruowane w Instytucie Fizyki UMK w Toruniu [72, 80]

urządzenie laboratoryjne realizujące koherentną tomografię optyczną (ang. *Optical Coherence Tomography* OCT). Prace prowadzono z myślą o zastosowaniach w okulistyce z uwagi na fakt, iż badane tu ośrodki w sposób umiarkowany pochłaniają i rozpraszają

światło. Urządzenie dostarcza wysokiej jakości przekrojów dowolnych struktur oka, niedostępnych w normalnym badaniu okulistycznym [72, 80].



Rysunek 2.8. Tomogramy siatkówki oka ludzkiego w okolicach plamki żółtej [72, 80]

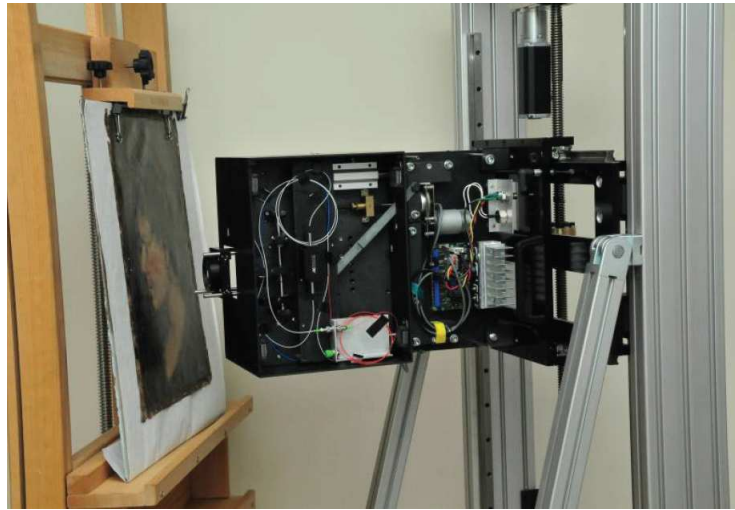
#### 2.4.5 Zastosowania przemysłowe

Ciekawą propozycje zastosowania technik optycznych zawiera praca opisująca koncepcję systemu pomiarowego do badania mętności wody w oczyszczalniach ścieków. Proponowane rozwiązanie opiera się na wykorzystaniu tomografu optycznego w systemie automatycznej regulacji procesu oczyszczania wody. W pracy przedstawiono ideę działania systemu pomiarowego oraz zaproponowano schemat aplikacyjny takiego urządzenia. Przedstawiona metoda jest bezinwazyjna i może być stosowana do bardzo zanieczyszczonej wody [103].

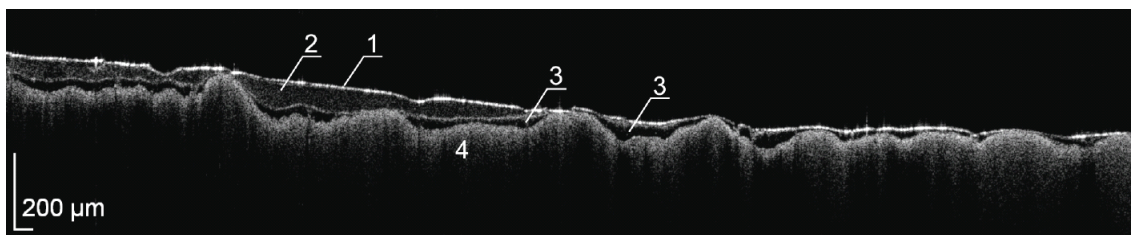
Kolejną aplikacją jest pomiar parametrów przepływu dwufazowego gaz-ciecz. Struktura przepływu może być pęcherzykowa jak i rozwarstwiona. Ze względu na złożony charakter omawianego zjawiska autorzy przedstawili system pomiarowy składający się z tomografu optycznego oraz pojemnościowego. Ten pierwszy służył do rozpoznawania struktur pęcherzykowych, zaś ten drugi do rozpoznawania struktur rozwarstwionych [102]. Budowę tomografu optycznego poprzedziły badania i pomiary parametrów aeracji cieczy w pionowej kolumnie [101]. Kształt i wielkość pęcherzyków powietrza były jednymi z najważniejszych parametrów do określenia w procesie prześwietlania kolumny jednorodną wiązką światła widzialnego.

Innym przykładem zastosowań jest wykorzystanie koherentnej tomografii optycznej w analizie struktur częściowo przezroczystych warstw przypowierzchniowych obiektów na podłożu całkowicie nieprzejrystym. Przykładem są tu warstwy lakierów lub werniksów na

drewnie. Wprowadzenie koherentnej tomografii optycznej do diagnostyki konserwatorskiej zostało z sukcesem wdrożone i dokładnie przebadane [120].



a)



b)

Rysunek 2.9. Spektralny tomograf optyczny wykorzystywany do badań dzieł sztuki a) oraz tomogram OCT uzyskany ze skanowania XIX w. obrazu olejnego namalowanego na płótnie b) [120]

Możliwe zastosowania TO w przemyśle obejmują tomografię procesową, gdzie poszukuje się nieinwazyjnych technik pomiarowych do monitorowania zarówno czasowych jak i przestrzennych stanów procesów przemysłowych, np. monitorowanie przepływu pulpy w rurociągach fabryki papieru [121].

## 2.5 Zagadnienie proste

Zagadnieniem prostym DTO jest znalezienie danych „pomiarowych”, gdy optyczne własności ośrodka i wejściowe natężenie źródeł światła są znane. Propagację światła w tkance biologicznej opisuje teoria transportu (równania przewodzenia) [121]. W teorii transportu, najczęściej stosowanymi modelami zagadnienia prostego, opisującymi propagację światła

w tkankach są równanie RTE i jego przybliżenie dyfuzyjne. W niniejszej pracy modelowanie propagacji światła zostało zaimplementowane w oparciu o przybliżenie dyfuzyjne równania RTE.

## 2.6 Zagadnienie odwrotne

W zagadnieniu odwrotnym DTO konstruuje się funkcje absorpcji i rozpraszania lub jak w niektórych pracach [42, 117] funkcje absorpcji i dyfuzji dla wnętrza obiektu. Jeśli jest stosowana więcej niż jedna długość fali, koncentracja hemoglobiny, nasycenie tlenem i rozkład wody mogą być obliczone z widma absorpcji, a niektóre charakterystyki rozpraszania z widma rozpraszania [117]. Ostatnio wykonano prace, w których oxy-hemoglobina, deoxy-hemoglobina i współczynnik rozpraszania były bezpośrednio oszacowywane z pomiarów przy różnych długościach fal [34, 81].

Metody konstrukcji obrazu w DTO można podzielić na dwie klasy, tzn.: na metody różnicowe i na metody, które bazują na metodzie zregularyzowanych nieliniowych najmniejszych kwadratów (ang. *regularized non-linear least squares approach*).

W literaturze dowiedziono, że zjawiska absorpcji i rozpraszania nie mogą być rozróżniane tylko w oparciu o pomiar amplitudy. Gruntowne badania na ten temat można znaleźć w pozycjach [6, 9, 78]. Poniżej została zamieszczona krótka charakterystyka dwóch metod tworzenia obrazu.

### 2.6.1 Metody różnicowe

Metody te oparte są na założeniu, że współczynniki absorpcji i rozpraszania  $(\mu_a, \mu_s)$ , nie różnią się znacznie od wartości tła  $(\mu_{a,ref}, \mu_{s,ref})$ . Celem jest rekonstrukcja małego zaburzenia:

$$\begin{pmatrix} \delta\mu_a \\ \delta\mu_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_a \\ \mu_s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_{a,ref} \\ \mu_{s,ref} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

co oparte jest na modelu:

$$\delta\mathcal{Z} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \delta\mu_a \\ \delta\mu_s \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

gdzie  $\delta\mathcal{Z} = \mathcal{Z} - \mathcal{Z}_{ref}$  jest różnicą pomiędzy danymi, które zostały zmierzone z własnościami optycznymi  $(\mu_a, \mu_s)$ , a danymi z własnościami optycznymi tła  $(\mu_{a,ref}, \mu_{s,ref})$ . Macierz

$\mathbf{K}$  może być skonstruowana, np.: przez założenie geometrii nieskończonej przestrzeni lub nieskończonej półprzestrzeni, w której analityczne rozwiązanie jest znane [51] lub może być uzyskane z symulacji Monte Carlo [33]. Większość sposobów konstruowaniu macierzy  $\mathbf{K}$  bazuje na metodach numerycznych, w przypadku których  $\mathbf{K}$  jest macierzą Jakobiego dla modelu zagadnienia prostego [6].

W DTO metody różnicowe zostały zastosowane w badaniach aktywności mózgu [23, 36, 52, 60], gdzie jest monitorwana różnica między stanem przed i po reakcji na bodźce oraz w pewnym zakresie w obrazowaniu piersi [106, 108]. Obrazowanie różnicowe cechuje się tym, że daje obrazy z niewielką liczbą artefaktów. Nie może być jednak używane kiedy wymagane są absolutne, bazowe własności optyczne lub kiedy pomiary odniesienia nie są dostępne.

## 2.6.2 Metoda nieliniowych najmniejszych kwadratów

Wiele metod stosowanych do rozwiązania problemu odwrotnego DTO bazuje na metodzie nieliniowych najmniejszych kwadratów. W tym podejściu pojedynczy pobór danych jest używany do oszacowania absolutnych wartości własności optycznych medium. Zregularyzowane zagadnienie nieliniowych najmniejszych kwadratów pozwala na oszacowanie rozkładu absorpcji i rozpraszania  $(\mu_a, \mu_s)$ , które minimalizują funkcjonal o postaci:

$$\Psi = \|\mathbf{L}(\mathcal{Z} - \mathcal{F}(\mu_a, \mu_s))\|_2^2 + \mathcal{B}(\mu_a, \mu_s) \quad (2.4)$$

kiedy pomierzone dane lub typy danych  $\mathcal{Z}$  są dane. W funkcjonale (2.4),  $\mathcal{F}$  jest modelem zagadnienia prostego transportu światła, który mapuje parametry absorpcji i rozpraszania na mierzalne dane lub typy danych. Co więcej wyrażenie  $\mathcal{B}(\mu_a, \mu_s) > 0$  jest uogólnionym funkcjonalem kary, a macierz  $\mathbf{L}$  jest macierzą wagową, która odpowiada składnikowi Choleskiego odwrotności macierzy kowariancji szumu. Regularyzujący funkcjonal kary jest zazwyczaj zdefiniowany tak:

$$\mathcal{B}(\mu_a, \mu_s) = \alpha_{\mu_a} \mathcal{A}(\mu_a) + \alpha_{\mu_s} \mathcal{A}(\mu_s) \quad (2.5)$$

gdzie  $\mathcal{A}(\mu_a)$  i  $\mathcal{A}(\mu_s)$  są uogólniającymi funkcjonalami kary dla współczynników absorpcji i rozpraszania, a  $\alpha_{\mu_a}$  i  $\alpha_{\mu_s}$  są parametrami regularyzacji dla absorpcji i rozpraszania. Mimo, iż jest możliwe używanie różnych uogólniających funkcjonałów kary dla absorpcji i rozpraszania, najczęstszym wyborem jest używanie tego samego funkcjonału kary dla obu tych wielkości [78].

Problem minimalizacji (2.4) jest zazwyczaj rozwiązywany przy użyciu metod gradientowych takich jak nieliniowa metoda gradientów sprzężonych [6, 12, 75] lub metod Newtonowskich [6, 76, 92, 93].

Aby zapewnić szybką zbieżność konstrukcji obrazu, początkowe wartości absorpcji i rozpraszania muszą być odpowiednio zbliżone do rzeczywistych (niejednorodnych) własności optycznych. Wartości początkowe własności optycznych są zazwyczaj brane jako stałe jeśli wstępne informacje o wewnętrznej strukturze ośrodka są niedostępne [79, 86].





## Rozdział 3

# Modele transportu światła

Propagacja światła w żywej tkance została opisana na dwa sposoby, mianowicie analitycznie oraz w kategoriach teorii transportu. Opis analityczny bazuje na równaniach Maxwell'a oraz na przybliżonych równaniach opisujących propagację fali w dowolnym ośrodku [69]. W praktyce obliczeniowej dokładny analityczny model jest niemożliwy do zastosowania. Teoria transportu jest zwykle używana do opisu transportu energii poprzez ośrodek rozpraszający. W teorii transportu bada się zachowanie każdej cząstki w odpowiednio małym elemencie przestrzeni fazowej. Pomija się natomiast aspekty falowe zachowania światła. Wewnątrz elementu przestrzeni fazowej cząstki ulegają rozpraszaniu w czasie sprężystych kolizji, a ich energia jest redukowana przez absorbcję. Teoria transportu została zastosowana w wielu dziedzinach nauki m.in. w fizyce nuklearnej, fizyce atmosfery i oceanografii, medycynie, optyce i teledetekcji [2, 29, 30, 32, 41, 69, 91]. Teoria transportu może być modelowana metodami stochastycznymi tj. Monte Carlo oraz deterministycznymi, które opisują ruch cząstek równaniami różniczkowymi cząstkowymi. W metodach stochastycznych zachowania pojedynczych cząstek są modelowane jako zdarzenia absorbcji i rozpraszania. W tomografii optycznej wykorzystuje się głównie metodę Monte Carlo oraz błądzenie przypadkowe [9]. Metoda Monte Carlo jest najczęściej używana w tomografii optycznej i wykorzystuje się ją jako metodę odniesienia do porównania rozwiązania z innymi metodami. W podejściu deterministycznym transport cząstek jest opisywany równaniami, które można rozwiązać zarówno analitycznie jak i numerycznie [9]. Podstawą teorii transportu jest równanie transportu będące liniową wersją równania Boltzmann'a. Może ono być wyprowadzone z kinetycznej teorii gazów [30] lub poprzez śledzenie zachowania cząstek w elementarnej przestrzeni [29, 32, 41]. W tomografii optycznej ogólnie przyjętym mode-

lem propagacji światła jest równanie transportu promieniowania (ang. *Radiative Transfer equation* RTE), które jest pierwszym przybliżeniem równania transportu. Analityczne rozwiązanie równania transportu jest możliwe tylko dla bardzo prostych geometrii, zaś rozwiązania numeryczne zwykle prowadzą do skomplikowanych problemów obliczeniowych. Zatem równanie transportu jest zbyt skomplikowane aby mogło być stosowane w praktyce i dlatego stosuje się modele przybliżone. W ośrodkach silnie rozpraszających światło, takich jak tkanka biologiczna, teoria transportu jest zastępowana teorią opisującą zjawisko dyfuzji. Równanie transportu promieniowania jest aproksymowane równaniem dyfuzji.

W bieżącym rozdziale opisano modelowanie propagacji światła w tkance przy pomocy teorii transportu. Równanie transportu promieniowania zostało przedstawione w rozdziale 3.1, zaś równanie dyfuzji i jego wyprowadzenie w rozdziale 3.2. Rozdział 3.3 opisuje modele hybrydowe propagacji światła czyli połączenie równań RTE, dyfuzji oraz metody Monte Carlo.

### 3.1 Równanie RTE

Ogólnie przyjętym modelem transportu światła w tkankach jest równanie RTE. Zostało ono wykorzystane w kilku aplikacjach tomografii optycznej [15, 40, 65, 77]. Równanie RTE jest pierwszym przybliżeniem równania transportu i jest otrzymywane poprzez całkowanie tegoż równania i uśrednianie parametrów [29, 41]. RTE zakłada, że energia (lub prędkość) cząstek nie zmienia się w czasie kolizji i że współczynnik załamania światła jest stały wewnątrz medium. Propagacja fotonów dla materiałów optycznie anizotropowych została przedyskutowana w [46, 73, 84].

Niech  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ,  $n = 2$  or  $3$  oznacza fizyczną domenę, w której prawdopodobieństwo rozpraszania fotonów pomiędzy dwoma kierunkami zależy tylko od względnego kąta między nimi, a nie od wartości absolutnej. Dokładne informacje dotyczące propagacji światła w ośrodku anizotropowym znajdują się w [62, 63]. Dalej niech  $\partial\Omega$  oznacza brzeg domeny, a  $\hat{\mathbf{s}} \in S^{n-1}$  oznacza wektor jednostkowy w danym kierunku, to równanie RTE może być zapisane w dziedzinie czasu jako:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})}{\partial t} + \hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + (\mu_s + \mu_a) \phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \\ = \mu_s \int_{S^{n-1}} \Theta(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') \phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\hat{\mathbf{s}}' + q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

zaś w dziedzinie częstotliwości:

$$\begin{aligned} & \frac{i\omega}{c}\phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + (\mu_s + \mu_a)\phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \\ & = \mu_s \int_{S^{n-1}} \Theta(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}')\phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}')d\hat{\mathbf{s}}' + q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie  $c$  jest prędkością światła w danym ośrodku,  $\omega$  stanowi częstotliwość wejściowego sygnału modulowanego fazowo,  $\mu_s = \mu_s(\mathbf{r})$  i  $\mu_a = \mu_a(\mathbf{r})$  są odpowiednio współczynnikami rozpraszania i absorpcji ośrodka. Współczynnik rozpraszania opisuje prawdopodobieństwo zmiany kierunku propagacji fotonu po przebyciu jednostki odległości, a współczynnik absorpcji prawdopodobieństwo pochłonięcia fotonu po przebyciu tego samego jednostkowego dystansu.  $\phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$  jest radiancją,  $\Theta(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')$  oznacza funkcję rozpraszania fazy, a  $q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$  definiuje natężenie źródła światła. Radiancja jest zdefiniowana jako strumień promieniowania na nieskończenie małą jednostkę powierzchni  $dS$ , na nieskończenie małą jednostkę kąta bryłowego  $d\hat{\mathbf{s}}$  w kierunku  $\hat{\mathbf{s}}$ :

$$\phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}; t)\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}}dSd\hat{\mathbf{s}} \quad (3.3)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{n}}$  jest normalną do powierzchni  $dS$  [32,69]. Funkcja rozpraszania fazy  $\Theta(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}')$  określa, prawdopodobieństwo zmiany kierunku propagacji fotonu o początkowym kierunku  $\hat{\mathbf{s}}'$  na kierunek  $\hat{\mathbf{s}}$ , po wystąpieniu zdarzenia rozpraszania [121]. Definiuje się ją jako rozkład prawdopodobieństwa, a w konsekwencji jako dodatnio określoną funkcję spełniającą wyrażenie:

$$\int_{S^{n-1}} \Theta(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}')d\hat{\mathbf{s}} = \int_{S^{n-1}} \Theta(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}')d\hat{\mathbf{s}}' = 1 \quad (3.4)$$

W tomografii optycznej najczęściej wykorzystywaną funkcją fazy dla materiałów izotropowych jest funkcja Henyey-Greenstein, która dla przypadku trójwymiarowego przybiera następującą formę [64]:

$$\Theta(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}')^{3/2}} \quad (3.5)$$

Współczynnik kształtu rozpraszania  $g$  definiuje kształt rozkładu gęstości prawdopodobieństwa i przyjmuje wartości z zakresu  $-1 < g < 1$ . Mimo, iż funkcja fazy Henyey-Greenstein'a jest najczęściej stosowana w optyce biomedycznej, to wykazuje rozbieżności w porównaniu z teorią Mie dostarczającą dokładnego rozwiązania rozproszenia fali elektromagnetycznej przez izotropową i jednorodną sferę [15, 16]. Więcej informacji o teorii rozpraszania i funkcjach fazy znajduje się w [69, 123].

## 3.2 Równanie dyfuzji jako przybliżenie równania RTE

W tomografii optycznej propagacja światła w tkance jest zazwyczaj modelowana poprzez przybliżenie równania RTE równaniem dyfuzji. Typowe podejście przy wyprowadzaniu równania dyfuzji z RTE polega na rozwinięciu radiancji i funkcji fazy w szereg przy pomocy harmonik sferycznych [9, 24, 29, 41]. Jeśli harmoniki sferyczne są obcięte w  $N$ -tym elemencie otrzymywana jest aproksymacja  $P_N$  [9, 24, 41]. Przybliżenie harmonikami pierwszego rzędu jest określane mianem aproksymacji  $P_1$ , zaś przybliżenie równaniem dyfuzji może być uważane za szczególny przypadek aproksymacji  $P_1$ . Alternatywą dla aproksymacji  $P_N$  jest opracowane przez Boltzmanna podejście, w którym momenty radiancji są używane do wyprowadzenia równań sprzężonych, które aproksymują równanie RTE [50, 71]. Dodatkowo przybliżenie dyfuzyjne może być wyprowadzone przy pomocy metod asymptotycznych [17] lub przy użyciu algebry projekcyjnej [41, 62, 70]. Aby uzyskać aproksymujące równanie dyfuzji należy najpierw wyprowadzić aproksymację  $P_1$ . W tym celu stosujemy:

$$\int_{S^{n-1}} \mathbf{1} \cdot d\hat{\mathbf{s}} = |S^{n-1}| \quad (3.6)$$

$$\int_{S^{n-1}} \hat{\mathbf{s}} \cdot d\hat{\mathbf{s}} = 0 \quad (3.7)$$

$$\int_{S^{n-1}} \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathcal{A} d\hat{\mathbf{s}} = 0 \quad (3.8)$$

$$\int_{S^{n-1}} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathcal{B})(\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathcal{C}) d\hat{\mathbf{s}} = \frac{|S^{n-1}|}{n} (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) \quad (3.9)$$

$$\int_{S^{n-1}} \hat{\mathbf{s}} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathcal{D}) d\hat{\mathbf{s}} = \frac{|S^{n-1}|}{n} \mathcal{D} \quad (3.10)$$

gdzie  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  i  $\mathcal{D}$  są wektorami. W aproksymacji  $P_1$  zakłada się, że kąтова dystrybucja radiancji  $\phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$  jest równomierna [69]. To założenie może być zrealizowane jedynie w silnie rozpraszającym ośrodku, stosunkowo daleko od źródła promieniowania. Zatem przybliżenie opisujące radiancję przybiera postać:

$$\phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \approx \frac{1}{|S^{n-1}|} \Phi(\mathbf{r}) + \frac{n}{|S^{n-1}|} \hat{\mathbf{s}} \cdot J(\mathbf{r}) \quad (3.11)$$

gdzie  $\Phi(\mathbf{r})$  i  $J(\mathbf{r})$  to odpowiednio gęstość fotonów i prąd fotonów opisane równaniami:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{S^{n-1}} \phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\hat{\mathbf{s}} \quad (3.12)$$

$$J(\mathbf{r}) = \int_{S^{n-1}} \hat{\mathbf{s}} \phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\hat{\mathbf{s}} \quad (3.13)$$

Równanie (3.11) może być uważane za pierwsze dwa elementy rozwinięcia w szereg Taylora funkcji  $\phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$  wokół punktu  $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'$ , a zatem drugi składnik w równaniu (3.11) powinien być

znacznie mniejszy niż pierwszy. Prawdziwe jest więc twierdzenie, że  $|J(\mathbf{r})| \ll \Phi(\mathbf{r})$  [69]. Podobne przybliżenie można zapisać dla funkcji źródła:

$$q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \approx \frac{1}{|S^{n-1}|} q_0(\mathbf{r}) + \frac{n}{|S^{n-1}|} \hat{\mathbf{s}} \cdot q_1(\mathbf{r}) \quad (3.14)$$

gdzie  $q_0(\mathbf{r})$  i  $q_1(\mathbf{r})$  są odpowiednio izotropowym i dipolowym składnikiem funkcji źródła:

$$q_0 = \int_{S^{n-1}} q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\hat{\mathbf{s}} \quad (3.15)$$

$$q_1 = \int_{S^{n-1}} \hat{\mathbf{s}} q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\hat{\mathbf{s}} \quad (3.16)$$

Funkcja fazy jest reprezentowana następującym przybliżeniem:

$$\Theta(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') \approx \frac{1}{|S^{n-1}|} g_0 + \frac{n}{|S^{n-1}|} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') g_1 \quad (3.17)$$

gdzie  $g_0$  wyraża się wzorem:

$$g_0 = \int_{S^{n-1}} \Theta(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') d\hat{\mathbf{s}} = 1 \quad (3.18)$$

a  $g_1$  jest wartością średnią kosinusa kąta rozpraszania i wynosi:

$$g_1 = \int_{S^{n-1}} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') \Theta(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') d\hat{\mathbf{s}} \quad (3.19)$$

Aby wyprowadzić przybliżenie  $P_1$  należy całkowity składnik równania (3.2) zastąpić przybliżeniem (3.17) oraz wykorzystać równania (3.12) i (3.13) w następujący sposób:

$$\begin{aligned} & \mu_s \int_{S^{n-1}} \Theta(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') \phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\hat{\mathbf{s}}' \\ &= \mu_s \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\hat{\mathbf{s}}' + \mu_s \frac{n}{|S^{n-1}|} g_1 \int_{S^{n-1}} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') \phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\hat{\mathbf{s}}' \\ &= \mu_s \frac{1}{|S^{n-1}|} \Phi(\mathbf{r}) + \mu_s \frac{n}{|S^{n-1}|} g_1 \hat{\mathbf{s}} \cdot J(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Jeśli wstawimy powyższe równanie oraz przybliżenia (3.11) i (3.14) do równania RTE (3.2) otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|S^{n-1}|} \left( \frac{i\omega}{c} + \hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla + \mu_a \right) \Phi(\mathbf{r}) + \frac{n}{|S^{n-1}|} \left( \frac{i\omega}{c} + \hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla + \mu_a + \mu'_s \right) \hat{\mathbf{s}} \cdot J(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{|S^{n-1}|} q_0(\mathbf{r}) + \frac{n}{|S^{n-1}|} \hat{\mathbf{s}} \cdot q_1(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

gdzie  $\mu'_s = \mu'_s(\mathbf{r}) = \mu_s(1 - g_1)$  jest zredukowanym współczynnikiem rozpraszania. Całkując równanie (3.21) i używając równań (3.6)-(3.10) otrzymamy:

$$\left( \frac{i\omega}{c} + \mu_a \right) \Phi(\mathbf{r}) + \nabla \cdot J(\mathbf{r}) = q_0(\mathbf{r}) \quad (3.22)$$

Podobnie, mnożąc równanie (3.21) przez  $\hat{\mathbf{s}}$  i całkując otrzymamy:

$$\left(\frac{i\omega}{c} + \mu_a + \mu'_s\right) J(\mathbf{r}) + \frac{1}{n} \nabla \Phi(\mathbf{r}) = q_1(\mathbf{r}) \quad (3.23)$$

Równania (3.22) i (3.23) są znane jako aproksymacje  $P_1$ .

Aby wyprowadzić przybliżenie dyfuzyjne równania RTE zakłada się, że źródło światła jest izotropowe, zatem:  $q_1(\mathbf{r}) = 0$  i  $\frac{i\omega}{c} J(\mathbf{r}) = 0$ . Dodatkowo zakłada się warunek  $\mu_a \ll \mu'_s$  [6], który implikuje zapis  $\frac{1}{c} \frac{\partial J(\mathbf{r})}{\partial t} = 0$ . Po zastosowaniu tych uproszczeń równanie (3.23) staje się prawem Fick'a:

$$J(\mathbf{r}) = -D \nabla \Phi(\mathbf{r}) \quad (3.24)$$

gdzie  $D = D(\mathbf{r}) = (n(\mu_a + \mu'_s))^{-1}$  jest współczynnikiem dyfuzji. Wstawiając równanie (3.24) do równania (3.22) otrzymujemy przybliżenie dyfuzyjne, które w dziedzinie częstotliwości przybiera postać:

$$-\nabla \cdot D \nabla \Phi(\mathbf{r}, \omega) + \mu_a \Phi(\mathbf{r}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \Phi(\mathbf{r}, \omega) = q_0(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.25)$$

zaś w dziedzinie czasu:

$$-\nabla \cdot D \nabla \Phi(\mathbf{r}) + \mu_a \Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial t} = q_0(\mathbf{r}) \quad (3.26)$$

Reprezentacje w dziedzinie czasu i częstotliwości są ze sobą powiązane poprzez transformacje Fourier'a.

### 3.3 Modele hybrydowe

Aby obejść ograniczenia stosowania teorii dyfuzji w pobliżu źródeł światła rozwijane są metody hybrydowe. Do najpopularniejszych należą te, które wykorzystują co najmniej dwa z następujących podejść: równanie RTE, metodę energetyczną (ang. *radiosity*) aproksymacje RTE równaniem dyfuzji oraz symulację Monte Carlo. Poniżej zostaną zasygnalizowane tylko niektóre z rozwiązań. Zestawienie oraz opis opracowanych metod można znaleźć w [99, 100].

Połączenie symulacji Monte Carlo oraz teorii dyfuzji zostało zaprezentowane w [124] i użyte do opisu odbić światła w ośrodku rozpraszającym. W hybrydzie Monte Carlo-równanie dyfuzji ta pierwsza metoda jest używana do symulacji propagacji światła w pobliżu źródła światła, zaś ta druga do poszukiwania rozwiązania w pozostałych regionach

całej domeny. Symulacja Monte Carlo opisuje propagację światła dokładnie, jednakże wymaga długiego czasu obliczeń. Alternatywą jest użycie równania Fokker-Planck'a, które również może być użyte do modelowania propagacji światła w pobliżu źródła światła [74]. Udowodniono, że równanie to dokładnie modeluje propagację światła, gdy strumień fotonów jest bardzo silny i w bardzo małym stopniu ulega rozproszeniu. Takie warunki panują w bezpośredniej odległości od silnie skolimowanego źródła laserowego. Udowodniono, że równanie to niepoprawnie modeluje rozchodzenia się światła w medium rozpraszającym, w dalszej odległości od źródła oraz wewnątrz ośrodków o niskim rozpraszaniu i w ogóle pozbawionych tej własności [5, 7].

Model hybrydowy RTE-dyfuzja jest również proponowany do opisu propagacji światła w ośrodkach silnie rozpraszających. Za pomocą RTE modeluje się propagację fotonów w pobliżu źródła światła, zaś aproksymację RTE równaniem dyfuzji wykorzystuje się w reszcie domeny. Ponadto rozwiązanie RTE jest używane do określenia warunku brzegowego Dirichleta na interfejsie wewnątrz obiektu. Ten warunek stanowi rozproszony model źródła światła dla przybliżenia dyfuzyjnego RTE w pozostałym obszarze [121].

Kolejnym modelem jest zaproponowany w [121] sprzężony model RTE-dyfuzja. W modelu tym równanie RTE i jego dyfuzyjne przybliżenie są sprzężone poprzez warunki brzegowe ustalane na granicach podobszarów. W każdym z podobszarów rozkład fotonów modelowany jest za pomocą innego równania: RTE lub jego przybliżenia równaniem dyfuzji. W porównaniu do przedstawionego powyżej modelu hybrydowego, ten sprzężony, zbiega się szybciej i jest pozbawiony tzw. rozpraszania wstecznego pomiędzy podobszarami. Dodatkowo podczas gdy model hybrydowy był opracowany z myślą o wyeliminowaniu niedokładności w pobliżu źródeł światła lub dla ośrodków z wyraźnie wydzielonymi nierozpraszającymi regionami, model sprzężony jest bardziej ogólny i może być wykorzystany wszędzie tam gdzie aproksymacja dyfuzyjna zawodzi, np. w pobliżu granicy domeny oraz wewnątrz słabo- i nierozpraszających obszarów. Za przykład może tu posłużyć transparentny płyn rdzeniowo-mózgowy otaczający płaty kory mózgowej.

Ostatnim modelem jest połączenie metody energetycznej z teorią dyfuzji [8, 47, 100]. Podobnie jak powyżej metoda ta używa przybliżenia dyfuzyjnego RTE do opisu propagacji światła w obszarach o silnym rozpraszaniu, zaś w obszarach bez rozpraszania metody energetycznej. Matematyczna analiza problemu została przedstawiona w [68]. Połączenie metody energetycznej z teorią dyfuzji zostało przebadane i dowiedziono, że znacznie

podnosi ono jakość konstruowanych obrazów w porównaniu ze zwykłym modelem wykorzystującym tylko przybliżenie równania RTE równaniem dyfuzji [37, 38, 99].



## Rozdział 4

# Metody numeryczne w dyfuzyjnej tomografii optycznej

Rozwiązania analityczne równań RTE oraz jego przybliżenia równaniem dyfuzji są ograniczone tylko do pewnych prostych geometrii [7, 32, 83]. Dla dowolnych kształtów poszukuje się rozwiązania przy pomocy metod numerycznych, a mianowicie: metody różnic skończonych, metody elementów skończonych i metody elementów brzegowych. Metoda elementów skończonych jest ogólnie uważana za bardzo uniwersalną w kontekście nakładania różnych warunków brzegowych oraz obliczeń na złożonych geometriach. Jest zatem często wybierana jako metoda rozwiązywania równań opisujących transport światła w tkankach. Mimo swych zalet metoda ta nie została wybrana na odpowiedzialną za numeryczny aspekt tej pracy, na korzyść metody elementów brzegowych. Uzasadnia się to obecnością warstwy płynu CSF, która jest przezroczysta i nie można stosować do jej modelowania przybliżenia dyfuzyjnego. Rozwiązaniem jest sprzężenie obszarów dyfuzyjnych nielokalnymi warunkami brzegowymi, których postać jest podobna do brzegowych równań całkowych [113]. Różnią się tylko jądrem, w którym występuje funkcja widoczności lub macierz widoczności w postaci dyskretnej.

MEB staje się zatem naturalną metodą wtedy gdy wymaga się uwzględnienia warstwy CSF. Naturalną, bowiem np. w MES nielocalne warunki brzegowe zakłócają pasmową postać i symetrię macierzy współczynników prowadząc do utraty jednej z najważniejszych zalet tej metody.

## 4.1 Metoda elementów skończonych

Wykorzystanie metody elementów skończonych byłoby korzystne z punktu widzenia wielu zalet tej metody. Należy tu wspomnieć choćby o łatwości modelowania obszarów niejednorodnych, anizotropowych czy o skomplikowanych kształtach. Nie bez znaczenia pozostają także dobre własności numeryczne modelu MES.

Niestety dużą wadą — z punktu widzenia tematyki poruszanej w pracy — jest konieczność generacji sieci elementów skończonych w całym obszarze symulacji, a więc sieci objętościowej. Zadanie utworzenia optymalnej trójwymiarowej sieci elementów skończonych jest wciąż zadaniem będącym przedmiotem badań naukowych [48]. Przy rozwiązywaniu zagadnienia odwrotnej tomografii optycznej główki niemowlaka problem regeneracji sieci byłby zagadnieniem o złożoności obliczeniowej porównywalnej z samą symulacją [82, 98]. Nadto łatwiej jest wygenerować dedykowaną danemu pacjentowi sieć powierzchniową dobrej jakości niż sieć objętościową wymaganą przez MES.

Metoda elementów skończonych może być z powodzeniem stosowana do rozwiązywania przybliżenia dyfuzyjnego równania RTE [121]. W pewnym obszarze  $\Omega$ ,  $\Phi(\mathbf{r})$  (gęstość fotonów jak w równaniu (3.12)) jest ciągła i spełnia równanie dyfuzji z uwzględnieniem lokalnych własności optycznych danego obszaru. MES aproksymuje  $\Phi(\mathbf{r})$  przez ważoną sumę funkcji wielomianowych. Interpolację w punkcie  $\mathbf{r}$  można przedstawić w postaci:

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \Phi^h(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N M_k \phi_k(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

gdzie  $M_k$  są funkcjami bazowymi,  $\phi_k(\mathbf{r})$  jest gęstością fotonów w węźle  $k$ , zaś  $N$  stanowi liczbę węzłów w elemencie. Wstawienie interpolacji (4.1) do formuły wariacyjnej równania dyfuzji oraz przyjęcie funkcji bazowych daje nam przybliżenie równania dyfuzji za pomocą elementów skończonych [121]. W konsekwencji otrzymujemy liniowy (pasmowy i symetryczny) układ równań, którego rozwiązanie jest przybliżeniem funkcji  $\Phi(\mathbf{r})$ .

MES jest szeroko stosowana w różnych dziedzinach nauki m.in. w elektrotechnice do obliczania rozkładu pól elektromagnetycznych, w mechanice przy obliczaniach naprężeń konstrukcji oraz w termodynamice. Opisywana metoda znalazła również zastosowanie w szeroko rozumianej tomografii gdzie jest używana do konstruowania obrazów np. w tomografii impedancyjnej [118].

## 4.2 Metoda elementów brzegowych

Jeśli rozważymy obszar  $\Omega$  z granicą  $\Gamma$ , to propagacja światła w medium rozpraszającym zwykle opisywana jest przez przybliżenie dyfuzyjne równania transportu światła [7] i stanowi równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu:

$$(\nabla \cdot D\nabla - \mu_a + \frac{i\omega}{c})\Phi(\mathbf{r}, \omega) = q_0(\mathbf{r}, \omega) \forall \mathbf{r} \in \Omega / \Gamma \quad (4.2)$$

Gdzie jak już wcześniej wspomniano  $\Phi$  jest gęstością fotonów,  $D = \frac{1}{3(\mu_a + \mu_s)}$  stanowi współczynnik dyfuzji wiążący współczynniki absorpcji  $\mu_a$  i rozpraszania  $\mu_s$ . Prędkość światła oznaczono jako  $c(\mathbf{r}) = c_0/\nu(\mathbf{r})$ , gdzie  $\nu(\mathbf{r})$  jest współczynnikiem załamania, a  $c_0$  jest prędkością światła w próżni. Przez  $q_0$  zostało oznaczone modulowane częstotliwościowo z pulsacją ( $\omega$ ) źródło światła.

Warunki brzegowe są zazwyczaj warunkami brzegowymi Robina [111]:

$$\Phi(\mathbf{r}, \omega) + 2\alpha D \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \omega)}{\partial n} = 0, \forall \mathbf{r} \in \Gamma \quad (4.3)$$

gdzie współczynnik  $\alpha$  zależy od współczynnika załamania [113].

Jeśli w analizowanym obszarze  $\Omega$  absorpcja i rozpraszanie są stałe równanie (4.2) redukuje się do równania Helmholtza o postaci:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, \omega) - k^2 \Phi(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{q_0(\mathbf{r}, \omega)}{D}, \forall \mathbf{r} \in \Omega / \Gamma \quad (4.4)$$

gdzie  $k = \sqrt{\frac{\mu_a}{D} - i\frac{\omega}{cD}}$ , zaś warunki brzegowe pozostają określone przez wyrażenie (4.3).

Dla równania dyfuzji rozwiązanie fundamentalne jest wyrażone zależnością [113]:

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \omega) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.5)$$

Pochodną normalną funkcji Greena w kierunku normalnym  $\mathbf{n}$  można zapisać jako

$$\mathbf{n} \cdot \nabla G = \mathbf{n} \cdot \rho \left( \frac{-1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{k}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) e^{-k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.6)$$

gdzie  $\rho = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ .

Funkcja (4.5) pozwala na sformułowanie równania całkowo-brzegowego, które przyjmuje postać

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \omega)}{\partial n} \Phi(\mathbf{r}') d\Gamma(\mathbf{r}') = \\ = \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \omega) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} d\Gamma(\mathbf{r}') - \int_{\Omega} q_0 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \omega) d\Omega \end{aligned} \quad (4.7)$$

Jeśli wektor położenia  $\mathbf{r}$  wskazuje na punkt położony na granicy obszaru to całka brzegowa (4.8) (dokładnie potencjał warstwy podwójnej zawierający składnik  $\frac{\partial G}{\partial n}$ ), jest osobliwa — jej funkcja pierwotna jest nieciągła. Aby obejść tę niedogodność najczęściej wprowadza się współczynnik  $c(\mathbf{r})$ . Współczynnik ten nie zależy od rodzaju zagadnienia, lecz od położenia  $\mathbf{r}$  punktu obserwacji oraz od geometrii brzegu  $\Gamma$  w tym miejscu. Jego określenie jest wynikiem sztucznego przesunięcia punktu obserwacji do wnętrza analizowanego obszaru. Jest to realizowane w drodze modyfikacji brzegu  $\Gamma$  poprzez rozwinięcie półsfery o promieniu  $\epsilon$  wokół punktu wskazywanego przez wektor  $\mathbf{r}$ . Następnie oblicza się równanie całkowo-brzegowe (4.8) traktując każdy jego człon jako granicę przy  $\epsilon \rightarrow 0$  [19]. W pracach [18, 19] udowodniono, że przy rozwiązywaniu niektórych problemów współczynnik  $c(\mathbf{r})$  nie musi być obliczany jawnie lecz może być wyznaczony na podstawie własności fizycznych zagadnienia. W niniejszej pracy współczynnik  $c(\mathbf{r}) = 1/2$  z uwagi na fakt, że punkt obserwacji zawsze leży na gładkiej powierzchni (sfera).

### 4.3 Wybór metody numerycznej

Jeśli decydujemy się na wybór metody numerycznej, to trzeba powiedzieć, że do tej pory w Dyfuzyjnej Tomografii Optycznej wyłącznie stosowana była Metoda Elementów Skończonych, tu można wskazać na prace zespołu Arridge’a [6, 9, 37, 111].

Każdy obiekt, będący przedmiotem zainteresowania tomografii optycznej ma swoją specyfikę, która zmusza do pokonania pewnych trudności jakie ta specyfika niesie ze sobą. W chwili obecnej są dwa główne zastosowania dotyczące DTO. Są to mamografia optyczna która jak się wydaje już wkrótce będzie technologią wspomagającą przy przesiewowym badaniu raka piersi, oraz monitoring krwotoków śródmózgowych w przypadku wcześniaków, który jest jedną z głównych przyczyn śmierci dzieci przedwcześnie narodzonych.

Obie wymienione aplikacje wymagają bardzo zaawansowanych metod numerycznych do przygotowania modelu zagadnienia prostego. W przypadku modelu numerycznego piersi, nie znamy warunków brzegowych na styku z klatką piersiową, co jest przyczyną generowania błędnych obrazów. Ten problem może być w pewnej mierze rozwiązany za pomocą uwzględnienia nieograniczonego obszaru. Wymaga to zastosowania elementów nieskończonych w MES [57], lub jeśli stosuje się MEB do brzegowych elementów nieskończonych [87]. To w oczywisty sposób komplikuje numeryczny model zagadnienia. Sprawa jest jeszcze

bardziej skomplikowana w odniesieniu do modelu numerycznego główki niemowlaczka, głównie z dwóch powodów, które w szczegółach zostaną przedstawione poniżej.

Mówiąc o dyfuzyjnej tomografii optycznej ciągłego monitoringu niemowląt istotne są dwa elementy. Po pierwsze model numeryczny główki musi być dedykowany danemu pacjentowi, a po drugie musi być uwzględniona warstwa płynu rdzeniowo-mózgowego, która w istotny sposób wpływa na rozchodzenie się światła we wnętrzu główki. Prace dotyczące tego problemu można odnaleźć w [99, 114, 127]. Tylko pozycje [114, 127] dotyczą MEB, (pozostałe to MES i metoda analityczna), jednak stopień złożoności zastosowanego algorytmu we wszystkich wymienionych przypadkach był tak duży, że wykluczał jego zastosowanie w zagadnieniach odwrotnych. Zatem wykluczał jego zastosowanie w DTO.

Każdy z wymienionych elementów wymaga szczegółowego omówienia. W pracy przyjęto założenie, że analiza będzie dokonana z pomocą MEB. Następujące zalety MEB przemawiają za takim właśnie wyborem:

1. znacznie łatwiej generuje się dobrej jakości sieć powierzchniową dedykowaną danemu pacjentowi niż sieć objętościową (jakiej wymaga MES),
2. MEB pozwala w łatwy sposób modelować punktowe źródła światła z jakimi mamy do czynienia w DTO (patrz [127]). Jest to o tyle istotne, że w DTO musimy modelować tablice źródeł światła umieszczoną w hełmie niemowlaka (patrz rys. 2.4). Dla MES nie byłoby to takie proste,
3. model matematyczny warstwy płynu rdzeniowo-mózgowego jest w sensie matematycznym podobny do postaci równań brzegowo-całkowych wykorzystywanych w MEB, zatem metoda ta w sposób naturalny jest predysponowana do jej modelowania [114]. Warstwę tą można formalnie włączyć do niejednorodnej, wielowarstwowej MEB [127]. Dodatkowo uwzględnienie tej warstwy zaburza strukturę macierzy stanu w MES (poszerza w sposób istotny pasmo macierzy i pozbawia macierz symetrii), podczas gdy w MEB jest ona naturalnie implementowana, co może świadczyć na korzyść MEB w tym przypadku.

Pomimo, że ostatnio poczyniono wielkie postępy w modelowaniu istoty ludzkiej [119], uwzględniając niejednorodności, a nawet anizotropie, a w szczególności głowy, wprowadzając nawet model uwzględniający pofałdowanie powierzchni mózgu, to jednak model

powierzchniowy BEM pozostaje atrakcyjny bo przecież mamy do czynienia z główką niemowlęcia. W przypadku noworodków, powierzchnia mózgu nie jest tak pofałdowana jak powierzchnia mózgu dorosłego człowieka.

Niestety mimo tych zalet, wielowarstwowy model powierzchniowy główki niemowlęcia ma swoje wady, a mianowicie blokowo pełna niesymetryczna macierz współczynników, która w przeciwieństwie do pasmowej i symetrycznej macierzy współczynników MES, sprawia ogromne kłopoty pod względem alokacji pamięci i czasu rozwiązania.

Model numeryczny MEB [127] zawierał około 20 000 węzłów co dawało 23 godziny pracy procesora (AMD 3,2GHZ) niezbędnych do rozwiązania tego problemu. Takie czasy są w tomografii absolutnie nie do zaakceptowania. Wydawać by się mogło, że mimo swoich zalet model MEB nie będzie się do tomografii nadawał, tym bardziej, że metoda przyspieszenia uzyskania rozwiązania polegająca na zastosowaniu przekształcenia falkowego nie dała zadowalających rezultatów [113]. Uzyskane tą metodą przyspieszenie niestety mieściło się w granicach około 30%, a to jest stanowczo za mało.

Dlatego jednym z celów mojej pracy było opracowanie metody przyspieszenia obliczeń do tego stopnia, aby model numeryczny MEB wraz z macierzą widoczności mógł być uznany za atrakcyjny dla DTO. Jedynie metoda dekompozycji obszarowej daje nadzieje na przyspieszenie obliczeń i rozwiązanie kłopotów z alokacją pamięci. Szczegółowo dekompozycja obszarowa oraz macierz widoczności zostaną omówione w dalszych rozdziałach pracy.

Drugim problemem modelu numerycznego MEB główki niemowlęcia jest warstwa płynu rdzeniowo-mózgowego. Pomijając pewne trudności związane z rozmiarami geometrycznymi tej warstwy (mała grubość, co wymaga specjalnego traktowania nie tylko w MES, ale może przede wszystkim w MEB), głównym problemem jest fakt, że warstwa ta jest obszarem przezroczystym, a więc bardzo słabo rozpraszającym światło. W tego rodzaju środowiskach nie można stosować aproksymacji równania RTE równaniem dyfuzji. Pozostaje wykorzystanie nielokalnych warunków brzegowych na granicach tej warstwy [17, 47, 100].

## 4.4 Dekompozycja obszarowa

Wykorzystanie modelu MEB w zagadnieniu prostym DTO implikuje kłopoty w postaci blokowo-pełnych niesymetrycznych układów równań o bardzo dużym współczynniku

uwarunkowania<sup>1</sup>. Metody dekompozycji obszarowej dostarczają algorytmów pomocnych w rozbiciu tej struktury na mniejsze, lepiej uwarunkowane numerycznie bloki (podmacierze), a co za tym idzie poprawiają wydajność obliczeń lub w skrajnym wypadku w ogóle je umożliwiają [116, 122].

Definiując zagadnienia dekompozycji [116] możemy powiedzieć, że:

1. dekompozycja w obliczaniu równoległym oznacza proces dystrybucji danych do wielu procesorów,
2. w analizie asymptotycznej oznacza fizyczną separację całej domeny na regiony, które mogą być modelowane różnymi równaniami,
3. w metodach opartych na określaniu warunków wstępnych odnosi się do procesu podziału dużego liniowego układu równań na mniejsze układy, których rozwiązanie może być wykorzystane do określenia dyskretnego rozwiązania w całej domenie.

Wszystkie trzy wymienione powyżej przypadki można wykorzystać podczas rozwiązywania jednego problemu.

Zakresem badań tej pracy było zastosowanie metod dekompozycji obszarowej w obliczeniach DTO, dlatego w kolejnych rozdziałach będzie przedstawiony ostatni ze wspomnianych rodzajów dekompozycji, a mianowicie dekompozycja obszarowa. W tej grupie metod można wyodrębnić generalny podział na dekompozycję „z nakładaniem” i „bez nakładania”. Termin „nakładanie” odnosi się do sposobu w jaki traktujemy modelowany obiekt. Jeśli posiada on pewne regiony o różnych własnościach optycznych, algorytmy dekompozycji mogą wykorzystać ten naturalny podział w procesie definiowania równań opisujących rozkład poszukiwanej wielkości. Gdy z kolei obiekt jest jednorodny można określić sztuczne granice podziału i zastosować którąś [116] z metod dekompozycji obszarowej do rozbicia względnie dużych macierzy równań stanu na mniejsze odpowiadające stworzonym regionom.

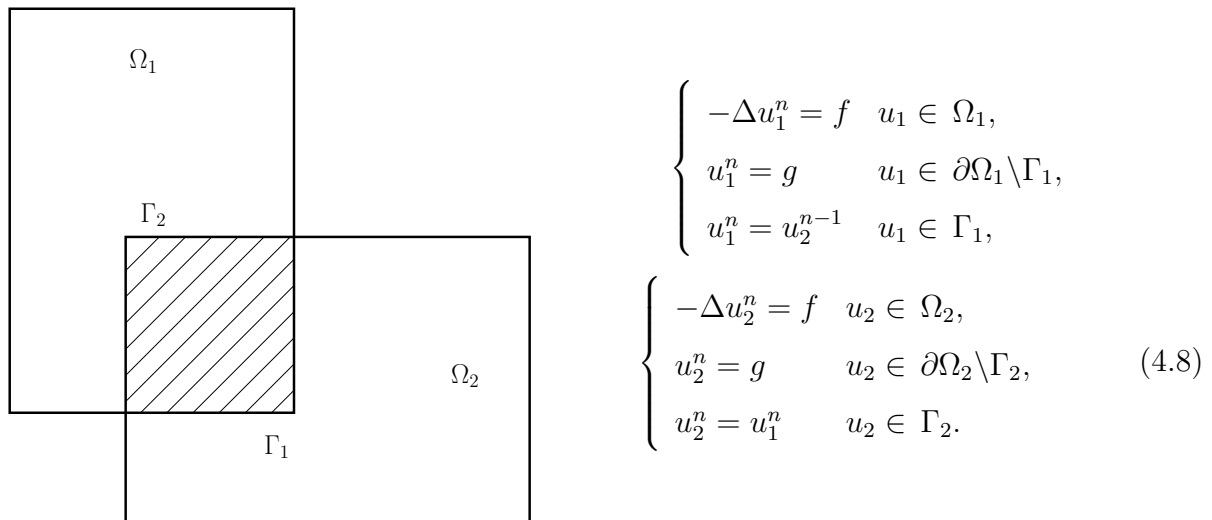
#### 4.4.1 Dekompozycja „z nakładaniem”

W dekompozycji z nakładaniem algorytm zakłada dwa częściowe kroki odpowiadające dwóm zachodzącym na siebie regionom  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  oryginalnego obszaru (patrz rys. 4.1).

---

<sup>1</sup>Współczynnik obliczany przy użyciu funkcji „cond” z pakietu narzędziowego oprogramowania Matlab

Na początku zakładamy wartość (rozwiązanie)  $u_2^0$  w obszarze  $\Omega_2$  uzyskując tym samym warunek brzegowy na  $\Gamma_1$ . Następnie rozwiązujemy równanie brzegowe (4.8) otrzymując rozwiązanie  $u_1^0$  w obszarze pierwszym  $\Omega_1$ . Teraz można rozwiązać problem brzegowy w drugim obszarze z warunkiem na brzegu  $\Gamma_2$  wziętym z rozwiązania w poprzednim regionie. Reasumując, w każdym cząstkowym kroku przedstawionej tu metody [116] rozwiązujemy zagadnienie brzegowe w obszarze  $\Omega_i$  z danymi warunkami brzegowymi  $g$  na zewnętrznym brzegu obszaru i z poprzednim aproksymowanym rozwiązaniem na brzegu wewnętrznym  $\Gamma_i (i = 1, 2)$ .



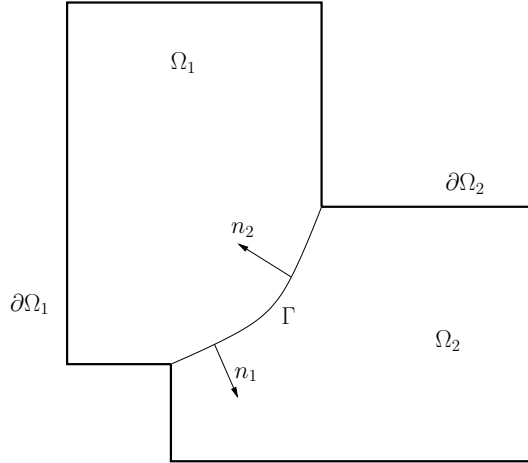
Rysunek 4.1. Przykład dekompozycji obliczeń w przypadku gdy analizowane obszary zachodzą na siebie

#### 4.4.2 Dekompozycja „bez nakładania”

Podobnie jak w dekompozycji z nakładaniem algorytm składa się z dwóch częściowych kroków odpowiadających sąsiadującym regionom  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  (rys. 4.2). Dla założonej wartości początkowej  $u_\Gamma^0$  (warunek Dirichleta) na granicy obszarów szukamy rozwiązania problemu Dirichleta w obszarze  $\Omega_1$ , a następnie mieszanego problemu Neumann-Dirichlet w obszarze drugim z warunkiem Neumanna na brzegu wewnętrznym  $\Gamma$  określonym przez rozwiązanie z poprzedniego kroku (w obszarze  $\Omega_1$ ) i z warunkami Dirichleta na reszcie brzegu obszaru  $\Omega_2$ . Nowa iteracja  $u_\Gamma^1$  jest wyliczana jako liniowa kombinacja aktualnego rozwiązania oraz poprzedniego  $u_\Gamma^0$  z użyciem odpowiednio dobranego parametru relaksacyjnego  $\Theta$ .

Procedura wyboru współczynnika  $\Theta$  zawarta w pozycji [122] udowadnia, że współczynnik ten mieści się w przedziale  $(0, 2/\lambda_{max})$ , gdzie  $\lambda_{max}$  jest największą wartością własną





$$\begin{aligned}
 (D) \quad & \begin{cases} -\Delta u_1^{n+1/2} = f & u_1 \in \Omega_1, \\ u_1^{n+1/2} = 0 & u_1 \in \partial\Omega_1 \setminus \Gamma, \\ u_1^{n+1/2} = u_\Gamma^n & u_1 \in \Gamma, \end{cases} \\
 (N) \quad & \begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} = f & u_2 \in \Omega_2, \\ u_2^{n+1} = 0 & u_2 \in \partial\Omega_2 \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial n_2} = -\frac{\partial u_1^{n+1/2}}{\partial n_1} & \frac{\partial u}{\partial n} \in \Gamma, \end{cases} \\
 & u_\Gamma^{n+1} = \Theta u_2^{n+1} + (1 - \Theta) u_\Gamma^n \quad u \in \Gamma. \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Rysunek 4.2. Podział domeny na dwa nienakładające się obszary

iloczynu  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ . Z kolei macierz  $\mathbf{M}$  odgrywa tutaj rolę wielkości wstępnie określającej rozwiązanie linowego układu równań  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$  w procesie iteracyjnym (z ang. *preconditioner*). Jeśli zdekomponujemy macierz stanu  $\mathbf{A}$  na macierz trójkątną dolną, diagonalną oraz trójkątną górną  $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$ , wówczas możliwe jest zdefiniowanie macierzy  $\mathbf{M}$  jako  $\mathbf{M} = \mathbf{D}$  lub  $\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L}$ . Mamy wtedy do czynienia odpowiednio z macierzą preconditionującą Jacobi'ego lub Gauss-Seidel'a w sensie wartości rezydualnych [14, 20]. Niestety sam proces wyznaczania wartości własnych jest dość skomplikowany i o ile macierze  $\mathbf{A}$  oraz  $\mathbf{M}$  są symetryczne i dodatnio określone, możliwe jest jego względnie szybkie przeprowadzenie [21, 122].

W przypadku macierzy słabo uwarunkowanych o strukturach rozpatrywanych w tej pracy parametr  $\Theta$  dobrano empirycznie, na podstawie badań, które potwierdziły słuszność wyboru.

#### 4.4.3 Dekompozycja problemu brzegowego na przykładzie kondensatora walcowego — rozwiązanie analityczne

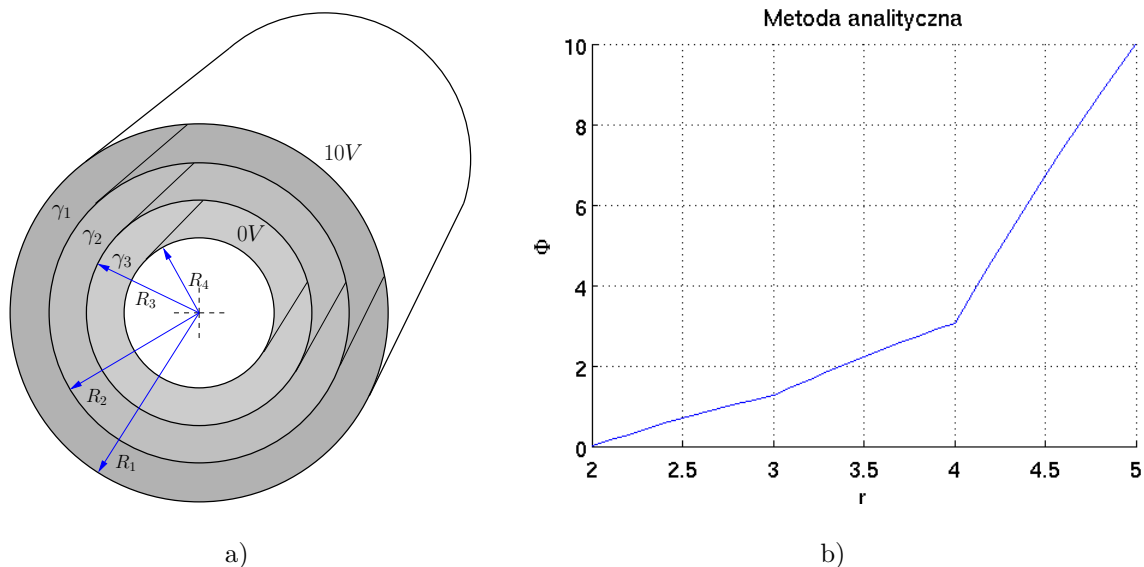
W pierwszym etapie prac nad dekompozycją obszarową autor zdecydował się na implementację jej algorytmów w zagadnieniach pola przepływowego prądu stałego w celu weryfikacji uzyskanego rozwiązania. Model, w którym obliczano rozkład pola elektrycznego był trójwarstwowym kondensatorem walcowym, zaś równanie opisujące rozkład potencjału miało postać:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (4.10)$$

którego rozwiązanie analityczne przyjmuje postać:

$$\Phi^{(i)}(\mathbf{r}) = A^{(i)} \ln(\mathbf{r}) + B^{(i)} \quad (4.11)$$

gdzie  $i = 1, 2, 3$  oznacza podobszar. Warunki brzegowe oraz współczynniki materiałowe wynoszą odpowiednio:  $\Phi = 0V|_{R_4}$ ,  $\Phi = 10V|_{R_1}$ ,  $\gamma_1 = 1S$ ,  $\gamma_2 = 5S$ ,  $\gamma_3 = 10S$ . Graficzna prezentacja rozwiązania analitycznego równania Laplace'a została przedstawiona na rys. 4.3.

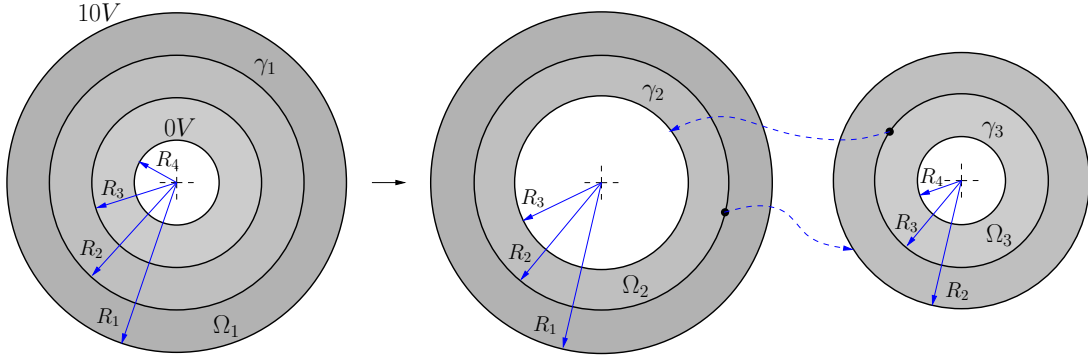


Rysunek 4.3. Model kondensatora walcowego trójwarstwowego. Przewodność elektryczna kolejnych warstw wynosi odpowiednio:  $\gamma_1 = 1S$ ,  $\gamma_2 = 5S$ ,  $\gamma_3 = 10S$  a). Rozwiązanie analityczne równania Laplace'a w trójwarstwowym modelu kondensatora z rys. 4.3a b)

#### 4.4.4 Model kondensatora — dekompozycja z nakładaniem

Generalnym podejściem w tego typu metodach jest takie przedstawienie problemu aby układy równań opisujące zdekomponowany obszar traktowały wybrane warstwy jako te wspólne, nakładające się [122]. Dla omawianego problemu Laplace'a w geometrii walcowej schemat przekazywania warunków brzegowych oraz ich aktualizacji przedstawiono na rys 4.4. W pierwszej kolejności rozwiązujemy problem brzegowy reprezentowany przez algebraiczny układ równań zakładając wstępnie potencjały na wspólnym interfejsie (przy  $R_3$  dla lewego). Po rozwiązaniu uzyskujemy wynik ( $\phi'$ ), który może posłużyć jako warunek wstępny (Dirichleta) do rozwiązania drugiego układu równań (wstawiamy za  $z_2$ ). Z

kolei po uzyskaniu rozwiązania drugiego układu dysponujemy wartością potencjału ( $\phi''$ ), którą wstawiamy za zmienną  $z_1$  w kolejnej iteracji. Cykl się zamyka.



Rysunek 4.4. Algorytm dekompozycji z nakładaniem

Równania (4.10) oraz (4.11) mogą być przedstawione w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \ln R_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln R_3 & 1 \\ \ln R_2 & 1 & -\ln R_2 & -1 \\ \gamma_1 & 0 & -\gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1^{(k+1/2)} \\ B_1^{(k+1/2)} \\ A_2^{(k+1/2)} \\ B_2^{(k+1/2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ z_1^{(k+1/2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Warunek początkowy  $z_1^{(k)}$  dla  $k = 0$  z uwagi na prostotę zagadnienia powinien spełniać kryterium minimaksowe na potencjał. Po wykonaniu pierwszego etapu algorytmu ( $k+1/2$ ) możemy zaktualizować warunki brzegowe przenoszone na kolejny obszar. Zatem  $z_2^{(k+1/2)} = A_2^{(k+1/2)} \ln R_2 + B_2^{(k+1/2)}$  (patrz 4.13).

$$\begin{bmatrix} \ln R_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln R_4 & 1 \\ \ln R_3 & 1 & -\ln R_3 & -1 \\ \gamma_2 & 0 & -\gamma_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2^{(k+1)} \\ B_2^{(k+1)} \\ A_3^{(k+1)} \\ B_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2^{(k+1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

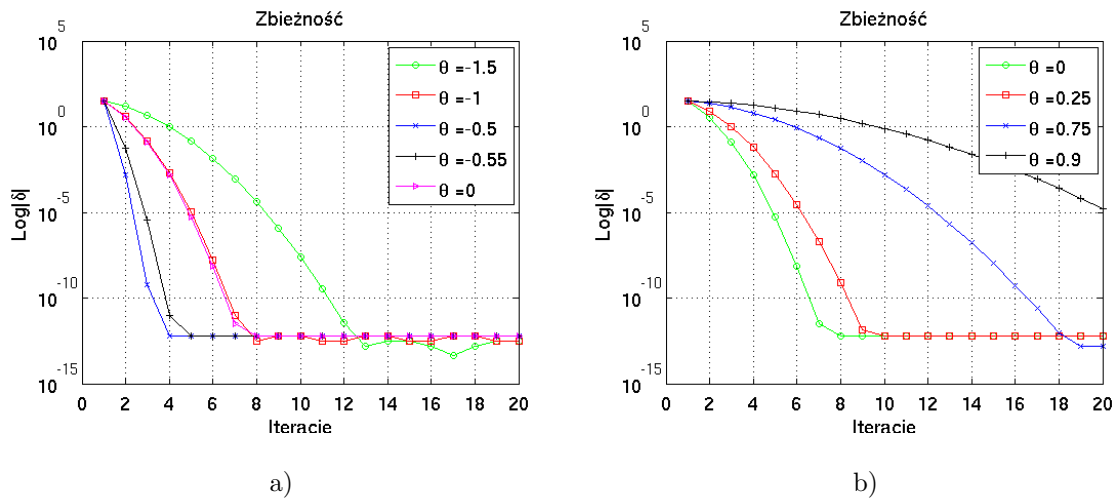
W drugim, ostatecznym etapie iteracji  $k = 0$  zmienna  $z_1$  przyjmuje postać  $z_1^{(k+1)} = A_2^{(k+1)} \ln R_3 + B_2^{(k+1)}$  (patrz 4.12).

Następnie wystarczy uaktualnić warunki brzegowe, czego można dokonać według schematu [20, 122]:

$$z_1^{(k+1)} = \Theta \cdot z_1^{(k)} + (1 - \Theta) \cdot z_2^{(k)} \quad (4.14)$$

$$z_2^{(k+1)} = \Theta \cdot z_2^{(k)} + (1 - \Theta) \cdot z_1^{(k)} \quad (4.15)$$

i przejść do kolejnej iteracji algorytmu. Warunki brzegowe w każdym kolejnym kroku metody, dla  $k = 1, \dots, n$  są liniową kombinacją rozwiązań bieżącego i poprzedniego z użyciem odpowiednio dobranego parametru relaksacyjnego  $\Theta$ . Kryteria doboru wspomnianego parametru  $\Theta$  zostały szczegółowo opisane w pozycji [21, 122]. Wyniki dla algorytmu dekompozycji z nakładaniem zostały zaprezentowane w tab. 4.1.



Rysunek 4.5. Analiza zbieżności algorytmu dekompozycji obszarowej opisanej równaniami (4.1). Najlepsze wyniki uzyskano dla parametru relaksacyjnego  $\Theta = -0.5$  a). Rozkład zbieżności dla dodatnich wartości parametru  $\Theta$  b)

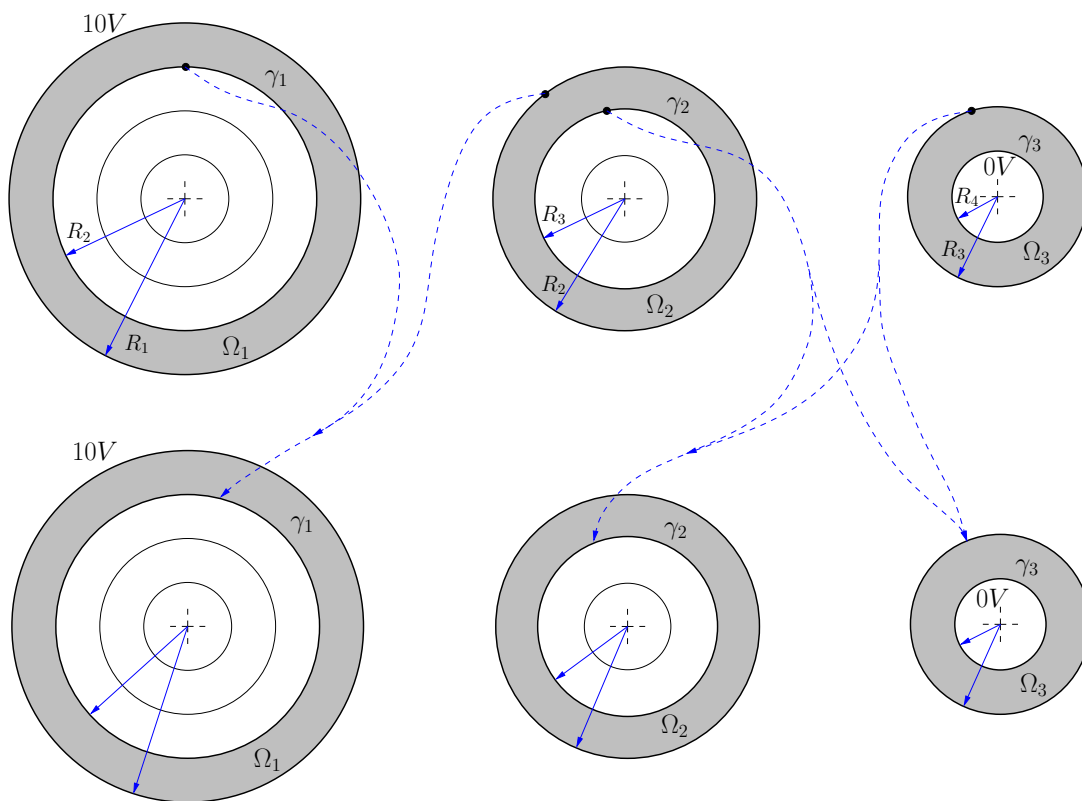
Tabela 4.1. Wyniki algorytmu dekompozycji z nakładaniem ( $\Theta = -0.5$ ). Błąd względny w stosunku do rozwiązania jednorazowego — dokładnego

Liczba iteracji	Błąd względny [%]
1	32.86
2	0.23
3	$1.62 \cdot 10^{-3}$
4	$1.14 \cdot 10^{-5}$

#### 4.4.5 Model kondensatora — dekompozycja bez nakładania

Ta metoda dekompozycji [14, 122] może być scharakteryzowana następująco. Przenoszone warunki na interfejsach subdomen są traktowane jako warunki Dirichlet’a w iteracjach

nieparzystych oraz jako warunki Neumann'a w iteracjach parzystych. I tak w iteracji 1-iej zakładamy warunki Dirichlet'a (warunek minimaksowy) i na ich podstawie wyznaczamy pochodne kierunkowe na granicach obszarów. Uśredniając te wartości dla poszczególnych interfejsów otrzymujemy dane wejściowe do kolejnej (już parzystej) iteracji, w której poszukiwane zmienne obliczamy z warunków na ciągłość składowej normalnej wektora gęstości prądu  $J$ . Następnie aktualizujemy wartości potencjału na wewnętrznych interfejsach i rozpoczynamy następną nieparzystą iterację. To koniec cyklu. W równaniach zakładamy liniowy rozkład potencjału w funkcji promienia — m.in. od tych założeń zależy zbieżność metody.



Rysunek 4.6. Algorytm dekompozycji bez nakładania

Dla tego typu dekompozycji równania (4.10) oraz (4.11) mogą być przedstawione w formie macierzowej (nieparzysta iteracja):

$$\begin{bmatrix} \ln R_1 & 1 \\ \ln R_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1^{(k+1/2)} \\ B_1^{(k+1/2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ z_2^{(k+1/2)} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\begin{bmatrix} 1/R_2 & 0 \\ \ln R_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2^{(k+1/2)} \\ B_2^{(k+1/2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2^{(k+1/2)} \\ z_3^{(k+1/2)} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\begin{bmatrix} 1/R_3 & 0 \\ \ln R_4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_3^{(k+1/2)} \\ B_3^{(k+1/2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_3^{(k+1/2)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

I przysta iteracja, która w zapisie macierzowym wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} \ln R_1 & 1 \\ \ln R_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1^{(k+1)} \\ B_1^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ z_2^{(k+1)} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} 1/R_2 & 0 \\ \ln R_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2^{(k+1)} \\ B_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_2^{(k+1)} \\ z_3^{(k+1)} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} 1/R_3 & 0 \\ \ln R_4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_3^{(k+1)} \\ B_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_3^{(k+1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Podobnie jak w dekompozycji z nakładaniem tu również warunki wstępne  $z_2$  i  $z_3$  muszą spełniać kryterium minimaksowe na potencjał. W kolejnych iteracjach dla  $k = 1, \dots, n$  zmienna  $z_2$  przyjmuje postać:

$$z_2^{(k+1)} = \Theta \cdot z_2^{(k)} + (1 - \Theta) \cdot z_2^{(k+1/2)} \quad (4.22)$$

zaś zmienna  $z_3$

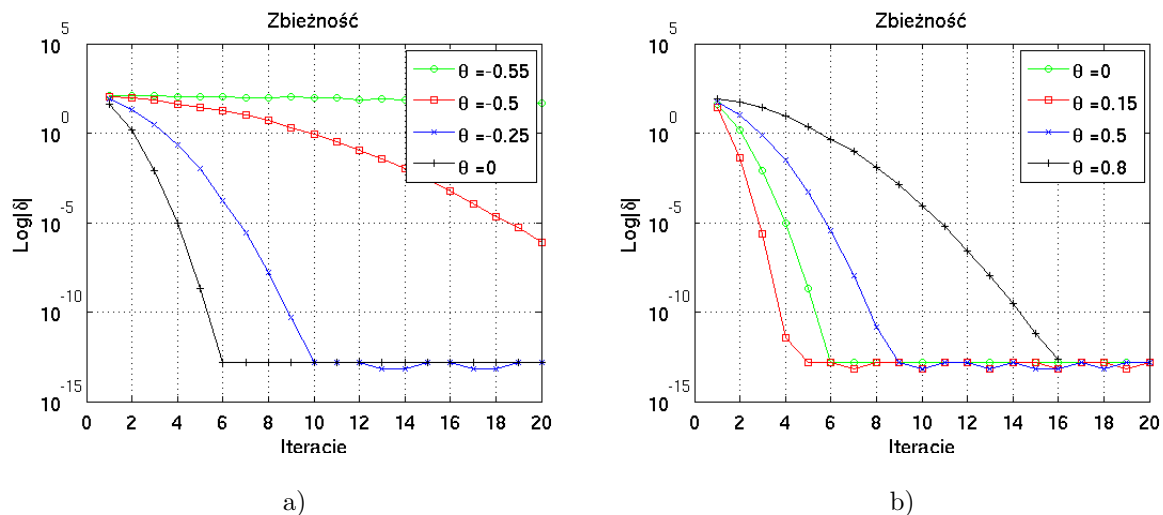
$$z_3^{(k+1)} = \Theta \cdot z_3^{(k)} + (1 - \Theta) \cdot z_3^{(k+1/2)} \quad (4.23)$$

Zmienne  $n_2$  i  $n_3$  obliczane są w sposób następujący:

$$n_2^{(k)} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot \frac{A_1^{(k)}}{R_2} \quad (4.24)$$

$$n_3^{(k)} = \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \cdot \frac{A_2^{(k)}}{R_3} \quad (4.25)$$

Kryteria doboru parametru relaksacyjnego  $\Theta$  zostały szczegółowo opisane w pozycji [14, 122]. Sposób w jaki kształtuje się rozwiązanie w zależności od wartości tego parametru przedstawiono na rysunku 4.7. Wyniki dla algorytmu dekompozycji bez nakładania zaprezentowano w tab. 4.2. Na podstawie analizy tego akademickiego problemu można



Rysunek 4.7. Analiza zbieżności algorytmu dekompozycji obszarowej opisanej równaniami (4.2). Najlepsze wyniki uzyskano dla parametru relaksacyjnego  $\Theta = 0.15$  b). Rozkład zbieżności dla ujemnych wartości parametru  $\Theta$  a)

Tabela 4.2. Wyniki algorytmu dekompozycji bez nakładania ( $\Theta = 0.15$ ). Błąd względny w stosunku do rozwiązania jednorazowego — dokładnego

Liczba iteracji	Błąd względny [%]
1	28.22
2	1.49
3	0.04
4	$1.95 \cdot 10^{-3}$
5	$4.65 \cdot 10^{-5}$

było mieć nadzieję, że dekompozycja obszarowa zastosowana w DTO będzie cechowała się podobnymi właściwościami. Doskonała zbieżność zwłaszcza dla dekompozycji bez nakładania, która po 5-u iteracjach daje błąd względny rzędu  $10^{-5}$  (patrz tab. 4.2) nie będzie możliwa do osiągnięcia w DTO. Jak się później okaże inny problem (równanie dyfuzji) oraz zgoła odmienne warunki brzegowe wraz z punktowym źródłem wewnętrznym nie „trzymają” rozwiązania w sztywnych granicach, tak jak to robiły do tej pory warunki Dirichleta. Mimo wyczerpujących testów ze współczynnikiem relaksacji  $\Theta$  nie uzyskano porównywalnych wyników.

## 4.5 Dekompozycja czterowarstwowego modelu sferycznego opisanego za pomocą przybliżenia dyfuzyjnego równania transportu

### 4.5.1 Sformułowanie problemu

Problem tomografii optycznej w mocno rozpraszającym świetle obszarze  $\Omega$  zamkniętym granicą  $\Gamma$  może być zamodelowany przy użyciu aproksymacji równaniem dyfuzji w dziedzinie częstotliwości:

$$-\nabla \cdot D(\mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r};\omega) + \mu_a(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r};\omega) + \frac{(i\omega)}{c}\Phi(\mathbf{r},\omega) = q(\mathbf{r};\omega) \quad (4.26)$$

z warunkami brzegowymi Robin'a o postaci:

$$\Phi(\mathbf{m};\omega) + 2\alpha D(\mathbf{m})\frac{\partial\Phi(\mathbf{m};\omega)}{\partial\nu} = h^-(\mathbf{m};\omega), \quad \mathbf{m} \text{ on } \Gamma \quad (4.27)$$

gdzie  $\omega \in \mathbf{R}^+$  jest częstotliwością modulacji,  $\Phi$  jest gęstością fotonów,  $c$  oznacza prędkość światła,  $q$  jest wewnętrznym źródłem światła w ośrodku,  $h^-$  to strumień fotonów wpływający do wnętrza ośrodka,  $\alpha$  jest wielkością która dodaje/uwzględnia niedopasowanie współczynnika załamania światła na granicy tkanka-powietrze,  $\nu$  jest normalną do powierzchni brzegowej  $\Gamma$  skierowaną na zewnątrz,  $D$  and  $\mu_a$  są odpowiednio współczynnikami dyfuzji i absorpcji. Definiuje się zmienną  $D = \frac{1}{3(\mu_a + \mu'_s)}$ , w którym  $\mu'_s$  jest zredukowanym współczynnikiem rozpraszania [5, 9, 113]. Dodatkowo  $\mathbf{r}$  oznacza wektor wodzący w  $\Omega$ , zaś  $\mathbf{m}$  wektor wodzący na powierzchni  $\Gamma$ .

Dla omawianego modelu zakładamy, że obszar  $\Omega$  jest podzielony na  $l$  osadzonych w sobie regionów  $\Omega_l$ , ( $1 \leq l \leq L$ ) (patrz rys. ??). Każdy region ograniczony jest gładką grnicą  $\Gamma_l$ , ( $1 \leq l \leq L$ ). Dodatkowo każdy z regionów charakteryzuje się stałymi parametrami materiałowymi: dyfuzją  $D_l$  i absorpcją  $\mu_{a,l}$  dla każdego  $\Omega_l$ , ( $1 \leq l \leq L$ ).

W przedstawionym lokalnie jednorodnym ośrodku równanie dyfuzji w dziedzinie częstotliwości jest równoważne równaniu Helmholtz'a, przy założeniu, że poszczególne regiony mają stałe własności optyczne [21]. Jeśli  $\Phi_l$  jest poszukiwaną funkcją w regionie  $l$  to można zapisać:

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi_l(\mathbf{r};\omega) - \bar{\omega}_l^2\Phi_l(\mathbf{r};\omega) &= -\frac{q_l(\mathbf{r};\omega)}{D_l(\mathbf{r})} && \in \Omega_l, \\ \Phi_{l-1}|_{\Gamma_l} &= \Phi_l|_{\Gamma_l}, && 2 \leq l \leq L, \\ D_{l-1}\partial_{l-1}\Phi_{l-1}|_{\Gamma_l} &= -D_l\partial_l\Phi_l|_{\Gamma_l}, && 2 \leq l \leq L \end{aligned} \quad (4.28)$$



gdzie  $\bar{\omega}_l$  jest liczbą zespoloną skojarzoną z równaniem Helmholtz'a w każdym z regionów  $\Omega_l$ :

$$\bar{\omega} = \left( \frac{\mu_a + i\omega/c}{D} \right)^{1/2}, \quad (4.29)$$

zaś skrócony zapis  $\partial_l := \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla$  oznacza pochodną normalną na granicy  $\Gamma_l$ .

## 4.5.2 Brzegowe równanie całkowe i numeryczna implementacja

formulation Równanie całkowo-brzegowe z funkcją Green'a dla równania Helmholtz'a w przypadku braku warunków brzegowych może być traktowane jako rozwiązanie fundamentalne. Następnie definiuje się funkcję Green'a dla równania (4.28) w każdym regionie  $\Omega_l$  jako rozwiązanie równania:

$$\nabla^2 G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) - \bar{\omega}_l^2 G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.30)$$

z granicą:

$$G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega)|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (4.31)$$

gdzie  $G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega)$  jest odpowiedzią nieskończonego ośrodka na pojedyncze źródło  $q_l = \delta$  umiejscowione w  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  i przyjmujące formę fali sferycznej [5, 11, 45, 62]:

$$G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-\omega_l|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.32)$$

Pochodna normalna rozwiązania fundamentalnego może być wówczas zapisana:

$$\partial_l G = \boldsymbol{\nu} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left( \frac{-1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{\omega_l}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) e^{-\omega_l|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.33)$$

Poprzez pomnożenie (4.30) przez  $\Phi_l(\mathbf{r}; \omega)$  i (4.28) przez  $G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega)$  oraz ich odjęcie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Phi_l(\mathbf{r}; \omega) \nabla^2 G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) - G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) \nabla^2 \Phi_l(\mathbf{r}; \omega) = \\ -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Phi_l(\mathbf{r}; \omega) + \frac{q_l(\mathbf{r}; \omega)}{D_l} G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Następnie całkujemy obie części powyższego równania po  $\mathbf{r}'$  nad regionem  $\Omega_l$ , stosujemy drugą formułę Green'a i upraszczamy poprzez filtr Dirac'a dostając:

$$\Phi_l(\mathbf{r}; \omega) = \int_{\Omega_l} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Phi_l(\mathbf{r}; \omega) d^n S(\mathbf{r}') \quad (4.35)$$

Używając poniższej notacji

$$\begin{aligned} U_l(\mathbf{m}; \omega) &:= \Phi_l|_{\Gamma_l} = \Phi_{l-1}|_{\Gamma_l} \\ V_l(\mathbf{m}; \omega) &:= D_l \partial_l \Phi_l|_{\Gamma_l} = -D_{l-1} \partial_{l-1} \Phi_{l-1}|_{\Gamma_l} \end{aligned} \quad (4.36)$$

otrzymujemy równanie całkowe dla regionów wewnętrznych:

$$\begin{aligned} \Phi_l(\mathbf{r}; \omega) + \int_{\Gamma_l} \left( \partial_l G_l(\mathbf{r}, \mathbf{m}'; \omega) U_l(\mathbf{m}'; \omega) - \frac{G_l(\mathbf{r}, \mathbf{m}'; \omega)}{D_l} V_l(\mathbf{m}'; \omega) \right) dS(\mathbf{m}') \\ - \int_{\Gamma_{l+1}} \left( \partial_l G_l(\mathbf{r}, \mathbf{m}'; \omega) U_{l+1}(\mathbf{m}'; \omega) - \frac{G_l(\mathbf{r}, \mathbf{m}'; \omega)}{D_{l+1}} V_{l+1}(\mathbf{m}'; \omega) \right) dS(\mathbf{m}') \\ = Q_l(\mathbf{r}; \omega) \quad 2 \leq l \leq L-1 \end{aligned} \quad (4.37)$$

gdzie  $\Gamma_{L+1}$ , a źródło  $O_l$  jest określone poprzez:

$$Q_l(\mathbf{r}; \omega) = \int_{\Omega_l} \frac{G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega)}{D_l} q_l(\mathbf{r}') d^n S(\mathbf{r}') \quad (4.38)$$

Dla  $\Gamma_1$  używamy następujących warunków brzegowych  $\Phi_1|_{\Gamma_1} + 2\alpha D \partial_1 \Phi_1|_{\Gamma_1} = h^-$ , aby wyeliminować  $V_1$

$$V_1(\mathbf{m}; \omega) = \frac{h^-(\mathbf{m}; \omega) - U_1(\mathbf{m}; \omega)}{2\alpha D_1} \quad (4.39)$$

W wyniku otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{r}; \omega) + \int_{\Gamma_1} \left( \partial_1 G_1(\mathbf{r}, \mathbf{m}'; \omega) + \frac{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{m}'; \omega)}{2\alpha D_1} \right) U_1(\mathbf{m}'; \omega) dS(\mathbf{m}') \\ - \int_{\Gamma_2} \left( \partial_1 G_1(\mathbf{r}, \mathbf{m}'; \omega) U_2(\mathbf{m}'; \omega) - \frac{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{m}'; \omega)}{D_2} V_2(\mathbf{m}'; \omega) \right) dS(\mathbf{m}') \\ = Q_1(\mathbf{r}; \omega) + H(\mathbf{r}; \omega) \end{aligned} \quad (4.40)$$

gdzie  $H$  definiuje się jako:

$$H(\mathbf{r}; \omega) = \int_{\Gamma_1} \frac{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{m}'; \omega)}{2\alpha D_1} h^-(\mathbf{m}') dS(\mathbf{m}') \quad (4.41)$$

Jeśli w równaniu (4.37)  $\mathbf{r}$  będzie wskazywało na granicę  $\Gamma_l$ , okaże się, że pierwsza całka jest osobliwa podczas gdy druga będzie miała ciągłe jądro. Proces ograniczający, opisany w [27] musi zostać uruchomiony, aby rozwiązać osobliwości rozwiązania fundamentalnego.

Wówczas równanie (4.37) będzie miało postać:

$$\begin{aligned} C_l^+(\mathbf{m}) U_l(\mathbf{m}; \omega) \\ + \int_{(\Gamma_l - \sigma_\epsilon^+)} \left( \partial_l G_l(\mathbf{m}, \mathbf{m}'; \omega) U_l(\mathbf{m}'; \omega) - \frac{G_l(\mathbf{m}, \mathbf{m}'; \omega)}{D_l} V_l(\mathbf{m}'; \omega) \right) dS(\mathbf{m}') \\ - \int_{\Gamma_{l+1}} \left( U_{l+1}(\mathbf{m}'; \omega) \partial_l G_l(\mathbf{m}, \mathbf{m}'; \omega) - \frac{G_l(\mathbf{m}, \mathbf{m}'; \omega)}{D_{l+1}} V_{l+1}(\mathbf{m}'; \omega) \right) dS(\mathbf{m}') \\ = Q_l(\mathbf{m}; \omega) \quad 2 \leq l \leq L-1 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Podobnie jeśli wektor położenia  $\mathbf{m}$  będzie wskazywać na wewnętrzną granicę  $\Gamma_{l+1}$ , otrzymamy równanie:

$$\begin{aligned}
& C_l^-(\mathbf{m})U_{l+1}(\mathbf{m}; \omega) \\
& - \int_{(\Gamma_{l+1}-\sigma_\epsilon^-)} \left( \partial_l G_l(\mathbf{m}, \mathbf{m}'; \omega) U_{l+1}(\mathbf{m}'; \omega) - \frac{G_l(\mathbf{m}, \mathbf{m}'; \omega)}{D_l} V_{l+1}(\mathbf{m}'; \omega) \right) dS(\mathbf{m}') \\
& + \int_{\Gamma_l} \left( U_l(\mathbf{m}'; \omega) \partial_l G_l(\mathbf{m}, \mathbf{m}'; \omega) - \frac{G_l(\mathbf{m}, \mathbf{m}'; \omega)}{D_{l+1}} V_l(\mathbf{m}'; \omega) \right) dS(\mathbf{m}') \\
& = Q_l(\mathbf{m}; \omega) \quad 2 \leq l \leq L-1 \quad (4.43)
\end{aligned}$$

Funkcja  $C_l^\pm(\mathbf{m})$  wzrasta z uwagi na osobliwości na granicy regionów, po całkowaniu rozwiązania fundamentalnego na tejże granicy.  $C_l^\pm(\mathbf{m})$  może być obliczone z równań (4.42) i (4.43) w otoczeniu punktu  $\mathbf{m}$ , które stanowi półkula  $\sigma_\epsilon$  o promieniu  $\epsilon$  przy  $\epsilon \rightarrow 0$ . Teraz obydwie całki stają się całkami ciągłymi. Zatem dla powłoki zewnętrznej otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
& C_1^+(\mathbf{m})U_1(\mathbf{m}, \omega) + \int_{(\Gamma_1-\sigma_\epsilon^+)} \left( \partial_1 G_1(\mathbf{r}, \mathbf{m}'; \omega) + \frac{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{m}'; \omega)}{2\alpha D_1} \right) U_1(\mathbf{m}'; \omega) dS(\mathbf{m}') \\
& - \int_{\Gamma_2} \left( \partial_1 G_1(\mathbf{r}, \mathbf{m}'; \omega) U_2(\mathbf{m}'; \omega) - \frac{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{m}'; \omega)}{D_2} V_2(\mathbf{m}'; \omega) \right) dS(\mathbf{m}') \\
& = Q_1(\mathbf{m}; \omega) + H(\mathbf{m}; \omega) \quad (4.44)
\end{aligned}$$

W publikacjach [18, 27] udowodniono, że operator  $C_l^\pm$  nie musi być wyliczany, a może być otrzymany pośrednio z fizycznych zależności. W przypadku punktu obserwacji położonego na gładkiej powierzchni można zapisać:

$$C_l^+(\mathbf{m}) = C_l^-(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}$$

Z równań (4.42) do (4.44) można stworzyć układ  $2n-1$  równań z  $2n-1$  niewiadomymi,

$$f = U_1, U_2, \dots, U_L, V_2, \dots, V_L \quad (4.45)$$

Po rozwiązaniu powyższego układu, którego całkowita reprezentacja jest zapisana w równaniach (4.37) do (4.40), otrzymuje się rozkład pola  $\Phi$  w punktach wewnętrznych obszaru.

### 4.5.3 Numeryczna implementacja za pomocą metody elementów brzegowych

Powierzchnie granic między regionami  $\Gamma_l$  są zdyskretyzowane na  $P_l$  elementów  $\pi_{l,k}$ ;  $k = 1, \dots, P_l$  o  $N_l$  wierzchołkach  $\mathbf{N}_{l,k'}$ ;  $k' = 1, \dots, N_l$ . Można teraz interpolować funkcje  $U_l$

oraz  $V_l$  z użyciem funkcji bazowej  $M_k$  z ograniczeniem do  $\Gamma_l$ .

$$U_l(\mathbf{m}; \omega) \simeq \sum_{k'=1}^{N_l} U_{l,k'}(\omega) M_{l,k'}(\mathbf{m}), \quad V_l(\mathbf{m}; \omega) \simeq \sum_{k'=1}^{N_l} V_{l,k'}(\omega) M_{l,k'}(\mathbf{m}) \quad (4.46)$$

Wzory (4.46) wyrażają zarówno  $U_l$  jak i  $V_l$  poprzez współczynniki urojone  $U_{l,k'}$ ,  $V_{l,k'}$  interpolowane przez węzłowe funkcje bazowe, co wymusza aby  $V_l$  była funkcją ciągłą co najmniej klasy  $C^0$ .

Całki pojawiające się w równaniach brzegowych (4.42) i (4.43) przybiorą formę:

$$u_l(\mathbf{m}; \omega) = \sum_{k'=1}^{N_l} U_{l,k'}(\omega) \int_{\Gamma_l} \partial_l G_l(\mathbf{m}, \mathbf{m}'; \omega) M_{l,k'}(\mathbf{m}') dS(\mathbf{m}') \quad (4.47)$$

$$v_l(\mathbf{m}; \omega) = \sum_{k'=1}^{N_l} V_{l,k'}(\omega) \int_{\Gamma_l} G_l(\mathbf{m}, \mathbf{m}'; \omega) M_{l,k'}(\mathbf{m}') dS(\mathbf{m}') \quad (4.48)$$

Funkcja  $v_l(\mathbf{m}; \omega)$  otrzymywana poprzez splot z funkcją Green'a jest potencjałem pojedynczej warstwy, zaś funkcja  $u_l(\mathbf{m}; \omega)$  jest potencjałem podwójnej warstwy. Jądra splotu zawierają słabe i silne osobliwości. Aby otrzymać dyskretną reprezentację obu funkcji należy scałkować potencjały pojedynczej (4.48) i podwójnej warstwy (4.47) jako iloczyny z funkcją testową  $\psi_k(\mathbf{m})$ :

$$\begin{aligned} u_{l,k}(\omega) &= \int_{\Gamma_l} \psi_k(\mathbf{m}) u_l(\mathbf{m}; \omega) dS(\mathbf{m}) \\ &= \sum_{k'=1}^{N_l} U_{l,k'}(\omega) \int_{\Gamma_l} \int_{\Gamma_l} \psi_k(\mathbf{m}) \partial_l G_l(\mathbf{m}, \mathbf{m}'; \omega) M_{l,k'}(\mathbf{m}') dS(\mathbf{m}') dS(\mathbf{m}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} v_{l,k}(\omega) &= \int_{\Gamma_l} \psi_k(\mathbf{m}) v_l(\mathbf{m}; \omega) dS(\mathbf{m}) \\ &= \sum_{k'=1}^{N_l} V_{l,k'}(\omega) \int_{\Gamma_l} \int_{\Gamma_l} \psi_k(\mathbf{m}) G_l(\mathbf{m}, \mathbf{m}'; \omega) M_{l,k'}(\mathbf{m}') dS(\mathbf{m}') dS(\mathbf{m}) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Jako, że rozwiązania równania całkowego poszukuje się w punktach węzłowych  $\mathbf{N}_{l,k}$  funkcja  $\psi_k$  przyjmuje postać:

$$\psi_k(\mathbf{m}) = \sigma(\mathbf{m} - \mathbf{N}_{l,k}) =: \sigma_{l,k}(\mathbf{m}) \quad (4.51)$$

Aby rozwiązać układ równań składający się z  $2L - 1$  niewiadomych przyjęto następującą notację. Niech  $A_{ll'}$ ,  $B_{ll'}$  będą macierzami o rozmiarze  $N_l \times N_{l'}$  odpowiadającymi

powłóce  $\Gamma_{l'}$  regionu  $\Omega_l$ . Zatem:

$$\begin{aligned} A_{ll'}(k, k') &= \int_{\Gamma_{l'}} \int_{\Gamma_{l'}} \delta_{l',k}(\mathbf{m}) \partial_l G_l(\mathbf{m}, \mathbf{m}'; \omega) M_{l',k'}(\mathbf{m}') dS(\mathbf{m}') dS(\mathbf{m}) \\ &= \int_{\Gamma_{l'}} \partial_l G_l(\mathbf{N}_{l',k}, \mathbf{m}'; \omega) M_{l',k'}(\mathbf{m}') dS(\mathbf{m}') \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} B_{ll'}(k, k') &= \int_{\Gamma_{l'}} \int_{\Gamma_{l'}} \delta_{l',k'}(\mathbf{m}) G_l(\mathbf{m}, \mathbf{m}'; \omega) M_{l',k'}(\mathbf{m}') dS(\mathbf{m}') dS(\mathbf{m}) \\ &= \int_{\Gamma_{l'}} G_l(\mathbf{N}_{l',k}, \mathbf{m}'; \omega) M_{l',k'}(\mathbf{m}') dS(\mathbf{m}') \end{aligned} \quad (4.53)$$

Równania (4.42) do (4.44) pozwalają przejść do macierzowej formy dyskretnej:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{I} + A_{11} + \frac{1}{2\alpha_1} B_{11} \right] \mathbf{U}_1 - A_{12} \mathbf{U}_2 + B_{12} \mathbf{V}_2 &= \mathbf{Q}_1 + \mathbf{H} \\ &\vdots \\ \left[ \frac{1}{2} \mathbf{I} + A_{ll} \right] \mathbf{U}_l - B_{ll} \mathbf{V}_l - A_{l+1} \mathbf{U}_{l+1} + B_{l+1} \mathbf{V}_{l+1} &= 0 \\ A_{ll} \mathbf{U}_l - B_{ll} \mathbf{V}_l + \left[ \frac{1}{2} \mathbf{I} - A_{l+1} \right] \mathbf{U}_{l+1} + B_{l+1} \mathbf{V}_{l+1} &= 0 \\ &\vdots \\ \left[ \frac{1}{2} \mathbf{I} + A_{LL} \right] \mathbf{U}_L - B_{LL} \mathbf{V}_L &= 0 \end{aligned}$$

Można je wyrazić w formie liniowego układu równań

$$\mathbf{K} \mathbf{f} = \mathbf{b}, \quad (4.54)$$

gdzie  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{f}$  i  $\mathbf{b}$  wynoszą odpowiednio:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} C_{11} + \frac{1}{2\alpha_1} B_{11} & -A_{12} & B_{12} & 0 & \dots & & 0 \\ & \dots & \dots & & & & \\ 0 & C_{ll} & -B_{ll} & -A_{l+1} & B_{l+1} & & \\ \vdots & A_{ll} & -B_{ll} & D_{l+1} & B_{l+1} & & \\ 0 & 0 & 0 & C_{l+1} & -B_{l+1} & -A_{l+2} & B_{l+2} \\ 0 & 0 & \dots & A_{l+1} & -B_{l+1} & D_{l+2} & B_{l+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & & & C_{LL} & -B_{LL} \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_l \\ \mathbf{V}_l \\ \mathbf{U}_{l+1} \\ \mathbf{V}_{l+1} \\ \vdots \\ \mathbf{U}_L \\ \mathbf{V}_L \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 + \mathbf{H} \\ \mathbf{Q}_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

zaś:

$$C_u = \frac{1}{2}\mathbf{I} + A_u, \quad D_u = \frac{1}{2}\mathbf{I} - A_u \quad (4.57)$$

przy założeniu, że źródło światła jest umieszczone tylko w jednym punkcie w regionie  $\Omega_1$ .

$\mathbf{f}$  jest dyskretną wersją  $\{f\}$  i zawiera współczynniki zmiennych z aproksymacji w (4.46) dla funkcji (4.45).  $\mathbf{K}$  jest macierzą systemową, zaś  $\mathbf{b}$  wektorem znanych współczynników wyliczonych na podstawie danych o źródłach światła w rozpatrywanym problemie. Macierz  $\mathbf{K}$  jest macierzą blokowo-pełną niesymetryczną. Do rozwiązania układu równań (4.54) użyto uogólnionej metody residuów minimalnych (ang. *GMRES*) [104].

#### 4.5.4 Czterowarstwowy model sferyczny

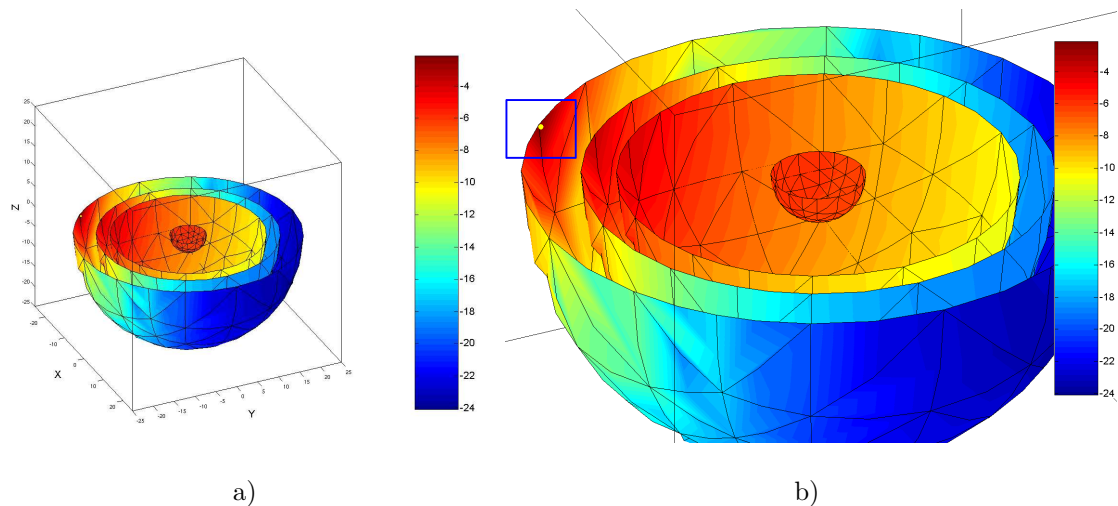
Symulacje numeryczne zostały przeprowadzone na czterowarstwowym modelu sferycznym. Przy użyciu uogólnionej metody residuów ważonych rozwiązano układ równań (4.54) opisujący rozkład funkcji stanu w danym modelu.

Rozwiązanie układu równań o 43022 niewiadomych zajmuje 89h i 16min komputerowi wyposażonemu w dwa 64-bitowe czterordzeniowe procesory taktowane zegarem 3GHz. Mimo 16 GB pamięci RAM obliczenia zrzucały się do pamięci masowej co drastycznie wydłużało cały proces. Dla porównania na tej samej maszynie wykonano również obliczenia układu rzędu 10766. Czas rozwiązania takiego układu wyniósł 6min. Jednakże jest to model zbyt ubogi nie mający zastosowania w praktyce.

Aby ograniczyć czas rozwiązania modelu opisanego 43022 równań zwrócono się w kierunku metod dekompozycji obszarowej, które we współpracy z MEB mogły dać korzystne wyni-

ki. Dzięki temu, iż MEB określa w każdym węzle siatki powierzchniowej nie tylko wartość funkcji stanu, ale również i jej pochodną, metody dekompozycji dostają swe wejściowe dane w możliwie optymalny sposób. Optymalny w stosunku do MES, która wymaga sieci objętościowej, a oczekiwane wartości prędkości zmian funkcji w węzłach musiałyby być dodatkowo wyliczane. Ponadto zadanie stworzenia dobrej jakości sieci objętościowej jest zadaniem czasochłonnym i znacznie trudniejszym od generacji sieci powierzchniowej. Jako, że główki niemowląt mocno różnią się między sobą (kształt i rozmiar uzależniony od stopnia wykształcenia organu w danym miesiącu życia), problem tworzenia sieci nie daje się uogólnić i pojawia się przy każdym pacjencie.

W celu uproszczenia obliczeń i ich ewaluacji w symulacjach wykorzystano model sferyczny składający się z czterech warstw różniących się parametrami optycznymi. Na rys. 4.8a przedstawiony został przekrój poprzeczny opisywanego modelu, złożony z 768 elementów zerowego rzędu. Rysunki 4.8 przedstawiają logarytm amplitudy gęstości fotonów



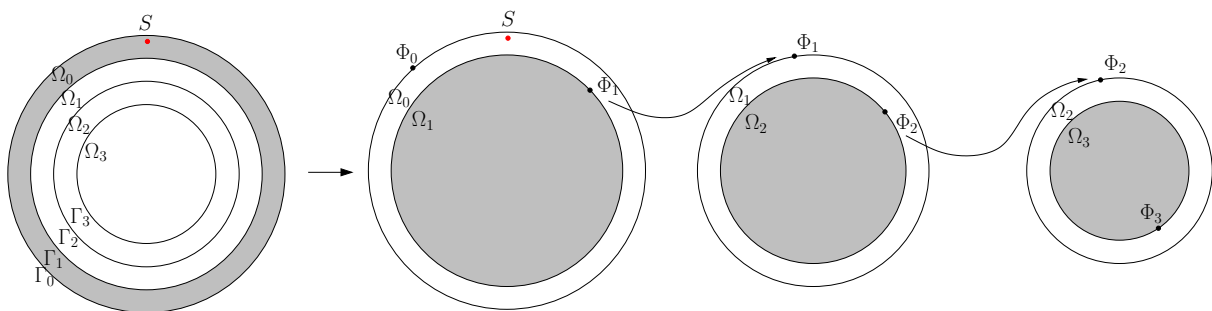
Rysunek 4.8. Analiza zbieżności algortmu dekompozycji obszarowej opisanej równaniami (4.1). Najlepsze wyniki uzyskano dla parametru relaksacyjnego  $\Theta = -0.5$  a). Rozkład zbieżności dla dodatnich wartości parametru  $\Theta$  b)

na granicach warstw. Powyższe rozwiązanie zostało wygenerowane przy jednakowym rozkładzie paramterów optycznych w każdym z regionów, a mianowice:  $\mu_a = 0.01mm^{-1}$ ,  $\mu_s = 1.0mm^{-1}$ ,  $n_u = 1.333$  oraz współczynnik rozpraszania  $D = \frac{1}{3 \cdot (\mu_a + \mu_s)}$ . Izotropowe punktowe źródło światła umieszczono w odległości  $1/\mu_s$  od brzegu regionu (patrz rys. 4.8b).

Wielowarstwowy model sferyczny może być rozpatrywany jako grupa oddzielnych za-

gadnień brzegowych mających wspólny brzeg — interfejs (rys. 4.8). Dzięki wykorzystaniu metod dekompozycji obszarowej regiony mogą być rozpatrywane niezależnie, co umożliwia skrócenie zwykle długiego czasu obliczeń. Metody dekompozycji reprezentują dwa rodzaje podejść do obliczeń w zależności od tego czy domeny traktujemy jako nakładające się, czy też jako sąsiadujące [20, 116, 122]. W pracy wykorzystano jedną z metod dekompozycji bez nakładania określaną jako metodę Dirichlet-Neumann oraz dekompozycje z nakładaniem w postaci komplementarnej metody Schwarz’a [116].

Implementacja tych metod odbywa się na etapie definiowania równań modelu MEB zagadnienia. MEB jest w swej podstawowej wersji zaprojektowana do rozwiązywania problemów brzegowych w ośrodkach jednorodnych [108]. W przypadku omawianego tu zagadnienia należy znaleźć rozwiązanie w ośrodku czterowarstwowym, który jest przestrzennie jednorodny czyli posiada obszary, dla których własności optyczne są stałe lecz różnią się między regionami. Metody dekompozycji szczególnie dobrze nadają się do wykorzystania w tego typu ośrodkach z uwagi na możliwość ich fizycznej dekompozycji. Jednorazowo analizowane są zwykle dwa przylegające do siebie obszary mające jednorodne własności optyczne (chwilowo pomijamy istnienie kolejnych). Jest to podejście zbliżone (pod względem własności materiałowych) do stanu faktycznego. Zatem uzyskane przybliżenie rozwiązania może być bliskie dokładnemu.



Rysunek 4.9. Schemat przekazywania warunków brzegowych pomiędzy regionami w dekompozycji z nakładaniem

Jako pierwsza została przebadana jedna z metod dekompozycji z nakładaniem, metoda Schwarz’a, w której zakłada się, że regiony zachodzą na siebie. Równania odzwierciedlające taką geometrię (rys. 4.9) dzielą badany model MEB złożony 43022 równań na trzy mniejsze o rzędzie 18438. Strukturę układu przedstawiają wzory od (4.60) do (4.71). Tak więc czterowarstwowy model zostaje zdekomponowany na trzy mniejsze dwuwarstwowe



obiekty. Jedna iteracja metody Schwarza składa się zatem z trzech etapów, między którymi przekazywane są warunki brzegowe do kolejnych etapów, a po osiągnięciu ostatniego (tu 3-go etapu), do kolejnej iteracji.

Zachodzenie regionów pozytywnie wpływa na zbieżność metody, zwłaszcza, że mamy do czynienia ze źle uwarunkowanym problemem.

Gęstość  $\Phi^{(i)}$  i prąd fotonów  $D^{(i)} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial n}$  na granicy regionów musi spełniać następujące warunki:

$$\Phi_{\Gamma_i}^{(i-1)} = \Phi_{\Gamma_i}^{(i)} \quad (4.58)$$

$$D^{(i-1)} \frac{\partial \Phi^{(i-1)}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} = -D^{(i)} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} \quad (4.59)$$

gdzie  $i$  oznacza  $i$ -ty region.

Równania opisujące rozwiązanie problemu dyfuzji w czterowarstwowym modelu sferycznym mogą być przedstawione w postaci macierzowej. Dla warstwy zewnętrznej z izotropowym, punktowym źródłem światła możemy zapisać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(0)} & \mathbf{A}_{01}^{(0)} & 0 \\ \mathbf{A}_{10}^{(0)} & \mathbf{A}_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{00}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_0^{(0)} \\ \Phi_1^{(0)} \\ \Phi_1^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{00}^{(0)} & \mathbf{B}_{01}^{(0)} & 0 \\ \mathbf{B}_{10}^{(0)} & \mathbf{B}_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{00}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial n} \\ \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial n} \\ \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Włączając w równania (4.60) warunki brzegowe Robina postaci  $\frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial n} = m\Phi_0^{(0)} + n$  gdzie  $n = 0$ , możemy wstępnie zredukować liczbę niewiadomych:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(0)} & \mathbf{A}_{01}^{(0)} & 0 \\ \mathbf{A}_{10}^{(0)} & \mathbf{A}_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{00}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_0^{(0)} \\ \Phi_1^{(0)} \\ \Phi_1^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{00}^{(0)} & \mathbf{B}_{01}^{(0)} & 0 \\ \mathbf{B}_{10}^{(0)} & \mathbf{B}_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{00}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m\Phi_0^{(0)} \\ \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial n} \\ \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Wprowadzając warunek (4.58) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(0)} - m\mathbf{B}_{00}^{(0)} & \mathbf{A}_{01}^{(0)} & 0 \\ \mathbf{A}_{10}^{(0)} - m\mathbf{B}_{10}^{(0)} & \mathbf{A}_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{00}^{(1)} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_0^{(0)} \\ \Phi_1^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}_{01}^{(0)} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{00}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial n} \\ \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Następnie uwzględniamy warunek (4.59) w wyniku czego możemy zapisać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(0)} - m\mathbf{B}_{00}^{(0)} & \mathbf{A}_{01}^{(0)} & 0 \\ \mathbf{A}_{10}^{(0)} - m\mathbf{B}_{10}^{(0)} & \mathbf{A}_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{00}^{(1)} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_0^{(0)} \\ \Phi_1^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{D^{(1)}}{D^{(0)}}\mathbf{B}_{01}^{(0)} \\ 0 & 0 & -\frac{D^{(1)}}{D^{(0)}}\mathbf{B}_{11}^{(0)} \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{00}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Ostatecznie dla zewnętrznych, zerowego i pierwszego regionu otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(0)} - m\mathbf{B}_{00}^{(0)} & \mathbf{A}_{01}^{(0)} & \frac{D^{(1)}}{D^{(0)}}\mathbf{B}_{01}^{(0)} \\ \mathbf{A}_{10}^{(0)} - m\mathbf{B}_{10}^{(0)} & \mathbf{A}_{11}^{(0)} & \frac{D^{(1)}}{D^{(0)}}\mathbf{B}_{11}^{(0)} \\ 0 & \mathbf{A}_{00}^{(1)} & -\mathbf{B}_{00}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_0^{(0)} \\ \Phi_1^{(0)} \\ \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Podobnych przekształceń dokonujemy dla warstw pierwszej i drugiej. Zatem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(1)} & \mathbf{A}_{01}^{(1)} & 0 \\ \mathbf{A}_{10}^{(1)} & \mathbf{A}_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{00}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1^{(1)} \\ \Phi_2^{(1)} \\ \Phi_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{00}^{(1)} & \mathbf{B}_{01}^{(1)} & 0 \\ \mathbf{B}_{10}^{(1)} & \mathbf{B}_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{00}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial n} \\ \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial n} \\ \frac{\partial \Phi_2^{(2)}}{\partial n} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Następnie mając na uwadze warunki brzegowe postaci:

$$\Phi_2^{(1)} = \Phi_2^{(2)} \quad (4.66)$$

$$D^{(1)} \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial n} = -D^{(2)} \frac{\partial \Phi_2^{(2)}}{\partial n} \quad (4.67)$$

dalej przekształcamy równania (4.65) tak aby po prawej stronie znajdowały się znane wartości z poprzedniej iteracji.

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{00}^{(1)} & \mathbf{A}_{01}^{(1)} & 0 \\ -\mathbf{B}_{10}^{(1)} & \mathbf{A}_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{00}^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial n} \\ \Phi_2^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{00}^{(1)} & \mathbf{B}_{01}^{(1)} & 0 \\ -\mathbf{A}_{10}^{(1)} & \mathbf{B}_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{00}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1^{(1)} \\ \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial n} \\ \frac{\partial \Phi_2^{(2)}}{\partial n} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{00}^{(1)} & \mathbf{A}_{01}^{(1)} & 0 \\ -\mathbf{B}_{10}^{(1)} & \mathbf{A}_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{00}^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial n} \\ \Phi_2^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{00}^{(1)} & 0 & -\frac{D^{(2)}}{D^{(1)}}\mathbf{B}_{01}^{(1)} \\ -\mathbf{A}_{10}^{(1)} & 0 & -\frac{D^{(2)}}{D^{(1)}}\mathbf{B}_{11}^{(1)} \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{00}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1^{(1)} \\ 0 \\ \frac{\partial \Phi_2^{(2)}}{\partial n} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

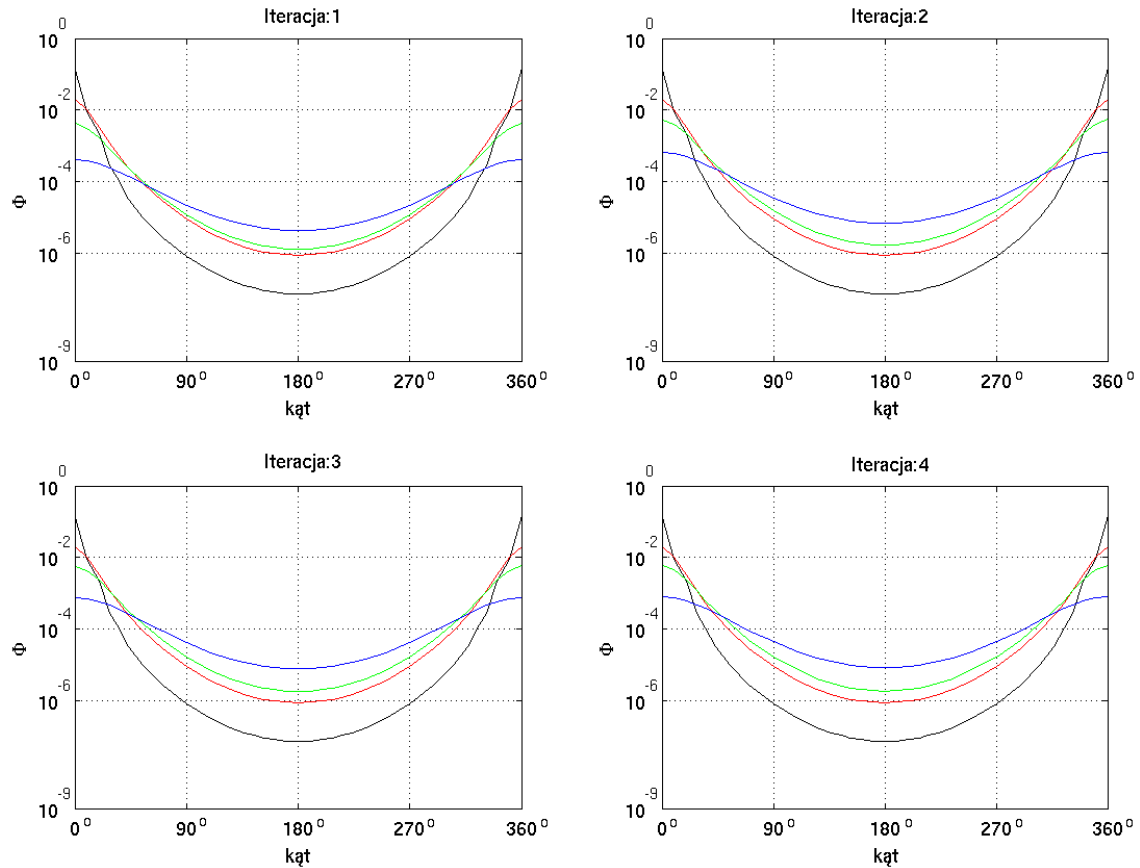
Ostatecznie dla regionów pierwszego i drugiego otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{00}^{(1)} & \mathbf{A}_{01}^{(1)} & \frac{D^{(2)}}{D^{(1)}}\mathbf{B}_{01}^{(1)} \\ -\mathbf{B}_{10}^{(1)} & \mathbf{A}_{11}^{(1)} & \frac{D^{(2)}}{D^{(1)}}\mathbf{B}_{11}^{(1)} \\ 0 & \mathbf{A}_{00}^{(2)} & -\mathbf{B}_{00}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial n} \\ \Phi_2^{(1)} \\ \frac{\partial \Phi_2^{(2)}}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{00}^{(1)} & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_{10}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Pomijając wyprowadzenia, warstwy drugą oraz trzecią opisują następujące równania:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{00}^{(2)} & \mathbf{A}_{01}^{(2)} & \frac{D^{(3)}}{D^{(2)}}\mathbf{B}_{01}^{(2)} \\ -\mathbf{B}_{10}^{(2)} & \mathbf{A}_{11}^{(2)} & \frac{D^{(3)}}{D^{(2)}}\mathbf{B}_{11}^{(2)} \\ 0 & \mathbf{A}_{00}^{(3)} & -\mathbf{B}_{00}^{(3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_2^{(2)}}{\partial n} \\ \Phi_3^{(2)} \\ \frac{\partial \Phi_3^{(3)}}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{00}^{(2)} & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_{10}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Numeryczne eksperymenty dowiodły, że dla elementów drugiego rzędu modelu MEB zagadnienia, nie udało się uzyskać zadowalających wyników w zakresie czasu pracy algorytmu. Rozwiązanie (patrz rys. 4.10) zostało uzyskane już po czterech iteracjach, lecz zostało osiągnięte po takim samym czasie co rozwiązanie jednorazowe, bez dekompozycji (główna macierz zawierała 4614 równań). Błąd względny tej metody wyniósł 2.42%, co zostało

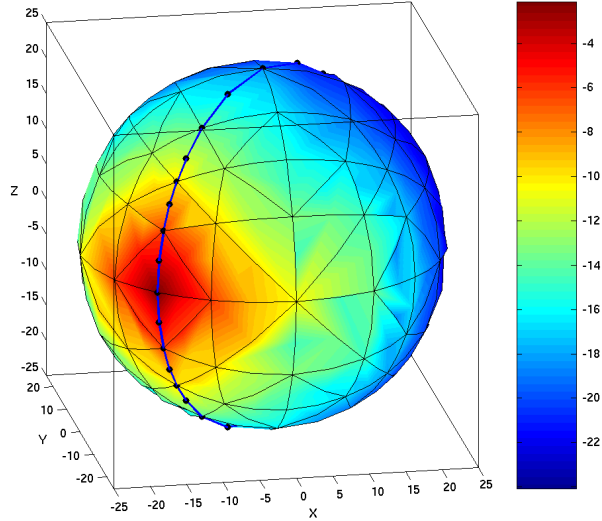


Rysunek 4.10. Kolejne iteracje algorytmu dekompozycji z nakładaniem do obliczeń w czterowarstwowym modelu sferycznym. Poszczególne rysunki przedstawiają logarytm amplitudy gęstości fotonów w funkcji kąta detekcji wewnątrz analizowanego modelu — na granicach między regionami

uzyskane przy parametrze relaksacyjnym  $\Theta = 0.3$ . Krzywe z rys. 4.10 przedstawiają rozkład poszukiwanej wielkości na granicach  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  i  $\Gamma_3$ , który jest reprezentowany przez krzywe: odpowiednio czarną, czerwoną, zieloną i niebieską.

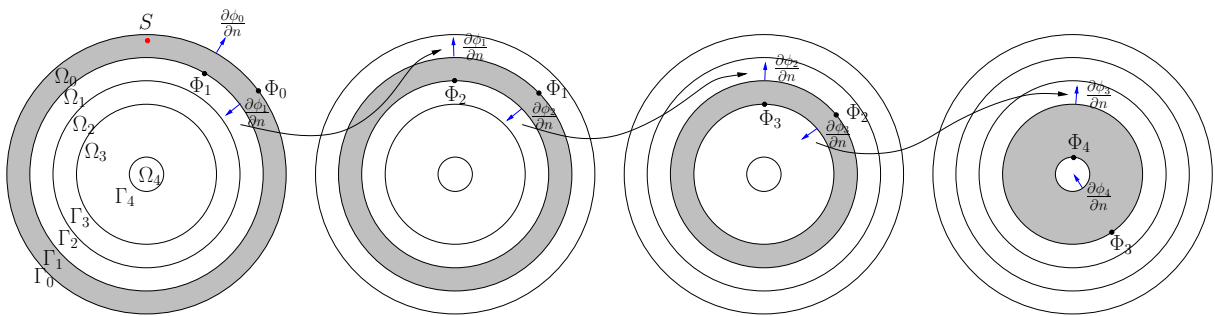
Wszystkie wyniki z rys. 4.10 jak i pozostałych w tym rozdziale wykreślono w oparciu o wyniki symulacji zdjęte z węzłów znajdujących się na obwodzie modelu tak jak to przedstawiono na rys. 4.11.

Jeśli poszczególne regiony modelu będą traktowane jako sąsiadujące, do podziału pro-



Rysunek 4.11. Punkty na obwodzie modelu wybrane do prezentacji wyników

blemu należy wykorzystać jeden z algorytmów dekompozycji obszarowej bez nakładania [20, 21, 122]. W pracy została przebadana metoda Dirichlet-Neumann, w której przekazuje się wartość rozwiązania oraz jego pochodną normalną z granicy regionu bieżącego do następnego, przylegającego jako warunek Dirichleta i Neumann'a. Ujęcie praktyczne tej metody w zastosowaniu do rozpatrywanego problemu zostało przedstawione na rys. 4.12. Dla największego realizowanego zadania o liczbie równań wynoszącej 43022, algorytm dekompozycji bez nakładania podzielił macierz opisującą rozkład funkcji stanu na cztery mniejsze o liczbie równań wynoszącej 12236. Należy wspomnieć, że przedmiotem tych obliczeń są macierze bardzo słabo uwarunkowane numerycznie, blokowo-pełne niesymetryczne [113].



Rysunek 4.12. Schemat przekazywania warunków brzegowych w algorytmie D-N dekompozycji bez nakładania. Okręgi stanowią przybliżony przekrój modelu sferycznego

Algorytm dekompozycji bez nakładania wymaga wykonania o jeden większej (dla rozwiązywanego tu problemu dyfuzji w czterowarstwowym modelu sferycznym) liczby kro-

ków w stosunku do opisywanego powyżej algorytmu z nakładaniem. Jednakże powstałe w wyniku podziału problemu macierze definiujące rozkład funkcji stanu są mniejsze; nie oblicza się bowiem obszaru wspólnego. Dla warstwy zerowej z jedynym punktowym źródłem światła można zapisać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(0)} & \mathbf{A}_{01}^{(0)} \\ \mathbf{A}_{10}^{(0)} & \mathbf{A}_{11}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_0^{(0)} \\ \Phi_1^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{00}^{(0)} & \mathbf{B}_{01}^{(0)} \\ \mathbf{B}_{10}^{(0)} & \mathbf{B}_{11}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial n} \\ \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Wprowadzając warunki brzegowe w postaci  $\frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial n} = m\Phi_0^{(0)} + n$  gdzie  $n = 0$  oraz  $\Phi_1 = 0$  dostajemy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(0)} & \mathbf{A}_{01}^{(0)} \\ \mathbf{A}_{10}^{(0)} & \mathbf{A}_{11}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_0^{(0)} \\ \Phi_1^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{00}^{(0)} & \mathbf{B}_{01}^{(0)} \\ \mathbf{B}_{10}^{(0)} & \mathbf{B}_{11}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m\Phi_0^{(0)} \\ \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(0)} & \mathbf{A}_{01}^{(0)} \\ \mathbf{A}_{10}^{(0)} & \mathbf{A}_{11}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_0^{(0)} \\ \Phi_1^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\mathbf{B}_{00}^{(0)} & \mathbf{B}_{01}^{(0)} \\ m\mathbf{B}_{10}^{(0)} & \mathbf{B}_{11}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_0^{(0)} \\ \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(0)} - m\mathbf{B}_{00}^{(0)} & \mathbf{A}_{01}^{(0)} \\ \mathbf{A}_{10}^{(0)} - m\mathbf{B}_{10}^{(0)} & \mathbf{A}_{11}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_0^{(0)} \\ \Phi_1^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}_{01}^{(0)} \\ 0 & \mathbf{B}_{11}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(0)} - m\mathbf{B}_{00}^{(0)} & -\mathbf{B}_{01}^{(0)} \\ \mathbf{A}_{10}^{(0)} - m\mathbf{B}_{10}^{(0)} & -\mathbf{B}_{11}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_0^{(0)} \\ \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{A}_{01}^{(0)} \\ 0 & -\mathbf{A}_{11}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1^{(0)} \\ \Phi_1^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Po rozwiązaniu zagadnienia w regionie zerowym otrzymujemy rozkład gęstości fotonów na powierzchni  $\Gamma_0$  oznaczony na rys. 4.2 jako  $\Phi_0$  oraz pochodną normalną tej wielkości  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}$  na powierzchni  $\Gamma_0$ . Pochodna normalna  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}$  przekazywana jest jako warunek wstępny do obliczeń w regionie  $\Omega_1$  i wraz z założoną wartością  $\Phi_2$  stanowi ogół warunków do tego etapu obliczeń. Wypisując równania dla regionu  $\Omega_1$  otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(1)} & \mathbf{A}_{01}^{(1)} \\ \mathbf{A}_{10}^{(1)} & \mathbf{A}_{11}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1^{(1)} \\ \Phi_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{00}^{(1)} & \mathbf{B}_{01}^{(1)} \\ \mathbf{B}_{10}^{(1)} & \mathbf{B}_{11}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial n} \\ \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial n} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Po uporządkowaniu równań otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(1)} & -\mathbf{B}_{01}^{(1)} \\ \mathbf{A}_{10}^{(1)} & -\mathbf{B}_{11}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1^{(1)} \\ \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{00}^{(1)} & -\mathbf{A}_{01}^{(1)} \\ \mathbf{B}_{10}^{(1)} & -\mathbf{A}_{11}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial n} \\ \Phi_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

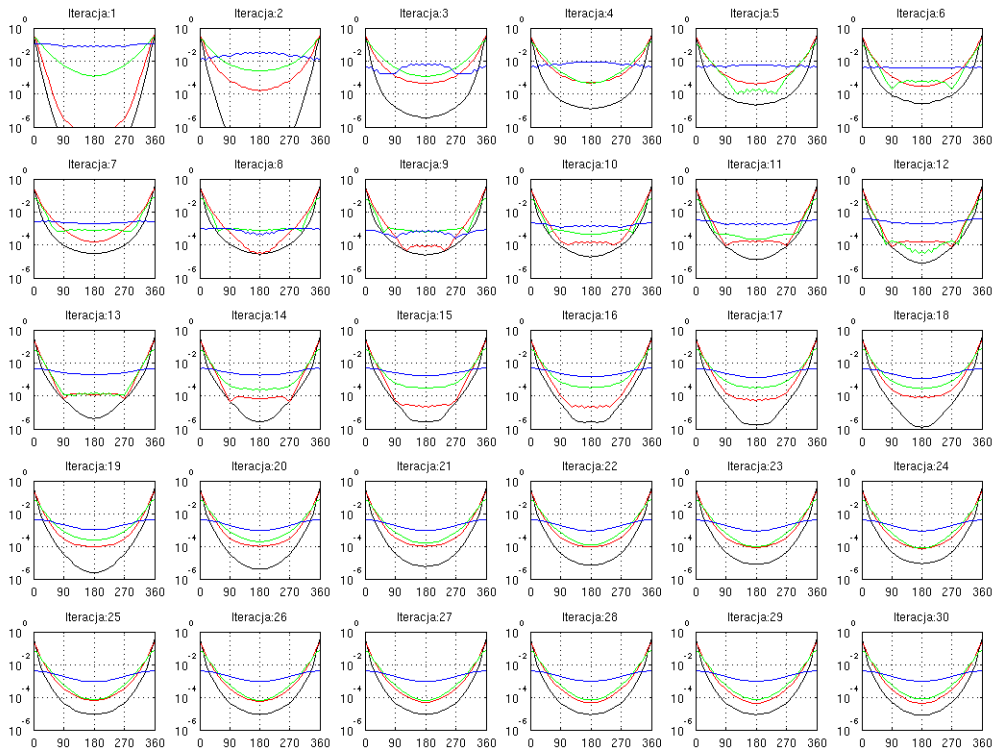
Stosując ten sam schemat przekształceń dla regionu  $\Omega_2$  dostajemy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(2)} & -\mathbf{B}_{01}^{(2)} \\ \mathbf{A}_{10}^{(2)} & -\mathbf{B}_{11}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_2^{(2)} \\ \frac{\partial \Phi_3^{(2)}}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{00}^{(2)} & -\mathbf{A}_{01}^{(2)} \\ \mathbf{B}_{10}^{(2)} & -\mathbf{A}_{11}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_2^{(2)}}{\partial n} \\ \Phi_3^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Podobnie postępujemy w regionie  $\Omega_3$ , gdzie funkcję stanu i jej pochodną obliczymy rozwiązując poniższy układ:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(3)} & -\mathbf{B}_{01}^{(3)} \\ \mathbf{A}_{10}^{(3)} & -\mathbf{B}_{11}^{(3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_3^{(3)} \\ \frac{\partial \Phi_4^{(3)}}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{00}^{(3)} & -\mathbf{A}_{01}^{(3)} \\ \mathbf{B}_{10}^{(3)} & -\mathbf{A}_{11}^{(3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_3^{(3)}}{\partial n} \\ \Phi_4^{(3)} \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Numeryczne eksperymenty dowiodły, że nawet dla elementów drugiego rzędu modelu MEB zagadnienia, nie udało się uzyskać stabilnych i precyzyjnych wyników. Rozwiązanie miało tendencję do silnych oscylacji nawet po przekroczeniu 20-u iteracji metody Dirichlet-Neumann (patrz rys. 4.13). Najlepsze wyniki, aczkolwiek obarczone błędem względnym



Rysunek 4.13. Kolejne iteracje algorytmu Dirichlet - Neumann zastosowanego do obliczeń w czterowarstwowym modelu sferycznym. Poszczególne rysunki przedstawiają logarytm amplitudy gęstości fotonów w funkcji kąta detekcji wewnątrz analizowanego modelu — na granicach między regionami

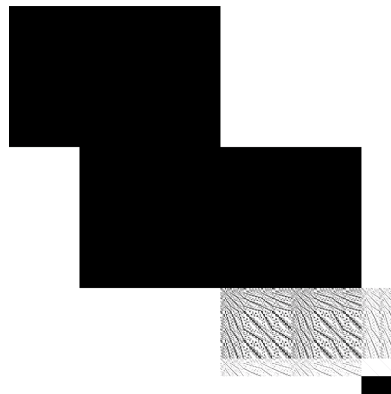
rzędu kilku procent (4.38%,  $\Theta = 0.85$ ) w stosunku do rozwiązania całościowego, udało się uzyskać po 26 krokach algorytmu dekomponującego co również pokazano na rys. 4.13. W trakcie badań, metodą eksperymentalną wyznaczono optymalną wartość współczynnika relaksacyjnego, który dla tego typu algorytmu i zadania wyniósł około  $\Theta = 0.9$ .

Zbieżność dekompozycji bez nakładania w zastosowaniu do problemu opisanego dyfuzyjnym przybliżeniem równania RTE jest nie do przyjęcia. Zwłaszcza gdy weźmie się pod uwagę wcześniej opisaną metodę z nakładaniem osiągającą po czterech iteracjach błąd względny rzędu 2%.

## 4.6 Czterowarstwowy model głowy niemowlaka

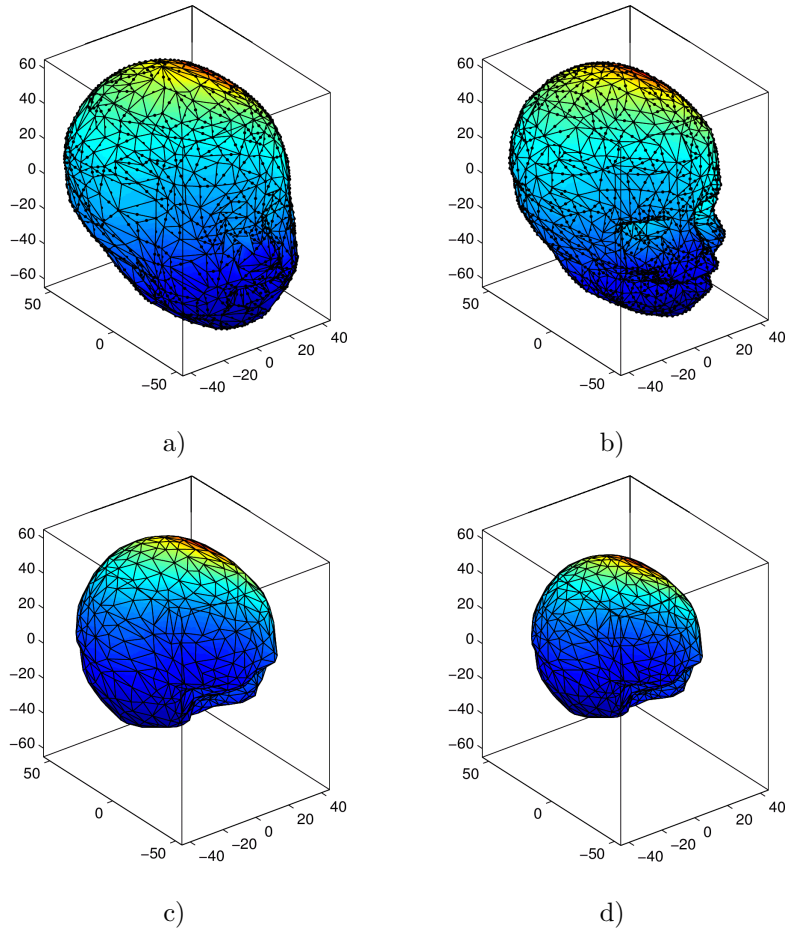
Opisywany w rozdziale 4.5.4 czterowarstwowy model sferyczny stanowił przybliżenie rzeczywistej głowy niemowlaka, przyjęte w celu testowania i weryfikacji metod numerycznych. W ostatniej fazie badań obliczenia zostały przeprowadzone na rzeczywistym modelu główki. Podobnie jak wcześniej, tu także modelowanymi warstwami były: skóra, czaszka, nierozpraszający światła płyn rdzeniowo mózgowy i mózg [8, 9, 36].

Struktura liniowego układu równań otrzymanego z MEB, przed zdekomponowaniem miała postać przedstawioną na rys. 4.14. Rozwiązania tego problemu określonego przez 20000



Rysunek 4.14. Struktura lewej strony macierzowego układu równań modelu MEB opisującego rozkład funkcji stanu w czterowarstwowym modelu główki niemowlaka. Niezerowe wartości zostały oznaczone jako czarne punkty

niewiadomych zajęło 64-bitowemu procesorowi wyposażonemu w 4GB pamięci operacyjnej około 50 godzin. Wykorzystanie metod dekompozycji obszarowej skróciło czas obliczeń o około 20%, co jest wynikiem niezadowalającym. Należy wspomnieć, że procedury imple-



Rysunek 4.15. Rozwiązanie - logarytm amplitudy gęstości fotonów na zewnętrznej powłoce modelu główki niemowlaka a), na zewnętrznej powłoce warstwy kości czaszki b), w obszarze z płynem rdzeniowo-mózgowym c) oraz na powierzchni mózgu d)

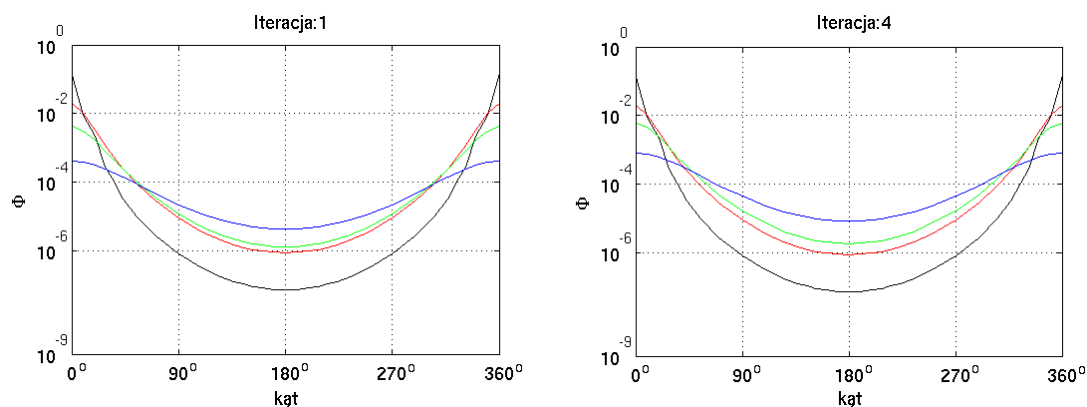
mentujące metody dekompozycji wprowadzają duże narzuty obliczeniowe, np. macierze z uwagi na dużą ilość elementów zerowych przechowywane są w pamięci w formacie CSR (ang. *Compressed Sparse Row format*). To znakomicie wydłuża czasy dostępu do ich pól. Dodatkowo, jak już wspomniano w poprzednich rozdziałach, dzięki dekompozycji jedno-razowo rozwiązujemy mniejszy problem lecz w przynajmniej kilku iteracjach. Tak więc aby dekompozycja się „opłacała” rozwiązywany problem musi być stosunkowo duży.

Graficzna prezentacji rozwiązania znajduje się na rys. 4.15. Przedstawia ono rozkład gęstości fotonów propagowanych z izotropowego źródła punktowego przez czterowarstwowy model główki niemowlaka. Amplituda maleje w miarę oddalania się od źródła, zaś brak lub bardzo niewielkie rozpraszanie w przedostatniej warstwie prowadzi do ograniczenia fazy i wzrostu amplitudy na wszystkich węzłach tej warstwy.



## 4.7 Wyniki

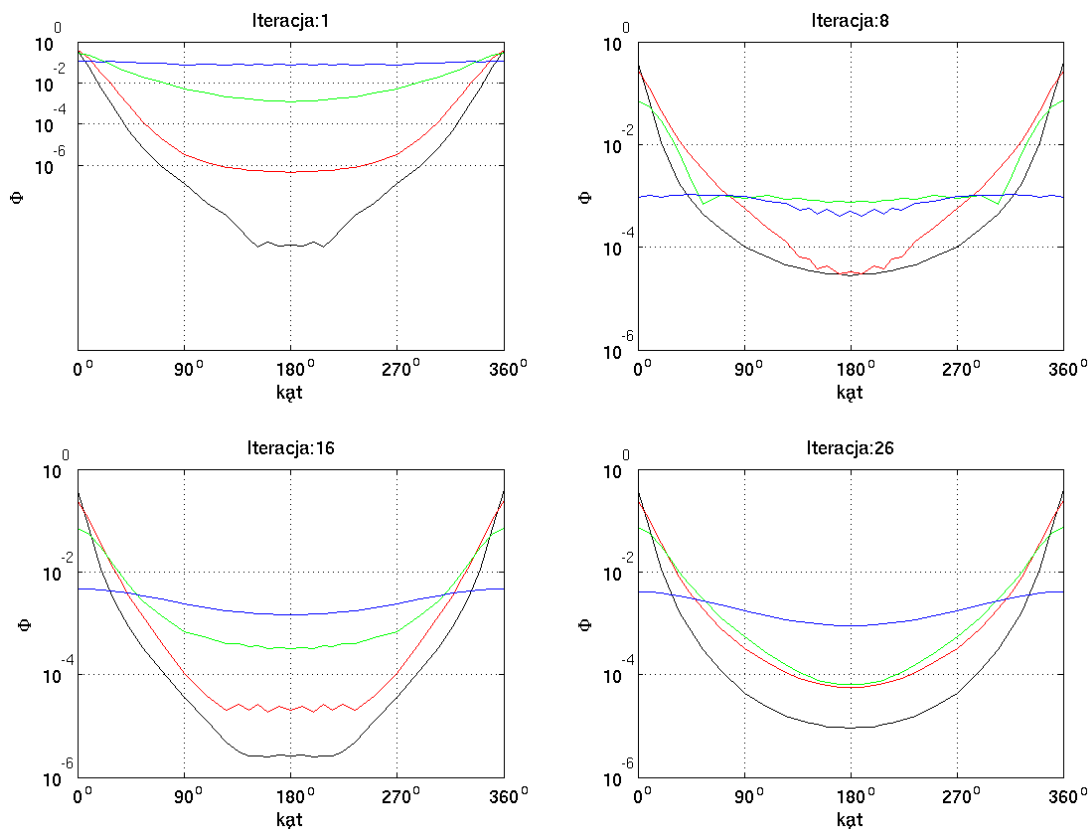
W czasie wykonywania pracy zostały zaimplementowane metody dekompozycji „bez nakładania” (algorytm Dirichlet-Neumann, Neumann-Neumann i Dirichlet-Dirichlet) jak również metody „z nakładaniem”. Najlepsze wyniki z punktu widzenia analizowane-



Rysunek 4.16. Pierwsza i ostatnia iteracja algorytmu dekompozycji „z nakładaniem” w rozwiązaniu czterowarstwowego modelu sferycznego (błąd względny  $\approx 2\%$ )

go problemu (mała ilość informacji wejściowych w postaci warunku brzegowego Robina założonego w jednym punkcie całej domeny) uzyskano przy użyciu algorytmu „z nakładaniem” (rys. 4.16). Algorytm opiera się na przenoszeniu warunków brzegowych Dirichleta ze wspólnej granicy nakładających się regionów pomiędzy kolejnymi etapami jego pracy. W odróżnieniu od któregośkolwiek z algorytmów „bez nakładania” ten zbiega się bardzo szybko, a akceptowalne rozwiązanie pojawia się po zaledwie 4 iteracjach. Niestety znacznie gorzej wygląda złożoność czasowa tej metody, która przy rozmiarze wejścia około 10000 węzłów jest wciąż wolniejsza od podejścia jednorazowego. Pewien przyrost wydajności uzyskuje się dopiero gdy rozmiar macierzy głównej przekracza 20000. Obliczenia były w tym przypadku szybsze o 20%, zaś przy rozmiarze rzędu 40000 wynik otrzymywano w czasie 70% krótszym.

Na rozwiązanie zagadnienia prostego DTO z podobnym poziomem błędów, w przypadku metody traktującej podobszary jako sąsiadujące i tylko stykające się wzdłuż granic, należy przeznaczyć około 30 iteracji (algorytm Dirichlet-Neumann). Wybrane rozwiązania po 1, 8, 16 i 26 iteracjach tego algorytmu przedstawiono na rys. 4.17. Słowa komentarza wymaga również dokładność rozwiązania uzyskanego w tym algorytmie, którą to wybiórczo przedstawiono w tabeli 4.3. Otóż największy błąd jest umiejscowiony na granicy  $\Gamma_3$  we-



Rysunek 4.17. Wybrane iteracje algorytmu Dirichlet-Neumann w zadaniu rozwiązania problemu DTO czterowarstwowego modelu sferycznego

wewnętrznej warstwy  $\Omega_3$ . Jest to warstwa najdalej oddalona od źródła światła (na rys. 4.17 oznaczona kolorem niebieskim), a tym samym jedyne warunki wstępne. Sekwencyjne obliczanie rozkładów gęstości fotonów przenosi błąd rozwiązania z każdej poprzedniej warstwy na tę ostatnią.

Tabela 4.3. Procentowy błąd względny algorytmu D-N dla zagadnienia prostego DTO w modelu sferycznym (z rys. 4.17)

Liczba iteracji	Błąd względny
10	43.39%
15	22.24%
20	10.27%
26	4.38%
30	5.14%

# Rozdział 5

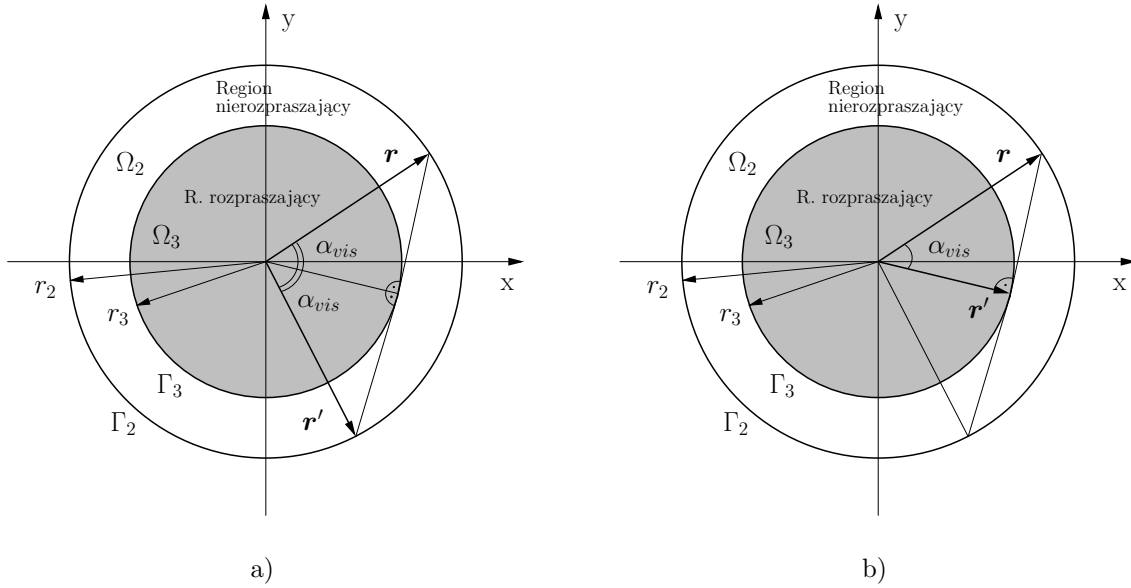
## Macierz widoczności

W ostatnich latach można było zaobserwować znaczący postęp w tomografii optycznej, a zwłaszcza w jej zastosowaniach medycznych. Główny nurt badań nad tego rodzaju obrazowaniem obejmuje leczenie przedwcześnie urodzonych dzieci. Zakres badań obejmuje monitorowanie główki niemowlaka w celu wykrycia zaburzeń w dostawach krwi i tlenu do mózgu. Takie urazy mogą prowadzić do kalectwa, a nawet śmierci. Tomografia optyczna dostarcza informacji o hemodynamicznych zmianach zachodzących w mózgu, a co za tym idzie umożliwia diagnozę i późniejsze monitorowanie procesu leczenia. Algorytmy używane w tomografii optycznej są bardzo kosztowne obliczeniowo [9, 11, 55]. Jedną z metod podniesienia wydajności tych obliczeń jest wygenerowanie macierzy widoczności dla ośrodków o zerowym, bądź bliskim zeru współczynnika rozpraszania i absorpcji światła. Ponadto macierz widoczności pozwala na zaalokowanie nielokalnych warunków brzegowych w tego typu ośrodkach [17, 68, 115].

Macierz widoczności określa czy wzdłuż prostej linii pomiędzy parą węzłów warstwy nie ma przesłaniających je elementów brzegowych. Warstwę tworzą dwie sfery, jedna zawarta w drugiej. Wybrano sfery ze względu na możliwość analitycznego wyliczenia funkcji widoczności, która w ujęciu dyskretnym staje się macierzą. Rozpatrując wnętrze jednej przezroczystej sfery funkcja widoczności jest równa jedności ponieważ wszystkie punkty można bezpośrednio połączyć linią prostą. W przypadku przezroczystej, nierozpraszającej przestrzeni pomiędzy sferami koncentrycznymi należy rozważyć trzy przypadki:

1. obydwa punkty  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{r}'$  są na powierzchni  $\Gamma_2$  — widoczne jeśli  $\alpha_{vis} < 2U$ , gdzie  $U$  jest kątem przy którym zanika widoczność pomiędzy rozpatrywanymi węzłami,

2. jeden z punktów znajduje się na powierzchni  $\Gamma_2$ , a inny na powierzchni  $\Gamma_3$  — widoczne jeśli  $\alpha_{vis} < U$ ,
3. zarówno punkt  $\mathbf{r}$  jak i  $\mathbf{r}'$  są na powierzchni  $\Gamma_3$  — nie widoczne.



Rysunek 5.1. Kąt widoczności pomiędzy dwoma punktami na powierzchni  $\Gamma_2$  a) oraz pomiędzy dwoma punktami na powierzchni  $\Gamma_2$  i  $\Gamma_3$  b)

Dla sfer koncentrycznych można wyliczyć kąt odcięcia widoczności. W przedstawionej na rys. 5.1 geometrii określa go następująca zależność  $U|_{\Gamma_3} = \frac{1}{2}U|_{\Gamma_2} = \arccos\left(\frac{r_3}{r_2}\right)$ . Pozwala ona na wyznaczenie kąta definiującego widoczność punktów wskazywanych przez  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{r}'$  w rozpatrywanej domenie:

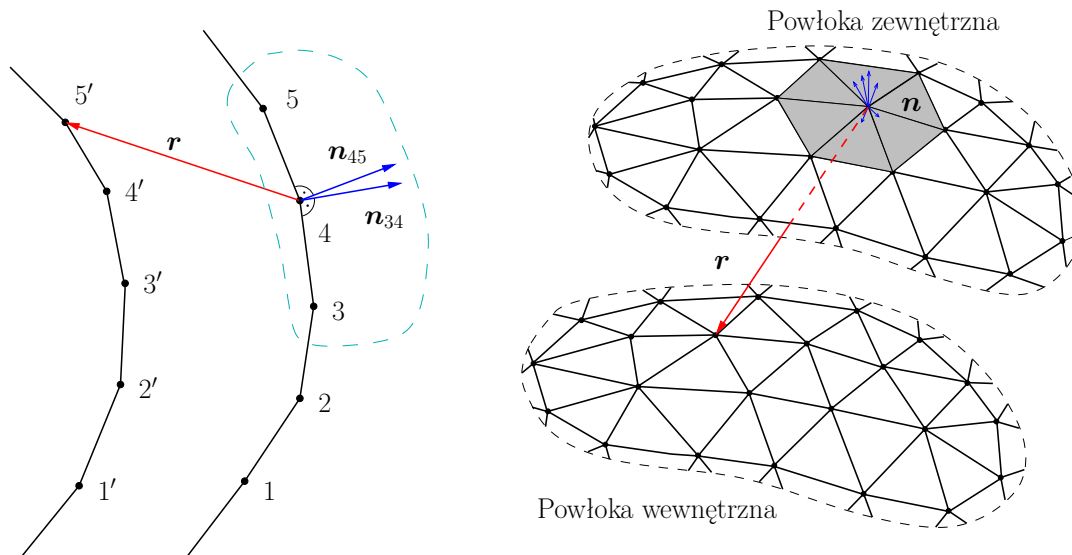
$$\alpha_{vis} = \arccos \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}| |\mathbf{r}'|} \quad (5.1)$$

Algorytm tworzenia macierzy widoczności został początkowo opracowany na modelu sferycznym tzn. określał widoczność węzłów warstwy utworzonej przez sferę i zawartą w niej drugą sferę o mniejszej średnicy (bryły wypukłe). Następnie został rozszerzony tak aby możliwe było jego zastosowanie w obiektach o dowolnym kształcie, np. w bryłach wklęsłych. Docelowo macierz widoczności odpowiada za rozłożenie nielokalnych warunków brzegowych w warstwie płynu rdzeniowo-mózgowego w modelu głowy niemowlaka.

## 5.1 Określanie wklęsłości i wypukłości powierzchni

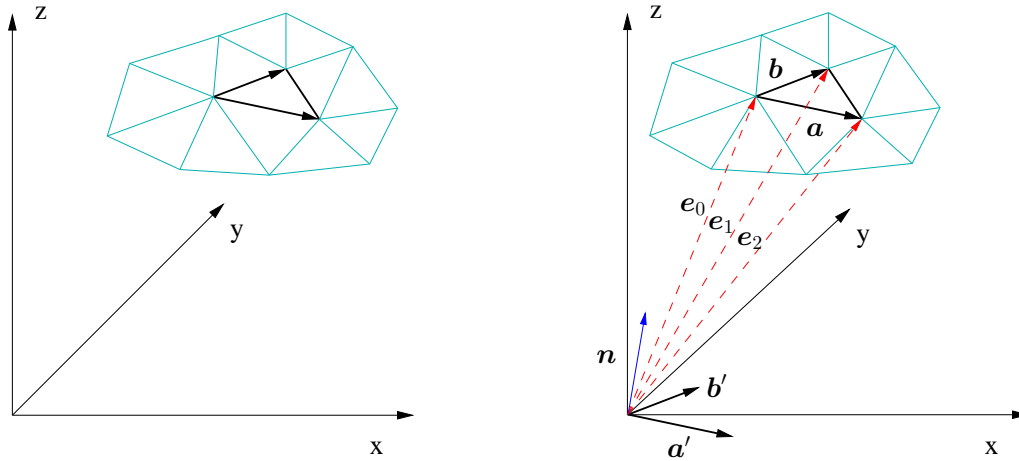
Z uwagi na zastosowanie algorytmu macierzy widoczności tylko do warstwy przezroczystej, wypełnionej płynem rdzeniowo-mózgowym należy przede wszystkim określić kształt tej powierzchni. Ma to duże znaczenie dla wydajności działania całej metody wykrywania kolizji.

Otóż wymóg aby sprawdzić widoczność wszystkich węzłów względem siebie implikuje konieczność prowadzenia promieni między węzłami powłok: zewnętrznej, wewnętrznej oraz pomiędzy węzłami jednej i drugiej. Założenie, iż światło nie wydostaje się poza warstwę pozwala wstępnie ograniczyć ilość sprawdzanych przecięć promienia z elementami brzegowymi. Wystarczy określić czy dany promień jest skierowany do wnętrza warstwy. Aby to sprawdzić należy określić czy promień swój początek przybiera na wklęsłej, czy wypukłej powierzchni ograniczającej warstwę. Dla danego węzła, z którego jest wyprowadzany promień, odnajdujemy wszystkie elementy do których on należy (rys. 5.2). Następnie



Rysunek 5.2. Określenie wszystkich elementów powierzchni do których należy węzeł

wyznaczamy normalne do powierzchni znalezionych elementów sprowadzając uprzednio ich tworzące do początku układu współrzędnych (rys. 5.3). Kolejnym etapem jest wyznaczenie iloczynu skalarnego promienia z każdą z normalnych. Jeśli znajdujemy się na



Rysunek 5.3. Możliwość określenia widoczności węzłów leżących na wypukłych obszarach powłok warstwy

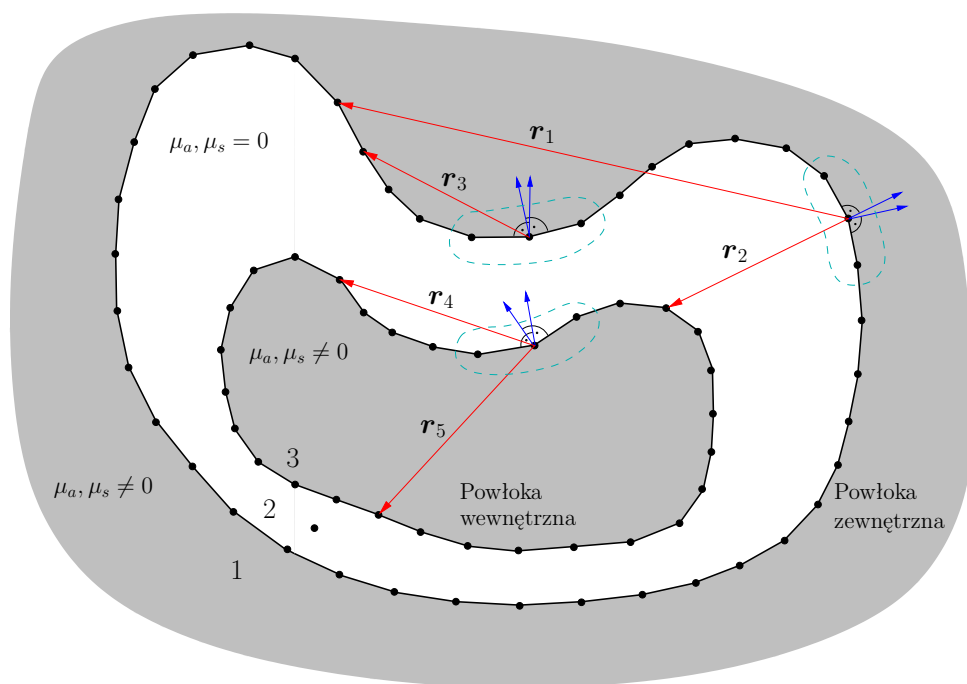
powierzchni zewnętrznej to:

1. promień wchodzi do wnętrza warstwy gdy:  $\forall_{k \in (1:m)} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{r} < 0$  dla  $k = 1, 2, 3, \dots, m$ ,
2. promień wychodzi na zewnątrz warstwy gdy:  $\forall_{k \in (1:m)} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{r} > 0$  dla  $k = 1, 2, 3, \dots, m$ ,
3. promień ślizga się po powierzchni gdy:  $\forall_{k \in (1:m)} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{r} = 0$  dla  $k = 1, 2, 3, \dots, m$ , gdzie  $k$  to liczba normalnych w danym węźle.

Przy założeniu, że znajdujemy się na powierzchni wewnętrznej:

1. promień wchodzi do wnętrza warstwy gdy:  $\forall_{k \in (1:m)} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{r} > 0$  dla  $k = 1, 2, 3, \dots, m$ ,
2. promień wychodzi na zewnątrz warstwy gdy:  $\forall_{k \in (1:m)} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{r} < 0$  dla  $k = 1, 2, 3, \dots, m$ ,
3. promień ślizga się po powierzchni gdy:  $\forall_{k \in (1:m)} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{r} = 0$  dla  $k = 1, 2, 3, \dots, m$ , gdzie  $k$  to liczba normalnych w danym węźle.

Rysunek 5.4 przedstawia wszystkie możliwe przypadki. Promień  $\mathbf{r}_1$  wchodzi włąb warstwy nr 2 z powłoki zewnętrznej ponieważ jego iloczyn skalarny z normalnymi elementami w węźle startowym jest mniejszy od zera. Wyznaczające go węzły nie „widzą się”, gdyż zaproponowana przez autora procedura wykrywania kolizji odnotuje jego przecięcie z elementem brzegowym (tu mniej więcej w połowie długości). Promienie  $\mathbf{r}_2$  i  $\mathbf{r}_4$  spełniają wszystkie warunki aby móc jednoznacznie powiedzieć, że tworzące je węzły „widzą się”. Z kolei promienie  $\mathbf{r}_5$  i  $\mathbf{r}_3$  są prowadzone pomiędzy węzłami, które się „nie widzą”. Jest



Rysunek 5.4. Możliwość określenia widoczności węzłów leżących na wypukłych obszarach powłok warstwy

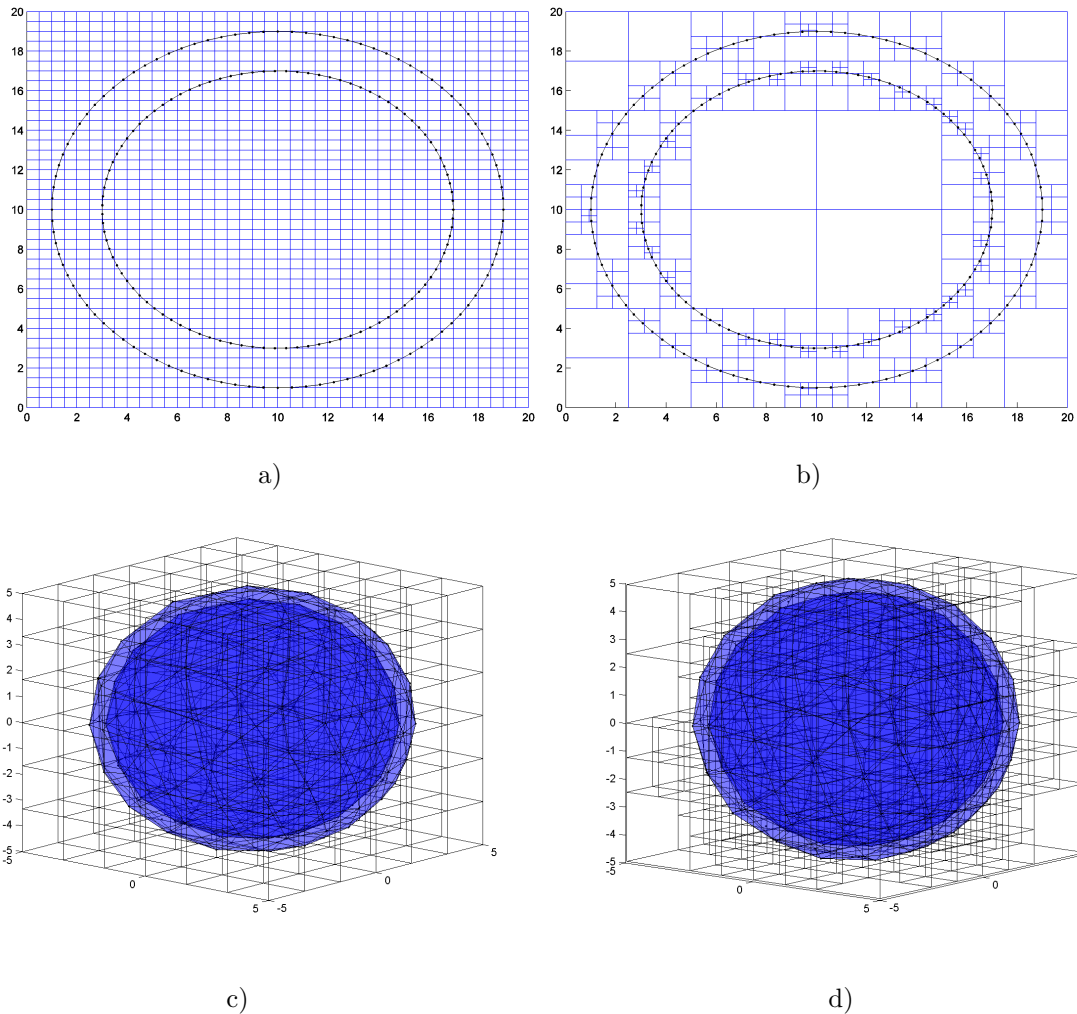
tak dlatego, iż promień  $r_5$  startuje z wypukłej części powłoki wewnętrznej i biegnie do nieprzezroczystego wnętrza modelu (warstwa nr 3). Promień  $r_3$  również bierze początek na wypukłej części, ale powłoki zewnętrznej, kierując się na nie przezroczysty obszar nr 1.

## 5.2 Metody podziału przestrzeni

Można wyróżnić dwie najpopularniejsze w grafice komputerowej metody podziału przestrzeni: podział siatką o stałym rozmiarze [54] oraz podział siatką oktetową [3, 4, 13]. Pierwszy ze schematów pozwala na bardzo szybkie przemieszczanie się po siatce. Przejście do następnego woksela jest relatywnie mało kosztowne obliczeniowo. W drugim przypadku podział przestrzeni jest dostosowany do kształtu obiektów. Takie adaptacyjne dzielenie przestrzeni pozwala na efektywne przechowywanie danych w pamięci komputera i jednocześnie ogranicza całkowitą liczbę woksela zawierających w sobie model.

Podział siatką regularną cechuje się stałą rozdzielczością w całej przestrzeni; nawet w jej pustych nie zajmowanych przez powierzchnie modelu miejscach. Z kolei schemat oktetowy zwiększa gęstość siatki tylko tam gdzie jest to wymagane, czyli przy krawędziach obiektów. Pusta przestrzeń pozostaje natomiast niepodzielona, bądź podzielona w małym

stopniu. Do wad siatki regularnej możemy niewątpliwie zaliczyć generację nadmiarowej



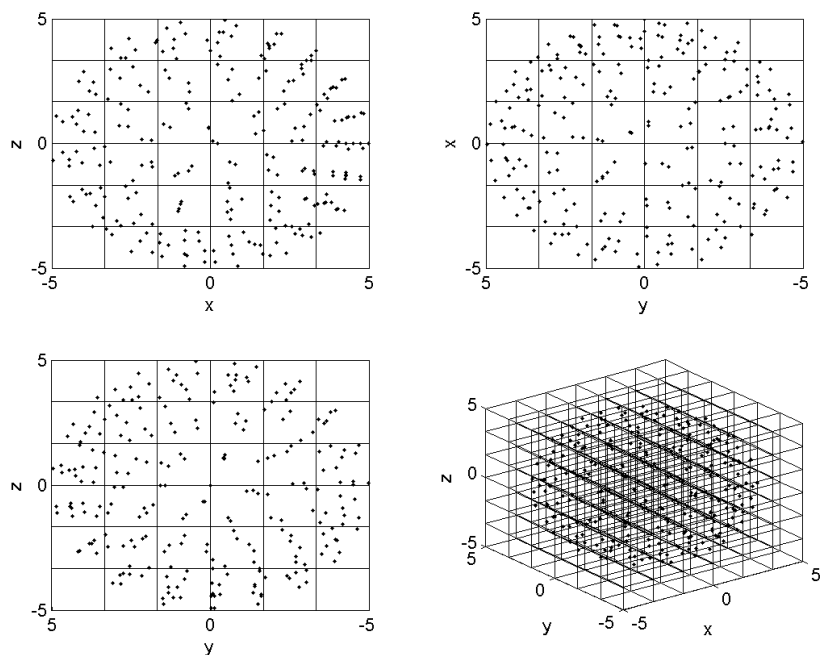
Rysunek 5.5. Regularny podział przestrzeni wokół obiektu w 2D a) i w 3D c). Oktetowy podział przestrzeni wokół obiektu w 2D b) i 3D d)

liczby wokseli przy założeniu odpowiedniego stopnia dyskretyzacji. Wady tej nie posiada siatka oktetowa, która angażuje za to więcej zasobów na poruszanie się między wokselaми o różnych rozmiarach. Różnice między siatkami przedstawiają rysunki 5.5c i 5.5d.

### 5.3 Podział przestrzeni siatką regularną

Podział regularny dzieli przestrzeń wokół modelu równomiernie w trzech kierunkach bez względu na jego kształt (patrz rys. 5.6). Algorytm kroczenia po siatce wykorzystuje ten fakt jednorodnego podziału pozwalając na bardzo szybkie przemieszczania się pomiędzy



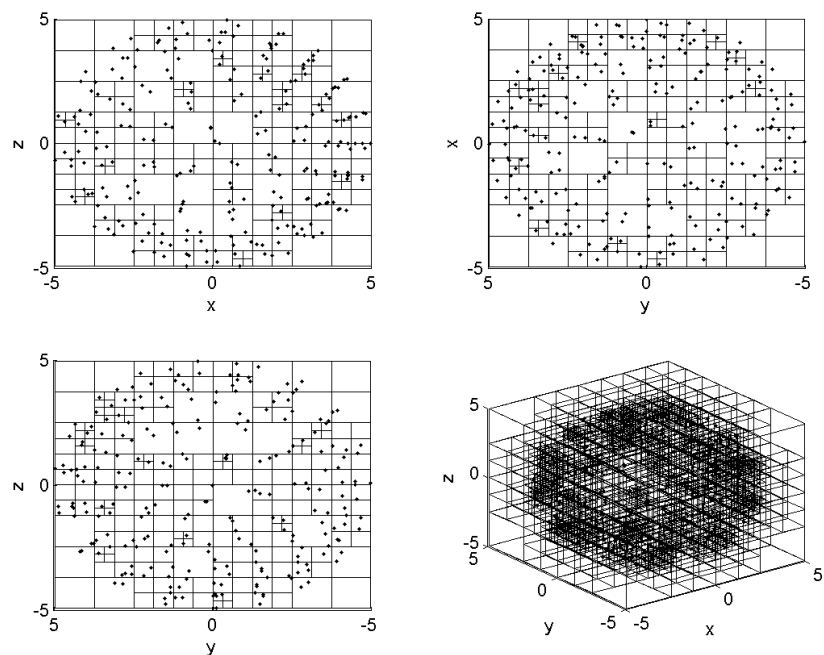


Rysunek 5.6. Siatka regularna obejmująca dwie sfery, takie jak na rys. 5.5c, pokazane w formie chmury węzłów. Rysunek przedstawia rzuty płaskie oraz rzut ogólny izometryczny

wokselami wzdłuż promienia. Mając z góry daną informację o kroku siatki możemy wyliczyć współrzędne wejścia i wyjścia promienia z bieżącego woksela. Szczegółowa analiza algorytmu przemieszczania się po siatce regularnej znajduje się w [3].

## 5.4 Podział przestrzeni siatką oktetową

Głównym powodem dla którego używa się podziału oktetowego (patrz rys. 5.7) jest jego automatyczna adaptacja/dostosowywanie się do kształtu obiektu. Tutaj z góry nie znamy liczby ani rozmiaru wokseli. Wspomniane parametry wyliczane są w trakcie procesu podziału przestrzeni. Największe z wokseli obejmują puste nie zajmowane przez powierzchnię modelu rejony w przeciwieństwie do tych najmniejszych, które są właśnie tam skoncentrowane. Przestrzeń jest rekursywnie dzielona na coraz to mniejsze części, aż do momentu kiedy zostanie spełniony warunek gęstości siatki. Warunek ten może być określony poprzez maksymalną ilość węzłów w wokselu [54]. Rekursywny podział zapewnia dodatkowo efektywne przechowywanie danych w strukturze drzewiastej, co z kolei implikuje szybkie przeszukiwanie i krótki dostęp do pamięci, do np. współrzędnych następnego woksela na



Rysunek 5.7. Siatka oktetowa obejmująca dwie sfery, takie jak na rys. 5.5d, pokazane w formie chmury węzłów. Rysunek przedstawia rzuty płaskie oraz rzut ogólny izometryczny

drodze promienia. Z uwagi na fakt, że przestrzeń dzielona jest automatycznie nie znamy rozmiaru żadnego woksela oprócz tego w którym się obecnie znajdujemy. Ta niedogodność pociąga za sobą użycie znacznie bardziej złożonego obliczeniowo algorytmu przemieszczania się po siatce [54] niż ten wykorzystywany przy podziale regularnym.

## 5.5 Wyznaczanie macierzy widoczności

Efektywne i szybkie wyznaczenie macierzy widoczności wiąże się z ograniczeniem liczby sprawdzanych przecięć pomiędzy odcinkiem (promieniem) łączącym poszczególne węzły powłok, a elementami brzegowymi (trójkątami). Niezależnie od tego jaką metodą podziału przestrzeni przyjmujemy algorytm generujący macierz widoczności będzie się składał z następujących etapów:

1. podział przestrzeni i przypisanie elementów brzegowych do otaczających je wokseli,
2. prowadzenie promienia z kolejnych węzłów powłoki zewnętrznej na węzły tej samej powłoki (odwiedzamy tylko woksela występujące na drodze promienia i tylko w nich dokonujemy testu na kolizje),

3. jak powyżej tylko, że tym razem rozważamy powłoki zewnętrzną i wewnętrzną,
4. jak powyżej z tym, że teraz zajmujemy się tylko powłoką wewnętrzną,
5. sukcesywnie wypełniamy macierz widoczności powtarzając kroki od 2 do 3.

Osobnego potraktowania wymaga krok pierwszy powyższej procedury, gdzie określa się które elementy brzegowe (tu trójkąty) są obejmowane przez poszczególne woksele zdyskretyzowanej przestrzeni. Tego typu testów zwykle używa się w algorytmach detekcji kolizji opartych na siatkach prostopadłościennych oraz do dyskretyzacji przestrzeni wokół obiektów w oprogramowaniu do modelowania metodą śledzenia promieni (ang. *ray tracing*). Test zaproponowany przez Akenine-Möller [1] opiera się na twierdzeniu osi rozdzielających [43,56]. Twierdzenie to mówi, że dwa wypukłe wieloboki A i B nie stykają się w żaden sposób, gdy można je rozdzielić albo wzdłuż osi równoległej do normalnej wieloboku A lub B, albo wzdłuż osi stworzonej przez iloczyn wektorowy dowolnej krawędzi wieloboku A z dowolną krawędzią wieloboku B.

W przypadku prostopadłościanów oraz trójkątów całkowity test przynależności składa się z 13 etapów:

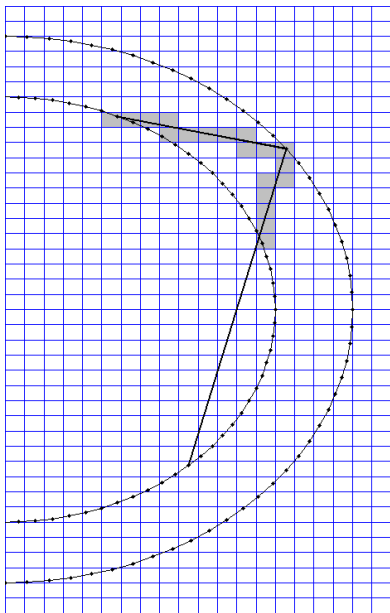
1. jeden test określający czy płaszczyzna zdefiniowana przez normalną trójkąta nakłada się na rozpatrywany woksel. Testowane są tylko dwa przekątne wierzchołki woksela, których kierunek jest najbliższy kierunkowi normalnej trójkąta [28],
2. 12 testów polegających na rzutowaniu krawędzi trójkąta na normalne powierzchni tworzących woksel [1,28].

W niniejszej pracy algorytm został wykorzystany do przypisania elementów brzegowych do wokseli. Dokonuje się tego w celu ograniczenia liczby przeprowadzanych testów na kolizje promienia z elementami brzegowymi. Testy przecięć promienia z trójkami wykonuje się tylko w wokselaх przez które promień przechodzi. Dlatego należy wcześniej określić, które z elementów są obejmowane przez dany woksel, które mają z nim część wspólną.

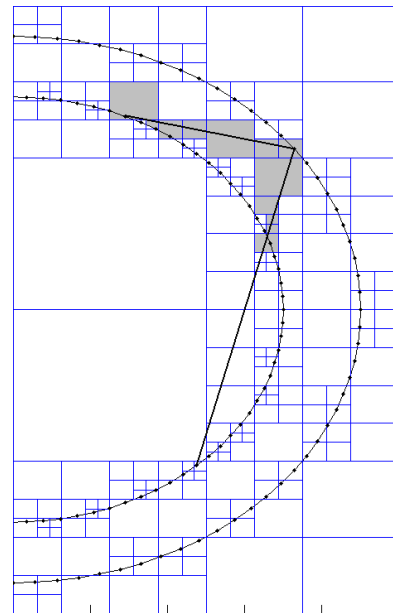
Dokładność rozwiązania uzyskiwanego w MEB wzrasta wraz z liczbą węzłów, a co za tym idzie elementów tworzących model obiektu. Często wykorzystywane są zatem nie tylko elementy pierwszego, ale i wyższych rzędów. Przykładowo, wykorzystanie sześciowęzłowego elementu izoparametrycznego oznacza, iż do wyznaczenia funkcji stanu i jej pochodnej w elemencie będą użyte funkcje interpolujące drugiego rzędu. Implikują one również kształt

elementu, który nie jest już płaski, lecz wypukły lub wklęsły w zależności od jego orientacji w przestrzeni. Zaproponowana powyżej metoda określania przynależności elementu brzegowego do woksela oraz jego testu na kolizję z promieniem nie może być wykorzystana jeśli model jest zbudowany z elementów innych niż płaskie i trójkątne. O ile w przypadku testu na kolizję wystarczy zamiast równania płaszczyzny wykorzystać równanie opisujące paraboloidę o tyle określenie przynależności elementu do woksela skomplikuje się czyniąc dyskretyzację przestrzeni wokół modelu, a w końcu i obliczenia macierzy widoczności nieopłacalnymi. W wydajnych algorytmach grafiki komputerowej wykorzystywanych do tworzenia fotorealistycznych scen, implementuje się metody testujące kolizje promienia czy płaszczyzny jedynie ze sferą, cylindrem lub stożkiem. Inne, dowolnie skomplikowane kształty reprezentowane są przez wielościany, a zatem płaszczyzny [97].

Algorytm tworzenia macierzy widoczności redukuje złożoność obliczeniową problemu z  $O(n^3)$  do  $O(n^2)$ . Jednakże poprawę wydajności uzyskuje się tylko przy właściwym doborze rozdzielczości siatki. Zbyt duża liczba wokseli przyniesie stratę czasu przy przemieszczaniu się po nich. Z kolei zbyt mała spowoduje zwiększenie ilości testów na kolizje promienia z elementami brzegowymi. Na rysunkach 5.8 i 5.9 pokazano poszczególne schematy



Rysunek 5.8. Przemieszczanie się po siatce regularnej



Rysunek 5.9. Przemieszczanie się po siatce oktetowej

podziału przestrzeni w odniesieniu do algorytmów przemieszczania się po siatce. Całkowita odległość w wokselał między analizowanymi węzłami wynosi 7 (górny promień)

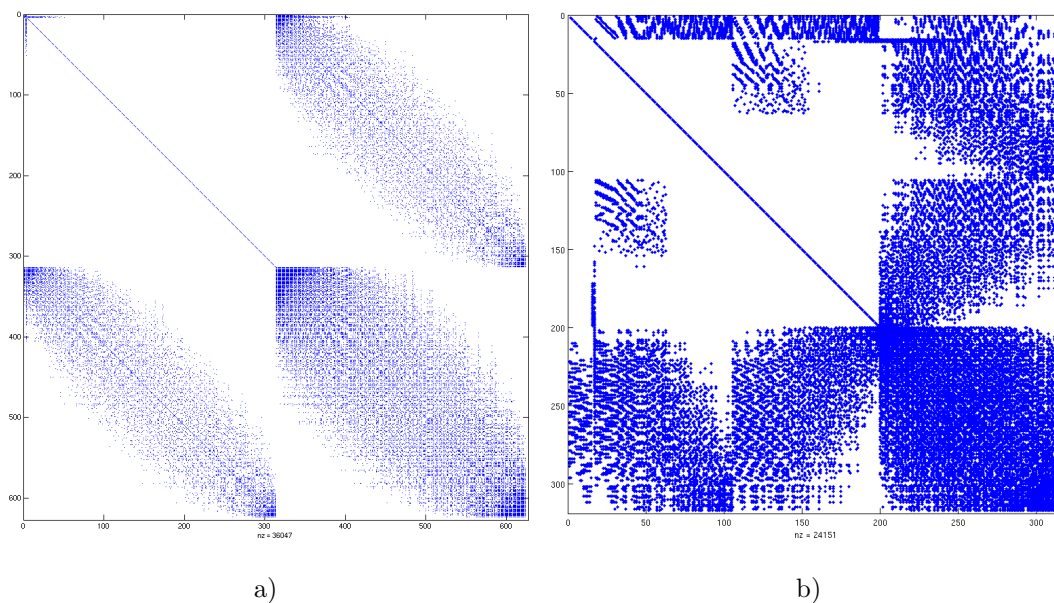
w przypadku siatki oktetowej, a 12 dla siatki regularnej. W efekcie działania algorytmu otrzymamy zero-jedynkową macierz rzadką, którą przedstawiono na rysunkach 5.10a i 5.10b.

## 5.6 Porównanie algorytmu macierzy widoczności z siatką oktetową i regularną

Czas generacji macierzy widoczności silnie zależy zarówno od przyjętego stopnia jak i schematu podziału przestrzeni. Wyniki dla obiektów złożonych odpowiednio z 246, 626 i 3278 węzłów przedstawiono w tabeli 5.1. W ostatnim wierszu tabeli 5.1 został przedsta-

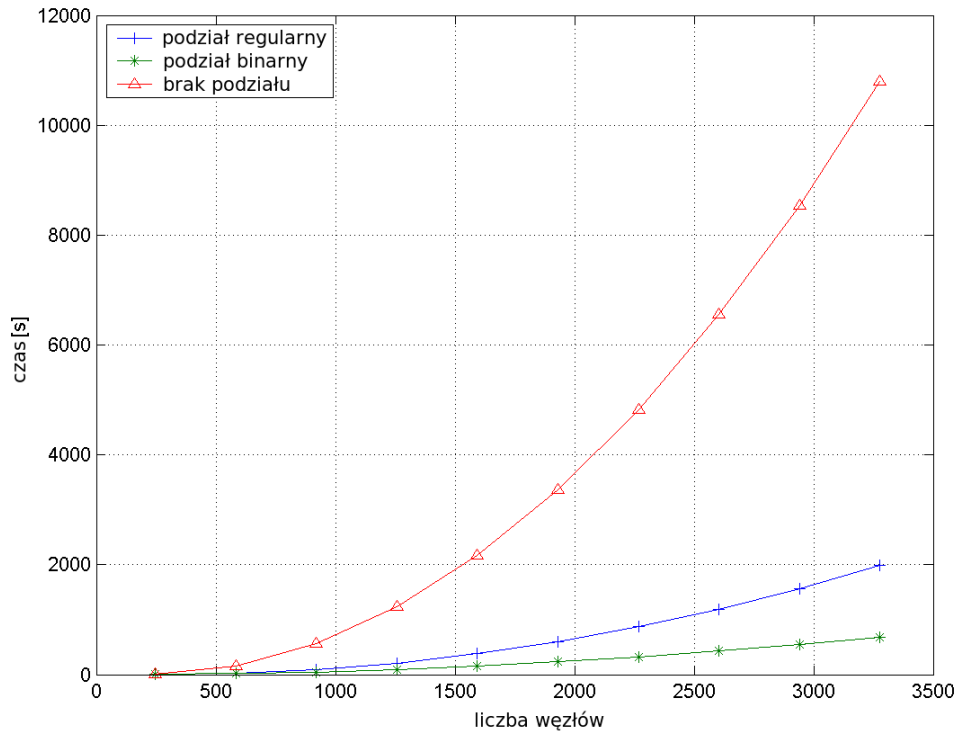
Tabela 5.1. Wyniki porównania

Liczba węzłów	246	626	3278
Typ siatki: brak (metoda siłowa bf)	12,066s	3m11,6s	4h36m46,715s
Typ siatki: siatka regularna (reg)	2,991s	26.944s	33m11.089s
Typ siatki: siatka oktetowa (oct)	2,554s	20.925s	11m24,7s



Rysunek 5.10. Macierz widoczności dwóch sfer: liczba elementów brzegowych 1239, liczba węzłów 626 a), oraz macierz widoczności dla obiektu o 323 węzłach i wklęsłej powierzchni wewnętrznej b)

wiony przyrost wydajności algorytmu generującego macierz widoczności w zależności od sposobu podziału przestrzeni. Otrzymane wyniki pozwalają stwierdzić, że wykorzystanie siatki oktetowej jest rozwiązaniem efektywnym, ale dla obiektów złożonych ze znacznie większej liczby węzłów (co pokazano na rys. 5.11).



Rysunek 5.11. Porównanie czasów tworzenia macierzy widoczności pomiędzy metodą „brutalnej siły”, a opracowanym algorytmem z dwoma metodami podziału przestrzeni: regularnym oraz oktetowym

## 5.7 Podsumowanie

Dobór metody podziału przestrzeni uzależniony jest po pierwsze od wstępnej analizy kształtu obiektu, dla którego będzie tworzona macierz widoczności. Dla obiektów o stosunkowo niskim stopniu złożoności (np. sfery), których węzły są równomiernie rozłożone w przestrzeni oraz dla celów badawczych w procesie testowania algorytmów można używać siatki regularnej. Dla obiektów o dowolnym kształcie, złożonych z dużej liczby elementów należy korzystać z siatki oktetowej, która „dopasowuje się” do modelu. Wybór jest uzasadniony brakiem konieczności dyskretyzacji przestrzeni „nie wypełnionej” przez obiekt. Oszczędzane są tym samym zasoby przy sprawdzaniu przynależności elementów brzego-

wych do poszczególnych wokseli. Przeprowadzone symulacje pozwalają na stwierdzenie, że siatka oktetowa podniesie wydajność algorytmu generującego macierz widoczności, ale tylko dla obiektów o odpowiednio dużej złożoności (od kilkunastu tysięcy elementów brzegowych).





## Rozdział 6

# Wnioski końcowe i podsumowanie

Celem pracy było opracowanie metod przyspieszenia obliczeń w DOT. Autor zdecydował się na metody dekompozycji obszarowej z uwagi na możliwość współpracy tych metod z modelem zagadnienia opracowanym w MEB.

Zgodnie z wynikami prac na dekompozycją obliczeń rozkładu pola elektrostatycznego w warstwowym kondensatorze walcowym wskazano byłoby użycie wydajniejszych metod dekompozycji bez nakładania. Należy tu zaznaczyć, wydajniejszych dla prostego problemu Laplace'a. Inaczej bowiem sprawa się ma gdy metody dekompozycji zastosujemy w modelu opisanym równaniem dyfuzji. W konkretnym przypadku sferycznego modelu czterowarstwowego dekompozycja bez nakładania jest metodą niestabilną i zbiega się tylko w ściśle określonych warunkach, dodatkowo po osiągnięciu stosunkowo dużej liczby iteracji (min. 25, błąd względny na poz. 5%). Wynikać to może z bardzo ubogiej liczby informacji wstępnych jakie dostarczamy w formie warunków brzegowych. Zadowalające wyniki dla przypadku badanego w tej pracy daje metoda dekompozycji obszarowej z nakładaniem. Otóż, już 4 iteracje dwustopniowego algorytmu metody naprzemiennej pozwalają na zbliżenie się do rzeczywistego rozwiązania na odległość 2%-go błędu względnego. W tej konkretnej aplikacji dekompozycja z nakładaniem znacznie lepiej się zbiega, a rozwiązanie nie doznaje tak dużych fluktuacji w trakcie pracy algorytmu, jak dzieje się w przypadku metod pracujących na sąsiadujących, nienakładających się regionach. Każdy z algorytmów jest tak samo dobry. Wszystko zależy od doboru odpowiedniej metody do rozwiązania konkretnego problemu.

Jeśli chodzi o macierz widoczności, kluczową sprawą jest dobór metody podziału przestrzeni wokół obiektu. Wyniki pokazują, iż użycie najprostszej siatki o stałym kroku i

odpowiadającego jej mechanizmu kroczenia po takiej sieci jest skuteczne i wydajniejsze tylko i wyłącznie w przypadku obiektów o bardzo małej złożoności (ilość węzłów). Do pewnego momentu opłaca się korzystanie ze stałej siatki, zaś po przekroczeniu krytycznej liczby elementów (węzłów) modelu korzystniejsze będzie użycie dyskretyzacji adaptacyjnej.

Dyskretyzacja stałokrokowa przestrzeni wokół modelu może być użyta w celach badawczych podczas testów na obiektach mniejszej skali.

Za najważniejsze osiągnięcia oryginalne rozprawy autor uważa

1. przeprowadzenie analizy algorytmów dekompozycji obszarowej,
2. przeprowadzenie analizy wybranych algorytmów z zakresu grafiki komputerowej,
3. opracowanie i implementację metod dekompozycji obszarowej w zaganieniu prostym dyfuzyjnej tomografii optycznej,
4. opracowanie i implementację algorytmu tworzenia macierzy widoczności dla zagadnień dyfuzyjnej tomografii optycznej.

# Bibliografia

- [1] T. Akenine-Möller. Fast 3d triangle-box overlap testing. *Journal of Graphics Tools*, 6(1):29–33, 2001.
- [2] E. Amaldi. *The production and slowing down of neutrons*, volume 382 of *Encyclopedia of Physics*, pages 1–659. Springer-Verlag, 1959.
- [3] J. Amanatides and A. Woo. A fast voxel traversal algorithm for ray tracing. *Eurographics*, pages 3–10, 1987.
- [4] B. Arnaldi, T. Priol, and K. Bouatouch. A new space subdivision method for ray tracing csg modelled scenes. *The Visual Computer*, 3(2):98–108, 1987.
- [5] S.R. Arridge. Photon measurement density functions. part 1: Analytical forms. *Appl Opt*, 34(31):7395–7409, 1995.
- [6] S.R. Arridge. Optical tomography in medical imaging. *Inverse Problems*, 15:R41–R93, 1999.
- [7] S.R. Arridge, M. Cope, and D.T. Delpy. The theoretical basis for the determination of optical pathlengths in tissue: temporal and frequency analysis. *Phys Med Biol*, 37(7):1531–1560, 1992.
- [8] S.R. Arridge, H. Dehghani, M. Schweiger, and E. Okada. The finite element model for the propagation of light in scattering media: A direct method for domains with nonscattering regions. *Med Phys*, 27(1):252–264, 2000.
- [9] S.R. Arridge and J.C. Hebden. Optical imaging in medicine: Ii. modelling and reconstruction. *Phys Med Biol*, 42:841–853, 1997.
- [10] S.R. Arridge and W.R.B. Lionheart. Nonuniqueness in diffusion-based optical tomography. *Opt Lett*, 23:882–884, 1998.

- [11] S.R. Arridge and M. Schweiger. Photon measurement density functions. part 2: Finite-element-method calculations. *Appl Opt*, 34(34):8026–8037, 1995.
- [12] S.R. Arridge and M. Schweiger. A gradient-based optimisation scheme for optical tomography. *Opt Express*, 2(6):213–226, 1998.
- [13] J. Arvo. *Transforming axis-aligned bounding boxes*, pages 548–50. Graphics Gems I. San Diego: Academic Press, a.s. glassner edition, 1990.
- [14] A. Auge, G. Lube, and P.-Ch. Otto. A non-overlapping domain decomposition method with adaptive interface conditions for elliptic problems. in numerical treatment of multiscale problems (kiel, 1997). *Notes Numer. Fluid Mech.*, 70:12–23, 1999.
- [15] E.D. Aydin, C.R.E. de Oliveira, and A.J.H. Goddard. A comparison between transport and diffusion calculations using a finite element-spherical harmonics radiation transport method. *Med Phys*, 29(9):2013–2023, 2002.
- [16] E.D. Aydin, C.R.E de Oliveira, and A.J.H. Goddard. A finite element-spherical harmonics radiation transport model for photon migration in turbid media. *J Quant Spectrosc Radiat Transf*, 84:247–260, 2004.
- [17] G. Bal. Transport through diffusive and nondiffusive regions, embedded objects, and clear layers. *SIAM J Appl Math*, 62(5):1677–1697, 2002.
- [18] A.A. Becker. *The Boundary Element Method in Engineering. A complete course*. McGraw-Hill Book Company, 1992.
- [19] G. Beer. *Programming the Boundary Element Method. An Introduction for Engineers*. John Wiley & Sons, 2001.
- [20] J.-D. Benamou. Domain decomposition methods with coupled transmission conditions for the optimal control of systems governed by elliptic partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(6):2401–2416, 1996.
- [21] J.-D. Benamou and B. Després. A domain decomposition method for the helmholtz equation and related optimal control problems. *J. Comput. Phys.*, 136:68–82, 1997.
- [22] D.A. Benaron, D.C. Ho, S. Spilman, J.P. VanHouten, and D.K. Stevenson. Tomographic time-of-light optical imaging device. *Oxygen Transport to Tissue XIV*,

- pages 207–214, 1994. In M.C. Hogan and D.C. Poole and O. Mathieu-Costello and P.D. Wagner, editors.
- [23] A.V. Bluestone, G. Abdoulaev, C.H. Schmitz, R.L. Barbour, and A.H. Hielscher. Three-dimensional optical tomography of hemodynamics in the human head. *Opt Express*, 9(6):272–286, 2001.
- [24] D.A. Boas. *Diffuse Photon Probes of Structural and Dynamical Properties of Turbid Media: Theory and Biomedical Applications*. PhD thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, 1996.
- [25] D.A. Boas, D.H. Brooks, E.L. Miller, C.A. DiMarzio, M. Kilmer, R.J. Gaudette, and Q. Zhang. Imaging the body with diffuse optical tomography. *IEEE Signal Process Mag*, 18(6):57–75, 2001.
- [26] D.A. Boas, J.P. Culver, J.J. Stott, and A.K. Dunn. Three dimensional monte carlo code for photon migration through complex heterogeneous media including the adult human head. *Opt Express*, 10(3):159–170, 2002.
- [27] M. Bonnet. *Boundary Integral Equation Methods for Fluids and Solids*. J.Wiley & Sons, 1999.
- [28] P. Brunet and F.W. Jansen, editors. *Shaft Culling for Efficient Ray-Traced Radiosity*, New York, 1994. Springer-Verlag.
- [29] K.M. Case and P.F. Zweifel. *Linear Transport Theory*. Addison-Wesley, Reading, 1967.
- [30] C. Cercignani. *The Boltzmann Equation and Its Applications*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [31] B. Chance, M. Cope, E. Gratton, N. Ramanujam, and B. Tromberg. Phase measurement of light absorption and scatter in human tissue. *Rev Sci Instrum*, 69(10):3457–3481, 1998.
- [32] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Oxford University Press, London, 1950.

- [33] J. Chang, H.L. Graber, R.L. Barbour, and R. Aronson. Recovery of optical cross-section perturbations in dense-scattering media by transport-theory-based imaging operators and steady-state simulated data. *Appl Opt*, 35(20):3963–3978, 1996.
- [34] A. Corlu, R. Choe, T. Durduran, K. Lee, M. Schweiger, S.R. Arridge, E.M.C. Hillman, and A.G. Yodh. Diffuse optical tomography with spectral constraints and wavelength optimization. *Appl Opt*, 44(11):2082–2093, 2005.
- [35] J.P. Culver, R. Choe, M.J. Holboke, L. Zubkov, T. Durduran, A. Slemph, V. Ntziachristos, B. Chance, and A.G. Yodh. Three-dimensional diffuse optical tomography in the parallel plane transmission geometry: Evaluation of a hybrid frequency domain-continuous wave clinical system for breast imaging. *Med Phys*, 30(2):235–247, 2003.
- [36] J.P. Culver, A.M. Siegel, J.J. Stott, and D.A. Boas. Volumetric diffuse optical tomography of brain activity. *Opt Lett*, 28(21):2061–2063, 2003.
- [37] H. Dehghani, S.R. Arridge, M. Schweiger, and D.T. Delpy. Optical tomography in the presence of void regions. *J Opt Soc Am A*, 17(9):1659–1670, 2000.
- [38] H. Dehghani and D.T. Delpy. Linear single-step image reconstruction in the presence of nonscattering regions. *J Opt Soc Am A*, 19(6):1162–1171, 2002.
- [39] D.T. Delpy, M. Cope, P. van der Zee, S. Arridge, S. Wray, and J. Wyatt. Estimation of optical pathlength through tissue from direct time of flight measurement. *Phys Med Biol*, 33(12):1433–1442, 1988.
- [40] O. Dorn. A transport-backtransport method for optical tomography. *Inv Probl*, 14(5):1107–1130, 1998.
- [41] J.J. Duderstadt and W.R. Martin. *Transport Theory*. John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [42] T. Durduran, R. Choe, J.P. Culver, L. Zubkov, M.J. Holboke, J. Gimmarco, B. Chance, and A.G. Yodh. Bulk optical properties of healthy female breast tissue. *Phys Med Biol*, 47:2847–2861, 2002.

- [43] D. Eberly. *3D Game Engine Design: A Practical Approach to Real-Time Computer Graphics*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, 2000.
- [44] H. Eda, I. Oda, Y. Ito, Y. Wada, Y. Oikawa, Y. Tsunazawa, M. Takada, Y. Tsuchiya, Y. Yamashita, M. Oda, A. Sassaroli, Y. Yamada, and M. Tamura. Multichannel time-resolved optical tomographic imaging system. *Rev Sci Instrum*, 70(9):3595–3602, 1999.
- [45] N.L. Everdell, A.P. Gibson, I.D.C. Tullis, T. Vaithianathan, J.C. Hebden, and D.T. Delpy. A frequency multiplexed near-infrared topography system for imaging functional activation in the brain. *Rev Sci Instrum*, 76:093705, 2005.
- [46] H.A. Ferwerda. The radiative transfer equation for scattering media with a spatially varying refractive index. *J Opt A: Pure Appl Opt*, 1(3):L1–L2, 1999.
- [47] M. Firbank, S.R. Arridge, M. Schweiger, and D.T. Delpy. An investigation of light transport through scattering bodies with non-scattering regions. *Phys Med Biol*, 41:767–783, 1996.
- [48] International Society for Grid Generation. <http://www.isgg.org/>. wityrna internetowa.
- [49] M.A. Franceschini, K.T. Moesta, S. Fantini, G. Gaida and E. Gratton, H. Jess, W.W. Mantulin, M. Seeber, P.M. Schlag, and M. Kaschke. Frequency-domain techniques enhance optical mammography: Initial clinical results. *Proc Natl Acad Sci USA*, 94(12):6468–6473, 1997.
- [50] K. Furutsu. Diffusion equation derived from space-time transport equation. *J Opt Soc Am*, 70(4):360–366, 1980.
- [51] R.J. Gaudette, D.H. Brooks, C.A. DiMarzio, M.E. Kilmer, E.L. Miller, T. Gaudette, and D.A. Boas. A comparison study of linear reconstruction techniques for diffuse optical tomographic imaging of absorption coefficient. *Phys Med Biol*, 45:1051–1070, 2000.
- [52] A.P. Gibson, T. Austin, N.L. Everdell, M. Schweiger, S.R. Arridge, J.H. Meek, J.S. Wyatt, D.T. Delpy, and J.C. Hebden. Three-dimensional whole-head opti-

- cal tomography of passive motor evoked responses in the neonate. *NeuroImage*, 30(2):521–528, 2006.
- [53] A.P. Gibson, J.C. Hebden, , and S.R. Arridge. Recent advances in diffuse optical imaging. *Phys Med Biol*, 50:R1–R43, 2005.
- [54] A.S. Glassner. Space subdivision for fast ray tracing. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 4(10):15–22, 1987.
- [55] A.S. Glassner, J. Arvo, R.L. Cook, E. Haines, P. Hanrahn, P. Heckbert, and D.B. Kirk. *An Introduction to Ray Tracing*. Academic Press, London, 1989.
- [56] S. Gottschalk, M.C. Lin, and D. Manocha. Obbtree: A hierarchical structure for rapid interference detection. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'96 Proceedings)*, pages 171–180, 1996.
- [57] S. Gratkowski. *Asymptotyczne warunki brzegowe dla stacjonarnych zagadnień elektromagnetycznych w obszarach nieorganicznych - algorytmy metody elementów skończonych*. Wydawnictwo Uczelniane Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego, 2009. ISBN 978-83-7663-027-4.
- [58] D. Grosenick, H. Wabnitz, H.H. Rinneberg, K.T. Moesta, and P.M. Schlag. Development of a time-domain optical mammograph and first in vivo applications. *Appl Opt*, 38(13):2927–2943, 1999.
- [59] J.C. Hebden, S.R. Arridge, and D.T. Delpy. Optical imaging in medicine: I. experimental techniques. *Phys Med Biol*, 42:825–840, 1997.
- [60] J.C. Hebden, A. Gibson, T. Austin, R. Md Yusof, N. Everdell, D.T. Delpy, S.R. Arridge, J.H. Meek, and J.S. Wyatt. Imaging changes in blood volume and oxygenation in the newborn infant brain using three-dimensional optical tomography. *Phys Med Biol*, 49:1117–1130, 2004.
- [61] J.C. Hebden, R.A. Kruger, and K.S. Wong. Time resolved imaging through a highly scattering medium. *Appl Opt*, 30(7):788–794, 1991.
- [62] J. Heino, S. Arridge, J. Sikora, and E. Somersalo. Anisotropic effects in highly scattering media. *Phys Rev E*, 68:031908, 2003.



- [63] J. Heino and E. Somersalo. Estimation of optical absorption in anisotropic background. *Inv Probl*, 18:559–573, 2002.
- [64] L.G. Henyey and J.L. Greenstein. Diffuse radiation in the galaxy. *AstroPhys J*, 93:70–83, 1941.
- [65] A.H. Hielscher, R.E. Alcouffe, and R.L. Barbour. Comparison of finite-difference transport and diffusion calculations for photon migration in homogeneous and heterogeneous tissues. *Phys Med Biol*, 43:1285–1302, 1998.
- [66] E.M.C. Hillman, J.C. Hebden, F.E.W. Schmidt, S.R. Arridge, M. Schweiger, H. Dehghani, and D.T. Delpy. Calibration techniques and datatype extraction for time-resolved optical tomography. *Rev Sci Instrum*, 71(9):3415–3427, 2000.
- [67] E.M.C. Hillman, J.C. Hebden, M. Schweiger, H. Dehghani, F.E.W. Schmidt, D.T. Delpy, and S.R. Arridge. Time resolved optical tomography of the human forearm. *Phys. Med. Biol.*, 46:1117–1130, 2000.
- [68] N. Hyvönen. Analysis of optical tomography with non-scattering regions. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 45:257–276, 2002.
- [69] A. Ishimaru. *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, volume 1. Academic Press, New York, 1978.
- [70] J. Kaipio and E. Somersalo. *Statistical and Computational Inverse Problems*. Springer, New York, 2005.
- [71] J.P. Kaltenbach and M. Kaschke. Frequency- and time-domain modelling of light transport in random media. *Medical Optical Tomography: Functional Imaging and Monitoring*, pages 65–86, 1993.
- [72] J.J. Kałużny, A. Szwagierek, M. Wojtkowski, B.J. Kałużny, and A. Kowalczyk. Spektralna optyczna koherentna tomografia (soct) w diagnostyce chorób plamki — doświadczenia własne. *Klinika Oczna*, 108(1–3):114–118, 2006.
- [73] T. Khan and H. Jiang. A new diffusion approximation to the radiative transfer equation for scattering media with spatially varying refractive indices. *J Opt A: Pure Appl Opt*, 5:137–141, 2003.

- [74] A.D. Kim and J.B. Keller. Light propagation in biological tissue. *J Opt Soc Am A*, 20(1):92–98, 2003.
- [75] A.D. Klose and A.H. Hielscher. Iterative reconstruction scheme for optical tomography based on the equation of radiative transfer. *Med Phys*, 26(8):1698–1707, 1999.
- [76] A.D. Klose and A.H. Hielscher. Quasi-newton methods in optical tomographic image reconstruction. *Inv Probl*, 19:387–409, 2003.
- [77] A.D. Klose, U. Netz, J. Beuthan, and A. Hielscher. Optical tomography using the time-independent equation of radiative transfer - part 1: forward model. *J Quant Spectrosc Radiat Transf*, 72:691–713, 2002.
- [78] V. Kolehmainen. *Novel Approaches to Image Reconstruction in Diffusion Tomography*. PhD thesis, University of Kuopio, Kuopio, Finland, 2001.
- [79] V. Kolehmainen, M. Vauhkonen, J.P. Kaipio, and S.R. Arridge. Recovery of piecewise constant coefficients in optical diffusion tomography. *Opt Express*, 7(13):468–480, 2000.
- [80] A. Kowalczyk and M. Wojtkowski. Tomografia optyczna. In *Materiały XXXVI zjazdu fizyków polskich. Postępy fizyki*, pages 172–175, 2002.
- [81] A. Li, Q. Zhang, J.P. Culver, E.L. Miller, and D.A. Boas. Reconstructing chromosphere concentration images directly by continuous-wave diffuse optical tomography. *Opt Lett*, 29(3):256–258, 2004.
- [82] V.D. Liseikin. *A Computational Differential Geometry Approach to Grid Generation*. Springer-Verlag, 2003.
- [83] F. Martelli, A. Sassaroli, Y. Yamada, and G. Zaccanti. Analytical approximate solutions of the time-domain diffusion equation in layered slabs. *J Opt Soc Am A*, 19(1):71–80, 2002.
- [84] L. Marti-Lopez, J. Bouza-Dominguez, J.C. Hebden, S.R. Arridge, and R.A. Martinez-Celorio. Validity conditions for the radiative transfer equation. *J Opt Soc Am A*, 20(11):2046–2056, 2003.

- [85] T.O. McBride, B.W. Pogue, S. Jiang, U.L. Österberg, and K.D. Paulsen. A parallel-detection frequency-domain near-infrared tomography system for hemoglobin imaging of the breast in vivo. *Rev Sci Instrum*, 72(3):1817–1824, 2001.
- [86] T.O. McBride, B.W. Pogue, U.L. Österberg, and K.D. Paulsen. Strategies for absolute calibration of near infrared tomographic tissue imaging. *Oxygen Transport to Tissue XXIV*, pages 85–99, 2003. In J.F. Dunn and H.M. Swartz, editors.
- [87] M.Pańczyk and J.Sikora. Concept of mapped infinite elements incorporated into boundary element method. *Przeegląd Elektrotechniczny*, (11):121–126, 2007.
- [88] I. Nissilä, K. Kotilahti, K. Fallström, and T. Katila. Instrumentation for the accurate measurement of phase and amplitude in optical tomography. *Rev Sci Instrum*, 73(9):3306–3312, 2002.
- [89] V. Ntziachristos, X. Ma, and B. Chance. Time-correlated single photon counting imager for simultaneous magnetic resonance and near-infrared mammography. *Rev Sci Instrum*, 69(12):4221–4233, 1998.
- [90] M.S. Patterson, B. Chance, and B.C. Wilson. Time resolved reflectance and transmittance for the non-invasive measurement of tissue optical properties. *Appl Opt*, 28(12):2331–2336, 1989.
- [91] M.S. Patterson, B.C. Wilson, and D.R. Wyman. The propagation of optical radiation in tissue. i: Models of radiation transport and their application. *Lasers Med Sci*, 6:155–168, 1991.
- [92] K.D. Paulsen and H. Jiang. Spatially varying optical property reconstruction using a finite element diffusion equation approximation. *Med Phys*, 22(6):691–701, 1995.
- [93] K.D. Paulsen and H. Jiang. Enhanced frequency-domain optical image reconstruction in tissues through total-variation minimization. *Appl Opt*, 35(19):3447–3458, 1996.
- [94] D. Piao, H. Dehghani, S. Jiang, S. Srinivasan, and B.W. Pogue. Instrumentation for video-rate near-infrared diffuse optical tomography. *Rev Sci Instrum*, 76:124–301, 2005.

- [95] A. Pifferi, P. Taroni, A. Torricelli, F. Messina, R. Cubeddu, and G. Danesini. Four-wavelength time-resolved optical mammography in the 680-980-nm range. *Opt Lett*, 28(13):1138–1140, 2003.
- [96] A. Pifferi, A. Torricelli, A. Bassi, P. Taroni, R. Cubeddu, H. Wabnitz, D. Grose-nick, M. Möller, R. Macdonald, J. Swartling, T. Svensson, S. Andersson-Engels, R.L.P. van Veen, H.J.C.M. Sterenborg, J.-M. Tualle, H. Lien Nghiem, S. Avrillier, M. Whelan, and H. Stamm. Performance assessment of photon migration instru-ments: Medphot protocol. *Appl Opt*, 44(11):2104–2114, 2005.
- [97] Real-Time Rendering Portal. <http://www.realtimerendering.com/intersections.html>. witryna internetowa.
- [98] P.P. Pébay (red.). *Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable*. Springer-Verlag, 2006.
- [99] J. Riley, H. Dehghani, M. Schweiger, S.R. Arridge, J. Ripoll, and M. Nieto-Vesperinas. 3d optical tomography in the presence of void regions. *Opt Express*, 7(13):462–467, 2000.
- [100] J. Ripoll, M. Nieto-Vesperinas, S.R. Arridge, and H. Dehghani. Boundary conditions for light propagation in diffusive media with nonscattering regions. *J Opt Soc Am A*, 17(9):1671–1681, 2000.
- [101] M.R. Rząsa. Pomiar kształtu pęcherzy powietrza metodą optyczną. *Pomiary Au-tomatyka Kontrola*, 46(10):2–5, 2000.
- [102] M.R. Rząsa. Pomiar parametrów przepływu dwufazowego gaz-ciecz z zastosowaniem tomografii procesowej. *Przegląd Elektrotechniczny*, (1):111–120, 2010.
- [103] M.R. Rząsa and M. Chotkowski. Koncepcja wykorzystania tomografu optycznego do celów sterowania procesem oczyszczania ścieków. *Automatyka Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie*, 8(3):429–434, 2004.
- [104] Y. Saad and M.H. Schultz. Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 7(3):856–869, 1986.

- [105] F.E.W. Schmidt, M.E. Fry, E.M.C. Hillman, J.C. Hebden, and D.T. Delby. A 32-channel time-resolved instrument for medical optical tomography. *Rev Sci Instrum*, 71:256–265, 2000.
- [106] C.H. Schmitz, D.P. Klemer, R. Hardin, M.S. Katz, Y. Pei, H.L. Graber, M.B. Levin, R.D. Levina, N.A. Franco, W.B. Solomon, and R.L. Barbour. Design and implementation of dynamic near-infrared optical tomographic imaging instrumentation for simultaneous dual-breast measurements. *Appl Opt*, 44(11):2140–2153, 2005.
- [107] C.H. Schmitz, M. Löcker, J.M. Lasker, A.H. Hielscher, and R.L. Barbour. Instrumentation for fast functional optical tomography. *Rev Sci Instrum*, 73(2):429–439, 2002.
- [108] M. Schweiger and S.R. Arridge. Direct calculation with a finite-element method of the laplace transform of the distribution of photon time of flight in tissue. *Appl Opt*, 36(34):9042–9049, 1997.
- [109] M. Schweiger and S.R. Arridge. Optimal data types in optical tomography. in information processing in medical imaging (ipmi’97 proceedings), lecture notes. *Computer Science*, 1230:71–84, 1997.
- [110] M. Schweiger and S.R. Arridge. Application of temporal filters to time resolved data in optical tomography. *Phys. Med. Biol.*, 44:1699–1717, 1999.
- [111] M. Schweiger, S.R. Arridge, M. Hiraoka, and D.T. Delpy. The finite element model for the propagation of light in scattering media: Boundary and source conditions. *Medical Physics*, 22(11):1779–1792, 1995.
- [112] A.M. Siegel, J.J.A. Marota, and D.A. Boas. Design and evaluation of a continuous-wave diffuse optical tomography system. *Opt. Express*, 4(8):287–298, 1999.
- [113] J. Sikora. *Boundary Element Method for Impedance and Optical Tomography*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2007.
- [114] J. Sikora, J. Riley, D. S.R. Arridge, A.D. Zacharopoulos, and J. Ripoll. Analysis of light propagation in diffusive media with non-scattering regions using 3d bem. In *Proceedings of XIIIth International Symposium on Theoretical Electrical Engineering ISTET’03*, pages 511–514, 2003.

- [115] J. Sikora, A. Zacharopoulos, A. Douiri, M. Schweiger and L. Horesh, S.R. Arridge, and J. Ripoll. Diffuse photon propagation in multilayered geometries. *Phys. Med. Biol.*, 51:497–516, 2006.
- [116] B.F. Smith, P.E. Bjørstad, and W.D. Gropp. *Domain Decomposition. Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 1996.
- [117] S. Srinivasan, B.W. Pogue, S. Jiang, H. Dehghani, C. Kogel, S. Soho, J.J. Gibson, T.D. Tosteson, S.P. Poplack, and K.D. Paulsen. Interpreting hemoglobin and water concentration, oxygen saturation, and scattering measured in vivo by near-infrared breast tomography. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 100(21):12349–12354, 2003.
- [118] W. Stanley. *Realisation of an Optical Tomography System Using an Amplitude Modulation Technique*. PhD thesis, University of Hertfordshire, 2003.
- [119] J. Starzyński. *Hybrydowe metody elementów skończonych w zagadnieniach optymalizacji położenia*, volume zeszyt 138, ISSN 0137–2319. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2009.
- [120] P. Targowski, B. Rouba, M Góra, L. Tymińska-Widmer, J. Marczak, and A. Kowalczyk. Optical coherence tomography in art diagnostics and restoration. *Applied Physics A: Materials Science & Processing*, 92(1):1–9, 2008.
- [121] T. Tarvainen. *Computational Methods for Light Transport in Optical Tomography*. PhD thesis, University of Kuopio, 2006.
- [122] A. Toselli and O. Widlund. *Domain Decomposition Methods — Algorithms and Theory*. Springer-Verlag, 2005.
- [123] H.C. van de Hulst. *Multiple Light Scattering: Tables, Formulas, and Applications*. Academic Press, New York, 1980.
- [124] L. Wang and S.L. Jacques. Hybrid model of monte carlo simulation and diffusion theory for light reflectance by turbid media. *J Opt Soc Am A*, 10(8):1746–1752, 1993.

- [125] T. Yates, J.C. Hebden, A. Gibson, N. Everdell, S.R. Arridge, and M. Douek. Optical tomography of the breast using a multi-channel time-resolved imager. *Phys. Med. Biol.*, 50:2503–2517, 2005.
- [126] T.D. Yates. *Time-resolved Optical Tomography for the Detection and Specification of Breast Disease*. PhD thesis, University College London, London, UK, 2005.
- [127] A. Zacharopoulos, S.R. Arridge, O. Dorn, V. Kolehmainen, and J. Sikora. 3d shape reconstructions in optical tomography using spherical harmonics and bem. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 13:1827–1836, 2006.