

M. T. HUBER.

---

**OGÓLNA TEORIA PŁYT ŻEL.-BETONOWYCH I JEJ  
PRAKTYCZNE ZASTOSOWANIE DO PŁYTY PROSTO-  
KĄTNEJ PODPARTEJ WZDŁUŻ CAŁEGO OBWODU.**

=====  
(La théorie générale des hourdis en béton armé, et ses applications au  
calcul des hourdis rectangulaires soutenues sur leurs quatre côtés).



**WE LWOWIE.**

I. ZWIĄZKOWA DRUKARNIA WE LWOWIE, UL. LINDEGO 4.

**1914.**

... ..  
... ..  
... ..  
... ..

... ..  
... ..

...

...

11. 11. 108

M. T. HUBER.

OGÓLNA TEORYA PŁYT ŻEL.-BETONOWYCH I JEJ  
PRAKTYCZNE ZASTOSOWANIE DO PŁYTY PROSTO-  
KĄTNEJ PODPARTEJ WZDŁUŻ CAŁEGO OBWODU.

(La théorie générale des hourdis en béton armé, et ses applications au  
calcul des hourdis rectangulaires soutenues sur leurs quatre côtés).

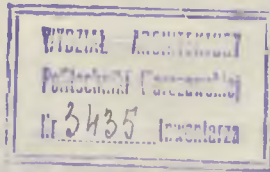


624.012.4

WE LWOWIE.

I. ZWIĄZKOWA DRUKARNIA WE LWOWIE, UL. LINDEGO 4.

1914.



---

ODBITKA Z „CZASOPISMA TECHNICZNEGO“ 1914.

---



## 1. Wstęp.

Jakkolwiek w budownictwie żel.-betonowym stanowi płyta równie ważny element konstrukcyjny jak belka, to jednak w obliczeniach technicznych panuje dotąd niepodzielnie jednowymiarowy schemat belki, po prostu dlatego, że jest bez porównania łatwiejszy do opanowania przez teorię, aniżeli dwuwymiarowy schemat płyty. Ale podobnie jak po wszechstronnem panowaniu kratownicy płaskiej (jako utworu dwuwymiarowego) w statyce konstrukcyi budowlanych przysła niedawno kolej na kratownicę przestrzenną (jako utwór trójwymiarowy) a badania teoretyczne i doświadczalne wskazały na jej ważne zastosowania praktyczne, tak nadszedł obecnie czas do zajęcia się teorią płyt i dostarczenia konstruktorom podstaw do racjonalnego wymiarowania, zwłaszcza, że dzięki zastosowaniu pewnych metod przybliżenia, jakie się pojawiły w najnowszych czasach, można ominąć wielkie trudności matematyczne ścisłej teorii.

Klasyczna teoria płyt zapoczątkowana w słynnej rozprawie konkursowej Zofii Germain nagrodzonej przez Akademię paryską w r. 1815, sprowadza zagadnienie odkształceń i natężeń pod wpływem danego obciążenia do całkowania pewnego równania różniczkowego cząstkowego 4-go rzędu, określającego powierzchnię ugięcia płyty z materiału jednolitego, równokierunkowego i podległego prawu Hooke'a. Teoria ta nie jest zresztą zupełnie ścisła w znaczeniu jakie przypisujemy ści-

słym rozwiązaniom ogólnych równań różniczkowych matematycznej teorii sprężystości, lecz o tyle dokładna, o ile

1. Grubość płyty  $h$  jest stała i mała wobec innych wymiarów;

2. Ugięcia płyty są małe w porównaniu do jej grubości;

3. Wpływ sił poprzecznych jest mały w porównaniu do wpływu momentów zginających i skręcających.

Te założenia są wprawdzie spełnione u płyt żel.-betonowych, lecz niejednorodność materiału, zboczenia betonu od prawa Hooke'a i pewnego rodzaju różnokierunkowość uzbrojenia nie pozwalają wogóle na bezpośrednie zastosowanie teorii klasycznej. Wobec tego spróbujemy przedewszystkiem zbudować ogólną teorię dla płyt żel.-betonowych, ograniczając się na razie do zwykłego przypadku uzbrojenia dwoma układami cienkich prętów o kierunkach wzajemnie prostopadłych i zadowalając się oczywiście takim stopniem przybliżenia, jaki w tych trudnych warunkach da się praktycznie osiągnąć.

## 2. Podstawy ogólnej teorii przy założeniu jednolitości materiału. Momenty zginające i skręcające.

Przedewszystkiem trzeba zauważyć, że przyjęcie w płycie pewnej płaszczyzny jako warstwy obojętnej, tak dogodne w teorii klasycznej, jest zgoła niedopuszczalne w odniesieniu do płyty żel.-betonowej, nawet gdyby beton podlegał w obszer-nych granicach prawu Hooke'a. Atoli to nie przeszkadza do określenia powierzchni ugięcia zapomocą którejkolwiek z płaszczyzn poprowadzonych równoległe do wierzchniej lub spodniej ściany płyty pomysłanej poziomo i odniesionej do prostokątnego układu współrzędnych o poziomych osiach  $X$  i  $Y$ ,

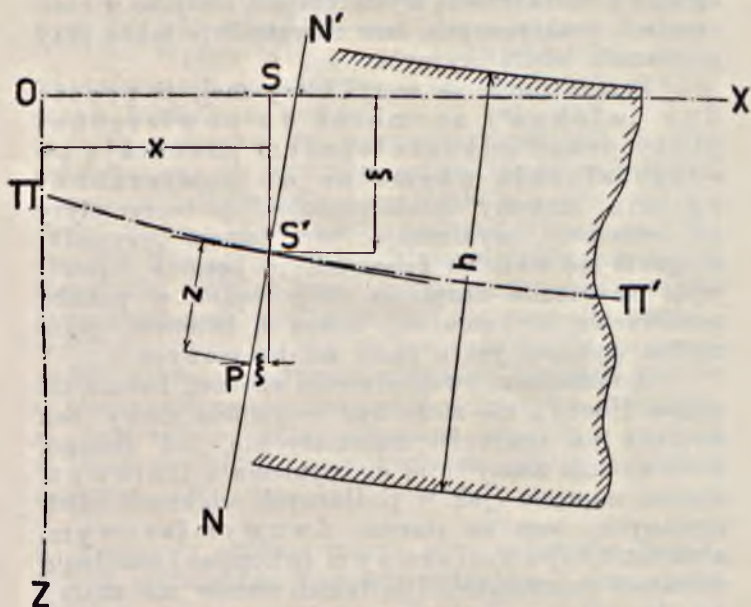
a pionowej osi  $Z$  skierowanej na dół. Skrócenia bowiem włókien pionowych będą wogóle bardzo małe w porównaniu do ugięć  $\zeta$ , wobec czego możemy uważać powierzchnie spodniej i wierzchniej ściany płyty równoległe przed ugięciem za równoległe i po ugięciu z dokładnością wystarczającą nie tylko w obliczeniach praktycznych, lecz niewątpliwie także przy pomiarach laboratoryjnych.

Drugie założenie teorii klasycznej, iż proste (lub „włókna“) normalne do powierzchni płyty przed odkształceniem pozostają po odkształceniu normalne do powierzchni ugięcia, możemy śmiało przenieść do teorii płyty żel.-betonowej, wykluczając tem samem przypadki ślizgania się wkładek żelaznych po betonie i pomiijając świadomie natężenia drugorzędne w pobliżu powierzchni stykania się żelaza z betonem, jakie można wykazać już u belek żel.-betonowych<sup>1)</sup>.

O dokładnem uwzględnieniu zbroczeń betonu od prawa Hooke'a nie może być oczywiście mowy (bez względu na trudności matematyczne) już dlatego, ponieważ nie mamy tutaj do czynienia z liniowym stanem napięcia (jak w podłużnych włóknach belek zginanych) lecz ze stanem dwuwymiarowym, a nawet trójwymiarowym (wliczając i natężenia ścinające poprzeczne). Dla takich stanów nie znamy dotąd zupełnie związków pomiędzy natężeniami a odkształceniami poza granicą proporcjonalności, gdyż odnośne badania doświadczalne robiono tylko przy liniowym stanie napięcia, a zasada superpozycji da się pogodzić tylko z prawem Hooke'a. Nie pozostaje zatem nic innego, jak przyjęcie do teoretycznych obliczeń w pierwszym przybliżeniu ważności prawa Hooke'a i dobranie później takiej średniej wartości współczynnika sprężystości betonu  $E_b$  (względ-

<sup>1)</sup> Por. M. T. Huber. „Obliczenie wymiarów belek betonowych obustronnie uzbrojonych“. *Czas. Techn.* 1906, Ust. 2. „Działanie uzbrojenia ściskanego“.

dnie stosunku  $n = E_f : E_b$  współczynników żelaza i betonu) która najlepiej odpowiada doświadczeniom z płytami. Jak wiadomo, zrobiono już tak w teorii odkształceń belek żel.-betonowych i znaleziono  $n \approx 10$ .



Ryc. 1.

Przyjawszy tymczasowo wszystkie założenia teorii klasycznej i obrawszy płaszczyznę środkową płyty za płaszczyznę  $XY$ , oznaczmy (jak w ogólnej teorii sprężystości) przez  $\xi, \eta, \zeta$  składowe przesunięcia dowolnego punktu płyty  $x, y, z$ , wywołanego jej ugięciem; wówczas możemy w myśl owych założeń uważać  $\zeta$  za niezależną od  $z$  funkcję samych  $x$  i  $y$ , która będzie określać rzędne słabo zakrzywionej powierzchni ugięcia. Dla punktów  $x, y, 0$  można nadto przyjąć  $\xi = 0, \eta = 0$ .



Niechaj  $III'$  przedstawia na ryc. 1 ślad powierzchni ugięcia na płaszczyźnie rysunku równoległej do  $XZ$ ; zaś  $S'$  punkt, który przed ugięciem znajdował się na płaszczyźnie środkowej w  $S$ ; natomiast  $NN'$  rzut normalnej do powierzchni ugięcia w punkcie  $S'$ : natenczas pochodna cząstkowa  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  o bardzo małej wartości liczbowej określa z pominięciem małych rzędu wyższego wartość kąta nachylenia  $NN'$  względem osi  $Z$ . Przesunięcie  $\xi$  punktu  $P$  płyty, który przed ugięciem leżał na normalnej w odległości  $z$  od płaszczyzny środkowej, określi przeto równanie:

$$\xi = -z \frac{\partial \zeta}{\partial x} \dots \dots \dots 1)$$

Podobnież przesunięcie składowe w kierunku  $Y$

$$\eta = -z \frac{\partial \zeta}{\partial y} \dots \dots \dots 1 a)$$

Stosownie do wzorów ogólnej teorii odkształcenia znajdziemy stąd dla wydłużeń właściwych  $\lambda_x, \lambda_y$  w kierunkach  $X$  i  $Y$ :

$$\lambda_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}; \quad \lambda_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \dots \dots 2)$$

Według prawa Hooke'a mamy teraz z pominięciem bardzo małego  $\sigma_z$ :

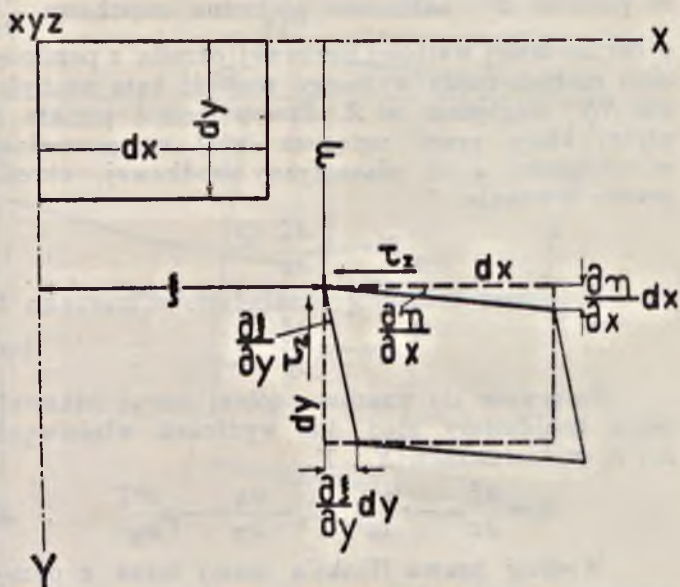
$$-z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_y \right), \quad -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \frac{1}{m} \sigma_x \right), \quad 3)$$

przyczem oznacza (jak w podręczniku „Technik“)  $E$  zwykły współczynnik sprężystości (moduł wydłużenia), zaś  $m$  liczbę Poisson'a; a stąd po rozwiązaniu względem  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{m^2 E}{m^2 - 1} z \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{m^2 E}{m^2 - 1} z \left( \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \dots \dots 4)$$

Obok natężeń normalnych występują na ścianach elementu  $dx dy dz$  także natężenia ścinające dwojakiego rodzaju.

Najpierw bowiem zmienia się wskutek opisanego odkształcenia kąt prosty między krawędziami



Ryc. 2.

$dx$  a  $dy$  (ryc. 2) o bardzo mały kąt posunięcia  $\gamma_z$ , który się składa z dwu części  $\frac{\partial \xi}{\partial y}$  i  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ , czyli

$$\gamma_z = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad \dots \quad 5)$$

Tej zmianie kąta towarzyszą natężenia ścinające  $\tau_z$  na ścianach  $dx dz$  i  $dy dz$  elementu o kierunkach prostopadłych do krawędzi  $dz$ , dla których na podstawie prawa Hooke'a i przy pomocy równań (1) i (1a) napiszemy wzór:

$$\tau_z = G \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = -2 G z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}, \quad . . . 6)$$

przyczem oznacza  $G$  współczynnik sprężystości postaciowej związany, jak wiadomo, z  $E$  równaniem

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E . . . . . 7)$$

Z równań (4) i (6) widzimy, że wszystkie trzy natężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_z$  są proporcjonalne względem  $z$ , a zatem ich rozmieszczenie na dowolnym odcinku  $h$  pomyślanym na bocznej ścianie elementu  $dx dy h$  przedstawi taki sam diagram, jaki przedstawia w przekroju belki zginanej rozmieszczenie natężeń normalnych.

Niechaj oznacza  $dF$  element pola  $dx dz$  albo  $dy dz$  (ryc. 3a) na ścianach, bocznych elementu  $h dx dy$ . Siły normalne  $\sigma_x dF$  działające na ścianę  $h dy$  są widocznie równoważne parze sił o momencie

$$\int z \sigma_x dF = dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_x dz,$$

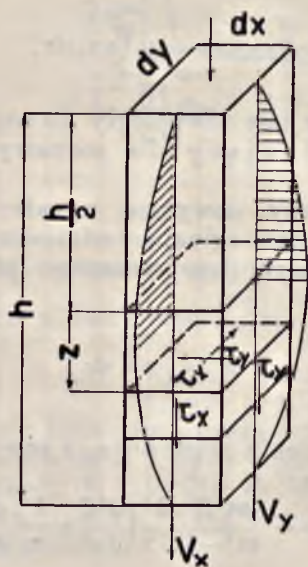
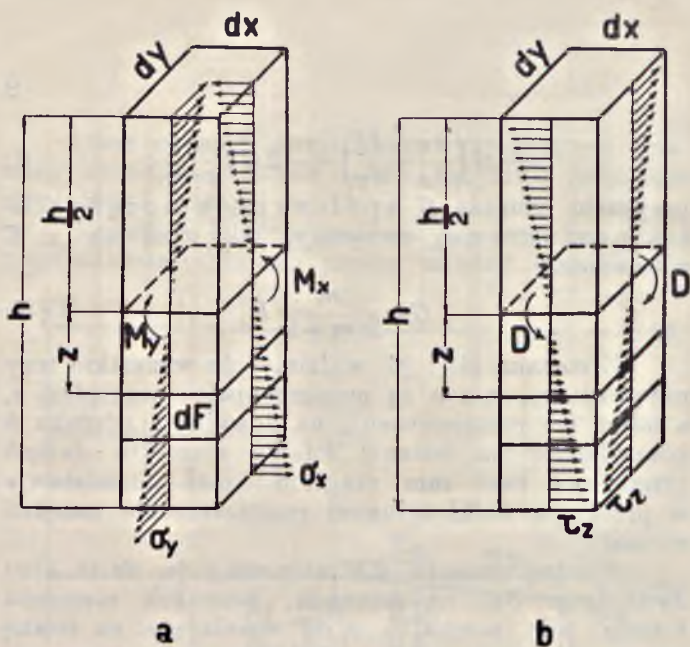
którego wektor jest równoległy do osi  $Y$ . Będzie to moment zginający dla rozpatrywanego przekroju  $h dy$ .

Podzieliwszy powyższe wyrażenie przez  $dy$  otrzymamy moment zginający odniesiony do jednostki szerokości przekroju poprzecznego płyty prostokątnej do osi  $X$ :

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_x dz,$$

albo po wstawieniu wartości  $\sigma_x$  z rów. 4) i wykonaniu całkowania:

$$M_x = -\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) . . . 8)$$



c

Рис. 3.

Analogicznie znajdziemy dla momentu zginającego odniesionego do jednostki szerokości przekroju prostopadłego do osi  $Y$ :

$$M_y = -\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \left( \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad . \quad . \quad 8a)$$

Dla określenia znaku algebraicznego zrobiliśmy przytem umowę analogiczną jak w teorii zgięcia belek. Siły styczne  $\tau_x dF$  działające na ścianę  $h dy$  (ryc. 3 b) są równoważne parze sił o momencie

$$\int z \tau_x dF = dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \tau_x dz,$$

którego wektor jest prostopadły do ściany. Jest to zatem moment skręcający, który w odniesieniu do jednostki szerokości przekroju określi podobnie jak powyżej wzór

$$D = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \tau_x dz,$$

ważny oczywiście dla obu przekroi. Stąd po wstawieniu wartości  $\tau_x$  z rów. (6) i zcałkowaniu:

$$D = -2G \cdot \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

Zanim przejdziemy do rozpatrzenia natężeń ścinających drugiego rodzaju,  $\tau_x$  i  $\tau_y$ , którym na ścianach  $h dx$  i  $h dy$  (ryc. 3 c) odpowiadają wypadkowe siły poprzeczne  $V_x$  i  $V_y$  odniesione do jednostki szerokości przekroju, — rozważmy znaczenie wyrażen dla  $M_x$ ,  $M_y$  i  $D$ .

Przedewszystkiem występuje we wszystkich trzech wzorach wyraz  $\frac{h^3}{12}$ , który jest niczem innym, jak tylko momentem bezwładności paska przekroju

plyty o szerokości 1 względem osi obojętnej ( $X$  lub  $Y$ ). Oznaczmy go przez  $J$ , a nadto nazwijmy

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1} = E' \quad \dots \quad 10)$$

plytowym współczynnikiem sprężystości, natenczas wzory (8), (8a) i (9) przybiorą postać

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -E' J \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -E' J \left( \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \\ D &= -2 G J \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 11)$$

### 3. Sztywność płyty przy zginaniu i skręcaniu.

#### Przejście do płyty żel.-betonowej.

Drugie pochodne  $\zeta$  występujące w powyższych wzorach określają, jak wiadomo, krzywiznę powierzchni ugięcia; łatwo z nich wyczytać, że momenty  $M_x$ ,  $M_y$  i  $D$  o danej wielkości wywołają tem słabszą krzywiznę powierzchni ugięcia (tem mniejsze wartości drugich pochodnych), im większe będą wyrażenia  $E' J$  tudzież  $G J$ . Te wyrażenia są przeto miarą sztywności płyty przy zginaniu względnie skręcaniu i grają podobną rolę, jak  $E J$  w teorii zgięcia belek, lub  $G J_p$  w teorii skręcenia okrągłych wałów. ( $J_p$  oznacza tutaj biegunowy moment bezwładności przekroju). Sztywność przy zginaniu  $E' J$  i sztywność przy skręcaniu  $G J$  płyty jednolitej, jak tymczasowo założyliśmy, wypadła oczywiście w obu przekrojach jednakowa, skoro jednak przejdziemy do płyty żel.-betonowej, w której pręty uzbrojenia mają kierunki równoległe do  $X$  i  $Y$ , to sztywność w obu przekrojach może być rozmaita. Podobnie jak w zginanej belce żel.-betonowej jest miarą sztywności

$$E_b J_b + E_f J_f = E_b (J_b + n J_f),$$

tak też możemy przyjąć w przekroju  $h dx$  względnie  $h dy$  za miarę sztywności przy zginaniu

$$E_b' J_{bx} + E_f J_{fx} = E_b' (J_{bx} + n' J_{fx}) = E_b' J_x, \quad . \quad 12 a)$$

względnie

$$E_b' J_{by} + E_f J_{fy} = E_b' J_y, \quad . \quad . \quad . \quad 12 b)$$

jeżeli stosownie do poprzednich oznaczeń nazwiemy:

$J_{bx}, J_{by}$  moment bezwładności na jednostkę szerokości przekroju poprzecznego samego betonu dla przekroju równoległego do osi  $X$  względnie  $Y$ ,

$J_{fx}, J_{fy}$  także momenty bezwładności przekroi samych wkładek żelaznych,

$n'$  stosunek zwykłego współczynnika sprężystości  $E_f$  żelaza do płytowego (średniego) współczynnika sprężystości betonu  $E_b'$ , na koniec

$J_x, J_y$  sprowadzone (idealne) momenty bezwładności obu przekroi odniesione do jednostki szerokości.

Jako osi momentów bezwładności należy oczywiście obrać proste poziome przechodzące przez środek przekroju sprowadzonego utworzonego z przekroju betonowego i  $n'$ -krotnego przekroju żelaznego.

Sztywność przy skręcaniu nie da się dla płyt żel.-betonowych przedstawić wedle tego samego schematu, co sztywność przy zginaniu, albowiem wskutek skręcania powstają w warstwach poziomych płyty, a więc i w warstwie uzbrojenia odkształcenia postaciowe, którym siatka uzbrojenia stawia opór po części pośrednio utrudniając odkształcenie betonu przylegającego do prętów, zresztą zaś tylko o tyle, o ile skrzyżowania prętów są usztywnione. Najczęściej takiego usztywnienia niema, wobec czego uzbrojenie przyczynia się tylko nieznacznie do sztywności przy skręcaniu.

Zważywszy na trudność teoretycznego oznaczenia, w jakim stopniu przyczynia się uzbrojenie wogóle do  $R_D$ , t. j. sztywności płyty przy skręcaniu, nale-

żałoby zależność  $R_D$  od  $G_b$ ,  $J_b$  i  $J_f$  zbadać doświadczalnie. Na razie można przyjąć dla niej formę:

$$R_D = G_b (J_b + \nu J_f) \quad \dots \quad 13)$$

w której oznacza  $\nu$  współczynnik liczbowy rosnący wraz z sztywnością na skrzyżowaniach prętów, a zatem bardzo mały w przypadku ich luźnego skrzyżowania. Łatwo przytem zrozumieć, że oś sprowadzonego momentu bezwładności

$$J_b + \nu J_f = J' \quad \dots \quad 14)$$

figurującego w wyrażeniu dla sztywności przy skręcaniu  $R_D = G_b J'$ , będzie wprawdzie leżeć w jednakowej wysokości na ścianach  $h dx$  i  $h dy$  elementu płyty, lecz będzie różna od osi momentów bezwładności  $J_x$  i  $J_y$ . Jej położenie znajdziemy oczywiście analogicznie z warunku, iż oś obojętna przechodzi przez środek sprowadzonego pola przekroju  $F_b + \nu F_f$ , przyczem nie pozostaje nic innego, jak przyjąć

$$F_b = \frac{1}{2} (F_{bx} + F_{by}), \quad F_f = \frac{1}{2} (F_{fx} + F_{fy}) \quad \dots \quad 15)$$

Nasuwa się jeszcze kwestya czem zastąpić liczbę  $m$  widoczną po prawej stronie dwu pierwszych z rów. (11). Nie będzie to oczywiście ani  $m_b$  ani  $m_f$ , lecz jakaś wartość pośrednia bardziej zbliżona do  $m_b$  z powodu przewagi betonu nad żelazem, która powinna być wyznaczona doświadczalnie. Z tego powodu pozostawimy symbol  $m$  bez oznaczonego wskaźnika.

Dla płyty żel.-betonowej napiszemy przeto zamiast (11) równania następujące:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -E_b' J_y \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -E_b' J_x \left( \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ D &= -2 G_b J' \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 16)$$



#### 4. Siły poprzeczne i równanie powierzchni ugięcia płyty żel.-betonowej.

Teraz dopiero możemy przystąpić do obliczenia sił poprzecznych  $V_x$  i  $V_y$  warunkujących natężenia ścinające drugiego rodzaju  $\tau_x$  i  $\tau_y$ . W tym celu napiszemy dla elementu  $h dx dy$  warunki momentów, względem osi równoległych do  $X$ ,  $Y$  i przechodzących przez środek elementu. Pierwszy z nich daje:

$$\begin{aligned} M_y dx - \left( M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx + \\ + D dy - \left( D + \frac{\partial D}{\partial x} dx \right) dy + V_x dx \cdot \frac{dy}{2} + \\ + \left( V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy \right) dx \cdot \frac{dy}{2} = 0, \end{aligned}$$

albo po redukcji i pominięciu wyrazu nieskończenie małego rzędu trzeciego wobec innych rzędu drugiego:

$$- \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - \frac{\partial D}{\partial x} dx dy + V_x dx dy = 0.$$

Stąd wypada pierwsze z następujących równań:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}, \\ V_y &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y}; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 17)$$

drugie zaś wypływa analogicznie z warunku momentów względem osi  $Y$ . Po wstawieniu wartości z równ. (16) otrzymujemy następujące wzory dla sił poprzecznych:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -E_b' J_x \left( \frac{1}{m} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} \right) - 2 G_b J' \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y}, \\ V_y &= -E_b' J_y \left( \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \frac{1}{m} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} \right) - 2 G_b J' \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2}. \end{aligned} \right\} 18)$$

Nakoniec do obliczenia ugięcia  $\zeta$  zastosujemy do elementu  $h dx dy$  niewyzyskany jeszcze warunek równowagi, a mianowicie warunek rzutów na oś  $Z$ .

Oznaczywszy przez  $p$  obciążenie płyty odniesione do jednostki pola mamy tedy:

$$p \, dx \, dy - V_x \, dx + \left( V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx - V_y \, dy + \\ + \left( V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) dy = 0,$$

czyli po uproszczeniu:

$$p = - \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x},$$

a stąd po wstawieniu wartości  $V_x$  i  $V_y$  z rów. (18) i uporządkowaniu:

$$E'_b \mathbf{I}_y \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \left[ \frac{1}{m} \frac{E'_b \mathbf{I}_x + E'_b \mathbf{I}_y}{2} + 2 G_b \mathbf{I}' \right] \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + E'_b \mathbf{I}_x \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = p \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

Powyższe równanie różniczkowe cząstkowe określa przeto powierzchnię ugięcia płyty żel.-betonowej. Całkując je znaleźlibyśmy  $\zeta$  jako funkcję  $x$  i  $y$ , a stąd przy pomocy wzorów (16) i (17) momenty zginające, skręcające i siły poprzeczne w każdym punkcie płyty.

W przypadku płyty jednolitej przybiera to równanie różniczkowe znaną postać:

$$E' J' \left( \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) = p \quad . \quad . \quad 19a)$$

przyczem 
$$E' = \frac{m^2 E}{m^2 - 1}, \quad J' = \frac{h^3}{12}.$$

Całkowanie równania różniczkowego (19) prowadziłoby do nader zawitych wzorów, rzadko nadających się do praktycznego zastosowania. Mimo to mogą mieć ściśle rozwiązania rów. (19) ważne znaczenie praktyczne, bądź przez to, iż służą do oceny dokładności wzorów przybliżonych, bądź też dlatego, że wskazują drogę badaniom doświadczalnym.

### 5. Praca odkształcenia płyty żel.-betonowej.

Do wyprowadzenia wzorów przybliżonych nowoczesnymi metodami służą ogólne prawa pracy odkształcenia. Aby je zastosować musimy znaleźć wyrażenie dla wewnętrznej pracy odkształcenia  $L_w$  (t. j. pracy sił wewnętrznych) płyty żel.-betonowej. To wyrażenie ma w przypadku płyty jednolitej postać:

$$L_w = \frac{1}{2} E' J \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{2}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + 2 \frac{m-1}{m} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (20)$$

znaną oddawna\*), którą łatwo przekształcić na następującą:

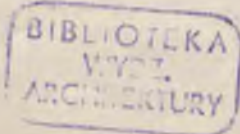
$$L_w = \iint \left[ \frac{E' J}{2} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{E' J}{2} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + 2 G J \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (20a)$$

Całkowanie w powyższych wzorach rozpóciiera się na całe pole płaszczyzny środkowej płyty. Zwłaszcza, że w wyrażeniu dla pracy odkształcenia pominięto bardzo mały wpływ sił poprzecznych i że wartości  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho_x}$ ,  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho_y}$  określają z dostatecznym przybliżeniem krzywiznę przekroji powierzchni ugięcia płaszczyznami  $XZ$  i  $YZ$ , możemy z uwzględnieniem związków (11) napisać:

$$L_w = \iint \left[ \frac{1}{2} M_x \frac{1}{\rho_x} + \frac{1}{2} M_y \frac{1}{\rho_y} + D \cdot \left( -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy,$$

z czego widzimy, że praca odkształcenia elementu  $h \cdot dx dy$  składa się z pracy zginania momentami  $M_x$ ,  $M_y$  i pracy skręcania momentami  $D$ . Podstawiając dla tych wielkości statycznych wartości

\*) Por. M. T. Huber: „O wytrz. płyty prostokątnej...“ *Przegl. techn.* LII. 1914, str. 261.

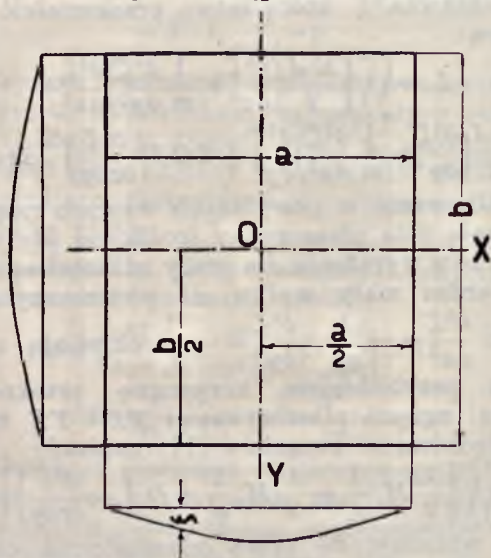


(16) odpowiadające płycie żel.-betonowej, znajdziemy widocznie wyrażenie dla pracy odkształcenia takiej płyty:

$$L_w = \frac{1}{2} \iint \left\{ E'_b J_y \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] + E'_b J_x \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] + 4 G_b J' \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy . \quad (21)$$

### 6. Przykład zastosowania ogólnej teorii. Płyta prostokątna swobodnie podparta wzdłuż całego obwodu i jednolicie uzbrojona.

Niechaj oznacza  $a$  długość,  $b$  szerokość płyty (ryc. 4) mierzoną jako odstęp teoretycznych krawędzi



Ryc. 4.

podparcia, poza które brzeg płyty wystaje tylko nieznacznie, tak iż można pominąć wpływ części wystającej. Przyjmijmy:

$$\zeta = f \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \dots \dots \dots 22)$$

jako równanie powierzchni ugięcia płyty odniesione do układu współrzędnych o osiach  $X, Y$  równoległych do boków prostokąta  $a, b$  i początku  $O$  w środku płyty. Nieoznaczony na razie parametr  $f$  określa widocznie strzałkę ugięcia w środku. Taką postać ma przybliżone równanie powierzchni ugięcia płyty jednolitej obciążonej jednostajnie, używane od dość dawna przez inżynierów francuskich, a wyprowadzone nową metodą przez H. Lorenza<sup>1)</sup>. To równanie jest nawet ściśłem w przypadku obciążenia  $p$  rozłożonego niejednostajnie według funkcji:

$$p = p_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \dots \dots \dots 23)$$

jak się łatwo przekonać wstawiwszy z (22) i (23) wartości w równanie różniczkowe (19). Do obliczenia strzałki ugięcia  $f$  wypada przytem warunek:

$$\pi^4 f \left( \frac{B}{a^4} + \frac{2C}{a^2 b^2} + \frac{A}{b^4} \right) = p_0, \dots \dots 24 a)$$

jeżeli przyjmiemy dla skrócenia:

$$\left. \begin{aligned} B &= E_b' J_y, & A &= E_b' J_x, \\ C &= \frac{1}{2m} (E_b' J_x + E_b' J_y) + 2 G_b J'. \end{aligned} \right\} \dots \dots 24 b)$$

Przyjmijmy teraz, że obciążenie płyty żel.-betonowej składa się z siły skupionej  $P$  umieszczonej w środku płyty i ciężaru jednostajnie rozłożonego  $Q$ , a równanie (22) określa w przybliżeniu powierzchnię ugięcia, natenczas idąc drogą wskazaną przez H. Lorenza obliczymy w przybliżeniu strzałkę  $f$  ze znanego warunku pracy:

$$L_m = L, \dots \dots \dots$$

<sup>1)</sup> H. Lorenz: „Angenäherte Berechnung rechteckiger Platten“. *Zeitschr. d. V. d. Ing.* 1913, str. 623.

który wyraża, że wewnętrzna praca odkształcenia (energia potencjalna) układu sprężystego równa się pracy obciążeń (sił zewnętrznych)  $L_z$ . Mamy tedy:

$$L_z = \frac{1}{2} Pf + \frac{1}{2} \frac{Q}{ab} \iint \zeta dx dy, \quad . . . 25)$$

a po wstawieniu wartości na  $\zeta$  z (22) i zcałkowaniu:

$$L_z = \left( \frac{P}{2} + \frac{2}{\pi^2} Q \right) f \quad . . . 25 a)$$

Z drugiej strony daje wzór (21), po podstawieniu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} &= -f \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} &= -f \frac{\pi^2}{b^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} &= +f \frac{\pi^2}{ab} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \end{aligned}$$

i uporządkowaniu:

$$\begin{aligned} L_w &= \frac{\pi^4}{2} f^2 \iint \left\{ \left[ \frac{E'_b J_y}{a^4 b^2} \left( b^2 + \frac{1}{m} a^2 \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{E'_b J_x}{a^2 b^4} \left( a^2 + \frac{1}{m} b^2 \right) \right] \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} + \\ &\left. + \frac{4 G_b J'}{a^2 b^2} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Stąd po wykonaniu całkowania:

$$\begin{aligned} L_w &= \frac{1}{2} \frac{\pi^4}{4} \frac{f^2}{a^3 b^3} \left\{ E'_b J_x a^4 + \left[ \frac{1}{m} (E'_b J_x + E'_b J_y) + \right. \right. \\ &\left. \left. + 4 G_b J' \right] a^2 b^2 + E'_b J_y b^4 \right\} \quad . . . 26) \end{aligned}$$

Z warunku pracy wynika zatem:

$$f = \frac{\frac{4}{\pi^4} \left( P + \frac{4}{\pi^2} Q \right) a^3 b^3}{E'_b J_x a^4 + \left[ \frac{1}{m} (E'_b J_x + E'_b J_y) + 4 G_b J' \right] a^2 b^2 + E'_b J_y b^4} \quad 27)$$

Dwa pierwsze z równ. (16) dają namto:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \pi^2 E'_b J_y \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{m b^2} \right) f \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \\ M_y &= \pi^2 E'_b J_x \left( \frac{1}{m a^2} + \frac{1}{b^2} \right) f \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Największe wartości osiągają momenty zginające widocznie w środku płyty, t. j. dla  $x=0$ ,  $y=0$ , a więc:

$$\left. \begin{aligned} \max M_x &= \pi^2 \frac{E'_b J_y}{a^2 b^2} \left( \frac{1}{m} a^2 + b^2 \right) f, \\ \max M_y &= \pi^2 \frac{E'_b J_x}{a^2 b^2} \left( a^2 + \frac{1}{m} b^2 \right) f. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Ponieważ dla przyjętego obciążenia jest środek płyty niewątpliwie miejscem niebezpiecznym, więc równania (29) będą służyć do obliczenia wyężenia materiału danej płyty, moment  $D$  jest bowiem w tem miejscu równy zero. Podstawiając wartość  $f$  z (27) we wzory (29) i zastępując  $\pi$  liczbową wartością, znajdziemy jeszcze:

$$\max M_x = \frac{0,405 (P + 0,405 Q) E'_b J_y a b \left( \frac{1}{m} a^2 + b^2 \right)}{E'_b J_x a^4 + \left[ \frac{1}{m} (E'_b J_x + E'_b J_y) + 4 G_b J' \right] a^2 b^2 + E'_b J_y b^4} \quad (30 a)$$

$$\max M_y = \frac{0,405 (P + 0,405 Q) E'_b J_x a b \left( a^2 + \frac{1}{m} b^2 \right)}{E'_b J_x a^4 + \left[ \frac{1}{m} (E'_b J_x + E'_b J_y) + 4 G_b J' \right] a^2 b^2 + E'_b J_y b^4} \quad (30 b)$$

## 7. Wzory praktyczne dla płyty prostokątnej jednolicie uzbrojonej.

Do praktycznych obliczeń przy projektowaniu uprościmy wzory (27) i (30) podstawiając

$$G_b = \frac{m}{2(m+1)} E_b = \frac{m-1}{2m} E'_b \quad (31)$$

i oddzielając wpływ obciążenia jednostajnie rozłożonego  $Q=abq$  od wpływu obciążenia skupionego  $P$ . W ten sposób otrzymamy kolejno:

1. Dla obciążenia  $q$  ( $kg/cm^2$ ) rozłożonego jednostajnie na całej powierzchni płyty:

$$f = \frac{1}{60,1} \frac{q}{E'_b} \cdot \frac{a^4 b^4}{J_x a^4 + \left[ \frac{1}{m} (J_x + J_y) + 2 \frac{m-1}{m} J' \right] a^2 b^2 + J_y b^4} \quad (32)$$

$$\max M_x = \frac{1}{6,10} q a^2 \cdot \frac{b^2 \left( \frac{1}{m} a^2 + b^2 \right) J_y}{J_x a^4 + \dots \text{(jak powyżej)}} \quad (33)$$

$$\max M_y = \frac{1}{6,10} q b^2 \cdot \frac{a^2 \left( a^2 + \frac{1}{m} b^2 \right) J_x}{J_x a^4 + \dots \text{(jak powyżej)}} \quad (34)$$

2. Dla obciążenia skupionego  $P$  w środku płyty:

$$f = \frac{1}{24,35} \frac{P}{E'_b} \cdot \frac{a^3 b^3}{J_x a^4 + \dots \text{(jak powyżej)}} \quad (36)$$

$$\max M_x = 0,405 P \cdot \frac{ab \left( \frac{1}{m} a^2 + b^2 \right) J_y}{J_x a^4 + \dots \text{(jak powyżej)}} \quad (37)$$

$$\max M_y = 0,405 P \cdot \frac{ab \left( a^2 + \frac{1}{m} b^2 \right) J_x}{J_x a^4 + \dots \text{(jak powyżej)}} \quad (38)$$

W przypadku płyty kwadratowej uzbrojonej w obu kierunkach jednakowo ( $b=a$ ,  $J_x=J_y=J$ ) przekształcają się powyższe wzory na następujące:

$$1. \quad f = \frac{1}{120,18} \frac{q a^4}{E'_b J} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{m} + \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \frac{J'}{J}} \quad (39)$$

<sup>1)</sup> Zamiast współczynnika  $1/24,35$  można napisać z równym przybliżeniem  $0,0411$ .



$$\max M = \frac{1}{12,20} \cdot qa^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{m-1 J'}{m+1 J}} \quad . \quad . \quad 40)$$

$$2. \quad f = \frac{1}{48,70} \frac{Pa^2}{E'_b J} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{m} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{J'}{J}} \quad . \quad 41)$$

$$\max M = 0,2025 P \cdot \frac{1}{1 + \frac{m-1 J'}{m+1 J}} \quad . \quad . \quad 42)$$

Przy zastosowaniu powyższych wzorów należy oczywiście pamiętać o znaczeniu wielkości  $E'_b$ ,  $m$ ,  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J'$  określonych dokładnie w ust. 3. (Wzory (12)—(15)). Pewną trudność następuje obiór liczby Poisson'a  $m$  i płytowego współczynnika sprężystości betonu  $E'_b$ , wobec czego byłoby bardzo pożądane, aby te wielkości oznaczyć zapomocą doświadczeń z płytami. Na razie wiemy tylko, że  $m$  betonu jest stosunkowo wielkie (mając oczywiście na myśli średnią wartość). Przyjąwszy n. p. w pewnej płycie kwadratowej  $J' : J = 0,7$ , zaś  $m = 6$  znajdziemy we wzorze (40)  $\max M = \frac{1}{18,3} qa^2$ , a z wzoru (42)  $\max M = \frac{1}{7,4} P$ , podczas gdy w belce tak samo obciążonej wypada, jak wiadomo  $\frac{1}{8} qa^2$ , względnie  $\frac{1}{4} P$  (licząc naturalnie tak samo moment przypadający na jednostkę długości). Jak widzimy redukuje „działanie płytowe“ moment silniej w przypadku obciążenia rozłożonego jednostajnie, aniżeli w przypadku obciążenia skupionego.

## 8. Porównanie z przepisami administracyjnymi różnych państw i z wzorami praktycznymi francuskiej „Rady głównej dróg i mostów“ z r. 1912 <sup>1)</sup>.

Że statyka płyty była dotąd prawie nieznaną ogółowi inżynierów, dowodzą ustępy z przepisów administracyjnych, odnoszące się do obliczenia płyt podpartych na wszystkich czterech krawędziach i tak:

1. Przepisy francuskie z r. 1906 zalecają moment zginający obliczony jak dla belki prostej o rozpiętości równej krótszemu bokowi n. p.  $a$  pomnożyć współczynnikiem redukcyjnym.

$$\frac{1}{1+2\frac{a^4}{b^4}}, \text{ albo } \frac{b^4}{2a^4+b^4} \quad \dots \quad 43)$$

w przypadku obciążenia jednostajnie rozłożonego.

2. Przepisy austriackie z r. 1911 zezwalają na redukcję momentu zginającego, gdy  $a \leq b < 1,5a$  przez rozłożenie całkowitego obciążenia  $Q$  na dwie takie same płyty, ale tylko dwustronnie podparte o rozpiętościach  $a$  i  $b$  w ten sposób, że na pierwszą przypada obciążenie

$$\frac{b^2}{ka^2+b^2}Q, \quad \dots \quad 44a)$$

na drugą zaś

$$\frac{ka^2}{ka^2+b^2}Q. \quad \dots \quad 44b)$$

Liczba  $k$  oznacza tutaj stosunek pola przekroju prętów żelaznych równoległych do  $a$ , odniesionego do jednostki długości przekroju płyty, przy czym  $k \geq 0,3$ .

<sup>1)</sup> „Calcul des hourdis en béton armé“. Note jointe à l'avis du Conseil Général de Ponts et Chaussées. Ann. d. P. et Ch. 1912—VI.

3. Przepisy pruskie z r. 1907 zezwalają na redukcję momentu zginającego przy obciążeniu jednostajnie rozłożonem do wartości

$$\frac{1}{12}qa^2, \quad \dots \quad 45)$$

jeżeli  $a \leq b < 1,5a$ .

4. Przepisy wirtemberskie z r. 1912 zezwalają na rozłożenie obciążenia na dwie płyty podobnie jak w przepisach austriackich, z tą jednak różnicą, że na płytę o rozpiętości  $a$ , względnie  $b$  przypadają obciążenia:

$$p_a = p \frac{b^4}{a^4 + b^4}, \quad p_b = p \frac{a^4}{a^4 + b^4}. \quad \dots \quad 46)$$

5. Przepisy szwajcarskie polecają podobnie jak austriackie i wirtemberskie rozłożyć obciążenie na

$$p_a = p \cdot \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \quad p_b = p \frac{a^2}{a^2 + b^2}. \quad \dots \quad 47)$$

Inne przepisy bądź to nie mają wcale odpowiednich ustępów, bądź też nie zawierają ich w skrótach ogłoszonych w peryodycznych wydawnictwach o budownictwie żel.-betonowem.

Przyjrząwszy się powyższym przepisom, widzimy, że polegają prawie wyłącznie na surowym empiryzmie, który chyba tylko we Francji opiera się częściowo na teorii klasycznej, obchodząc się zresztą dość bezceremonialnie z jej wzorami. Ta teoria dostarcza bowiem dla momentu zginającego wzoru przybliżonego:

$$\text{Max } M_x = \frac{16}{\pi^4} qa^2 \frac{\left(b^2 + \frac{1}{m} a^2\right) b^2}{(a^2 + b^2)^2}, \quad \dots \quad 48)$$

który daje wartości większe od obliczonych za pomocą ścisłego rozwiązania Naviera o  $\sim 10\%$  dla  $2 \geq \frac{b}{a} \geq 1$ , lecz o  $\sim 30\%$  dla  $\frac{b}{a} = \infty$ . Ze względu

na to, iż w warstwach skrajnych płyty panuje dwuwymiarowy stan napięcia, piszą inżynierowie francuscy wyznający Ponceletowską, niewątpliwie błędną, teorię wyteżenia materiału<sup>1)</sup> zamiast wzoru (48) następujący:

$$M_a = \frac{15}{\pi^4} q a^2 \frac{b^4}{(a^2 + b^2)^2} \dots \dots \dots 48a)$$

Ten wzór wyjaśnia genezę ministeryalnego przepisu, albowiem dla

$$\frac{b}{a} = 1, \quad 2, \quad \infty \quad \text{daje}$$

$$M_a = \infty \frac{1}{26}, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{6,5} \quad \text{razy } q a^2 \text{ zamiast}$$

$$M_a = \frac{1}{28,7}, \quad \frac{1}{11}, \quad \frac{1}{8,5} \quad \text{razy } q a^2 \text{ według}$$

ściśłego rozwiązania Navier'a. Autorowie rozumowali napewne tak: „Jeżeli  $\frac{b}{a} = \infty$ , to paski poprzeczne płyty zachowują się jak belki, dla których najw.  $M = \frac{1}{8} q a^2$ .

Uwzględniając nieuniknione w praktyce niedokładności obwodowego podparcia płyty w porównaniu do założeń teorii przyjmujemy dla bezpieczeństwa w przypadku płyty kwadratowej

$M_a = \frac{1}{24} q a^2$ . Formuła uniwersalna powinna dać obie te wartości, a nadto powinna zbliżać się budową do uproszczonej formuły teoretycznej (48a). Tym warunkom czyni widocznie zadość wzór

$$M_a = \frac{1}{8} q a^2 \frac{b^4}{2a^4 + b^4}, \quad \dots \dots \dots 48b)$$

<sup>1)</sup> Por. M. T. Huber. „Właściwa praca odkształcenia jako miara wyteżenia materiału“ Czas. tech. 1904. Albo: „O podstawach teorii wytrzymałości“. Prace mat. — fiz. t. XV.

który daje dla

$$\frac{b}{a} = \quad 1, \quad 2, \quad \infty$$

$$M_a = \quad \frac{1}{24}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{8} \quad \text{razy } qa^{2n}.$$

Takie rozumowanie prosi się o krytykę. Czyż bowiem projektujący inżynier z wyrobionem poczuciem statycznym będzie uwzględniał działanie płytowe przy wartości  $\frac{b}{a}$  znacznie większej od 2? Oczywiście nie! Od dobrego wzoru do obliczenia płyty należy przedewszystkiem żądać dokładności w interwale  $1 \leq \frac{b}{a} \leq 2$ , czemu bez porównania lepiej dogadza forma przybliżonego wzoru teoretycznego (48a), aniżeli wzoru (48b).

Drugą kardynalną wadą wzoru (48b) poleczonego przepisami francuskimi jest zupełne zaniedbanie różnic w sztywności przy zginaniu momentami  $M_x$  i  $M_y$ , różnic właściwych płytom żel.-betonowym. (Uwzględnienie tych różnic w przepisach austriackich nie ma, jak łatwo zauważyć, naukowej podstawy).

Z powyższych powodów zajęła się we Francji „Rada główna dróg i mostów“ rozpatrzeniem kwestyi obliczenia płyt żel.-betonowych i opracowała w r. 1912 nadzwyczaj cenny memoriał, w którym między innymi zaleca następujące wzory praktyczne, oparte po części na podobnych rozumowaniach, jakimi się posługiwali autorowie przepisów:

1. Dla obciążenia jednostajnie rozłożonego na całej płycie:

$$f = \frac{1}{80} \cdot \frac{q}{E_b} \frac{a^4 b^4}{a^4 J_x + a^2 b^2 \sqrt{J_x J_y} + b^4 J_y}, \quad \dots \quad 49)$$

$$\max. M_x = \frac{1}{8} qa^2 \frac{b^4 J_y}{a^4 J_x + a^2 b^2 \sqrt{J_x J_y} + b^4 J_y}, \quad \dots \quad 50)$$

$$\max M_y = \frac{1}{8} q b^2 \frac{a^4 J_x}{a^4 J_x + a^2 b^2 \sqrt{J_x J_y} + b^4 J_y} \quad 58)$$

2. Dla obciążenia skupionego w środku:

$$f = \frac{1}{40} \frac{P}{E_b} \frac{a^2 b^2}{a^2 J_x + b^2 J_y} \quad 52)$$

$$\max M_x = P \frac{a^2 J_x + b^2 J_y}{5a^2 J_x + 3b^2 J_y} \quad 53)$$

$$\max M_y = P \frac{a^2 J_x + b^2 J_y}{3a^2 J_x + 5b^2 J_y} \quad 54)$$

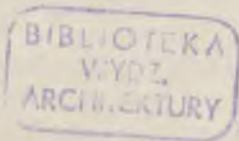
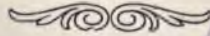
Wzory powyższe nazwane w memoryale „empirycznymi“ stoją bez wątpienia znacznie wyżej od wzorów wszystkich znanych przepisów ministeryalnych i w przypadku obciążenia jednostajnie rozłożonego zbliżają się formą bardzo do nowych wzorów teoretycznych wyprowadzanych w niniejszej pracy, natomiast różnią się znacznie w przypadku obciążenia skupionego. We wzorach memoryału nie widać nadto zupełnie wpływu sztywności uzbrojenia przy skręcaniu i wpływu liczby Poisson'a, których istnienie nie podlega żadnej wątpliwości. Dalszą dyskusję lepiej wszakże odłożyć do czasu, w którym będziemy rozporządzać odpowiednią ilością dat doświadczalnych.

Na zakończenie zauważymy jeszcze, iż teoria rozwinięta w niniejszej pracy nadaje się dobrze i do płyt kasetowych, t. j. płyt z krzyżującymi się żebrami, jeżeli te żebra dzielą płytę na prostokąty dość małe w porównaniu do prostokąta podparcia; z pewnemi zaś modyfikacyami da się także zastosować do siatek belkowych, jakie np. tworzą pomosty mostów żelaznych i drewnianych.

Lwów w lutym 1914.

### Résumé.

L'auteur établit l'équation différentielle (19) de la flexion, et l'expression du travail élastique (21), dans le cas où l'armature des hourdis est constituée par deux systèmes orthogonaux des fils de fer. Sans chercher à présent la solution rigoureuse l'auteur applique la méthode approximative de Mr. H. Lorenz pour trouver les formules théoriques, relatives au calcul de la flèche  $f$  au centre de l'hourdis, et aux moments fléchissants  $\max M_x$ ,  $\max M_y$ , dans le cas de la charge uniformément répartie et d'une charge concentrée au milieu de l'hourdis rectangulaire. L'approximation des nouvelles formules peut être regardée comme suffisante, lorsque le rapport  $\frac{b}{a}$  (fig. 4.) ne dépasse pas la valeur 2 ( $b > a$ ); elles diffèrent des formules empiriques du Conseil Général des Ponts et Chaussées (en date du 11. Juillet 1912) principalement par les termes du dénominateur (dans les form. 32—38), qui dépendent de la rigidité torsionnelle de l'hourdis.



10 -

(The following text is extremely faint and largely illegible due to fading and bleed-through from the reverse side of the page. It appears to be a formal document or report.)







3435<sup>1</sup>

