№ 32. Warszawa, dnia 9 sierpnia 1921 r. Tom LIX.

PRZEGLĄD TECHNICZNY

TYGODNIK POŚWIĘCONY SPRAWOM TECHNIKI I PRZEMYSŁU.

O wymulaniu rowów przydrożnych na większych spadkach.

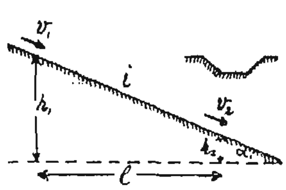
Napisał **Leon Borowski**, inż.

Wszystkim pracownikom drogowym znane są wypadki uszkodzeń rowów przydrożnych przez wymulanie w miejscowościach o większych spadkach terenu.

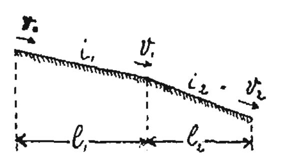
Często rowy te, obliczone według wzorów hydraulicznych (Bazin'a lub Kutter'a) bez żadnych jakby powodów zewnętrznych zaczynają się w pewnych miejscach psuć przez wymulanie; naprawa miejsc uszkodzonych zapomocą ponownego nadania rowom ich normalnego przekroju poprzecznego nie osiąga celu, ponieważ w miejscach poprawionych znowu się pojawiają uszkodzenia, spowodowane przez wymulanie.

Wobec tego przy budowie rowów przydrożnych na większych spadkach niezbędna jest ogromna ostrożność i oględność, bo pewne usterki w budowie, pociągają za sobą bardzo niepożądane skutki. Dlatego też należy wyjaśnić sam proces wymulania i zbadać te ogólne prawa, którym podlega zjawisko wymulania.

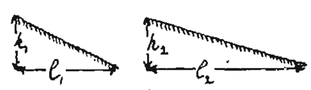
Wyobraźmy sobie, iż na pochyłej płaszczyźnie z pewnych powodów uformował się niewielki kanalik (rys. 1). Jeżeli kanałem tym, o idealnie gładkich bokach, dnie i stałym przekroju przepływa pewna ilość płynu doskonałego, to do określenia szybkości przepływu możemy zastosować wzór Bernoulli'ego:



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_2,$$

a ponieważ $p_1 = p_2$, więc

$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + h_2; \quad \text{czyli}$$

$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h_1 - h_2)}$; lecz $h_1 - h_2 = l \operatorname{tg} \alpha$, a $l \operatorname{tg} \alpha = li$, otrzymamy więc wzór:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gli}.$$

Przypuśćmy dalej, że mamy nie jedną pochyłą płaszczyznę z kanalikiem, lecz kilka (rys. 2), wtedy:

$v_1 = \sqrt{v_0^2 2g l_1 i_1}$; $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2 l_2 i_2}$; lecz $v_1^2 = v_0^2 + 2g l_1 i_1$, czyli $v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2g(l_1 i_1 + l_2 i_2)}$

i w ogólnym wypadku

$$v_n = \sqrt{v_0^2 + 2g\Sigma(l_{1-n}\, i_{1-n})} \quad \ldots \quad (\mathrm{I}).$$

To będzie ogólny wzór do określenia szybkości przepływu płynu doskonałego w zależności od spadku i długości kanału o idealnie gładkich bokach i dnie. Jasnem jest, że przy większych znaczeniach $\Sigma(l_{1-n}\, i_{1-n})$, v_n może dosięgnąć też dużych wielkości.

Stosując powyższy wzór (1) do warunków rzeczywistych, t. j. do przepływu wody w rowach w gruncie, musimy wprowadzić w nim pewne zmiany ze względu na to, iż woda nie jest płynem doskonałym i ze względu na chropowatość boków i dna kanału i nawet na małe zmiany przekroju; zmianę tę możemy wyrazić, dodając pewien spółczynnik σ dla przejścia od płynu doskonałego do wody i φ, zależny od rodzaju gruntu k, przekroju w promienia hydraulicznego R i obwodu zwilżonego P i otrzymamy

$$v = \sigma\, \varphi \sqrt{v_0^2 + 2g\Sigma(l_{1-n}\, i_{1-n})}.$$

Następnym czynnikiem, wpływającym na modyfikację wzoru I jest długość zbocza l; jeżeli poddamy obserwacji dwa rowy, dla których $h_1 = h_2$, a $l_2 > l_1$ (rys. 3), to, chociaż na podstawie wzoru Bernoulli'ego (przy identycznych innych cechach rowu) szybkości v_1 i v_2 w końcu obu rowów powinny być jednakowe, ponieważ $l_1 i_1 = l_2 i_2$, w rzeczywistości jednak szybkość v_2 będzie mniejszą od v_1, bo zwiększanie się szybkości znajduje się w stosunku odwrotnym do ilości uderzeń wody o nierówności dna i boków kanału; zależność tę od długości l, możemy ująć przez nowy spółczynnik, zależny od l, w postaci δ i dlatego

$$v = \sigma \,.\, \varphi \,.\, \delta \,.\, \sqrt{v_0^2 + 2g\Sigma(l_{1-n}\, i_{1-n})}.$$

Jasnem jest, że każdy z tych spółczynników jest < 1, a przez to i iloczyn spółczynników

$$A = \sigma \,.\, \varphi \,.\, \delta < 1$$

i wtedy wzór (I) przeistacza się w

$$v = A\sqrt{v_0^2 + 2g\Sigma(l_{1-n}\, i_{1-n})} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II}),$$

a ogólny spółczynnik A jest funkcją rodzaju gruntu (k), przekroju poprzecznego w, zwilżonego obwodu P, promienia hydraulicznego R i długości rowu l, t. zn.

$$A = f(k, w, P, R, l).$$

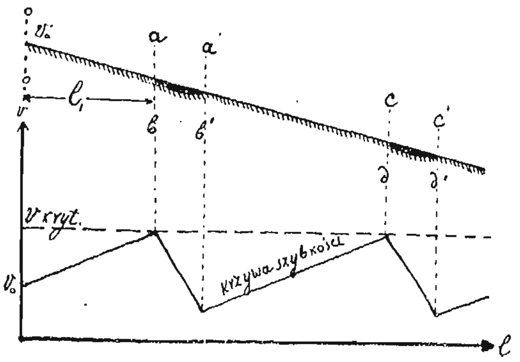
Spółczynnik A dotychczas nie dał się obliczyć teoretycznie i można oznaczyć go tylko drogą doświadczalną.

Zapomocą rozumowań poprzednich chciałem wykazać, że przepływ wody w rowach: 1) o pewnej ilości przepływającej wody, 2) o pewnym spadku dna i 3) o niezbyt zmiennym przekroju poprzecznym—nie będzie się odbywał ze stałą szybkością na całej długości przepływu, lecz, że szybkość ta stopniowo wzrasta ku dołowi.

Zwróciłem na to uwagę, ażeby wykazać, że wzory Bazin'a lub Kutter'a, wyrażające zapewne najzupełniej ściśle prawa zmian szybkości w rzekach i kanałach, gdzie spadki są bardzo małe i tarcie pochłania całe przyspieszenie, nie zupełnie się nadają do obliczeń rowów przydrożnych, bo wzory wyżej wymienione dają stałe szybkości (przy stałym R i i), w rzeczywistości zaś w rowach przydrożnych mamy do czynienia z szybkościami wzrastającemi.

Jeżeli obliczymy rów przydrożny według wzoru Bazin'a $v = C\sqrt{Ri}$, to otrzymamy takie wyniki: do pewnego miejsca $a-b$ (rys. 4) rów nie podlega wymuleniu, od tego miejsca zaś ($a-b$) zaczyna się wymulanie i to nie całej długości, niżej leżącej, lecz w pewnych odstępach. Tu możliwy jest zarzut, że wszystkie rowy, które wogóle były obliczane, obliczano według wzoru $v = C\sqrt{Ri}$, nie wszystkie jednak ulegają wymulaniu.

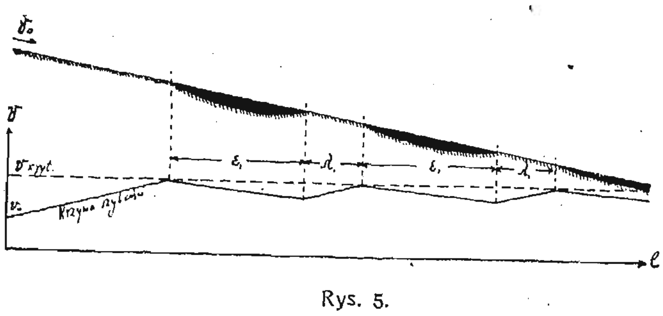
Zarzut taki łatwo odeprzeć: dopóki l nie osiągnęło znaczenia l_1, to jest do miejsca $a-b$, szybkość jest mniejsza od szybkości wymulającej dany grunt i wymulanie nie zachodzi, gdy zaś $l = l_1$, powstaje szybkość „krytyczna" (wymulająca dany grunt) i wymulanie się rozpoczyna; czyli, że rowy, obliczone według wzoru $v = C\sqrt{Ri}$, nie ulegają wymulaniu wtedy, gdy długość rowu jest mniejsza od l_1 (l_1 nazwiemy „krytyczną" długością) i można być pewnym; że jeżelibyśmy przedłużyli istniejący rów z takim samym spadkiem, to gdzieś niżej (przy osiągnięciu długości „krytycznej") rozpoczęłoby się wymulanie.



Rys. 4.

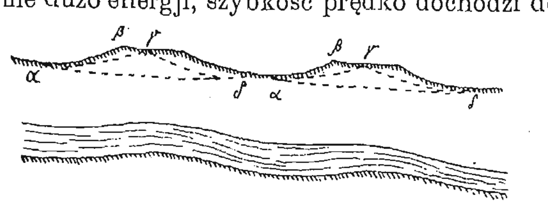
Przypuśćmy, że w miejscu 0—0 (rys. 4) rowu szybkość przepływu wody wynosi v_0 a w miejscu $a—b$ szybkość ta już dochodzi do wielkości „szybkości krytycznej"; w miejscu $a—b$ zacznie się wymulanie, lecz szybkość zaraz się zmniejszy, ponieważ pewna ilość żywej siły wody musi być zużytą na odrywanie cząstek gruntu zapomocą tarcia, uderzeń, to jest na sam proces wymulania; w tem miejscu wskutek wymulania zwiększa się też przekrój poprzeczny rowku, co też wpływa na zmniejszenie szybkości; tak więc w przekroju a' b' szybkość stanie się mniejszą od $v_{kryt.}$ i wymulanie w tym ostatnim przekroju ustanie; lecz dalej znowu szybkość zacznie wzrastać i w pewnym przekroju, $C—d$, położonym niżej, dosięgnie wielkości $v_{kryt.}$, tu znowu się zacznie wymulanie, zmniejszenie szybkości i t. d.

To jest ogólny obraz schematyczny wymulania, lecz w każdym poszczególnym wypadku, w zależności od gruntu, obraz ten zmienia się, ponieważ dla różnych gruntów „krytyczne" szybkości są różne.



Rys. 5.

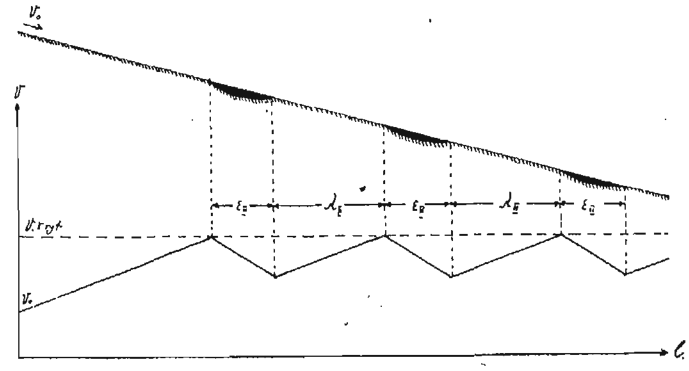
Na miękkim gruncie (naprzykład drobny piasek), energja wody potrzebna do odrywania cząstek gruntu jest mała i z tego powodu zmniejszanie szybkości będzie stopniowe i nie wielkie; z tego wynika, że odległości ε_1 (rys. 5) będą dość duże w porównaniu do λ_1, ponieważ na wymulanie zatraca się nie dużo energji, szybkość prędko dochodzi do $v_{kryt.}$



Rys. 6 i 7.

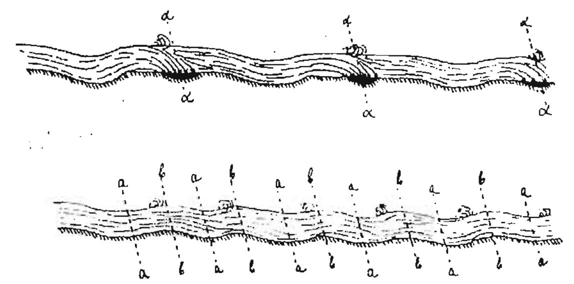
i dlatego odległość λ_1 nie bywa wielka. Dalej z powodu miękkości gruntu muszą zajść następujące zjawiska: części $\alpha\,\beta$ (rys. 6) są narażone na uderzenia i z powodu małej zwięzłości gruntu odłupują się w płaszczyznach $\alpha\,.\,\gamma$, prócz tego z powodu miękkości gruntu i tarcia wody o podłoże zachodzi odłupywanie się gruntu w płaszczyznach $\gamma\,.\,\delta$; w końcu następuje ogólne wymulenie w płaszczyźnie $\alpha\,\delta$ i dno staje się znowu równe; lecz dalej znowu tworzą się zagłębienia, znowu się wyrównują i t. d., a wynikiem tego jest stałe obniżanie się dna rowu; w miękkim gruncie głębokość wgłębień jest bardzo mała w porównaniu do długości i dno rowu otrzymuje się z długiemi, niegłębokiemi falami, jak to widać na rys. 7; prąd wody jest spokojny, wymulanie zwiększa się stopniowo i cały proces ma charakter spokojny nie burzliwy.

Na gruncie twardszym (czarnoziem, less) zjawisko wymulania ma nieco inne cechy; na odrywanie cząstek



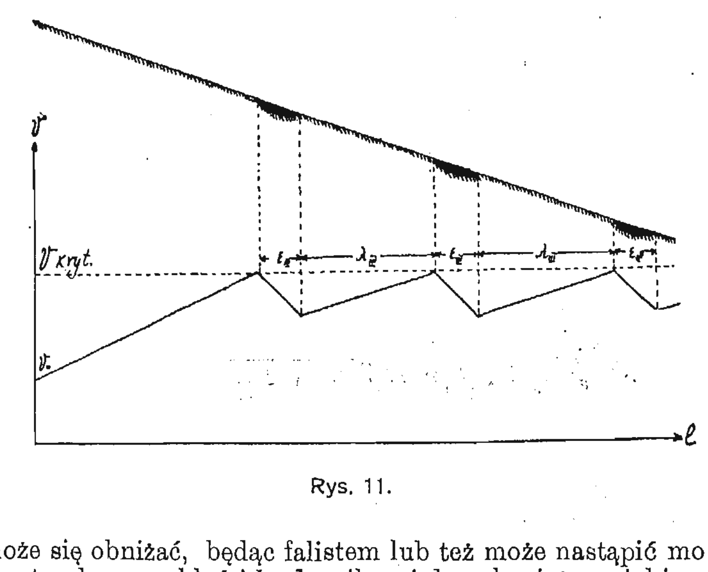
Rys. 8.

gruntu zużywa się daleko więcej energji, odcinek wymulania (rys. 8) jest więc mniejszy; długość $\varepsilon_{II} < \varepsilon_I$, a $\lambda_{II} > \lambda_I$ i dlatego $\frac{\varepsilon_{II}}{\lambda_{II}} < \frac{\varepsilon_I}{\lambda_I}$; tu grunt nie jest bardzo twardy i zagłębienia krótsze i nie bardzo głębokie, wobec czego woda, nie mogąc po wyjściu z wgłębienia odrazu dostosować się do formy dna, wyskakuje z tych zagłębień i w przekroju $\alpha\alpha$ (rys. 9) uderza dość silnie o dno, co powoduje formowanie



Rys. 9 i 10.

się tu zagłębień wtórnych i t. p.; dno jest faliste o krótszych falach, niż w poprzednim wypadku i wygląda jak na rys. 10; prąd wody jest burzliwszy; w miejscach utworzenia się wgłębień zjawiają się od uderzeń wiry; stopniowo od uderzeń wody i od tarcia o wystające części gruntu, zagłębienia $a-a$ pogłębiają się a wypukłości $b—b$ obniżają się i dno

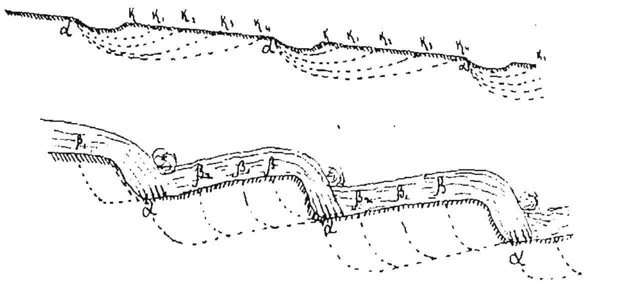


Rys. 11.

może się obniżać, będąc falistem lub też może nastąpić moment, gdy wypukłości $b—b$ znikną i dno chociaż pogłębione będzie miało powierzchnię równą; stan taki będzie oczywiście trwał tylko chwilę, albowiem znowu się zjawią krytyczne szybkości, wgłębienia i t. p.

Na gruncie twardym (zwięzła, twarda glina) zjawisko wymulania znowu się nieco zmieni. Wymulanie takiego gruntu może zachodzić przy szybkościach większych niż w powyższych dwóch wypadkach i energja wody potrzebna do wymulania też jest większa; z powodu zwięzłości gruntu i trudności odrywania jego cząstek, energja wody bardzo szybko zużywa się na pracę wymulania i stosunek $\frac{\varepsilon_{III}}{\lambda_{III}}$ jest bardzo mały (rys. 11).

Zjawiska w danym wypadku różnią się od zjawisk wyżej opisanych: ponieważ wgłębienie ε_{III} jest małe, więc woda nie może dostosować się do niego i nie przylega (oczywiście po uformowaniu się wgłębienia) do dna wgłębienia, lecz spada do niego i uderza w części αk (rys. 12), z tego powodu powierzchnia αk przesuwa się stopniowo do αk_1, αk_2 i t. d., aż nakoniec otrzymamy wgłębienie αk_n; co się jednak



Rys. 12 i 13.

tyczy miejsca α (rys. 12), to tu proces odrywania cząstek odbywa się wolniej, ponieważ twardy grunt trudniej się poddaje wymulaniu przez tarcie, niż przez uderzenia; po niejakim czasie tworzą się maleńkie progi—kaskady (rys. 13); prąd wody jest dość burzliwy, z małymi wodospadami; wskutek uderzeń dół kaskady α pogłębia się, formują się wiry, które jeszcze zwiększają te wgłębienia; stopniowo w miarę zwiększania się wgłębień α, ścianki $\beta\alpha$ odłupują się, co powodują pogłębianie się całego kanaliku lub rowu.

(D. n.)

Zagadnienie trzech ciał.

Podał inż. **Aleksander Poznański.**

I. *Roberto Marcilongo*, profesor uniwersytetu w Neapolu, opracował bardzo ciekawy referat o zagadnieniu, jakie już od czasu Newton'a zajmowało umysły wszystkich niemal wielkich matematyków i fizyków. Wywody jego są niewątpliwie godne uwagi i postaramy się zapoznać z nimi czytelników.

W końcu wieku XVIII, *Montucla*, zanim podjął się trudnego zadania opracowania głównych linji wytycznych historji nauk matematycznych, dążył do zreasumowania historji bezowocnych usiłowań, czynionych niejednokrotnie celem rozwiązania dwóch słynnych zagadnień, a mianowicie trysekcji kąta i kwadratury koła.

Historja tych usiłowań, podejmowana przez wielu poważnych badaczy historji matematyki, aczkolwiek wielokrotnie wykazywała, że i najpoważniejsi matematycy popełniali błąd zasadniczy, posiada jednakże stronę bardzo interesującą i pouczającą. Pomimo bowiem błędów popełnianych badania te doprowadziły do powolnego i żmudnego, lecz stałego rozwoju metod, które później miały umożliwić matematykom wiekopomne odkrycia wieku XVII, następnie zaś udowodnić zupełną niewykonalność rozwiązania tych słynnych zagadnień zapomocą zwykłych metod geometrji elementarnej, zwłaszcza zaś absolutną niemożliwość rozwiązania problematu kwadratury koła nawet przy pomocy najsubtelniejszych metod współczesnej analizy matematycznej.

O ile więcej pouczająco i interesująco przedstawia się całość innego słynnego zagadnienia, stworzonego i wysuniętego do rozwiązania na podstawie filozofji *Newton'a*, jako teorja ruchu księżyca, na pierwszy rzut oka tak prosta i jednocześnie kapryśna, która przez *Clairaut'a* została mianowaną *„zagadnieniem trzech ciał"*.

Zagadnienie to należy do więcej celowych, jako dotyczące jednej z najpiękniejszych kwestji filozofji przyrody i ze względu na to, że usiłowania czynione przez półtora wieku przez wielkich matematyków i astronomów przyczyniły się w znacznym stopniu do wzbogacenia i przekształcenia całej mechaniki ciał niebieskich, stworzyły nowe metody badania ruchu ciał niebieskich i nadały impuls do stworzenia nowych teorji pomocniczych analizy i mechaniki, a bardziej użyteczne jeszcze dlatego, że osiągnięte wyniki znalazły różne zastosowania praktyczne.

II. Chcąc mianowicie studjować ruch księżyca pod wpływem ciążenia słońca i ziemi, i wyobrażając sobie te ciała jako zredukowane na podstawie teorji Newtona do ich środków masy, w których odnośne ich masy sąześrodkowane, dochodzimy do klasycznego zagadnienia określenia ruchu trzech ciał materjalnych, przyciągających się na podstawie prawa ciążenia, to jest proporcjonalnie do mas i w stosunku odwrotnym do kwadratów odległości.

Prawa *Keplera* i pewne ich konsekwencje geometryczne pozwoliły już na rozwiązanie zagadnienia prostszego dwóch ciał, jak np. ruchu planety naokoło słońca bez uwzględnienia perturbacji innych ciał niebieskich. Przejście napozór tak proste od dwóch ciał do trzech napotykało tak wielkie trudności, że z pewnością nie były one w całej swej pełni znane pierwszym badaczom tego zagadnienia.

Zagadnienie przyciągania ciał elipsoidalnych, rozwiązane tylko w wypadkach specjalnych, przedstawia zarówno przykład anologiczny; rozwiązane z łatwością w wypadku, gdy punkt przyciągany znajduje się wewnątrz lub na powierzchni ciała przyciągającego, przedstawiało trudności poważne dla punktu zewnętrznego; te wszakże po licznych usiłowaniach zostały przezwyciężone.

Drugie prawo ruchu, to jest prawo proporcjonalności siły przyśpieszenia, pozwala na postawienie zagadnienia w postaci równania; wystarcza wyrazić, że dla każdego z trzech ciał wieloraz masy przez przyśpieszenie jest równym wypadkowej przyciągania (*Newtona*), jakiemu to ciało podlega pod wpływem pozostałych dwóch innych ciał.

Chodziło o określenie pozycji trzech ciał, jak wyznaczenie ich współrzędnych w stosunku do określonego odnośnego układu, ich szybkości dla każdej wartości czasu, lub też, wyrażając sie krócej, o zcałkowanie rownań różniczkowych zagadnienia.

Równania te zestawione w połowie r. 1700 przez *Clairaut'a* i *Eulera* opierały się wszelkim usiłowaniom wielkich matematyków, a *Clairaut*, zniechęcony już, i z pewnym wyrazem niezaufania, zawołał: „Intégre maintenant qui pourra".

I rzeczywiście, stosunki, które analitycznie tłomaczą najprostsze własności tych trzech ciał, t. j. że środek masy układu jest obdarzony ruchem prostolinijnym i równomiernym, własności powierzchni i wreszcie stałość energji całkowitej układu (w całości 10 stosunków), aż nadto wystarczających do rozwiązania zagadnienia dwóch ciał, nie wystarczają już dla wypadku *trzech ciał*.

Należało zatem wynaleść czynnik nowy; zaś tego właśnie nie zdołali uczynić ani *Clairaut* ani *Euler*, ani też cała plejada ich następców.

Postępy analizy dostatecznie wyjaśniły z wielu punktów widzenia przyczyny tych niepowodzeń. Wystarczy wymienić następującą: że równania zagadnienia tracą wszelkie znaczenie w wypadku, teoretycznie i fizycznie możliwym, gdy odległość dwóch z pomiędzy trzech ciał dąży do zera; zachodzi to w razie kolizji zwykłej, a również w razie kolizji ogólnej. Równania, stosując wyrażenie współczesnę, nie są prawidłowe, a zatem współrzędne punktów trzech ciał nie są funkcjami równomiernemi czasu.

Skoro usiłowania rozwiązania ogólnego okazały się płonnemi, rozpoczęto natychmiast poszukiwania celem rozwiązania zagadnień bardziej szczegółowych, w których odźwierciadlały się w przybliżeniu warunki fizyczne naszego układu planetarnego, jak naprzykład ruchu księżyca, podporządkowanego działaniu ziemi i słońca.

Również i w tym wypadku po raz pierwszy drogi wytyczne były wskazane przez *Newtona* i ogłoszone w jego „Principia" w r. 1713. Podejmuje ten problemat później *Clairaut*, który właśnie zajmował się określeniem przybliżonym ruchu przeciętnego punktu odziemnego księżyca. Teorja wszakże nie była zgodną ze spostrzeżeniami — pierwsze obliczenia tego ruchu wykazały wartość będącą połową wartości prawdziwej. *Clairaut*, mając zbyt wielkie zaufanie do swych obliczeń, chciał usprawiedliwić tak wielką różnicę z początku, zmieniając, ni mniej ni więcej, samo prawo ciążenia przez dodanie czynnika odwrotnie proporcjonalnego do czwartego stopnia odległości. Dyskusja z *Buffonem* doprowadziła do odpowiedzi znacznie prostszej. Osiągnięte przybliżenie nie było wystarczające; posunięte nieco dalej to przybliżenie, teorja i spostrzeżenie znalazły się w dostatecznej zgodzie.

Teorja księżyca była udoskonalona, o ile na to pozwalał stan analizy, przez *Clairaut'a*, następnie zaś także przez *D'Alembert'a*.

Euler, jakkolwiek kierował się tylko warunkami ogólnemi, dążył do rozwiązania zagadnienia w przypuszczeniu, że trzy ciała A, B, C, pozostają stale zszeregowane. Zarówno i w tym wypadku, daleko prostszym od ogólnego, Euler nie był w stanie znaleść rozwiązania w sensie powyżej wyłuszczonym. Przyjąwszy, że środek masy trzech ciał jest właśnie stałym (i to nie zmienia ogólności zagadnienia), można obrać odległość trzeciego ciała od pierwszego w taki sposób, że B i C poruszają się naokoło pierwszego zwykłym ruchem keplerowskim, opisując więc przekroje stożkowe mające swe ognisko w A.

Chodzi tu zatem o odkrycie (1770) pierwszego i jednego z najprostszych *rozwiązań* tak zwanych *perjodycznych*; a zatem, będąc dane dwa ciała A i B, trzecie może przyjąć trzy różne położenia, tak że następuje sytuacja wyżej wzmiankowana; jedno z tych położeń znajdzie się poza B, drugie między A i B, a trzecie poza A. Punkty te, które nabyły wielkiej wagi we współczesnych poszukiwaniach, zostały nazwane *środkami równowagi*.

Położenie ich z łatwością daje się obliczyć. Tak np. dla ciała pierwszego — najwięcej przeważającego — słońca, drugiego — jednej z planet, trzeciego — małego asteroidu, pierwsze dwa środki równowagi leżą po stronach przeciwległych planety i w przybliżeniu na tej samej odległości; trzeci — po stronie przeciwległej słońca i na odległości prawie jednakowej od słońca do planety.

W kwestji tych rozwiązań dokładnych i perjodycznych *Laplace* zauważył, że gdyby na początku istnienia naszego systemu planetarnego Ziemia i Księżyc były położone na linji prostej ze Słońcem i na odległości od Słońca w stosunku 0,01 i posiadały szybkości równoległe i proporcjonalne do odległości, Księżyc znajdowałby się zawsze w opozycji ze Słońcem; przy zachodzie Słońca zatem natychmiast wschodziłby Księżyc, i Księżyc nigdyby nie ulegał zaćmieniu. Lecz gdyby nawet taka okoliczność szczęśliwa się nadarzyła, posiadałaby ona zapewne trwałość krótką i rzeczywiście *Liouville*, a potem *Gyldén*, wykazali, że taka konfiguracja nie jest stałą—nieznaczna perturbacja mogłaby zniweczyć piękną harmonję ruchów i stałość przerwanych pełni księżycowych.

Teorja tych rozwiązań eulerowskich znalazła inne piękne zastosowanie do zjawiska pojawienia się słabego światła w części nieba przeciwległej do miejsca zajmowanego przez Słońce (anty — słońce), przedłużonej w kierunku ekliptyki; zjawisko słusznie nazwane „Gegenschein", stopniowo i niezależnie odkryte przez *Brorsen'a* (1855), przez *Backhouse'a* (1867) i przez słynnego *Barnard'a* (1875). *Gyldén* a następnie *Moulton* starali się wyjaśnić to zjawisko naiwną *teorją meteoryczną*, która właśnie przypisuje takie zjawisko rojowisku drobnych ciał, znajdujących się jakoby w pobliżu trzeciego środka równowagi pary Ziemia—Słońce.

Lagrange'owi należy się zasługa odkrycia drugiego rozwiązania dokładnego i perjodycznego naszego zagadnienia. Z okazji nagrody wyznaczonej na konkursie Akademji Paryskiej (1772) napisał on na temat zagadnienia trzech ciał jeden ze swych najwspanialszych memorjałów, w którym jest osiągnięta *największa redukcja w porządku układu równań różniczkowych zagadnienia*. Poszukując w następstwie szereg wypadków, w których można było urzeczywistnić ściśle całkowanie, dających się w sposób prosty scharakteryzować okolicznością, że punkt spotkania się sił przyciągania pojedyńczych mas schodzi się ze środkiem tychże mas, Lagrange znalazł rozwiązania współrzędne z eulerowskiemi i inne nowe, w którem trzy ciała są wierzchołkami trójkąta równobocznego i opisują perjodycznie stożki, mające ognisko we wspólnym środku masy trzech ciał.

Lagrange uważał tę część swych poszukiwań jako „une pure curiosité". Natomiast w poszukiwaniach współczesnych okazała się ona nie mniej owocną od słynnych memorjałów i wywołała nadzwyczajne zainteresowanie skutkiem odkrycia tak zwanej grupy trojańskiej. Niespełna 10 lat temu były właśnie odkryte 4 małe planety: Achilles (588), Patrokles (617), Hektor (624), Nestor (689), z których każda stanowi ze Słońcem i Jowiszem w przybliżeniu konfigurację *Lagrange'a*,

III. Do tych niewielu postępów redukowały się zdobycze na polu słynnego zagadnienia, dokonane przez wielkich analityków w. XVIII. W braku ścisłego rozwiązania astronomowie zadawalniali się rozwiązaniami przybliżonemi, mogącemi, przynajmniej dla ograniczonych odstępów czasu, odźwierciadlać zjawiska niebieskie i wyjaśniać zagadnienia teorji perturbacji.

Badajmy ruch względny jednego z dwóch ciał w stosunku do drugiego (ruch (keplerowski) — obecność ciała trzeciego zakłóca ten ruch; elipsa *Keplera* przestaje być stałą, jak również nie pozostają stałemi jej elementy. Po zaniechaniu metody szeregów ułożonych według pełnych potęg rosnących czasu, usilowano od czasu *Newcomb'a*, *Lindstedt'a* i *Bohlin'a* rozwinięcia przez szeregi trygonometryczne, które okazały się bardzo owocnemi w wielu działach fizyki. Lecz w roku 1882 *Poincaré* dokonał nadzwyczajnego odkrycia, a mianowicie, że szeregi zastosowane nie zdążają równomiernie do jednej wartości, natomiast ich elementy zmniejszają się szybko, lecz od pewnego elementu w następstwie stale coraz więcej rosną. Jeżeli zatem dla celów praktycznych badamy wartości ograniczone czasu i zatrzymujemy się przy pierwszych elementach szeregu lub też zatrzymamy się znacznie wcześniej, aniżeli te elementy zaprzestały się zmniejszać, wówczas szeregi mogą dać wyniki praktycznie zbiegające się z otrzymanemi ze spostrzeżenia, pomimo że są one rozbieżne.

Stąd konsekwentnie można wywnioskować, że badanie nie prowadzi do żadnego rezultatu decydującego, o ile to dotyczy naszego układu planetarnego, i że zatem jest bezwzględnie koniecznem dla celów astronomicznych, aby szeregi zastosowane były zbieżne w sensie ogólnie rozumianym przez analityków. Wystarcza, aby popełniony błąd, zatrzymując się przy pewnym elemencie szeregu, pozostawał przez pewien czas mniejszym od określonej ilości dostatecznie małej.

Co się zaś tyczy rozwiązania ogólnego zagadnienia w sensie ściśle matematycznym, analitycy wieku ubiegłego stosunkowo niewiele dodali do tego co przedtem uczynili *Euler* i *Lagrange*. Nadano coprawda większą prostotę i elegancję wynikom *Lagrange'a*; zastosowano metody przybliżenia; *Bruns'owi* udało się wykazać, że poza 10 stosunkami wyprowadzonemi z zasad ogólnych mechaniki nie egzystują inne algebraiczne; lecz rozwiązanie pozostawało zawsze jednem z najgorętszych życzeń analityków.

Rozwiązanie idealne każdego zagadnienia mechaniki, fizyki, astronomji należy do tych, które wyrażają niewiadome zagadnienia, jak np. współrzędne, szybkości — w sensie ogólnym Maxwell'owskim — zapomocą znanych funkcji zmiennej niezależnej, którą zazwyczaj jest czas. Ponieważ zaś pole funkcji znanych, dla których zapomocą tablic liczbowych było możliwem przejście do rachunku rzeczywistego elementów znanych, jest bardzo ograniczone, należało przeto uciec się do użycia rzędów nieskończonych, o ile są zbieżne w granicach danych. W wypadku zagadnienia trzech ciał, równania nie będąc jednokształtnemi, nie było możliwem wyrazić niewiadome, jak współrzędne trzech ciał, zapomocą szeregów nieskończonych, zbieżnych dla jakiejkolwiek wartości czasu. Trudność tę należało obejść albo, uporządkowywując równania zagadnienia, albo też w pełnej zgodności z genjalnem twierdzeniem *Poincaré'go* o funkcjach wielokształtnych, wyrażając współrzędne i czas zapomocą funkcji jednokształtnych zmiennej pomocniczej, nazwanej przez *Cauchy'ego* „clef" zagadnienia. Uporządkowanie równań było już z powodzeniem wykonane dla wypadku poszczególnego—w tak zwanem zagadnieniu ograniczonem — przez astronoma duńskiego *N. T. Thiele* (1895).

Równania zagadnienia przestają być jednokształtnymi w wypadku zderzenia; zachodzi pytanie jakie są warunki zderzenia ?

W r. 1896 *Painlevé* zdołał dowieść ze wszelką ścisłością, że ruch trzech ciał jest równomiernym w każdym odstępie czasu, w którym nie zachodzą zderzenia, i że równomierność ta ustaje dopiero z chwilą, gdy ciała podlegają kolizji ogólnej, lub też gdy tylko dwa z nich się zderzają, podczas gdy ich odległości od trzeciego ciała zdążają do granicy określonej. Badanie warunków analitycznych zderzenia było przedmiotem prac *Levi Civita, Bisconcinie'go* a ostatnio *Armellini'ego.*

Po rozwiązaniu tej kwestji wstępnej pozostawało jeszcze wyrazić funkcje niewiadome (współrzędne, szybkości) i zmienną niezależną (czas), zapomocą szeregów postępowych według potęg rosnących innej zmiennej τ, zbieżnych dla τ zawartego w odstępie czasu skończonym od -1 do $+1$; stosunek między zmienną τ i czasem jest tego rodzaju, że podczas gdy pierwsza zmienia się w granicach wyżej oznaczonych, drugi zmienia swe wartości od nieskończenie wielkich ujemnych do wartości nieskończenie wielkich dodatnich, i to niezależnie od jakości ewentualnych zderzeń trzech ciał.

Otóż astronom *Sundman* z Helsingforsu zdołał tego dokonać w r. 1909 w przypuszczeniu, że zderzenia są proste lub też, co na jedno wychodzi, że stała powierzchni jest różną od zera. Dowiódł on ze ścisłością, że współrzedne, odległości trzech ciał i czas są funkcjami innej zmiennej na całym odcinku zawartym między dwiema prostemi równoległemi i symetrycznemi w stosunku do osi rzeczywistej i do wysokości wyznaczonej. A zatem szeregi Sundman'a, których spółczyniki kalkulują się w sposób prosty z danych początkowych, charakteryzują ruch dla *jakiejkolwiek wartości czasu i dla jakiejkolwiek ilości zdarzeń.*

Krok uczyniony przez *Sundmana* — aczkolwiek pewne wyniki jego były poprzedzone przez Weierstrassa, który jednakże nic nie publikował—posiada wartość teoretyczną bardzo wielką i słusznie prace jego otrzymały premjum Akademji Paryskiej.

Nie można orzec jeszcze, że wynik ten jest ostatecznym przez wzgląd na inne zagadnienia dotyczące zastosowań astronomicznych i na teorję orbit perjodycznych.

IV. Studjum bardziej wyczerpujące, posiadające wielką wagę ze względu na różne zastosowania i obfitujące w bogate żniwo wyników dla mechaniki i analizy, było dokonane nad tak zwanem *zagadnieniem ograniczonem trzech ciał*—jest ono związane z imieniem *Poincaré'go.* Przyjmuje on, że dwie masy skończone posiadają ruch obrotowy rownomierny naokoło swego wspólnego środka masy, uważanego za nieruchomy, opisując dwa koła; są one przyciągane przez inną małą planetę lub asteroid (stąd też nazwa *zagadnienia asteroidowego*), których masa jest znikomą w stosunku do mas dwóch ciał, i jest taką, że nie oddziaływa prawie na ich ruch. Jako przykład służy wypadek, gdy planeta (mała) znajduje się pod wpływem przyciągań Jowisza i Słońca, o ile się pominie pochylenie i ekscentryczność pierwszego w stosunku do Słońca. W wypadku, gdy ruch planetoidu odbywa się na płaszczyźnie dwóch kół i pożądanem jest badanie ruchu jego w stosunku do dwóch planet większych, widoczną była użyteczność dyskusji wstępnej o *krzywych krytycznych,* to jest tych krzywych, na których szybkość względna planetoidu jest równą zeru, zależnych od wartości stałej energji względnej. Dyskusja rozpoczęta przez *Hill'a,* została ze ścisłością ukończoną przez *G. Darwina.* Z łatwością można sobie wyobrazić ich konfigurację. Poczyna się w istocie od wypadku, w którym krzywa składa się z trzech owali, prawie okrągłych, jednego α—naokoło ciała pierwszego S, drugiego β—naokoło drugiego J i wreszcie trzeciego γ—pełniejszego, który obejmuje pierwsze dwa owale; następnie, ze zmniejszaniem się stałej, dwa owale α i β rozszerzają się i łączą w środku równowagi między S i J, formując jedną jedyną krzywą w postaci ósemki. Dwa owale α i β, tak połączone w postaci ósemki, przechodzą w formę klepsydry i w końcu dążą do połączenia się z owalem zewnętrznym γ w jednym z innych środków równowagi, formując jeszcze jedyną krzywą ciągłą, która stopniowo przyjmuje kształt podkowy; zmniejsza się ona stale i w końcu redukuje się do dwóch wierzchołków trójkątów równobocznych, opisanych na S J, którym odpowiadają rozwiązania *Lagrange'a.*

Jeżeli planetoid znajduje się na początku ruchu w granicach owalu, nie może nigdy wyjść z granic tego pola; ruch jego posiada tedy pewną trwałość. Stąd wypływa wielkie zainteresowanie, jakie budzi badanie krzywych krytycznych.

Hill pierwszy w r. 1877 zdołał znaleść dla zagadnienia ograniczonego rozwiązanie perjodyczne w wypadku, gdy planetoid znajduje się w pobliżu jednej z mas: rozwiązanie daleko więcej ogólne i ważne (jako zagadnienie specjalne) od zagadnień eulerowskich i *Lagrange'a.* Uczynił z niego piękne zastosowanie do poszukiwania jednej z nierówności biegu księżyca, a mianowicie do poszukiwania pośpiesznego stosunku ruchu przeciętnego perigeum księżyca do ruchu przeciętnego gwiaździstego.

Najpotężniejszy impuls wszakże dla teorji rozwiązań perjodycznych zagadnienia ograniczonego, z punktu widzenia ogólnego i obejmującego wszystkie kwestje mechaniki analitycznej, był nadany przez *Poincaré'go* w memorjale, który otrzymał w r. 1883 premjum króla szwedzkiego Oskara, a następnie w klasycznych „Méthodes nouvelles", ogłoszonych drukiem między r. 1892 a 1899.

Obszerność tematu nie pozwala, niestety, na roztrząsanie wielu szczegółów; wystarczy zaznaczenie, że stworzył on warunki do rozwiązania perjodycznego dla wartości bardzo małych masy planetoidu, gdy jest wiadomem, że istnieje ona dla wartości masy równej zeru.

Pole tak bogate i owocne, którego wielkie bruzdy wyznaczył *Poincaré,* było przedmiotem długich i uciążliwych kalkulacji, z początku *Haardtl'a* i *Burrau,* a następnie *G. Darwina,* w ostatnich zaś czasach dwóch uczonych amerykańskich, *Moulton'a* i *Birkhoff'a.*

Burrau pierwszy studjował orbity w okolicach środków równowagi, i rozważał granice trajektorji wychodzących z jednej z mas, zwanych obecnie granicami satelitów wahających się. *G. Darwin* po wieloletniej pracy mógł osiągnąć poważne sprawdziany liczbowe wielu własności znalezionych przez *Poincaré'go;* stwierdził istnienie licznych rodzajów orbit perjodycznych stałych i niestałych, oddzielonych krzywemi ejekcji i istnienie pewnych okolic niestałości, która zdaje się wyjaśniać prawo Bode'go i miejsca próżne jakie przedstawia szereg małych planet.

Temat w całości ponownie podjętym został przez *Moulton'a* i jego uczni, którzy zaniedbawszy w zupełności stosowania metod mechanicznych i liczbowych, osiągnęli wyniki nowe i ściśle ustanowione. Ostatnie prace *Birkhoffa* ustaliły ostatecznie istnienie orbit perjodycznych dla wartości mas oddalonych od zera, o ile tylko ruch planetoidu jest ograniczony do wnętrza jednego z owali o szybkości równej zeru.

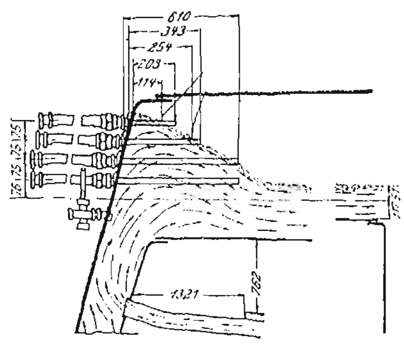
Lecz temat rozwiązań perjodycznych, który dla zagadnienia ogólnego trzech ciał jest zaledwie rozpoczęty, daleki jest od wyczerpania.

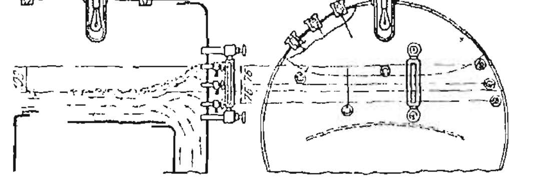
W konkluzji zatem można orzec, że twierdzenie *Eulera,* jakoby z rozwiązania różnych kwestji związanych z zagadnieniem trzech ciał, analiza miała osiągnąć wyniki większej wagi aniżeli astronomja, i że rozwiązania obmyślane nie dorzuciły światła do najbardziej wybitnych zastosowań praktycznych, nie da się obronić.

Również nieścisłe jest twierdzenie, że według przewidywań *Poincaré'go,* rozwiązanie kompletne wymaga instrumentów analitycznych zupełnie różnych od tych, jakie posiadamy, i nieskończenie więcej skomplikowanych. Skądinąd natomiast jest prawdą, że cykl tych poszukiwań, nawet przy środkach jakiemi obecnie rozporządzamy, nie jest jeszcze definitywnie zamknięty. Dla analityków i astronomów naszego wieku rozwiązanie *Sundmana,* zagadnienie ogólne orbit perjodycznych, otwierają obszerne pole dla nowych a owocnych obiecujących badań.

WIADOMOŚCI TECHNICZNE.

Rzeczywisty a pozorny poziom wody w kotłach parowozów. Zarząd kolei żelaznych w Stanach Zjednoczonych A. P. dokonał szeregu doświadczeń na typowym parowozie 1 E 1 towarowym co do obiegu wody w kotle. W tym celu zaopatrzono tylną ściankę paleniska w kilka szkieł wodowskazowych i kurków, w tej liczbie w 4 kurki probiercze z rurkami, które można było dowolnie zagłębiać do wnętrza kotła, jak to jest widoczne na załączonym rysunku. Oprócz tego w kotle parowozu do manewrów stacyjnych umieszczono wziery, zaś wnętrze kotła oświetlono przy pomocy lampek elektrycznych (p. załączony przekrój i widok). Pomiędzy skrzynką regulatora a wydmuchem urządzono połączenie bezpośrednie, przez co odparowywanie dawało się dowolnie regulować. Poczynione doświadczenia stwierdziły co następuje. Już przy zamkniętym regulatorze dał się zauważyć ruch wody w kierunku od tyłu ku przodowi paleniska oraz od jego boków ku środkowi. Przy przedmu-





chiwaniu zaworu bezpieczeństwa woda przy ścianie bocznej wznosiła się o 25 do 50 *mm*, w zależności od czystości wody zasilającej i obciążenia kotła; zjawisko to dało się zaobserwować w szkle wodowskazowem: należy to tłumaczyć powiększeniem objętości wody przez powstawanie obfitych pęcherzyków pary. Średnica tych pęchęrzyków wynosiła 6 do 10 *mm*; szły one szybko ku górze i pękały na powierzchni wody.

Z tych samych powodów woda w kotle silnie się pieniła przy bocznych ściankach paleniska, jednocześnie w kurkach probierczych piana ta pozorowała wysoki poziom wody. W taki sposób wskazówki zdobyte przy korzystaniu z tych kurków prowadzą do najzupełniej błędnych wyników i dlatego, zdaniem sprawozdawców, stosowanie tych kurków powinno być wzbronione.

(*Railway Mechanical Engineer*, wrzesień—październik 1920 r.

Przegląd czasopism technicznych i zawodowych.

B. ZAGRANICZNE.

Technika maszynowa w rolnictwie.

Celniejsze artykuły w „*Maschinen-Praxis*".

№ 1 z d. 8/I 1921 r. Lokomobila i jej użycie. Dr. P. Martell—artykuł obszerniejszy, zakrojony na kilka numerów. Węgiel brunatny a rolnictwo—artykuł obszerniejszy, zakrojony na kilka numerów. O różnych nowoczesnych systemach pługów silnikowych. Schneider.—Opis i krytyka, zakreślone na kilka numerów z podziałem pługów na cztery kategorje: 1) system sztywny, 2) system półsztywny, 3) system niesztywny, 4) system dwumaszynowy; zaczyna się od opisu systemów sztywnych.

№ 2 z d. 22/I 1921 r. Silniki wietrzne. inż. Max Grempe. Artykul opisowy, z podaniem niektórych dat, zakrojony na kilka numerów.—Lokomobila i jej użycie. Dr. P. Martell, dalszy ciąg z № 1, opis z podaniem wskazówek, mających znaczenie przy kupnie.—Ciągówka Fordsona. M. Dobberke. Artykuł, wywołany zamierzonym wprowadzeniem tej ciągówki do Niemiec i zamierzoną tam fabrykacja, zawiera opis krytyczny.—*Różnorodne nowoczesne systemy pługów silnikowych.* Schneider. Dalszy ciąg artykułu z № 1, zawiera opis systemów półsztywnych.

№ 3 z d. 5/II 1921 r. Silniki wietrzne. P. Max Grempe. Dalszy ciąg artykułu z № 2, opisuje urządzenie instalacji dla wyzyskania siły wiatru.—Różnorodne nowoczesne systemy pługów silnikowych. Szneider. Dalszy ciąg artykułu z № 2, zawierający opis motyk silnikowych.

№ 5 z d. 5/III 1921 r. Korozje w kotłach parowych, ich powstawanie i przeciwdziałanie inż. Brüser; początek dłuższego artykułu Metody hartowania w zastosowaniu do maszyn rolniczych; zakończenie artykułu z №№ 3 i 4 z podaniem różnych recept. Różnorodne nowoczesne metody pługów silnikowych. Schneider — zakończenie z numerów poprzednich, zawierające opis pługów dwumaszynowych. Pług silnikowy „Eubu", krótki opis. Samochody ciężarowe.

№ 6 z d. 19/III 1921 r. Korozje w kotłach parowych, ich powstawanie i sposoby przeciwdziałania inż. A. Brüser c. d. z № 5. Bruner. Smary specjalne do części precyzyjnych w maszynach rolniczych. Willy Hacker: początek artykułu, opisującego różne smary i sposób ich otrzymywania. Pługi silnikowe i kalkulacja ich użycia. Lebrecht von Müuchow; artykuł przedstawia życzenia rolników.

№ 7 z d. 2/IV 1921 r. Korozje kotłów parowych, ich przyczyny i przeciwdziałanie inż. A. Brüser; dokończenie artykułów z № 6 i 5; szczegółowe rozpatrywanie różnych przyczyn. Smary specjalne do precyzyjnych części maszyn rolniczych. Willy Hacker: dalszy ciąg art. z № 6 z opisem produkcji różnych smarów. Pobudka do konstruowania silników spalinowych do małych pługów. Liczne doświadczenia z pługami silnikowemi. Elektryczność w suszarnictwie. Max. Grempe: początek opisu różnych urządzeń suszarniczych.

KRONIKA.

Stowarzyszenie Inżynierów i Architektów w Poznaniu. Ogólne miesięczne zebranie członków z d. 16 lipca r. b. Porządek dzienny obejmował:

a) Wykład inż. S. Zdrojewskiego, p. t.: „Patentowane paleniska systemu inż. Z. Zakrzewskiego do spalania małowartościowych materjałów opałowych".

b) Sprawa poprawy bytu technicznych urzędników państwowych.

Prelegent przedstawił w treściwym wykładzie zalety wspomnianego paleniska, objaśniając swój wykład licznymi rysunkami i tablicami.

Paleniska te składają się z rusztu żłobowatego, dołem jednolitego a w górnej części złożonego z oddzielnych części podłużnych. W ruszt ten wdmuchuje się przy pomocy specjalnie skonstruowanego inżektora lub też wentylatora pod ciśnieniem powietrze ogrzane do temperatury 70° C. Dalszą istotną częścią paleniska jest klapa regulująca automatycznie zwiększony dopływ powietrza niezbędny do spalenia nadmiaru gazów palnych powstałych z chwilą zasilenia paleniska większą ilością materjału opałowego. Urządzenie to zapobiega wybuchowi gazów w kanałach paleniskowych.

Na podstawie licznych prób i wyników obserwacji na przeszło 2000 paleniskach urządzonych już w czasie wojny, prelegent stwierdził, że nadają się one doskonale do spalania miału węglowego, torfu, wysiewków koksowych i t. p.. co obecnie ma wielkie znaczenie ze względu na brak dobrego węgla kamiennego i jego wysoką cenę. Ponadto automatyczne regulowanie dopływu powietrza dodatkowego pozwala na korzystne wyzyskanie energji cieplikowej paliwa dochodzące do 82%.

Inż. Latinek. Opłakane warunki bytu w jakich obecnie pracować muszą techniczni urzędnicy państwowi. Pobory ich uregulowane są ustawą z d. 13 lipca 1920, która posiada liczne wady. Ustawa ta dzieli pracowników państwowych na kilka odrębnych grup, jak np. urzędników, sędziów, policję, profesorów, nauczycieli i t. p. o różnych wymiarach uposażenia, z których pierwsza a najliczniejsza, t. zw. właściwi urzędnicy pobiera najniższy wymiar płacy w stosunku do reszty grup. Jako przykład podał, że dyrektor szkoły średniej pobiera z różnemi dodatkami ponad 50 000 mk. miesięcznie, podczas gdy naczelnik wydziału w V klasie o równem wykształceniu akademickiem otrzymuje w tej samej miejscowości zaledwie 20 000 mk. System ten wywołuje ogólne rozgoryczenie i zniechęcenie i powinien być zastąpiony przez jednolity wymiar płac jako najbardziej odpowiadający jednolitemu ustrojowi państwa, przyczem zależnie od ważności i odpowiedzialności stanowiska mogliby wszyscy urzędnicy w łatwy a sprawiedliwy sposób znaleźć właściwe zamieszczenie w 12 istniejących klasach płacy. Dalszą wadą tej ustawy jest niesprawiedliwy wymiar dodatku drożyźnianego, który przyznaje urzędnikowi obarczonemu liczną rodziną złożoną z kilku osób zaledwie od 20 do 100% więcej (zależnie od kategorji płacy) niż urzędnikowi samotnemu, otrzymującemu też zaledwie minimum egzystencji.

Inż. Trawiński przedstawił zabiegi poczynione około otwarcia Politechniki w Poznaniu. Wezwano Komisję Politechniczną do dołożenia wszelkich starań, ażeby pierwsze wykłady mogły się rozpocząć już z początkiem najbliższego półrocza zimowego.

Wydawca Feliks Kucharzewski. Redaktor odp. Franciszek Bąkowski.
Druk Straszewiczów, ul. Czackiego № 3 (Gmach Stowarzyszenia Techników).