PRACE WARSZAWSKIEGO TOWARZYSTWA POLITECHNICZNEGO

Nr. 20 WARSZAWA 1936

Dr. LUDOMIR WOLFKE

TEORJA HOMOLOGJI LINJOWEJ I PŁASKIEJ

NAKŁADEM WARSZAWSKIEGO TOWARZYSTWA POLITECHNICZNEGO

Dr. LUDOMIR WOLFKE

TEORJA HOMOLOGJI LINJOWEJ I PŁASKIEJ

WARSZAWA – 1936

Wydane przez Warszawskie Towarzystwo Politechniczne

Dr. LUDOMIR WOLFKE

HOMOLOGIE LINÉAIRE ET HOMOLOGIE PLANE

VARSOVIE – 1936

Publié par la Société Polytechnique de Varsovie

Dr. LUDOMIR WOLFKE.

TEORJA HOMOLOGJI LINJOWEJ I PŁASKIEJ.

„Let none ignorant of the fundamentals of synthetic projective geometry presume to the title of geometer". J. L. Coolidge. Address delivered before the Mathematical Association of America at the meeting in Cambridge, Mass., December 29, 1933.

Praca niniejsza zawiera systematyczny wykład teorji homologji płaskiej i powinowactwa osiowego. Podstawą wykładu jest odwzorowanie dwuśrodkowe i „homologja linjowa", określona, jako wynikowa odpowiedniość dwóch rzutów szeregu, współpłaszczyznowego z łącznicą środków rzutów. Pierwszą próbę[1]) w tym kierunku podjąłem w r. 1927 i główne wyniki zreferowałem we wrześniu tegoż roku na I Zjeździe matematyków polskich we Lwowie.[2])

Badanie dwuśrodkowego odwzorowania prostej, zajmującej względem łącznicy środków położenie ogólne, prowadzi do twierdzeń o wynikowej odpowiedniości perspektywicznej dwóch rzutów szeregu punktowego (XI i XVIII). Klasyczne twierdzenia Desargues'a o perspektywicznej odpowiedniości dwóch trójkątów stają się wówczas prostemi wnioskami z wymienionych twierdzeń.

Wprowadzone pojęcie „homologji linjowej" (względnie: „elacji linjowej") jest równoznaczne z pojęciem rzutowości szeregów punktowych o podłożu wspólnem, posiadającej rzeczywiste (różne, albo zjednoczone) punkty podwójne. Jest ono istotną podstawą logiczną nie tylko dla homologji płaskiej, lecz i dla homologji układów przestrzennych.

Do szczegółowych rozważań, dotyczących linjowej i płaskiej odpowiedniości homologicznej, dołączyłem proste wnioski, formułujące analityczne określenia: właściwej homologji płaskiej i powinowactwa osiowego. Na określeniach takich oparte są twierdzenia o zachowaniu stopnia równania krzywej algebraicznej płaskiej, podlegającej właściwemu, bądź też niewłaściwemu przekształceniu homologicznemu.

Paragraf końcowy, traktujący o niewłaściwych homologicznych odpowiedniościach płaskich, uzupełniłem badaniem ogólnie pojętego powinowactwa dwóch układów płaskich i badaniem rekonstrukcji osiowego powinowactwa takich układów. Oprócz własnego rozwiązania, załączyłem również nader interesujące rozwiązanie, podane przez mego Asystenta, inż. Zygmunta Pieślaka. To ostatnie—podobnie jak i znane rozwiązania Müllera[3]) i Scheffersa[4])—nie jest wynikiem zupełnego badania istotnych własności dwóch danych układów powinowatych i polega jedynie na poszukiwaniu odpowiednich szeregów równych; wyróżnia się ono jednak niewątpliwie dzięki łatwości swej koncepcji i prostocie realizacji technicznej.

§ 1. Dwuśrodkowe odwzorowanie punktu.

Zakładamy, że dana jest stała płaszczyzna rzutów Π (rys. 1) oraz dwa różne środki rzutów: o_1 i o_2, nie leżące na płaszczyźnie Π.

Z zestawienia trzech powyższych elementów przestrzennych wynikają dwa elementy pochodne, jednoznacznie określone: prosta O, poprowadzona przez środki rzutów o_1 i o_2, oraz punkt o, wspólny dla prostej O i dla płaszczyzny rzutów Π. Prostą O nazywamy łącznicą środków rzutów, a punkt o — śladem łącznicy środków.

Gdy następnie wybrany jest w przestrzeni dowolny punkt a, nie schodzący się z żadnym z wymienionych środków rzutów, to określony jest jednoznacznie każdy z promieni rzucających: R_1 i R_2, łączących odpowiednio punkty o_1 i o_2 z punktem a. Dla dowolnego punktu a istnieją wówczas, na płaszczyźnie rzutów, dwa rzuty środkowe: a' i a'', jako punkty przebicia, wyznaczone odpowiednio przez promienie R_1 i R_2 na płaszczyźnie Π.

---

[1]) Wykłady geometrji wykreślnej. Tom I: Zasady teorji perspektywy. Warszawa, 1928.
[2]) Księga pamiątkowa pierwszego polskiego zjazdu matematycznego. Kraków, 1929.
[3]) Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Tom I. Wydanie trzecie. Lipsk, 1920, str. 76.
[4]) Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Tom I. Wydanie drugie. Berlin, 1922, str. 168.

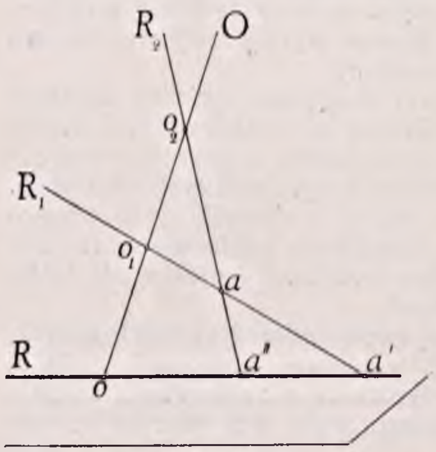
Dwójkę punktową (a', a''), utworzoną na jednej płaszczyźnie rzutów przez dwa różne, lub zjednoczone rzuty środkowe dowolnego punktu a, nazywamy d w u ś r o d k o w e m o d w z o r o w a n i e m p u n k t u a.

Rozważając ogólny wypadek dwuśrodkowego odwzorowania punktu a, wyłączamy szczególne wypadki: przynależności punktu a do łącznicy środków rzutów i przynależności tegoż punktu do płaszczyzny rzutów. Promienie R_1 i R_2 są przeto wtedy dwiema prostemi różnemi, nie pokrywającemi się z prostą O, i przecinają się w punkcie, nie należącym do płaszczyzny rzutów. Rzuty punktu a są wówczas dwoma punktami różnemi, przyczem żaden z nich nie schodzi się ze śladem łącznicy środków. Określone jest jednoznacznie położenie płaszczyzny ρ, przesuniętej przez punkty o_1, o_2, a i przez proste O, R_1, R_2; jednoznacznie określona jest również nowa prosta R, stanowiąca przecięcie płaszczyzn ρ i Π. Do tej prostej należą trzy punkty a', a'', o. Otrzymujemy przeto następujące twierdzenie.

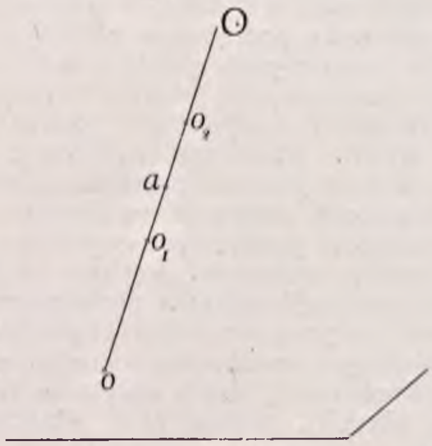
I. *Jeżeli dany punkt nie leży na łącznicy środków rzutów i nie należy do płaszczyzny rzutów, to jego odwzorowanie dwuśrodkowe i ślad łącznicy środków są trzema różnemi punktami współlinjowemi.*

Gdy punkt a leży na łącznicy środków rzutów i nie schodzi się z żadnym ze środków rzutów (rys. 2), to oba promienie R_1 i R_2 pokrywają się z prostą O. Dwuśrodkowe odwzorowanie punktu a redukuje się wówczas do jednego punktu o, stanowiącego ślad łącznicy środków rzutów.

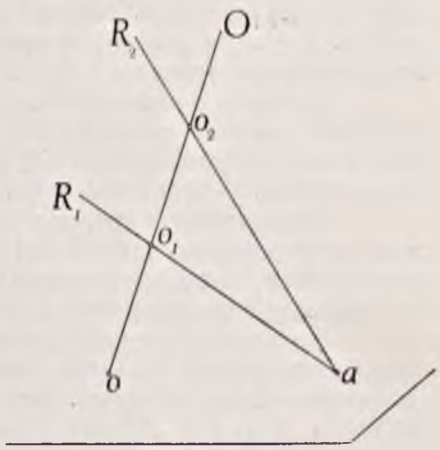
W drugim wypadku szczególnym (rys. 3), gdy punkt a należy do płaszczyzny rzutów, jest on sam jednocześnie swym pierwszym i drugim rzutem. Mamy zatem następujące twierdzenie.



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

II. *Zjednoczone odwzorowanie dwuśrodkowe — zredukowane do jednego punktu — posiada: każdy punkt, należący do łącznicy środków, lecz nie schodzący się z żadnym ze środków rzutów, oraz każdy punkt, leżący na płaszczyźnie rzutów.*

Rozważania powyższe uzupełniamy wnioskami odwrotnemi, dotyczącemi rekonstrukcji punktu podług danego odwzorowania dwuśrodkowego. Wnioski te streszczamy w następującem twierdzeniu.

III. *Jeżeli są określone położenia: płaszczyzny rzutów i dwóch różnych — nie należących do niej — środków rzutów, to jednoznaczna rekonstrukcja punktu możliwa jest wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z rzutów rekonstruowanego punktu nie schodzi się ze śladem łącznicy środków, przyczem oba rzuty leżą na jednej prostej, przechodzącej przez ślad łącznicy środków.* (Warunek końcowy jest oczywiście zbyteczny w wypadku zjednoczonego odwzorowania dwuśrodkowego).

Dla każdego właściwego środka rzutów, określamy odpowiednią p ł a s z c z y z n ę z n i k n i e n i a, przesuniętą przez dany środek, równolegle do płaszczyzny rzutów. W wypadku niewłaściwego środka rzutów, odpowiednia płaszczyzna zniknienia jest określona jako płaszczyzna niewłaściwa, czyli zbiór wszystkich niewłaściwych punktów przestrzeni trójwymiarowej.

Dwóm różnym środkom rzutów o_1 i o_2 odpowiadają dwie różne, albo zjednoczone płaszczyzny zniknienia: Ω_1 i Ω_2. Są one płaszczyznami różnemi, gdy środkami rzutów są dwa punkty właściwe, nie należące do jednej płaszczyzny czołowej, albo wtedy, gdy jeden ze środków rzutów jest punktem właściwym, a pozostały — punktem niewłaściwym. W obu wypadkach łącznica środków jest prostą właściwą, nierównoległą do płaszczyzny rzutów, a więc ślad tej łącznicy jest wtedy punktem właściwym.

Dwie płaszczyzny Ω_1 i Ω_2 są płaszczyznami zjednoczonemi, stanowiąc jedną, wspólną płaszczyznę zniknienia, gdy środki rzutów są dwoma punktami właściwemi, należącemi do jednej płaszczyzny czołowej, albo dwoma punktami niewłaściwemi. W tych dwóch wypadkach, łącznica środków rzutów jest właściwą prostą czołową, a więc ślad łącznicy jest w obu wypadkach punktem niewłaściwym. Stwierdzamy przeto, że:

IV. *Dwóm różnym środkom rzutów odpowiadają różne płaszczyzny zniknienia, wtedy i tylko wtedy, gdy ślad łącznicy środków jest punktem właściwym.*

V. *Dwóm różnym środkom rzutów odpowiada jedna, wspólna płaszczyzna zniknienia wtedy i tylko wtedy, gdy ślad łącznicy środków jest punktem niewłaściwym.*

Każda z płaszczyzn zniknienia, rozważana, jako zbiór punktów, podlegających odwzorowaniu — z wyłączeniem odpowiedniego środka rzutów — jest miejscem geometrycznem tych punktów przestrzeni, które posiadają niewłaściwe rzuty pierwsze, względnie drugie.

Uwzględniając wszelkie możliwe wypadki położenia dowolnego punktu względem płaszczyzn zniknienia, dochodzimy do następujących twierdzeń.

VI. *Dwuśrodkowe odwzorowanie punktu, nie leżącego na żadnej z płaszczyzn zniknienia, jest parą różnych, albo zjednoczonych punktów właściwych.*

VII. *Jeżeli punkt, podlegający odwzorowaniu, należy do dwóch różnych płaszczyzn zniknienia, to oba jego rzuty schodzą się z rozważanym punktem.* (Punkt, podlegający odwzorowaniu, jest bowiem wówczas punktem niewłaściwym, należącym również do płaszczyzny rzutów).

VIII. *Jeżeli punkt, podlegający odwzorowaniu, należy tylko do jednej płaszczyzny zniknienia (lecz nie schodzi się z odpowiednim środkiem rzutów), to odpowiedni rzut jego jest punktem niewłaściwym, a rzut pozostały jest punktem właściwym.*

IX. *Jeżeli punkt, podlegający odwzorowaniu, należy do wspólnej płaszczyzny zniknienia (lecz nie schodzi się z żadnym ze środków rzutów), to jego odwzorowanie dwuśrodkowe jest parą różnych, albo zjednoczonych punktów niewłaściwych.*

§ 2. Dwuśrodkowe odwzorowanie szeregu punktowego w wypadku ogólnym.

Określamy ogólny wypadek położenia prostej L względem prostej O i względem płaszczyzny Π, zakładając, że prosta L nie należy do żadnej z płaszczyzn, przesuniętych przez łącznicę środków rzutów i nie leży na płaszczyźnie rzutów.

Prosta L, rozważana w wypadku ogólnym, jako podłoże szeregu punktowego, podlegającego odwzorowaniu dwuśrodkowemu, nie posiada przeto żadnego elementu wspólnego z prostą O, a z płaszczyzną Π posiada jeden tylko wspólny punkt właściwy, albo niewłaściwy: ślad l.

Wyłączając wypadek istnienia płaszczyzny, przesuniętej przez proste O i L, wnioskujemy o istnieniu dwóch różnych płaszczyzn rzucających: $\lambda_1 = o_1 L$ i $\lambda_2 = o_2 L$. Krawędzią tych płaszczyzn jest prosta L, nie należąca do płaszczyzny rzutów, a więc rzuty środkowe prostej L, czyli proste: $L' = \lambda_1 \Pi$ i $L'' = \lambda_2 \Pi$ — są dwiema prostemi różnemi. Na podstawie dwóch pierwszych twierdzeń paragrafu poprzedniego, wnioskujemy dalej, że jedynym punktem prostej L, posiadającym zjednoczone odwzorowanie dwuśrodkowe, jest jej ślad l, dla każdego zaś z pozostałych punktów prostej L, odwzorowanie dwuśrodkowe jest parą punktów różnych, współlinjowych ze śladem łącznicy środków. Dochodzimy w ten sposób do następujących twierdzeń (rys. 4).

X. *Jeżeli prosta, podlegająca odwzorowaniu, nie jest współpunktowa z łącznicą środków rzutów i nie leży na płaszczyźnie rzutów, to dwuśrodkowe odwzorowanie rozważanej prostej jest parą prostych różnych, nie przechodzących przez ślad łącznicy środków i współpunktowych z rozważaną prostą.*

XI. *Jeżeli prosta, rozważana jako podłoże szeregu punktowego, podlegającego odwzorowaniu dwuśrodkowemu, nie jest współpunktowa z łącznicą środków rzutów i nie leży na płaszczyźnie rzutów, to pomiędzy dwoma rzutami rozważanego szeregu punktowego istnieje zupełna i wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość perspektywiczna, przyczem środek tej wynikowej odpowiedniości perspektywicznej jest śladem łącznicy środków rzutów.*

Gdy rozważamy każdą z danych odpowiedniości perspektywicznych, istniejących pomiędzy szeregami: L i L' oraz: L i L'' — jak również i wynikową odpowiedniość perspektywiczną szeregów L' i L'', to o rodzaju badanej odpowiedniości i o jej własnościach miarowych decydują dwa zasadnicze punkty:

środek pęku promieni, a więc punkt o_1, wzgl. o_2, albo o
i wspólny punkt podłoży szeregów, czyli punkt l.

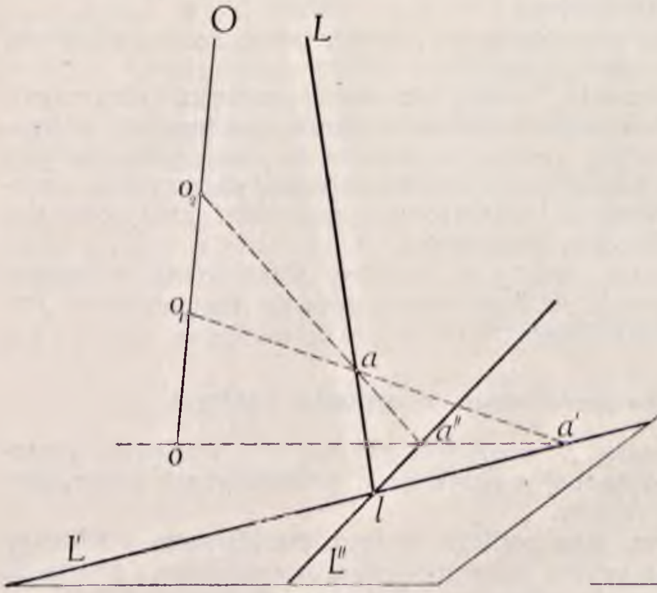
Każdy z punktów zasadniczych może być punktem właściwym, albo niewłaściwym. Mamy przeto cztery rodzaje perspektywicznej odpowiedniości szeregów punktowych.

Rodzaj I. *Oba punkty zasadnicze są punktami właściwemi.*

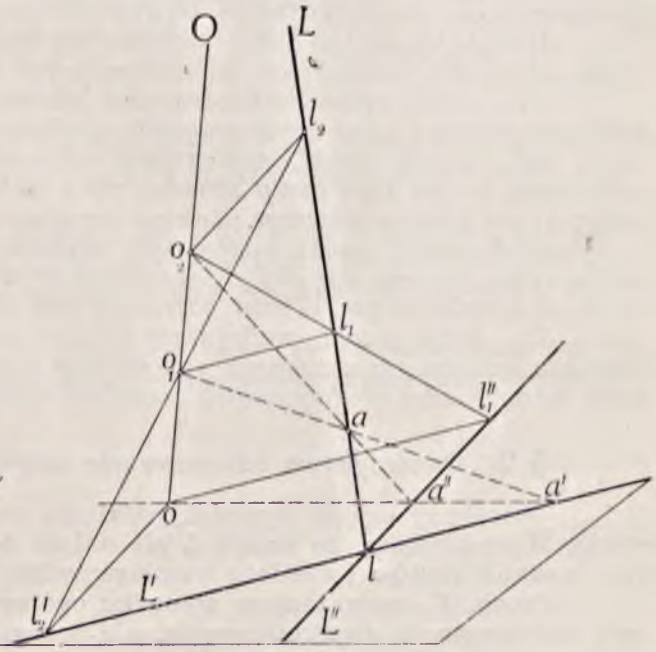
Podłoża szeregów posiadają wówczas różne punkty niewłaściwe i promienie, odpowiadające tym punktom niewłaściwym, są dwiema różnemi prostemi właściwemi. Istnieje wtedy taki równoległobok, który posiada jedną parę wierzchołków przeciwległych w wymienionych punktach zasadniczych, przyczem jedną parą boków przyległych są odcinki rozważanych podłoży. Każdy z pozostałych wierzchołków, noszących nazwę punktów granicznych, jest właściwym punktem jednego z szeregów, a jego perspektywiczny odpowiednik jest punktem niewłaściwym, należącym do szeregu pozostałego.

W każdej z danych odpowiedniości perspektywicznych ($L \overline{\wedge} L'$ i $L \overline{\wedge} L''$) jednym z punktów granicznych jest punkt zniknienia prostej L, a mianowicie $l_1 = L\Omega_1$, wzgl. $l_2 = L\Omega_2$; drugim punktem granicznym jest punkt zbiegu: l_n', wzgl. l_n''.

W wynikowej odpowiedniości perspektywicznej ($L' \overline{\wedge} L''$) pierwszym punktem granicznym, należącym do szeregu L', jest l_2', czyli pierwszy rzut drugiego punktu zniknienia prostej L (rys. 5); drugim punktem granicznym, należącym do szeregu L'', jest l_1'', czyli drugi rzut pierwszego punktu zniknienia prostej L.



Rys. 4.



Rys. 5.

Na podłożach perspektywicznej odpowiedniości pierwszego rodzaju leżą dwa zmienne odcinki względne, mierzone od punktów granicznych do dwóch dowolnych, właściwych punktów odpowiednich. Stała wartość iloczynu takich odcinków, uwarunkowana podobieństwem dwóch trójkątów (posiadających wspólny wierzchołek w środku pęku) jest podstawową własnością miarową perspektywicznej odpowiedniości szeregów, posiadających właściwe punkty graniczne.

Rodzaj II. *Środek pęku promieni jest punktem właściwym, a przecięcie podłoży — punktem niewłaściwym.* Wspólnemu niewłaściwemu punktowi szeregów odpowiada wtedy jeden (wspólny), właściwy promień pęku. Oba punkty graniczne schodzą się wówczas z wymienionym punktem niewłaściwym. Jeżeli przytem oba podłoża są prostemi właściwemi, to z ich równoległości, uwarunkowanej istnieniem wspólnego punktu niewłaściwego, wynika proporcjonalność dwóch dowolnych odcinków jednego szeregu do odpowiednich odcinków szeregu pozostałego.

Rodzaj III. *Środek pęku promieni jest punktem niewłaściwym, a przecięcie podłoży — punktem właściwym.* Podłoża szeregów, posiadających jedyny wspólny punkt właściwy, są dwiema różnemi prostemi właściwemi i nierównoległemi. Wszystkie właściwe promienie pęku są obecnie prostemi równoległemi, a każdy z dawnych promieni pęku, wyznaczających punkty graniczne, schodzi się z prostą niewłaściwą, należącą do płaszczyzny rozważanych szeregów punktowych; każdy z punktów granicznych jest przeto niewłaściwym punktem odpowiedniego szeregu. Proporcjonalne są wówczas dwa dowolne odcinki jednego szeregu do odpowiednich odcinków szeregu pozostałego.

Rodzaj IV. *Oba punkty zasadnicze są punktami niewłaściwemi.* Wspólny, niewłaściwy punkt podłoży jest jednocześnie wspólnym punktem granicznym. Każda para odcinków odpowiednich, należących do właściwych podłoży dwóch szeregów punktowych, jest wtedy parą odcinków równych i posiadających zwroty zgodne.

Perspektywiczną odpowiedniość I rodzaju nazywamy w ł a ś c i w ą odpowiedniością perspektywiczną, a każdej z trzech pozostałych odpowiedniości (Rodz. II, III, IV) nadajemy nazwę n i e w ł a ś c i w e j perspektywicznej odpowiedniości szeregów punktowych.

Zestawiając rozważania powyższe z twierdzeniami, dotyczącemi płaszczyzn zniknienia (VI — IX), uzupełniamy ogólne twierdzenie XI przez dołączenie następujących wniosków.

XII. *Jeżeli łącznica środków rzutów i podłoże szeregu, podlegającego odwzorowaniu dwuśrodkowemu, są prostemi, nie leżącemi na jednej płaszczyźnie, a ślady ich są punktami właściwemi, to w wynikowej, perspektywicznej odpowiedniości dwóch rzutów szeregu istnieją dwa właściwe punkty graniczne. Punkty takie są właściwemi rzutami dla punktów zniknienia prostej, podlegającej odwzorowaniu dwuśrodkowemu.*

Dla jednej pary właściwych punktów odpowiednich: a', a'' istnieje związek podstawowy:

$$l_2' a' \cdot l_1'' a'' = l\, l_2' \cdot l l_1'' = \mathbf{k}^2 \tag{1}$$

Wprowadzając kolejno: drugą, trzecią i czwartą parę odpowiednich punktów właściwych, otrzymujemy związki pochodne:

$$a'' b'' = \frac{-\mathbf{k}^2\, a' b'}{l_2' a' \cdot l_2' b'}, \tag{2}$$

$$\frac{a'' c''}{b'' c''} = \frac{a' c'}{b' c'} \cdot \frac{l_2' b'}{l_2' a'} \tag{3}$$

(skąd: $\dfrac{a'' c''}{b'' c''} \neq \dfrac{a' c'}{b' c'}$, gdy a', b', c' są punktami różnemi),

$$\frac{a'' c''}{b'' c''} : \frac{a'' d''}{b'' d''} = \frac{a' c'}{b' c'} : \frac{a' d'}{b' d'} . \tag{4}$$

XIII. *Jeżeli ślad łącznicy środków rzutów jest punktem właściwym, a prosta podlegająca dwuśrodkowemu odwzorowaniu jest wichrowata względem łącznicy środków i posiada ślad niewłaściwy, lecz nie należy do żadnej z płaszczyzn zniknienia, to rzuty prostej są prostemi równoległemi i wynikowa odpowiedniość perspektywiczna redukuje się do podobieństwa środkowego. Gdy, natomiast, rozważana prosta leży na pierwszej, albo na drugiej płaszczyźnie zniknienia, to jej rzut drugi, względnie pierwszy, jest prostą właściwą, a rzut pozostały — prostą niewłaściwą.*

XIV. *Jeżeli ślad łącznicy środków rzutów jest punktem niewłaściwym, a prosta, podlegająca dwuśrodkowemu odwzorowaniu, jest wichrowata względem łącznicy środków i posiada ślad właściwy, to rzuty prostej są właściwemi prostemi nierównoległemi, a wynikowa odpowiedniość perspektywiczna posiada dwa różne niewłaściwe punkty graniczne. Rzuty szeregu punktowego są szeregami podobnemi.*

XV. *Jeżeli łącznica środków rzutów i prosta, podlegająca odwzorowaniu dwuśrodkowemu, nie leżą na jednej płaszczyźnie i posiadają ślady niewłaściwe, to rzuty prostej są właściwemi prostemi równoległemi, a wynikowa odpowiedniość dwóch rzutów szeregu punktowego, posiadających wspólny niewłaściwy punkt graniczny, redukuje się do równości szeregów.*

§ 3. Twierdzenia Desargues'a.

W perspektywicznej odpowiedniości: $L \barwedge L'$, otrzymujemy dwie różne pary niezjednoczonych punktów odpowiednich: (a, a') i (b, b'), gdy w pęku o_1 wybieramy dwa różne promienie: R_1 i S_1, nie przechodzące przez punkt l. Gdy odwrotnie, na dwóch współpłaszczyznowych podłożach L i L', wybrane są dwie pary punktów różnych: (a, b) i (a', b'), przyczem żaden z czterech wybranych punktów nie schodzi się z punktem l, to możliwa jest jednoznaczna rekonstrukcja perspektywicznej odpowiedniości: $L \barwedge L'$. Rekonstrukcja taka polega na wyznaczeniu szóstego wierzchołka w c z w o r o b o k u z u p e ł n y m, utworzonym przez proste: L, L', R_1, S_1.

W perspektywicznych odpowiedniościach: $L \barwedge L'$, $L \barwedge L''$, $L' \barwedge L''$ (rys. 6) otrzymujemy dwie różne trójki niezjednoczonych punktów: (a, a', a'') i (b, b', b''), gdy w pęku płaszczyzn, przesuniętych przez łącznicę O, wybieramy dwie różne płaszczyzny: ρ i σ, nie przechodzące przez punkt l. Gdy odwrotnie, na trzech współpunktowych, lecz niewspółpłaszczyznowych podłożach: L, L', L'' — wybrane są trzy pary punktów różnych: (a, b), (a', b'), (a'', b'') — przyczem żaden z sześciu wybranych punktów nie schodzi się z punktem l, to możliwa jest jednoznaczna rekonstrukcja każdej z trzech odpowiedniości perspektywicznych: $L \barwedge L'$, $L \barwedge L''$, $L' \barwedge L''$. Rekonstrukcja taka polega na wyznaczeniu trzech pozostałych wierzchołków o, o_1, o_2 w p i ę c i o ś c i a n i e z u p e ł n y m, utworzonym przez płaszczyzny: $\lambda_1, \lambda_2, \Pi, \rho, \sigma$. Nazwę „pięciościanu zupełnego" stosujemy do zbioru p i ę c i u p ł a s z c z y z n, uzupełnionego zbiorem: d z i e s i ę c i u k r a w ę d z i, czyli prostych przecięcia wymienionych płaszczyzn i zbiorem d z i e s i ę c i u w i e r z c h o ł k ó w, czyli punktów przecięcia krawędzi pięciościanu zupełnego. — Zakładamy przytem, że w pięciościanie zupełnym niema czterech płaszczyzn, posiadających jeden punkt wspólny; wyłączone jest przeto jednocześnie istnienie dwóch płaszczyzn pokrywających się wzajemnie i istnienie trzech płaszczyzn, posiadających wspólną prostą przecięcia.

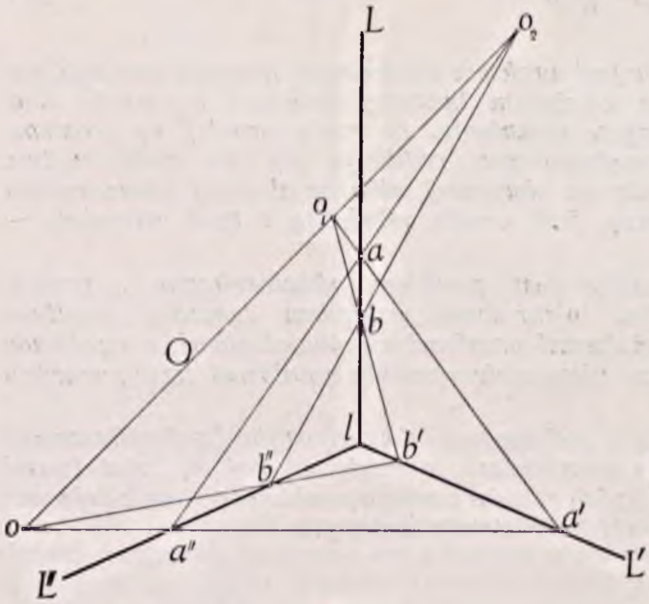
W rozważanej rekonstrukcji, elementami danemi, określającemi jednoznacznie pięciościan zupełny, są trzy krawędzie: L, L', L'' i siedem wierzchołków: $l, a, a', a'', b, b', b''$.

Wymieniony pięciościan zupełny jest również jednoznacznie określony, gdy dane są trzy wierzchołki: o, o_1, o_2 i siedem krawędzi: $O, R, R_1, R_2, S, S_1, S_2$. Mamy przeto dwa twierdzenia następujące.

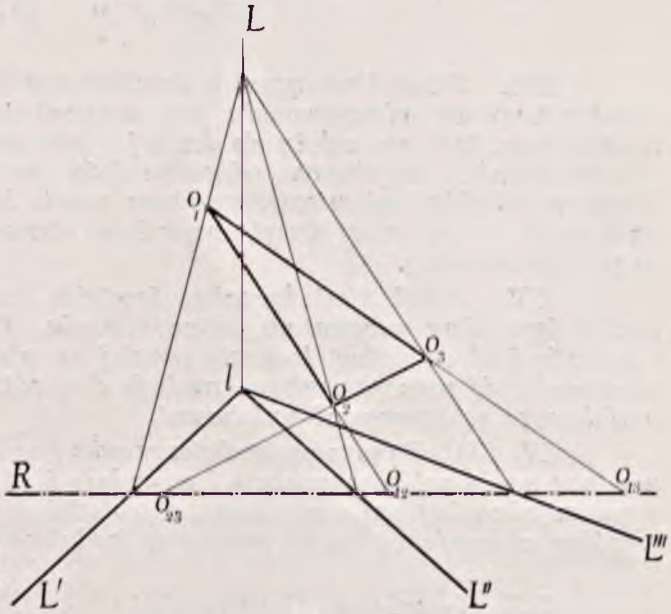
XVI. *Jeżeli dwa trójkąty środkowo-perspektywiczne nie posiadają pary zjednoczonych elementów odpowiednich i nie neleżą do jednej płaszczyzny, to każda para boków odpowiednich jest parą prostych współpunktowych i punkty przecięcia trzech par boków odpowiednich są trzema różnemi punktami współlinjowemi. (Dwa rozważane trójkąty środkowo-perspektywiczne są jednocześnie trójbokami osiowo-perspektywicznemi).*

XVII. *Jeżeli dwa trójboki osiowo-perspektywiczne nie posiadają pary zjednoczonych elementów odpowiednich i nie należą do jednej płaszczyzny, to trzy pary wierzchołków odpowiednich należą do trzech prostych współpunktowych, nie leżących na jednej płaszczyźnie. (Dwa rozważane trójboki osiowo-perspektywiczne są jednocześnie trójkątami środkowo-perspektywicznemi).*

Przechodzimy do rozważania trzech prostych: L', L'', L''', zakładając, że są one prostemi różnemi, leżącemi na jednej płaszczyźnie Π i poprowadzonemi przez jeden punkt l (rys. 7). Za pomocą dwóch różnych pęków: o_{12} i o_{23}, określamy dwie perspektywiczne odpowiedniości szeregów punktowych: $L' \barwedge L''$ i $L'' \barwedge L'''$. Środek pierwszego pęku jest punktem, nie należącym do podłoży L' i L''; wyłączona jest również przynależność środka drugiego pęku do podłoży L'' i L'''.



Rys. 6.



Rys. 7.

Dla zbadania wynikowej odpowiedniości szeregów punktowych L' i L''' wprowadzamy następujące elementy pomocnicze: dowolną prostą L, poprowadzoną przez punkt l i nie leżącą na płaszczyźnie Π, oraz dowolny punkt o_1, współpłaszczyznowy z prostemi L i L', lecz nie należący do żadnej z tych dwóch prostych.

Na płaszczyźnie $\lambda_1 = L\,L'$ pęk o_1 określa pewną odpowiedniość perspektywiczną szeregów L i L'. Zestawiając ją z pierwszą odpowiedniością daną: $L' \barwedge L''$ i stosując twierdzenie XI, wnioskujemy o istnieniu perspektywicznej odpowiedniości szeregów L i L''; środek jej jest śladem o_2, wyznaczonym na płaszczyźnie $\lambda_2 = L\,L''$, przez łącznicę $O_{12} = o_{12}\,o_1$.

Otrzymaną odpowiedniość: $L \barwedge L''$ zestawiamy następnie z drugą daną odpowiedniością perspektywiczną: $L'' \barwedge L'''$, wnioskując o istnieniu perspektywicznej odpowiedniości szeregów L i L'''. Jej środkiem jest ślad o_3, wyznaczony na płaszczyźnie $\lambda_3 = L\,L'''$, przez łącznicę $O_{23} = o_{23}\,o_2$.

Gdy zestawiamy wreszcie ostatnią odpowiedniość: $L \barwedge L'''$ z pierwszą pomocniczą odpowiedniością: $L \barwedge L'$, to dochodzimy do wniosku, że badana odpowiedniość szeregów L i L''' jest także odpowiedniością perspektywiczną. Środkiem pęku jest ślad o_{13}, wyznaczony na płaszczyźnie Π przez łącznicę $O_{13} = o_1\,o_3$.

Środki trzech pęków pomocniczych o_1, o_2, o_3, są trzema punktami różnemi, leżą bowiem na trzech płaszczyznach różnych: $\lambda_1\,\lambda_2, \lambda_3$, przyczem żaden z nich nie należy do prostej L, stanowiącej wspólną krawędź dla trzech wymienionych płaszczyzn.

Zgodnie z założeniem, ślady prostych O_{12} i O_{23} są dwoma różnemi środkami danych odpowiedniości perspektywicznych. Wyłączony jest przeto wypadek współlinjowości trzech różnych punktów o_1, o_2, o_3 i określone jest położenie płaszczyzny $\rho = o_1\,o_2\,o_3$.

Żaden z wierzchołków trójkąta $o_1\,o_2\,o_3$ nie należy do płaszczyzny Π, a więc ślady trzech jego boków, wyznaczone na płaszczyźnie Π, są trzema różnemi punktami współlinjowemi. W ten sposób otrzymujemy następujące twierdzenie.

XVIII. *Jeżeli podłoża trzech szeregów punktowych są trzema różnemi prostemi współpunktowemi, leżącemi na jednej płaszczyźnie, i zapomocą dwóch pęków różnych określone* *są dwie odpowiedniości perspektywiczne dla szeregów: pierwszego i drugiego oraz drugiego i trzeciego — to wynikowa odpowiedniość pozostałej pary szeregów punktowych (pierwszego i trzeciego) jest również odpowiedniością perspektywiczną, przyczem środki wszystkich trzech odpowiedniości są trzema różnemi punktami współlinjowemi.*

Opierając się na powyższem twierdzeniu, otrzymujemy środek wynikowej odpowiedniości perspektywicznej, kreśląc łącznicę środków dwóch odpowiedniości danych (prostą $o_{12}\,o_{23}$) i znajdując jej punkt przecięcia o_{13} z trzecim bokiem trójkąta $a'\,a''\,a'''$. Dwoma pierwszemi bokami takiego trójkąta są dwa odpowiednie promienie pęków danych, nie pokrywające się z łącznicą środków tychże pęków i nie przechodzące przez zjednoczony punkt l.

Z dwukrotnego zastosowania powyższej konstrukcji, polegającego na rozważaniu dwóch trójkątów: $a'\,a''\,a'''$ i $b'\,b''\,b'''$, wynika pierwsze twierdzenie Desargues'a.

XIX. *Jeżeli dwa trójkąty środkowo-perspektywiczne nie posiadają pary zjednoczonych elementów odpowiednich i leżą na jednej płaszczyźnie, to punkty przecięcia trzech par boków odpowiednich są trzema różnemi punktami współlinjowemi.*

Gdy zakładamy odwrotnie, że dwa trójboki, leżące na jednej płaszczyźnie, nie posiadają elementu wspólnego, przyczem pary boków odpowiednich posiadają trzy różne, współlinjowe punkty przecięcia: o_{12}, o_{23}, o_{13}, to pierwsze twierdzenie Desargues'a zastosować możemy do dwóch środkowo-perspektywicznych trójkątów: $o_{12}\,a'\,b'$ i $o_{23}\,a'''\,b'''$. Wnioskujemy wówczas o współlinjowości punktu przecięcia prostych $a'\,b'$ i $a'''\,b'''$ z punktami a'' i b''. Dochodzimy wtedy do drugiego twierdzenia Desargues'a.

XX. *Jeżeli dwa trójboki osiowo-perspektywiczne nie posiadają pary zjednoczonych elementów odpowiednich i leżą na jednej płaszczyźnie, to łącznice trzech par wierzchołków odpowiednich są trzema różnemi prostemi współpunktowemi.*

§ 4. Właściwa homologja linjowa.

Rozważając dwuśrodkowe odwzorowanie szeregu punktowego w wypadku ogólnym (§ 2), wyłączyliśmy wypadki przynależności prostej L: do płaszczyzny rzutów i do płaszczyzny, przesuniętej przez łącznicę środków.

W pierwszym z dwóch powyższych wypadków szczególnych otrzymujemy natychmiastowy wniosek:

XXI. *Jeżeli szereg punktowy, podlegający odwzorowaniu dwuśrodkowemu, należy do płaszczyzny rzutów, to każdy punkt rozważanego szeregu jest jednocześnie swem własnem, zjednoczonem odwzorowaniem dwuśrodkowem.*

Przystępując do badania drugiego wypadku szczególnego, zakładamy, że prosta L, nie należąca do płaszczyzny rzutów, jest współpłaszczyznowa z łącznicą środków, nie przechodzi jednak przez żaden ze środków rzutów. Na prostej L istnieją wówczas dwa jednoznacznie określone punkty: ślad $l = L\,\Pi$ i punkt $l_0 = L\,O$, przyczem punkt l_0 nie schodzi się z żadnym ze środków rzutów.

Dwie płaszczyzny rzucające: $\lambda_1 = o_1\,L$ i $\lambda_2 = o_2\,L$ pokrywają się wtedy wzajemnie, tworząc jedną, wspólną płaszczyznę rzucającą, przesuniętą przez łącznicę O i przez prostą L. Zapomocą wspólnej płaszczyzny rzucającej wyznaczone są dwa pokrywające się wzajemnie rzuty prostej L: L' i L'', przyczem wspólny rzut prostej L przechodzi przez ślady obu prostych O i L (rys. 8). Mamy przeto następujące twierdzenie.

XXII. *Jeżeli prosta, podlegająca dwuśrodkowemu odwzorowaniu, jest współpłaszczyznowa z łącznicą środków, lecz nie leży na płaszczyźnie rzutów i nie przechodzi przez żaden ze środków rzutów, to jej odwzorowaniem dwuśrodkowem jest jedna prosta, przechodząca przez ślad łącznicy środków i przez ślad prostej, podlegającej odwzorowaniu.*

W dwuśrodkowem odwzorowaniu szeregu L, rozważanego w § 2 i posiadającego podłoże wichrowate względem łącznicy środków, stwierdziliśmy istnienie perspektywicznej odpowiedniości wynikowej; na dwóch r ó ż n y c h rzutach prostej L otrzymaliśmy dwa odpowiadające sobie rzuty dowolnego punktu prostej w przecięciu ze z m i e n n y m promieniem R, poprowadzonym przez ślad łącznicy środków. W rozważanym obecnie wypadku, przecięcia takie nie istnieją, albowiem dwa rzuty prostej L stanowią wtedy j e d n ą prostą, pokrywającą się ze stałym promieniem R. Do nowej odpowiedniości wynikowej stosujemy nazwę h o m o l o g j i l i n j o w e j, wprowadzając następujące określenie.

Homologją linjową nazywamy związek, istniejący pomiędzy dwoma rzutami szeregu punktowego, wyznaczonemi na jednej płaszczyźnie, gdy podłoże tego szeregu jest współpłaszczyznowe z łącznicą środków rzutów, lecz nie przechodzi przez żaden ze środków rzutów i nie leży na płaszczyźnie rzutów.

Każda perspektywiczna odpowiedniość dwóch szeregów punktowych jest odpowiedniością zupełną i wzajemnie jednoznaczną. Zupełnemi przeto i wzajemnie jednoznacznemi są również wszelkie wynikowe odpowiedniości szeregów, powstające z dwukrotnego przekształcenia perspektywicznego. Mamy przeto następujące twierdzenie.

XXIII. *Homologja linjowa jest zupełną i wzajemnie jednoznaczną odpowiedniością szeregów punktowych, posiadających podłoże wspólne. Każdemu punktowi, należącemu do wspólnego rzutu prostej i rozważanemu jako rzut pierwszy, odpowiada jednoznacznie określony rzut drugi, a każdemu punktowi, rozważanemu jako rzut drugi, odpowiada jednoznacznie określony rzut pierwszy.*

Cztery wzory, wyprowadzone w § 2 dla wynikowej odpowiedniości perspektywicznej pierwszego rodzaju, odnoszą się do każdej odpowiedniości perspektywicznej, posiadającej właściwe punkty graniczne. Ostatni wzór (4) posiada przytem znaczenie ogólne; spełniony jest bowiem oczywiście i dla każdej perspektywicznej odpowiedniości szeregów punktowych, nie posiadającej właściwych punktów granicznych (Rodzaje: II, III, IV).

Gdy przechodzimy przeto do homologji linjowej, wynikającej z perspektywicznych odpowiedniości: $L \barwedge L'$ i $L \,\overline{\barwedge}\, L''$ — to niezależnie od rodzaju każdej z dwóch odpowiedniości danych, mamy zawsze:

$$(a' \, b' \, c' \, d') = (a'' \, b'' \, c'' \, d''), \tag{4}$$

jako wynik dwóch równości:

$$(a' \, b' \, c' \, d') = (a \, b \, c \, d)$$

i $$(a'' \, b'' \, c'' \, d'') = (a \, b \, c \, d).$$

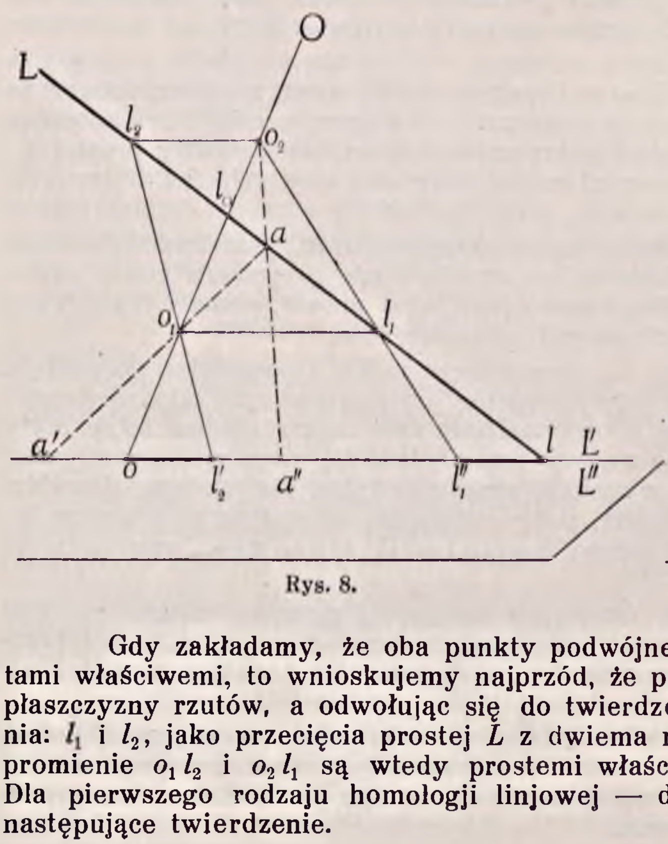
Stwierdzamy przeto, że:

XXIV. *W każdem homologicznem przekształceniu linjowem zachowana zostaje wartość dwustosunku dowolnej czwórki punktowej.*

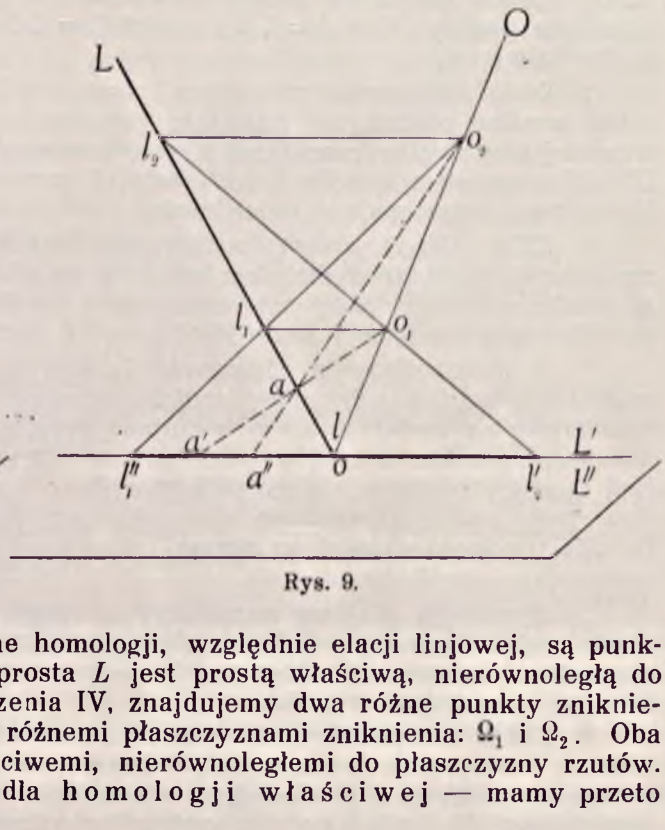
W perspektywicznej odpowiedniości szeregów, jedynym punktem podwójnym, czyli takim punktem, który schodzi się ze swym odpowiednikiem — jest punkt przecięcia podłoży szeregów. Gdy rozważamy natomiast homologję linjową, to opierając się na twierdzeniu II, wnioskujemy, że każdy z dwóch punktów $l = l' = l''$ i $o = l_o' = l_o''$ — jest punktem podwójnym; zgodnie zaś z twierdzeniem I, mamy: $a' \neq a''$, jeżeli a jest dowolnym punktem prostej L, nie schodzącym się z l, ani z l_o. Otrzymujemy przeto następujące twierdzenie.

XXV. ***W każdej homologji linjowej istnieją dwa i tylko dwa punkty podwójne (różne albo zjednoczone). Jeden z nich jest śladem łącznicy środków rzutów, a drugi — śladem prostej, podlegającej dwuśrodkowemu odwzorowaniu.***

Dwa punkty podwójne homologji linjowej są dwoma punktami różnemi, gdy l_o — przecięcie prostych L i O — jest punktem, nie należącym do płaszczyzny rzutów (rys. 8). Dwa zjednoczone punkty podwójne, a więc jeden punkt podwójny homologji linjowej istnieje w tym wypadku, kiedy proste L i O przecinają się w punkcie, leżącym na płaszczyźnie rzutów. Mamy wówczas: $l_o = l = o$ (rys. 9). Homologję linjową nazywamy wtedy e l a c j ą l i n j o w ą.



Rys. 8.



Rys. 9.

Gdy zakładamy, że oba punkty podwójne homologji, względnie elacji linjowej, są punktami właściwemi, to wnioskujemy najprzód, że prosta L jest prostą właściwą, nierównoległą do płaszczyzny rzutów, a odwołując się do twierdzenia IV, znajdujemy dwa różne punkty zniknienia: l_1 i l_2, jako przecięcia prostej L z dwiema różnemi płaszczyznami zniknienia: Ω_1 i Ω_2. Oba promienie $o_1 l_2$ i $o_2 l_1$ są wtedy prostemi właściwemi, nierównoległemi do płaszczyzny rzutów. Dla pierwszego rodzaju homologji linjowej — dla h o m o l o g j i w ł a ś c i w e j — mamy przeto następujące twierdzenie.

XXVI. *Jeżeli oba punkty podwójne homologji linjowej są punktami właściwemi, to właściwemi są również i oba punkty graniczne.*

Każdy właściwy punkt graniczny: l_2' i l_1'' — jest odpowiednikiem punktu niewłaściwego, rozważanego na wspólnem podłożu w szeregu L'', względnie L'. Stąd wnioskujemy, że:

XXVII. *W linjowej homologji właściwej, żaden z punktów granicznych nie schodzi się z żadnym punktem podwójnym.*

W wypadku właściwej homologji linjowej, wzór (4) zastosować możemy do odpowiadających sobie czwórek punktowych $o\,l\,a'\,b'$ i $o\,l\,a''\,b''$, zakładając przytem, że a', b', a'', b'' są czterema punktami różnemi. Otrzymujemy wówczas:

$$\frac{o\,a'}{l\,a'} : \frac{o\,b'}{l\,b'} = \frac{o\,a''}{l\,a''} : \frac{o\,b''}{l\,b''}, \text{ skąd: } \frac{o\,a'}{l\,a'} : \frac{o\,a''}{l\,a''} = \frac{o\,b'}{l\,b'} : \frac{o\,b''}{l\,b''},$$

$$\text{a więc:} \quad (o\,l\,a'\,a'') = (o\,l\,b'\,b''). \tag{5}$$

Dochodzimy w ten sposób, do następującego twierdzenia.

XXVIII. *W linjowej homologji właściwej, dwustosunek czwórki, utworzonej przez punkty podwójne i przez dowolną parę punktów odpowiednich, posiada wartość stałą.*

Dwustosunek $(ola'a'') = \mathbf{c}$, posiadający wartość stałą i nierówną zeru, nazywamy c e c h ą h o m o l o g j i l i n j o w e j oraz c e c h ą p r z e k s z t a ł c e n i a h o m o l o g i c z n e g o, polegającego na przejściu od zmiennego punktu a' do odpowiadającego mu punktu a''.

Zakładamy następnie, że $a'a''$ i $b'b''$ są dwiema różnemi parami punktów właściwych, odpowiadających sobie w linjowej homologji właściwej i stosujemy wzór (4) do dwóch czwórek: $a'b'l'_1l'_2$ i $a''b''l_1''l_2''$.

Otrzymujemy wówczas kolejno:

$$\frac{a'\,l_1'}{b'\,l_1'} : \frac{a'\,l_2'}{b'\,l_2'} = \frac{a''\,l_1''}{b''\,l_1''} : \frac{a''\,l_2''}{b''\,l_2''}, \quad 1 : \frac{a'\,l_2'}{b'\,l_2'} = \frac{a''\,l_1''}{b''\,l_1''} : 1, \quad \frac{a'\,l_2' \cdot a''\,l_1''}{b'\,l_2' \cdot b''\,l_1''} = 1,$$

$$l_2'a' \cdot l_1''\,a'' = l_2'\,b' \cdot l_1''\,b'', \tag{6}$$

dochodząc w ten sposób do twierdzenia:

XXIX. *W linjowej homologji właściwej, dwa zmienne odcinki względne, wyrażające odległości dwóch dowolnych, odpowiadających sobie punktów właściwych od odpowiednich punktów granicznych, posiadają stały iloczyn.*

W wypadku homologji linjowej, posiadającej dwa różne punkty podwójne, istnieje prosta interpretacja cechy, wynikająca z rozważania dwustosunku dla każdej z dwóch czwórek punktowych: $o\,l\,l'_2\,l_2''$ i $o\,l\,l_1'\,l_1''$.

Znajdujemy bowiem:

$$(o\,l\,l_2'\,l_2'') = \frac{o\,l_2'}{l\,l_2'} : 1 = \mathbf{c} \quad \text{i} \quad (o\,l\,l_1'\,l_1'') = 1 : \frac{o\,l_1''}{l\,l_1''} = \mathbf{c},$$

skąd

$$\frac{o\,l_2'}{l\,l_2'} = \frac{l\,l_1''}{o\,l_1''} = \mathbf{c}. \tag{7}$$

Cecha homologji linjowej jest przeto równa stosunkowi podziału odcinka $o\,l$ przez punkt graniczny l_2', należący do szeregu L', i równa się stosunkowi podziału odcinka $l\,o$ przez punkt graniczny l_1'', należący do szeregu L''. Otrzymujemy zatem następujace twierdzenia.

XXX. *W linjowej homologji właściwej, punkty graniczne są symetrycznie położone względem środka odcinka, łączącego punkty podwójne. (Odcinek ograniczony przez punkty graniczne jest współśrodkowy z odcinkiem ograniczonym przez punkty podwójne).*

XXXI. *W linjowej homologji właściwej, dwa odcinki względne, wyrażające odległości: pierwszego punktu granicznego od jednego z punktów podwójnych i drugiego punktu granicznego od pozostałego punktu podwójnego, posiadają zwroty różne i wspólną długość.*

Dla dwóch ostatnich twierdzeń istnieje oczywiście również dowód niezależny od pojęcia cechy homologji linjowej, a oparty na rozważaniu dwóch par trójkątów podobnych:

$$(o_1\,o\,l_2\,,\; o_1\,o_2\,l_2) \text{ i } (l_1\,l\,l_1'',\; l_1\,l_2\,o_2), \text{ albo } (o_2\,o\,l_1'',\; o_2\,o_1\,l_1) \text{ i } (l_2\,l\,l_2',\; l_2\,l_1\,o_1).$$

Dowód ten nie wyklucza wypadku elacji linjowej.

Gdy zakładamy, że w danej homologji linjowej wybrane są trzy różne punkty stałe: $a'\,b', c'$ oraz trzy odpowiednie punkty: a'', b'', c'' — to, opierając się na wzorze (4), wnioskujemy o zupełnej i wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości zmiennych punktów d' i d''. Mamy zatem następujące twierdzenie ogólne.

XXXII. *Każda dana homologja linjowa jest określona przez trzy różne punkty odpowiednie.*

Przypominając twierdzenie XXVII, możemy dwie odpowiadające sobie trójki punktowe: $a'b'c'$ i $a''b''c''$, wymienione w twierdzeniu XXXII, zastąpić jedną z czterech par trójek punktowych:

$$oll'_2 \text{ i } oll_2'', \; oll_1' \text{ i } oll_1'', \; ol_1'l_2' \text{ i } ol_1''l_2'', \; ll_1'l_2' \text{ i } ll_1''l_2''.$$

Poprzednie twierdzenie ogólne (XXXII) prowadzi wtedy do następującego wniosku.

XXXIII. *Każda dana, właściwa homologja linjowa, jest określona przez parę punktów podwójnych i jeden z punktów granicznych, albo — przez parę punktów granicznych i jeden z punktów podwójnych.*

Gdy dane są trzy spośród czterech punktów: o, l, l_2', l_1'', to punkt pozostały jest określony na zasadzie twierdzenia XXX przez warunek współśrodkowości dwóch różnych odcinków: ol i $l_2'l_1''$.

Posługując się wreszcie pojęciem cechy homologji linjowej i odwołując się do wzoru (7), wnioskujemy, że:

XXXIV. *Jeżeli dana jest wartość cechy, to właściwa homologja linjowa jest określona przez dwa punkty różne, należące do zbioru, złożonego z punktów podwójnych i punktów granicznych.*

Na podłożu właściwej homologji linjowej odnosimy dwa zmienne, odpowiadające sobie punkty: a', a'' do pierwszego punktu podwójnego o; rozważamy przeto dwa odcinki względne:

$$oa' = x' \text{ i } oa'' = x''.$$

Określamy przytem homologję linjową zapomocą dwóch parametrów:

$$ll_2' = l_1''o = \delta \text{ i } ll_1'' = l_2'o = \varepsilon.$$

Zgodnie ze wzorem (7), jest wtedy:

$$\mathbf{c} = -\frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Ogólny wzór (6), zastosowany do pary punktów: a', a'' i do jednego z punktów podwójnych, posiada postać:

$$l_2'a' \cdot l_1''a'' = \delta\varepsilon.$$

Podstawiając: $l_2'a' = \varepsilon + x'$ i $l_1''a'' = \delta + x''$, otrzymujemy ogólne równanie właściwej homologji linjowej:

$$x'x'' + \delta x' + \varepsilon x'' = o. \tag{8}$$

Wypadki szczególne:

1) $\mathbf{c} = 1$.
Mamy wówczas: $\varepsilon = -\delta$, czyli: $ll_1'' = -ll_2'$, a więc

$$x'x'' + \delta(x' - x'') = o. \tag{9}$$

Punkt l jest środkiem odcinka $l_2'l''_1$ i zgodnie z twierdzeniem XXX schodzi się z pozostałym punktem podwójnym. Homologja linjowa jest więc wtedy elacją linjową.

2) $\mathbf{c} = -1$.
Mamy: $\varepsilon = \delta$, czyli: $ll_1'' = ll_2'$ i otrzymujemy równanie symetryczne:

$$x'x'' + \delta(x' + x'') = o. \tag{10}$$

Schodzą się wówczas punkty graniczne: l_2' i l_1'' i — zgodnie z twierdzeniem XXX — stanowią środek odcinka ol. Dzięki symetrji równania (10), wnioskujemy wtedy, że rozważane obecnie przekształcenie homologiczne, polegające na przejściu od zmiennego punktu a' do odpowiedniego punktu a'', jest przekształceniem przemiennem (inwolucyjnem): jest ono bowiem równoznaczne z przekształceniem odwrotnem, polegającem na przejściu od zmiennego punktu a'' do odpowiedniego punktu a'. Para punktów podwójnych, wraz z dowolną parą punktów odpowiednich, tworzy harmoniczną czwórkę punktową.

Dochodzimy jednocześnie do następującego twierdzenia.

XXXV. *Właściwe homologiczne przekształcenie linjowe jest przemienne wtedy i tylko wtedy, gdy jego cecha jest równa jedności ujemnej.*

Wyłączając wypadek elacji, rozważamy w dalszym ciągu homologję linjową o dwóch różnych punktach podwójnych i na prostej L wybieramy dowolny punkt a, nie schodzący się z punktem l, ani z punktem l_0. Zapomocą pęku promieni, poprowadzonych na płaszczyźnie LO przez punkt a, określona jest perspektywiczna odpowiedniość dwóch czwórek punktowych: $o\,l\,a'\,a''$ i $o\,l_0\,o_1\,o_2$. Równe są przeto dwustosunki wymienionych czwórek, a więc:

$$(o\,l_0\,o_1\,o_2) = (o\,l\,a'\,a'') = \mathbf{c}. \tag{11}$$

W wyłączonym zaś wypadku elacji, każdy z powyższych dwustosunków posiada wartość równą jedności dodatniej. Otrzymujemy wobec tego następujące twierdzenie ogólne.

XXXVI. *Gdy na łącznicy środków rzutów rozważamy jej punkty przecięcia z płaszczyzną rzutów i z prostą, podlegającą dwuśrodkowemu odwzorowaniu, to dołączając do nich pierwszy i drugi środek rzutów, otrzymujemy czwórkę punktową, posiadającą dwustosunek równy cesze homologji linjowej.*

Pomiędzy dwiema czwórkami punktowemi: $o\,l_0\,o_1\,o_2$ i $l\,l_0\,l_1\,l_2$ istnieje niewłaściwa odpowiedniość perspektywiczna, wynikająca z równoległości promieni $o_1\,l_1$ i $o_2\,l_2$ do podłoża homologji linjowej. Ze wzoru (11) wynika przeto wzór nowy:

$$(l\,l_0\,l_1\,l_2) = \mathbf{c}. \tag{12}$$

Mamy zatem następujący wniosek.

XXXVII. *Gdy rozważamy na prostej, podlegającej odwzorowaniu dwuśrodkowemu, jej punkty przecięcia z płaszczyzną rzutów i z łącznicą środków, to dołączając do nich pierwszy i drugi punkt zniknienia, otrzymujemy czwórkę punktową, posiadającą dwustosunek równy cesze homologji linjowej.*

W ł a ś c i w a homologja linjowa jest uwarunkowana istnieniem dwóch w ł a ś c i w y c h — różnych albo zjednoczonych — punktów podwójnych.

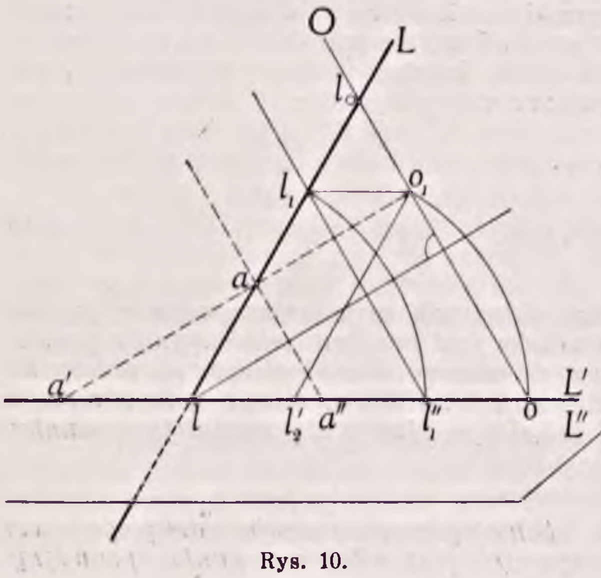
W warunkach, dotyczących obu środków, wyłączona jest wówczas jedynie równoległość prostej $o_1\,o_2$ do płaszczyzny Π, jak również i istnienie dwóch niewłaściwych środków rzutów. Nie wykluczone jest natomiast istnienie jednego właściwego środka o_1, łącznie z niewłaściwym środkiem o_2. Druga płaszczyzna zniknienia jest wtedy płaszczyzną niewłaściwą i niewłaściwym jest drugi punkt zniknienia: l_2, wyznaczony przez nią na prostej L. Punkt graniczny l_2' schodzi się wtedy z punktem zbiegu l'_n, otrzymanym dla prostej L podług pierwszego, właściwego środka rzutów. Dwa ostatnie wzory (11 i 12) przybierają jednocześnie następującą postać:

$$\frac{o\,o_1}{l_0\,o_1} = \frac{l\,l_1}{l_0\,l_1} = \mathbf{c}. \tag{13}$$

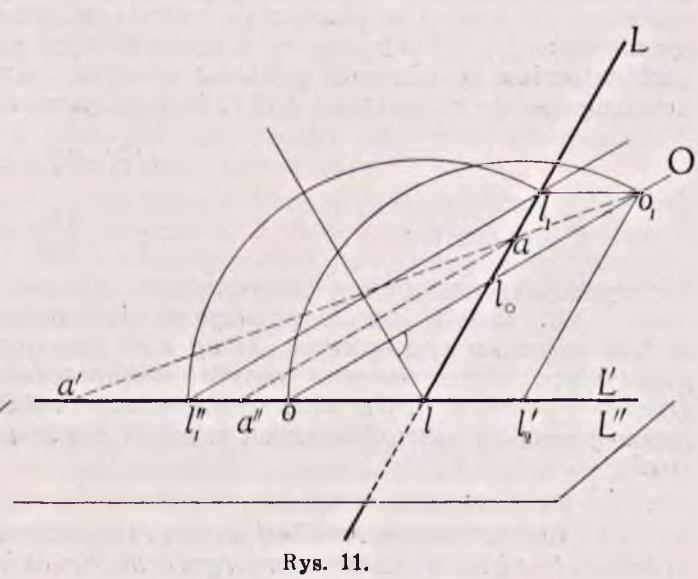
Równoległy jest wtedy promień $l_1\,l_1''$ do łącznicy O oraz promień $o_1\,l_2'$ do prostej L mamy przeto:

$$l_1\,o_1 = l\,l'_2 = l''_1\,o = \delta. \tag{14}$$

Niewłaściwy środek o_2 może być wreszcie wybrany w ten sposób, że równoległe promienie drugiego pęku są prostopadłe do jednej z prostych, połowiących kąty, utworzone przez prostą L z podłożem homologji linjowej (rys. 10 i 11). Szereg punktowy L i jego rzut ukośny



Rys. 10.



Rys. 11.

L'' są wtedy dwoma szeregami równemi; symetryczne są bowiem względem wymienionej prostej dwusiecznej. Do ostatniego wzoru (14) dołączony jest przeto wówczas wzór:

$$l\,l_1 = l\,l''_1 = l_2'\,o = \varepsilon. \tag{15}$$

Dowiedzione jest w ten sposób następujące twierdzenie.

XXXVIII. *Z każdej właściwej odpowiedniości perspektywicznej dwóch szeregów punktowych, powstają dwie właściwe odpowiedniości homologiczne o cechach różniących się tylko znakami, gdy podłoża szeregów doprowadzane są do przystania, przez obrót jednego z tych podłoży dokoła ich punktu przecięcia. Dla obu wynikowych odpowiedniości homologicznych, jednym z punktów podwójnych jest punkt przecięcia szeregów perspektywicznych, a jednym z punktów granicznych jest punkt graniczny szeregu nieruchomego. Pozostały punkt graniczny, w każdej z odpowiedniości homologicznych, jest wynikiem obrotu ruchomego punktu granicznego.*

Twierdzenie XXXVIII może być zastosowane do takiego wypadku, kiedy środek o_1 jest wybrany na jednej z prostych, połowiących kąty, utworzone przez podłoża L i L'. Jedną z wynikowych odpowiedniości homologicznych, rozważanych w ostatniem twierdzeniu, jest wtedy przemienna (inwolucyjna) homologja linjowa, a drugą — elacja linjowa.

Gdy na jednej prostej dane są dwa różne, współśrodkowe odcinki $o\,l$ i $l_2'\,l_1''$, określające właściwą homologję linjową dwóch szeregów L' i L'', to rekonstrukcja odpowiedniości perspektywicznych: $L \overline{\wedge} L'$ i $L \overline{\wedge} L''$ sprowadza się do wyznaczenia czterech współpłaszczyznowych punktów: o_1, o_2, l_1, l_2, przyczem trzy pary boków w czworokącie zupełnym $o_1\,o_2\,l_1\,l_2$ podlegają jedynie następującym warunkom:

1) $o_1\,o_2$ i $l_1\,l_2$ przechodzą odpowiednio przez punkty o i l,
2) $o_1\,l_2$ i $o_2\,l_1$ „ „ „ „ l_2' i l_1'',
3) $o_1\,l_1$ i $o_2\,l_2$ posiadają z podłożem homologji wspólny punkt niewłaściwy.

Na specjalną uwagę zasługuje ten szczególny wypadek rekonstrukcji powyższej, kiedy bok $o_2\,l_2$ jest prostą niewłaściwą i równe są odcinki $l\,l_1$ i $l\,l_1''$. Otrzymujemy wtedy następujące twierdzenie.

XXXIX. *Każda właściwa homologja linjowa, określona przez jej punkty podwójne. (o, l) i punkty graniczne: (l_2', l_1'') — zamienia się na właściwą perspektywiczną odpowiedniość szeregów punktowych, gdy na dowolnej płaszczyźnie, przesuniętej przez wspólne podłoże szeregów homologicznych, wykonywamy obrót podłoża jednego szeregu dokoła podwójnego punktu (l), przyczem kąt obrotu nie stanowi wielokrotności kąta półpełnego.*

§ 5. Niewłaściwe homologje linjowe.

Jako pierwszy rodzaj homologicznej odpowiedniości linjowej, zbadana została (w § 4) właściwa homologja linjowa, posiadająca dwa właściwe punkty podwójne, różne, albo zjednoczone. Przypominając ogólne własności homologji linjowej, wyrażone w twierdzeniach XXII — XXV, przechodzimy obecnie do rozważania trzech rodzajów pozostałych i do każdego z nich stosujemy nazwę n i e w ł a ś c i w e j h o m o l o g j i l i n j o w e j.

Rodzaj II. *Niewłaściwym punktem jest ślad l prostej L; łącznica O posiada właściwy ślad: o.*

Łącznica O (rys. 12) jest prostą właściwą, nierównoległą do płaszczyzny Π, a prosta L, posiadająca z tą łącznicą wspólny punkt l_0, jest prostą czołową, albo prostą niewłaściwą, nie należącą do żadnej z płaszczyzn zniknienia. Oba punkty zniknienia: l_1 i l_2 oraz oba punkty graniczne: l_2' i l_1'' schodzą się z niewłaściwym punktem l. Czwórka punktowa: $o\,l_0\,o_1\,o_2$ złożona jest natomiast z czterech punktów różnych, przyczem dla każdego punktu a prostej L, nie schodzącego się z punktami l_0 i l, istnieje perspektywiczna odpowiedniość:

$$o\,l\,a'\,a'' \overline{\wedge}\, o\,l_0\,o_1\,o_2.$$

Mamy przeto:

$$c = \frac{o\,a'}{o\,a''} = (o\,l_0\,o_1\,o_2) \tag{16}$$

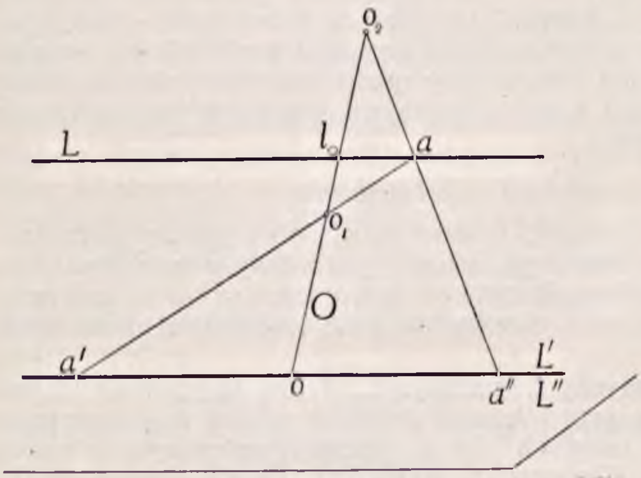
i otrzymujemy następujące twierdzenia:

XL. *Jeżeli homologja linjowa jest wynikiem dwuśrodkowego odwzorowania prostej w tym wypadku szczególnym, kiedy ślad łącznicy środków jest punktem właściwym, a prosta, podlegająca odwzorowaniu, posiada ślad niewłaściwy, to szeregi homologiczne są szeregami środkowo-podobnemi. Środkiem podobieństwa jest ślad łącznicy środków rzutów, a cecha homologji linjowej — równa dwustosunkowi czwórki punktowej: $o\,l_0\,o_1\,o_2$ — jest stałą wartością stosunku* $\dfrac{o\,a'}{o\,a''}$.

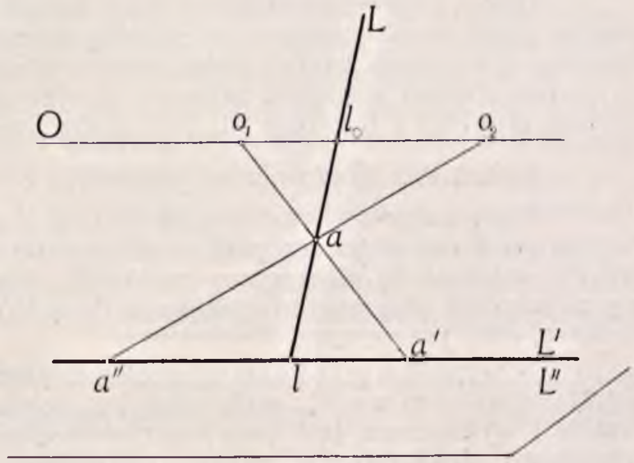
XLI. *Przemienne linjowe przekształcenie homologiczne rodzaju drugiego jest przekształceniem środkowo-symetrycznem. Środkiem symetrji jest właściwy punkt podwójny* *ślad łącznicy środków rzutów. Dwa środki rzutów są wtedy harmonicznie podzielone przez podłoże homologji linjowej i przez prostą, podlegającą odwzorowaniu dwuśrodkowemu.*

Rodzaj III. *Niewłaściwym punktem jest ślad (o) łącznicy O. Prosta L posiada właściwy ślad l.*

Prosta L (rys. 13) jest prostą właściwą, nierównoległą do płaszczyzny Π, a łącznica O, posiadająca z tą prostą wspólny punkt l_0, jest prostą czołową albo prostą niewłaściwą. Oba punkty zniknienia: l_1 i l_2 schodzą się z punktem l_0, a oba punkty graniczne — z niewłaściwym



Rys. 12.



Rys. 13.

punktem o. Jak poprzednio, czwórka punktowa $l\, l_0\, l_1\, l_2$ redukuje się do dwóch punktów różnych; cztery natomiast punkty różne występują w czwórce $o\, l_0\, o_1\, o_2$. Dla każdego punktu a prostej L, nie schodzącego się z punktami l_0 i l, istnieje przytem perspektywiczna odpowiedniość:

$$o\, l\, a'\, a'' \barwedge o\, l_0\, o_1\, o_2 .$$

Mamy przeto:

$$\mathbf{c} = \frac{l\,a''}{l\,a'} = (o\, l_0\, o_1\, o_2) \tag{17}$$

i dochodzimy do twierdzeń:

XLII. *Jeżeli homologja linjowa jest wynikiem dwuśrodkowego odwzorowania prostej, w tym wypadku szczególnym, kiedy ślad łącznicy środków jest punktem niewłaściwym, a prosta, podlegająca odwzorowaniu, posiada ślad właściwy, to szeregi homologiczne są szeregami środkowo-podobnemi. Środkiem podobieństwa jest ślad prostej, podlegającej odwzorowaniu, a cecha homologji — równa stosunkowi podziału odcinka: $o_2\, o_1$ przez prostą L — jest stałą wartością stosunku: $\frac{l\,a''}{l\,a'}$.*

XLIII. *Przemienne linjowe przekształcenie homologiczne rodzaju trzeciego jest przekształceniem środkowo-symetrycznem. Środkiem symetrji jest właściwy punkt podwójny, ślad prostej, podlegającej odwzorowaniu. Odcinek, łączący środki rzutów jest wtedy przepołowiony prostą, podlegającą dwuśrodkowemu odwzorowaniu.*

Gdy rozważamy konstrukcję homologji linjowej rodzaju trzeciego, to na specjalną uwagę zasługuje ten wypadek szczególny, kiedy oba środki rzutów: o_1 i o_2 są punktami niewłaściwemi, przyczem środek o_2 należy do jednej z prostych, połowiących kąty, utworzone przez prostą L i podłoże homologji. Wyłączając równoczesną przynależność środka rzutów o_1 do pozostałej dwusiecznej wymienionych kątów, otrzymujemy następujące twierdzenie.

XLIV. *Jeżeli niewłaściwy środek pęku, występujący w trzecim rodzaju perspektywicznej odpowiedniości szeregów punktowych, nie należy do żadnej z dwóch prostych, połowiących kąty, utworzone przez podłoża szeregów, to z danej odpowiedniości perspektywicznej powstają dwie homologje linjowe rodzaju trzeciego, o cechach, różniących się tylko znakami, gdy podłoża szeregów doprowadzane są do przystania, przez obrót jednego z nich dokoła ich punktu przecięcia.*

W wyłączonym wypadku równoczesnej przynależności środków rzutów do obu dwusiecznych wymienionych kątów, wynikowa homologja linjowa jest symetrją środkową.

Gdy zakładamy, że dowolna homologja linjowa rodzaju trzeciego jest określona przez właściwy punkt podwójny l oraz parę różnych odpowiednich punktów właściwych: a', a'', to rekonstruując perspektywiczne odpowiedniości: $L \barwedge L'$ i $L \barwedge L''$, możemy posługiwać się dowolną prostą L, przecinającą podłoże homologji w punkcie l, i jako drugi środek rzutów wybrać punkt niewłaściwy, należący do jednej z rozważanych wyżej prostych dwusiecznych. Końcowemu twierdzeniu (XXXIX), dotyczącemu właściwej homologji linjowej, odpowiada wtedy następujący wniosek.

XLV. *Linjowa homologja rodzaju trzeciego, określona przez właściwy punkt podwójny (l) i przez cechę tej homologji — albo przez punkt l i parę różnych, odpowiednich punktów właściwych — zamienia się na perspektywiczną odpowiedniość rodzaju trzeciego, gdy na dowolnej płaszczyźnie, przesuniętej przez wspólne podłoże szeregów homologicznych, wykonywamy obrót podłoża jednego szeregu dokoła podwójnego punktu (l), przyczem kąt obrotu nie stanowi wielokrotności kąta półpełnego.*

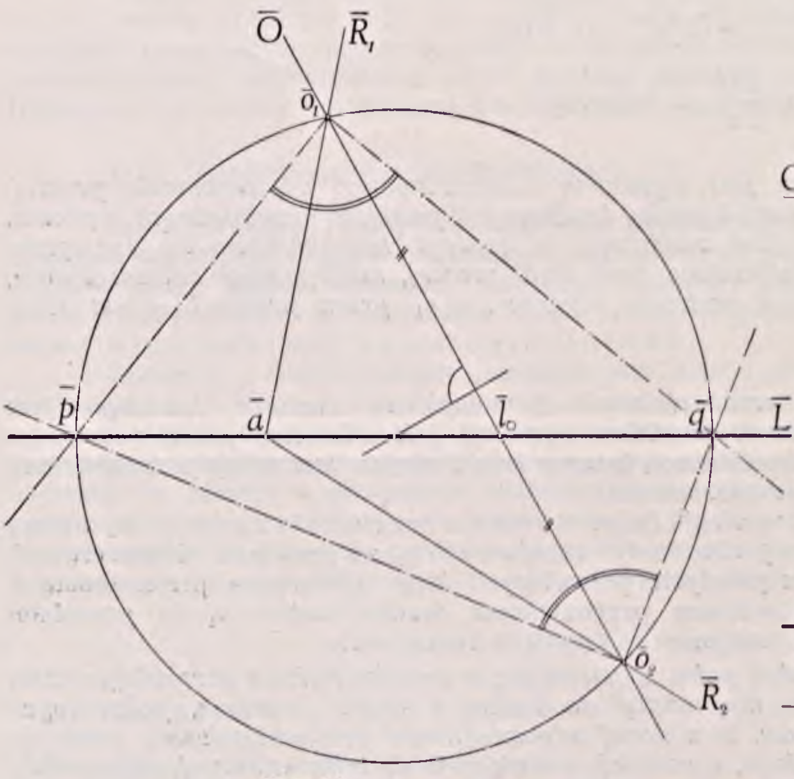
Elację linjową określiliśmy jako homologję linjową, posiadającą jeden tylko punkt podwójny, czyli dwa schodzące się ze sobą punkty podwójne. W każdej homologji linjowej rodzaju drugiego i trzeciego istnieje jeden właściwy i jeden niewłaściwy punkt podwójny. Punkty takie są zawsze dwoma punktami różnemi, a więc żadna z homologicznych odpowiedniości linjowych rodzaju drugiego i trzeciego nie jest elacją linjową.

Rodzaj IV. *Ślady obu prostych O i L są punktami niewłaściwemi.*

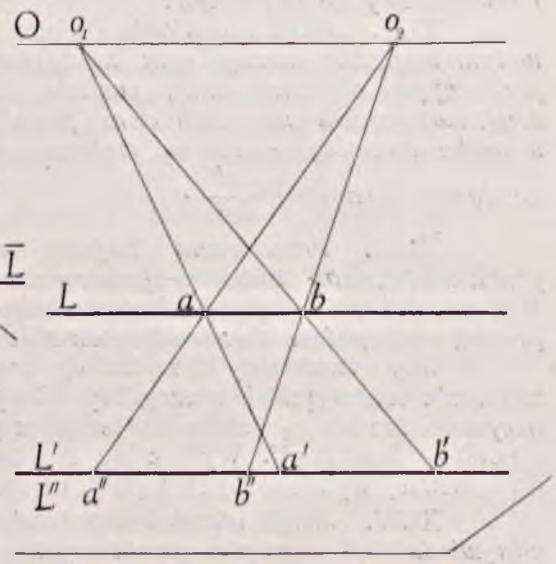
Wyłączamy najprzód wypadek elacji i zakładamy, że dwa niewłaściwe punkty podwójne: o, l są punktami różnemi; podłożem rozważanej homologji linjowej jest wtedy niewłaściwa prosta P_n, należąca do płaszczyzny rzutów Π. Wspólna płaszczyzna rzucająca: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ pokrywa się ze wspólną płaszczyzną zniknienia ($\Omega_1 = \Omega_2$); jest ona wówczas pewną właściwą płaszczyzną czołową, albo płaszczyzną niewłaściwą.

W wypadku właściwej czołowej płaszczyzny λ, punkty: l_o, o_1, o_2 są trzema różnemi punktami właściwemi; wyłączona jest bowiem przynależność środków rzutów do płaszczyzny rzutów i wykluczona jest pozatem równoległość prostych O i L, pociągająca za sobą istnienie wspólnego niewłaściwego punktu podwójnego. W wypadku niewłaściwej płaszczyzny λ, punkty l_o, o_1, o_2 są trzema różnemi punktami niewłaściwemi, przyczem żaden z nich również nie leży na niewłaściwej prostej P_n.

W obu wypadkach, dla punktów: l_o, o_1, o_2 — i dla prostych: O, L — rozważać możemy, na płaszczyźnie Π (rys. 14), ich rzuty środkowe: $\bar{l}_o$, $\bar{o}_1$, $\bar{o}_2$, $\bar{O}$, $\bar{L}$ — otrzymane zapomocą



Rys. 14.



Rys. 15.

dodatkowego właściwego środka rzutów, nie leżącego na płaszczyznach Π i λ. Każda z prostych O i L oraz każdy ze zmiennych promieni rzucających: $R_1 = o_1 a$ i $R_2 = o_2 a$ — posiada wspólny punkt niewłaściwy: o, l, a', a'' z określonym w ten sposób rzutem: $\bar{O}$, $\bar{L}$, $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$. Badanie homologicznej odpowiedniości linjowej, na niewłaściwem podłożu P_n, sprowadza się przeto wówczas do rozważania zmiennej pary promieni: $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$, w dwóch pękach: $\bar{o}_1$, $\bar{o}_2$ — perspektywicznie podporządkowanych szeregowi $\bar{L}$.

Dla czwórki niewłaściwych punktów: $o\,l\,a'a''$, wartość dwustosunku, stanowiąca cechę homologji, jest określona pośrednio: na podstawie perspektywicznej odpowiedniości z czwórką punktową $o\,\bar{l}_o\,o_1\,\bar{o}_2$ względem środka a. Mamy przeto:

$$\mathbf{c} = (o\,l\,a'a'') = \frac{\overline{l_o}\,\overline{o_2}}{\overline{l_o}\,\overline{o_1}} \tag{18}$$

Dwa punkty niewłaściwe, należące, odpowiednio, do dwóch prostych wzajemnie prostopadłych, nazywamy p r o s t o k ą t n ą d w ó j k ą p u n k t ó w, albo p u n k t a m i w z a j e m n i e p r o s t o p a d ł e m i. W linjowej odpowiedniości homologicznej, rozważanej na podłożu niewłaściwem, na specjalną uwagę zasługują dwie, odpowiadające sobie wzajemnie, prostokątne dwójki punktów niewłaściwych: (p', q') i (p'', q''). Poszukiwanie takich dwójek sprowadza się do zataczania okręgu, przechodzącego przez środki pęków: $o_1, \bar{o}_2$ i posiadającego średnicę $p\,q$ na prostej $\bar{L}$. Środek wymienionego okręgu powinien być punktem właściwym, należącym jednocześnie: do prostej $\bar{L}$ i do symetralnej, wyznaczonej dla odcinka $\bar{o}_1\ \bar{o}_2$; jest on przeto jednoznacznie określonym punktem właściwym, gdy proste $\bar{O}$ i $\bar{L}$ nie są prostemi wzajemnie prostopadłemi.

Gdy punkty $\bar{o}_1$ i $\bar{o}_2$ leżą na prostopadłej do prostej $\bar{L}$, lecz nie są symetryczne względem prostej $\bar{L}$, to konstrukcja wymienionego okręgu staje się niewykonalną; dwie odpowiadające sobie, prostokątne dwójki punktów niewłaściwych schodzą się wówczas z parą punktów podwójnych: o, l.

Gdy punkty: $\bar{o}_1$, $\bar{o}_2$ są symetrycznie położone względem prostej $\bar{L}$, to każdy właściwy punkt prostej $\bar{L}$ jest środkiem okręgu, przechodzącego przez punkty: $\bar{o}_1$ i $\bar{o}_2$. Otrzymujemy przeto trzy twierdzenia następujące.

XLVI. *Jeżeli podłoże homologji linjowej jest prostą niewłaściwą, a punkty podwójne nie są punktami wzajemnie prostopadłemi, to homologja linjowa posiada jedną — i tylko jedną — parę odpowiednich, prostokątnych dwójek punktowych.*

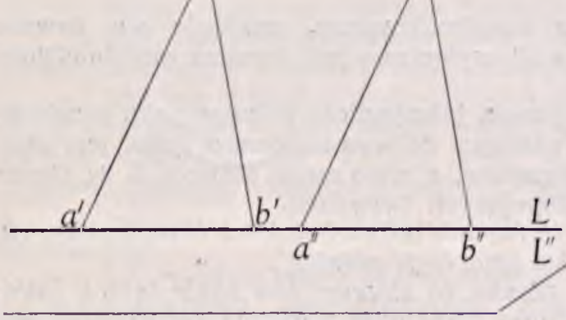
XLVII. *Jeżeli podłoże homologji linjowej jest prostą niewłaściwą, a punkty podwójne są wzajemnie prostopadłe i cecha nie jest równa jedności ujemnej, to homologja linjowa posiada jedną — i tylko jedną — parę odpowiednich, prostokątnych dwójek punktowych. Każda z tych dwójek jest utworzona przez punkty podwójne rozważanej homologji linjowej.*

XLVIII. *Jeżeli podłoże przemiennej homologji linjowej jest prostą niewłaściwą i punkty podwójne są punktami wzajemnie prostopadłemi, to każdej prostokątnej dwójce punktowej, należącej do jednego z szeregów homologicznych, odpowiada prostokątna również dwójka punktowa w szeregu pozostałym.*

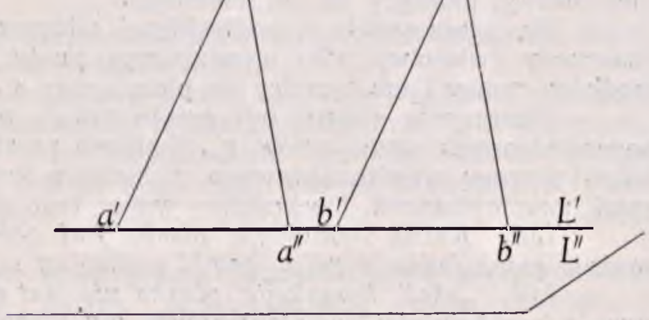
W rozważaniach, dotyczących czwartego rodzaju homologji linjowej, wyłączyliśmy wypadek elacji; zakładaliśmy bowiem, że niewłaściwe punkty podwójne są dwoma punktami różnemi. Przechodzimy obecnie do badania n i e w ł a ś c i w e j e l a c j i l i n j o w e j, zakładając, że proste O i L posiadają wspólny ślad niewłaściwy. Podłożem elacji niewłaściwej może być niewłaściwa prosta P_n, albo prosta właściwa.

W pierwszym wypadku, płaszczyzna λ jest — jak poprzednio — płaszczyzną czołową, albo płaszczyzną niewłaściwą, przyczem proste $\bar{O}$ i $\bar{L}$, rozważane na rys. 14, są prostemi równoległemi: punkt l_o schodzi się z jedynym, niewłaściwym punktem podwójnym i ze swym rzutem $\bar{l}_o$. Ze wzoru (18), wyrażającego cechę homologji, otrzymujemy jedność dodatnią, jako graniczną wartość stosunku odcinków: $\bar{l}_o\,\bar{o}_2$ i $\bar{l}_o\,\bar{o}_1$. Do odpowiednich dwójek prostokątnych stosuje się dowiedzione wyżej twierdzenie XLVI.

W wypadku drugim, płaszczyzna λ jest płaszczyzną właściwą, nie zajmującą położenia czołowego, przyczem jedna conajmniej spośród prostych O i L jest prostą właściwą, równoległą do właściwego podłoża homologji. Opierając się na podobieństwie dwóch par trójkątów (rys. 15) i uwzględniając równość boków przeciwległych w odpowiednich równoległobokach (rys. 16 i 17) dochodzimy do następującego wniosku ogólnego:



Rys. 16.



Rys. 17.

XLIX. *Jeżeli podłoże elacji niewłaściwej jest prostą właściwą, to dwa dowolne odcinki odpowiednie są odcinkami równemi i posiadającemi zwroty zgodne.*

§ 6. Właściwa homologja płaska

Rozważamy układ płaski, czyli zbiór wszystkich punktów i wszystkich prostych, należących do jednej płaszczyzny, i wprowadzamy następujące określenie homologji płaskiej.

Homologją płaską nazywamy związek, istniejący pomiędzy dwoma rzutami układu płaskiego, wyznaczonemi na jednej płaszczyźnie, gdy płaszczyzna tego układu nie przechodzi przez żaden ze środków rzutów i nie pokrywa się z płaszczyzną rzutów.

Zgodnie z określeniem powyższem, opieramy badanie homologji płaskiej na znanych, podstawowych własnościach perspektywicznej odpowiedniości dwóch układów płaskich i na twierdzeniach, dotyczących odwzorowania dwuśrodkowego.

Wiązka zupełna, stanowiąca pełny zbiór prostych i płaszczyzn, poprowadzonych przez dany środek o_1, względnie o_2, określa zupełną, wzajemnie jednoznaczną i kolineacyjną odpowiedniość elementów jednoimiennych: punktów i prostych — w dwóch układach płaskich: w danym układzie α, należącym do płaszczyzny, podlegającej dwuśrodkowemu odwzorowaniu i w układzie α', względnie α'', należącym do płaszczyzny rzutów Π. Wymienione własności są własnościami przechodniemi; zachowane są więc również w wynikowej odpowiedniości układów α' i α''. Wnioskujemy przeto, że:

L. *Homologja płaska jest zupełną, wzajemnie jednoznaczną i kolineacyjną odpowiedniością elementów jednoimiennych.*

W każdej z danych odpowiedniości perspektywicznych: $\alpha \overline{\wedge} \alpha'$ i $\alpha \overline{\wedge} \alpha''$, zbiór elementów podwójnych (zjednoczonych) składa się: z prostej $A = \alpha \Pi$, stanowiącej ślad płaszczyzny α, i ze wszystkich punktów prostej A. Opierając się na twierdzeniu II, wnioskujemy następnie, że w homologji płaskiej, do wymienionych elementów podwójnych należy dołączyć: ślad łącznicy środków, czyli punkt o, jako wspólny rzut punktu: $a_0 = \alpha O$, oraz każdą prostą, poprowadzoną na płaszczyźnie rzutów przez punkt o i stanowiącą zjednoczone odwzorowanie odpowiedniej prostej, przechodzącej przez punkt a_0 na płaszczyźnie α.

Ślad A płaszczyzny α i ślad o prostej O nazywamy, odpowiednio, osią i środkiem homologji płaskiej; każda zaś prosta, poprowadzona na płaszczyźnie rzutów przez środek homologji, nosi nazwę promienia homologji płaskiej.

Uwzględniając jednocześnie dwa podstawowe twierdzenia (I i II), dotyczące odwzorowania dwuśrodkowego, dochodzimy do następujących wniosków ogólnych.

LI. *W homologji płaskiej, zbiór punktów podwójnych składa się ze środka homologji i ze wszystkich punktów, należących do osi homologji, a zbiór prostych podwójnych składa się z osi i ze wszystkich promieni homologji.*

LII. *Dwa homologiczne układy płaskie są układami środkowo perspektywicznemi względem środka homologji i osiowo perspektywicznemi względem osi homologji. Dwie niezjednoczone proste odpowiednie są współpunktowe z osią homologji i stanowią podłoża szeregów odpowiednich, perspektywicznych względem środka homologji. Dwa niezjednoczone punkty odpowiednie są współlinjowe ze środkiem homologji i stanowią środki pęków odpowiednich, perspektywicznych względem osi homologji.*

W wypadku przynależności środka homologji do osi homologji, płaska odpowiedniość homologiczna nosi nazwę elacji płaskiej (*„planar elation"*; porównaj: *Veblen and Young, Projective geometry*, Vol I, p. 72).

W każdej z danych odpowiedniości perspektywicznych: $\alpha \overline{\wedge} \alpha'$ i $\alpha \overline{\wedge} \alpha''$ — elementy graniczne stanowią dwie proste wraz z należącemi do nich szeregami punktowemi, a mianowicie: prostą zniknienia: $A_1 = \alpha \Omega_1$, względnie $A_2 = \alpha \Omega_2$, i prostą zbiegu A_n', względnie A_n'' — przyczem każda z tych prostych posiada z prostą A wspólny punkt niewłaściwy.

W wynikowej homologji płaskiej, elementami granicznemi, należącemi odpowiednio do układów α' i α'', są proste i szeregi punktowe A_2' i A''_1, czyli: pierwszy rzut szeregu A_2 i drugi rzut szeregu A_1. Dla prostych granicznych homologji płaskiej istnieje również wspólny punkt niewłaściwy, należący do osi homologji.

Na płaszczyźnie α, podlegającej odwzorowaniu dwuśrodkowemu, znajduje się zawsze oznaczony (właściwy, albo niewłaściwy) punkt: $a_0 = \alpha O$; wyłączona jest bowiem przynależność środków rzutów i ich łącznicy do płaszczyzny α.

Płaszczyzna α może być przeto zawsze rozpatrywana jako podłoże pełnego pęku prostych, poprowadzonych przez punkt a_0. Zmienna prosta L, należąca do wymienionego pęku, jest podłożem szeregu współpunktowego z łącznicą środków rzutów, a więc rzuty szeregu L są szeregami homologicznemi. Dochodzimy wobec tego do następujących twierdzeń.

LIII. *Każda homologja płaska jest zbiorem linjowych odpowiedniości homologicznych, posiadających jeden wspólny punkt podwójny w środku homologji płaskiej.*

LIV. *Jeżeli homologja płaska nie jest elacją płaską, to stanowi ona zbiór takich linjowych odpowiedniości homologicznych, dla których jednym, wspólnym punktem podwójnym jest* *środek homologji płaskiej, a miejscem geometrycznem pozostałego, zmiennego punktu podwójnego jest oś homologji.*

LV. *Homologiczne odpowiedniości linjowe, występujące w homologji płaskiej, posiadają cechę wspólną, równą dwustosunkowi czwórki punktowej: $o\,a_0\,o_1\,o_2$. W wypadku elacji, wspólna cecha jest jednością dodatnią.*

Dwustosunkowi $(o\,a_0\,o_1\,o_2)$ nadajemy nazwę cechy homologji płaskiej.

Od rozważań ogólnych, dotyczących dowolnej homologji płaskiej, przechodzimy do badania właściwej homologicznej odpowiedniości płaskiej (Rodzaj I), zakładając, że środek i oś homologji są elementami właściwemi. Wykluczamy zatem wypadek czołowego położenia płaszczyzny α i jednocześnie zakładamy, że łącznica O jest prostą właściwą, nierównoległą do płaszczyzny rzutów. Zapomocą dwóch różnych płaszczyzn zniknienia, wyznaczone są wtedy, na płaszczyźnie α, dwie różne proste zniknienia: A_1 i A_2; dwiema różnemi prostemi właściwemi, równoległemi do osi homologji są wówczas obie proste graniczne homologji płaskiej: A_2' i A''_1.

Zestawiając wreszcie twierdzenie LV z twierdzeniem XXX, dochodzimy do wniosku, że:

LVI. *Właściwa homologja płaska posiada właściwe proste graniczne, równoległe do osi homologji, przyczem dwa odcinki względne, wyrażające odległości: jednej prostej granicznej od środka homologji i pozostałej prostej granicznej od osi homologji — posiadają długości równe i zwroty przeciwne. (Oś właściwej elacji płaskiej jest symetralną dla pary prostych granicznych, a w przemiennej, właściwej homologji płaskiej, istnieje wspólna prosta graniczna, równooddalona od środka i od osi homologji).*

Ogólne twierdzenie *LII* możemy uzupełnić dodatkowym wnioskiem, wynikającym z rozważania właściwej perspektywicznej odpowiedniości szeregów punktowych (§ 2, Rodzaj I), w płaskiej homologji właściwej.

LVII. *Jeżeli w płaskiej homologji właściwej, dwie odpowiednie proste nie pokrywają się wzajemnie i nie są do siebie równoległe, to równoległobok, utworzony przez dane proste i przez równoległe do nich promienie homologji posiada jedną parę wierzchołków w środku homologji i w punkcie podwójnym, należącym do osi homologji, a pozostałą parę wierzchołków stanowią punkty graniczne, leżące na odpowiednich prostych granicznych.*

W każdej właściwej homologji płaskiej, istnieje określona prosta X, poprowadzona przez środek homologji, prostopadle do osi homologji. Linjową odpowiedniość homologiczną na podłożu X nazywamy główną homologją linjową dla danej, właściwej homologji płaskiej. Opierając się na twierdzeniu LV, wnioskujemy, że:

LVIII. *Właściwa homologja płaska jest dostatecznie określona przez jej główną homologję linjową.*

Do prostej X, stanowiącej podłoże głównej homologji linjowej i przyjętej za pierwszą oś prostokątnego układu współrzędnych, dołączamy oś Y, poprowadzoną przez środek o.

Odwołując się do ogólnego równania właściwej homologji linjowej (8), otrzymujemy układ dwóch równań:

$$\left.\begin{aligned} x'x'' + \delta x' + \varepsilon x'' &= 0 \\ x'y'' - x''y' &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (19)$$

stanowiący ogólne analityczne określenie właściwej homologji płaskiej odniesionej do prostokątnego układu współrzędnych.

Z określenia tego wynika, że w płaskiej homologji właściwej krzywa algebraiczna: $K_1(x', y') = 0$ przekształca się na krzywą:

$$K_1\left(\frac{-\varepsilon x''}{x'' + \delta}, \frac{-\varepsilon y''}{x'' + \delta}\right) = 0; \qquad (20)$$

dowolnej zaś krzywej algebraicznej: $K_2(x'', y'') = 0$ odpowiada krzywa:

$$K_2\left(\frac{-\delta x'}{x' + \varepsilon}, \frac{-\delta y'}{x' + \varepsilon}\right) = 0. \qquad (21)$$

Mamy przeto następujące twierdzenie.

LIX. *W homologicznem właściwem przekształceniu płaskiem, zachowany zostaje stopień równania krzywej algebraicznej, podlegającej temu przekształceniu.*

Każde z równań układu (19) jest jednorodnem równaniem linjowem względem zmiennych x', y' i parametru ε, albo zmiennych x'', y'', rozważanych łącznie z parametrem δ. Proporcjonalna zmiana obu wartości x', y', albo x'', y'' jest jednokładnem przekształceniem jednego z homologicznych układów płaskich względem środka homologji. Zmiana taka jest połączona z równoczesną proporcjonalną zmianą wartości ε, albo δ. Otrzymujemy przeto następujące twierdzenie.

LX. *Jeżeli układ płaski podlega kolejno: właściwemu przekształceniu homologicznemu i przekształceniu jednokładnemu względem środka przekształcenia homologicznego, to* *przekształcenie wynikowe jest, również właściwem przekształceniem homologicznem. W obu homologicznych przekształceniach: w danem i w wynikowem — istnieje wspólny środek i wspólny kierunek osi.*

Sprowadzając określenie właściwej homologji płaskiej do określenia odpowiedniej linjowej homologji głównej na podłożu X i ustawiając płaszczyznę OX prostopadle do płaszczyzny rzutów, możemy powtórzyć rozważania, dotyczące twierdzeń XXXVIII i XXXIX. Dochodzimy wtedy do następujących wyników.

LXI. *Z każdej właściwej odpowiedniości perspektywicznej dwóch układów płaskich, powstają dwie właściwe homologiczne odpowiedniości płaskie, o cechach różniących się tylko znakami, gdy podłoża układów płaskich doprowadzane są do przystania, przez obrót jednego z tych podłoży dokoła ich krawędzi. Osią obu wynikowych odpowiedniości homologicznych jest krawędź podłoży, a jedną z prostych granicznych jest prosta graniczna podłoża nieruchomego. Pozostała prosta graniczna, w każdej z otrzymanych odpowiedniości homologicznych jest wynikiem obrotu prostej granicznej, należącej do obracanego układu płaskiego.*

LXII. *Każda właściwa homologja płaska, określona przez jej środek, oś i proste graniczne, zamienia się na właściwą perspektywiczną odpowiedniość układów płaskich, gdy wykonywamy obrót jednego z homologicznych układów płaskich dokoła osi homologji, przyczem kąt obrotu nie stanowi wielokrotności kąta półpełnego.*

Przez zestawienie twierdzenia LXI z twierdzeniem LIX, dochodzimy do wniosku, że:

LXIII. *W perspektywicznem, właściwem przekształceniu układu płaskiego zachowany zostaje stopień równania krzywej algebraicznej, podlegającej temu przekształceniu.*

§ 7. Niewłaściwe homologje płaskie.

W paragrafie poprzednim badaliśmy pierwszy rodzaj homologicznej odpowiedniości płaskiej: właściwą homologję płaską. Przypominając sześć twierdzeń ogólnych (L — LV), dotyczących każdej homologji płaskiej, przechodzimy obecnie do rozważania trzech pozostałych rodzajów, noszących wspólną nazwę niewłaściwych homologicznych odpowiedniości płaskich.

Rodzaj II. *Środek homologji jest punktem właściwym, a oś homologji—prostą niewłaściwą.*

Łącznica O jest wtedy prostą właściwą, nierównoległą do płaszczyzny Π, a płaszczyzna α jest właściwą płaszczyzną, równoległą do płaszczyzny rzutów, albo płaszczyzną niewłaściwą.

Oś homologji oraz obie proste zniknienia (A_1, A_2) i obie proste graniczne (A_2', A_1'') schodzą się wtedy z niewłaściwą prostą P_n, należącą do płaszczyzny Π. Wszystkie homologje linjowe, występujące w rozważanej homologicznej odpowiedniości płaskiej, są niewłaściwemi homologjami linjowemi (Rodzaj II). Posiadają one jeden wspólny punkt podwójny o. Zgodnie ze wzorem (16), dla dowolnej pary właściwych, odpowiednich punktów różnych, mamy wówczas:

$$\frac{o\,a'}{o\,a''} = (o\,a_0\,o_1\,o_2) = \mathbf{c}\,. \tag{22}$$

Wnioskujemy przeto, że:

LXIV. *Jeżeli środek homologji płaskiej jest punktem właściwym, a oś — prostą niewłaściwą, to homologiczna odpowiedniość płaska jest odpowiedniością jednokładną (podobieństwem środkowem) dwóch układów płaskich, posiadających podłoże wspólne.*

Każda para odpowiednich prostych różnych, współpunktowa z niewłaściwą osią homologji, jest parą prostych równoległych. W wypadku przemiennej homologji płaskiej drugiego rodzaju ($\mathbf{c} = -1$), homologiczne układy płaskie są układami środkowo symetrycznemi.

Rodzaj III. *Środek homologji jest punktem niewłaściwym, a oś — prostą właściwą.* Do niewłaściwej homologji płaskiej stosujemy wówczas nazwę powinowactwa osiowego, przyczem prostą A i promienie niewłaściwego pęku nazywamy odpowiednio: osią i promieniami powinowactwa. Niewłaściwemu środkowi o nadajemy nazwę kierunku powinowactwa.

Łącznica O jest wtedy właściwą prostą czołową, albo prostą niewłaściwą, nie należącą do płaszczyzny rzutów, a płaszczyzna α jest płaszczyzną właściwą, nie zajmującą położenia czołowego. Wspólna płaszczyzna zniknienia ($\Omega_1 = \Omega_2$) wyznacza na płaszczyźnie α wspólną prostą zniknienia: $A_1 = A_2$. Każda z prostych granicznych: A_2', A_1'' schodzi się z niewłaściwą prostą P_n, należącą do płaszczyzny rzutów.

Każdy punkt płaszczyzny α, nie leżący na wspólnej prostej zniknienia, posiada odwzorowanie dwuśrodkowe, złożone z dwóch punktów właściwych (Twierdz. VI), a dwuśrodkowe odwzorowanie każdego punktu, leżącego na wspólnej prostej zniknienia, jest parą punktów niewłaściwych (Twierdz. IX). Wynikają stąd dwie zasadnicze własności powinowactwa osiowego, wyrażone w następujących twierdzeniach.

LXV. *W powinowactwie osiowem, każdemu punktowi właściwemu, należącemu do jednego z dwóch układów płaskich — odpowiada, w układzie pozostałym, punkt właściwy, a każdemu punktowi niewłaściwemu — punkt niewłaściwy.*

LXVI. *Każdej parze prostych należących do jednego z dwóch powinowatych układów płaskich, i posiadających właściwy punkt wspólny, odpowiada, w układzie pozostałym, para prostych, posiadających właściwy również punkt wspólny; każdej zaś parze prostych równoległych odpowiada para prostych także równoległych.*

(Twierdzenia powyższe, uwarunkowane jedynie brakiem właściwych prostych granicznych, stosują się również do każdej z pozostałych, niewłaściwych homologicznych odpowiedniości płaskich).

W rozważanym poprzednio, drugim rodzaju homologji płaskiej, niewłaściwa prosta P_n była osią homologji. W powinowactwie osiowem, środek o należy do niewłaściwej prostej P_n; prosta P_n jest przeto jednym z promieni powinowactwa.

Gdy badamy powinowactwo osiowe i wyłączamy wypadek elacji płaskiej, to na każdym właściwym promieniu powinowactwa znajdujemy linjową odpowiedniość homologiczną rodzaju trzeciego, posiadającą właściwy punkt podwójny w punkcie przecięcia z osią powinowactwa; na niewłaściwym zaś promieniu P_n, istnieje linjowa odpowiedniość homologiczna o dwóch różnych, niewłaściwych punktach podwójnych. Opierając się na wzorze (17), otrzymujemy następujące twierdzenie.

LXVII. *Jeżeli powinowactwo osiowe nie jest elacją płaską, to na każdym właściwym promieniu powinowactwa, odpowiednie szeregi punktowe są szeregami środkowo-podobnemi, posiadającemi środek na osi powinowactwa. Każda para odpowiadających sobie — w powinowactwie osiowem — różnych punktów właściwych (a', a'') jest podzielona w stałym stosunku przez oś powinowactwa, przyczem stosunek podziału odcinka $a''\,a'$ jest równy cesze powinowactwa osiowego.*

W wyłączonym wypadku elacji płaskiej, każdy promień powinowactwa jest podłożem linjowej odpowiedniości homologicznej, posiadającej jeden wspólny, niewłaściwy punkt podwójny. Stosujemy wówczas twierdzenie XLIX i dochodzimy do następującego wniosku

LXVIII. *Jeżeli powinowactwo osiowe jest elacją płaską, to na każdym właściwym promieniu powinowactwa, odpowiednie szeregi punktowe są szeregami równemi. Cecha powinowactwa jest wtedy równa jedności dodatniej.*

Rodzaj IV. *Środek i oś homologji są elementami niewłaściwemi.* Wspólna płaszczyzna zniknienia, przesunięta przez łącznicę O, i płaszczyzna α są dwiema różnemi płaszczyznami czołowemi, bądź też jedna z tych płaszczyzn jest płaszczyzną niewłaściwą, a pozostała — właściwą płaszczyzną czołową.

Jak w homologji płaskiej rodzaju drugiego, z niewłaściwą prostą P_n schodzą się: ślad płaszczyzny α, jej dwie proste zniknienia i obie proste graniczne rozważanej homologji płaskiej. Niewłaściwy środek o należy obecnie do niewłaściwej również osi A; badana homologja płaska stanowi przeto szczególny rodzaj elacji płaskiej.

Na każdym z równoległych promieni homologji płaskiej, znajdujemy obecnie linjową odpowiedniość homologiczną o jednym, wspólnym, niewłaściwym punkcie podwójnym; zgodnie z twierdzeniem XLIX, szeregi homologiczne są wtedy szeregami równemi. Dwie różne proste odpowiednie, posiadające punkt wspólny na prostej P_n, są prostemi równoległemi; stanowią one także podłoża szeregów równych, związanych perspektywiczną odpowiedniością czwartego rodzaju. Mamy przeto następujące twierdzenie.

LXIX. *Jeżeli środek i oś homologji są elementami niewłaściwemi, to homologiczne układy płaskie są układami równemi. Każdy z nich, przez wykonanie odpowiedniego przesunięcia równoległego, przekształca się na układ pozostały.*

Rozważania powyższe, dotyczące trzech rodzajów niewłaściwej homologji płaskiej, uzupełniamy dalszem, szczegółowem badaniem powinowactwa osiowego.

Określenie danej, właściwej homologji płaskiej — zgodnie z twierdzeniem LVIII — może być sprowadzone do określenia odpowiedniej linjowej homologji głównej. Jeżeli bowiem punkt o i prosta A są elementami właściwemi, to w pęku o istnieje jednoznacznie określony promień X, prostopadły do prostej A. W analogicznem zagadnieniu, dotyczącem powinowactwa osiowego, zmuszeni jesteśmy rozróżniać: prostokątne powinowactwo osiowe, czyli wypadek wzajemnej prostopadłości niewłaściwego środka o i niewłaściwego punktu osi A, oraz ukośne powinowactwo osiowe, istniejące w każdym z wypadków pozostałych; nie wyłączamy przytem wypadku elacji płaskiej, kiedy środek o jest niewłaściwym punktem osi A.

W prostokątnem powinowactwie osiowem, każda homologja linjowa o podłożu właściwem może spełniać rolę homologji głównej, a więc określenie prostokątnego powinowactwa osiowego może być sprowadzone do określenia linjowej odpowiedniości homologicznej rodzaju trzeciego. W ukośnem powinowactwie osiowem, żadna z homologicznych odpowiedniości linjowych nie jest homologją główną Opierając się na twierdzeniu LII, wnioskujemy jednak, że w każdym wypadku:

LXX. *Powinowactwo osiowe jest określone przez oś i parę różnych odpowiednich punktów właściwych.*

Gdy rozważamy przestrzenną konstrukcję powinowactwa osiowego, to na specjalną uwagę zasługuje ten wypadek szczególny, kiedy środki rzutów: o_1 i o_2 są punktami niewłaściwemi, przyczem promienie drugiej wiązki są prostopadłe do jednej z płaszczyzn, połowiących kąty dwuścienne, utworzone przez płaszczyzny α i Π. Wyłączając równoczesną prostopadłość promieni pierwszej wiązki do pozostałej płaszczyzny dwusiecznej, otrzymujemy następujące twierdzenie.

LXXI. *Jeżeli promienie wiązki niewłaściwej, określającej perspektywiczną odpowiedniość dwóch nierównoległych układów płaskich, nie są prostopadłe do żadnej z płaszczyzn, połowiących kąty dwuścienne, utworzone przez podłoża układów płaskich, to z danej odpowiedniości perspektywicznej powstają dwa powinowactwa osiowe, o cechach, różniących się tylko znakami, gdy podłoża układów doprowadzane są do przystania, przez obrót jednego z nich, dokoła ich prostej przecięcia.*

W wyłączonym wypadku równoczesnej prostopadłości promieni dwóch wiązek do dwóch odpowiednich płaszczyzn dwusiecznych, wynikowe powinowactwo osiowe jest symetrją osiową.

Gdy powinowactwo osiowe — zgodnie z twierdzeniem LXX — jest określone przez oś A i przez parę różnych, właściwych punktów odpowiednich, to przesuwając dowolną płaszczyznę α, przecinającą się z płaszczyzną Π według prostej A, możemy wykonać rekonstrukcję niewłaściwych środków rzutów w ten sposób, ażeby środek o_2 był punktem wspólnym dla tych prostych, które są prostopadłe do jednej z wymienionych wyżej płaszczyzn dwusiecznych. Mamy zatem następujące twierdzenie.

LXXII. *Powinowactwo osiowe, określone przez jego oś i przez parę różnych właściwych punktów odpowiednich, zamienia się na niewłaściwą perspektywiczną odpowiedniość dwóch układów płaskich, gdy jeden z układów powinowatych obracamy dokoła osi powinowactwa, przyczem kąt obrotu nie stanowi wielokrotności kąta półpełnego.*

Jeżeli figurą, należącą do jednego z dwóch układów osiowo-powinowatych, jest dowolny równoległobok, to na zasadzie twierdzenia LXVI wnioskujemy, że figura odpowiednia, należąca do układu pozostałego, jest również pewnym równoległobokiem. Równoległe przesunięcie dowolnego odcinka, w jednym z układów osiowo-powinowatych, pociąga za sobą równoległe przesunięcie odcinka odpowiedniego, w układzie pozostałym. Mamy przeto następujące twierdzenie ogólne.

LXXIII. *Równoległemu przesunięciu jednej z dwóch figur powinowatych—wykonanemu na podłożu danego powinowactwa osiowego—odpowiada równoległe przesunięcie figury pozostałej. Wektory dwóch wymienionych przesunięć są odcinkami, odpowiadającemi sobie w rozważanem powinowactwie osiowem.*

Jeżeli punkty: a', a'' — są dwoma różnemi, właściwemi punktami odpowiedniemi, należącemi do figur, wymienionych w ostatniem twierdzeniu, a x jest dowolnym punktem właściwym, należącym do osi powinowactwa, to odcinki: $a'x$ i $a''x$ mogą być przyjęte za wektory odpowiednich przesunięć. Punkty: a' i a'', po wykonaniu takich przesunięć, schodzą się ze sobą. Gdy powinowactwo osiowe nie jest elacją płaską, to punktem x może być punkt przecięcia promienia $a'a''$ z osią powinowactwa. Oprócz punktów: a', a'' schodzą się ze sobą każde dwa punkty odpowiednie tych szeregów, których podłoża poprowadzone są przez a' i a'', równolegle do osi powinowactwa.

Gdy określamy dowolne powinowactwo osiowe, zapomocą osi A i pary różnych właściwych punktów odpowiednich: a', a'', to biorąc zmienny punkt l osi A i łącząc z nim oba stałe punkty: $a'a''$, otrzymujemy dwa zmienne promienie pęków, odpowiadające sobie w danem powinowactwie osiowem: $L' = la'$ i $L'' = la''$. Badanie związku, istniejącego pomiędzy zmiennemi kierunkami prostych: L' i L'' jest równoznaczne z badaniem linjowej, niewłaściwej odpowiedniości homologicznej na podłożu P_n; odpowiedniość taką rozważaliśmy w § 5, jako jeden z wypadków homologji linjowej rodzaju czwartego.

Zamiast dawnej prostej L, podlegającej odwzorowaniu dwuśrodkowemu i leżącej na wspólnej płaszczyźnie zniknienia, występuje obecnie wspólna prosta zniknienia płaszczyzny α, a punkt, wprowadzony wówczas, jako dodatkowy, właściwy środek rzutów, nie należący do wspólnej płaszczyzny zniknienia, jest zastąpiony teraz punktem a, leżącym na płaszczyźnie α lecz nie należącym do wspólnej prostej zniknienia. Prosta $\overline{L}$ wykreślona na dawnym rys. 14, jest przeto obecnie śladem A dla płaszczyzny α (rys. 18), a dawne, dodatkowe rzuty środków o_1 i o_2, czyli punkty: $\overline{o_1}$ i $\overline{o_2}$ stanowią: rzut pierwszy i rzut drugi dla punktu a, leżącego na płaszczyźnie α.

Z poprzednich rozważań, podanych w § 5 i dotyczących homologji linjowej na podłożu niewłaściwem, wynikają następujące twierdzenia.

LXXIV. *W ukośnem powinowactwie osiowem, homologiczna odpowiedniość linjowa, na podłożu niewłaściwem, posiada jedną i tylko jedną parę odpowiednich, prostokątnych dwójek punktowych. Żaden z punktów, występujących w wymienionych dwójkach, nie schodzi się z niewłaściwym środkiem powinowactwa i nie należy do osi powinowactwa.*

LXXV. *W prostokątnem, nieprzemiennem powinowactwie osiowem* ($\mathbf{c} \neq -1$) *homologiczna odpowiedniość linjowa, na podłożu niewłaściwem, posiada jedną i tylko jedną parę odpowiednich, prostokątnych dwójek punktowych. Każda z tych dwójek złożona jest z niewłaściwego środka powinowactwa i z punktu niewłaściwego, należącego do osi powinowactwa.*

LXXVI. *Jeżeli powinowactwo osiowe jest przemienną odpowiedniością dwóch układów płaskich, czyli prostokątną symetrją osiową* ($c = -1$), *to w homologicznej odpowiedniości linjowej, na podłożu niewłaściwem, każdej prostokątnej dwójce punktowej odpowiada prostokątna również dwójka punktowa.*

Gdy badamy w dalszym ciągu dwie zmienne proste odpowiednie: $L' = la'$ i $L'' = la''$, jako promienie pęków, poprowadzone, odpowiednio, przez stałe punkty: a' i a'', to stwierdzamy najprzód, że w wypadku niewłaściwego punktu l, rozważane proste są podłożami szeregów równych (§ 2, IV rodzaj perspektywicznej odpowiedniości szeregów). W wypadku właściwego punktu l (Rodzaj III), szeregi: L' i L'' są wogóle szeregami podobnemi; są one szeregami równemi, gdy punkt l jest punktem właściwym, równooddalonym od punktów: a', a'', a więc punktem, należącym do symetralnej odcinka $a'\,a''$. Jak poprzednio, przy poszukiwaniu odpowiednich, prostokątnych dwójek punktowych, rozróżniamy trzy wypadki i dochodzimy do następujących twierdzeń.

LXXVII. *W ukośnem powinowactwie osiowem, przez dwa różne właściwe punkty odpowiednie przechodzą podłoża dwóch par odpowiednich szeregów równych. Jedną parę stanowią proste równoległe do osi powinowactwa, a druga para złożona jest z prostych, przecinających się w punkcie właściwym, równooddalonym od wymienionych punktów odpowiednich.*

LXXVIII. *W prostokątnem, nieprzemiennem powinowactwie osiowem* ($c \neq -1$), *przez dwa właściwe punkty odpowiednie przechodzą podłoża jednej i tylko jednej pary odpowiednich szeregów równych. Podłoża te są równoległe do osi powinowactwa.*

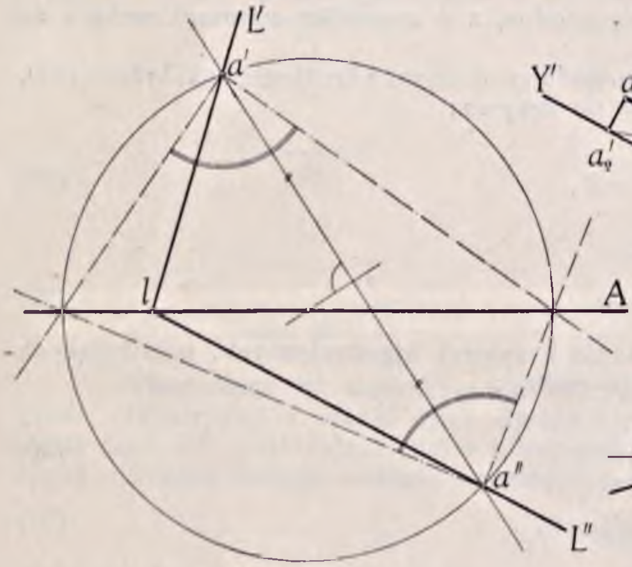
LXXIX. *W przemiennem powinowactwie osiowem, czyli w prostokątnej symetrji osiowej* ($c = -1$), *każda para prostych odpowiednich stanowi podłoża dwóch szeregów równych.*

Otrzymujemy proste analityczne określenie osiowego powinowactwa prostokątnego, gdy oś tego powinowactwa przyjmujemy za jedną z osi układu współrzędnych ($X = A$), a dowolnie wybrany, właściwy promień powinowactwa — za pozostałą oś współrzędnych (Y). Przypominając określenie cechy powinowactwa osiowego, znajdujemy następujące wzory:

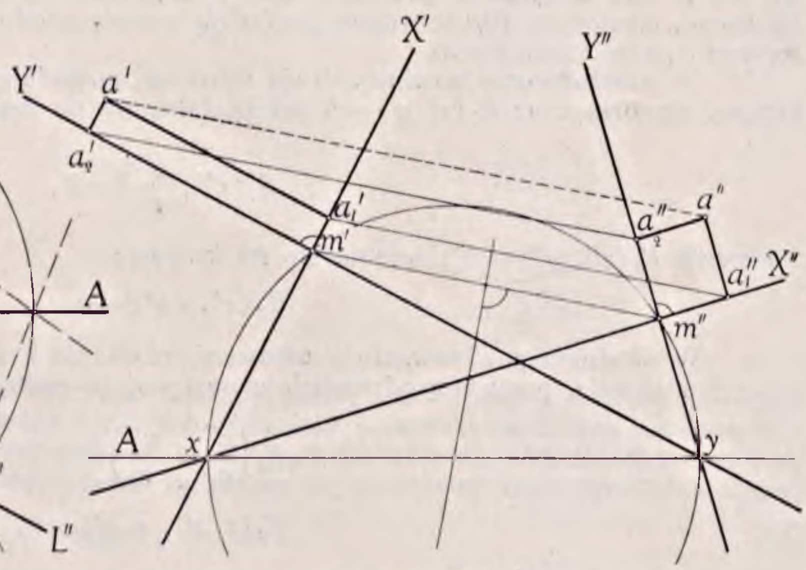
$$x' = x''; \; c\,y' = y'' \tag{23}$$

gdzie: x', y' i x'', y'' są, odpowiednio, współrzędnemi dwóch dowolnych, odpowiadających sobie punktów: a' i a''.

Opierając się na rozważaniach poprzednich, dotyczących równoległego przesunięcia w powinowactwie osiowem, wnioskujemy pozatem, że wzory (23) zostają zachowane i w tym wypadku, kiedy dwa układy płaskie, związane prostokątnem powinowactwem osiowem, są odniesione, odpowiednio, do dwóch różnych układów współrzędnych: $X'\,Y'$ i $X''\,Y''$, przyczem osie: Y' i Y'' pokrywają się wzajemnie, a osie: X' i X'' są dwiema prostemi równoległemi do osi A i odpowiadającemi sobie w danem powinowactwie.



Rys. 18.



Rys. 19.

Przechodzimy następnie do ukośnego powinowactwa osiowego, posiadającego cechę dodatnią i określonego: przez oś A oraz parę różnych, właściwych punktów odpowiednich: m', m'', zajmujących jednostronne położenie względem osi A (rys. 19). Zapomocą symetralnej, wykreślonej dla odcinka $m'\,m''$, znajdujemy, na osi powinowactwa, właściwy środek okręgu, przechodzącego przez oba punkty dane i posiadającego średnicę xy na osi A. Dane punkty: m' i m'' są wtedy początkami dwóch odpowiednich, prostokątnych układów osi współrzędnych, przyczem osiami pierwszego układu są proste: $x m' = X'$ i $y m' = Y'$, a osiami drugiego są odpowiednie proste: $x m'' = X''$ i $y m'' = Y''$. Dla określenia dodatnich i ujemnych zwrotów, na wymienionych osiach współrzędnych, zakładamy, że względne odcinki: $x m'$, $x m''$, $y m'$, $y m''$ posiadają zwroty dodatnie. Określone są wtedy dwie dodatnie liczby:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{x m''}{x m'} \quad \text{i} \quad \mathbf{c}_2 = \frac{y m''}{y m'}; \tag{24}$$

każda z nich jest równa stosunkowi dowolnego odcinka osi X'', albo Y'', do odpowiedniego odcinka osi X', względnie Y'. Spełniona jest przytem jedna z dwóch nierówności podwójnych:

$$\mathbf{c}_1 > 1 > \mathbf{c}_2, \text{ albo: } \mathbf{c}_1 < 1 < \mathbf{c}_2. \tag{25}$$

Odnosimy wówczas dwa dowolne, odpowiednie punkty: a', a'' do odpowiednich układów: $X' Y'$ i $X'' Y''$, określając ich współrzędne:

$$\begin{aligned} x' &= m' a_1', \quad y' = m' a_2 \\ x'' &= m'' a_1'', \quad y'' = m'' a_2''. \end{aligned} \tag{26}$$

Proste: $a_1' a_1''$, $a_2' a_2''$, $a' a''$ są promieniami powinowactwa, równoległemi do promienia $m' m''$. Posługując się liczbami, określonemi we wzorach (24) znajdujemy:

$$\mathbf{c}_1 x' = x'', \quad \mathbf{c}_2 y' = y''. \tag{27}$$

Otrzymujemy przeto analityczne określenie ukośnego powinowactwa osiowego dwóch układów płaskich, odniesionych do dwóch różnych prostokątnych układów osi. Osie współrzędnych są prostemi, odpowiadającemi sobie w danem powinowactwie ukośnem.

W wypadku ujemnej cechy ukośnego powinowactwa osiowego, powołujemy się na twierdzenia: LXXII i LXXI, zamieniając jeden z powinowatych układów płaskich na układ z nim symetryczny względem osi A. Otrzymujemy wówczas osiowe powinowactwo ukośne o cesze dodatniej, a więc takie, do którego stosują się rozważania powyższe.

Z układu wzorów (27) wynika następujące twierdzenie.

LXXX. *Każda z dwóch figur odpowiednich, występujących w danem ukośnem powinowactwie osiowem, może być zamieniona na figurę, równą figurze pozostałej, przez wykonanie dwóch prostokątnych, powinowatych przekształceń osiowych. Osiami tych przekształceń prostokątnych są takie proste wzajemnie prostopadłe, które w danem powinowactwie ukośnem przekształcają się na proste wzajemnie prostopadłe. W wypadku dodatniej cechy danego powinowactwa ukośnego, otrzymane figury równe posiadają zwroty zgodne, a w wypadku ujemnej cechy — są figurami przeciwzwrotnemi,*

W prostokątnem powinowactwie osiowem, posiadającem znane określenie analityczne (23), krzywa algebraiczna: $K_1(x', y') = 0$ przekształca się na krzywą:

$$K_1\left(x'', \frac{y''}{\mathbf{c}}\right) = 0, \tag{28}$$

a krzywa $K_2(x'', y'') = 0$ zamienia się na krzywą:

$$K_2(x', \mathbf{c}\, y') = 0. \tag{29}$$

W ukośnem powinowactwie osiowem, równania krzywych algebraicznych, wynikających z przekształcenia, posiadają odpowiednio następującą postać:

$$K_1\left(\frac{x''}{\mathbf{c}_1}, \frac{y''}{\mathbf{c}_2}\right) = 0, \tag{30}$$

$$K_2(\mathbf{c}_1 x', \mathbf{c}_2 y') = 0. \tag{31}$$

Dochodzimy przeto do następującego twierdzenia.

LXXXI. *W powinowatem przekształceniu osiowem, zachowany zostaje stopień równania krzywej algebraicznej, podlegającej temu przekształceniu.*

Ze względu na dalsze wywody teoretyczne, na szczególną uwagę zasługuje koło: $x'^2 + y'^2 = r^2$, przekształcające się na elipsę:

$$\frac{x''^2}{(\mathbf{c}_1 r)^2} + \frac{y''^2}{(\mathbf{c}_2 r)^2} = 1. \tag{32}$$

Twierdzenie LXXX daje możność zbadania ogólnie pojętego powinowactwa dwóch układów płaskich, określonego jedynie, jako odpowiedniość kolineacyjna, nie posiadająca właściwych elementów granicznych. W określeniu takiem usunięty jest warunek środkowej i osiowej odpowiedniości perspektywicznej dwóch układów płaskich.

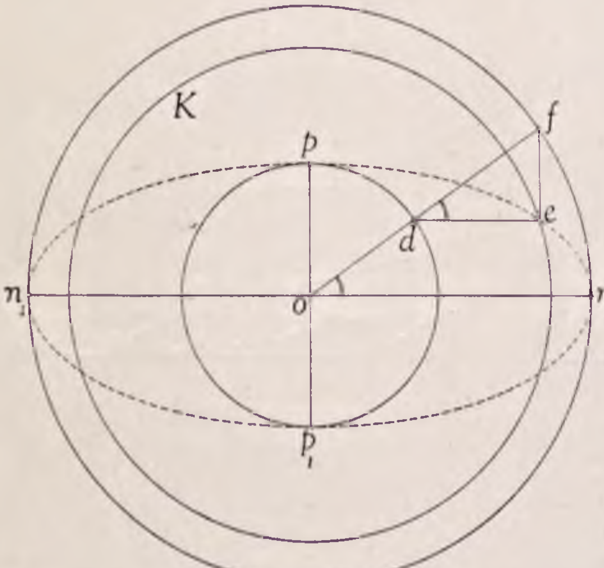
Zakładamy wówczas, że dane są, w położeniu dowolnem, dwa trójkąty: $a'b'c'$ i $a''b''c''$ należące odpowiednio do układów płaskich: α', α''. Na podłożu układu α' budujemy trójkąt $a'''b'''c'''$ — należący do pomocniczego układu α''' — podobny do trójkąta $a''b''c''$ i posiadający dwie pary odpowiednich wierzchołków wspólnych z trójkątem $a'b'c'$, a mianowicie: $b''' = b'$ i $c''' = c'$. Określone jest wtedy podobieństwo układów: α'' i α''' i osiowe powinowactwo układów: α' i α'' — przyczem osią tego powinowactwa jest prosta: $b'c' = b'''c'''$ a punkty: a', a'' stanowią parę punktów odpowiednich, nie należących do osi powinowactwa.

Gdy wyłączony jest wypadek podobieństwa układów: α' i α'', to trójkąty $a'b'c'$ i $a'''b'''c'''$ nie są trójkątami równemi; istnieją wówczas dwa określone, odpowiednie i prostokątne układy osi współrzędnych: $X'Y'$, $X'''Y'''$. Uwzględniając podobieństwo układów: α'' i α''', znajdujemy również jednoznacznie określone, odpowiadające sobie i prostokątne układy osi współrzędnych: $X'Y'$ i $X''Y''$.

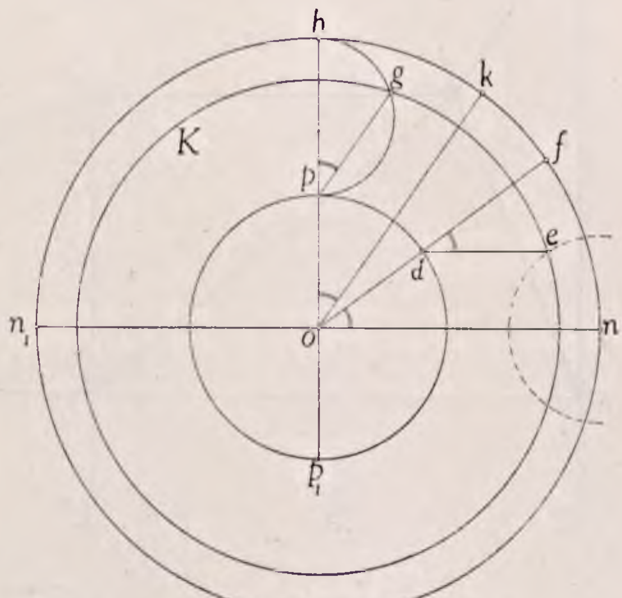
Do ogólnie pojętych powinowatych, lecz nie perspektywicznych układów płaskich: α' i α'' stosuje się przeto również dowiedzione poprzednio twierdzenie LXXX.

Koło K', zatoczone dowolnym promieniem, w układzie α', ze środka a', przekształca się na elipsę K''', należącą do pomocniczego układu płaskiego i na podobną do niej elipsę K'' w układzie α''.

Zagadnienie rekonstrukcji perspektywicznego położenia takich rozłączonych układów płaskich, które znajdowały się poprzednio w powinowactwie osiowem (jak również i zagadnienie możliwości powinowactwa osiowego dwóch ogólnie określonych, nie perspektywicznych układów płaskich) sprowadza się do poszukiwania równych szeregów odpowiednich w rozważanych układach płaskich. Szeregami takiemi są dwie średnice równe, należące odpowiednio do wymienionego koła K' i do odpowiadającej mu elipsy K''.



Rys. 20.



Rys. 21.

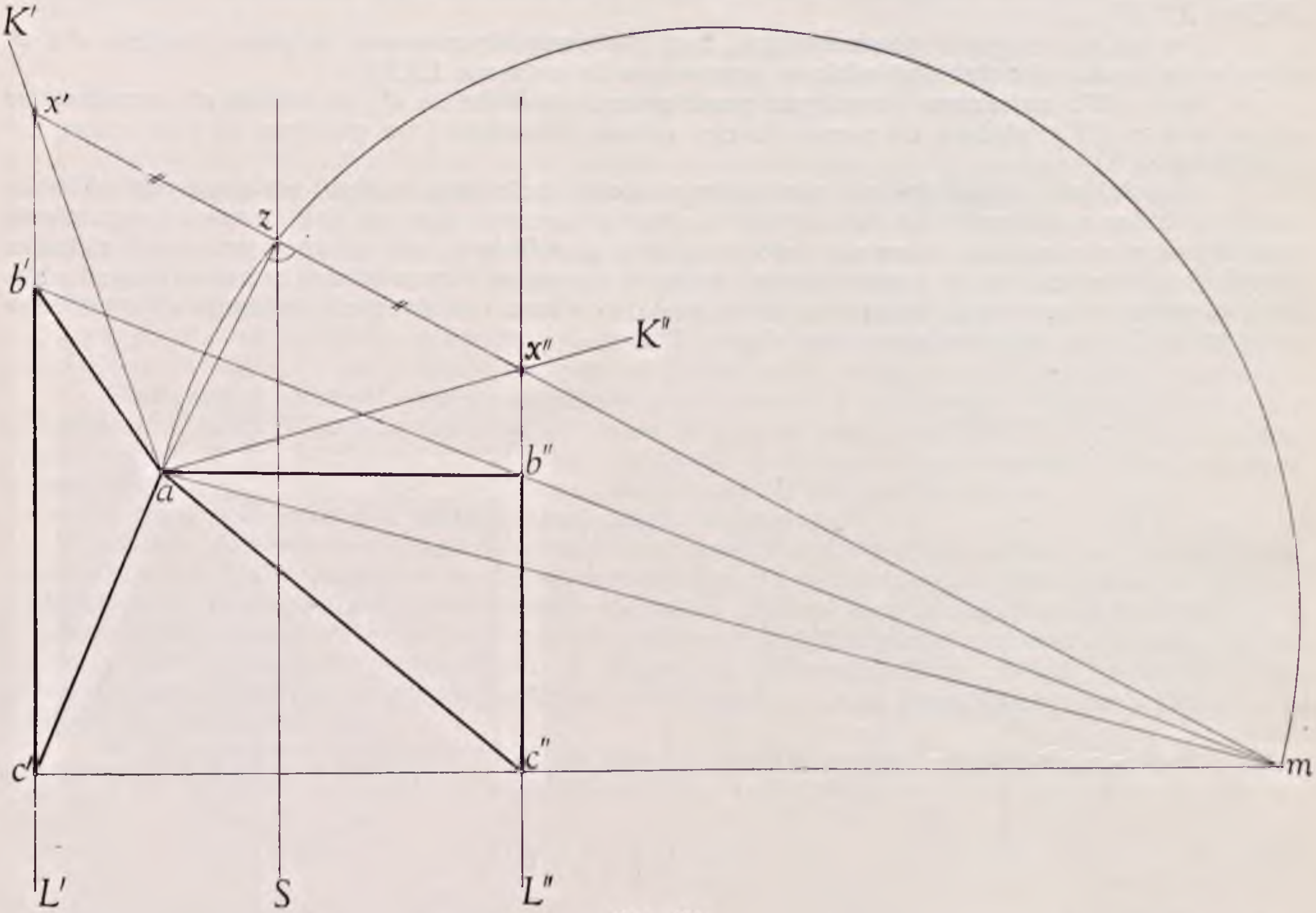
Przechodząc do poszukiwania równych średnic elipsy i koła, doprowadzamy do przystania płaszczyzny i środki tych dwóch krzywych. Szukamy wówczas wspólnych punktów dla elipsy (rys. 20), posiadającej dane wierzchołki n, n_1, p, p_1, i dla koła K, współśrodkowego z tą elipsą. Analizę takiego zadania konstrukcyjnego opieramy na parametrycznem określeniu elipsy:

$$x = a\cos\varphi,\quad y = b\sin\varphi, \tag{33}$$

gdzie a i b oznaczają, odpowiednio, połowę wielkiej i połowę małej osi elipsy. Geometryczną interpretacją wzorów (33) jest prostokątny trójkąt def, w którym przeciwprostokątna df stanowi różnicę promieni kół: wielkiego i małego, a przyprostokątne de i ef są, odpowiednio, równoległe do wielkiej i małej osi elipsy i przecinają się w punkcie e, leżącym na danej elipsie. Parametr φ jest kątem, utworzonym przez promienie: on i of. Punkt e, stanowiący jedno z przecięć danej elipsy i współśrodkowego z nią koła, jest jednocześnie przecięciem tegoż koła z półokręgiem, zatoczonym na średnicy df. Przy dowolnym obrocie trójkąta def, dokoła środka o, punkty d i f posuwają się, odpowiednio, po kole małem i po kole wielkiem, a punkt e po kole K.

Opierając się na powyższej analizie, zataczamy najprzód półokrąg na średnicy ph (rys. 21), i, w przecięciu z kołem K, znajdujemy punkt g. Wykreśliwszy następnie, w kole wielkiem, promień ok, równoległy do odcinka pg i posiadający zwrot zgodny ze zwrotem tego odcinka, znajdujemy wartość parametru: $\varphi = \widehat{koh} = \widehat{nof}$, dla poszukiwanego punktu e. Obrót trapezu $opgk$, dokoła punktu o, możemy oczywiście zastąpić zataczaniem łuku okręgu ze środka n, promieniem, równym odcinkowi kg. Łuk taki, w przecięciu z kołem K, wyznacza dwa położenia poszukiwanego punktu, wspólnego dla danej elipsy i dla koła K. Odcinki, łączące znalezione punkty ze środkiem o, są połówkami dwóch wspólnych średnic elipsy i koła.

Rozwiązanie zagadnienia rekonstrukcyjnego, znalezione przez inż. Pieślaka, oparte jest na prostem spostrzeżeniu, dotyczącem dwóch odpowiednich szeregów: $L' = b'c'$ i $L'' = b''c''$. Trójkąty: $a'b'c'$ i $a''b''c''$ wykreślamy początkowo w ten sposób, że proste: L', L'' (rys. 22) są prostemi równoległemi, a wierzchołki: a', a'' schodzą się w jednym punkcie a. Szeregi: L', L'' są wówczas szeregami środkowo-podobnemi (drugi rodzaj odpowiedniości perspektywicznej), przyczem środek pęku jest właściwym, wspólnym punktem m dla prostych $b'b''$ i $c'c''$.



Rys. 22.

Poszukiwanie równych szeregów odpowiednich: K', K'', przechodzących przez punkt a, sprowadza się przeto do wyznaczania dwóch odpowiadających sobie punktów: $x' = K'L'$ i $x'' = K''L''$, na podstawie dwóch warunków: współlinjowości trójki punktowej: $x'x''m$ i równości odcinków: ax', ax''.

Punkt z, stanowiący środek podstawy, w równoramiennym trójkącie $ax'x''$, jest więc punktem przecięcia okręgu, zbudowanego na średnicy am, z symetralną S, wykreśloną dla równoległych: L', L''.

Résumé.

Cet ouvrage comprend l'exposé systématique de la théorie de l'homologie plane et de l'affinité axiale. L'exposé est fondé sur la représentation bicentrale et „l'homologie linéaire", qui est définie comme correspondance résultante de deux projections d'une ponctuelle coplanaire avec la droite des centres. Les premières recherches que j'ai faites en 1927 ont fait le sujet de mon rapport au Congrès des mathématiciens de Pologne à Lwów en septembre de la même année.

Dans le cas général les considérations analogues conduisent aux théorèmes classiques de Desargues sur les triangles homologiques.

La notion de „l'homologie linéaire" (resp. de „l'élation linéaire") est équivalente à la projectivité de deux ponctuelles portées sur une même droite qui possèdent des points doubles réels (différents ou confondus). C'est la base logique la plus naturelle aussi bien pour l'homologie plane que pour l'homologie dans l'espace.

Aux considérations sur l'homologie linéaire et plane j'ai ajouté comme corollaires les définitions analytiques de l'homologie plane et de l'affinité axiale. Ces définitions conduisent aux théorèmes sur l'invariance du degré d'une courbe algébrique plane.

Au dernier chapitre qui traite des correspondances homologiques impropres j'ai ajouté les résultats de mes recherches sur l'affinité générale de deux systèmes plans et sur la restitution de l'affinité axiale. A côté de ma solution complète j'ai rapporté celle de mon Assistant M. Sigismond Pieślak. Cette solution ne consiste qu'en la détermination de deux ponctuelles égales, mais en comparaison avec les solutions analogues de E. Müller et de G. Scheffers elle se distingue par sa simplicité.

Zakł. Druk. F. Wyszyński i S-ka, Warszawa