PRACE WARSZAWSKIEGO TOWARZYSTWA POLITECHNICZNEGO

Nr. 22 WARSZAWA 1936

Dr. Inż. Z. WASIUTYŃSKI

O ENERGETYCZNEJ MIERZE SZTYWNOŚCI I O ZASTOSOWANIU JEJ DO ANALIZY USTROJÓW LANGER'A

NAKŁADEM WARSZAWSKIEGO TOWARZYSTWA POLITECHNICZNEGO

Dr. Inż. Z. WASIUTYŃSKI

O ENERGETYCZNEJ MIERZE SZTYWNOŚCI I O ZASTOSOWANIU JEJ DO ANALIZY USTROJÓW LANGER'A

WARSZAWA — 1936

Wydane przez Warszawskie Towarzystwo Politechniczne

Z. WASIUTYŃSKI

DE LA MESURE ÉNERGÉTIQUE DE RIGIDITÉ ET DE SON APPLICATION À L'ANALYSE DES BOW-STRINGS

VARSOVIE – 1936

Publié par la Société Polytechnique de Varsovie

/

Dr. Inż. Ż. WASIUTYŃSKI.

O ENERGETYCZNEJ MIERZE SZTYWNOŚCI I O ZASTOSOWANIU JEJ DO ANALIZY USTROJÓW LANGER'A.

(Referat wygłoszony na zebraniu W. T. P. w dniu 28 maja 1934 r.)

Sztywność nie jest terminem jednoznacznym. Nietylko w różnych językach nadają jej zupełnie różne znaczenia, ale nawet w naszym języku sztywność ma odmienne znaczenia, zależnie od dziedziny, w której o niej mówimy. Gdy mówimy w mechanice teoretycznej o bryłach sztywnych, to mamy na myśli bryły nieodkształcalne, podczas gdy mówiąc w mechanice technicznej o tem, że dany układ jest bardziej sztywny od innego układu, chcemy powiedzieć tylko, że pierwszy układ jest mniej odkształcalny od drugiego.

Naogół w statyce i w wytrzymałości przez sztywność nazywamy iloczyny wchodzące do mianowników wyrażeń na odkształcenia belek lub prętów. A więc w wyrażeniu na kąt skręcenia φ, pręta o długości l, obciążonego momentem skręcającym M,

$$\varphi = \frac{M\,l}{(Szt)},$$

sztywność przekroju kołowego $(Szt) = G\,I_0$,

a przekroju eliptycznego $(Szt) = \dfrac{G\,A^4}{4\,\pi^2\,I_0}$;

G jest tu współczynnikiem sprężystości poprzecznej,
A polem przekroju,
I_0 biegunowym momentem bezwładności.

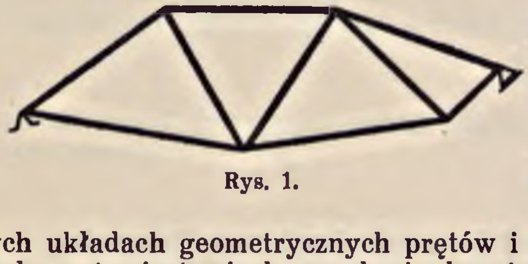
W wyrażeniu na ugięcie belki wolnopodpartej, obciążonej w połowie rozpiętości siłą S

$$y = \frac{S\,l^3}{48\,E\,I},$$

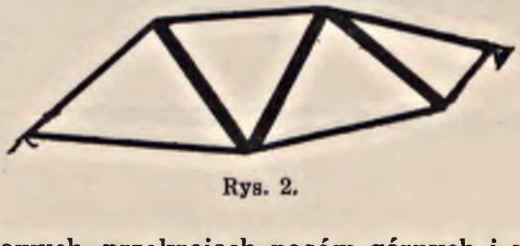
przez sztywność rozumiemy iloczyn $E\,I$.

Rzadziej mówi się o sztywności pręta rozciąganego, rozumiejąc przez to iloczyn $E\,A$ współczynnika sprężystości przez pole przekroju, stanowiący mianownik wyrażenia na wydłużenia.

Gdy jest mowa o belkach kratowych, złożonych z dwóch pasów, połączonych krzyżulcami, słupami i wieszakami, to przez analogję z belkami pryzmatycznemi, przyjęto obliczać ich sztywność jako iloczyn współczynnika sprężystości przez moment bezwładności pasów. W takiem ujęciu sprawy tkwi pewna niedokładność. Istotnie wyobraźmy sobie dwie kratownice o jedna-



Rys. 1.



Rys. 2.

kowych układach geometrycznych prętów i o jednakowych przekrojach pasów górnych i pasów dolnych; natomiast niech przekroje krzyżulców drugiej kratownicy (rys. 2) będą wielokrotnie większe od przekrojów krzyżulców pierwszej (rys. 1). Przy dowolnym układzie przekrojów, tnących oba pasy każdej z kratownic, momenty bezwładności pasów będą jednakowe, ale pod dowolnym układem obciążeń druga kratownica będzie dawać mniejsze odkształcenia od pierwszej, gdyż krzyżulce jej będą się mniej odkształcać. Będzie bardziej sztywną. Jako miary sztywności kratownic nie można więc stosować iloczynu ze współczynnika sprężystości przez moment bezwładności przekrojów pasów, gdyż miara ta jest nieścisła.

Wreszcie do porównywania sztywności kopuł, lub jakichkolwiek innych ustrojów bardziej złożonych, jest nam brak miernika, równie ogólnego jak poprzednio omówione mierniki sztywności belek pryzmatycznych. Pozostaje tu jedynie porównywanie odkształceń rozpatrywanych ustrojów pod jednakowemi obciążeniami. Tak też często bywa rozumiana sztywność kratownic, a to zapewne dlatego, że przepisy stawiają zwykle warunki, aby największe ugięcie przęsła czy też dźwigara nie przekraczało drobnego ułamka rozpiętości. Ten sposób pojmowania sztywności kratownic, choć pozwala na orzeczenie w każdym przypadku, która kratownica jest bardziej sztywna, odpowiada tylko przybliżenie celowi, dla którego wyznaczamy sztywność. Dlaczegóż bowiem ustroje sztywne uważamy za lepsze od mniej sztywnych? Przecież naogół odkształcenia ich są tak małe, że nie zniekształcają ustrojów w sposób szkodliwy dla ich użyteczności. Odkształceń dźwigarów i przęseł mostowych unikamy zazwyczaj nie dlatego, że te odkształcenia są niebezpieczne same przez się, lecz dlatego, że pod obciążeniami ruchomemi w ustrojach bardziej odkształcalnych, powstają drgania, mogące wywołać duże naprężenia; niebezpieczeństwo powstania wielkich naprężeń podczas drgań ustroju jest tem większe, im częstość jego drgań własnych jest bliższa do częstości uderzeń obciążenia ruchowego. Częstość drgań ustroju, drgającego ruchem harmonicznym wyraża się zależnością:

$$\omega = \sqrt{\frac{\Pi}{K}}$$

w której Π oznacza energję sprężystą, nagromadzoną w ustroju w chwili gdy odkształcenia dojdą do swej aplitudy, zaś K oznacza iloraz z energji kinetycznej ustroju drgającego w chwili przejścia przez położenie nieodkształcone, przez kwadrat częstości drgań.

Jako pierwsze przybliżenie wartości energji sprężystej odkształcenia podczas drgań, można przyjmować wartość energji sprężystej odkształcenia statycznego, wywołanego obciążeniami istotnie działającemi na ustrój. Energję tę oznaczymy przez Π_s.

$$\omega = \sqrt{\frac{\Pi_s}{K}} \qquad \Pi_s = \frac{1}{2}\sum_1^u S_i y_i .$$

Przyjęte założenie odpowiada zastąpieniu kształtu, który ustrój przyjmuje podczas drgań, przez postać odkształconą pod wpływem statycznego działania obciążeń i ciężaru własnego ustroju. Jak widzimy częstość drgań zależy nietyle od największego ugięcia ustroju, lecz od pracy sprężystej stanowiącej sumę iloczynów ugięć przez obciążenia i ciężar własny.

Wyrażenie na częstość drgań, nasuwa myśl użycia energji sprężystej odkształcenia jako miary sztywności ustrojów, przez uważanie tych ustrojów za sztywniejsze, których energja sprężysta pod danem obciążeniem jest mniejsza. Rozpatrzmy jakie wyniki otrzymać można przyjmując tę wielkość za miarę sztywności ustrojów i jaki jest stosunek energji sprężystej odkształcenia do tych wielkości, które zwykle służą do porównywania sztywności ustrojów.

Przedewszystkiem widoczną jest proporcjonalność energji sprężystej odkształcenia do odkształceń ustroju. Powiedzenie więc, że ten ustrój jest bardziej sztywny, który daje mniejszą pracę sprężystą, ma znaczenie zbliżone do powiedzenia, że ten ustrój jest bardziej sztywny, który daje mniejsze odkszatałcenie, pod dowolnem obciążeniem.

Dalej, wyrażenia na energję sprężystą skręcania i ścinania:

$$\Pi = \frac{M^2 l}{2 G I_0}, \qquad \Pi = \frac{T^2 l}{2 G A}\mu$$

na energję sprężystą zginania

$$\Pi = \frac{M^2 l}{2 E I},$$

oraz na energję sprężystą rozciągania:

$$\Pi = \frac{N^2 l}{2 E A}$$

wskazują, że praca sprężysta odkształcenia jest odwrotnie proporcjonalna do iloczynów

$$G I_0 \,,\; E I \,,\; E A ,$$

które przyjęto nazywać sztywnością na skręcanie, zginanie i rozciąganie. Mówiąc, że pręty pryzmatyczne dają mniejszą wartość pracy sprężystej przy zginaniu, skręcaniu lub rozciąganiu stwierdzamy przez to, że odpowiadające im iloczyny

$$GI_0\ ,\ EI\ ,\ EA$$

są większe, a więc, że ich sztywności są większe.

Przechodząc do poprzednio omawianego przykładu dwóch kratownic, różniących się tylko przekrojami krzyżulców, na których stwierdziliśmy niewystarczalność iloczynu

$$EI$$

jako miary sztywności na zginanie, widzimy, że pod dowolnem, jednakowem obciążeniem obu kratownic, pierwsza z nich da większą pracę sprężystą od drugiej, gdyż jest bardziej od niej odkształcalna.

Wreszcie odwrotność pracy sprężystej odkształcenia może służyć za miarę sztywności wszelkich ustrojów bardziej złożonych, np. kopuł nie posiadających w statyce budowli prosto formułującej się miary odkształcalności.

Jakiż wpływ wywierają zmiany energji sprężystej odkształcenia na częstość drgań ustroju? Rozpatrzmy dwa układy wytrzymałościowe o jednakowych rozkładach mas, lecz o różnych sztywnościach. Niech np. drugi ustrój daje pod dowolnem obciążeniem większe odkształcenie od pierwszego. Wyobraźmy sobie, że oba układy wprowadzono w drgania o jednakowych amplitudach wszystkich punktów w których skupione są masy. Wówczas w wyrażeniach na częstości drgań tych ustrojów:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\Pi_1}{K_1}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{\Pi_2}{K_2}}$$

wielkości sprowadzonych energij kinetycznych będą sobie równe $K_1 = K_2$, gdyż zależą one tylko od amplitud drgań ω i od mas ustrojów m:

$$K = \frac{1}{2}\int_0^l v^2\, m\, dx.$$

Natomiast praca sprężysta pierwszego ustroju będzie większa od pracy sprężystej drugiego, gdyż aby odkształcić ustrój bardziej sztywny do tej samej amplitudy co ustrój mniej sztywny, trzeba użyć większych obciążeń. Mamy więc przy jednakowej amplitudzie drgań:

$$\Pi_1 > \Pi_2\,,$$

oraz

$$\omega_1 > \omega_2\,,$$

a więc ustrój bardziej sztywny daje większą częstość drgań.

Z drugiej strony, jeżeli oba ustroje mają jednakowe rozkłady mas to ustrój sztywniejszy da mniejszą pracę sprężystą odkształcenia statycznego:

$$\Pi_{s1} < \Pi_{s2}.$$

Wnioskujemy stąd, że z dwóch ustrojów o jednakowych rozkładach mas, ten ma większą częstość drgań, któremu odpowiada mniejsza praca sprężysta pod tem samem obciążeniem obu ustrojów. Mierząc sztywność odwrotnością pracy sprężystej pod dowolnem obciążeniem, widzimy, że ustroje, które według tego miernika; są bardziej sztywne, mają jednocześnie większą częstość drgań, wskutek czego obciążenia powtarzające się okresowo będą w nich wywoływać drgania o mniejszej amplitudzie, a więc i mniejsze naprężenia, niż w ustrojach, w których ten miernik sztywności jest większy.

Nie można tego samego twierdzić o ustrojach, z których jeden daje w dowolnym przekroju większe maksimum ugięcia, od maksimum ugięcia drugiego ustroju, w jakimkolwiek innym przekroju. Bowiem największe ugięcie nic nie mówi o pracy sprężystej, której wielkość zależy od ugięć nie jednego punktu, lecz wszystkich tych punktów w których działa obciążenie. Słowem, jeżeli maksimum ugięcia jednego ustroju jest mniejsze od maksimum ugięcia drugiego ustroju:

$$y^{(1)}_{\max} < y^{(2)}_{\max}$$

to częstość drgań pierwszego ustroju może być większa, równa, lub mniejsza od częstości drgań drugiego ustroju:

$$\omega^{(1)} \lesseqgtr \omega^{(2)}.$$

W wyniku tych rozważań o zależności sztywności ustrojów wytrzymałościowych od odwrotności energji sprężystej odkształcenia, widzimy, że wartość tej odwrotności może służyć za miarę sztywności we wszystkich przypadkach w których sztywność mierzymy: bądź mniejszemi odkształceniami pod dowolnem obciążeniem, bądź iloczynami GI_0, EI, EA, bądź też częstością drgań własnych ustroju. Jedynie wówczas, gdy za ustrój bardziej sztywny uważamy ustrój, dający mniejsze maksimum ugięcia, odwrotność energji sprężystej odkształcenia nie zawsze ma wartości większe w ustroju o mniejszem maksimum ugięć.

* * *

Stwierdziwszy, że wartość pracy sprężystej pod dowolnem obciążeniem jest odwrotnie proporcjonalna do wszystkich mierników, któremi zazwyczaj wyrażamy sztywność ustrojów, rozpatrzmy przykład porównywania sztywności dwóch układów przez zestawienie ich prac sprężystych.

Rys. 3.

Rys. 4.

Weźmy dwa ustroje, z których każdy jest utworzony z łuku, ze ścięgna i z wieszaków (rys. 3 i 4). Niech układy geometryczne i wymiary tych ustrojów będą jednakowe. Co się zaś tyczy przekrojów prętów, to załóżmy:

1) że przekroje wieszaków w obu ustrojach są jednakowe,

2) że przekroje łuku 1-go ustroju mają pola i momenty bezwładności równe polom i momentom bezwładności przekrojów ścięgna 2-go ustroju,

3) że przekroje ścięgna 1-go ustroju mają pola i momenty bezwładności równe polom i momentom bezwładności przekrojów łuku 2-go ustroju,

4) że łuk 1-go ustroju jest n-krotnie sztywniejszy od łuku 2-go ustroju, a więc, że

$$\frac{I_{Ł1}}{I_{Ł2}} = n, \qquad \frac{I_{S2}}{I_{S1}} = n.$$

Jeżeli stosunek n jest dostatecznie duży np. $n \geqslant 8$, to 1-y ustrój stanowi tak zwany łuk ze ścięgnem, a drugi ustrój jest łukiem wzmocnionym sztywną belką. W budowie mostów żelaznych, ten drugi uszrój nosi nazwę ustroju Langer'a, Ustroje Langera budowano już 100 lat temu, dawniej dawano im jednak wypełnienie z krzyżulców. Kilka lat temu Nielsen, dokładnie analizując ten ustrój, wykazał, że przez odpowiednie pochylenie wieszaków (rys. 5 i 6) można

Rys. 5.

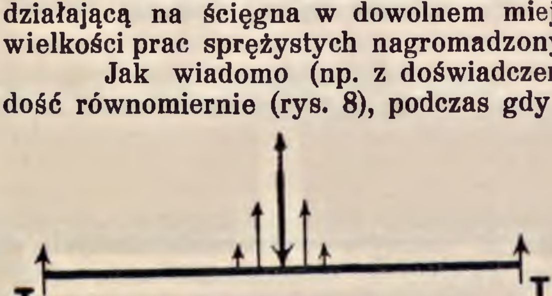
Rys. 6.

zmniejszyć momenty gnące w belce usztywniającej, a więc zwiększyć jego sztywność. W Polsce niedawno zastosowano ten ustrój, budując 4 przęsła Langer'a o rozpiętości 78 m przez Narew w Zegrzu. Bardzo powszechnym zarzutem, stawianym ustrojom Langer'a jest zarzut, jakoby te ustroje były mało sztywne. Porównanie wielkości prac sprężystych, nagromadzających się pod dowolnem obciążeniem w ustroju o sztywnym łuku i w ustroju o sztywnej belce wykaże, że ustrój Langer'a może być sztywniejszy od łuku ze ściągiem, o ile tylko rozpiętość jest niewielka i o ile spełnione są poprzednie założenia t. j. jeżeli:

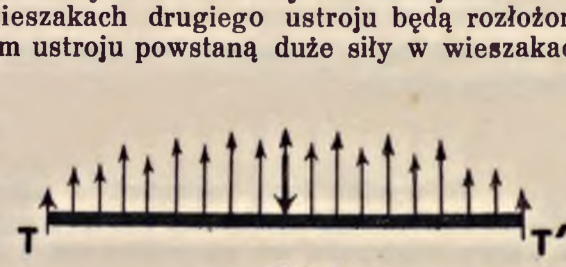
$$A_{Ł1} = A_{S2} \quad I_{Ł1} = I_{S2} \qquad A_{S1} = A_{Ł2} \quad I_{Ł2} = I_{S1}.$$

Wyobraźmy sobie, że każdy z rozpatrywanych ustrojów jest obciążony siłą skupioną, działającą na ścięgna w dowolnem miejscu, jednak w obu ustrojach jednakowem, i rozpatrzmy wielkości prac sprężystych nagromadzonych pod wływem tych sił w każdym z ustrojów.

Jak wiadomo (np. z doświadczeń), siły w wieszakach drugiego ustroju będą rozłożone dość równomiernie (rys. 8), podczas gdy w pierwszym ustroju powstaną duże siły w wieszakach



Rys. 7.



Rys. 8.

najbliższych obciążeniu, a pozostałe wieszaki będą prawie że nieobciążone (rys. 7). Z równań rzutów na pion sił zewnętrznych, myślowo wyodrębnionych cięgiem obu ustrojów, widać, że siły, działające w wieszakach drugiego ustroju są naogół mniejsze od sił wywołanych w tych wieszakach pierwszego ustroju, które sąsiadują z obciążeniem. Wnioskujemy stąd, że energja sprężysta odkształcenia wszystkich wieszaków ustroju Langer'a jest mniejsza od energji sprężystej odkształcenia wieszaków łuku ze ścięgnem. Oznaczymy to symbolicznie nierównością:

$$\Pi'_w > \Pi''_w$$

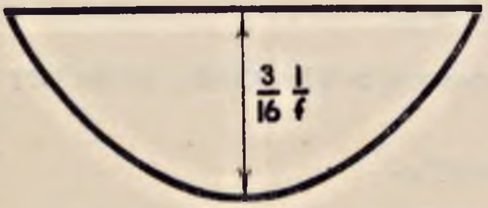
Porównajmy teraz energję sprężystą odkształcenia łuku pierwszego ustroju z energją sprężystą odkształcenia belki drugiego ustroju. Linje wpływu momentów gnących w obu tych elementach mają kształt prawie jednakowy. Obciążenie łuku może być uważane jako obciążenie skupione, natomiast na belkę poziomą oprócz siły jednostkowej działają reakcje wieszaków. Rozkład tych reakcyj nie jest zupełnie równomierny, największe ich wartości występują w okolicy siły jednostkowej (rys. 9). Dlatego też momenty gnące w belce poziomej drugiego ustroju są

Rys. 9.

zawsze mniejsze od momentów gnących w łuku pierwszego ustroju. Ponieważ zaś i łuk ma większą długość, przeto praca sprężysta wywołana w nim przez momenty gnące jest większa od pracy sprężystej, wywołanej w belce. Energja ta składa się z trzech składników: z których jeden pochodzi od momentów gnących, drugi — od sił normalnych, a trzeci od sił tnących. Łuk pierwszego ustroju, obciążony bardzo nierównomiernie, może być przyrównany do łuku obciążonego siłą skupioną. Natomiast belka pozioma drugiego ustroju, podlegająca działaniu siły obciążającej i reakcyj wieszaków, rozkładających się równomiernie, może być przyrównana do belki leżącej na sprężystem podłożu i obciążonej siłą skupioną. Momenty gnące w łuku pierwszego ustroju, będą więc niewątpliwie większe od momentów gnących w belce drugiego ustroju. To samo będzie z pracą sprężystą tych momentów. Zaznaczymy to symbolicznie, pisząc:

$$\Pi'_{ŁM} > \Pi''_{SM}.$$

Aby porównać pracę sprężystą sił normalnych łuku pierwszego ustroju, z pracą sprężystą sił normalnych ścięgna drugiego ustroju, zauważmy, że siły normalne w ścięgnach obu ustrojów są prawie jednakowe, gdyż siły te zależą przedewszystkiem od układu osi prętów ustroju, a w znacznie mniejszym stopniu od właściwości wytrzymałościowych tych prętów. Tak więc w obu ustrojach linje wpływu rozporów mogą być wyznaczone z dostateczną dokładnością, jako parabole o strzałkach $\frac{3}{16}\, l/f$ (rys. 10).



Rys. 10.

Rys. 11.

Z równania rzutów na poziom odcinka łuku pierwszego ustroju, wynika, że siły normalne w tym łuku są większe od sił rozciągających w belce ustroju Langer'a. Jeżeli więc przekroje obu tych elementów są jednakowe, to siły normalne dają większą energję odkształcenia w łuku pierwszego ustroju niż w ścięgnie drugiego ustroju i to tembardziej, że łuk jest dłuższy od ścięgna. Mamy stąd nierówność:

$$\Pi'_{ŁN} > \Pi''_{SN}.$$

Rozpatrując siły trące w łuku pierwszego ustroju i w belce drugiego ustroju, widocznem jest, że wykresy tych sił przebiegają tak, jak to pokazano na rys. 12 i 13, a mianowicie, że

Rys. 12.

Rys. 13.

siły trące w łuku pierwszego ustroju, są niemal że stałe wprawo i wlewo od okolicy siły obciążającej i, że siły tnące w belce drugiego ustroju zmieniają się stopniowo z obu stron punktu działania obciążenia, dając wykresy zbliżone do trójkątów. W dowolnym przekroju łuku pierwszego ustroju, siła tnąca jest naogół większa od siły tnącej w dowolnym przekroju belki ustroju Langer'a. Energja sprężysta odkształcenia, przypadająca siłom tnącym, jest w tym przypadku większa w pierwszym ustroju niż w drugim:

$$\Pi'_{ŁT} > \Pi''_{ST}.$$

Porównajmy teraz energję sprężystą odkształcenia ścięgna pierwszego ustroju z energją sprężystą odkształcenia łuku drugiego ustroju. Ścięgno pierwszego ustroju, obciążone nierównomiernie, ulega większym momentom gnącym od łuku drugiego ustroju, obciążonego równomiernie. Praca sprężysta odkształcenia wywołana momentami gnącemi w ścięgnie, jest więc w tym przypadku większa od pracy sprężystej momentów gnących w łuku:

$$\Pi'_{SM} > \Pi''_{ŁM}.$$

Rozumując podobnie, spostrzegamy, że siły normalne dają mniejszą pracę w ścięgnie pierwszego ustroju niż w łuku drugiego ustroju:

$$\Pi'_{SN} < \Pi''_{ŁN}$$

i że siły tnące w temże ścięgnie dają większą pracę od sił tnących w łuku drugiego ustroju:

$$\Pi'_{ST} > \Pi''_{ŁT}.$$

Zestawiając wszystkie nierówności energij sprężystych odkształceń obu ustrojów, mamy:

$$\Pi'_{W} > \Pi''_{W}$$

$$\Pi'_{ŁM} > \Pi''_{SM} \qquad \Pi'_{ŁN} > \Pi''_{SN} \qquad \Pi''_{ŁT} > \Pi''_{ST}$$

$$\Pi'_{SM} > \Pi''_{ŁM} \qquad \Pi'_{SN} < \Pi''_{ŁN} \qquad \Pi'_{ST} > \Pi''_{ŁT}.$$

Rozpatrzmy tu zestawione wartości prac sprężystych sił normalnych. Z obu nierówności tych prac, druga ma znaczenie dominujące, gdyż dotyczy cienkiego ścięgna pierwszego ustroju i cienkiego łuku drugiego ustroju, a więc elementów o mniejszych przekrojach, silniej naprężonych od łuku pierwszego ustroju i od ścięgna drugiego ustroju. Jest więc:

$$\Pi'_{ŁN} + \Pi'_{SN} < \Pi''_{SN} + \Pi''_{ŁN}.$$

Pomijając pracę sił tnących i pracę zmagazynowaną w wieszakach, zestawiamy pracę sprężystą obu ustrojów w dwóch nierównościach:

$$\Pi'_{M} > \Pi''_{M} \qquad \Pi'_{N} < \Pi''_{N}.$$

Pierwsza z nich mówi, że momenty gnące dają większą pracę w łuku ze ścięgnem niż w ustroju Langer'a, a druga, że siły normalne dają większą pracę w ustroju Langer'a niż w łuku ze ścięgnem.

Zważywszy, że praca sprężysta, wywołana odkształceniami gnącemi na znacznie większą wartość od pracy, wywołanej siłami normalnemi, widzimy, że pod obciążeniem dowolnie ustawioną siłą skupioną, łuk ze ścięgnem daje większą energję odkszałcenia od ustroju Langer'a, a więc że jest mniej sztywny. Jeżeli jednak obciążenia obu ustrojów rozkładają się równomiernie wzdłuż ich ścięgien, to w łuku pierwszego ustroju i w belce usztywniającej ustroju Langer'a, momenty gnące równają się zeru. Pod temi szczególnemi obciążeniami, o sztywnościach ustrojów decydują wartości prac sprężystych sił normalnych, gdyż praca momentów gnących w każdym ustroju jest zerem.

Stosunek prac sprężystych odkształcenia rozpatrywanych ustrojów, zależy od rodzaju obciążeń, którym te ustroje podlegają. Istotnie obciążenia stałe rozkładają się prawie równomiernie wzdłuż ścięgien obu ustrojów i nie wywołują niemal żadnych momentów gnących w ich łukach i belkach. Momenty gnące mogą być wywołane jedynie przez obciążenia ruchome. Jeżeli więc praca sprężysta zginania łuków lub belek, wywołana obciążeniem ruchomem, dominuje w obu ustrojach nad pracą sprężystą sił normalnych, to ustrój Langer'a zachowuje się tak, jak ustrój bardziej sztywny od łuku ze ścięgnem. Jeżeli natomiast praca sił normalnych, wywołana obciążeniem stałem i ruchomem, dominuje nad pracą momentów gnących, to ustrój Langer'a daje większe ugięcia i drga z mniejszą częstością od łuku ze ścięgnem, gdyż gromadzi w sobie większą ilość energji sprężystej.

Wnioskujemy stąd, że w zastosowaniu do mostów małych rozpiętości, w których obciążenia ruchome wywołują znaczne momenty gnące, ustrój Langer'a jest bardziej sztywny od łuku ze ścięgnem.

Natomiast w mostach dużych rozpiętości, których dźwigary magazynują wielkie ilości energji sprężystej, pochodzącej od ciężaru własnego mostu, ustrój Langer'a jest mniej sztywny od łuku ze ścięgnem.

Wnioski te wyprowadzono w przyjętych poprzednio założeniach, że przekrój łuku pierwszego ustroju jest równy przekrojowi ścięgna ustroju Langer'a, oraz, że przekrój ścięgna pierwszego ustroju jest równy przekrojowi łuku drugiego ustroju. Jednak, jak to wiadomo, ustroje Langer'a są lżejsze od łuków ze ścięgnami, to znaczy, że przy tej samej rozpiętości ich elementy mają naogół mniejsze wymiary od elementów tych łuków. Wskutek tego ustroje Langer'a skupiają w sobie większą ilość energji sprężystej, niżby to wynikało z przyjętych tu założeń.

Ten przykład porównania sztywności dwóch ustrojów wytrzymałościowych, przez zestawienie ich prac sprężystych, wskazuje na to, że energja sprężysta odkształcenia, może być dogodnym miernikiem sztywności ustrojów. Gdybyśmy bowiem porównywali sztywność łuków ze ścięgnami i ustrojów Langer'a, drogą obliczania ich ugięć, to bylibyśmy zmuszeni do przeprowadzenia długich rachunków algebraicznych, niepodatnych do dyskusji. Aby dojść do wniosków trzebaby było wykonać przeliczenia liczbowe na kilku przykładach. Droga ta nietylko nie nadawałaby się do ogólnego rozpatrzenia zagadnienia, ale też byłaby zupełnie pozbawiona przejrzystości metod energetycznych.

DE LA MESURE ÉNERGÉTIQUE DE RIGIDITÉ ET DE SON APPLICATION À L'ANALYSE DES BOW-STRINGS.

Résumé.

Le mot rigidité est employé sous diverses significations. En mécanique rationelle on appelle rigide un corps non déformable. Lamé appelait par rigidité le coefficient G des déformations élastiques angulaires. En mécanique appliquée, rigide signifie peu déformable et on comprend par rigidité d'une poutre ou d'une barre les dénominateurs des expressions algébriques formées pour les déformations, à savoir: EJ, ES, $GS^4:(4\pi^2 J_0)$ etc. Mais si l'on consent à mesurer ainsi la rigidité des systèmes élastiques, on trouve par exemple, que deux poutres triangulées, ayant les mêmes sections des membrures principales, mais des tirants de sections notamment différentes, ont la même rigidité. On écarte cette inexactitude en adoptant pour mesure de rigidité l'inverse du potentiel interne de déformation. Cette mesure est toujours d'accord avec les mesures habituelles, car elle est proportionnelle aux produits EJ, ES, $GS^4:(4\pi^2 J_0)$ etc.; elle est sensible aux variations des sections des tirants des systèmes réticulaires, en somme elle est toujours applicable à comparer les déformations statiques de toutes les constructions, à partir des plus simples jusque'aux plus compliquées, pour lesquelles on n'avait pas d'expressions générales de rigidité, comme par exemple pour les coupoles. De plus, l'inverse du potentiel interne nous donne non seulement l'idée des déformations statiques, mais aussi des déformations dynamiques. La fréquence des vibrations harmoniques d'un système élastiques s'exprime par la relation

$$\omega = \sqrt{\frac{\Pi}{K}}$$

dans laquelle Π signifie le potentiel interne au moment de la déformation maximum et K le quotient de l'énérgie cinétique du système au moment de passage par l'état non déformé, par le carré de la fréquance. Π peut être remplacé avec une bonne approximation par le potentiel interne de la déformation statique sous les charges appliqués au système. Il est donc clair qu'on appelant plus rigides les systèmes élastiques qui accumulent moins de travail durant leur déformation, on pourra dans les cas d'égale disposition des masses, énoncer une conclusion précieuse, que le système plus rigide a une plus grande fréquence de vibration.

En comparant les potentiels internes de deux poutres en bow-string dont la première a l'arc notamment plus rigide que le tirant, et la seconde a la section et le moment d'inertie de l'arc égaux à la section et au moment d'inertie du tirant de la première, tandis que le tirant de la seconde poutre a la section et le moment d'inertie les mêmes que l'arc de la première, on arrive à conclure, que le potentiel dû aux moments fléchissants est plus grand dans la première poutre que dans la seconde

$$\Pi'_M > \Pi''_M$$

et qu'au contraire le potentiel dû aux forces normales est plus petit dans la première poutre que dans la seconde

$$\Pi'_N < \Pi''_N .$$

Donc en cas de répartition uniforme de charges et du poids propre de ces systèmes, en quel cas les moments fléchissants sont nuls, le premier est plus rigide que le second, car son potentiel, dont la majorité sera due aux forces normales, deviendra plus petit que le potentiel du second. Au contraire, si les charges sont concentrées, ce sont les potentiels dûs aux moments fléchissants qui décideront de leurs rigidité, et l'on trouve en ce cas que la première poutre peut être moins rigide que la seconde. Le second systeme est donc préférable au premier surtout en cas de petites et moyennes portées, c'est à dire dans les cas que les charges roulantes jouent un role important.

Zakł. Druk. F. Wyszyński i S-ka, Warszawa