

Prof. dr. inż. S. BRYŁA.

Obliczanie konstrukcyj stalowych
na podstawie plastyczności materiału
w świetle najnowszych doświadczeń

ODBITKA Z CZASOPISMA „PRZEGLĄD TECHNICZNY” Nr. 3. Rok 1936

W A R S Z A W A

1 9 3 6

Prof. dr. inż. S. BRYŁA.

Obliczanie konstrukcji stalowych
na podstawie plastyczności materiału
w świetle najnowszych doświadczeń

624.04 : 624.014

ODBITKA Z CZASOPISMA „PRZEGLĄD TECHNICZNY” Nr. 3. Rok 1936
W A R S Z A W A
1 9 3 6

DRUKARNIA
TECHNICZNA
WARSZAWA
CZACKIEGO
3/5

BIBLIOTEKA
WYDZ.
ARCHITEKTURY

2416

Zazwyczaj oblicza się belki na podstawie odkształcenia sprężystego, przy uwzględnieniu prawa *Hooke'a*. Linja naprężeń zginających jest więc prostą przecinającą oś obojętną ukośnie a naprężenia są proporcjonalne do odstępów od osi obojętnej. Moment zginający, jaki odpowiedni przekrój przejmuje, wynosi wtedy w wypadku przekroju symetrycznego:

$$M = 2 \int_0^{h/2} \sigma \cdot y \cdot dF = \sigma \cdot W \quad \dots (1)$$

Zwiększając moment zginający, dochodzimy do granicy plastyczności materiału σ_P , najpierw we włóknach skrajnych przekroju (rys. 1). Przy dalszym zwiększeniu obciążenia włókna te wyciągają się dalej, naprężenie ich jednak nie może przekroczyć σ_P . Otrzymujemy więc wykres naprężeń według rys. 2, zaś przy dalszym jeszcze zwiększeniu obciążenia ostatecznie wykres według rys. 3, który przedstawia naprężenia przy obciążeniu granicznym. Wytrzymałość belki w danym przekroju jest wyczerpana, gdyż od tej chwili odkształcenia poczynają nadmiernie wzrastać. Moment

przenoszony przez belkę przy tym stanie naprężenia wynosi w przekroju symetrycznym

$$M_P = 2 \cdot \sigma_P \int_0^{h/2} y \cdot df = 2 \sigma_P \cdot S = \sigma_P \cdot W' \quad (\text{II})$$

przyczem S jest momentem statycznym połowy przekroju względem osi ciężkości. Dla przekroju niesymetrycznego mamy

$$M = \sigma_P \cdot (S_g + S_d) = \sigma_P \cdot W' \quad (\text{III})$$

gdzie S_g i S_d są momentami statycznymi przekroju nad, względnie pod osią obojętną.

Gdy po przekroczeniu granicy plastyczności belkę odciążymy zupełnie, pozostają po zniknięciu sprężystej części odkształceń według linii prostej stałe naprężenia wewnętrzne $\sigma_w = \sigma_p - \sigma_s$ (rys. 4 i 5). Po zupełnym odciążeniu moment zginający $M = 0$, zatem moment wewnętrzny M_w musi być też równy zero.

$$M_w = 2 \int_0^{h/2} \sigma_w \cdot y \cdot df = 0$$

Z równania tego po podstawieniu $\sigma_w = \sigma_p - \sigma_s$, możemy obliczyć σ_s we włóknie skrajnym.

Dla przekroju prostokątnego o naprężeniach według rys. 5 wypada:

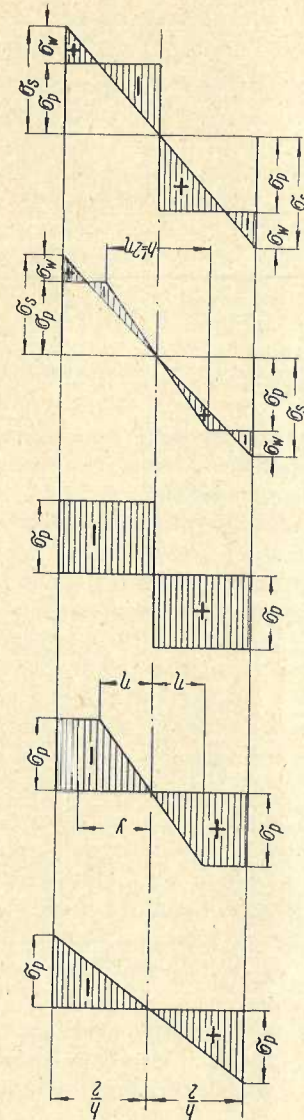
$$\frac{2 \sigma_s}{h} \cdot \frac{h^3}{24} - \sigma_p \frac{h^2}{8} = 0,$$

a stąd $\sigma_s = \frac{3}{2} \sigma_p$, zaś $\sigma_w = \sigma_p - \frac{3}{2} \sigma_p = -\frac{1}{2} \sigma_p$;

dla takiegoż przekroju o dowolnym naprężeniu według rys. 4

$$\sigma_s \frac{h^2}{3} = \sigma_p \frac{h^2}{2} - \sigma_p \cdot \frac{h^2}{6}$$

$$\sigma_s = \sigma_w - \sigma_p$$



Rys. 1-5.

$$\sigma_w \cdot \frac{h^2}{3} = -\sigma_P \frac{h^2}{3} + \sigma_P \frac{h^2}{2} - \sigma_P \frac{h'^2}{6}$$

$$\sigma_w \frac{2h^2}{6} = -\sigma_P \frac{2h^2}{6} + \frac{\sigma_P 3h^2}{6} - \sigma_P \frac{h'^2}{6}$$

$$\sigma_w 2h^2 = \sigma_P \cdot h^2 - \sigma_P h'^2$$

$$\sigma_w = \frac{1}{2} \sigma_P \frac{(h^2 - h'^2)}{h^2}$$

$$\sigma_w = \frac{1}{2} \sigma_P \left[1 - \left(\frac{h'}{h} \right)^2 \right]$$

Wykreślnie przedstawia powyższe równanie wykres na rys. 6.

Gdy belkę obciążymy ponownie, lecz ciężarem większym, niż poprzednio, nowe naprężenia zginające sumują się algebraicznie z naprężeniami wewnętrznymi, powstałymi po pierwszym obciążeniu. Ponieważ naprężenia wewnętrzne we włóknach skrajnych i w pobliżu ich mają znak odwrotny, przeto nastąpi wyrównanie naprężeń i wykres naprężeń przybliży się bardziej do wykresu na rys. 3. Powstaną też nowe wartości naprężeń wewnętrznych po powtórnym odciążeniu belki. Przy dalszym kolejnym obciążaniu coraz większymi ciężarami i odciążaniu wykres naprężeń będzie się stale zmniejszał z tendencją do wyrównania naprężeń we wszystkich włóknach.

Natomiast gdybyśmy w pewnym momencie po zdjęciu obciążenia, obciążyli belkę powtórnie ciężarem pierwotnej wielkości, to odkształcenia się już nie powiększą i wykres naprężeń się nie zmieni, bez względu na to, ile razy powtarzalibyśmy to obciążenie.

Zatem pomimo miejscowego płynięcia materiału we włóknach skrajnych i w ich pobliżu następuje przystosowanie się belki do danej wielkości obciążenia, które można powtarzać nieograniczoną ilość razy bez obawy zniszczenia belki.

Granicę takiego plastyczno-sprężystego przystosowania się belki czyli granicę nośności belki osiągnie się wtedy, gdy we wszystkich włóknach strefy rozciąganej i ściskanej powstanie jednakowe naprężenie, równe naprężeniu na granicy plastyczności σ_P według rys. 3. Stan taki odpowiada wskaźnikowi przekroju W' , obliczonemu wyżej z równania (II) $W' = 2S$ — dla przekroju symetrycznego, względnie z równania (III) $W' = S_g + S_d$ dla przekroju niesymetrycznego. Naprężenia wewnętrzne, które pozostaną w belce po zdjęciu tego obciążenia granicznego pokazuje rys. 5.

Przy powtórnej obciążeniu belki takim samym ciężarem zaobserwujemy ciągłe zwiększanie się ugięcia trwałego co oznacza, że belka już nie może się przystosować do tego obciążenia.

Na powyższych założeniach zbudowana jest nowa teoria obliczania konstrukcyj stalowych uwzględniająca odkształcenie plastyczne materiału.

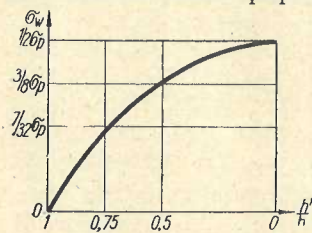
Nowa teoria ma zastosowanie zarówno do wymiarowania belek statycznie wyznaczalnych jak i do wyznaczania momentów gnących w ustrojach hiperstatycznych. Oddziaływania natomiast i odkształcenia (ugięcia) takich ustrojów proponuje się obliczać nadal według teorii sprężystości.

Obliczenie przekrojów odbywa się w sposób wyżej wyjaśniony zapomocą równań II względnie III. Nowy wskaźnik przekroju W' , równy, jak wiemy, sumie momentów statycznych części rozciąganej i ściskanej przekroju względem osi obojętnej, jest dla przekroju prostokątnego o 50%, a dla przekroju dwuteowego o 17% większy od wskaźnika W , obliczonego na podstawie teorii sprężystości. Os

obojętna w przekroju symetrycznym pokrywa się z osią obojętną, wyznaczoną z teorii sprężystości, t. j. z osią symetrii, natomiast w przekroju niesymetrycznym jest ona przesunięta względem osi obojętnej sprężystej i dzieli przekrój na dwie części o jednakowej powierzchni.

W belkach ciągłych i innych konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych następuje według nowej teorii wyrównanie momentów maksymalnych dodatnich z ujemnymi. Skoro bowiem w jednym z przekrojów moment zginający przy pewnej wartości obciążenia osiągnie wartość momentu granicznego M_p (równanie II lub III), która ze względu na plastyczność materiału przy dalszym zwiększaniu obciążania nie może być przekroczona, wytworzy się w belce rodzaj przegubu. Nadwyżkę momentu przejmują wtedy przekroje mniej naprężone. W ten sposób przez powstawanie tych tak zwanych plastycznych przegubów zmniejsza się stopniowo ilość niewiadomych systemu niewyznaczalnego, aż otrzyma się system statycznie wyznaczalny, w którym momenty nie przekraczają nigdzie wartości M_p , zależnej wyłącznie od przekroju, granicy plastyczności materiału, oraz żądanego stopnia bezpieczeństwa konstrukcji, a zatem od wielkości zgóry wiadomych.

A zatem — jeżeli tylko jest możliwe dla jakiegoś n -krotnie statycznie niewyznaczalnego systemu znaleźć takie poprawki $\Delta M_1, \Delta M_2, \dots, \Delta M_n$,



Rys. 6.

żeby w każdym elemencie (np. w każdym przęśle belki ciągłej) było co do bezwzględnej wartości:

$$\min. M_i + \Delta M_i \leq M_p \quad (\text{IV})$$

$$\max. M_i + \Delta M_x \leq M_p,$$

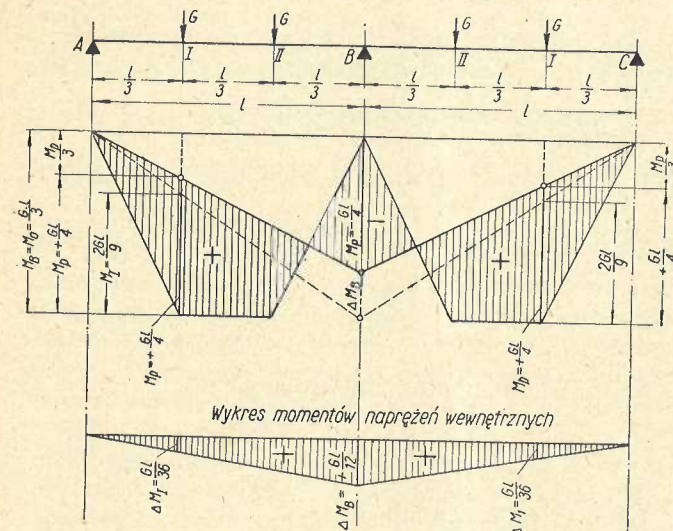
to system ten jest nośny dla danego obciążenia

choćby się ono powtarzało nieograniczoną ilość razy. We wzorze tym $\min. M_i$ i $\max. M_i$ są momentami obliczonymi na podstawie teorii sprężystości, zaś ΔM_x jest funkcją liniową sąsiednich poprawek ΔM_i oraz ΔM_{i-1} lub ΔM_{i+1} zależną od położenia x przekroju z maksymalnym momentem $\max. M_i$.

Przykład. Podciąg dwuprzęsłowy o równych przęsłach o rozpiętości l , obciążony jednakowymi oddziaływaniami belek G_I i G_{II} w odstępach co $\frac{1}{3} l$ (rys. 7).

Na podstawie teorii sprężystości otrzymujemy:

$$M_B = -\frac{1}{3} Gl, \quad M_I = +\frac{2}{9} Gl.$$



Rys. 7.

Ponieważ co do bezwzględnej wartości $M_B > M_I$, przeto płynięcie materiału nastąpi najpierw na oporze B i moment osiągnie tam wartość $M'_B = M_p$

Przy dalszym zwiększaniu obciążania moment podporowy nie powiększa się, bo naprężenie graniczne σ_p już się rozszerzyło na cały przekrój, natomiast wzrastają momenty w przęsłach, aż pod ciężarami G_I dojdą również do wartości $M'_I = M_P$

Ponieważ $M_I = M_0 - \frac{M_B}{3}$, zaś moment belki jedno przęsłowej $M_0 = \frac{1}{3} Gl$, przeto przy obciążeniu granicznym, dla którego $M'_I = M'_B = M_P$ (M'_B wartość bezwzględna) otrzymamy równanie:

$$M_P = \frac{1}{3} Gl - \frac{M_P}{3} \text{ a stąd } M_P = \frac{1}{4} Gl$$

Jak widać z powyższego przy uwzględnieniu plastyczności moment podporowy zmniejszył się z $\frac{1}{3} Gl$ do $\frac{1}{4} Gl$, a właściwie zwiększył się z $(-\frac{1}{3} Gl)$ do $(-\frac{1}{4} Gl)$, zaś największy moment w przęśle powiększył się z $\frac{2}{9} Gl$ do $\frac{1}{4} Gl$. Podobnie wzrosły momenty we wszystkich przekrojach, przy czym przyrost ich wartości jest proporcjonalny do odległości danego przekroju od podpory skrajnej.

Przyrost momentu podporowego M_B wynosi

$$\Delta M_B = \left(-\frac{1}{4} Gl\right) - \left(-\frac{1}{3} Gl\right) = +\frac{1}{12} Gl,$$

przyrost zaś momentu M_I

$$\Delta M_I = \frac{M_B}{3} = \frac{1}{36} Gl = \frac{1}{4} Gl - \frac{2}{9} Gl$$

Na rys. 7 u dołu sporządzono wykres poprawek, które należy dodać do momentów obliczonych.

z teorii sprężystości, aby otrzymać momenty wyrównane. Ponieważ, jak widzieliśmy (por. str. 62) odkształcenia plastyczne pozostawiają w materiale naprężenia wewnętrzne, proporcjonalne do różnic między naprężeniami plastycznymi a sprężystymi, przeto przez analogję poprawki te nazwano momentami naprężeń wewnętrznych.

W belkach ciągłych wieloprzęsłowych rozwiązanie polega na znalezieniu najkorzystniejszej linii momentów naprężeń wewnętrznych, przy której nastąpi wyrównanie momentów w możliwie największej ilości przęseł.

W świetle nowej teorii nierówne osiadanie podpór nie wywiera wpływu na wytrzymałość konstrukcji, a tylko zwiększa lub zmniejsza odkształcenia trwałe i momenty naprężeń wewnętrznych.

Obliczanie konstrukcji według nowej teorii daje w rezultacie oszczędność na materiale w granicach od 12 do 25%. Ponadto zaś umożliwia stosowanie prostszych przekrojów, bez nakładek, a przynajmniej z mniejszą ich ilością i różnorodnością, co przez zmniejszenie trudności konstrukcyjnych może wpłynąć na obniżenie także ceny jednostkowej konstrukcji.

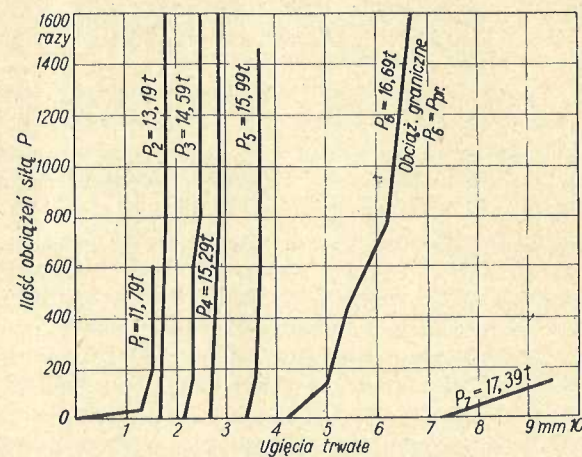
Jest przeto rzeczą niezmiernie ważną stwierdzenie doświadczone czy nowa teoria jest słuszna i czy wobec tego można w każdym wypadku bez obawy nią się posługiwać.

Głównym właśnie celem mego referatu jest zwrócenie uwagi na najnowsze badania przeprowadzone przez *Patona* i *Gorbunowa* w Instytucie Spawania Elektrycznego przy Akademii Umiejętności w Kijowie. Celem tych badań było sprawdzenie:

1) Czy mamy prawo wymiarować konstrukcje stalowe na podstawie nowego wskaźnika wytrzymałości W' ,

2) Czy rzeczywiście w konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych nastąpi wyrównanie momentów tak, jak uczy teoria i czy wobec tego wolno konstrukcje te obliczać według nowej teorii.

Ad 1. Badaniom poddano 5 belek jednoprzęsłowych o jednakowej rozpiętości $l=3$ m, lecz o różnych przekrojach (por. rys. 9—12). Przekroje dwuścienne zastosowano w tym celu, aby zapobiec zwichrzeniom.



Rys. 8.

Belki obciążono w środku rozpiętości siłami skupionymi P , które stopniowo powiększano. Obciążenie jedną wielkością siły powtarzano po kilkaset lub więcej razy. Po każdej serii 150 jednakowych obciążeń mierzono ugięcia trwałe. Otrzymano w ten sposób wykresy ugięć trwałych (rys. 8). Najmniejsze obciążenie, przy którym nie dochodziło już do ustalenia się wartości ugięć trwałych, lecz występowało ciągle ich zwiększanie się, określano jako obciążenie graniczne rzeczywiste P_{pr} .

Po przeprowadzeniu prób wycinano kawałki ścianek i stopek belek z części mniej naprężonych przy podporach i na nich dokonywano pomiarów ranicy plastyczności σ_p .

Na tej podstawie obliczano teoretyczne obciążenie graniczne $P_p = \frac{4\sigma_p W}{1}$ według teorii sprężystości,

$P'_p = \frac{4\sigma_p W'}{1}$ według teorii plastyczności i porównywano je z odpowiednimi obciążeniami granicznymi ustalonymi w badaniach doświadczalnych.

Dla belki wedle rys. 9 o przekroju niesymetrycznym wypadło:

$$P_p = 7,62 \text{ t (teoria sprężystości)}$$

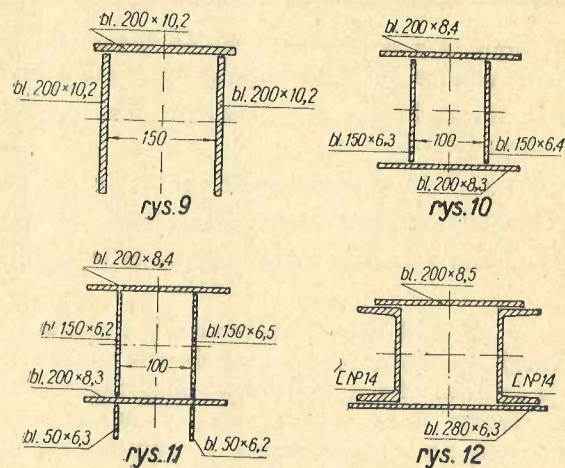
$$P'_p = 13,83 \text{ t (teoria plastyczności)}$$

i $P_{pr} = 13,03 \text{ t}$ (rzeczywiste uzyskane z doświadczeń).

Ten wynik badania potwierdzający słuszność nowej teorii wskazuje również, że dawny sposób obliczania dawał dla przekrojów niesymetrycznych niepotrzebnie duży współczynnik pewności, a temsamem ogromne (dochodzące w danym wypadku do 80%) marnotrawstwo materiału.

Ciekawe jest porównanie belek wedle rys. 10 i 11. Belka z rys. 11 różni się od belki 10 jedynie żeberkami pionowymi, dospojonemi do dolnej nakładki na przedłużeniu ścianek. Jak wiadomo, wskaźnik przekroju W_{11} jest mniejszy od W_{10} , pomimo że powierzchnia przekroju belki z rys. 11 jest większa. Natomiast nowy wskaźnik przekroju belki z rys. 11 W'_{11} jest większy od wskaźnika W'_{10} belki z rys. 10. Jest to wynik bardziej logiczny, gdyż dodanie żeberk nie powinno osłabiać belki, lecz przeciwnie powinno ją wzmocnić.

Badania przeprowadzone obecnie potwierdziły w zupełności wyniki nowej teorii. Doświadczalne obciążenie graniczne jak widać z tabeli 1. różni się niewiele i to na plus od obliczonego na podstawie nowej teorii, natomiast jest znacznie większe od obciążenia granicznego, wynikającego z teorii sprężystości, zwłaszcza dla belki z dodatkami żeberkami (rys. 11).



Rys. 9—12.

Dwie ostatnie belki poddane badaniom miały przekrój jednakowy (rys. 12), składający się z dwóch ceówek połączonych nakładkami o jednakowym przekroju, lecz nierównej szerokości. Mianowicie dolna nakładka miała (w obu belkach) szerokość 280 mm i grubość 6,3 mm, a górna szerokość 210 mm i grubość 8,5 mm. Belki te różniły się od siebie tem, że jedna z nich była

spawana swobodnie, a druga pod obciążeniem siłą $P = 4,35$ t, umieszczoną w środku rozpiętości. Niższy skutek istnienia naprężeń wstępnych, wywołanych tem obciążeniem, belka druga wytrzymuje według teorii sprężystości obciążenie o 50% mniejsze od belki spawanej swobodnie. Natomiast wedle nowej teorii naprężenia wewnętrzne powstałe skutkiem sztucznego obciążenia nie mają wpływu na wytrzymałość belki, a w konsekwencji wskaźnik przekroju i wytrzymałość obu belek powinny być równe. Doświadczenia Instytutu Kijowskiego dały i w tym wypadku odpowiedź potwierdzającą teorię plastyczności jak to widać z poniższej tabeli.

Porównując wyniki badania 5 belek o różnych przekrojach otrzymano tabelkę obciążeń granicznych, obliczonych wg teorii sprężystości i wg nowej teorii, oraz obciążeń doświadczalnych:

Tabela 1.

Belka wedł. rys.	Obciążenie graniczne teoretyczne według teorii		Obciążenie graniczne doświad- czalne P_{pr} — ton	Stosunek obciąż. do- świadczaln. do obciąż. obł. według teorii	
	sprężyst. P_p ton	plastyczn. P_p' ton		spręży- stości	plasty- czności
9	7,62	13,83	13,03	1,71	0,94
10	10,42	11,92	12,01	1,15	1,01
11	8,40	12,92	14,77	1,76	1,14
12	15,28	17,27	16,69	1,09	0,97
12 (z obc. sztucz.)	7,76	16,62	15,99	2,06	0,96

Z porównania wyników badań ad 1. belek jednoprzęsłowych wynikają więc następujące wnioski:

a. Nowa teoria bardziej odpowiada rzeczywistości, od dotychczas stosowanej teorii sprężystości.

b. Przy wymiarowaniu konstrukcji można uwzględnić nowy moment wytrzymałości W' , w równaniu

$$\sigma = \frac{M}{W'} \leq \sigma_{dop.}$$

c. Powiększenie przekroju przez dodanie żeber (rys. 11) nie zmniejsza momentu wytrzymałości W' , lecz przeciwnie zwiększa nośność belki.

d. Naprężenie wewnętrzne wstępne znikając wskutek płynięcia materiału zwiększają tylko trwałe odkształcenia, nie zmniejszają jednak momentu wytrzymałości W' . Fakt ten ma wielkie znaczenie przy wzmocnieniu istniejących mostów stalowych.

Ad 2. Badania belek ciągłych miały przede wszystkim udowodnić, że w ustrojach hiperstatycznych przy zwiększaniu obciążenia powstaje naprawdę wspomniany już przegub plastyczny, powodujący wyrównanie momentów w poszczególnych przekrojach niebezpiecznych.

Doświadczenia przeprowadzono z 2 belkami ciągłymi o równym przekroju, składającym się z dwóch ceówek Nr. 14 o rozpiętościach $l_1 + l_2 = 200 + 340$ cm. Belki obciążano siłą skupioną P w środku mniejszego przęsła. Obciążenie graniczne na podstawie nowej teorii, jest o 64% większe. Celem zbadania wpływu osiadania podpór opuszczono w belce drugiej środkową podporę o 1,9 cm. Wytrzymałość takiej belki, obliczona na podstawie teorii sprężystości, jest o 24% mniejsza niż wytrzymałość belki na podporach równej wysokości.

Podaję tu jedynie wyniki badań zestawione w tabelce 2 (str. 17):

Z porównania wyników badań ad 2) belek ciągłych wynikają następujące wnioski:

Tabela 2.

Nr. belki	Obciążenie graniczne teoretyczne według teorii		Obciążenia graniczne doświadczalne P_{pr} — ton	Stosunek obciąż. granicznego doświadczaln. do obciąż. obl. wedl. teorii	
	sprężyst. P_p ton	plastyczn. P_p' ton		sprężystości	plastyczności
1	11,23	16,96	17,99	1,60	1,06
2	8,48	16,50	17,99	2,12	1,09

a. Doświadczenie potwierdza słuszność nowej teorii.

b. Przy wymiarowaniu konstrukcji można uwzględnić nowy wskaźnik przekroju W' , oraz nowy moment zginający M' , otrzymany przez wyrównanie momentów na podstawie teorii plastyczności

materiału, w równaniu $\sigma = \frac{M'}{W'} \leq \sigma_{dop.}$

c. Małe osiadanie podpór nie wpływa na wielkość obciążenia granicznego oraz dopuszczalnego, powoduje jednak zwiększenie stałego odkształcenia belki, co należy uwzględnić przy wykonaniu projektu.

Przedłożony materiał z przeprowadzonych doświadczeń na belkach jednoprzęsłowych, oraz ciągłych okazał zatem zupełną zgodność pomiędzy nową teorią a badaniami. Z tego wynika, że stosowany dotychczas współczynnik pewności

$$n = \frac{2400}{1400} =$$

$= 1,71$ może być używany także przy obliczeniach na podstawie teorii nowej. Z obliczonego na podstawie doświadczeń stosunku obciążenia doświadczalnego do obciążenia obliczonego według



10 -

teorii sprężystości, który okazał się dużo większy od 1, wpływa wyraźnie, że w tym wypadku współczynnik n jest większy, niż to się zazwyczaj przyjmuje.

Obliczenie konstrukcji nową metodą zaleca się nie tylko z powodu znacznej oszczędności na materiale, lecz także ze względu na otrzymywanie prostszych i mniej różnorodnych przekrojów, mogących zmniejszyć cenę jednostkową konstrukcji.

Przeprowadzone doświadczenia odpierają twierdzenie niektórych badaczy, że współczynnik pewności n konstrukcji narażonych na powtarzające się obciążenie przy obliczaniu nową metodą powinien być powiększony.

Doświadczenia przekonały nas, że istnieje całkowita zgodność pomiędzy teorią a badaniami. Udowodniły one tem samem nieekonomiczność dotychczasowych konstrukcyj.

BIBLIOTEKA
W. Y. Z.
ARCHITEKTURY

2416