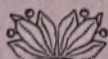


Prof. Inż. Dr. WITOLD WIERZBICKI

WYZNACZENIE LINIJ IZOSTATYCZNYCH



ODBITKA Z „CZASOPISMA TECHNICZNEGO“ 1932 r.
LWÓW 1932.

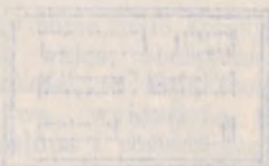
B
u39

WYDZIAŁ ARCHITEKTURY
Politechniki Warszawskiej
29.11.11

BIBLIOTEKA
WYDZIAŁU ARCHITEKTURY
Politechniki

Prof. Inż. Dr. WITOLD WIERZBICKI

WYZNACZENIE LINIJ IZOSTATYCZNYCH

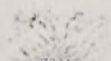


531.2 : 531.01

ODBITKA Z „ZASOPISMA TECHNICZNEGO“ 1932 r.
LWÓW 1932.

WYŻSZA SZKOŁA TECHNICZNA
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

WYDZIAŁ ARCHITECTURY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
Nr 2885 Inwentarz



WYDZIAŁ ARCHITECTURY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

I. Dyskusja kierunków naprężeń głównych.

Praca konstrukcyj budowlanych, poddanych płaskiemu układowi sił, charakteryzuje się, z jednej strony, kształtem linii jednakowych naprężeń, z drugiej zaś, kształtem torów tych naprężeń.

Praca niniejsza poświęcona jest linjom izostatycznym, jako jednemu z rodzajów torów naprężeń układu płaskiego.

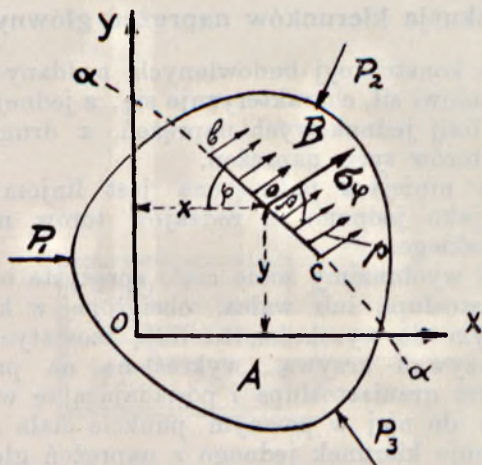
Jeżeli wyobrazimy sobie ciało sprężyste o kształcie graniastosłupa lub walca, obciążone w kierunku prostopadłym do wysokości, to linią izostatyczną będziemy nazywali krzywą, wykreśloną na przekroju poprzecznym graniastosłupa i posiadającą tę własność, że styczna do niej w pewnym punkcie ciała sprężystego wskazuje kierunek jednego z naprężeń głównych.

Poza ogólną charakterystyką warunków pracy poszczególnych budowli i wskazaniem w nich miejsc niebezpiecznych, linje izostatyczne są wielokrotnie pomocne przy rozmieszczaniu niektórych elementów konstrukcyjnych, n. p. żelaznych wkładek ukośnych w belkach żelazo-betonowych, kątowników usztywniających w pionowych blachach belek żelaznych i t. d.

Przy wyznaczeniu linii izostatycznych, bądź drogą ustawienia równań tych krzywych, bądź zapomocą obliczenia współrzędnych poszczególnych jej punktów niezbędnym jest uzależnienie się od pewnego płaskiego układu osi współrzędnych. Z drugiej strony, kierunki naprężeń głównych w pewnych punktach ciała sprężystego zależą od wielkości tych naprężeń. Z tego wynika konieczność zbadania w każdym poszczególnym wypadku zależności między równaniami naprężeń w danym ciełe a układem współrzędnych, w którym poszukujemy linii izostatycznych. Zadanie to sprowadza się do dyskusji kierunków naprężeń głównych.

Pojęcie naprężenia w danym punkcie o ciała sprężystego rozumiemy w sposób następujący:

Bierzemy walec sprężysty o przekroju dowolnym (rys. 1) i o wysokości 1. Niech walec ten będzie przecięty powierzchnią cylindryczną $\alpha\alpha$, przechodzącą przez punkt o . Oddziaływanie odrzuconej części B walca na część jego A , oddzieloną od tamtej powierzchnią $\alpha\alpha$, może być zastąpione przez układ sił p , rozłożonych w sposób ciągły podług tej powierzchni.



Rys. 1.

Przyjmujemy pewien układ współrzędnych $X O Y$ i zakładamy, że:

$$p = f(x, y). \quad \dots \quad (1)$$

W odległości nieskończenie małej od punktu o , na przestrzeni odcinka bc , zwanego elementem izostycznym, uważamy powierzchnię cylindryczną za płaszczyznę, nachyloną do osi $O X$ pod kątem φ , a siły p za stałe i nachylone do bc pod stałym kątem β .

Naprężeniem w punkcie o będziemy więc nazywali wielkość:

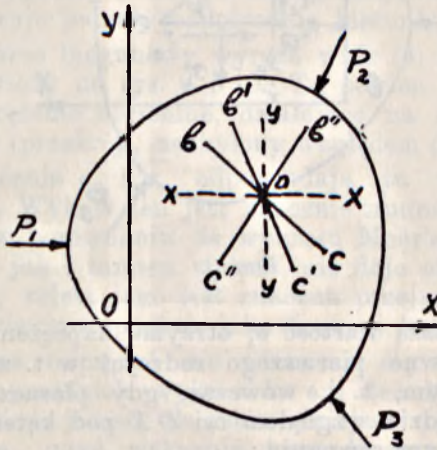
$$\sigma_{\varphi} = \frac{dp}{dA}, \quad \dots \quad (2)$$

gdzie dp jest to suma sił p , działających na powierzchnię $bc \cdot 1 = dA$.

Ponieważ każdą z sił p możemy rozłożyć na siłę

prostopadłą do powierzchni bc i do niej styczną, więc i naprężenie σ_φ w punkcie o działające na płaszczyznę bc , możemy rozłożyć na naprężenie normalne σ i styczne τ .

Aby można było porównywać ze sobą naprężenia σ i τ , odpowiadające różnym elementom izostatycznym, przechodzącym przez punkt o ustala się zależność między naprężeniami, działającymi na element bc , nachylony względem osi OX pod dowolnym kątem φ a naprężeniami, działającymi na elementy xx oraz yy , odpowiednio równoległe do osi OX i OY (rys. 2). Za-



Rys. 2.

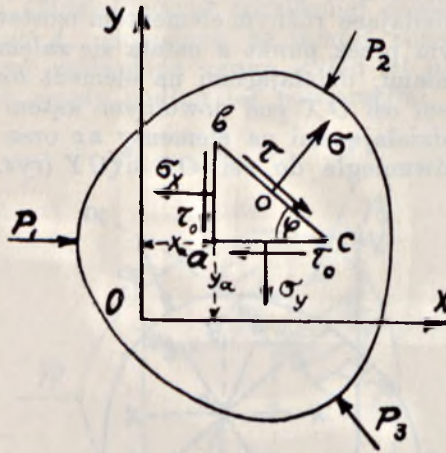
leżność tę otrzymujemy z warunków równowagi graniastosłupa, wyciętego z omawianego cylindra i posiadającego podstawę o kształcie trójkąta abc o wymiarach nieskończenie małych (rys. 3). Ponieważ odległość płaszczyzn ab i yy jest wielkością nieskończenie małą, więc naprężenia, działające na te płaszczyzny, różnią się od siebie tylko o wielkości nieskończenie małe, muszą być wobec tego uważane za równe sobie. To samo dotyczy płaszczyzn ac i xx .

Przy kierunkach naprężeń, przyjętych na rys. 3 i przy przyjętym tam sposobie odmierzania kątów φ zależność między naprężeniami σ , τ , σ_x i σ_y wyraża się zapomocą równań:

$$\sigma = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi + 2\tau_0 \sin \varphi \cos \varphi \quad . \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\varphi + \tau_0 \sin 2\varphi \quad . \quad (4)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_0 \cos 2\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$



Rys. 3.

Największą wartość σ_1 otrzyma naprężenie σ (naprężenie główne pierwszego rodzaju) w t. zw. przekroju głównym, t. j. wówczas, gdy płaszczyzna bc nachylona będzie względem osi OX pod kątem $\varphi = \varphi_1$ odpowiadającym równaniu:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_n = \frac{2\tau_0}{\sigma_y - \sigma_x}, \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

lub też równaniu:

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_0}\right)^2 + 1}. \quad . \quad . \quad (7)$$

Drugi z kątów φ , odpowiadający równaniom (6) lub (7), dotyczy nachylenia $\varphi = \varphi_2$ elementu izostaticznego, w którym naprężenie σ (naprężenie główne drugiego rodzaju) osiąga wartość najmniejszą.

Przy danym sposobie znakowania dla wielkości naprężeń głównych otrzymujemy wzory:

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_0^2}, \quad . \quad . \quad (8) \\ \sigma_{min} & \end{aligned}$$

przyczem naprężenia główne pierwszego rodzaju (posiadające wartość bezwzględną większą) oznaczamy przez $\overline{\sigma}_1$ drugiego zaś przez $\overline{\sigma}_2$.

Wyrażenie (5) daje, przy $\varphi = \varphi_1$ oraz przy $\varphi = \varphi_2$ wartość $\tau = 0$.

Wykreślnie przedstawiamy zależności, zachodzące między naprężeniami, działającymi w danym punkcie ciała sprężystego, zapomocą wykresu Mohr'a, zapomocą wykresu biegunowego, wreszcie zapomocą elipsy naprężeń (elipsy Lamé'go).

Pierwszy z wymienionych wykresów jest niezwykle wygodną w użyciu nomogramą równań (4) i (5), nie wskazując jednak bezpośrednio kierunków naprężeń.

Wykres biegunowy wyraża wzór (3) i ma kształt przedstawiony na rys. 8 i 10. Tu pewien wektor wyraża naprężenie normalne, działające na element izostatyczny (przekrój), nachylony względem osi OX o kąt φ ; naprężenia σ_x i σ_y odpowiadają tu naprężeniom głównym. Wykres ten jest znacznie trudniejszy do wykonania w porównaniu do wykresu Mohr'a, przyczem, podobnie, jak i tamten wykres, nie daje on kierunków naprężeń; zaletą jego jest znaczna przejrzystość przy przedstawieniu naprężeń, jako funkcji kąta φ .

Elipsa naprężeń nie odznacza się ani prostotą dwóch poprzednich wykresów, ani też łatwością budowy, posiada jednak dla celów niniejszej pracy wartość szczególną, gdyż wskazuje kierunki naprężeń i tem ułatwia budowę linii izostatycznych.

Elipsa naprężeń musi być odniesiona do osi współrzędnych, pokrywających się z kierunkami naprężeń głównych. Równanie jej, będące przekształceniem równania (3), posiada postać:

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = 1. \quad \dots \quad (9)$$

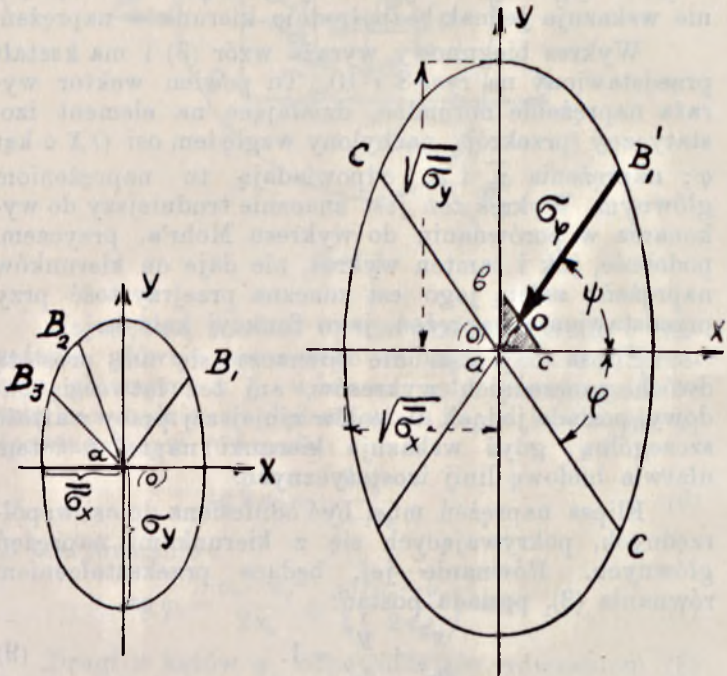
Tu x i y oznaczają współrzędne końca odcinka aB (rys. 4), wyrażającego naprężenia wypadkowe σ_φ z naprężeń σ i τ , działających w punkcie o na pewien przekrój (element izostatyczny), przeprowadzony przez ten punkt, zaś $\overline{\sigma}_x$ i $\overline{\sigma}_y$ oznaczają wielkości naprężeń głównych, równoległych do odpowiednich osi współrzędnych. Omawiany przekrój może być tu uważany za identyczny z elementem bc według oznaczeń rys. 3.

Budujemy w dalszym ciągu w tym samym, co wyżej, układzie współrzędnych, elipsę, odpowiadającą równaniu (rys. 5):

$$\frac{x^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

i zauważamy, iż dwa kierunki aB_1' , oraz aC , nachylone względem osi aX pod kątami ψ i φ , będą względem tej elipsy sprzężone, o ile zostanie spełniony warunek:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = \frac{\overline{\sigma_y}}{\sigma_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$



Rys. 4.

Rys. 5.

Z budowy elipsy (9) wynika (co nie było tu jednak uzasadniane), że tangens kąta nachylenia prostej aB_1 względem osi aX równa się:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{y}{x} = \frac{\overline{\sigma_y}}{\sigma_x} \operatorname{ctg} \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Z równań (11) i (12) mamy:

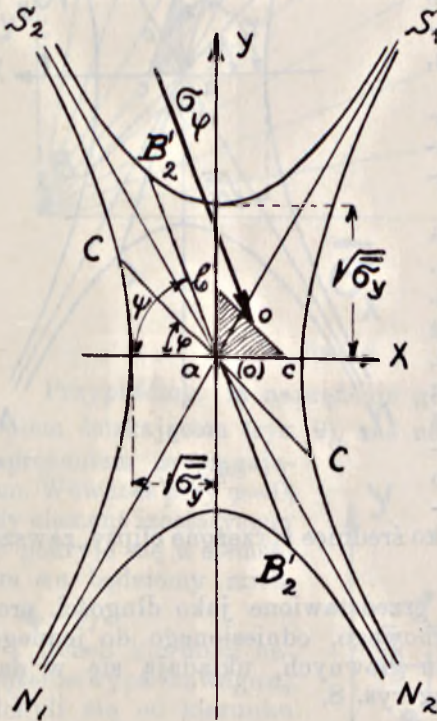
$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \dots \dots \dots (13)$$

czyli, że kierunek aB_1 naprężenia wypadkowego w punkcie a i kierunek elementu izostaticznego, na który to naprężenie działa, są kierunkami sprzężonymi względem elipsy (10).

Gdy chcemy na podstawie elipsy naprężeń dowiedzieć się, jakie naprężenie działa na element izostaticzny nachylony względem osi aX pod kątem φ , wówczas przeprowadzamy średnicę aC elipsy (10), nachyloną względem osi aX pod wymienionym kątem i znajdujemy kierunek aB_1' sprzężony z kierunkiem aC względem tej elipsy. Średnica aB_1 elipsy (9), przeprowadzona równoległe do prostej aB_1' da nam wiel-

kość poszukiwanego naprężenia. Gdy obie elipsy wykonane są na jednym rysunku konstrukcja geometryczna ulega uproszczeniu.

Dotąd liczyliśmy się, zgodnie z rys. 3, jedynie z naprężeniami wyciągającymi σ_x i σ_y . Gdyby oba te naprężenia były ścisakającymi, sposób odczytywania z elipsy (9) wielkości naprężeń wypadkowych σ_φ nie uległby zmianie. Gdybyśmy natomiast mieli do czynienia z naprężeniami σ_x i σ_y , różniącymi się co do znaków wówczas



Rys. 6.

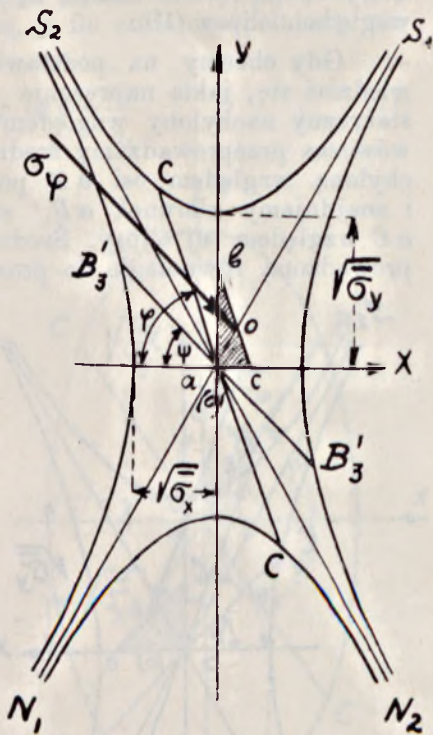
elipsa (10) musiałaby być zastąpiona przez hiperbolę (rys. 6 lub 7), odpowiadającą równaniu:

$$\frac{x^2}{\sigma_x} - \frac{y^2}{\sigma_y} = 1. \quad (14)$$

Pozatem sposób odczytywania naprężeń pozostaje tu ten sam, co i wyżej. Elipsa (10) i hiperbola (14) są to więc krzywe kierunków (coniques indicatrices)¹⁾. Przy wykreślaniu kierunków ze sobą sprzężonych jest w danym razie najważniejszem skorzystanie z tego warunku, że każda ze średnic sprzężonych względem elipsy lub hiperboli jest równoległa do stycznej, przeprowadzonej przez punkt przecięcia się z krzywą drugiej średnicy sprzężonej.

O ile naprężenia σ_x i σ_y są tego samego znaku, to i naprężenie σ_φ będzie tegoż znaku. Wynika stąd, że w tym wypadku kierunek naprężenia ($a B_1'$ na rys. 5) i kierunek odpowiedniego elementu izostatycznego ($a C$) tworzą jako średnice sprzężone elipsy, zawsze kąt rozwarty.

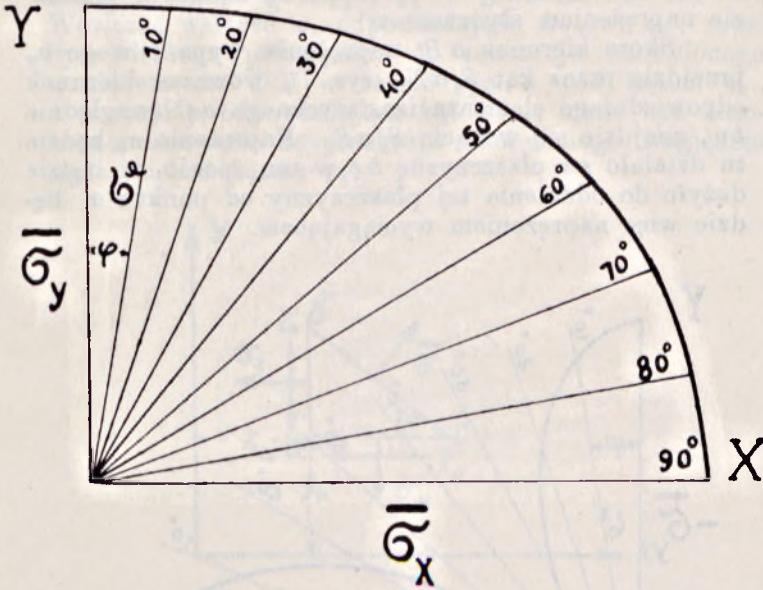
Naprężenia σ_φ , przedstawione jako długości promieni wykresu biegunowego, odniesionego do jednego z kierunków naprężeń głównych, układają się w danym wypadku według rys. 8.



Rys. 7.

¹⁾ Por. n. p. Bertrand de Fontviolant: „Résistance des matériaux“, 1923, t. I. str. 135.

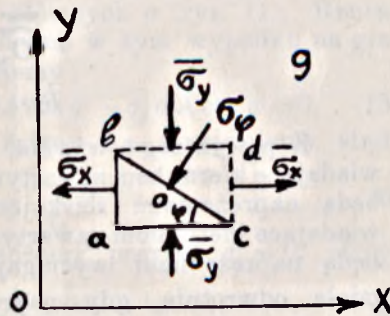
Kąty zawarte między sprzężeniami średnicami hiperboli są kątami ostreimi, przytem o ile kierunek elementu izostaticznego aC znajduje się w jednym z kątów, utworzonych przez asymptoty (niemalstyczne) $N_1 S_1$ i $N_2 S_2$ (rys. 6 i 7), to kierunek naprężenia wypadkowego aB' będzie znajdował się w drugim kącie, do tamtego sąsiednim.



Rys. 8.

Przypuśćmy, iż naprężenie główne σ_y jest naprężeniem ściskającym (rys. 9), zaś naprężenie główne σ_x naprężeniem wyciągającym. Wówczas przy $\varphi=0$, gdy element izostaticzny bc pokryje się z elementem ac , będziemy mieli, iż $\sigma_\varphi = \sigma_y$.

Jeżeli kierunek naprężenia wypadkowego σ_φ odchyli się od kierunku aY i zajmie w kącie S_2 a S_1 położenie aB' (rys. 6), wówczas odpowiedni element izosta-

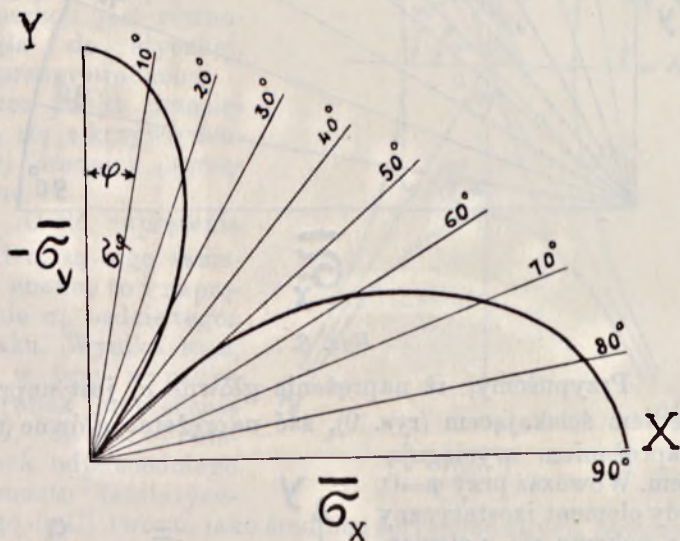


Rys. 9.

tyczny pokryje się z kierunkiem sprzężonym aC , przechodzącym przez kąt $S_2 a N_1$ i identycznym, względnie równoległym do bc . W tych warunkach element bc , względnie przekrój aC w punkcie a , będzie ściskany.

Gdy kierunek aB' naprężenia wypadkowego σ_φ pokryje się z kierunkiem $S_2 N_2$ asymptoty, wówczas pokryje się z nim i kierunek aC odpowiedniego elementu izostatycznego. Naprężenie σ_φ będzie w tym razie naprężeniem stycznem τ .

Skoro kierunek aB' naprężenia wypadkowego σ_φ przejdzie przez kąt $S_2 a N_1$ (rys. 7), wówczas kierunek odpowiedniego elementu izostatycznego aC (względnie bc), znajdzie się w kącie $S_2 a S_1$. Naprężenie σ_φ będzie tu działało na płaszczyznę bc w ten sposób, iż będzie dążyło do oddalenia tej płaszczyzny od punktu a , będzie więc naprężeniem wyciągającym.

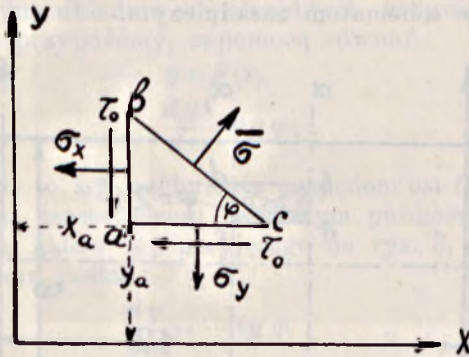


Rys. 10.

Z powyższego wynika, że naprężenia σ_φ , odpowiadające kierunkom zawartym w kątach $S_1 a S_2$ i $N_1 a N_2$ będą naprężeniami ściskającymi, a naprężenia odpowiadające kierunkom zawartym w kątach $N_1 a S_2$ i $N_2 a S_1$ będą naprężeniami wyciągającymi. Rzecz będzie się miała odwrotnie, gdy naprężenie główne σ_y będzie ściskającym, a naprężenie główne σ_x wyciągającym.

Wykres biegunowy, odpowiadający wykresowi z rys. 8, przybiera tu postać przedstawioną na rys. 10.

Przy wyznaczaniu położenia przekrojów głównych w danym punkcie, a więc tem samym osi elipsy naprężeń natrafiamy na pytanie, które z dwu rozwiązań równania (6), któremu odpowiada naprężeniu głównemu. Aby kwestję tę rozstrzygnąć, wstawiamy oba rozwiązania równania (6) φ_1 i φ_2 w równanie (3) lub (4). Wówczas wartość σ , odpowiadająca kątowi φ_1 , musi być odłożona prostopadłe do przekroju nachylnego względem osi OX w sensie rys. 3 pod kątem φ_1 , a wartość σ , odpowiadająca kątowi φ_2 musi być odłożona prostopadłe do przekroju nachylnego względem tejże osi pod kątem φ_2 .



Rys. 11.

Inne kryterjum przy wyznaczaniu naprężeń głównych może być otrzymane z warunków równowagi graniastosłupa abc (rys. 3) w razie, gdy naprężenie σ jest jednym z naprężeń głównych σ (rys. 11). Rzutuując na oś OY siły, działające w tym wypadku na graniastosłup abc , otrzymujemy:

$$-\tau_0 dA \sin \varphi + \sigma dA \cos \varphi - \sigma_y dA \cos \varphi = 0, \quad (15)$$

gdzie dA oznacza pole ściany bc . Znajdujemy stąd:

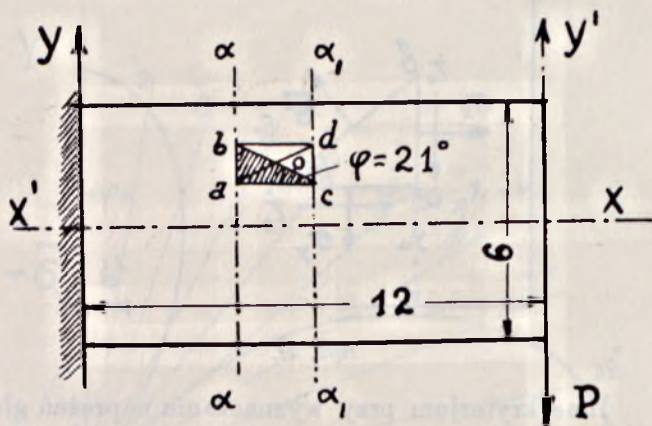
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sigma - \sigma_y}{\tau_0}. \quad (16)$$

W belkach, gdy możemy przyjąć $\sigma_y = 0$, otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sigma}{\tau_0}. \quad (17)$$

W tym więc przypadku kąt ostry $\varphi = \varphi_1$, związany równaniem (17) z naprężeniem głównym $\sigma = \sigma_1$, jest kątem nachylenia względem osi X -ów przekroju głównego, znajdującego się pod działaniem tego właśnie naprężenia. W ten sam sposób kątowi ostremu $\varphi = \varphi_2$ odpowiada naprężenie główne $\sigma = \sigma_2$.

Należy zauważyć, że wprawdzie przy ustawieniu wzorów (6) i (7), przeznaczonych do wyznaczenia położenia przekrojów głównych, liczyliśmy się ze schematem statycznym, przyjętym na rys. 3, jednak przy korzystaniu z wymienionych wzorów, jest rzeczą obojętną, jakie położenie graniastosłupa abc względem osi współrzędnych będziemy mieli na uwadze, byleby znaki naprężeń, osi współrzędnych i kąty φ były uzgodnione ze schematem zasadniczym.



Rys. 12.

Ponieważ uzasadnienie tego oczywistego zresztą twierdzenia wymaga zestawienia długiej a niezbyt ciekawej tablicy, ograniczymy się tu do rozpatrzenia przykładu belki, utwierdzonej w jednym końcu, swobodnej na drugim i obciążonej tu siłą skupioną P . Łatwo przekonać się, że dla punktu o ($x=10$, $y=15$) otrzymamy tu nachylenie przekroju głównego $\varphi=21^\circ$, niezależnie ani od przyjętego układu współrzędnych, ani od przyjętego przekroju poprzecznego (α lub α_1), ani też od przyjętego położenia elementarnego graniastosłupa (rys. 12).

II. Całkowanie równania linii izostatycznej.

Ponieważ w pewnym punkcie ciała pryzmatycznego oba naprężenia główne σ_1 i σ_2 , jak również oba odpowiadające im przekroje główne, są do siebie wzajemnie prostopadłe, więc kąt φ określający, według równania (16) lub (17), położenie elementu izostatycznego, odpowiadającego jednemu z naprężeń głównych, przypuśćmy naprężeniu σ_1 , tem samem określa kierunek działania drugiego naprężenia głównego σ_2 , a więc i kierunek stycznej w danym punkcie do krzywej izostatycznej dla tego ostatniego naprężenia.

Wyobraźmy sobie, iż krzywe izostatyczne odniesione są do pewnego układu osi współrzędnych OX, OY , związanych z pryzmatycznym ciałem sprężystem. W przyjętym układzie współrzędnych krzywe te wyrażają się, przypuśćmy, zapomocą równań:

$$y = F(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

przyczem:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

gdzie φ jest to kąt nachylenia względem osi OX stycznej do linii izostatycznej w danym punkcie. Wobec znakowania kątów φ , przyjętego na rys. 3, równanie (19) przybiera postać:

$$\frac{dy}{dx} = - \operatorname{tg} \varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Po uwzględnieniu wyrażenia (7) dochodzimy do następującego równania różniczkowego:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_0} \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_0}\right)^2 + 1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Równanie linii izostatycznej (równanie 18) może być rozpatrywane, jako całka równania (21). Całka ta może być ściśle otrzymana, w rzeczywistości, tylko w przypadkach zupełnie wyjątkowych i drogą obliczeń dość żmudnych.

Proponuję tu wyznaczenie krzywej izostatycznej drogą przybliżonego całkowania równań typu (21).

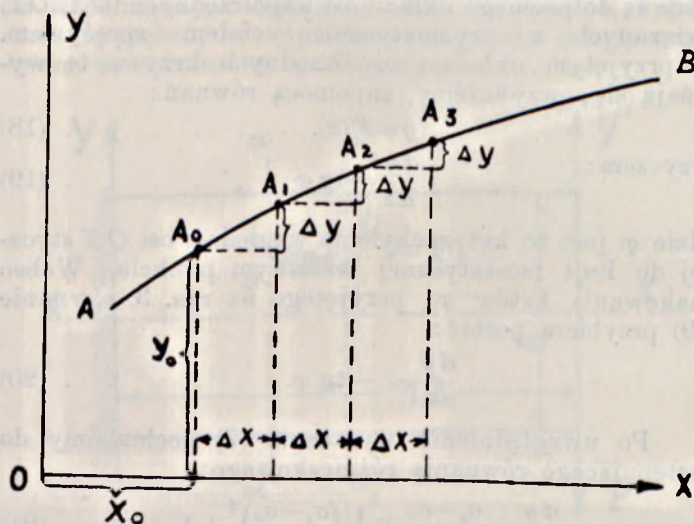
Stosuję w tym celu t. zw. sposób Runge'go²⁾. Metoda ta znajduje punkt wyjścia w propozycji Euler'a,

²⁾ C. Runge: „Ueber die numerische Auflöfung von Differentialgleichung“, *Mathematische Annalen*, 1895, str. 167.

polegającej na tem, aby krzywą, wyrażającą całkę danego równania różniczkowego budować na podstawie współrzędnych jej poszczególnych punktów, wyznaczonych w sposób przybliżony.

Poza sposobem obliczenia poszczególnych współrzędnych krzywej (18), zaleconym przez Euler'a, powstało jeszcze kilka innych sposobów tego obliczenia, z których najściślej jest właśnie sposób Runge'go.

Podamy tu kryterjum, na mocy którego poszczególne sposoby obliczenia współrzędnych równania (18) mogą być ze sobą porównywane, w szczególności gdy chodzi o równanie różniczkowe pierwszego rzędu, a więc i o równanie różniczkowe linii izostatycznej (21).



Rys. 13.

Przypuśćmy, iż krzywa AB na rys. 13 przedstawia wykres poszukiwanego równania (18). Na podstawie warunków zadania ustalamy pewien punkt początkowy $A_0(x_0, y_0)$, przez który krzywa AB przejść powinna. Nadając odciętej x_0 dowolny mały przyrost skończony Δx , obliczamy przyrost Δy , odpowiadający nowemu punktowi krzywej AB , a więc punktowi A_1 o współrzędnych:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x \\ y_1 &= y_0 + \Delta y. \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

W podobny sposób przechodzimy od punktu A_1 do punktu $A_2(x_2, y_1)$ i t. d.

Tą drogą otrzymujemy szereg punktów krzywej (18), które połączone ze sobą odcinkami prostych, dają nam linię łamaną, zastępującą z potrzebną dokładnością poszukiwaną krzywą.

Równanie różniczkowe (21), o które tu chodzi, posiada naogół postać:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Stąd przyrost Δy może być obliczony zapomocą szeregu Taylor'a dla dwóch zmiennych niezależnych w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \Delta y = & f(x, y) \Delta x + (f_1 + f_2 f) \frac{\Delta x^2}{1.2} + \\ & + [f_{11} + 2f_{12} f + f_{22} f^2 + f_2 (f_1 + f_2 f)] \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \dots \quad (24) \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, & f_2 &= \frac{\partial f}{\partial y} \\ f_{11} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & f_{22} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, & f_{12} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Euler stosował dla Δy wyrażenie:

$$\Delta y = f(x, y) \Delta x, \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

skąd wynika, iż tylko jeden wyraz przybliżenia Euler'a pokrywa się z rozwinięciem (24).

Dla uzyskania tu większej dokładności obliczamy wyrażenia:

$$\Delta_1 y = f(x, y) \Delta x \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

$$\Delta_2 y = f(x + \Delta x, y + \Delta_1 y) \Delta x \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

$$\Delta_3 y = f(x + \Delta x, y + \Delta_2 y) \Delta x \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

$$\Delta y = \frac{\Delta_1 y + \Delta_2 y}{2} = N_s. \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Po rozwinięciu wyrażeń (27) i (28) podług szeregu Taylor'a znajdziemy, iż wyrażenie (29) różni się od ścisłego wyrażenia (24) dla Δy dopiero w wyrazie trzecim, zawierającym Δx^3 i w następnych.

Runge proponuje dla przyrostu Δy wyrażenie:

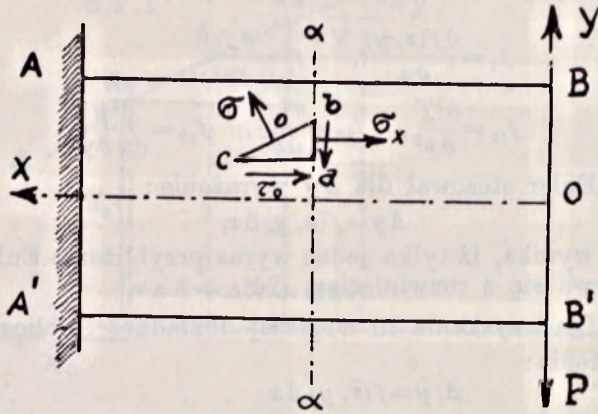
$$\Delta y = N_T + \frac{1}{3}(N_s - N_T), \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

w którym N_s oblicza się według wzoru (29), zaś N_T , jako pierwsze przybliżenie dla przyrostu Δy , nie według wzoru (26), lecz według wyrażenia:

$$N_T = f\left(x + \frac{1}{2} \Delta x, y + \frac{1}{2} \Delta y\right) \Delta x. \quad (31)$$

Po rozwinięciu w szeregi wielkości, wchodzących w skład wyrażenia (30), znajdziemy, że wyrażenie to różni się od ścisłej wartości Δy dopiero w wyrazach, zawierających Δx w potęgach trzeciej i wyższych.

Sposób Runge'go został sprawdzony drogą przybliżonego całkowania pewnych równań, posiadających rozwiązania ścisłe. W przypadku przybliżonego obliczenia rozwiązania równania linii izostatycznej (21), najlepszym, zdaje się, sposobem określenia ścisłości otrzymanego rozwiązania będzie porównanie ze sobą kolejnych przybliżeń otrzymanych ze wzorów (29 i (30). Łatwo przekonać się, iż drogą zmniejszania wielkości odcinka Δx różnicę tę możemy uczynić dowolnie małą.



Rys. 14.

Sposób wyznaczenia linii izostatycznych drogą całkowania zobrazujemy tu na przykładzie belki utwierdzonej w jednym końcu oraz zapory trójkątnej, znajdującej się pod działaniem parcia wody.

Bierzemy belkę przedstawioną na rys. 14 i na rys. 16, a więc belkę w jednym końcu utwierdzoną, a na drugim obciążoną siłą P , i przyjmujemy za początek współrzędnych środek ciężkości końcowego przekroju $B\bar{B}'$ danej belki. Aby wyznaczyć w przyjętym ukła-

dzie współrzędnych linię izostatyczną, robimy tu przekrój aa i bierzemy omówiony wyżej (rys. 3) nieskończenie mały graniastosłup abc .

Przystępujemy do ustawienia równania różniczkowego (21) linii izostatycznej w danym przypadku szczególnym, a więc dla belki o rozpiętości $l=12$, a wysokości $h=6$. Wobec tego, że obliczenie prowadzimy tu według ogólnie rozpowszechnionej w praktyce uproszczonej teorii zginania, przyjmujemy, że dla belki $\sigma_y = 0$.

Niech będą x i y współrzędnymi pewnego punktu a , leżącego w przekroju aa (rys. 14), lub też nieskończenie do niego zbliżonego punktu o . Wówczas naprężenie σ_x w wymienionym punkcie wyrazi się wzorem:

$$\sigma_x = \frac{My}{I}, \dots \dots \dots (32)$$

gdzie M oznacza moment zginający w przekroju aa a I moment bezwładności tego przekroju.

Ponieważ równanie (21) oparte jest na schemacie statycznym, przyjętym na rys. 3, uważamy tu naprężenie σ_x za dodatnie, wówczas, gdy jest ono naprężeniem wyciągającym. Moment $M=Px$ nie ulega zmianie znaku na całej długości belki, będziemy więc go stale uważali za dodatni. Stąd otrzymamy dla naprężenia σ_x wyrażenie:

$$\sigma_x = \frac{Pxy}{I} \dots \dots \dots (33)$$

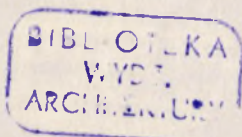
Dla naprężenia stycznego τ_0 otrzymujemy odpowiednio wzór:

$$\tau_0 = \frac{P}{2I} (h^2 - y^2), \dots \dots \dots (34)$$

gdzie znak dodatni przed prawą częścią równania tłumaczy się zgodnością kierunku naprężenia τ_0 w danym przypadku ze schematem przyjętym na rys. 3.

Nadajemy wreszcie równaniu (21) postać następującą:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{xy}{\frac{h^2}{4} - y^2} \mp \sqrt{\left(\frac{xy}{\frac{h^2}{4} - y^2}\right)^2 + 1} = \\ &= -\left[\frac{xy}{\frac{h^2}{4} - y^2} \pm \sqrt{\left(\frac{xy}{\frac{h^2}{4} - y^2}\right)^2 + 1} \right] \dots \dots \dots (35) \end{aligned}$$



W myśl uwag wypowiedzianych na wstępie tego rozdziału i w myśl równania (17) znak + (więcej) odpowiada tu równaniu różniczkowemu linii izostatycznej dla większego z naprężeń σ , zaś znak — (mniej) dla mniejszego z nich.

Przy znakowaniu przyjętem na rys. 3 w wyrażeniu (8) znak + (więcej) odpowiada naprężeniu wyciągającemu, a znak — (mniej) ściskającemu. Wobec przyjętego sposobu odliczania kątów φ musieliśmy, wstawiając w równanie (20) zamiast $\operatorname{tg} \varphi$ wartość jego ze wzoru (7), znak w prawej części tego wyrażenia zmienić na odwrotny. Stąd wynika, iż linja izostatyczna dla naprężenia wyciągającego będzie miała w danym razie następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{\frac{h^2}{4} - y^2} + \sqrt{\left(\frac{xy}{\frac{h^2}{4} - y^2}\right)^2 + 1} \quad . \quad (36)$$

Przy y ujemnem, pierwszy wyraz prawej części równania (36) staje się dodatnim. Wówczas znak + (więcej) przy pierwiastku odpowiadać będzie linii izostatycznej mniejszego z naprężeń głównych (σ_2), w danym razie dodatniego, czyli wyciągającego, zaś znak — (mniej) odpowiadać będzie linii izostatycznej większego z naprężeń głównych (σ_1), w danym razie ściskającego.

Jeżeli chodzi nam o to, aby dana linja izostatyczna wskazywała na całej swej długości kierunek głównych naprężeń wyciągających, wówczas dla części belki poniżej osi OX odpowiednikiem równania (36) będzie równanie następujące:

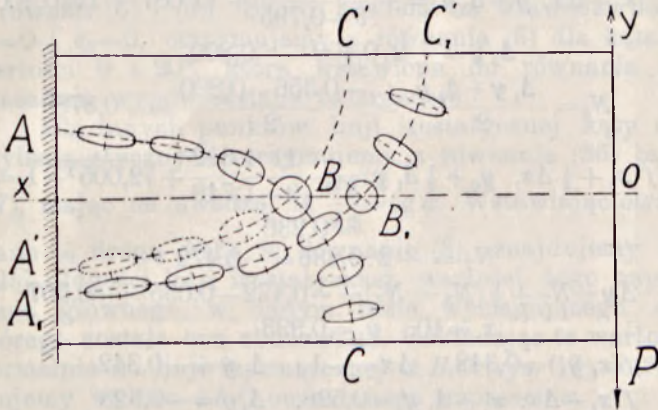
$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{\frac{h^2}{4} - y^2} + \sqrt{\left(\frac{xy}{\frac{h^2}{4} - y^2}\right)^2 + 1} \quad . \quad (37)$$

Z zestawienia równań (36) i (37) wynika, że o ile linja izostatyczna, odpowiadająca tym równaniom, ma kształt, przedstawiony na rys. 15 zapomocą krzywej ABC , to część jej AB odpowiada równaniu (36), zaś część BC równaniu (37).

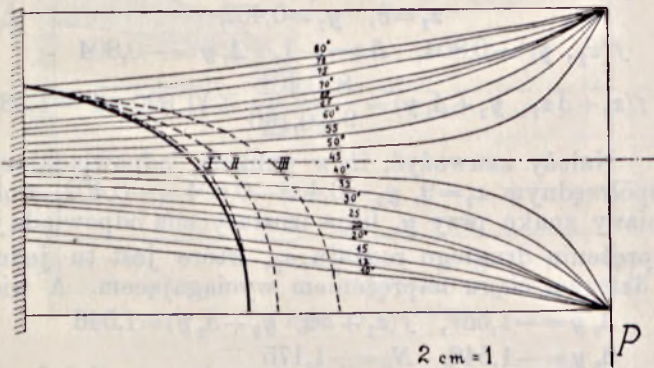
Styczne do linii ABC wskazują tu kierunki działania naprężeń głównych wyciągających. Gdybyśmy chcieli mieć linję izostatyczną dla naprężeń głównych pierwszego rodzaju (σ_1), niezależnie od znaku, wówczas,



zamiast gałęzi BC , otrzymalibyśmy tu gałąź $A'B$, a krzywa ABA' byłaby linią poszukiwaną. Gałąź $A'B$ wskazywałaby wówczas kierunki naprężeń głównych ujemnych.



Rys. 15



Rys. 16.

Dla przykładu obliczymy tu linię izostatyczną, przechodzącą na rys. 16 przez punkt przekroju utwierdzenia o współrzędnych $x_0=12$ i $y_0=1,5$ i dla $\Delta x=-2$.

$$f(x_0, y_0) = -\frac{12 \cdot 1,5}{3^2 - 1,5^2} + \sqrt{\left(\frac{12 \cdot 1,5}{3^2 - 1,5^2}\right)^2 + 1} = 0,178$$

$$\Delta_1 y = -2 \cdot 0,178 = -0,356$$

$$f(x_0 + \Delta x, y + \Delta_1 y) = -\frac{10.1,144}{9-1,309} + \sqrt{1,488^2 + 1} = 0,304$$

$$\Delta_2 y = -2.0,304 = -0,608$$

$$f(x_0 + \Delta x, y + \Delta_2 y) = -\frac{10.0,892}{9-0,795} + \sqrt{1,087^2 + 1} = 0,400$$

$$\Delta_3 y = -2.0,400 = -0,800$$

$$N_S = \frac{\Delta_1 y + \Delta_3 y}{2} = \frac{-0,356 - 0,800}{2} = -0,578$$

$$f(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x, y_0 + \frac{1}{2} \Delta_1 y) = -\frac{11.1,322}{9-1,748} + \sqrt{2,005^2 + 1} =$$

$$= 0,236$$

$$N_T = -2.0,236 = -0,472$$

$$\Delta y = N_T + \frac{1}{3}(N_S - N_T) = -0,472 - 0,035 = -0,507$$

$$x_1 = 10, \quad y_1 = 0,993$$

$$f(x_1, y_1) = 0,342, \quad \Delta x = -1, \quad \Delta_1 y = -0,342$$

$$f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta_1 y) = 0,528, \quad \Delta_2 y = -0,528$$

$$f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta_2 y) = 0,631, \quad \Delta_3 y = -0,631$$

$$N_S = -0,486, \quad f(x_1 + \frac{1}{2} \Delta x, y_1 + \frac{1}{2} \Delta_1 y) = 0,635$$

$$N_T = -0,635, \quad \Delta y = -0,586$$

$$x_2 = 9, \quad y_2 = 0,402$$

$$f(x_2, y_2) = 0,804, \quad \Delta x = -1, \quad \Delta_1 y = -0,804$$

$$f(x_2 + \Delta x, y_2 + \Delta_1 y) = \frac{8.0,402}{9-0,160} + \sqrt{1,390^2 + 1} = 1,539.$$

Należy zauważyć, iż w punkcie, odpowiadającym współrzędnym $x_2 = 9, y_2 = 0,402 - 0,804 = -0,402$, wobec zmiany znaku przy y , linja izostatyczna odpowiada już naprężeniu drugiego rodzaju σ_2 , które jest tu jednak w dalszym ciągu naprężeniem wyciągającym. A więc:

$$\Delta_2 y = -1,537, \quad f(x_2 + \Delta x, y_2 + \Delta_2 y) = 1,546$$

$$\Delta_3 y = -1,546, \quad N_S = -1,175$$

$$f(x_2 + \frac{1}{2} \Delta x, y_2 + \frac{1}{2} \Delta_1 y) = 1, \quad N_T = -1, \quad \Delta y = -1,058$$

$$x_3 = 8, \quad y_3 = -0,656$$

$$f(x_3, y_3) = 1,784, \quad \Delta x = -0,500, \quad \Delta_1 y = -0,892$$

$$f(x_3 + \Delta x, y_3 + \Delta_1 y) = 3,775, \quad \Delta_2 y = -1,887$$

$$f(x_3 + \Delta x, y_3 + \Delta_2 y) = 5,388, \quad \Delta_3 y = -2,694$$

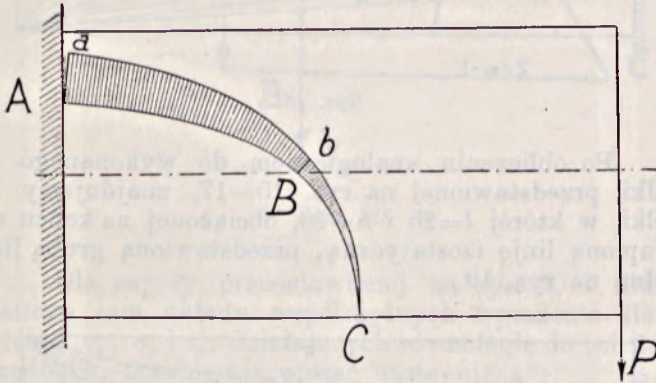
$$N_S = -1,793, \quad f(x_3 + \frac{1}{2} \Delta x, y_3 + \frac{1}{2} \Delta_1 y) = 2,515$$

$$N_T = -1,257, \quad \Delta y = -1,332$$

$$x_4 = 7,5, \quad y_4 = -1,988.$$

Na podstawie obliczonych współrzędnych linii izostatycznej wykreślamy krzywą przedstawioną na rys. 16 zapomocą grubej linii pełnej. Linia ta jest normalną do dolnej powierzchni belki. Wynika to z równań (6) i (3). Skoro bowiem na krawędzi belki $\tau_0=0$ i $\sigma_y=0$, otrzymujemy z równania (6) dla kąta φ wartości 0 i 90° , które wstawione do równania (3) uzasadniają wypowiedziane twierdzenie.

Dla innych punktów linii izostatycznej kąty nachylenia stycznych otrzymujemy z równania (36) bądź (37), mając na uwadze, iż $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$. Wstawiając otrzymane tą drogą kąty w równanie (3), znajdujemy na całej długości linii izostatycznej wartości tego naprężenia głównego, w danym razie wyciągającego, dla którego została ona zbudowana. Odkładając te wartości normalnie do linii izostatycznej ABC (rys. 17), otrzymujemy wykres abc omawianego naprężenia.



Rys. 17.

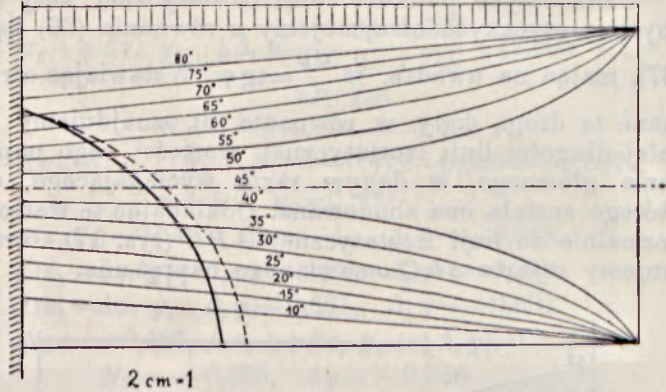
Jeżeli zaczepimy do belki przedstawionej na rys. 15—17, zamiast obciążenia skupionego, obciążenie ciągłe równomiernie rozłożone o natężeniu q , wówczas wyrażenia (33), (34), (36) i (37) przybiorą odpowiednio postać:

$$\sigma_x = \frac{q x^2 y}{2I}, \quad \tau = \frac{q x}{2I} (h^2 - y^2) \quad \dots \quad (38)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{2(h^2 - y^2)} + \sqrt{\left[\frac{xy}{2(h^2 - y^2)} \right]^2 + 1} \quad (39)$$

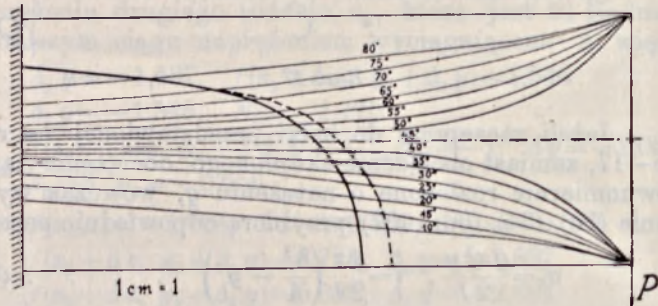
$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{2\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)} + \sqrt{\left[\frac{xy}{2\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}\right]^2 + 1}. \quad (40)$$

Obliczenie, przeprowadzone na podstawie wzorów (38) — (40) doprowadza nas do krzywej, izostatycznej, przedstawionej linią grubą pełną na rys. 18.



Rys. 18.

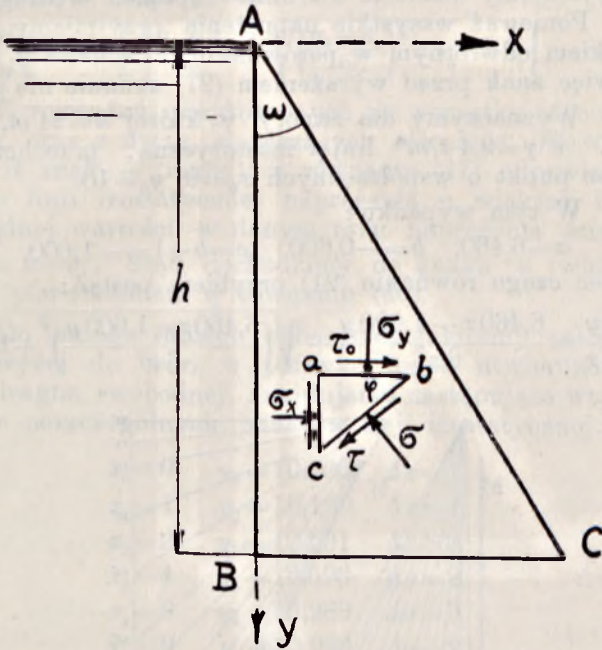
Po obliczeniu analogicznym do wykonanego dla belki, przedstawionej na rys. 15—17, znajdujemy dla belki, w której $l=25$ i $h=10$, obciążonej na końcu siłą skupioną linią izostatyczną, przedstawioną grubą linią pełną na rys. 19.



Rys. 19.

Zastosujemy tu w dalszym ciągu sposób przybliżonego całkowania równania różniczkowego linii izo-

statycznej do wyznaczenia linii izostatycznej w zaporze o przekroju trójkątym.



Rys. 20.

Dla zapory przedstawionej na rys. 20 i dla podanego tam układu współrzędnych wyrażenia dla naprężeń σ_x , σ_y i τ_0 , działających równoległe do osi współrzędnych, przybierają postać następującą³⁾:

$$\tau_0 = x \operatorname{ctg}^2 \omega \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

$$\sigma_x = y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

$$\sigma_y = ax + by, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

gdzie:

$$a = \frac{2 - \gamma \operatorname{tg}^2 \omega}{\operatorname{tg}^3 \omega}, \quad b = \gamma - \operatorname{ctg}^2 \omega, \quad . \quad . \quad (44)$$

zaś γ oznacza ciężar jednostkowy muru zapory przy ciężarze jednostkowym wody, wynoszącym 1 t/m^3 .

³⁾ Por. W. Wierzbicki: „Rozkład naprężeń w murach szczelnych“, *Przegląd Techniczny*, 1928.

Przy wyznaczeniu naprężeń w zaporach uważamy zwykle naprężenia ściskające za dodatnie, wobec czego przyjmujemy dodatnie kierunki naprężeń według rys. 20. Ponieważ wszystkie naprężenia przyjmiemy tu ze znakiem odwrotnym w porównaniu do schematu z rys. 3, więc znak przed wyrażeniem (21) zmianie nie ulega.

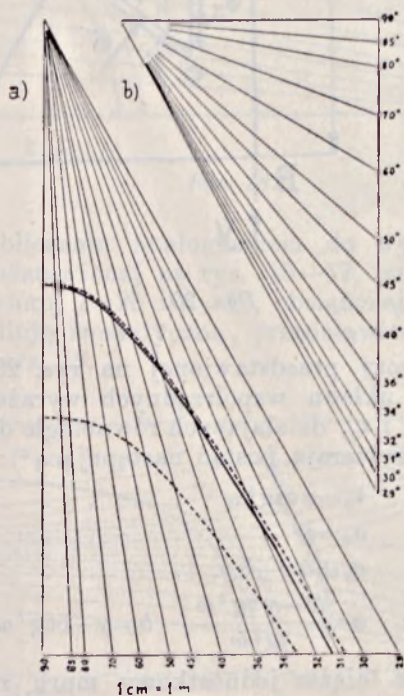
Wyznamy dla zapory, w której $h=24\text{ m}$, $\omega=-30^\circ$ i $\gamma=2,4\text{ t/m}^3$ linię izostatyczną, przechodzącą przez punkt o współrzędnych $x_0=0$, $y_0=10$.

W tym wypadku :

$$a=6,460, \quad b=-0,600, \quad c=b-1=-1,600,$$

wobec czego równanie (21) przybiera postać :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6,460x - 1,600y}{6x} + \sqrt{\left(\frac{6,460x - 1,600y}{6x}\right)^2 + 1}. \quad (45)$$



Rys. 21.

Aby zdecydować się na znak przed pierwiastkiem w równaniu (45), należy uciec się do wzorów (16) i (20) i nadać temu równaniu postać :

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\sigma - \sigma_y}{\tau_0} \dots \dots \dots (46)$$

a w dalszym ciągu postać:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\tau_0} \left[\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_0^2} - \sigma_y \right] \dots (47)$$

Z rozważań, przytoczonych na początku tego rozdziału, oraz z uwag, dotyczących równania (35), wynika, iż znak — (mniej) w równaniu (47) odpowiadać będzie linii izostatycznej naprężenia o większej bezwzględnej wartości, w danym razie naprężenia ściskającego $\bar{\sigma} = \sigma_1$. Stąd dochodzimy do znaku + (więcej) przed pierwiastkiem w równaniu (45).

Do takiego samego obliczenia, jakieśmy zastosowali wyżej do belki w jednym końcu utwierdzonej, a w drugim swobodnej, znajdujemy następujące współrzędne poszczególnych punktów linii izostatycznej:

$x_0 = 0$	$y_0 = 10,000$	$\Delta x = 1$. . (48)
$x_1 = 1$	$y_1 = 10,120$	$\Delta x = 1$		
$x_2 = 2$	$y_2 = 10,591$	$\Delta x = 2$		
$x_3 = 4$	$y_3 = 12,593$	$\Delta x = 2$		
$x_4 = 6$	$y_4 = 15,289$	$\Delta x = 3$		
$x_5 = 9$	$y_5 = 19,999$	$\Delta x = 2$		
$x_6 = 11$	$y_6 = 23,665$			

Odpowiednia krzywa przedstawiona jest grubą linią pełną na rys. 21. W punkcie $x_0 = 0$, $y_0 = 10$ krzywa ta jest normalna do powierzchni muru wobec tego, że tu naprężenie styczne $\tau_0 = 0$.

Należy zauważyć, iż sposób ścisłego całkowania równania linii izostatycznej dla zapory trójkątnej nie dałby również żadnych korzyści⁴⁾, aczkolwiek jest on w danym razie do pomyslenia.

III. Linje izokliniczne i ich zastosowanie.

Linje izokliniczne (isoclinic lines)⁵⁾, są to krzywe posiadające tę własność, że we wszystkich punktach

⁴⁾ G. Pigeaud: „Resistance des Materiaux et Élasticité“, 1920, str. 752.

⁵⁾ Akira Miura: „Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern“, Berlin, 1928, str. 5 i następne.

jednej z nich naprężenia główne tego samego rodzaju są względem osi współrzędnych jednakowo nachylone.

Poszczególne elementy poszczególnych linii izostatycznych są więc dla danego rodzaju naprężenia głównego w miejscach przecięcia ich z linjami izoklinicznymi do siebie równoległe. Linje izokliniczne (izokliny) mogą być z tego powodu pomocne przy budowie linii izostatycznych.

Role równań linii izoklinicznych odgrywają równania (6) i (7), o ile kąty φ będziemy uważali w nich za wielkości stałe. Gdy chcemy więc sporządzić linję izokliniczną dla danej wartości kąta nachylenia danego naprężenia głównego, wstawiamy wartość tę w lewą część wyrażenia (7), prawą zaś przedstawiamy jako funkcję x i y , wyrażając naprężenie σ_x i σ_y w ten sam sposób, jak w rozdziale poprzednim.

W ten sposób równania izokliniczne stają się równaniami typu:

$$\operatorname{tg} \varphi = F(x, y) = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Dla przykładu omówimy tu sposób powstawania linii izoklinicznych w konstrukcjach przedstawionych na rys. 16, 18, 19 i 21.

Dla łatwiejszego budowania linii izoklinicznych wskazaniem jest, aby równania ich były rozwiązane względem jednej ze współrzędnych. W tym celu nieraz wygodniej jest tu korzystać nie z równania (7), lecz bezpośrednio z równania (6).

Ustawmy równanie linii izoklinicznej dla belki, przedstawionej na rys. 16.

Zastępujemy przedewszystkiem równanie (6) przez równanie:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\tau_0}{\sigma_x}, \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

które przybiera w danym przypadku postać:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -2 \cdot \frac{\frac{P}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\frac{Pxy}{I}} = -\frac{\frac{h^2}{4} - y^2}{xy} \quad . \quad . \quad (51)$$

lub postać:

$$y^2 - yx \operatorname{tg} 2\varphi - \frac{h^2}{4} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

skąd po rozwiązaniu równania otrzymujemy:

$$y = \frac{x \operatorname{tg} 2\varphi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x \operatorname{tg} 2\varphi}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{4}} \quad (53)$$

Dla belki obciążonej w sposób ciągły odpowiednio znajdujemy:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -2 \cdot \frac{\frac{h^2}{4} - y^2}{xy} \quad (54)$$

$$y^2 - y \cdot \frac{x}{2} \operatorname{tg} 2\varphi - \frac{h^2}{4} = 0 \quad (55)$$

$$y = \frac{x \operatorname{tg} 2\varphi}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{x \operatorname{tg} 2\varphi}{4}\right)^2 + \frac{h^2}{4}} \quad (56)$$

Wstawiamy dalej we wzory (53) i (56) np. $\varphi = 60^\circ$ oraz x równe kolejno 2, 4, 6 i t. d. i tą drogą dochodzimy do linii izoklinicznych, oznaczonych cyfrą 60° na rys. 16 i rys. 18. Cyfra 60° oznacza tu, iż w każdym punkcie danej krzywej jeden z przekrojów głównych nachylony jest względem osi OX pod kątem 60° .

Ponieważ wiemy, że większe naprężenie główne na górnej powierzchni belki ma kierunek poziomy, czyli równoległy do osi belki, co odpowiada $\varphi = 90^\circ$

i $y = +\frac{h}{2}$, więc przyjmujemy w równaniach (53) i (56)

przed pierwiastkiem znak + (więcej). Dla podobnych powodów w dolnej części belki przyjmujemy znak — (mniej).

Przy $\varphi = 45^\circ$ otrzymujemy zarówno z równania (53), jak i z równania (56) dla y wyrażenie nieokreślone $\infty - \infty$, którego wartość rzeczywista równa się 0. Oś belki więc jest linią izokliniczną dla kąta $\varphi = 45^\circ$.

Na rys. 16, 18 i 19 krzywe izokliniczne dla różnych kątów przedstawione są zapomocą cienkich linii pełnych.

Aby otrzymać linje izokliniczne dla zapory, przedstawionej na rys. 21, nadajemy równaniu (6), w związku z oznaczeniami (44) i (45), postać następującą:

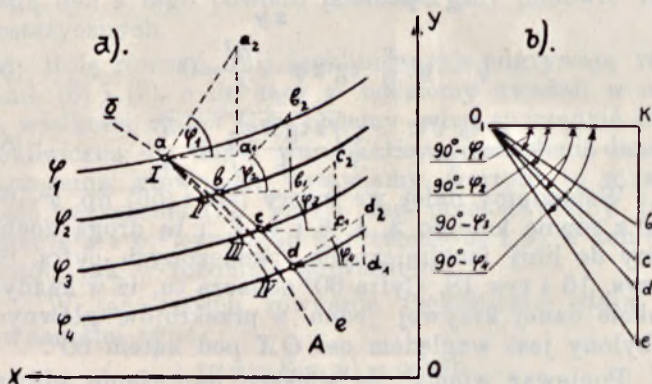
$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau_0}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{2x \operatorname{ctg}^2 \omega}{cy + bx} \quad (57)$$

Rozwiązując równanie (57) względem x , otrzymujemy:

$$x = \frac{y \operatorname{ctg} 2\varphi}{2 \operatorname{ctg}^2 \omega - \operatorname{atg} 2\varphi} = -\frac{1,6y \operatorname{tg} 2\varphi}{6 - 6,46 \operatorname{tg} 2\varphi} \quad (58)$$

Wstawiając w równanie (58) poszczególne wartości kąta φ dochodzimy do pęku prostych izoklinicznych wskazanych na rys. 21 zapomocą cienkich linii pełnych.

Pęki linii izoklinicznych mogą być z powodzeniem wyzyskane do budowy linii izostatycznych.



Rys. 22.

Przypuśćmy więc, iż mamy pęk linii izoklinicznych (rys. 22), odpowiadających kątom $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ itd.

Jeżeli linia izostatyczna ma przejść przez punkt a , leżący na izoklinie φ_1 , wówczas przeprowadzamy z tego punktu prostą aa_1 , równoległą do osi OX i odkładamy od niej kąt $\varphi_1 = \angle aa_2$, w sensie schematu rys. 1. Prosta aa_2 będzie tu kierunkiem przekroju (elementu izostatycznego), na który działa naprężenie główne, odpowiadające danemu pękowi linii izoklinicznych. Przeprowadzając prostą ab prostopadłą do prostej aa_2 , znajdujemy kierunek odcinka linii izostatycznej, zawarty między izoklinami φ_1 i φ_2 .

W punkcie b przeprowadzamy prostą bb_2 , nachyloną pod kątem φ_2 względem osi X -ów oraz prostą bc do niej prostopadłą i stanowiącą odcinek linii izostatycznej między izoklinami φ_2 i φ_3 . W ten sam sposób budujemy pozostałe odcinki poszukiwanej linii izostatycznej. Kąty $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ i t. d. odkładamy tu od osi X -ów na podstawie tangens'ów.

Wyznaczenie linii izostatycznej na podstawie izoklinów można uprościć sobie w sposób następujący:

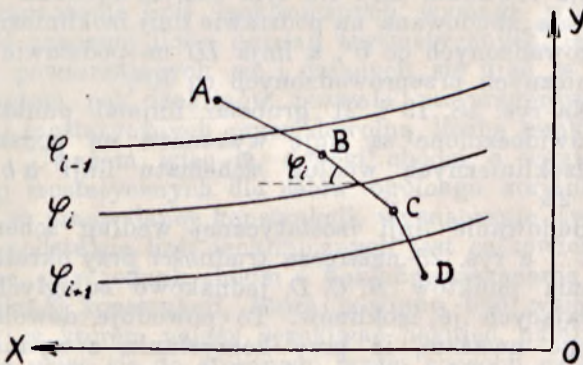
Przeprowadzamy prostą O_1K równoległą do osi X -ów i prostą Ke' do niej prostopadłą. Na tej ostatniej

prostej odkładamy odcinki Kb' , Kc' i t. d. w ten sposób, aby:

$$\frac{Kb'}{OK} = \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi_1) = \operatorname{ctg} \varphi_1, \quad \frac{Kc'}{OK} = \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi_2) = \operatorname{ctg} \varphi_2$$

i t. d.

Łącząc ze sobą punkt O_1 z punktami b' , c' , d' ... znajdujemy kierunki $O_1b' \parallel ab$, $O_1c' \parallel bc$ i t. d. Dla wyznaczenia więc linii izostatycznej $abcde$ przeprowadzamy z punktu a prostą równoległą do O_1b' , z punktu b równoległą do O_1c' i t. d. Mamy tu w ten sposób do czynienia z pewną analogją wieloboku sznurowego (por. rys. 21). Gdyby linje izokliniczne były do siebie nieskończenie zbliżone, wówczas odcinki ab , bc , cd i t. d. byłyby nieskończenie małe i dałyby w rezultacie ściśłą linię izostatyczną aA . Ponieważ jednak wymienione odcinki mają długość skończoną, linja łamana $abcd$... odsunie się na rys. 22 względem odpowiedniej krzywej w kierunku do początku współrzędnych.



Rys. 23.

Jeżeli przeprowadzimy przez punkt a , zamiast prostej ab , równoległą do niej prostą OI , a następnie, zamiast prostej bc , równoległą do niej prostą III itd., nowa linja łamana $OIII$... byłaby przesunięta względem linji łamanej abc ... w kierunku dodatnich X -ów. Dwie wymienione tu linje łamane tem różnią się od siebie, że każdy element linji abc ..., zawarty między izoklinem φ_i a izoklinem φ_{i+1} , nachylony jest względem osi X -ów pod kątem $90^\circ - \varphi_i$, a każdy element linji

O III... zawarty między temi samemi izoklinami nachylony jest względem osi X ów pod kątem $90^\circ - \varphi_{i+1}$. Krzywa aA , jako ściśle przeprowadzona linja izostatyczna, przechodzi między linjami łamanemi $abc...$ i *O III*... i odgrywa dla nich obu rolę granicy przy nieskończeniu zwiększającej się liczbie izoklinów.

Aby możliwie jaknajlepiej zastąpić linję aA (rys. 22) przez linję łamaną, można przeprowadzać tę ostatnią w ten sposób, aby jej odcinek przecinający linję izokliniczną φ_i i nachylony względem osi X -ów pod kątem φ_i znajdował się częściowo między izoklinami φ_{i-1} a φ_i , częściowo zaś między izoklinami φ_i i φ_{i+1} (rys. 23). W tym wypadku wierzchołki linji łamanej B, C i t. d. powinny znajdować się w jednakowej odległości od izoklinów, między którymi są zawarte⁶⁾. Linja izostatyczna tą drogą wyznaczona wskazana jest na rys. 16, jako linja *I*, przyczem, jak widać, linja ta dobrze zgadza się z krzywą, otrzymaną drogą przybliżonego całkowania równania (21). Na tym samym rysunku linja *II* została zbudowana na podstawie linii izoklinicznych, przeprowadzonych co 5° , a linja *III* na podstawie linii izoklinicznych przeprowadzonych co 10° .

Na rys. 18, 19 i 21 grubemi linjami punktowanemi uwidocznione są linje wykonane na podstawie linii izoklinicznych według schematu linji $abc...$ z rys. 22.

Budowanie linji izostatycznej według schematu $ABC...$ z rys. 23 następuje z trudności przy określaniu położenia punktów B, C, D jednakowo odległych od zawierających je izoklinów. To powoduje dowolności i dlatego uważam, iż przy korzystaniu z wymienionego schematu koniecznem jest jednoczesne sporządzenie linji izostatycznej według schematów $abc...$ i *O I II*... z rysunku 22 celem ustalenia granic błędu.

IV. Wnioski.

Porównajmy teraz sposób wyznaczenia linii izostatycznych na podstawie linii izoklinicznych ze sposobem przybliżonego całkowania równania różniczkowego linji izostatycznej.

Przy całkowaniu równania krzywej izostatycznej dokładność obliczenia może być, jak to wykazano

⁶⁾ Th. Wyss: „Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern und ihre praktischen Anwendungen“, Berlin, 1926.

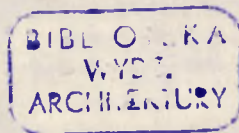
w rozdziale II, łatwo ustalona drogą porównania ze sobą kolejnych przybliżeń obliczenia. Dokładność, jaka tu może być uzyskana przez zmniejszanie dowolnych przyrostów, jest dostateczna dla wszelkich zagadnień o charakterze technicznym.

Przy wyznaczeniu linii izostatycznych na podstawie izoklinów dokładność tego wyznaczenia zależy od takich okoliczności, jak skala rysunku, ścisłość rysunku, ilość wyznaczonych linii izoklinicznych i t. d., które nie zawsze są łatwo uchwytnie i które nie pozwalają wobec tego łatwo ustalić granic błędu obliczenia.


Z drugiej strony wyznaczenie jednej linii izostatycznej drogą przybliżonego całkowania wymaga mniej więcej 1—2 godzin czasu i znacznego natężenia uwagi, wobec tego, że związana z tem całkowaniem praca rachunkowa nie daje się zmechanizować.

Samo wyznaczenie linii izostatycznej na podstawie danego pęku izoklinów jest rzeczą bardzo prostą. Wyznaczenie linii izoklinicznych wymaga wprawdzie dość znacznej ilości działań arytmetycznych, lecz działań powtarzających się i dających się ująć w tablice. Przytem pęk izoklinów pozwala na przeprowadzenie linii izostatycznych przez dowolną liczbę punktów.

Uważam więc iż, dopóki chodzi o wyznaczenie linii izostatycznych dla celów ogólnego zorientowania się w pracy danej konstrukcji, wyznaczenie tych linii na podstawie linii izoklinicznych jest całkowicie wskazane, gdy jednak chodzi o dokładne wskazanie miejsca w danej konstrukcji, które powinno być wzmocnione lub w którym należy oczekiwać pęknięć, należy wówczas uciec się do opisanego wyżej sposobu całkowania równania linii izostatycznej.



10-



2885