

Inż. ZYGMUNT NOWAK

**ODWZOROWANIE „MAYOR'A-MISES'A”
W ZASTOSOWANIU DO STATYKI, KINEMATYKI
ORAZ DO KRATOWNIC PRZESTRZENNYCH**

Inż. ZYGMUNT NOWAK

**ODWZOROWANIE „MAYOR'A-MISES'A”
W ZASTOSOWANIU DO STATYKI, KINEMATYKI
ORAZ DO KRATOWNIC PRZESTRZENNYCH**

531.2

WARSZAWA - 1937

Wydane przez Warszawskie Towarzystwo Politechniczne

Ing. ZYGMUNT NOWAK

**TRANSFORMATION DE „MAYOR-MISES”
ET SES APPLICATIONS À LA STATIQUE,
CINÉMATIQUE ET AUX SYSTÈMES ARTICULÉS
DE L'ESPACE**

BIBLIOTEKA
WYDZ.
ARCHITEKTURY

6197

VARSOVIE - 1937

Publié par la Société Polytechnique de Varsovie

ZAKUPIONE ZE ZBIORÓW
Ś. p. prof. M. LALEWICZA

PRZEDMOWA.

Metody wykreślne w statyce i kinematyce układów płaskich osiągnęły dzięki pracom Culmana, Maxwella, Cremony oraz Chasle'a, Burmester'a, Wittenbauera i innych wysoki stopień rozwoju i uzyskały rozległe prawa obywatelstwa w biurach konstrukcyjnych. Natomiast wszelkie próby zastosowania tych metod do układów przestrzennych nie przyniosły doniosłych korzyści praktycznych. Konstrukcje w rzutach dwuprostokątnych, są naogół skomplikowane, mało przejrzyste i posiadają niewielki stopień dokładności. Powodem tego jest dwoisty charakter wektorów, t. j. tych elementów, z którymi mamy do czynienia w statyce względnie w kinematyce. Rzut na jedną płaszczyznę nie wyznacza nam jeszcze wektora, natomiast rzuty na dwie płaszczyzny, posiadają elementy wspólne, powtarzające się w obydwóch rzutach. Już metoda rzutów środkowych więcej odpowiadałaby własnościom wektorów, ale tylko w zagadnieniach opisowych. Natomiast w zagadnieniach miarowych, rzuty te nie dają również korzyści praktycznych. Należałoby przypuszczać, że to odwzorowanie, które najbardziej uwzględniałoby dwoisty charakter wektora, jako prostej, najwięcej nadawać się będzie do zagadnień statyki względnie kinematyki.

Jakkolwiek metoda t. zw. figur odwrotnych była stosowana już przez Culmana, Cremonę, Mohr'a i in. to zdaje się, że prof. B. Mayor pierwszy wpadł na pomysł konsekwentnego odwzorowania wektorów zapomocą układu zerowego. Toż samo odwzorowanie stosuje również v. Mises, Federhofer i Prager nie podając jednakże, że jego podłożem jest układ zerowy.

W naszych uczelniach znajomość własności układu zerowego jest naogół mało rozpowszechniona. Wobec tego w § 1 wyprowadzam własności tego układu w związku z przestrzennym układem sił. Wszystkie te własności możemy wyprowadzić przez rozważania czysto geometryczne (Plücker, Sylvester, Cayley, Reye), przez rozważania kinematyczne (Chasles, Schönflies) lub rozważania statyczne (Möbius, Culman, Schell i t. d.). Wybrałem, te ostatnie, gdyż pojęcie siły jest najbardziej konkretne dla inżyniera.

W § 2 podałem odwzorowanie w układzie zerowym trzech zasadniczych elementów geometrycznych oraz warunki równoległości i prostopadłości prostych i płaszczyzn. Zagadnienia opisowe i miarowe (prostopadłość) wskazują na dużą analogię z takimiż zagadnieniami rozwiązywanymi za pomocą rzutów środkowych (koło parametryczne, przeciwbiegunowość i t. p.).

W § 3 zajmuję się odwzorowaniem układu sił wzgl. skrętników w układzie zerowym.

Nakoniec §§ 4 i 5 podaje zastosowanie tego odwzorowania w elementarnych zagadnieniach statyki i kinematyki oraz wyznaczanie napięć w kratownicach metodą Cremony*).

Natomiast nie poruszam wcale zagadnień bardziej skomplikowanych. Do tych należą między innymi: ruch śrubowy, ruch o dwóch lub większej ilości stopni swobody, klasyczne zagadnienie rozłożenia siły wzdłuż 6-ciu prostych skośnych i związane z nim wyznaczanie naprężeń w kratownicach metodą Culmana. Dla tych zagadnień należałoby jeszcze wprowadzić pojęcie kongruencji i cylindroidu (konoidu Plückera).

Źródła, którymi się posilkowałem w tej pracy, są następujące:

- 1) *B. Mayor*. Statique Graphique des Systemes de l'Espace. Lausanne 1910.
- 2) *B. Mayor et M. Paschoud*. Introduction à la statique Graphique. Lausanne 1926.
- 3) *Mises*. Graphische Statik. Z. f. Math. u. Phys. 1916.
- 4) *Prager*, Beitrag z. Kinematik d. Raumfachwerkes. Z. f. ang. Math. u. Mech, 1926.
- 5) *Federhofer*. Graphische Kinematik u. Kinetostatik. Wien. 1928.
- 6) *Ball*. Theory of Screws. Cambridge. 1900.
- 7) *Inż. Kruszewski*. Recenzja pracy Mayora. Przegląd Techniczny. 1910.

*) Dla zainteresowanych wyznaczeniem napięć w kratownicach przestrzennych (§ 5) wystarczy znajomość własności układu zerowego podług § 1 do rozdziału E oraz metod odwzorowania elementów geometrycznych podług § 2 do rozdziału H.

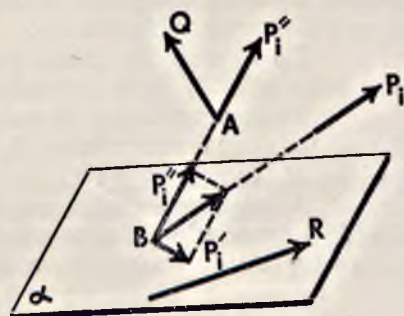
THE HISTORY OF THE UNITED STATES

The history of the United States is a complex and multifaceted story that spans centuries. It begins with the early Native American civilizations, such as the Mayans, Aztecs, and Incas, who built sophisticated societies in the Americas. The arrival of European explorers in the late 15th and early 16th centuries marked the beginning of a new era. The Spanish, French, and British established colonies and territories across the continent, leading to a period of intense competition and conflict. The American Revolution (1775-1783) was a pivotal moment in the nation's history, as the thirteen original colonies declared their independence from British rule. The resulting United States Constitution (1787) established a federal government with three branches: executive, legislative, and judicial. The 19th century was a period of rapid expansion and growth, as the United States acquired vast territories through purchase and conquest. The Civil War (1861-1865) was a defining moment in the nation's history, as it resolved the issue of slavery and preserved the Union. The 20th century was a period of global conflict, as the United States emerged as a superpower. The Cold War (1947-1991) was a period of intense rivalry between the United States and the Soviet Union. The Vietnam War (1955-1975) was a major conflict that tested the nation's resolve. The 1960s and 1970s were a period of social and cultural change, as the United States grappled with issues such as civil rights, the environment, and the economy. The 21st century has been a period of rapid technological advancement and global interconnectedness. The United States continues to play a leading role in the world, facing new challenges and opportunities.

§ 1. PRZESTRZENNY UKŁAD SIŁ ORAZ UKŁAD ZEROWY Z NIM ZWIĄZANY.

A) Wstęp. Dwa układy sił nazywamy równoważnymi, jeżeli każdy z nich może powstać z drugiego: przez zastąpienie grupy sił, przechodzących przez jeden punkt, lub leżących w jednej płaszczyźnie, ich wypadkową; przez wprowadzenie do układu dwóch równych sił na jednej linii działania o zwrotach przeciwnych lub usunięcie takowej dwójki; przez zastąpienie pary sił dwiema odpowiednimi siłami w płaszczyźnie działania pary i t. p. Dwa układy równoważne z trzecim układem są między sobą równoważne. Jeżeli w jednym z dwóch równoważnych układów zamienimy wszystkie siły równymi lecz przeciwwrotnymi siłami, to zespół tych dwóch układów po tej zamianie będzie w równowadze.

B) Dwójka sił sprzężonych. Niech więc będzie dany układ n skośnych sił P_1, P_2, \dots, P_n . Układ ten naogół, nie daje się sprowadzić do siły pojedynczej lub do pary sił (momentu). Natomiast można go zastąpić równoważną z nim dwójką skośnych sił lub siłą i momentem. Chcąc sprowadzić ten układ do dwóch równoważnych z nim skośnych sił, przyjmujemy dowolny punkt A oraz dowolną płaszczyznę α nie przechodzącą przez A (Rys. 1). W płaszczyźnie $(P_i A)$, przechodzącej przez jedną z sił P_i i przez A , rozkładamy tę siłę na dwie składowe: jedną P'_i wzdłuż prostej przecięcia BC płaszczyzn $(P_i A)$ z płaszczyzną α i drugą P''_i wzdłuż prostej łączącej punkt A ze śladem B siły P_i na α . Postępując w ten sposób z każdą siłą P_i układu, otrzymamy w płaszczyźnie α układ sił P'_i , oraz układ sił P''_i przechodzących przez jeden punkt A . Pierwszy układ na płaszczyźnie można sprowadzić do wypadkowej $\bar{R} = \sum P'_i$ (w pewnych przypadkach do pary sił), drugi zaś układ do siły $Q = \sum P''_i$ przechodzącej przez A . Zastąpiliśmy więc przestrzenny układ sił $P_1 \dots P_n$ układem 2 skośnych sił R i Q , z których R leży na płaszczyźnie α , a Q przechodzi przez punkt A .



Rys. 1.

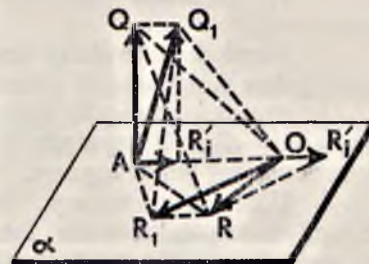
Takie dwie siły R i Q będziemy nazywać *dwójką sił sprzężonych układu*.

Jeżeli punkt A będzie niewłaściwym o kierunku prostopadłym do płaszczyzny α , to siły R i Q będą do siebie prostopadłe.

W szczególnym przypadku układ sprowadziłby się do jednej pojedynczej siły, jeżeli a) jedna z sił (R lub Q) równałaby się zeru b) siły R i Q przecinałyby się c) siła Q byłaby równoległa do płaszczyzny α a $\bar{R} = \sum P'_i$ sprowadziłaby się do pary. Dowolny układ sił sprowadziłby się do pary sił w przypadku a) siły R i Q byłyby równe, równoległe lecz o przeciwnych zwrotach. b) siła Q równałaby się zeru a układ $\bar{R} = \sum P'_i$ sprowadziłby się do pary.

Z powodu dowolności wyboru zarówno punktu A jak i płaszczyzny α , dany układ sił daje się zastąpić nieograniczoną ilością takich równoważnych dwójek. Postaramy się wyznaczyć wspólne własności (niezmienniki) tych dwójek.

Zastąpmy układ dwójki sił R i Q inną dwójką R_1 i Q_1 , tak żeby jedna z sił R_1 tej nowej dwójki (Rys. 2) leżała na płaszczyźnie α . Dla wyznaczenia drugiej siły Q_1 , rozkładamy R na dwie składowe: jedną R_1 (w kierunku R_1), a drugą R'_1 w kierunku prostej AO , łączącej punkt A (ślad siły Q) z punktem przecięcia się sił R i \bar{R} . Siły R'_1 i Q dadzą wypadkową $Q_1 = R'_1 + Q$ przechodzącą przez punkt A . Dwójka sił R_1 i Q_1 będzie również równoznaczna z układem sił $P_1 \dots P_n$.



Rys. 2

Przekształćmy dwójkę sił R i Q tak, żeby jedna z sił Q_1 nowej dwójki przechodziła przez punkt A . W tym celu wyznaczamy punkt D przecięcia płaszczyzny zawierającej siły Q i Q_1 (Rys. 3) z siłą R i rozkładamy siłę Q na składowe Q_1 (daną co do kierunku) oraz siłę Q'_1 w kierunku AD . Wypadkowa sił $R_1 = R + Q'_1$ przecinających się wyznaczy nam drugą siłę R_1 nowej dwójki.

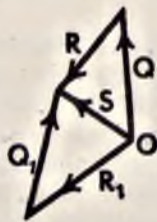
Pomiędzy dwójkami R i Q oraz R_1 i Q_1 zachodzą następujące związki.

Twierdzenia 1) Sumy geometryczne sił R i Q oraz R_1 i Q_1 (jako wektorów swobodnych) są równe pomiędzy sobą. (Rys. 2^a).

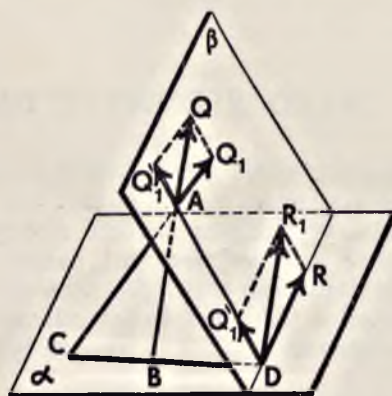
2) Czworokąty $ORAQ$ i OR_1AQ_1 zbudowane na dwójkach sił sprzężonych, jako na odcinkach przeciwległych są równoważne (trójkąty ORA i OR_1A są równoważne a prosta QQ_1 jest równoległa do α). (Rys. 2).

Sześciokrotną objętość takiego czworokąta nazywamy momentem własnym układu sił. Wartość liczbowa tego momentu jest równą

$$J = R Q d \sin \vartheta$$



Rys. 2^a



Rys. 3

gdzie d jest najkrótszą odległością a ϑ kątem pomiędzy R i Q .

3) Jeżeli siła R przesuwa się w płaszczyźnie α , to siła Q z nią sprzężona przechodzi przez stały punkt A tej płaszczyzny.

3a) Jeżeli jedna z sił Q dwójki przechodzi przez stały punkt A , to siła R z nią sprzężona przesuwa się w stałej płaszczyźnie α , przechodzącej przez ten punkt.

Zbudujmy teraz, mając dwie poprzednie dwójki R i Q i R_1 i Q_1 trzecią dwójkę R_2 i Q_2 , tak, żeby jedna z sił R_2 przecinała się z R_1 i była skośną z R .

Nie trudno dostrzedz się, że siła Q_2 przecnie się z Q_1 i będzie skośną z Q . W ten

sposób, z jednej dwójki sił możemy otrzymać nieograniczoną ilość dwójek równoważnych pomiędzy sobą i z danym układem sił.

Zadanie 1) Dana jest dwójka sił R i Q . Wyznaczyć równoważną dwójkę sił R_1 i Q_1 tak, żeby siła R_1 była skierowana wzdłuż danej prostej r_1 .

Przeprowadzamy dowolną prostą r_2 przecinającą r_1 i siłę R . Zastępujemy dwójkę sił R i Q jednoznacznie siłami R_2 (wzdłuż r_2) i Q_2 . Następnie siły R_2 i Q_2 zamieniamy równoważną dwójką R_1 (wzdłuż r_1) i Q_1 .

A więc w przestrzennym układzie sił $P_1 \dots P_n$ każdej prostej r (wzdłuż której działa siła R) odpowiada jednoznacznie prosta q , jako prosta działania sprzężonej siły Q . Takie dwie proste będziemy nazywać *prostymi sprzężonymi* układu, albo *parą prostych sprzężonych*.

Proste zerowe układu. Momentem układu sił $P_1 \dots P_n$ względem dowolnej prostej nazywamy algebraiczną sumę momentów dowolnej dwójki sił układu względem tej prostej. Proste, względem których ten moment równa się zero, nazywamy *prostymi zerowymi*. Do takich prostych należą wszystkie proste przecinające obydwie siły dowolnej dwójki R i Q . Każda prosta leżąca w płaszczyźnie α , zawierającej siłę R przechodząca przez punkt przecięcia A płaszczyzny α z siłą Q będzie prostą zerową.

Twierdzenie 4) W każdej płaszczyźnie proste zerowe tworzą pęk prostych o wspólnym wierzchołku. Wierzchołek tego pęku nazywamy *ogniskiem płaszczyzny*.

4a) Proste zerowe, przechodzące przez jeden punkt, tworzą pęk płaski. Płaszczyznę tego pęku nazywamy *płaszczyzną ogniskową tego punktu*.

5) Płaszczyzna ogniskowa, punktu, leżącego na dowolnej płaszczyźnie, przechodzi przez ognisko tej płaszczyzny.

6) Prostej leżącej w dowolnej płaszczyźnie odpowiada prosta sprzężona, przechodząca przez ognisko tej płaszczyzny i odwrotnie.

7) Ogniska płaszczyzn, przechodzących przez dowolną prostą, leżą na prostej z nią sprzężonej.

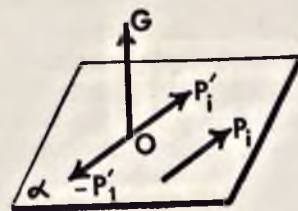
Niech będzie daną dwójka sił R i Q wzajemnie prostopadłych do siebie. Przeprowadźmy przez jedną z sił np. R płaszczyznę prostopadłą do Q .

Punkt przecięcia tej płaszczyzny z Q będzie jej ogniskiem. Prosta działania r siły R nazywamy *charakterystyką tej płaszczyzny* a prostą q wzdłuż, której jest skierowana siła Q , *biegunową tej płaszczyzny*.

Układ zerowy. Mając więc dany przestrzenny układ sił, podporządkujemy każdej płaszczyźnie punkt, w niej leżący (ognisko) i każdemu punktowi płaszczyznę, przezeń przechodzącą (pł. ogniskową). To podporządkowanie jest wzajemne. Ponadto w tym układzie odpowiadają sobie wzajemnie parami proste, wzdłuż których działa dwójka sił sprzężonych i proste zerowe, które (jak to poniżej przekonamy się) odpowiadają samym sobie. To wzajemnie podporządkowanie się punktów z płaszczyznami i odwrotnie, oraz prostych z prostymi nazywamy *układem zerowym*. Każdemu układowi sił, a w szczególności dwójce sił skośnych, odpowiada jeden układ zerowy. Natomiast jeden układ zerowy jest podłożem wszystkich układów sił równoważnych pomiędzy sobą. Układ zerowy pozostanie bez zmiany, jeżeli każdą siłę układu sił powiększyć w tym samym stosunku, nie zmieniając ich linii działania.

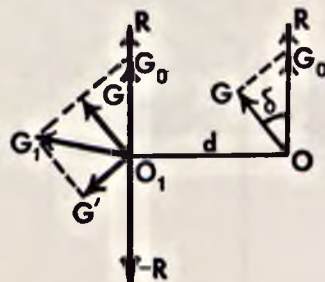
C) Sprowadzenie układu sił do siły pojedynczej i do pary sił (momentu). Niech będzie dany układ sił $P_1 \dots P_n$. Wybieramy w przestrzeni dowolny punkt O , który będziemy nazywać

punktem redukcji, i przenosimy doń równoległe wszystkie siły układu (Rys. 4). W tym celu przykładamy w O dwie siły ($P'_i - P_i$) równe, równoległe do P_i , lecz o zwrotach przeciwnych. Postępując w ten sposób z każdą siłą P_i układu otrzymamy pęk sił P'_i w wierzchołku O , oraz układ par ($P_i - P'_i$), których płaszczyzny działania przechodzą przez punkt O i przez odpowiednią siłę P_i . Pary te jak zwykle, przedstawiamy sobie w postaci momentu G_i , prostopadłe do płaszczyzny działania pary. Układ sił P'_i wyznaczy nam wypadkową siłę $\bar{R} = \sum P'_i$ a układ momentów G_i moment wypadkowy $\bar{G} = \sum G_i$. Jeżeli, w szczególnym przypadku, G i R będą do siebie prostopadłe, to układ sił sprowadzi się do siły pojedynczej.



Rys. 4

Mając układ sił $P_1 \dots P_n$ zredukowany do siły R i pary G o punkcie redukcji O , przyjmujemy teraz nowy punkt redukcji O_1 . Przesuniemy przez ten ostatni dwie siły ($R' - R$), równe i równoległe sile R . Otrzymamy wtedy w O_1 (Rys. 5) siłę R , oraz momenty: $G' = (R - R')$ spowodowany równoległym przesunięciem siły R i moment G , który, jako wektor swobodny, przechodzi z punktu O do O_1 . Te dwa ostatnie momenty wyznaczają moment wypadkowy $G_1 = G + G'$. Jak widzimy wielkość i kierunek siły R nie zależy od punktu O redukcji, natomiast zmiennymi są wielkość i kierunek momentu G w zależności od położenia punktu O . Nie trudno jednak dostrzedz, że rzut momentu $G_1 = G + G'$ na kierunek siły jest wielkością stałą; składowa G' powstała przez przesunięcia siły R jest do tej siły prostopadła. Wielkość tego rzutu na R równa się



Rys. 5.

$$G_0 = G \cos \vartheta = \text{const}$$

gdzie ϑ jest kątem pomiędzy G i R .

Parę sił można rozpatrywać, jako pole równoległoboku, w płaszczyźnie działania tej pary, utworzonego przez jej siły o odpowiednim momencie. Pole to jest równe momentowi pary G .

Potrójna objętość ostrosłupa, utworzonego przez ten równoległobok, jako jego podstawy, i jednej krawędzi równej sile R wyniesie

$$J = R G \cos \vartheta = R G_0$$

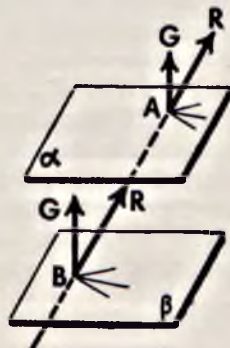
Tę wartość nazywamy momentem własnym układu sił. Można by okazać, że ta potrójna objętość ostrosłupa odpowiada sześciokrotnej objętości czworościanu, zbudowanego na dwójce sił sprzężonych, jako na krawędziach.

Podobnie jak i we dwójce sił sprzężonych możemy i tutaj otrzymać *proste zerowe, ogniska i płaszczyzny ogniskowe*. Płaszczyzna działania pary, prostopadła do wektora momentu G w punkcie redukcji O , będzie ogniskową punktu O a proste przez ten punkt przechodzące będą prostymi zerowymi: (rzut momentu G na tę płaszczyznę równa się zeru a siła R przecina z każdą prostą przechodzącą przez O).

Przesuniemy punkt redukcji A wzdłuż wektora siły R do punktu B . Momenty G i G_1 w obydwóch punktach A i B będą równe i równoległe, a więc płaszczyzny ogniskowe tych punktów będą do siebie równoległe (Rys. 6).

Twierdzenie 8. Płaszczyzny ogniskowe wszystkich punktów wektora siły są do siebie równoległe.

Niech będzie dana dla punktu redukcji O siła R oraz moment G i niech kąt pomiędzy nimi będzie równy ϑ . Rozłożmy moment G na dwie składowe: jedną wzdłuż siły R i równą $G_0 = G \cos \vartheta$ i drugą $G' = G \sin \vartheta$ prostopadłą do R (Rys. 7). Moment G' przenosi siłę R równoległe w kierunku prostopadłym do płaszczyzny zawierającej R i G' na prawo (przyjmując prawoskrętny układ współrzędnych) na odległość $O O_1 = d = G \sin \vartheta / R$. Po tym przesunięciu otrzymamy zespół siły R oraz momentu G_0 skierowanego wzdłuż siły R . Zespół siły i momentu, wzdłuż tej siły, nazywamy *skrętnikiem układu* a prostą, wzdłuż której siła i moment są skierowane *osią centralną* lub *osią układu*. Płaszczyzny ogniskowe wszystkich punktów osi są do niej prostopadłe.



Rys. 6.

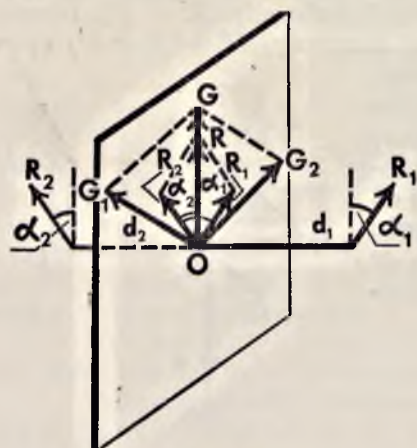


Rys. 7.

Zespół siły R i momentu G_0 jako równoważny z układem sił $P_1 \dots P_n$, będzie również równoważny z dwójką sił sprzężonych R i Q . Parę sił można rozważać jako siłę nieskończenie małą, wzdłuż prostej niewłaściwej w płaszczyźnie działania pary. Każdej sile równoległej do osi

odpowiada więc w dwójce sił sprzężonych prosta niewłaściwa a ogniska płaszczyzn równoległych leżą na prostej równoległej do osi. Będziemy nazywać proste równoległe do osi *średnicami*, *układu* a płaszczyzny równoległe do osi *płaszczyznami średnicowymi*. Ogniska płaszczyzn średnicowych będą punktami niewłaściwymi, a proste zerowe tych płaszczyzn tworzą pęk prostych równoległych. Chcąc to okazać, zauważmy, że ogniskiem płaszczyzny niewłaściwej będzie punkt niewłaściwy Ω^∞ osi centralnej. Ponieważ płaszczyzna średnicowa przechodzi przez ten punkt, to jej ognisko leży na płaszczyźnie ogniskowej tego punktu Ω^∞ (por. tw. 5 str. 6).

D) Rozkład skrętnika na dwie siły skośne. Niech będzie dany skrętnik (R, G) zapomocą jego osi centralnej o oraz siły R i momentu G , skierowanych wzdłuż tej osi. Stosunek momentu G do siły R skrętnika nazywamy *parametrem* $k = \frac{G}{R}$ skrętnika. Parametr ma wymiar odcinka.



Rys. 8.

Parametr k będziemy uważać za dodatni w przypadku, kiedy siła i moment są jednozrotne, w przeciwnym razie za ujemny, i odkładamy go na osi centralnej zgodnie ze zorientowanym zwrotem osi.

Dla rozłożenia skrętnika na dwie siły (Rys. 8) skośne pomiędzy sobą, przesuwamy przez oś dowolną płaszczyznę i rozkładamy w tej płaszczyźnie siłę R skrętnika na dwie składowe R_1 i R_2 ($R = R_1 + R_2$). Niech kąty pomiędzy R_1 i R oraz R_2 i R będą odpowiednio równe α_1 i α_2 . W tej samej płaszczyźnie rozkładamy również i moment G na składowe G_1 i G_2 ($G = G_1 + G_2$) prostopadle do odpowiednich sił R_1 i R_2 ($R_1 \perp G_1$ i $R_2 \perp G_2$). Składowe G_1 i G_2 przesuną siły R_1 i R_2 wzdłuż prostej prostopadłej do płaszczyzny, zawierającej te składowe na odległość:

$$a) \quad d_1 = G_1/R_1 \quad \text{ i } \quad d_2 = G_2/R_2$$

Składowe R_1, R_2 i G_1, G_2 będą równe

$$b) \quad R_1 = \frac{R \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad R_2 = \frac{R \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad \text{ i } \quad G_1 = \frac{G \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad G_2 = \frac{G \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

skąd

$$d_1 = \frac{G}{R} \cotg \alpha_2 = k \cotg \alpha_2 \quad \text{ i } \quad d_2 = \frac{G}{R} \cotg \alpha_1 = k \cotg \alpha_1$$

a więc ostatecznie

$$c) \quad d_1 \tg \alpha_2 = d_2 \tg \alpha_1 = k$$

Otrzymamy następujące twierdzenia.

9) Dwie siły dwójki oraz oś skrętnika o posiadają wspólną prostopadłą.

10) Iloczyn odległości jednej z sił dwójki od osi przez \tg kąta drugiej siły z osią jest stały i równy parametrowi k skrętnika.

11) Przez obrót dookoła osi lub przesunięcie równoległe wzdłuż osi każda dwójka sił skrętnika przechodzi w inną dwójkę (lub układ zerowy pozostaje bez zmiany).

12) Dwie pary dwójek sił sprzężonych skrętnika leżą na jednym hyperboloidzie. Wynika to stąd, że proste zerowe przecinające dwie siły jednej dwójki oraz jedną siłę z drugiej dwójki przetną również siłę z nią sprzężoną.

Niech jedna z sił dwójki R_1 , nie zmieniając swej wielkości, obraca się w płaszczyźnie średnicowej dookoła jej punktu przecięcia ze wspólną prostopadłą tej siły i osi centralnej. Siła R_2 z nią sprzężona przesuwać się będzie równoległe, przecinając tę wspólną prostopadłą. Ta równoległość wynika z twierdzenia 6, 9-go i 10-go i ze wzoru c) $d_1 \tg \alpha_2 = k$ gdzie $d_1 = \text{const}$. Siła, obracając się w płaszczyźnie średnicowej, może zajmować poszczególne położenia 1^o) będzie równoległa do osi t. j. będzie średnicą; ze wzoru c) $d_2 \tg \alpha_1 = k$ gdzie $\alpha_1 = 0$ otrzymamy $d_2 = \infty$. Siła R_2 będzie skierowana wzdłuż prostej niewłaściwej nachylonej do osi pod kątem α_2 gdzie $d_1 \tg \alpha_2 = k$. 2^o) Siła R_1 jest prostopadłą do osi; $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, a więc $\tg \alpha_1 = \infty$ $d_2 = 0$ siła R_2 przecina oś skrętnika. 3^o) Siła R schodzi się z prostą zerową skrętnika. Prostą zerową można rozważać jako prostą podwójną dwójki sił nieskończenie wielkich o przeciwnych zwrotach. Dla tej prostej otrzymamy

$$d_1 = d_2 \quad \text{ i } \quad \tg \alpha_1 = \tg \alpha_2$$

a więc z c) przez przemnożenie otrzymamy

$$d_1 d_2 \tg \alpha_1 \tg \alpha_2 = k^2 \quad \text{ lub } \quad d_1^2 \tg^2 \alpha_1 = k^2$$

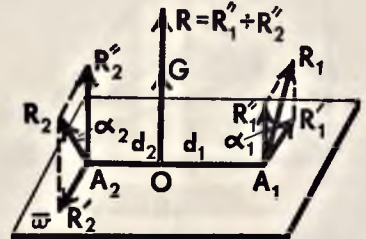
skąd

$$c^a) d \operatorname{tg} \alpha = \pm k$$

We wzorze c^a) dla prawoskrętnego układu należy brać znak ujemny..

Twierdzenie 13) Dla prostej zerowej iloczyn jej odległości od osi przez tg kąta nachylenia z osią jest równy parametrowi skrętnika.

Niech będzie dany skrętnik (R, G) i równoważna z nim dwójka sił sprzężonych R_1 i R_2 , nachylonych do osi pod kątami α_1 i α_2 . Przez wspólną ich prostopadłą d przesuwamy płaszczyznę ω prostopadłą do osi i rozkładamy każdą z sił w kierunku rzutów na płaszczyznę ω na składowe R_1' i R_2' oraz na składowe R_1'' i R_2'' prostopadłe do ω (rys. 9). Siła R skrętnika jest prostopadłą do ω , przeto rzuty R_1' i R_2' będą równe, równoległe, lecz skierowane odwrotnie i wywołują moment równy momentowi G skrętnika a więc



Rys. 9.

$$d) R_1' = R_2' \text{ lub } R_1 \sin \alpha_1 = R_2 \sin \alpha_2$$

$$e) R_1' (d_1 + d_2) = R_2' (d_1 + d_2) = G$$

Natomiast algebraiczna suma składowych $R_1'' + R_2''$ będzie równą sile R skrętnika.

$$f) R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cos \alpha_2 = R \quad f^a) R_1'' d_1 = R_2'' d_2$$

Wyjdźmy ze wzoru c)

$$c) d_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = d_2 \operatorname{tg} \alpha_1 = k$$

ponieważ $R_1' = R_2' = R_1 \sin \alpha_1 = R_2 \sin \alpha_2$ to

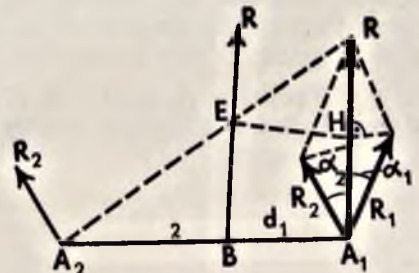
$$R_1' d_1 = R_2' d_2 = k$$

$$g) R_1' d_1 = R_2'' k \text{ i } R_2' d_2 = R_1'' \cdot k$$

wzór, z którego będziemy często korzystać w dalszych rozważaniach.

Zadanie 1). Wyznaczyć skrętnik (R, G_0) równoważny danej dwójce sił R_1 i R_2 . Oś skrętnika szukanego przecina wspólną prostopadłą $A_1 A_2$ wektorów R_1 i R_2 w pewnym punkcie B , (rys. 10), który należy wyznaczyć. Wielkość siły R skrętnika równa się geometrycznej sumie sił dwójki $\overline{R} = \overline{R_1} + \overline{R_2}$. Sprowadzamy więc siły R_1 i R_2 do jednego punktu np. A_1 i wyznaczamy ich wypadkową R . Siłę R można również rozpatrywać jako wypadkową dwóch równoległych sił $R_1 \cos \alpha_1$ i $R_2 \cos \alpha_2$ (gdzie α_1 i α_2 są kąty pomiędzy R_1 wzgl. R_2 z R). (Por. rys. 9).

Dla wyznaczenia punktu przyłożenia B siły R skrętnika na $A_1 A_2$ należy odcinek $A_1 A_2$ podzielić w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do $R_1 \cos \alpha_2$ i $R_2 \cos \alpha_1$. Łączymy więc koniec

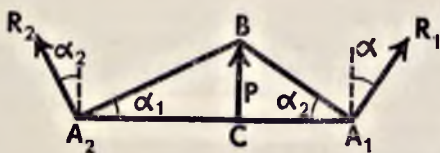


Rys. 10.

wektora \overline{R} , przechodzącego przez A_1 z punktem A_2 i przez punkt $R_1 \cos \alpha_1 \equiv H$ przeprowadzamy równoległą do $A_1 A_2$ aż do punktu E na $A_1 R$. Przez spodek B prostopadłej EB na $A_1 A_2$ przechodzi oś skrętnika.

Możemy również wyznaczyć oś skrętnika oraz jego parametr za pomocą następującej konstrukcji.

Niech będą dane siły R_1 i R_2 dwójki oraz wspólna im prostopadła $A_1 A_2$ (rys. 11). Punkt C niech będzie punktem przyłożenia siły R skrętnika, a odcinek CB niech przedstawia nam wielkość jego parametru p . Połączmy punkt B z punktami A_1 i A_2 . Kąty $B A_1 A_2$ i $B A_2 A_1$ będą odpowiednio równe kątom α_2 i α_1 pomiędzy siłami R_2 i R oraz R_1 i R na zasadzie wzoru $d_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = d_2 \operatorname{tg} \alpha_1 = k$. Zbudujmy w dowolnym miejscu trójkąt sił $\overline{R} = \overline{R_1} + \overline{R_2}$. Trójkąt ten będzie podobny (z powodu równości kątów α_1 i α_2) do $A_2 B A_1$; jego boki będą proporcjonalne do sił, a mianowicie



Rys. 11.

$$R : R_1 : R_2 = A_1 A_2 : A_2 B : A_1 B = \sin (\alpha_1 + \alpha_2) : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1$$

Jeżeli więc na odcinku $A_1 A_2$ zbudujemy trójkąt $A_1 B A_2$ podobny do trójkąta sił $\overline{R} = \overline{R_1} + \overline{R_2}$, to wysokość BC tego trójkąta wyznaczy nam parametr, a przez spodek C wysokości przejdzie oś skrętnika.

Zadanie 2. Dane są siła R_2 oraz skrętnik (R_1, G_1) . Wyznaczyć oś i parametr wypadkowego skrętnika (rys. 12).

Niech będzie dany skrętnik (R_1, G_1) oraz siła pojedyncza R_2 . Oś wypadkowego skrętnika (R, G) przetnie najkrótszą odległość $A_1 A_2$ między (R_1, G_1) i R_2 w pewnym punkcie F i będzie do niej prostopadła. Wyznamy początkowo skrętnik (R, G') pomocniczy dla sił R_1 i R_2 , nie biorąc chwilowo pod uwagę momentu G_1 . W tym celu budujemy na $A_1 A_2$ trójkąt $A_1 B A_2$ podobny do trójkąta sił $\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2$ (rys. 12a). Wysokość BC oraz jej spodek C wyznaczą parametr p'_1 i położenie osi pomocniczego skrętnika (R, G') . Należy teraz dodać geometrycznie pozostały moment G do G' skrętnika (R, G') (rys. 12b).

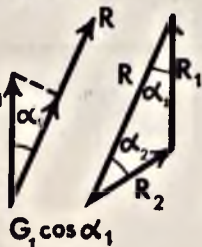
Moment G_1 tworzy z osią skrętnika (R, G') a więc i z jego siłą R kąt α_1 . Składowa tego momentu G_1 wzdłuż R razem z poprzednio otrzymanym momentem Rp'_1 daje w sumie moment wypadkowego skrętnika podług wzoru

$$G = Rp'_1 + G_1 \cos \alpha$$

parametr jego będzie równy

$$p = \frac{G}{R} = p'_1 + \frac{G_1}{R} \cos \alpha = p'_1 + \frac{R_1 p_1 \cos \alpha}{R}$$

Rys. 12b



Rys. 12a

natomiast składowa $G_1 \sin \alpha$ momentu G_1 , prostopadła do R , przeniesie ją na odległość $CF = d$ podług wzoru

$$d = \frac{G_1 \sin \alpha}{R} = \frac{R_1 p_1 \sin \alpha}{R}$$

Te dwie wielkości p i d , jako odcinki, można wyznaczyć wykreślnie. Niech trójkąt $A_1 B A_2$ obraca się dokoła A_2 (Rys. 12), pozostając do siebie podobnym, przyczem punkt A_1 niech porusza się po prostej R_1 . Niech w tym obrocie trójkąt $A_2 B A_1$, przyjmie końcowe położenie $A_2 D E$, gdzie D jest końcowym punktem na parametrze p_1 (licząc od A_1).

Trójkąty $A_2 A_1 D$ i $A_2 B E$ (jak łatwo okazać) będą również podobne a kąt pomiędzy prostymi $A_1 D$ i $B E$ będzie równy α_1 . Z podobieństwa tych trójkątów wynika

$$\frac{BE}{A_1 D} = \frac{A_2 E}{A_2 D} = \frac{R_1}{R}$$

gdyż boki trójkąta $A_2 D E$ są proporcjonalne do sił

$$\text{skąd} \quad BE = p_1 \frac{R_1}{R}$$

Obliczmy jeszcze rzędną punktu E oraz odcinek CF

$$EF = EH + HF = BE \cos \alpha_1 + BC = \frac{R_1 p_1 \cos \alpha_1}{R} + p'_1$$

$$\text{i} \quad CF = BH = BE \sin \alpha_1 = p_1 \frac{R_1}{R} \sin \alpha_1.$$

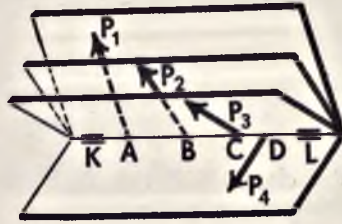
Otrzymujemy więc następującą konstrukcję skrętnika wypadkowego. Łączymy punkt A_2 z końcem D parametru p_1 skrętnika (R_1, G_1) . Na prostej $A_2 D$ budujemy trójkąt $A_2 D E$ podobny do trójkąta sił $\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2$.

Odległość punktu E od $A_1 A_2$ wyznaczy parametr p wypadkowego skrętnika, a spodek F prostopadłej z E na $A_1 A_2$ punkt na osi.

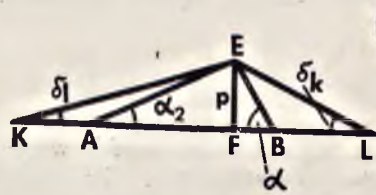
Zadanie 3) Na oś X działa układ n skośnych sił do niej prostopadłych. Wyznaczyć reakcję w łożyskach. (Rys. 13).

Przyjmijmy początkowo, że na oś o łożyskach w K i L działają w punktach A i B tylko dwie siły skośne P_1 i P_2 . Wyznaczą one skrętnik, którego oś jest prostopadła do AB . Ten skrętnik należy następnie rozłożyć na siły P_k i P_l działające w łożyskach. W tym celu na samym odcinku AB (lub w skali) budujemy trójkąt ABE podobny do trójkąta sił $P = P_1 + P_2$ (Rys. 14 i 14^a).

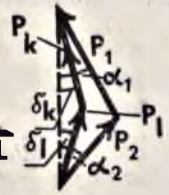
Wysokość EF będzie parametrem p wypadkowego skrętnika. Łącząc wierzchołek E z punktami K i L odpowiadającym położeniu łożysk, otrzymamy trójkąt KEL którego boki EK i EL są, proporcjonalne do sił P_k i P_l w łożyskach.



Rys. 13



Rys. 14

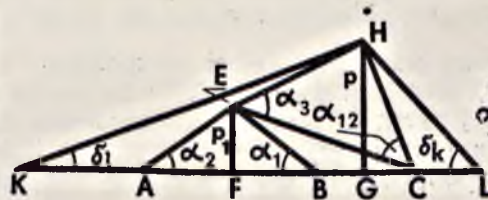


Rys. 14a.

Kąt pomiędzy prostymi EL i EB będzie równy kątowi pomiędzy siłami P_1 i P_k .

Jeżeli na oś działają trzy siły P_1, P_2 i P_3 , to należy początkowo wyznaczyć parametr skrętnika pomocniczego i następnie parametr dla skrętnika wypadkowego R sił.

W tym celu budujemy wielobok sił $R = P_1 + P_2 + P_3$ i niech będzie $R_{12} = P_1 + P_2$ a $R_{12} + P_3 = R$. Na odcinku AB (Rys. 15 i 15a) budujemy trójkąt ABE , podobny do trójkąta sił $R_{12} = P_1 + P_2$, a na odcinku CE trójkąt EHC podobny do trójkąta sił $R = R_{12} + P_3$. Łącząc wierzchołek H z punktami łożysk otrzymamy trójkąt HKL , którego boki będą proporcjonalne do sił P_l i P_k , działających w łożyskach.



Rys. 15.



Rys. 15a.

E) Przestrzenny układ sił odniesiony do współrzędnych prostokątnych. Niech będzie dany układ sił $P_1 \dots P_n$. Odnieśmy go do prostokątnego i prawoskrętnego układu współrzędnych. Przyjmując początek układu O za punkt redukcji, przenosimy każdą siłę P_i układu do tego punktu. Niech więc siła P_i będzie przyłożona w punkcie A_i , o współrzędnych x_i, y_i, z_i , i niech kąty nachylenia tej siły z osiami będą odpowiednio równe $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. Składowe X_i, Y_i, Z_i tej siły i jej momentów L_i, M_i, N_i względem osi będą równe

$$X_i = P_i \cos \alpha_i \quad Y_i = P_i \cos \beta_i \quad Z_i = P_i \cos \gamma_i$$

$$L_i = y_i Z_i - z_i Y_i, \quad M_i = z_i X_i - x_i Z_i \quad N_i = x_i Y_i - y_i X_i$$

nietrudno okazać prawdziwość wzoru dla każdej pojedynczej siły

$$X_i L_i + Y_i M_i + Z_i N_i = 0$$

Postępując w ten sam sposób z każdą siłą układu, otrzymamy n składowych sił i n momentów, wzdłuż każdej osi układu. Algebraiczne sumy tych składowych

$$X = \sum X_i \quad Y = \sum Y_i \quad Z = \sum Z_i$$

$$L = \sum L_i = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i), \quad M = \sum M_i = \sum (z_i X_i - x_i Z_i), \quad N = \sum N_i = \sum (x_i Y_i - y_i X_i)$$

wyznaczają nam składowe siły i momentów danego układu względem osi współrzędnych. Te sześć wielkości X, Y, Z, L, M, N , nazywamy współrzędnymi układu sił. Trzy składowe siły i trzy składowe momenty wyznaczają siłę wypadkową R i moment G układu dla punktu redukcji w O , a mianowicie

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad i \quad G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

Niech kąty, które tworzą R i G z osiami układu będą odpowiednio równe α, β, γ i λ, μ, ν , a kąt pomiędzy siłą i momentem niech będzie równy ϑ . Rzut momentu na kierunek siły wyrazi się wzorem

$$J = R G \cos \vartheta = R G (\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu) = R G_0$$

a po przekształceniu

$$J = XL + YM + ZN$$

Zarówno R jak i J są niezmiennikami układu, niezależnymi od punktu redukcji. Trzecim niezmiennikiem układu będzie parametr p

$$p = \frac{G_0}{R} = \frac{R G \cos \vartheta}{R^2} = \frac{XL + YM + ZN}{R^2}$$

Mając wyznaczone sześć współrzędnych X, Y, Z i L, M, N skrętnika możemy wyznaczyć równanie jego osi centralnej. To równanie wyrazi się wzorem

$$p = \frac{L - \eta Z + \zeta Y}{X} = \frac{M - \zeta X + \xi Z}{Y} = \frac{N - \xi Y + \eta X}{Z} = k^*)$$

gdzie ξ, η, ζ są współrzędnymi dowolnego punktu osi.

Parametr będziemy uważać za dodatni, jeżeli siła R i moment G_0 , (w układzie prawoskrętnym) są jednozwrótne. W przypadku kiedy $J=0$, $p=0$ układ sprowadza się do jednej siły a w przypadku kiedy układ sprowadza się do pary, to parametr $p = \infty$

F) Moment wzajemny dwóch skrętników. Pojęcie momentu siły względem osi można rozszerzyć do a) momentu dwóch sił; b) momentu siły względem pary sił; c) momentu pary sił względem drugiej pary; d) wzajemnego momentu dwóch skrętników.

a) Moment wzajemny dwóch sił jest to iloczyn tych sił przez ich najkrótszą odległość d oraz \sin kąta ϑ pomiędzy nimi i wyrazi się wzorem

$$J = P_1 P_2 d \sin \vartheta$$

Będzie to sześciokrotna objętość czworościanu, zbudowanego na tych siłach jako na krawędziach. W przypadku przecinających się lub równoległych sił $J=0$.

b) Moment siły P względem pary $(R-R)$, jest to algebraiczna suma momentów siły P względem każdej z sił pary. Jeżeli siła jest równoległa do płaszczyzny pary (lub co jest to samo) moment pary jest prostopadły do siły, to moment siły względem pary równa się zeru. Jeżeli zaś siła jest prostopadła do płaszczyzny pary, to ich moment wzajemny równa się iloczynowi siły przez moment pary. W ogólnym wypadku moment siły względem pary wyrazi się wzorem

$$J = P G \cos \vartheta$$

gdzie ϑ jest kątem pomiędzy siłą i momentem pary.

c) Moment wzajemny dwóch par sił równa się zeru.

d) Momentem wzajemnym dwóch skrętników $(R G)$ i $(R_1 G_1)$, nazywamy algebraiczną sumę momentów siły i pary każdego skrętnika względnie siły i pary drugiego.

Niech więc będą dane dwa skrętniki (R, G) i (R_1, G_1) i niech d będzie najkrótszą odległością pomiędzy osiami. Przyjmijmy następujący prostokątny układ współrzędnych. Osią X -ów niech będzie oś pierwszego skrętnika, osią Z -ów wspólna ich prostopadła d . Przyjmując kąt pomiędzy osiami skrętników $= \vartheta$ rozkładamy siłę R_1 i moment G_1 drugiego skrętnika na składowe w kierunku osi X -ów,

$$R_1' = R_1 \cos \vartheta \quad G_1' = G_1 \cos \vartheta$$

i w kierunku ich rzutu na płaszczyznę yz

$$R_1'' = R_1 \sin \vartheta \quad G_1'' = G_1 \sin \vartheta$$

Obliczmy teraz poszczególne momenty.

1) Moment siły R wzgl. R_1 równa się

$$- R R_1 d \sin \vartheta$$

2) Moment tejże siły R_1 względem pary G

$$R_1 G \cos \vartheta$$

*) Wyprowadzenie powyższych wzorów można znaleźć w wielu podręcznikach mechaniki. Porówn. np. Routh „Statyka teoretyczna” w tłumaczeniu Straszewicza.

3) i Moment siły R względem G_1 równa się

$$R G_1 \cos \vartheta$$

4) natomiast moment pary G względem $G_1 = 0$.

Sumując te 3 momenty, otrzymamy wzór dla momentu wzajemnego dwóch skrętników

$$J = (R_1 G + R G_1) \cos \vartheta - R R_1 \sin \vartheta$$

oznaczając parametry tych skrętników przez $p = \frac{G}{R}$ i $p_1 = \frac{G_1}{R_1}$ otrzymamy wzór dla momentu

$$J = R R_1 [(p + p_1) \cos \vartheta - d \sin \vartheta]$$

Wyraz w nawiasie nie zależy od sił skrętników, a tylko od ich parametrów oraz od ich wzajemnego położenia. Dwa skrętniki, dla których wyraz w nawiasie

$$a) \quad \omega = (p + p_1) \cos \vartheta - d \sin \vartheta$$

równa się zero, nazywamy skrętnikami wzajemnymi lub znajdującymi się w inwolucji (Klein, Ball).

Jeżeli współrzędne tych skrętników wzgl. dowolnych osi będą odpowiednio równe

$$X, Y, Z, L, M, N \quad \text{i} \quad X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$$

to ich moment wzajemny będzie

$$J = X L_1 + Y M_1 + Z N_1 + X_1 L + Y_1 M + Z_1 N$$

Wzór dla J można również rozważać jako pracę skrętnika (R, G) na skręcie (R_1, G_1) w którym R_1 odgrywa rolę kąta obrotu (szybkości kątowej), a G_1 rolę przesunięcia (szybkości linjowej).

G) Geometryczna interpretacja warunku wzajemności dwóch układów (znajdujących się w inwolucji).

Niech będą dane dwa układy zerowe wyznaczone przez ich osie, o_1 i o_2 i ich parametry k_1 i k_2 . Najkrótsza odległość pomiędzy osiami niech się równa d , i niech ϑ będzie kąt pomiędzy nimi. W każdym poszczególnym z tych układów można wyznaczyć płaszczyznę średnicową, w której proste zerowe, tworzą pęk prostych równoległych, i równoległych do osi drugiego układu.

Odległość d_1 takiej płaszczyzny średnicowej pierwszego układu od jego osi o_1 będzie równa

$$a) \quad d_1 \operatorname{tg} \vartheta = k_1 \quad (\text{rów. c}^a \text{ str. 7})$$

a odległość płaszczyzny średnicowej drugiego układu od osi o_2 będzie równą

$$b) \quad d_2 \operatorname{tg} \vartheta = k_2$$

Naogół te dwie płaszczyzny będą równoległe. W szczególnym przypadku kiedy $d = d_1 + d_2$, będą one zjednoczone. Dodając stronami a) i b) otrzymamy

$$c) \quad (d_1 + d_2) \operatorname{tg} \vartheta = k_1 + k_2$$

lub

$$d \sin \vartheta = (k_1 + k_2) \cos \vartheta$$

a więc wtedy obydwie układy będą wzajemne, (równ. a).

Dwa układy zerowe będą wzajemne, jeżeli proste zerowe pierwszego układu i równoległe do osi drugiego, przecinają się z prostymi zerowymi drugiego układu, równoległymi do osi pierwszego.

§ 2. ODWZOROWANIE ELEMENTÓW GEOMETRYCZNYCH W UKŁADZIE ZEROWYM.

A) Wstęp. Z rozważań poprzedniego rozdziału nietrudno dostrzedz, że jeżeli w przestrzennym układzie sił, powiększymy lub zmniejszymy wszystkie siły w tym samym stosunku, to obydwie układy sił będą posiadały ten sam układ zerowy. Dwie odpowiednie dwójki sił sprzę-

żonych obydwóch układów będą działały wzdłuż tych samych prostych sprzężonych, Proste zerowe i odpowiedniość pomiędzy ogniskami i płaszczyznami ogniskowymi dla obydwóch układów sił pozostanie bez zmiany. Oczywiście też samo się tyczy osi centralnej i stosunku pomiędzy momentem i siłą w obydwóch skrętnikach. Parametr będzie ten sam dla obydwóch układów sił. Można więc rozważać układ zerowy, jako podłoże wielu układów sił i rozpatrywać go niezależnie od tych układów. Wymaga on dla swego wyznaczenia 5-ciu warunków, a mianowicie położenia osi oraz parametru k . Dopiero 6-ty warunek np. wielkość siły R wzdłuż osi wyznacza nam skrętnik.

Niech więc będzie dany układ wyznaczony przez jego oś centralną o i parametr k wzdłuż osi o . Przez dowolny punkt O na osi przeprowadzamy płaszczyznę ω do niej prostopadłą. Będziemy nazywać ω *płaszczyzną odniesienia* lub *rzutnią*, a punkt O *środkiem*. Taki układ będziemy oznaczać symbolem $\omega(o, k)$. Analogicznie, jak i w rzutach środkowych, rysujemy koło o środku O i promieniu równym parametrowi k . Koło to będziemy nazywać *kołem parametrycznym*. Dla ustalenia zwrotu parametru na osi nadajemy kołu obieg (wskazany za pomocą strzałki) prawoskrętny, względem końcowego punktu parametru k odłożonego na osi (Rys. 16).

B) Odwzorowanie prostej w układzie $\omega(o, k)$. Położenie prostej a w przestrzeni będzie wyznaczone, jeżeli będzie danym jej rzut prostokątny a' na rzutnię ω oraz ślad S^* prostej a^* z nią sprzężonej (Rys. 17). Prosta a będzie przecięciem jej płaszczyzny rzucającej z płaszczyzną ogniskową punktu S^* . Rzut a' oraz ślad S^* wyznaczają również położenie prostej a^* sprzężonej z a . Rzuty dwóch prostych sprzężonych na płaszczyznę prostopadłą do osi O są równoległe. (Por. rys. 9 str. 9) a więc rzut a'^* prostej a^* będzie równoległy do rzutu a' . Prosta łącząca ślady S i S^* prostych a i a^* jest prostą zerową i, jako leżąca w płaszczyźnie ω , przechodzi przez (punkt O) środek układu. Będziemy nazywać rzut a'^* oraz ślad S^* prostej a^* *przeciwrzutem* i *przeciwsładem* prostej a ; analogicznie a' i S' będą przeciwrzutem i przeciwsładem prostej a^* .

W szczególnym przypadku prosta a może być prostopadłą lub równoległą do ω . W przypadku prostopadłości, ślad S schodzi się z jej rzutem; przeciwrzutem tej prostej będzie prosta niewłaściwa a przeciwsładem niewłaściwy punkt prostej $S'O$. Jeżeli prosta b jest równoległą do płaszczyzny ω , to jej przeciwrzut b'^* przechodzi przez punkt O . Przeciwsład T^* na b'^* wyznacza odległość h prostej b od ω . Ta odległość będzie równą $h = \frac{OT^*d}{k}$. (Por. zad. następne). Wyjątkowe położenie w tym odwzorowaniu zajmują proste zerowe, które można rozważać, jako dwie proste sprzężone zjednoczone. Rzuty i przeciwrzuty jak również i ślady i przeciwsłady tych prostych schodzą się. Ich położenie w przestrzeni jest wyznaczone przez ich rzut $c' \equiv c'^*$, przez ich ślad $R \equiv R^*$. Ich kąt nachylenia z osią otrzymamy ze wzoru

$$\operatorname{tg} \delta = \pm \frac{k}{h} \quad (\text{rów. } c^a)$$

Zadanie 1. Mając rzut a' i przeciwsład S^* prostej a wyznaczyć jej drugi rzut a'' w układzie dwuprostokątnym (Rys. 18).

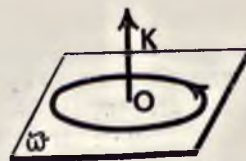
Niech będą dane rzut a' , przeciwsład S^* prostej a oraz koło parametryczne k . Przeciwrzut a'^* będzie równoległy do a' . Oznaczmy odległości rzutu a' i przeciwrzutu a'^* od środka O koła przez $h = OB$ i $h^* = OB^*$, to, korzystając ze wzoru

$$h \operatorname{tg} \delta^* = h^* \operatorname{tg} \delta = k \quad (\text{równ. } c)$$

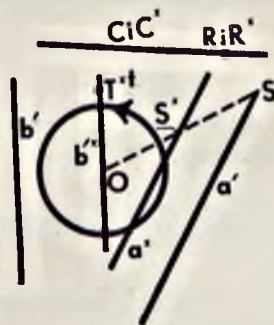
otrzymamy kąty δ i δ^* nachylenia prostych a i a^* z osią o .

Przez środek O przeprowadzamy promień OC równoległy do rzutu a' i budujemy trójkąt prostokątny OB^*C . Kąt przy wierzchołku B^* będzie równy δ a przy wierzchołku C wyznaczy kąt prostej a z rzutnią. Przez ślad S (który leży na prostej OS^* i na a') prowadzimy równoległą (a) do B^*C . Ta równoległa (a) będzie kładem prostej a na rzutnię. Mając więc rzut a' , ślad S oraz kład (a) prostej, możemy wyznaczyć, przy danej osi rzutów x , drugi rzut a'' tej prostej.

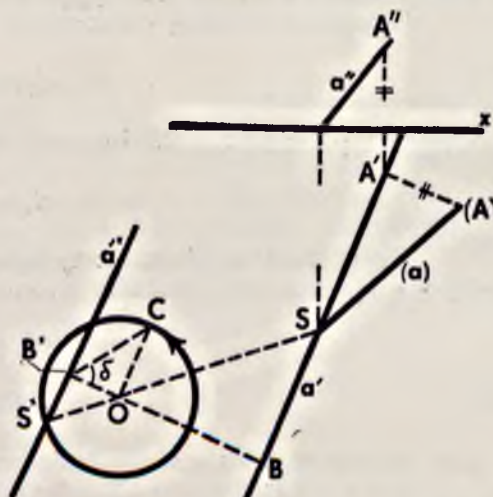
Dwuznaczność wzniesienia rzutu a'' (nad lub pod osią x -ów) można usunąć następującym rozumowaniem. Wyobraźmy sobie wzdłuż prostych a' i a'' dwie siły R_1 i R_2 , sprzężone wzglę-



Rys. 16.



Rys. 17.



Rys. 18.

dem układu $\omega(o, k)$ tak, żeby rzuty tych sił X i $-X=X^*$ na ω wywoływałyby dodatni moment względem O . Wypadkowa składowych Z i Z^* równoległych do osi O będzie siła R skrętnika (R, G) równoważnego dwójce sił R_1 i R_2 . Składowe Z i Z^* będą jedno—lub przeciwnozwrotne, w zależności od tego, czy rzuty a' i a'' przegradzają się z punktem O czy też nie. W naszym konkretnym wypadku przyjmijmy odcinek $S(A)$ na kładzie jako siłę R_1 , odcinek SA' na rzucie będzie równy składowej X , a odcinek $A'(A)$ składowej (Z) w kładzie. Ponieważ a' i a'' przegradzają się z O , to składowa Z będzie jednozwrotna z parametrem, a więc $A'(A)$, rzędna punktu A będzie skierowana do góry. Można więc ustalić następujące prawidło. Przy przyjętym *zawsze* dodatnim momencie sił ($X, -X=X^*$), składowa sił (Z lub Z^*) bliższa do O będzie jednozwrotna z parametrem k . Składowa Z dalsza od O będzie jedno—lub różnozwrotna z k w zależności czy rzuty a' i a'' przegradzają się z O czy też nie. (Od zwrotu składowej Z zależy wzniesienie punktu)

Zadanie 2) Mając dane rzuty a' i a'' prostej a w układzie *dwu* prostokątnym, wyznaczyć jej przeciwzrzut a'' w układzie $\omega(o, k)$. (Rys. 19),

a) Przez środek O przeprowadzamy promień OA równoległy do osi x -ów, a przez końcowy punkt A na tym promieniu prostą AB równoległą do rzutu a'' . Przez punkt przecięcia B tej ostatniej z promieniem OC prostopadłym do osi x -ów przechodzi przeciwzrzut a'' (Federhofer).

D o w ó d. Oznaczmy kąty, które tworzą rzuty a' i a'' z osią x -ów przez φ i przez χ a odległość OH^* od przeciwzrztu a'' od O przez h^* . Kąt ϑ prostej a z osią Z -tów będzie, jak łatwo się przekonać, w zależności od kątów φ i χ , równy.

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{\cos \varphi, \operatorname{tg} \chi}$$

a w zależności od h^*

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{k}{h^*}$$

z rysunku widać, że

$$OH^* = h^* = k \cos \varphi \operatorname{tg} \chi$$

b) Odległość h^* można otrzymać bezpośrednio. Odkładamy na rzucie a' od śladu S odcinek $SA' = k$ równy parametrowi. Wzniesienie drugiego rzutu A'' wyznaczy nam odcinek h^* , co łatwo jest sprawdzić geometrycznie. (Mayor).

U w a g a. Sprawdzić zgodność tej konstrukcji z poprzednią.

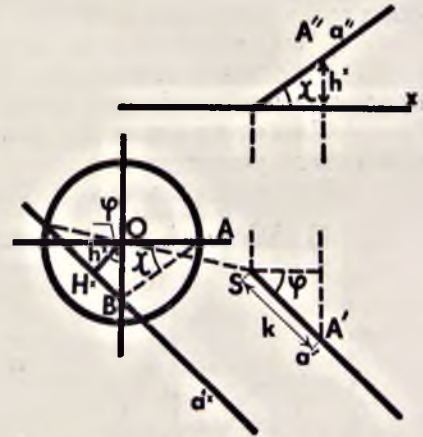
b) Odzworowanie punktu. Położenie punktu P będzie wyznaczone, jeżeli będzie dany jego rzut P' na ω oraz ślad π^* jego płaszczyzny ogniskowej na ω . Ślad ten będziemy nazywać przeciwśladem punktu P i odzworowanie oznaczać symbolem (P', π^*) . Rzut P' i przeciwślad π^* nie są od siebie niezależne. Jedną z prostych zerowych przechodzących przez P przecina prostopadłe oś układu i jako taka będzie równoległa do ω . Przeciwślad π^* będzie więc równoległy do OP' . Prosta PSW w tej płaszczyźnie, prostopadła do śladu π^* , będzie jednocześnie prostą zerową punktu P i spadową jego płaszczyzny ogniskowej (Rys. 20). Kąt nachylenia δ tej płaszczyzny z rzutnią ω wyrazi się wzorem (z prostokątnego trójkąta)

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{OP'}{k} = \frac{r}{k}$$

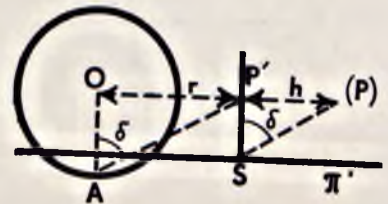
Odległość $P'(P)$ punktu P od płaszczyzny otrzymamy, budując trójkąt $P'(P)S$ podobny do trójkąta OAP' i będzie równą

$$P'P = h = SP' \operatorname{tg} \delta = SP' \frac{r}{k}$$

Dwuznaczność wzniesienia punktu P względem ω można również usunąć następującym rozumowaniem. Przyjmijmy wzdłuż śladu π^* siłę X , tak żeby jej moment względem O był dodatni. Siła z nią sprzężona, względem układu $\omega(o, k)$ będzie skierowana wzdłuż prostej OP . Rzut tej siły na ω będzie równy $-X$ a składowa prostopadła Z^* (w myśl poprzedniego rozważania) będzie jednozwrotna z parametrem k . Na rys. 20 punkt P będzie się znajdował nad płaszczyzną. Możliwe i tutaj, dla wzniesienia, ustalić następujące prawidło. Jeżeli punkt ruchomy, przechodzący



Rys. 19.



Rys. 20.

od O do P' porusza się względem dowolnego punktu na śladzie zgodnie z ruchem obrotu dodatniego, to punkt P znajduje się pod płaszczyzną, w przeciwnym wypadku znajdzie się on nad płaszczyzną.

d) **Odwzorowanie płaszczyzny.** Dzięki wzajemnym własnościom punktu i płaszczyzny w przestrzeni, odwzorowanie płaszczyzny skutecznia się zapomocą tych samych elementów co i punktu. Położenie płaszczyzny będzie wyznaczone, przez jej ślad π na ω oraz przez rzut P'^* jej ogniska P . Rzut P'^* będziemy nazywać przeciwzwztem płaszczyzny; daną zaś płaszczyznę oznaczać symbolem (π, P'^*) . Płaszczyzny równoległe posiadają równoległe ślady oraz wspólny przeciwzwzt, gdyż ogniska płaszczyzn równoległych leżą na średnicy układu t. j. na prostej równoległej do osi o . Płaszczyzny równoległe do ω nie dają się bezpośrednio odwzorować. Położenie ich można wyznaczyć, za pomocą odwzorowania punktów lub prostych na niej leżących.

e) **Warunek równoległości prostych i płaszczyzn.**

1) Wiązka prostych równoległych posiada wspólny punkt niewłaściwy. Płaszczyzna ogniskowa tego punktu będzie płaszczyzną średnicową t. j. prostopadłą do ω . W tej ostatniej leżą proste sprzężone z wiązką prostych równoległych.

Twierdzenie 1) Proste równoległe posiadają wspólny przeciwzwzt.

2) Prosta równoległa do płaszczyzny przecina się z jej prostą niewłaściwą, dla której przeciwzwztem będzie rzut średnicy przechodzącej przez ognisko płaszczyzny.

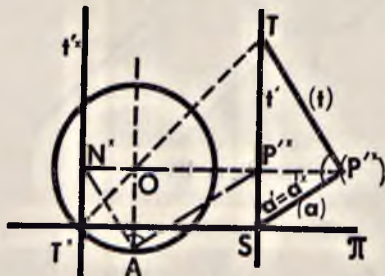
Twierdzenie 2) Przeciwzwzt prostej równoległej do płaszczyzny przechodzi przez przeciwzwzt płaszczyzny i

Twierdzenie 3) Płaszczyzny równoległe posiadają wspólny przeciwzwzt.

f) **Warunek prostopadłości prostych i płaszczyzn.**

1) Niech będzie dana płaszczyzna (π, P'^*) . W jej ognisku P^* przeprowadzamy prostą t , do niej prostopadłą. Rzut t' tej prostopadłej będzie prostopadły do śladu π i schodzi się z rzutem a' spadowej a , t. j. prostej zerowej płaszczyzny. (Rys. 21).

Wykonajmy kład prostych a i t dokoła rzutu a' . W składzie tym otrzymamy trójkąt prostokątny $S(P)T$, w którym punkt T będzie śladem prostej t . Prosta t^* sprzężona z t leży w płaszczyźnie (π, P'^*) . Ślad prostej t^* leży na śladzie π oraz na prostej OT t. j. w punkcie ich przecięcia T^* . Prosta t^* jest prostopadła do śladu w punkcie T^* . Niech N^* będzie jej punktem przecięcia z prostą OP'^* .



Rys. 21

Z podobnych trójkątów ON^*T^* i OP'^*T otrzymamy

$$ON^* = \frac{OP'^* \cdot N^*T^*}{P'^*T^*} = OP'^* \cdot \frac{P'^*S}{P'^*T} = OP'^* tg^2 \vartheta$$

zład

$$ON^* OP'^* = OP'^*{}^2 tg^2 \vartheta = k^2$$

gdzie k jest promieniem koła parametrycznego. Prosta t^* jest przeciwbiegunową punktu P'^* względem tego koła. Ponieważ wszystkie proste prostopadłe do płaszczyzny są do siebie równoległe, i posiadają wspólny przeciwzwzt, możemy więc powiedzieć:

Twierdzenie 4) Przeciwzwztem prostej prostopadłej do płaszczyzny jest przeciwbiegunowa przeciwzwztu płaszczyzny względem koła parametrycznego.

2) Prosta t prostopadła do płaszczyzny jest prostopadła do wszystkich jej prostych. Przeciwzwzty tych ostatnich przechodzą przez przeciwzwzt P'^* płaszczyzny, a więc

Twierdzenie 5) Przeciwzwzty prostych prostopadłych są przeciwbiegunowo sprzężone względem koła parametrycznego.

3) Jeżeli dwie płaszczyzny są prostopadłe, to każda z nich przechodzi przez prostą prostopadłą do drugiej, możemy więc powiedzieć:

Twierdzenie 6) Przeciwzwzty płaszczyzn prostopadłych są przeciwbiegunowo-sprzężone względem koła parametrycznego.

G) **Wzajemna przynależność punktów prostych i płaszczyzn.**

a) Punkt leży na prostej, jeżeli jego rzut P' leży na rzucie a' prostej, a jego przeciwślad π^* przechodzi przez przeciwślad S^* tej prostej.

b) Prosta leży na płaszczyźnie jeżeli jej ślad S leży na śladzie π tej płaszczyzny a przeciwzwzt a'^* prostej przechodzi przez przeciwzwzt P'^* płaszczyzny.

c) Punkt $(P' \pi^*)$ leży na płaszczyźnie (π, P'^*) , jeżeli prosta łącząca rzut P' punktu z przeciwzwztem Q'^* płaszczyzny przechodzi przez punkt przecięcia śladu π płaszczyzny z przeciwśladem π^* punktu. (Por. Rys. 24). Prosta $(P' Q'^*)$ rozważana jako prosta zerowa posiada swój ślad zarówno na π^* jak i na π .

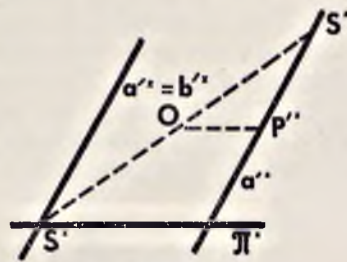
H) **Zagadnienia na położenie.** Zadanie 1. Wyznaczyć prostą przecięcia 2 płaszczyzn (π, P'^*) i (ρ, R'^*) . Prosta $P'^*R'^*$ łącząca przeciwzwzty tych płaszczyzn jest przeciwzwztem ich

prostej przecięcia. Rzut prostej a' przechodzi przez punkt przecięcia S ich śladów ρ i π równoległe do P^* i R^* . Przeciwniad S^* będzie punktem przecięcia OS z P^*R^* (Rys. 22).

Zadanie 2) Przez dany punkt przeprowadzić prostą równoległą do danej prostej. Niech punkt będzie dany przez $(P' \pi^*)$ a prosta tylko przez swój przeciwzrzut b'^* . Rzut a' szukanej prostej a będzie przechodził przez P' będzie równoległy do $b'^* \equiv a'^*$. Przeciwniad S^* prostej a leży w punkcie przecięcia przeciwzrzutu a'^* z przeciwniadem π^* punktu $(P' \pi^*)$ (Rys. 23).



Rys. 22.



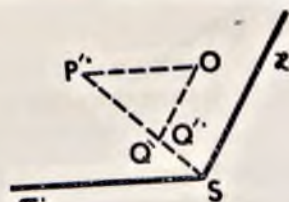
Rys. 23.

Zadanie 3) Przez dany punkt $(P' \pi^*)$ przeprowadzić płaszczyznę równoległą do danej płaszczyzny, wyznaczonej przez jej przeciwzrzut Q'^* .

Prosta $P'Q'^*$ w płaszczyźnie szukanej będzie prostą zerową. Ślad jej leży na przeciwniadem π^* oraz na śladzie x szukanej płaszczyzny. Przedłużmy więc $P'Q'^*$ do przecięcia się z przeciwniadem π^* w S i przez S przeprowadźmy równoległą x do OQ'^* . Ta równoległa będzie śladem x szukanej płaszczyzny. (Rys. 24).

Zadanie 4) Wyznaczyć warunek przecinania się dwóch prostych.

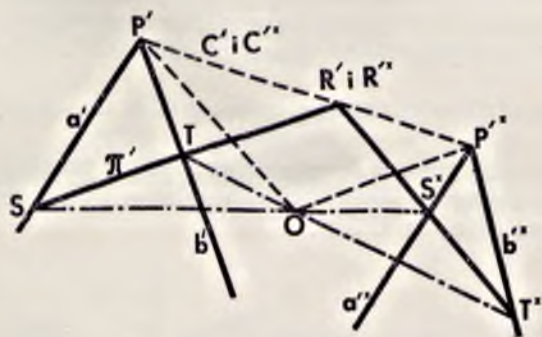
Niech będą dane dwie proste a i b przecinające się, zapomocą ich rzutów a' i b' i ich przeciwzrzutów a'^* i b'^* , śladów S i T i przeciwniadow S^* i T^* . Jeżeli proste a i b przecinają się to i proste a^* i b^* leżą w jednej płaszczyźnie. Punkt przecięcia P prostych a i b jest ogniskiem płaszczyzny, przechodzącej przez P i zawierającej proste sprzężone a^* i b^* . Toż samo możemy powiedzieć o punkcie przecięcia P^* prostych a^* i b^* . Prosta PP^* będzie prostą zerową i prostą przecięcia płaszczyzn zawierających proste (ab) i (a^*b^*) . (Rys. 25).



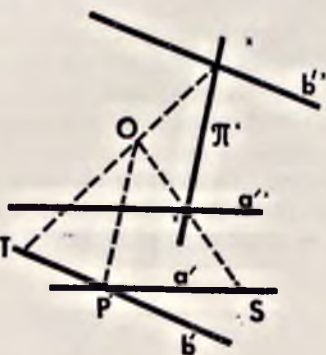
Rys. 24.

Jak z tego wynika, warunkiem przecięcia się dwóch prostych a i b będzie równoległość pomiędzy prostą $P'O$ łączącą środek O z punktem P' , a prostą S^*T^* łączącą przeciwniady S^* i T^* prostych a^* i b^* . Analogicznie $TS \parallel P^*O$ gdzie P^* jest przecięciem prostych a'^* i b'^* . Oprócz tego rzut prostej zerowej $P'P^*$ przejdzie przez punkt R przecięcia sił śladów ST i S^*T^* .

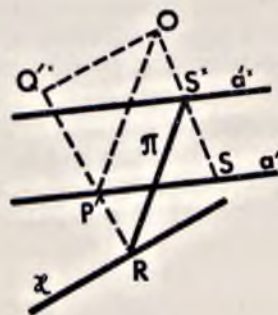
Zadanie 2a. Przez punkt P' dany na prostej (a', a'^*, S, S^*) przeprowadzić prostą b równoległą do prostej, danej przez jej przeciwzrzut b'^* (rys. 26). Rzut b' szukanej prostej będzie



Rys. 25.



Rys. 26.



Rys. 27.

równoległy do b'^* i będzie przechodził przez punkt P . Proste a i b przecinają się, przeto $P'O$ będzie równoległa do prostej, łączącej S^* z przeciwniadem T^* na b^* . Mając przeciwniad T^* wyznaczmy ślad T na przecięciu się prostych b' i OT^* (rys. 26).

Zadanie 3a. Przez punkt P' na prostej (a', a'^*, S, S^*) przeprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej przez jej przeciwzrzut Q'^* .

Wyznaczamy przeciwniad π^* punktu P' , prowadząc prostą S^*R równoległą do $P'O$. Ponieważ prosta $P'Q'^*$ jest prostą zerową szukanej płaszczyzny, przeto przez punkt przecięcia R prostych π^* i Q'^*P' przejdzie ślad x szukanej płaszczyzny równoległy do OQ'^* (rys. 27).

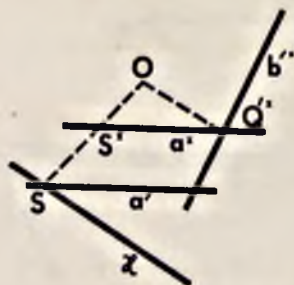
Zadanie 3b. (do odrobienia) Przez daną prostą (a', a'^*, S, S^*) przesunąć płaszczyznę równoległą do prostej b , danej przez jej przeciwzrzut b'^* (rys. 28).

Zadanie 5. Wyznaczyć punkt przebicia prostej z płaszczyzną. Niech będzie dana płaszczyzna (π, P^*) oraz prosta (a', a'^*, S, S^*) . Przez prostą a przeprowadzamy dowolną płaszczyznę (x, Q'^*) . Niech prosta x przez S będzie śladem tej płaszczyzny, a punkt Q'^* na a'^* i na $OQ'^* \parallel$ do

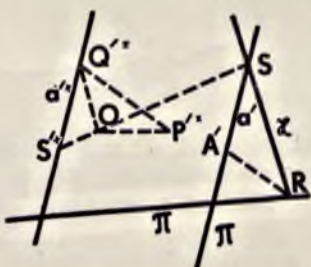
\times będzie jej przeciwzwrotnem. Przez punkt przecięcia się R śladów π i \times przeprowadzamy równoległą do P^*Q^* , aż do przecięcia się z a' w A' . Punkt A' będzie rzutem szukanego punktu przebiecia. (Rys. 29).

Zadanie 6. Przez trzy punkty A, B i C przesunąć płaszczyznę (rys. 30).

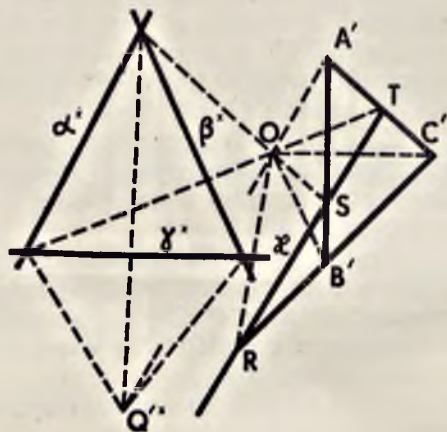
Niech te trzy punkty będą dane przez ich rzuty A', B' i C' i przez ich przeciwślad α^*, β^* i γ^* . Ślad S prostej AB otrzymamy na jej rzucie $A'B'$ i na prostej łączącej środek O z punktem przecięcia się przeciwśladów α^* i β^* . W podobny sposób wyznaczamy ślady R i T na rzutach $B'C'$ i $C'A'$. Trzy punkty S, R i T będą leżały na jednej prostej wyznaczającej nam ślad \times szukaney płaszczyzny. Przeciwzwrot Q^* tej płaszczyzny otrzymamy, przeprowadzając przez punkty przecięcia prze-



Rys. 28.



Rys. 29.



Rys. 30.

ciwśladów $\alpha^* \beta^*, \beta^* \gamma^*$ i $\gamma^* \alpha^*$ proste odpowiednio równoległe do prostych $A'B', B'C'$ i $C'A'$. Te trzy równoległe przetną się w jednym punkcie Q^* w przeciwśladzie szukaney płaszczyzny (rys. 30).

Zadanie 6a (wzajemne). Wyznaczyć punkt przecięcia trzech płaszczyzn (do przerobienia).

Zagadnienia miarowe. W zagadnieniach na położenie nie korzystaliśmy z koła parametrycznego (t. j. z wielkości parametru k). Dla zagadnień miarowych koło to okaże się niezbędne. W tych ostatnich zagadnieniach zajmiemy się głównie prostopadłością prostych i płaszczyzn. Zagadnienia dotyczące wielkości kątowych pozostawiamy na stronie, gdyż mają one rzadko zastosowanie w statyce i kinematyce wykreślnej.

Zadanie 7. Na danej prostej odłożyć odcinek danej długości.

Rozwiązanie wynika z rysunku 18, str. 14.

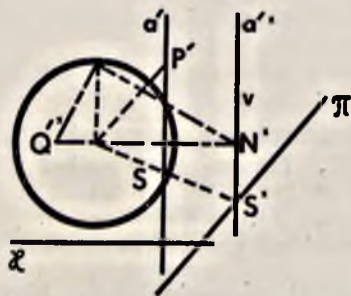
Zadanie 8. Z danego punktu (P', π^*) opuścić prostopadłą na płaszczyznę (\times, Q^*) i wyznaczyć spodek tej prostopadłej (rys. 31).

Rzut a' szukaney prostej będzie przechodził przez P' prostopadle do \times .

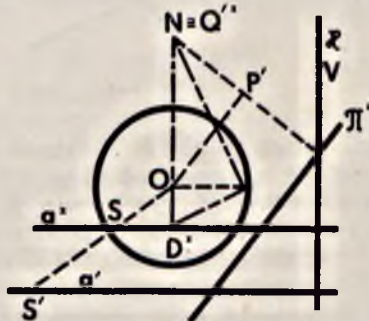
Przeciwzwrot a'^* będzie równoległy do a' i przejdzie przez przeciwbiegun N^* przeciwzwrotu Q^* płaszczyzny względem koła parametrycznego. Przeciwślad S^* znajduje się w punkcie przecięcia a'^* z przeciwśladem π^* punktu. Szukana prosta będzie więc wyznaczona przez a', a'^* i S^* . Dla wyznaczenia punktu przebiecia równaj zad. 5.

Zadanie 9. Przez dany punkt (P', π^*) przeprowadzić płaszczyznę prostopadłą do danej prostej (a', a'^*, S i S^*) (rys. 32).

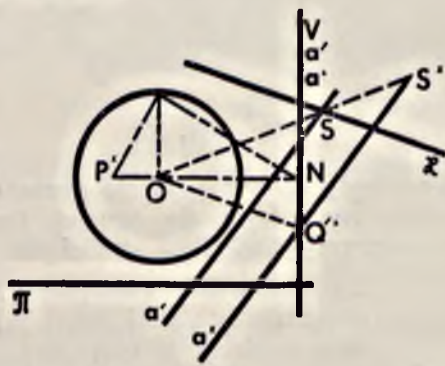
Przeciwzwrot Q^* szukaney płaszczyzny będzie przeciwbiegunem N^* przeciwzwrotu a'^* prostej. Łączymy $N^* \equiv Q^*$ z rzutem punktu P' do przecięcia się z przeciwśladem π^* w punkcie R . Przez ten punkt R przejdzie ślad \times szukaney płaszczyzny równoległe do OQ^* .



Rys. 31.



Rys. 32.



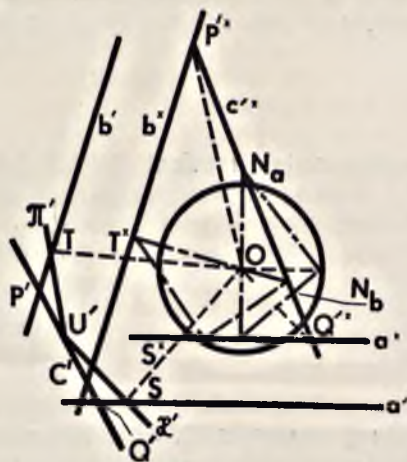
Rys. 33.

Zadanie 10. Przez daną prostą (a', a'^*, S, S^*) przesunąć płaszczyznę (\times, Q^*) prostopadłą do płaszczyzny (π, P'^*).

Przeciwzwrot Q^* szukaney płaszczyzny jest przeciwbiegunowo sprzężonym z punktem P'^* . Znajduje się on w punkcie przecięcia Q^* przeciwbiegunowej v punktu P'^* z przeciwzwrotnem a'^* prostej. Ślad \times szukaney płaszczyzny przejdzie przez S równoległe do OQ^* (rys. 33).

Zadanie 11. Przeprowadzić wspólną prostopadłą dwóch skośnych prostych a i b (rys. 34)

Niech będą dane dwie proste skośne (a', a'^*, S i S^*) oraz (b', b'^*, T i T^*). Wyznamy przeciwbieguny N_a i N_b przeciw rzutów a'^* i b'^* . Prosta $N_a N_b$ będzie przeciw rzutem c'^* szukanej wspólnej prostopadłej. Proste a i b przecinają się z szukaną prostą c , przeto również i a^* i b^* przecinają się z c^* . Niech punkty P'^* i Q'^* będą rzutami punktów przecięcia przeciw rzutu prostej $N_a N_b$ z przeciw rzutami b'^* i a'^* . Równoległe przez S i T do prostych OQ'^* i OP'^* wyznaczają ślady π^* i π' płaszczyzn ogniskowych Q'^* punktów R'^* i P'^* . Przez punkt przecięcia U' tych śladów przechodzi rzut c' prostej szukanej i sprzężonej z $N_a N_b \equiv c'^*$.



Rys. 34.

§ 3) ODWZOROWANIE UKŁADU SIŁ W UKŁADZIE ZEROWYM.

Niech będzie dany układ sił $P_1 \dots P_n$. Przyjmijmy dowolny układ zerowy $\omega(o, k)$ osi o , parametrze k i płaszczyźnie odniesienia ω , prostopadłej do osi o w jednym z jej punktów. O ile nie zrobimy zastrzeżenia, to naogół oś o przyjmujemy w położeniu pionowym i, w tym zrozumieniu, będziemy nazywać rzut siły na rzutnię, składową poziomą, a składową siły w kierunku osi, składową pionową. Punkt przyłożenia każdej siły P_i wyobrażamy sobie w jej śladzie S_i i rozkładamy ją na składowe; poziomą X_i i pionową Z_i . Wyznamy nadto dla każdej siły P_i jej sprzężoną P_i^* względem układu zerowego $\omega(o, k)$ i rozkładamy ją, począwszy od jej śladu S_i^* na składową poziomą $X_i^* \equiv -X_i$ i pionową Z_i^* , przyczem składowe Z_i i Z_i^* będą równe

$$1) \quad Z_i = \frac{X_i^* h_i^*}{k} \quad \text{i} \quad Z_i^* = \frac{X_i h_i}{k}$$

gdzie h_i i h_i^* są odległościami rzutów X_i , wzgl. X_i^* od O (por. równ. g. str. 9).

Postępując w ten sam sposób z pozostałymi siłami układu, otrzymamy dwa zespoły sił poziomych $X_1 \dots X_n$ i $X_1^* \dots X_n^*$ na ω i dwa zespoły pionowych sił $Z_1 \dots Z_n$ i $Z_1^* \dots Z_n^*$. Pierwsze dwa zespoły dadzą nam dwie siły wypadkowe poziome $\bar{F} = \sum X_i$ i $\bar{F}^* = \sum X_i^*$, równe pomiędzy sobą, o równoległych liniach działania f i f^* , przyczem $F^* = -F$.

Dwa zespoły sił pionowych dadzą dwie siły wypadkowe \bar{Z} i \bar{Z}^* podług wzoru

$$2) \quad \bar{Z} = \sum Z_i = \frac{\sum X_i^* h_i^*}{k} \quad \bar{Z}^* = \sum Z_i^* = \frac{\sum X_i h_i}{k}$$

Wyraz pod znakiem sumy $\sum X_i h_i$ i $\sum X_i^* h_i^*$, jest momentem statycznym sił X_i i X_i^* względem środka O . Możemy te momenty zastąpić momentem siły wypadkowej F i F^* względem O ; otrzymamy wtedy

$$2a) \quad \bar{Z} = \frac{F^* h^*}{k} \quad \text{i} \quad \bar{Z}^* = \frac{F h}{k}$$

gdzie h i h^* są odległościami prostych f i f^* od O .

Niech te pionowe wypadkowe \bar{Z} i \bar{Z}^* przetną nam płaszczyznę ω w punktach φ i φ^* . Proste f i f^* będą charakterystykami płaszczyzny ω w układzie sił $P_1 \dots P_n$ wzgl. w układzie sprzężonym $P_1^*, P_2^* \dots P_n^*$. Punkty φ i φ^* będą ogniskami tej płaszczyzny względem tych samych układów. Możemy okazać, że te cztery elementy f i f^* oraz φ i φ^* są jednokładne względem środka O oraz że wyznaczają one wraz z przyjętą siłą F , albo \bar{Z} , (wzgl. F^* , wzgl. \bar{Z}^*) wielkość i położenie osi skrętników, równoważnych danemu lub sprzężonemu z nim układowi sił.

Oznaczmy odległości punktów φ i φ^* od O przez r i r^* a odległości poszczególnych śladów S_i i S_i^* sił P_i i P_i^* od tegoż punktu przez s_i i s_i^* . Biorąc momenty statyczne wypadkowych sił pionowych \bar{Z} i \bar{Z}^* oraz ich składowych względem O otrzymamy

$$3) \quad \bar{Z} r = \sum Z_i s_i = \frac{1}{k} \sum X_i^* h_i^* s_i \quad \text{i} \quad \bar{Z}^* r^* = \sum Z_i^* s_i^* = \sum \frac{X_i h_i s_i^*}{k}$$

lub

$$3a) \quad \frac{\bar{Z} r}{\bar{Z}^* r^*} = \frac{\sum X_i^* h_i^* s_i}{\sum X_i h_i s_i^*}$$

Każdy wyraz pod znakiem sumy licznika równa się ujemnej wartości odpowiedniego wyrazu sumy w mianowniku [$X_i = -X_i^*$, ślady S_i i S_i^* leżą na jednej prostej z punktem O . więc $h_i : s_i = -h_i^* : s_i^*$ lub $h_i s_i^* = -h_i^* s_i$] skąd

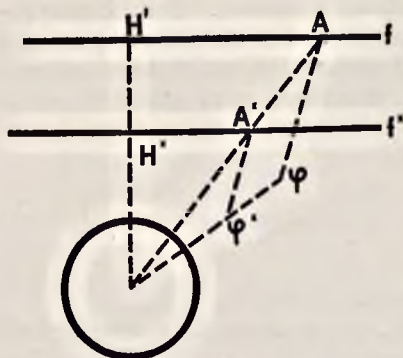
$$3b) \quad \frac{Z r}{Z^* r^*} = -1$$

podstawiając zamiast Z i Z^* ich wartości z równania 2^a otrzymamy

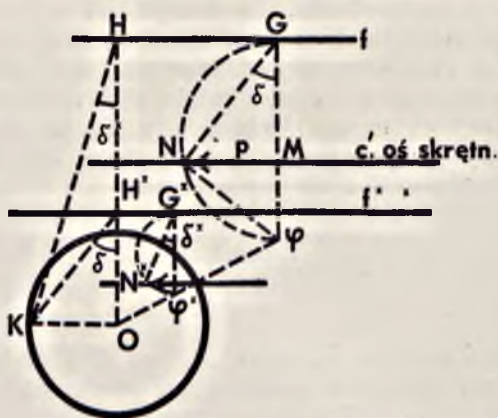
$$3c) \quad \frac{F^* h^* r}{F h r^*} = -1 \quad \text{lub ostatecznie}$$

$$3d) \quad h^* r = h r^* \quad \text{i} \quad \frac{h}{r} = \frac{h^*}{r^*}$$

Warunek jednokładności wymaga poza tym, by odpowiednie punkty φ i φ^* leżały na jednej prostej z O . Jest to prawie oczywiste. Każda dwójka sił pionowych Z_i i Z_i^* sprzężonych względem układu ω (ok) posiada wypadkową ($Z_i + Z_i^*$) przechodzącą przez O . Więc i wypadkowe Z i Z^* , każdego z tych dwóch zespołów, będą leżały w jednej płaszczyźnie przechodzącej przez O .



Rys. 35.



Rys. 36.

Rys. 35 przedstawia nam położenie czterech elementów (f, f^*, φ i φ^*) względem środka, oraz wyznaczenie wykresłne jednego z tych elementów, jeżeli dane są trzy pozostałe. (Zadanie 1)

Niech więc będą dane proste f i f^* , oraz punkt φ . Dla wyznaczenia φ^* przeprowadzamy przez O dowolną prostą przecinającą f i f^* w A i A^* . Łączymy A z φ ; równoległa do $A\varphi$ przez A^* przecina prostą $O\varphi$ w punkcie φ^* .

Zadanie 2. Mając dane 4 elementy (f, f^*, φ i φ^*) wyznaczyć położenie osi i wielkość parametru k odpowiedniego układu zerowego. (Rys. 36).

Niech wzdłuż prostej f działa siła X (o dowolnie przyjętej wielkości i skierowana na prawo). Wzdłuż f^* będzie działała siła $X^* = -X$. Pionowe siły Z i Z^* przechodzące przez φ i φ^* będą odpowiednio równe

$$Z = \frac{X^* h^*}{k} \quad \text{i} \quad Z^* = \frac{X h}{k}$$

gdzie k jest parametrem podłoża ω (o, k)

Siła pierwszego skrętnika będzie równą

$$4) \quad R = \sqrt{X^2 + Z^2}$$

jej kąt ϑ nachylenia z osią o układu odniesienia wyznaczy się ze wzoru

$$4a) \quad \text{tg } \vartheta = \frac{X}{Z} = -\frac{Xk}{Xh^*} = -\frac{k}{h^*}$$

moment własny J tegoż skrętnika będzie równy

$$4b) \quad J = X Z d$$

gdzie d jest odległością punktu φ od prostej f wobec tego parametr p skrętnika (X, Z) będzie równy:

$$5) \quad p = \frac{J}{R^2} = \frac{X Z d}{X^2 + Z^2} = \frac{d}{\frac{X}{Z} + \frac{Z}{X}} = \frac{d}{\text{tg } \vartheta + \text{ctg } \vartheta} = -d \sin \vartheta \cos \vartheta$$

lub

$$5) \quad p = -\frac{d k h^2}{k^2 + h^2}$$

i analogicznie parametr drugiego skrętnika (X^*, Z^*) będzie równy

$$5^a) \quad k^* = -\frac{d^* k h}{k^2 + h^2}$$

Oś skrętnika (X, Z) przecina prostopadle najkrótszą odległość φG pomiędzy siłami X i Z w punkcie M . Punkt ten dzieli odcinek φG w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do tangensów kątów, które tworzą siły X i Z z osią skrętnika. W danym wypadku, ponieważ X i Z są do siebie prostopadłe, więc

$$GM : M\varphi = \text{ctg } \vartheta : \text{tg } \vartheta \quad (\text{pr. wzór, c str. 8})$$

albo

$$6) \quad GM = G\varphi \cos^2 \vartheta \quad \text{i} \quad M\varphi = G\varphi \sin^2 \vartheta$$

Wyznamy położenie osi skrętnika (XZ) i wielkość parametru p wykreślnie. W tym celu okazemy, że prosta f^* jest prostą sprzężoną z osią skrętnika (X, Z) względem układu zasadniczego $\omega(ok)$. Kąt nachylenia osi skrętnika (X, Z) z osią o wyraża się wzorem $\text{tg } \vartheta = -\frac{k}{h^*}$

Pod tym samym kątem ϑ do osi o będą nachylone proste, dla których prosta f^* jest przeciw-rzutem. Jest to widoczne z trójkąta prostokątnego H^*OK gdzie OK (promień koła k), jest równoległe do f^* a H^* spodkiem prostopadłej z O na f^* .

Prosta f^* będzie więc przeciwzrzutem nie tylko osi, ale wszystkich średnic skrętnika (X, Z). Dla otrzymania punktu przecięcia M osi skrętnika z prostą $G\varphi$ przeprowadzamy przez G prostą GN równoległą do H^*K , a przez punkt φ prostą φN prostopadłą do H^*K . Równoległa MN do f , będzie rzutem osi skrętnika (XZ), a wysokość MN trójkąta prostokątnego $GN\varphi$ jego parametrem p (por. rys. 18). Analogicznie wyznaczymy parametr p^* i rzut osi skrętnika (X^*Z^*) sprzężonego, budując trójkąt $G^*\varphi^*N^*$ w którym G^*N^* będzie równoległa do KH . (Rys. 36). Prosta f jest przeciwzrzutem wszystkich średnic skrętnika (X^*Z^*).

Zadanie 3 (pomocnicze). Dane są dwa elementy f i f^* skrętnika oraz dwie proste a i b^* przechodzące przez punkty φ i φ^* . Wyznaczyć te punkty.

Łączymy punkt przecięcia A prostych a i f ze środkiem O i wyznaczamy odpowiedni mu, w jednokładności, punkt A^* na f^* . Przez A^* przeprowadzamy prostą a^* równoległą do a aż do przecięcia się z b^* w szukanym punkcie φ^* (Rys. 37).

Zad. 3^a) (wzajemne) do przeobrażenia.

Zadanie 4) Mając dane 2 skośne siły R_1 i R_2 wyznaczyć cztery elementy (f, f^*, φ i φ^*) równoważnego im skrętnika. (Rys. 38).

Niech X_1 i X_2 będą rzutami a S i T śladami sił R_1 i R_2 a X_1^* i X_2^* i S^* i T^* ich przeciwzrzutami i przeciwśladami. Wypadkowe X_1 i X_2 oraz X_1^* i X_2^* będą równe, równoległe i przeciwwrotne i będą skierowane wzdłuż prostych f i f^* skrętników (XZ) i (X^*Z^*). Składowe pionowe Z_1 i Z_2 i Z_1^* i Z_2^* będą posiadały swe ślady odpowiednio w S i T i S^* i T^* , a więc na prostych ST i S^*T^* leżą punkty φ i φ^* . Wyznaczenie tych punktów sprowadza się do zadania poprzedniego.

Rozważmy teraz szczególne wypadki przy odwzorowaniu układu sił w układzie $\omega(o, k)$

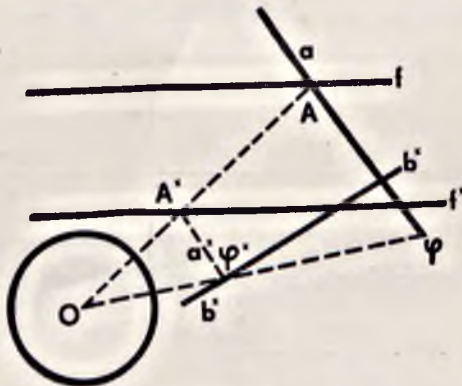
a) Układ sił sprowadza się do siły pojedynczej. Wtedy zarówno parametr p , jak i moment własny J układu będzie równy zeru t. j.

$$p = 0, \quad J = XZd = 0, \quad d = 0$$

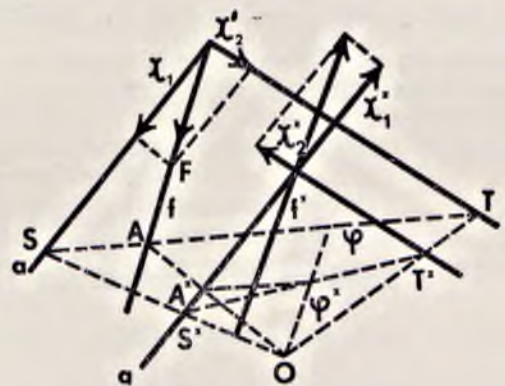
a więc punkt φ leży na prostej f (co jest oczywiste) a punkt φ^* na f^* .

b) Układ sprowadza się do siły pojedynczej Z prostopadłej do ω .

Prostej prostopadłej do ω odpowiada w $\omega(o, k)$ prosta niewłaściwa, a siła Z para sił, a więc siła nieskończenie mała, wzdłuż prostej niewłaściwej.



Rys. 37.



Rys. 38.

Prosta f^* będzie prostą niewłaściwą. Punkt φ^* będzie punktem niewłaściwym prostej $O\varphi$. Natomiast prosta f jest niewyznaczoną, co do kierunku (przechodzi przez ślad φ siły Z).

c) Układ sił sprowadza się do pary.

Siła nieskończenie mała, równoważna tej parze, jest skierowana wzdłuż prostej niewłaściwej płaszczyzny działania pary. Wobec tego f jako rzut tej prostej na ω , będzie prostą niewłaściwą płaszczyzny ω . Punkt φ na f^∞ jest niewłaściwym punktem prostej przecięcia płaszczyzny pary z ω . Prosta f^* jest niewyznaczona, natomiast punkt φ^* będzie śladem średnicy układu $\omega(o, k)$ (prostopadłej do ω), i odpowiadającej płaszczyźnie działania pary.

Zadanie 5) Daną jest dwójka sił skrętnika X i Z odniesionego do układu $\omega(o, k)$. Wyznaczyć dwójkę sił X^* i Z^* w skrętniku sprzężonym.

Wyznamy kolejno siły sprzężone z siłami X i Z względem $\omega(o, k)$.

Siła P^* sprzężona z X przechodzi przez O ; jej rzut jest równoległy do X i równy $X^* = -X$ a jej kąt nachylenia z osią o układu wyznaczy się ze wzoru

$$\operatorname{tg} \vartheta^* = \frac{k}{d}$$

gdzie d jest odległością f od O . Składowa siły P w kierunku osi o będzie równą

$$Z^* = X^* \operatorname{ctg} \vartheta^* = -X \frac{d}{k}$$

Siła sprzężona z siłą Z będzie parą sił. Jej płaszczyzna działania odpowiada średnicy $\omega(ok)$, przechodzącej przez punkt φ . Śladem tej płaszczyzny na ω będzie prosta $O\varphi$ a punkt φ jej ogniskiem. Jej kąt nachylenia λ z osią będzie zgodny z kątem nachylenia prostej zerowej przez φ i prostopadłej do $O\varphi$, a tangens tego kąta wyrazi się wzorem

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{k}{r}$$

gdzie $r = O\varphi$.

Moment tej pary, prostopadły do płaszczyzny, jej działania równa się

$$M_\varphi = \frac{Zk}{\cos \lambda}$$

i tworzy kąt $\frac{\pi}{2} - \lambda$ z osią o . Rozkładamy go na dwie składowe $M_\varphi' = Zk \operatorname{ctg} \lambda$ w kierunku rzutu na ω i $M_\varphi'' = Zk$ prostopadłe do ω . Składowa M_φ' przenosi siłę Z^* w kierunku $O\varphi$ począwszy od O na odległość $O\varphi^* = r^*$ równą

$$\text{a) } O\varphi^* = r^* = \frac{M_\varphi'}{Z^*} = \frac{Z \operatorname{ctg} \lambda k}{Z^*} = - \frac{Z \frac{r}{k} k}{X \frac{d}{k}} = - \frac{Zkr}{Xd}$$

Składowa M_φ'' przenosi siłę $-X$ równoległe na odległość d^* od O .

$$\text{b) } d^* = \frac{M_\varphi''}{X^*} = - \frac{Zk}{X}$$

Uwaga. Prostą f^* możnaby wyznaczyć bezpośrednio z równania ($Zk = X^* h^*$) (porównaj równ. 2a str. 19) a następnie punkt φ^* , korzystając z jednoskładności czterech elementów ($f, f^*, \varphi, \varphi^*$) względem O . Równanie a) i b) wskazują nam, że warunek jednokładności

$$r : d = r^* : d^*$$

pozostał zachowany.

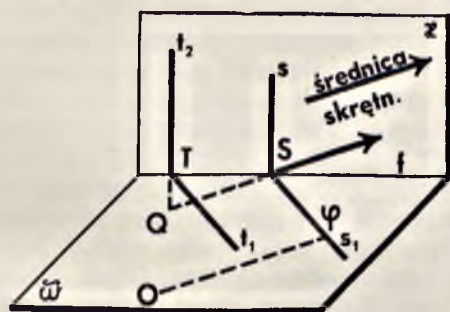
Zadanie 6 (pomocnicze). Dany jest układ ($f, f^*, \varphi, \varphi^*$) odniesiony do $\omega(o, k)$. Wyznaczyć ognisko płaszczyzny prostopadłej do ω .

Niech t_1 będzie śladem tej płaszczyzny na ω . Przez f przeprowadźmy płaszczyznę \times prostopadłą do ω i niech przetnie się ona z daną płaszczyzną wzdłuż t_2 . Prosta t_2 będzie prostą zerową (przecina ona charakterystykę f i biegunową płaszczyzny ω) (rys. 39). Dla wyznaczenia drugiej prostej zerowej w płaszczyźnie $t_1 t_2$, przeprowadźmy przez φ płaszczyznę $s_1 s_2$, równoległą do $t_1 t_2$. W tej ostatniej zarówno prosta s_1 (przechodząca przez φ) jak i s_2 będą prostymi zerowymi, a więc punkt S przecięcia się śladów s_1 i s_2 na f będzie ogniskiem płaszczyzny $s_1 s_2$. Średnica przechodząca przez S (leży ona w płaszczyźnie \times) przetnie ślad t_2 w punkcie Q w ognisku płaszczyzny $t_1 t_2$.

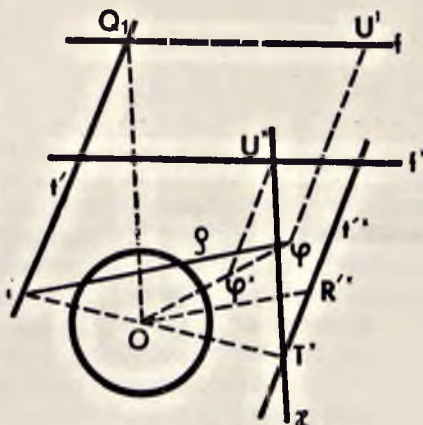
Zadanie 7. Mając dany rzut t' i ślad T prostej zerowej układu ($f \dots \varphi^*$) wyznaczyć jej przeciwrzut t'' i przeciwślad T'' .

Przyjmując dowolną siłę X działającą wzdłuż f , otrzymamy skrętnik wyznaczony przez X i cztery elementy układu zerowego ($f, f^*, \varphi, \varphi^*$). Moment tego skrętnika względem szukanej prostej zerowej (t', t'^*, T, T^*) jest równy zeru.

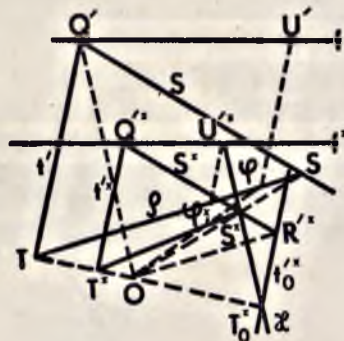
Ognisko Q płaszczyzny rzucającej prostą ($t' T$) znajduje się w punkcie przecięcia tej prostej z pewną średnicą (patrz zad. poprzednie), a rzut tego ogniska Q' schodzi się z punktem przecięcia t' z f (rys. 40).



Rys. 39.



Rys. 40.



Rys. 40a.

Zastąpmy układ skrętnika układem równoważnym: siłą R skierowaną wzdłuż średnicy, przechodzącej przez Q (ognisko płaszczyzny rzucającej prostą zerową) oraz przez odpowiedni moment. Rzutem tej średnicy będzie prosta f jej przeciwzwzajemnym f^* . Jej ślad znajduje się w punkcie przecięcia U' prostych f i $\varphi U'$ równoległej do t' . (W poprzed. zadaniu prosta s_1). Przeciwwzajemnym U^* na f^* otrzymamy łącząc O z U^* lub prowadząc $\varphi^* U^*$ równoległe do t' .

Płaszczyzna działania pary odpowiedniego momentu (o którym powyżej była mowa) zawiera prostą (t', t'^*, T, T^*), jej przeciwzwzajemnym jest punkt Q' . Jej ślad x przechodzi przez U^* równoległe do prostej łączącej środek O z przeciwzwzajemnym Q' . Punkt przecięcia T^* śladu X z prostą TO będzie przeciwzwzajemnym T^* szukanej prostej zerowej.

Zadanie 7a. (Do przerobienia). Dany jest układ zerowy (f, f^*, φ i φ^*) oraz rzut t i przeciwzwzajemnym t^* prostej zerowej tego układu. Wyznaczyć ślad i przeciwzwzajemnym tej prostej.

Zadanie 8. Dany jest układ zerowy ($f \dots \varphi^*$) oraz punkt T leżący na rzutni ω . Wyznaczyć jego płaszczyznę ogniskową względem ($f \dots \varphi^*$).

Dwie dowolne proste zerowe przechodzące przez punkt T wyznaczają płaszczyznę ogniskową tego punktu. Jedną z takich prostych zerowych będzie prosta $T\varphi$ łącząca T z punktem φ . Przecina ona dwie proste sprzężone układu ($f \dots \varphi^*$), a mianowicie charakterystykę f i biegunową przez φ płaszczyzny ω .

Ta prosta $T\varphi$ będzie jednocześnie śladem ρ płaszczyzny ogniskowej punktu T (wzgl. rzutni ω).

Drugą prostą zerową przez T będzie prosta (t', t'^*, T, T^*) (wyznaczona już na poprzednim rys. 40). Przeciwwzajemnym R'' szukanej płaszczyzny leży na przeciwzwzajemnym t^* prostej zerowej t w punkcie jej przecięcia z prostą OR'' równoległą do śladu $T\varphi \equiv \rho$.

Zadanie 8a. Dla dowolnego punktu A' wyznaczyć płaszczyznę ogniskową względem układu ($f \dots \varphi^*$).

Wskazówka. Niech punkt A' będzie wyznaczony przez swój rzut A i przez przeciwzwzajemnym α^* .

Przez A przeprowadzamy prostą równoległą do średnicy układu ($f \dots \varphi^*$) i wyznaczamy ślad T tej prostej. Płaszczyzny ogniskowe wszystkich punktów średnicy są do siebie równoległe. Wyznaczamy więc płaszczyznę ogniskową dla śladu T a przez A przeprowadzamy płaszczyznę do niej równoległą. (Por. rys. 40).

Zadania 9 do przerobienia. Wyznaczyć ognisko płaszczyzny (π, P'') względem układu ($f \dots \varphi^*$).

Zadanie 10. Wyznaczyć parę prostych sprzężonych w układzie ($f \dots \varphi^*$) jeżeli daną jest jedna prosta (t', t'^*, T i T^*) tej pary.

Niech (s', s'', S i S^*) będzie szukaną prostą sprzężoną z ($t' \dots T^*$) względem ($f \dots \varphi^*$). Punkty przecięcia Q' i Q'' rzutów s' i t' wzgl. s'' i t'' leżą na prostych f wzgl. f^* . Proste prostopadłe do rzutni ω w Q' wzgl. w Q'' są prostymi zerowymi w układach (f, φ) wzgl. (f^*, φ^*) i jako takie przecinają się zarówno z t' i s' wzgl. t'' i s'' (rys. 40a).

W płaszczyźnie ogniskowej wzgl. układu (f, φ) dowolnego punktu T prostej t leży prosta s . Więc jej przeciwzwzajemnym przechodzi przez przeciwzwzajemnym tej płaszczyzny.

Wyznaczmy dla śladu T prostej t płaszczyznę ogniskową i niech ρ będzie jej śladem a R'' przeciwzwzajemnym. (Porów. zad. 8). Przez R'' przechodzi przeciwzwzajemnym s'' jako prosta $R'' Q''$. Rzut zaś s' przejdzie przez Q' równoległe do s'' . Ślad i przeciwzwzajemnym tej prostej leżą odpowiednio na $T\varphi$ wzgl. $T^* \varphi^*$. (Uwaga. O, S i S^* leżą na jednej prostej). (Porównaj rys. 38).

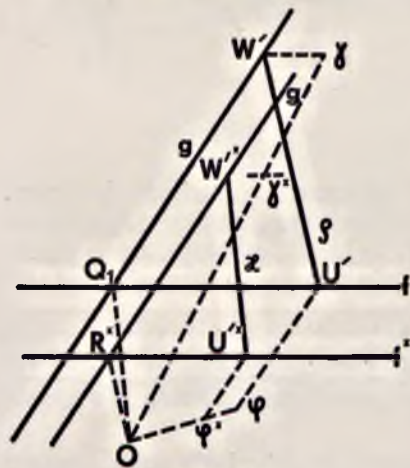
Wzajemne układy zerowe. a) Nazywamy dwa skrętniki wzajemnymi albo znajdującymi się w inwolucji, jeżeli suma trzech momentów: moment wzajemny ich sił oraz moment siły pierwszego względem pary drugiego i moment siły drugiego względem pary sił pierwszego równa się zeru. (Patrz § 1 str. 12 i 13). Ponieważ w przypadku wzajemności skrętników wielkość sił nie wchodzi w rachubę, przeto można również mówić o dwóch wzajemnych układach zerowych. Dla łatwiejszego wystąpienia się, mówiąc o momentach, możemy przyjąć, że wzdłuż osi obydwóch układów zerowych działają dwie siły o dowolnie przyjętej wielkości np. dwie równe siły jednostkowe. Niech więc będą dane układy zerowe $(f, f^*, \varphi \text{ i } \varphi^*)$ i $(g, g^*, \gamma, \gamma^*)$ w odniesieniu do układu zasadniczego $\omega (o, k)$. Wyznamy warunek ich wzajemności. Dopełnijmy obydwa układy zerowe przez wprowadzenie dwóch równych sił jednostkowych do skrętników $(R, f \dots \varphi^*)$ i $(R, g \dots \gamma^*)$. Zastąpmy pierwszy skrętnik równoważnym układem: siłą R wzdłuż jednej z jego średnic oraz odpowiednią parą sił (momentem). Tę średnicę wybieramy tak, żeby płaszczyzna działania pary była równoległa do siły drugiego skrętnika. Wtedy moment tej pierwszej pary, względem siły drugiego skrętnika, będzie równy zeru. W tym celu rzucamy punkty φ i φ^* w kierunku prostej g na proste f i f^* i przyjmujemy rzuty U' i U'' za ślad i przeciwślad wybranej średnicy. Średnica ta przechodzi przez U' . Płaszczyzna ogniskowa tego punktu U a więc płaszczyzna działania pary, przechodzi przez prostą $U' \varphi$ i jest prostopadła do ω .

Moment tej pary względem siły drugiego skrętnika wzdłuż jego osi lub którejkolwiek z jego średnic równa się zeru. (Rys. 41).

Analogicznie postępujemy z drugim skrętnikiem. Rzucamy punkty γ i γ^* równolegle w kierunku prostej f , odpowiednio, na g i g^* . Przyjmując rzuty W' i W'' na g i g^* jako ślad i przeciwślad średnicy drugiego układu zerowego, otrzymamy płaszczyznę działania pary przechodzącą przez $W' \gamma$ prostopadłą do ω a więc równoległą do siły pierwszego skrętnika.

Przez wybór średnic (f, f^*, U', U'') i $(\gamma, \gamma^*, W', W'')$ dwa warunki wzajemności (momenty pary sił jednego skrętnika, względem siły drugiego równają się zeru) zostały zachowane. Jeżeli te średnice przecinają się, to i trzeci warunek, (moment wzajemny dwóch sił będzie równy zeru) będzie uwzględniony, a więc wtedy całkowity moment wzajemny tych dwóch układów będzie równy zeru.

Wzajemne położenie tych układów w przypadku wzajemności powinno być więc następujące: Jeżeli prosta OQ' łącząca punkt przecięcia prostych f i g ze środkiem O jest równoległa do prostej $U''W''$ łączącej przeciwślady U'' i W'' średnic, to te dwie średnice przecinają się. (Rys. 41).



Rys. 41.

b) Rozpatrzmy szczególny przypadek układu zerowego, w którym proste f i f^* są zjednoczone a więc i punkty φ i φ^* są zjednoczone.

Możliwość takiego przypadku widzimy, biorąc pod uwagę zad. 4, str. 21; rys. 38. Przy pewnym doborze sił, wypadkowe $R = X_1 + X_2$ i $R^* = X_1^* + X_2^*$ mogą być skierowane wzdłuż wspólnej linii działania $f \equiv f^*$. Obydwa układy zerowe sprzężone pomiędzy sobą będą zjednoczone.

Ten szczególny wypadek daje się interpretować w sposób następujący: Prosta f^* jest przeciwzwrotną każdej średnicy układu $(f, f^*, \varphi, \varphi^*)$. W przypadku zjednoczenia f i f^* średnice układu $(f, \dots \varphi^*)$ w płaszczyźnie prostopadłej do ω będą prostymi zerowymi układu $\omega (o, k)$. Płaszczyzny ogniskowe odpowiadające punktom dowolnej jednej z takich średnic będą prostopadłe do rzutni ω . Okażemy, że moment wzajemny skrętnika $(R, f \dots \varphi^*)$ oraz skrętnika $\omega_1 (R, o, k)$ będzie równy zeru. Moment skrętnika $\omega (R, o, k)$ względem tej średnicy, jako swojej prostej zerowej będzie równy zeru. Płaszczyzna zaś pary sił, odpowiadającej tej średnicy jest prostopadła do ω a więc jest równoległa do osi o . Moment tej pary względem siły R skrętnika będzie równy zeru.

A więc, jeżeli układ sił wzgl. odpowiadający mu układ zerowy znajduje się w inwolucji z układem odniesienia, to schodzi się on z układem sprzężonym. Z wyznaczających go czterech elementów zarówno proste jak i punkty są zjednoczone.

§ 4. ZAGADNIENIA ELEMENTARNE ZE STATYKI I KINEMATYKI. PRZYKŁADY.

We wszystkich tych zagadnieniach niech będzie nam dany układ zerowy $\omega (o, k)$ zapożyczony z układu odniesienia, środka O i koła parametrycznego k .

A) Zagadnienie ze statyki.

Zadanie 1) Siłę R rozłożyć na dwie siły, z których jedna P_1 jest równoległa do danej prostej b a druga P_2 jest prostopadła do siły R . (Rys. 42).

Niech będzie dana prosta (a', a'', S, S^*) jako linia działania siły R , przeciwzwrotna b'' wyznaczająca kierunek pierwszej składowej P_1 oraz rzut siły R na rzutnię ω równy R' .

W tym zagadnieniu wygodniej nam będzie korzystać z przeciwzwrotu R'' siły R . Siły R P_1 i P_2 leżą w jednej płaszczyźnie i przechodzą przez jeden punkt; ich przeciwzwrotny przejdą również przez jeden punkt. Przeciwzwrot P_2'' siły P_2 , prostopadłej do R , przejdzie przez

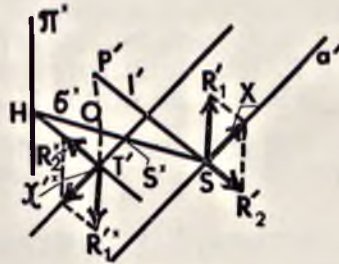
przeciwbiegun N przeciwrzutu a'^* względem koła parametrycznego, oraz przez punkt przecięcia Q'^* przeciwrzutów a' i b' . Rozkładając przeciwrzut $R'^* = -R'$ w kierunkach b'^* i NQ'^* , otrzymamy przeciwrzuty P'_1^* i P'_2^* szukanych składowych. Same zaś składowe np. P_1 znajdziemy ze wzoru

$$P_1 = -P'_1^* / \cos \vartheta = -P'_1^* \sqrt{1 + \frac{d^*}{k}}$$

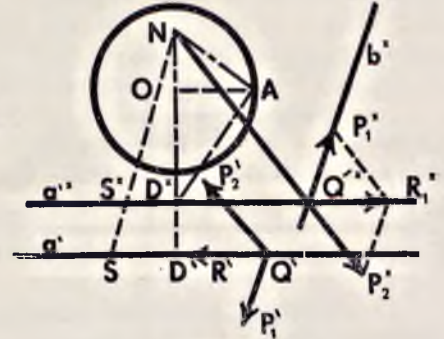
gdzie d^* jest odległością przeciwrzutu P'_1^* od środka O :

Zadanie 2) Siłę R rozłożyć na dwie składowe; jedną R_1 leżącą na rzutni ω a drugą R_2 przechodzącą przez punkt $(P' \pi^*)$. (Rys. 43).

Niech będzie dana siła R za pomocą jej rzutu X na ω wzdłuż prostej $(o_1' a'^*, S, S^*)$ oraz punkt P , dany przez rzut P' i przeciwślad π^* . Zgodnie z warunkami zadania rozkładamy siłę R na dwa kierunki: R_2 wzdłuż prostej $SP = l$ łączącej ślad S siły R z P i R_1 wzdłuż śladu płaszczyzny zawierającej prostą a i punkt P .



Rys. 43.



Rys. 42.

W tym zagadnieniu również będzie wygodniej korzystać z przeciwrzutów sił, niżeli z samych rzutów. Przeciwrzut l'^* prostej $PS \equiv l$ będzie przecięciem płaszczyzn ogniskowych punktów P i S . Punkt S leży na ω przeto przeciwślad σ^* jego płaszczyzny ogniskowej przechodzi przez O i S . Przez punkt przecięcia H^* przeciwśladów π^* i σ^* przechodzi przeciwrzut l'^* . Przeciwrzut śladu płaszczyzny przez R i P przechodzi przez środek O i punkt przecięcia a' i l'^* . Łącząc więc punkt przecięcia prostych a' i l'^* z O otrzymamy kierunek przeciwrzutu drugiej składowej R'_1^* . Pozostaje nam tylko rozłożyć przeciwrzut X'^* siły w kierunkach l'^* i s'^* .

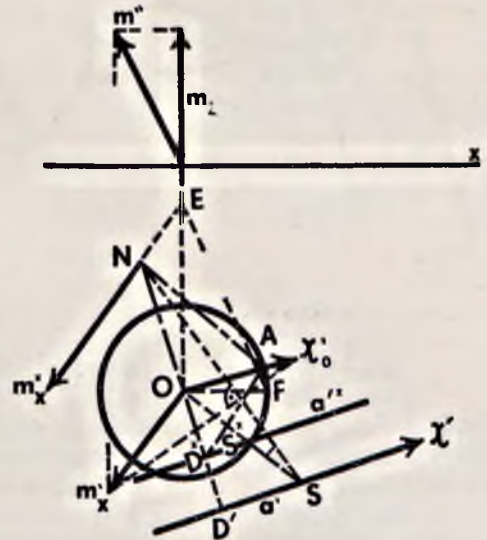
Zadanie 3. Wyznaczyć moment siły R wzdłuż prostej (a', a'^*, S, S^*) względem dowolnego punktu.

Momenty siły R , względem punktów prostej równoległej do siły, są równe pomiędzy sobą. Możemy więc zamiast momentu siły względem dowolnego punktu, wyznaczyć moment wzgl. śladu prostej równoległej do R , przez ten punkt przechodzącej.

a) Niech więc będzie dany rzut X' siły R wzdłuż prostej (a, a'^*, S, S^*) . Wyznaczyć moment M tej siły względem środka O .

Moment siły R jest do niej prostopadły, przeto jego przeciwrzut M'^* przejdzie przez przeciwbiegun N prostej a'^* względem koła parametrycznego i będzie prostopadłym do prostej OS , jako do śladu płaszczyzny zawierającej punkt O i siłę R . Rzut M'_x wektora momentu przejdzie przez punkt O . (Rys. 44).

Wyznamy wykreślnie wielkość tego momentu w postaci odcinka $m = \frac{M}{k}$. Ten stosunek będziemy nazywać *momentem zredukowanym* lub *wprost momentem*. Niech składowe tego momentu $m = \frac{M}{k}$ na rzutnię ω oraz w kierunku prostopadłym do niej będą równe: $m'_x = \frac{M'_x}{k}$ i $m_z = \frac{M_z}{k}$. Pierwsza z nich będzie wywołana przez moment składowej Z , siły R , prostopadłej do rzutni, a druga przez moment rzutu X siły względem punktu O . Każda z nich będzie równą



Rys. 44.

$$a) \quad m'_x = \frac{M'_x}{k} = \frac{Z \cdot OS}{k} = \frac{X' \cdot OS \cdot OD^*}{k^2} = \frac{X'^* \cdot OS}{ON}$$

$$b) \quad m_z = \frac{M_z}{k} = \frac{X \cdot OD}{k}$$

gdzie OD i OD^* są odległościami prostych a' i a'^* od środka O .

Odcinek $m'_x = \frac{X'^* \cdot OS}{ON}$ możemy otrzymać w następujący sposób. Na równoległej do a'

przez O odkładamy odcinek $OX'_0 = X'$ i łączymy ślad S z przeciwbiegunem N . Przez punkt X'_0 prowadzimy prostopadłą $X'_0m'_x$ do SN ($X'_0m'_x \perp SN$). Ta ostatnia odetnie nam na M'_x odcinek Om'_x równy momentowi m'_x . Prawdliwość tej konstrukcji wynika z podobieństwa trójkątów $OX'_0m'_x \sim ONS$ (Federhofer).

Składową otrzymamy, budując wzór $m_z = \frac{X \cdot OD}{k}$.

Można również wyznaczyć kierunek drugiego rzutu momentu zredukowanego m'' (oraz jego wielkość z m'_x) i kolejno wyznaczyć składową pionową m_z . Przeprowadzamy promień OF koła k równoległe do osi rzutów i znajdujemy punkt przecięcia E przeciw rzutu m_x'' z promieniem prostopadłym do OF . Prosta FE będzie równoległą do m'' (por. rys. 19 str. 15).

b) Wyznaczyć moment siły R względem dowolnego punktu T na rzutni ω .

Analogicznie jak i przypadku a) przeciw rzut m''_{xT} przejdzie przez przeciwbiegun N prostej a i będzie prostopadły do ST , jako do śladu płaszczyzny zawierającej siłę R i punkt T . m'_{xT} przejdzie przez T (rys. 45a). Wielkość momentu m'_{xT} wyznaczy się ze wzoru

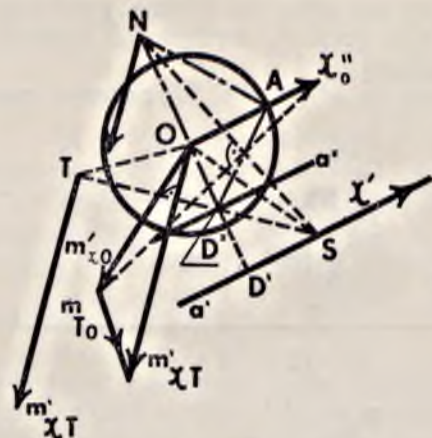
$$m'_{xT} = \frac{Z \cdot ST}{k} = \frac{X'' \cdot OD \cdot ST}{k^2} = \frac{X'' \cdot ST}{ON}$$

Rzut m'_{xT} można również wyznaczyć w następujący sposób. (Federhofer) (rys. 45) Skorzystajmy z następującego wzoru

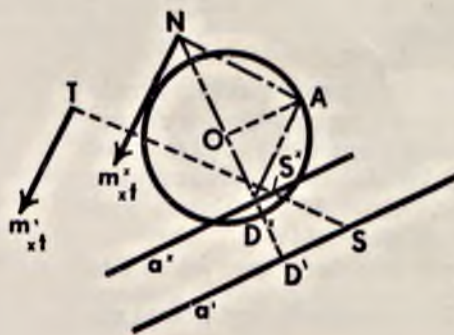
$$c) m_T = \overline{TS} \cdot \overline{R} = \overline{OS} \cdot \overline{R} - \overline{OT} \cdot \overline{R}$$

gdzie m_T jest iloczynem wektorowym promienia wodzącego przez siłę.

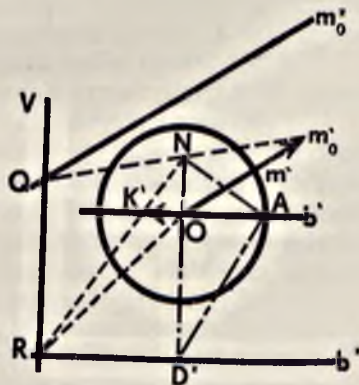
Wzór ten wyraża, że moment siły względem dowolnego punktu T , równa się różnicy geometrycznej momentów tejże siły, względem punktu odniesienia O i momentem siły przyłożonej w pierwszym punkcie T , względem punktu odniesienia. Wyznaczamy więc moment siły (rys. 45) względem środka O , podług poprzedniego rysunku, i przez końcowy punkt m'_{xO} przeprowadzamy prostopadłą do OT oraz prostopadłą przez O do ST . Odcinek zawarty pomiędzy O z punktem przecięcia m_{xT} tych dwóch prostopadłych wyznaczy nam wielkość momentu m'_{xT} . Oczywiście rzut i przeciw rzut tego momentu przechodzą przez T i N .



Rys. 45.



Rys. 45a.



Rys. 46.

Zadanie 4. Wyznaczyć moment m_b siły R względem dowolnej osi.

Niech będzie dana siła R jej rzut R' , na prostej (a', a'', S, S') oraz prosta b', b'' przechodząca przez środek O układu $\omega(o, k)$. Korzystając z konstrukcji zad. 3 możemy przyjąć, że rzut momentu siły R i jego przeciw rzut względem punktu O został już wyznaczony. Niech więc te rzuty będą równe m'_0 i m''_0 . Dla wyznaczenia momentu względem osi należy z końca wektora m_0 opuścić prostopadłą na b (rys. 46). W tym celu przez m_0 przeprowadzamy płaszczyzną prostopadłą do prostej b . Przeciw rzut N tej płaszczyzny będzie przeciwbiegunem prostej b'' , a ślad tej płaszczyzny v przejdzie przez punkt przecięcia Q prostej m'_0N z prostą m''_0 prostopadłe do b . Punkt przecięcia prostej $b' b''$, z płaszczyzną wyznaczy, jako odcinek OK' , rzut szukanego momentu M'_0 . Otrzymamy ten punkt K' , łącząc punkt R z N , na rzucie b' .

Zadanie 5. Mając dane 4 elementy skrętnika $(f, f'', \varphi, \varphi'')$ oraz wielkość siły X wzdłuż f , przyjmując środek O układu $\omega(o, k)$ jako środek redukcji i wyznaczyć siłę i moment wywołane przez skrętnik w tym punkcie.

Składową Z prostopadłą do ω przez punkt φ otrzymamy ze wzoru

$$Z = \frac{X'' \cdot OH''}{k} \quad (\text{wzór 2a str. 19})$$

Prosta f^* jest przeciwzwrotnym średnicy skrętnika; siła, przechodząca przez O , będzie równa $\bar{R} = \bar{X} + \bar{Z}$ i wykreślnie wyznaczalna przez rzut X (przez O) i przeciwzwrotną wzdłuż f^* . Moment tego skrętnika w punkcie redukcji powstał przez przesunięcie równoległe sił X i Z do punktu O .

Składowa m_x' spowodowana przez przesunięcie $Z\varphi$ do O' będzie prostopadła do $O\varphi$ i równa

$$m_x' = \frac{Z \cdot O\varphi}{k} = \frac{-XOH^* \cdot O\varphi}{k^2} = \frac{-XO\varphi}{ON}$$

Dla wykreślnego wyznaczenia odcinka m_x' por. zad. 3.

Składowa m_z prostopadła do rzutni powstała przez równoległe przesunięcia siły X do punktu O będzie więc równą.

$$m_z = \frac{M}{k} = \frac{X \cdot OH}{k}$$

Mając te dwie składowe m_x' i m_z , i wiedząc, że m przechodzi przez O , możemy z łatwością wyznaczyć położenie przeciwzwrotu m''_x wzgl. kąta, który tworzy moment wypadkowy $\bar{m} = \bar{m}_x + \bar{m}_z$ z prostą prostopadłą do ω .

B. Szybkości i przyspieszenia układu w ruchu kulistym.

a) Szybkości punktów układu sztywnego. W t. zw. ruchu kulistym jeden punkt Q układu pozostaje w spoczynku. Wszystkie zaś inne punkty układu obracają się w chwili t około pewnej osi chwilowej q z szybkością kątową \bar{w} , którą przedstawiamy sobie jako wektor związany z prostą q . W następnej chwili $(t + dt)$ układ obraca się dokoła nieskończenie bliskiej osi q_1 , tworzącej z pierwszą kąt $d\sigma$, z szybkością $\bar{w} + d\bar{w}$. Szybkość liniową v_A dowolnego punktu A układu można rozważać, jako moment szybkości kątowej względem tegoż punktu. Możemy to wyrazić wzorem w postaci iloczynu geometrycznego.

$$1) \quad \bar{v}_A = \bar{w} \times \bar{r}_A$$

gdzie \bar{r}_A jest wektorem łączącym dowolny punkt na osi z A .

Niech Ω będzie wartością liczbową szybkości kątowej \bar{w} . Stosunek $\frac{\bar{w}}{\Omega} = \bar{u}$ będzie *wektorem jednostkowym* szybkości kątowej. Ten stosunek będziemy nazywać *zredukowaną szybkością kątową*. Analogicznie nazwiemy stosunek $\frac{v_A}{\Omega} = \bar{f}_A$ *zredukowaną szybkością liniową* punktu A . Otrzymamy więc, dzieląc obydwie strony równania przez Ω

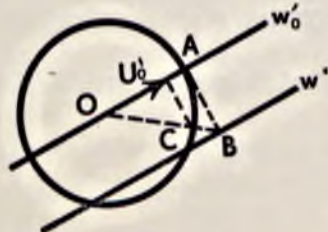
$$2) \quad \bar{f}_A = \bar{u} \times \bar{r}_A$$

Przyjmując parametr k układu $\omega(o, k)$ za jednostkę długości szybkości kątowej, możemy wykreślić jej rzut mając dany jej przeciwzwrotny w'' w następujący sposób.

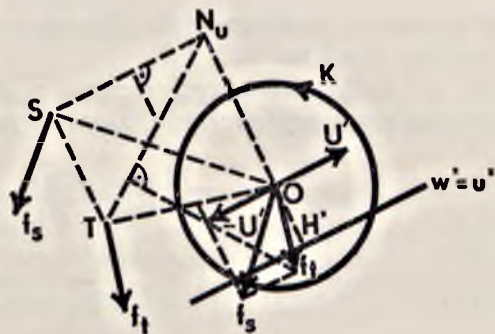
Przez środek O koła k przeprowadzamy w_0' równoległe do w'' (rys. 47). W jego punkcie przecięcia A z kołem, prowadzimy styczną AB aż do przeciwzwrotu w'' . Prosta OB posiada z kołem wspólny punkt C . Rzut promienia OC na w_0' wyznaczy nam rzut u_0' wektora jednostkowego szybkości kątowej. (Dowód, Kąt AOB jest kątem pomiędzy wektorem \bar{w} i rzutnią ω).

Mając dany rzut u_0' zredukowanej szybkości kątowej, możemy teraz wyznaczyć zredukowaną szybkość liniową dowolnego punktu A układu.

Niech więc będzie dany środek układu O , jako środek ruchu kulistego, a u' i u'' niech będą rzutem i przeciwzwrotnem zredukowanej szybkości kątowej. Szybkości liniowe wszystkich punktów leżących na prostej równoległej do osi obrotu są równe pomiędzy sobą. Wyznaczamy więc szybkość liniową śladu S prostej przechodzącej przez A i równoległej do osi obrotu. Moment wektora $(-u)$ przyłożonego w S względem punktu O wyznaczy nam, co do wielkości, szybkość zredukowaną punktu S . Oczywiście jednozwrrotny wektor zredukowany szybkości liniowej f_A wzgl. f_S tych punktów będzie przyłożony w A wzgl. w S (rys. 48; por. rys. 45 przy wyznaczaniu momentu).



Rys. 47.



Rys. 48.

Wielkość f'_s wyznaczamy ze wzoru

$$3) f'_s = -\frac{u'OS}{ON}$$

gdzie N jest przeciwbiegunem przeciwzrutu u'^* względem koła.

Analogicznie dla śladu T (wzgl. dla wszystkich punktów prostej przez T równoległej do osi) wartość dla f'_T będzie

$$3a) f'_T = \frac{-u \cdot OT}{ON} \quad \text{skąd}$$

$$f'_s : f'_T = OS : OT$$

Pomiędzy (śladami) rzutami ukośnymi punktów układu w kierunku osi a końcami ich wektorów szybkości liniowych, sprowadzonymi do jednego punktu, zachodzi pewna geometryczna zależność. Nazywając zespół tych śladów S, T, \dots figurą punktów, a zespół końcowych punktów rzutów szybkości sprowadzonych do jednego punktu figurą albo planem szybkości, otrzymamy następujące twierdzenie (analogia z ruchem płaskim). *Figura punktów i plan szybkości tworzą figury podobne, obrócone do siebie o 90°* (Federhofer).

Mając więc daną szybkość liniową śladu S , wyznaczamy z łatwością zredukowaną szybkość liniową dowolnego śladu T . W szczególności, uważając przeciwbiegun N , jako ślad, otrzymamy $f'_N = -u$ (ze wzoru 3; $ON = OS$).

b) **Przyśpieszenie w ruchu kulistym.** Niech układ sztywny o nieruchomym punkcie O obraca się w czasie t , dokoła osi q z szybkością kątową \bar{w} , a w następnej chwili $t + dt$ dokoła sąsiedniej nieskończenie bliskiej osi q_1 z szybkością $\bar{w}_1 = \bar{w} + d\bar{w}$. Kąt pomiędzy tymi osiami niech będzie $d\sigma$. Oznaczmy wartość liczbową tych szybkości kątowych w czasie t przez Ω , a w czasie $t + dt$ przez $\Omega + d\Omega$. Geometryczny przyrost szybkości kątowych będzie równy

$$d\bar{w} = \bar{w}_1 - \bar{w}$$

Ten przyrost można rozłożyć na dwie składowe: jedną w kierunku osi i równą liczbowo $d\Omega$ i drugą prostopadłe do osi i równą $\Omega d\sigma$; liczbowa wartość wypadkowego przyrostu szybkości będzie równą $\sqrt{\Omega^2 d\sigma^2 + d\Omega^2}$ i będzie skierowana wzdłuż $d\bar{w}$ (rys. 49).

Rozkładając wektor \bar{w}_1 szybkości kątowej na \bar{w} i $d\bar{w}$, możemy przyjąć, że obrót w obydwóch chwilach t. j. w czasie t i $t + dt$ odbywa się naokoło osi q z tą samą szybkością kątową Ω , do czego dochodzi jeszcze obrót w czasie $t + dt$ dokoła osi l , przechodzącej przez O , równoległej do wektora $d\bar{w}$, z nieskończenie małą szybkością kątową $\sqrt{d\Omega^2 + \Omega^2 d\sigma}$. Obrót dokoła q w tych obydwóch chwilach, z jednakową szybkością kątową Ω , wywołuje t. zw. przyśpieszenie normalne \bar{n}_A punktu A równe

$$4) \bar{n}_A = \Omega^2 r_A$$

gdzie r_A jest odległością punktu A do osi q . Natomiast obrót w chwili $t + dt$ wywołuje t. zw. **przyśpieszenie kątowe do koła osi l** równe

$$5) \bar{l}_A = r'_A \sqrt{\frac{d\Omega^2}{dt^2} + \Omega^2 \frac{d\sigma^2}{dt^2}}$$

skierowane prostopadłe do płaszczyzny, zawierającej oś l i punkt A , przyczem r'_A jest odległością punktu A od osi l .

Całkowite przyśpieszenie \bar{p}_A będzie sumą geometryczną tych dwóch przyśpieszeń. Dla wykreślnego wyznaczenia \bar{p}_A skorzystamy ze wzoru

$$6) \bar{p}_A = \frac{d\bar{v}_A}{dt} = \frac{d(\bar{w} \times \bar{r}_A)}{dt} = \frac{\bar{w} \times d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{w}}{dt} \times \bar{r}_A$$

lub

$$6a) \bar{p}_A = \bar{w}_A \times [\bar{w} \times \bar{r}_A] + \frac{d\bar{w}}{dt} \times \bar{r}_A$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie jest przyśpieszeniem normalnym \bar{n}_A , a drugi przyśpieszeniem kątowym \bar{l}_A .

W celu przedstawienia przyśpieszeń jako odcinków, wprowadzamy analogicznie, jak i dla szybkości, pojęcie przyspieszenia zredukowanego. Będą to wektory jednostkowe przyspieszeń.

Będziemy nazywać stosunki $\frac{\bar{p}_A}{\Omega^2} = \bar{p}_{rA} \frac{\bar{l}_A}{\Omega^2} = \bar{t}_{rA}$ i $\frac{\bar{n}_A}{\Omega^2} = \bar{n}_{rA}$ odpowiednio zredukowanym przyspieszeniem całkowitym, kątowym i normalnym.

Dzieląc więc wszystkie wyrazy wzoru 6a) przez Ω^2 otrzymamy

$$\overline{p_A} = \frac{\overline{w}}{\Omega} \times \left[\frac{\overline{w}}{\Omega} \times \overline{r_A} \right] + \frac{1}{\Omega^2} \frac{d\overline{w}}{dt} \times \overline{r_A}$$

lub

$$6b) \overline{p_{rA}} = \overline{u} \times [\overline{u} \times \overline{r_A}] + \overline{l_{rA}} \times \overline{r'_A}$$

Zadanie. Wyznaczyć wykreślnie przyspieszenie dowolnego punktu A układu, jeżeli dane są: szybkość i przyspieszenie kątowe układu w danej chwili.

Niech środek O będzie środkiem ruchu kulistego. Za jednostkę długości przyjmujemy parametr k , i wyznaczamy rzuty u' i l' zredukowanej szybkości i przyspieszenia kąтового. (Por. rys. 47). Niech będą u^* i l^* ich przeciwzrzutami. Chcąc wyznaczyć dla dowolnego punktu A układu składowe t_{rA} i n_{rA} przyspieszenia całkowitego p_{rA} , przeprowadzamy proste a_u i a_l równoległe do osi szybkości kątowej i do osi przyspieszenia kąowego i wyznaczamy ich ślady. Niech S_u i S_l będą śladami tych dwóch prostych na ω . Wyznaczamy dla tych dwóch śladów odpowiednio zredukowane przyspieszenia $n_{rA} = n_{su}$ i $t_{rA} = t_{sl}$. Całkowite przyspieszenie p_{rA} punktu A będzie równe

$$\overline{p_{rA}} = \overline{n_{su}} + \overline{t_{sl}}$$

Prosta łącząca ślady S_u i S_l będzie śladem płaszczyzny równoległej do wektorów u i l , będzie ona więc równoległą do prostej przechodzącej przez O i przez punkt przecięcia R^* przeciwzrzutów u'^* i l'^* . Punkt R^* jest przeciwzrzutem płaszczyzny zawierającej wektory u i l .

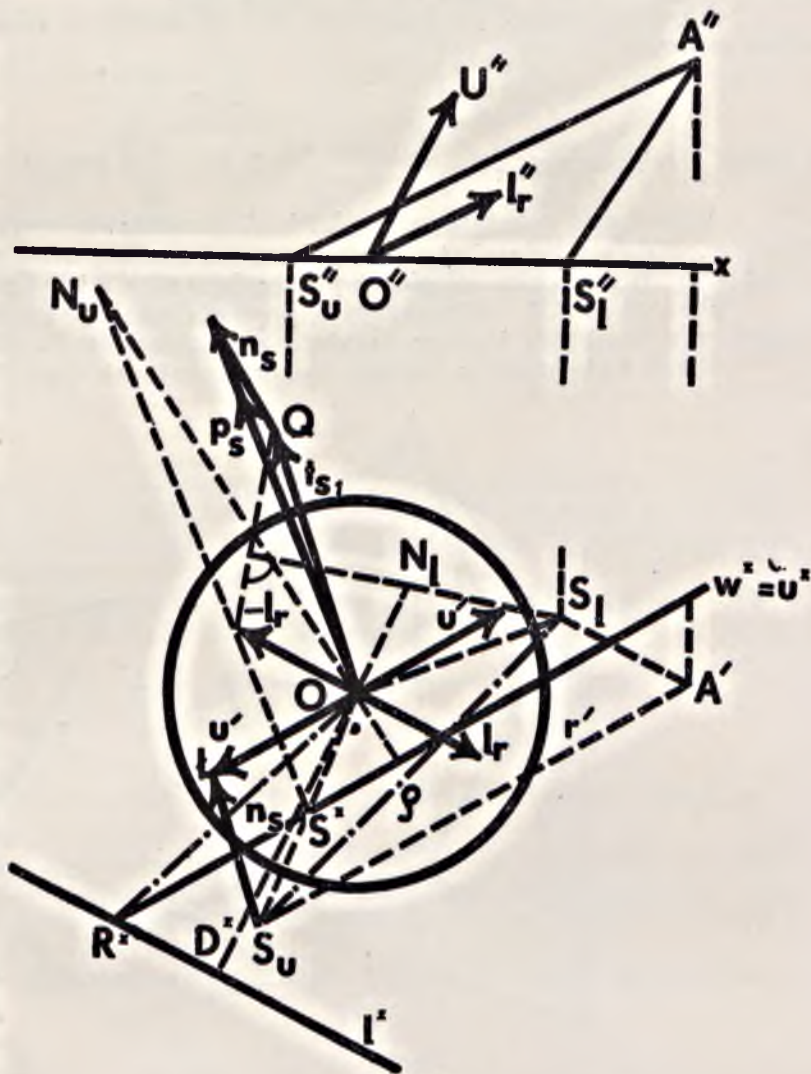
Składowa normalna $n_{su} = n_{rA}$ przyspieszenia jest równą

$$\overline{n_{rA}} = \overline{u} \times [\overline{u} \times \overline{r_A}]$$

ponieważ \overline{u} jest wektorem jednostkowym, przeto przyspieszenie n_{rA} będzie równe odległości r_A punktu A (wzgl. S_u) od osi u , i skierowane do tej osi. Niech więc r' będzie rzutem prostej AS ; $r^* \equiv u^*$ jej przeciwzrzutem, S^* przeciwśladem i wreszcie N_n jej przeciwbiegunem względem koła k . Dla otrzymania tej odległości łączymy N_u z S^* i przeprowadzamy $S_u R \parallel S^* N_u$. Odcinek tej równoległej pomiędzy S_u i u' wyznaczy nam zredukowane przyspieszenie n_{su} .

Przyspieszenie kątowe $t_{rA} = t_{sl} = \overline{l_{rk}} \times \overline{r'_A}$ wyznaczamy analogicznie jak i szybkość liniową $f_A = \overline{u} \times \overline{r_A}$. Niech N_l będzie przeciwbiegunem przeciwzrutu l_A^* . Prowadzimy prostopadłą OQ do $S_l O$, oraz łączymy S_l z N_l . Przez koniec wektora $-l'_r$ przeprowadzamy prostopadłą do $S_l N_l$. Punkt przecięcia Q , tej prostopadłej z OQ wyznaczy nam odcinek równy $t'_{rA} = \overline{l_A} \times \overline{r'_A}$. Geometryczna suma $t_{rA} + n_{rA}$ da nam całkowite przyspieszenie p_A punktu A .

Na rys. 50 przyjęto drugą płaszczyznę rzutów i dla lepszej orientacji wyznaczono drugie rzuty u'' i l'' obydwóch osi oraz drugi rzut A'' punktu A .



Rys. 50.

§ 5) ZASTOSOWANIE POPRZEDNICH METOD PRZY WYZNACZENIU WYSIŁKÓW W KRATOWNICACH.

a) **Wstęp.** Twierdzenie **Mayor'a**. Układ sił posiadający wspólny punkt przyłożenia, będzie w równowadze, jeżeli przeciwzruty tych sił względem dowolnego układu zerowego będą również w równowadze.

Niech będzie dany układ sił $P_1 \dots P_n$, przechodzących przez jeden punkt i znajdujących się w równowadze. Przyjmijmy dowolny układ zerowy $\omega(o, k)$ z rzutnią ω jako płaszczyzną poziomą. Każdą z sił P_i rozkładamy w kierunku jej rzutu P_i' oraz w kierunku pionowym Z_i . Układ sił będzie oczywiście w równowadze, jeżeli zarówno suma rzutów poziomych $\Sigma P_i'$ tych sił, jak i składowych pionowych ΣZ_i , (każde wzięte oddzielnie) będą w równowadze. Przeciwrzuty P_i^* tych sił względem układu $\omega(o, k)$ są, jak wiadomo, równe siłom P_i' i przeciwwrotnie równoległe. Jeżeli więc przeciwrzuty ΣP_i^* się równoważą, to i rzuty $\Sigma P_i'$ będą również w równowadze. Okażmy, że wtedy i algebraiczna suma sił pionowych ΣZ przechodzących jeden punkt będzie równą zeru.

Niech odległość przeciwrzutu P_i^* od środka O równa się h_i^* ; składowa Z_i wyrazi się wtedy wzorem

$$Z_i = \frac{P_i^* h_i^*}{k}$$

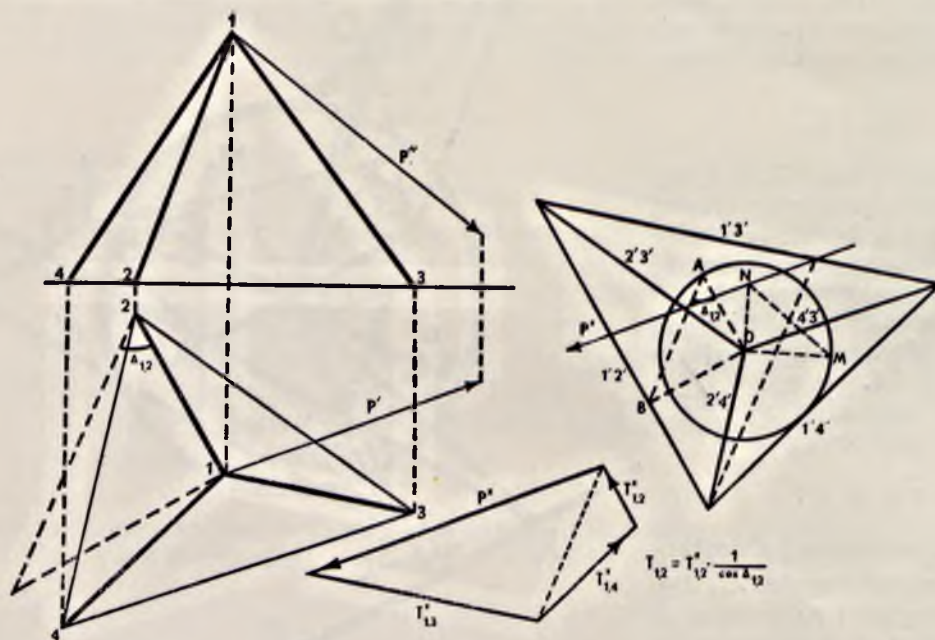
a suma algebraiczna

$$Z = \Sigma Z_i = \frac{1}{k} \Sigma P_i^* h_i^* .$$

Wyraz pod znakiem sumy $\Sigma P_i^* h_i^*$, przedstawia nam moment układu przeciwrzutów sił $P_1 \dots, P_n^*$ względem O . Moment ten równa się zeru w przypadku, jeżeli przeciwrzuty się równoważą. Wypadkowa sił pionowych będzie więc wtedy równa zeru.

Przykład 1. Wyznaczyć naprężenia sztab w trójnogu, opartym na płaszczyźnie poziomej, w wierzchołku którego przyłożona została siła P . (Paschoud).

Niech będą dane w rzutach dwuprostokątnych (rys. 51) trzy sztaby (1, 2) (1, 3) i (1, 4)



Rys 51.

trójnoga oraz siła P przyłożona w wierzchołku 1. Przyjmujemy dowolny układ zerowy $\omega(o, k)$, w którym ω schodzi się z płaszczyzną podstawy. Wykreślamy przeciwrzuty $(1^* 2^*) (1^* 3^*) (1^* 4^*)$ sztab (1 2) (1 3) (1 4) oraz przeciwrzut P^* siły P . W tym celu wyznaczamy kąt ϑ_{12} , który tworzy sztaba (1 2) z ω i na promieniu $OA = k$ i równoległym do pierwszego rzutu (1 2) budujemy trójkąt $OAB \sim 1' (1) 2'$. Przez B przechodzi przeciwrzut $(1^* 2^*)$. Pozostałe przeciwrzuty budujemy w podobny sposób, lub też za pomocą t. zw. figury odwrotnej. Przez O przeprowadzamy przeciwrzuty $(2^* 3^*) (3^* 4^*) (4^* 2^*)$ równoległe do prostych (2 3), (3 4) i (4 2) i pomiędzy tymi przeciwrzutami pomieszczamy pozostałe przeciwrzuty $(1^* 3^*)$ i $(1^* 4^*)$. Wyznaczamy nadto przeciwrzut P^* siły P . (Dobrze jest sprawdzić dokładność wykreślenia przeciwrzutów metodą Federhofera rys. 19 str. 15). *)

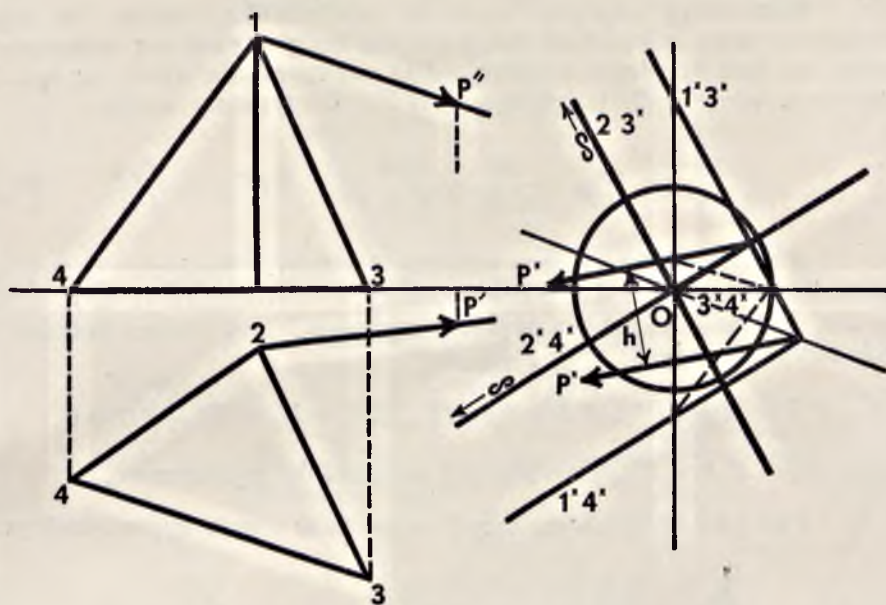
Mając wyznaczone 3 przeciwrzuty sztab, oraz przeciwrzut siły, rozkładamy ten ostatni w kierunkach $(1^* 2^*)$, $(1^* 3^*)$ i $(1^* 4^*)$. Otrzymamy wtedy przeciwrzuty napięć $T_{1,2}^* T_{1,3}^* T_{1,4}^*$. Wielkość samych napięć np. $T_{1,2}$ otrzymamy ze wzoru

$$T_{1,2} = \frac{T_{1,2}^*}{\cos \vartheta_{1,2}} = T_{1,2}^* \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta_{1,2}} = T_{1,2}^* \sqrt{1 + \frac{d_{1,2}^{*2}}{k^2}}$$

) Przez końcowy punkt M poziomej średnicy koła parametrycznego przeprowadzamy prostą równoległą do drugiego rzutu jednej ze sztab lub sił npd. P'' , aż do punktu przecięcia N ze średnicą pionową. Przez ten ostatni przejdzie przeciwrzut P''^ siły równoległy do P' .

Pewną trudność mogą stanowić przypadki, w których jedna ze sztab lub z sił, jest prostopadła do rzutni.

Przykład 1a. W wierzchołku 1 trójkąta 1 (2, 3, 4) w którym jedna sztaba 1 2 jest prostopadła do rzutni ω , działa siła P . Wyznaczyć napięcia sztab (rys. 52-gi). Niech trójkąt wraz z działającą w wierzchołku siłą, będzie nam dany za pomocą rzutów dwuprostokątnych. Wyznamy przeciwrzuty sztab i siły w układzie ω (ok). Przeciwrzuty ($2^* 3^*$), ($3^* 4^*$) i ($4^* 2^*$) będą przechodzić przez środek O , równoległe do odpowiednich ich pierwszych rzutów. Przeciwrzuty ($1^* 3^*$) i ($1^* 4^*$) wyznaczamy za pomocą jednej ze znanych nam metod. Punkt przecięcia tych przeciwrzutów leży na przeciwrzucie ($3^* 4^*$). Natomiast przeciwrzut ($1^* 2^*$) będzie prostą niewłaściwą. Figura odwrotna rzutu poziomego, posiada jeden bok niewłaściwy. Wyznamy ponadto przeciwrzut P^* siły P . Ten ostatni należy rozłożyć na 3 składowe, z których jedna będzie skierowana wzdłuż prostej niewłaściwej. W tym celu przenosimy P^* równoległe do punktu przecięcia ($1^* 4^*$) i ($1^* 3^*$) i rozkładamy ją w tych dwóch kierunkach.



Rys. 52.

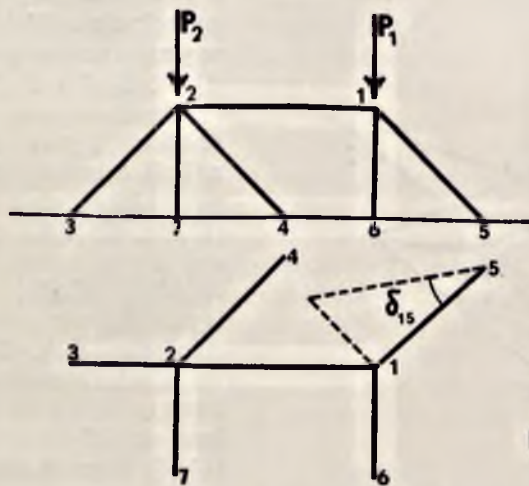
Składową w kierunku (1, 2), prostopadłą do rzutni otrzymamy z momentu $M = Ph$, wywołanego przez równoległe przesunięcie siły P . Wielkość składowej $T_{1,2}$ otrzymamy ze wzoru

$$T_{1,2} = \frac{M}{k} = \frac{Ph}{k}$$

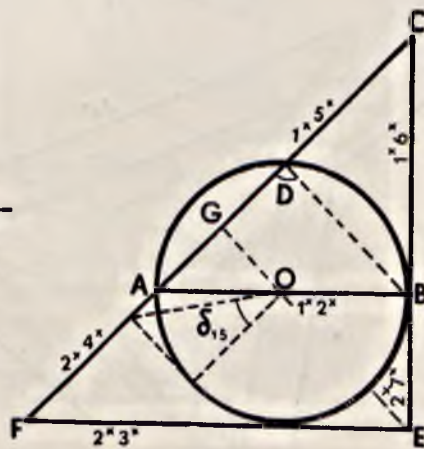
Przykład 2. Wyznaczyć naprężenie sztab w trapezie (rys. 53 i 53a). Siły nań działające są prostopadłe do rzutni ω (Paschoud).

Wyznamy przeciwrzuty (figurę odwrotną) rzutu poziomego. W tym celu w kole parametrycznym o promieniu k przeprowadzamy średnicę poziomą AB (równoległą do osi rzutów x). Z tą średnicą zejdzie się przeciwrzut ($1^* 2^*$). Punkt przecięcia C przeciwrzutów ($1^* 5^*$) i ($1^* 6^*$) będzie leżał na prostej OC równoległej do $5 6$ (z rzutu poziomego).

W podobny sposób otrzymamy przeciwrzuty ($4^* 2^*$), ($3^* 2^*$) i ($2^* 7^*$) sztab schodzących się w wierzchołku 2 (rys. 53 i 53a).



Rys. 53.



Rys. 53a.

Przeciwrzuty P_1^* i P_2^* sił P_1 i P_2 , prostopadłych do rzutni ω , będą skierowane wzdłuż prostej niewłaściwej. Wywołują one momenty odpowiednio równe.

$$M_1 = P_1 k \quad M_2 = P_2 k$$

Rozważmy napięcia sztab w wierzchołku 1-szym. W figurze odwrotnej ABC , odpowiadającej temu wierzchołkowi, napięcia będą wywołane momentem $M_1 = P_1 k$ i będą proporcjonalne do boków tego trójkąta. Dla wyznaczenia tych napięć, bierzemy kolejno momenty, względem wierzchołków trójkąta ABC . Otrzymamy wtedy

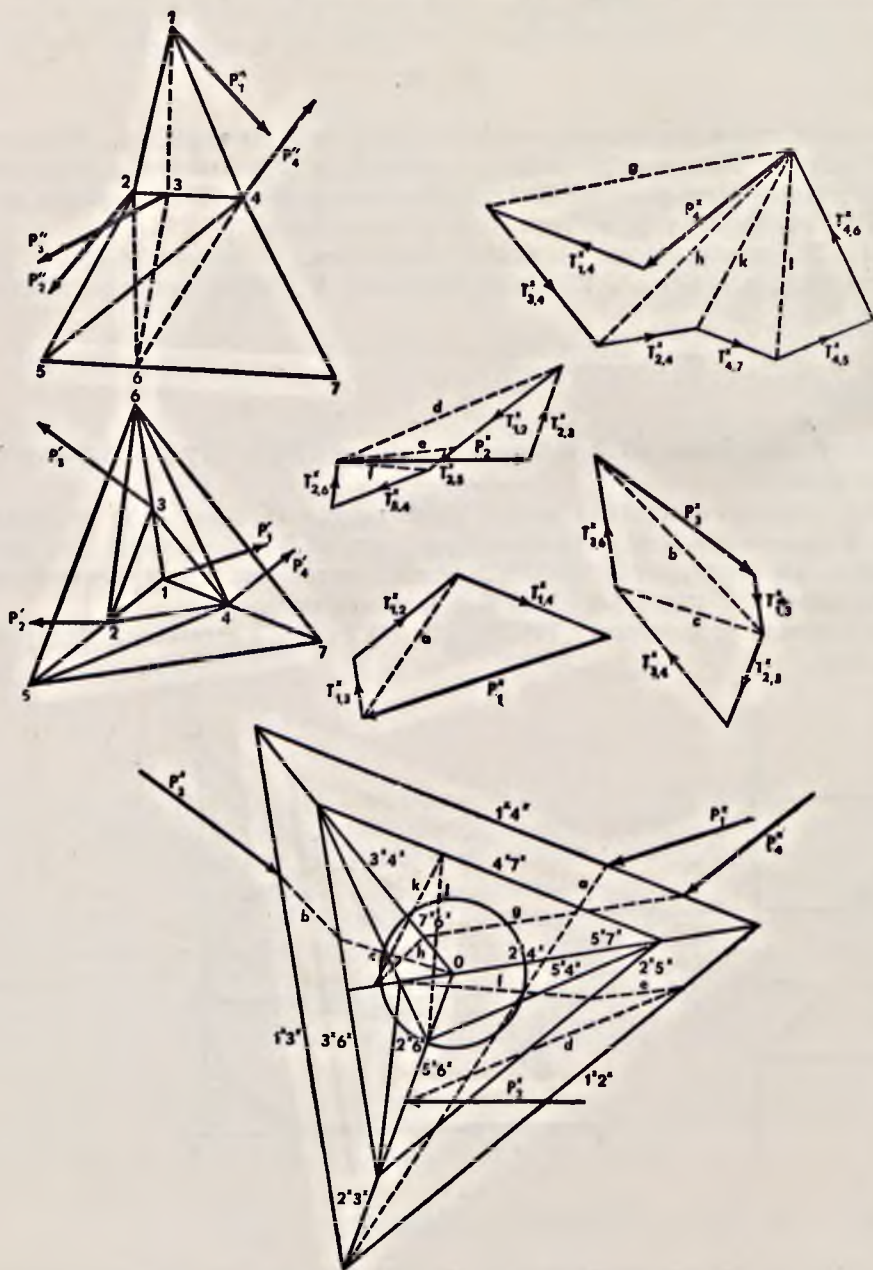
$$T_{1,2}^* = \frac{M}{CB} = \frac{P_1 k}{CB}; \quad T_{1,3}^* = \frac{P_1 k}{AB} \quad T_{1,5}^* = \frac{P_1 k}{BD}$$

Z wierzchołka 2-go wychodzą 4 sztaby. Napięcie jednej z nich $T_{1,2}^*$ jest nam znane. Napięcie pozostałych trzech otrzymamy z czworoboku $(1^* 2^*)$, $(2^* 7^*)$, $(2^* 3^*)$ i $(2^* 4^*)$ przeciw-rzutów, biorąc momenty napięć względem jego wierzchołków. Poszczególne równania dla tych momentów będą

$$T_{2,7}^* \cdot EF - M_2 - T_{1,2}^* BE = 0; \quad T_{2,3}^* EC - M_2 - T_{1,2}^* BC = 0, \quad T_{2,4}^* EG - M_2 - T_{1,2}^* BE = 0$$

gdzie $M_2 = P_2 k$ a $T_{1,2}^*$ zostało już poprzednio wyznaczone.

Przykład 3. Wyznaczyć napięcie w słupie kratowym (rys. 54₁ — 54₇). Niech będzie dany



słup prostokątny w rzutach dwuprostokątnych oraz obydwa rzuty sił P_1, P_2, P_3, P_4 działających w wierzchołkach (1), (2), (3) (4).

Przyjmując koło parametryczne o promieniu k wykreślamy figurę odwrotną rzutu poziomego słupa oraz przeciwrzuty $P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*$ sił (rys. 54₄).

W wierzchołku (1) przecinają się 3 sztaby (1,2), (1,3) i (1,4) i działa nam siła P_1 . Na fig. 4-ej wyznaczamy napięcia $T_{1,2}^*, T_{1,3}^*$ i $T_{1,4}^*$ tych sztab (Por. rys. 50 str. 30).

Przejdźmy do wierzchołka 3-go, w którym napięcie sztaby (1,3) zostało już poprzednio wyznaczone. Za pomocą linii łamanej (P_3^*, b i c) opierającej się na $(1,3^*)$ i $(3^*, 6^*)$ i przechodzącej przez punkt przecięcia $(3^*, 4^*)$ i $(2^*, 3^*)$ wyznaczamy napięcia $T_{3,2}^*, T_{3,4}^*$ i $T_{3,6}^*$ (rys. 54₅).

Analogicznie w wierzchołku 2-gim korzystamy z linii łamanej (P_2^*, d, e, f) opierającej się na $(2^*, 3^*)$, $(1^*, 2^*)$, $(2^*, 5^*)$ i przechodzącej przez punkt przecięcia $(2^*, 6^*)$ i $(2^*, 4^*)$, za pomocą (rys. 54₆) otrzymamy wtedy napięcia $T_{2,5}^*, T_{2,4}^*$ i $T_{2,6}^*$.

W wierzchołku 4-tym linia łamana (P_4^*, g, h, k i l) opierająca się $(1^* 4^*)$, $(3^* 4^*)$, $(2^* 4^*)$, $(4^* 7^*)$ i przechodząca przez punkt przecięcia się $(4^* 5^*)$ i $(4^* 6^*)$ pozwala nam (rys. 54₇) wyznaczyć napięcia

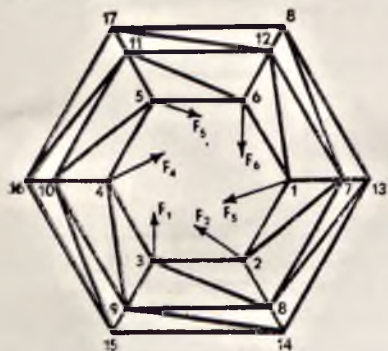
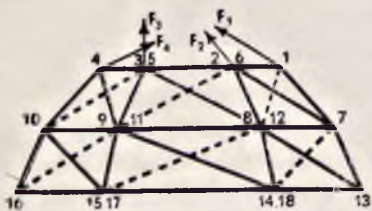
Rys. 54.

$$T_{4,7}^*, T_{4,5}^* \text{ i } T_{4,6}^*.$$

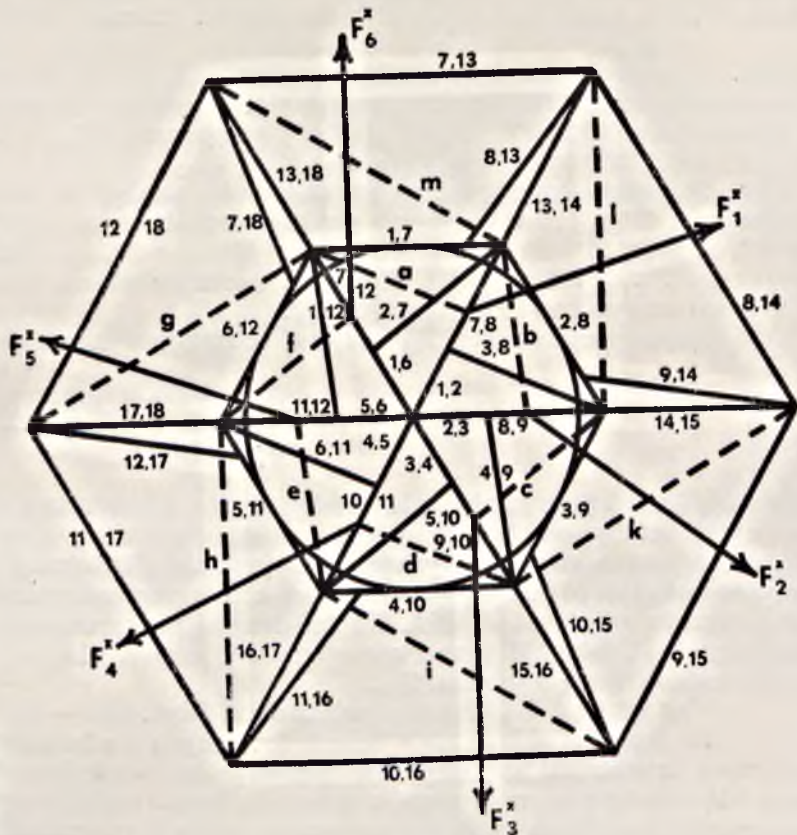
Przykład 4. Kopuła Schwedlera (Rys. 55a—d).

Kopuła ta jest przedstawiona za pomocą dwóch rzutów prostokątnych. W sześciu węzłach górnego pierścienia działają siły F_1, \dots, F_6 , wyznaczone przez podanie ich linii działania w obydwóch rzutach.

Rys. 55 a.



Rys. 55 b.



Rys. 55 c.

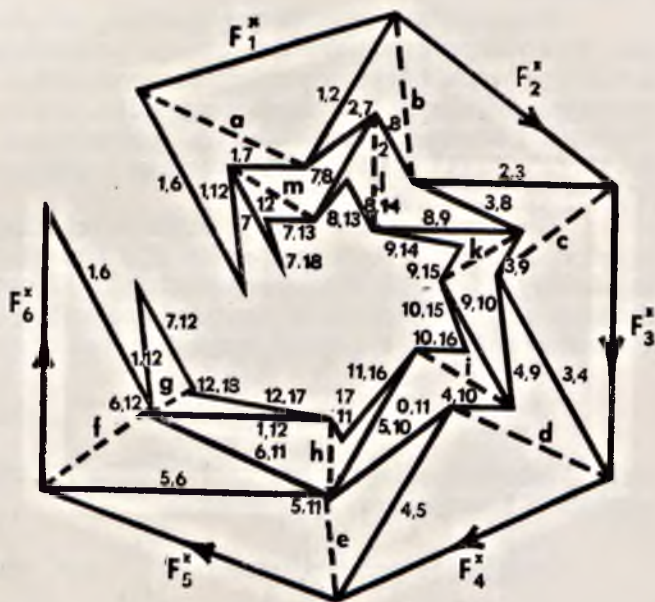
Za układ odniesienia przyjmujemy układ zerowy ω (o, k), gdzie ω jest rzutnią poziomą a k promieniem koła parametrycznego. Dla wyznaczenia napięć w sztabach budujemy figurę odwrotną rzutu poziomego kopuły¹⁾.

Przeciwrzuty sztab równoległych do rzutni jak npk. (1, 2), (2, 3)...(7, 8)...(11, 12) i t.d. przechodzą przez środek O . Przeciwrzuty pozostałych sztab oraz sił F_1, F_2, F_4 i F_5 najwygodniej będzie wyznaczyć metodą Federhofera (por. rys. 19 str. 15).

Ta metoda nie nadaje się dla wyznaczenia przeciwrzutów sił F_3 i F_4 . Dla nich korzystamy z konstrukcji Mayora (por. rys. 18 i 19).

Mając wykreśloną figurę odwrotną możemy przystąpić do wyznaczania napięć w poszczególnych sztabach. Rozważmy w tym celu np. węzeł 1-szy. W tym węźle schodzą się cztery sztaby (1,2), (1,6), (1,12) i (1,7), z których trzy ostatnie leżą w jednej płaszczyźnie. Siłę F_1 należy więc rozłożyć na dwie składowe, z których jedna jest skierowana wzdłuż (1,2), a druga leży w płaszczyźnie trzech pozostałych sztab. W tym celu łączymy na figurze odwrotnej (53c), za pomocą prostej a , punkt przecięcia przeciwrzutu siły F_1^* z przeciwrzutem $(1^*, 2^*)$ z punktem, w którym się schodzą przeciwrzuty $(1^*, 7^*)$, $(1^*, 6^*)$ i $(1^*, 12^*)$. Analogicznie rozkładamy F_2^* w kierunkach $(2^*, 3^*)$ i prostej b i t. d. aż do siły F_6^* rozłożonej w kierunkach $(6^*, 1^*)$ i prostej f .

W planie sił (rys. 55d) wykreślamy przeciwrzuty sił $F_1^* \dots F_6^*$ w postaci ciągłej linii łamanej. Na F_1^* do F_6^* budujemy trójkąty sił $(F_1^*, a, T_{1,2}^*)$, $(F_2^*, b, T_{2,3}^*)$ i \dots $(F_6^*, f, T_{1,6}^*)$. W ten sposób otrzymamy napięcia $T_{12}^* \dots T_{61}^*$ górnego pierścienia.



Rys. 55 d.

¹⁾ W figurze odwrotnej (rys. 55c) opuszczone zostały gwiazdki, którymi zwykle oznaczam przeciwrzuty sztab i sił, a w planie sił (fig. 55d) dla napięć T_{ik}^* pozostawione zostały tylko ich dolne wskaźniki.

Dla wyznaczenia napięć w sztabach przekątnych górnego piętra przenosimy napięcie $T_{1,6}^*$ z końcowego punktu siły F_6^* równoległe do punktu początkowego siły F_1^* i za pomocą czworoboku sił $(1^*, 6^*)$, a , $(1^*, 12^*)$ i $(1^*, 7^*)$ otrzymamy napięcia $T_{1,7}^*$ i $T_{1,12}^*$; czworobok $(1^*, 2^*)$, b , $(2^*, 7^*)$, $(2^*, 8^*)$ pozwala wyznaczyć napięcia $T_{2,7}^*$ i $T_{2,8}^*$ i t. d. aż do czworoboku $(5^*, 6^*)$, f , $(6^*, 11^*)$ i $(6^*, 12^*)$, za pomocą którego otrzymamy $T_{6,11}^*$ i $T_{6,12}^*$.

Przejdźmy teraz z kolei do węzła 7-go. Napięcia 2 sztab $(1, 7)$ i $(2, 7)$ zostały już wyznaczone. Z pozostałych 4-ch sztab trzy $(7, 12)$, $(7, 13)$, $(7, 18)$ leżą w jednej płaszczyźnie. Za pomocą czworoboku sił m , $(1^*, 7^*)$, $(2^*, 7^*)$ i $(7^*, 8^*)$ ¹⁾ możemy otrzymać wykreślenie $T_{7,8}^*$. Analogicznie z czworoboku l , $(2^*, 8^*)$, $(3^*, 8^*)$ i $(8^*, 9^*)$ otrzymamy $T_{8,9}^*$ i t. d., aż do czworoboku sił g , $(6^*, 12^*)$, $(1^*, 12^*)$ i $(7^*, 12^*)$ z którego wyznaczymy $T_{7,12}^*$.

Pozostaje nam jeszcze wyznaczenie napięć w sztabach dolnego piętra. Przenosimy znane nam $T_{7,12}^*$ równoległe do punktu przecięcia m z $(1^*, 7^*)$ i za pomocą czworoboku sił m , $(7^*, 12^*)$, $(7^*, 13^*)$ i $(7^*, 18^*)$ otrzymamy $T_{7,13}^*$ i $T_{7,18}^*$. Czworobok l , $(7^*, 8^*)$, $(8^*, 13^*)$ i $(8^*, 14^*)$ wyznaczy $T_{8,13}^*$ i $T_{8,14}^*$ i t. d. Ostatnim czworobokiem będzie g , $(11^*, 12^*)$, $(12^*, 18^*)$ i $(12^*, 17^*)$, z którego otrzymamy $T_{12,17}^*$ i $T_{12,18}^*$.

Mając przeciwrzuty $T_{l,k}^*$ napięć, możemy wyznaczyć same napięcia $T_{l,k}$ ze wzoru

$$T_{l,k} = \frac{T_{l,k}^*}{\cos \vartheta_{l,k}} = \frac{T_{l,k}^* \sqrt{h_{l,k}^{*2} + k^2}}{h_{l,k}^*}$$

gdzie $\vartheta_{l,k}$ jest kątem nachylenia sztaby (l, k) z płaszczyzną odniesienia, a $h_{l,k}^*$ odległość przeciwrzutu tej sztaby od środka o koła parametrycznego. (Por. przk. 1-szy). Całkowite naprężenia $T_{l,k}$ sztab można również wyznaczyć wykreślenie. Budujemy trójkąt prostokątny, w którym jedna przyprostokątna, równa się promieniowi k koła parametrycznego, a druga równa się odległości $h_{l,k}^*$ przeciwrzutu (l, k) od środka. Na tej drugiej przyprostokątnej (począwszy od kąta ostrego) odkładamy $T_{l,k}^*$. Długość przeciwprostokątnej, odpowiadającej $T_{l,k}^*$ w trójkącie podobnym odpowiada całkowitemu napięciu $T_{l,k}$.

Przykład 5. Kopuła gwiazdzista. (Rys. 56 a — d).

Ta kopuła składa się z trzech foremnych siedmiokątów, górnego, średniego i dolnego, przyczem średni jest symetrycznie przekreślony względem dwóch pozostałych. Wierzchołki górnego siedmiokąta są połączone z wierzchołkami najbliższego boku średniego i, analogicznie, wierzchołki średniego łączą się z wierzchołkami najbliższego boku dolnego siedmiokąta. W węzłach górnego pierścienia działa siedem sił $P_1 \dots P_7$ o dowolnej wielkości i kierunku.

Przyjmujemy płaszczyznę poziomą za płaszczyznę odniesienia układu zerowego i względem dowolnego koła parametrycznego wykreślamy przeciwrzuty sztab i sił $P_1 \dots P_7$ (rys. 56c). Z każdego węzła górnego pierścienia wychodzą 4 sztaby, a z węzła średniego pierścienia 6 sztab, przyczem, w jednym i drugim przypadku, żadne z trzech sztab nie leżą w jednej płaszczyźnie. Węzłowi górnego pierścienia np. pierwszemu odpowiada w figurze odwrotnej czworobok $(1^*, 2^*)$ $(1^*, 7^*)$ $(1^*, 8^*)$ i $(1^*, 9^*)$ a węzłowi średniego npk. 8-memu sześciobok $(1^*, 8^*)$ $(7^*, 8^*)$ $(8^*, 9^*)$ $(8^*, 14^*)$ $(8^*, 15^*)$ i $(8^*, 16^*)$.

Dla wyznaczenia napięć sztab wychodzących z węzłów górnego pierścienia, rozważmy węzeł np. 1-y. W tym węźle siła F_1 i naprężenia 4-ch sztab równoważą się. Na zasadzie twierdzenia Mayora (§ 5 str. 30) przeciwrzuty siły F_1^* oraz naprężeń $T_{1,2}^*$, $T_{1,7}^*$, $T_{1,8}^*$ i $T_{1,9}^*$ (położenia tych ostatnich wzięte z figury odwrotnej) będą w równowadze. Biorąc więc momenty przeciwrzutów tej siły i napięć względem punktu przecięcia się sztab $(1^*, 8^*)$ i $(1^*, 9^*)$ otrzymamy

$$a) \quad T_{1,2}^* \Delta_1 - T_{1,7}^* \Delta_1 + M_1 = 0$$

gdzie Δ_1 będzie odległością przeciwrzutów $(1^*, 2^*)$ i $(1^*, 7^*)$ od tegoż punktu przecięcia a M_1 momentem F_1^* względem tegoż punktu.

Oznaczając przez μ_1 stosunek $\frac{M_1}{\Delta_1} = \mu_1$ możemy napisać

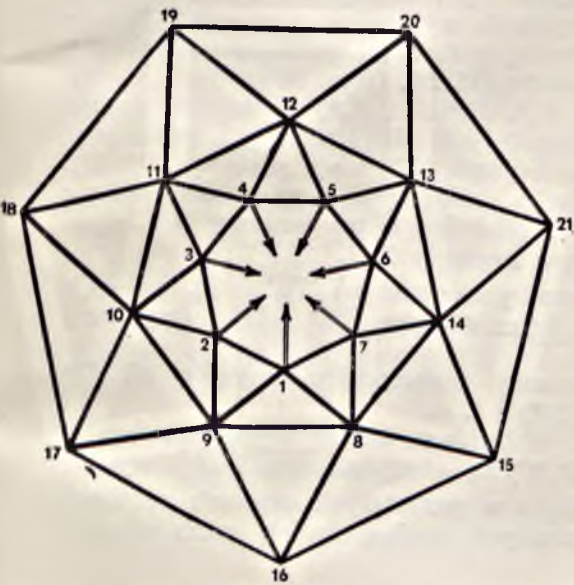
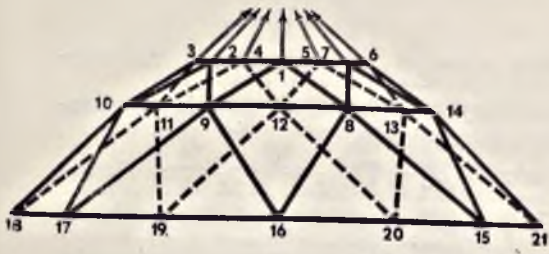
$$b) \quad T_{1,2}^* - T_{1,7}^* = -\mu_1$$

i przez analogię otrzymujemy dla pozostałych węzłów

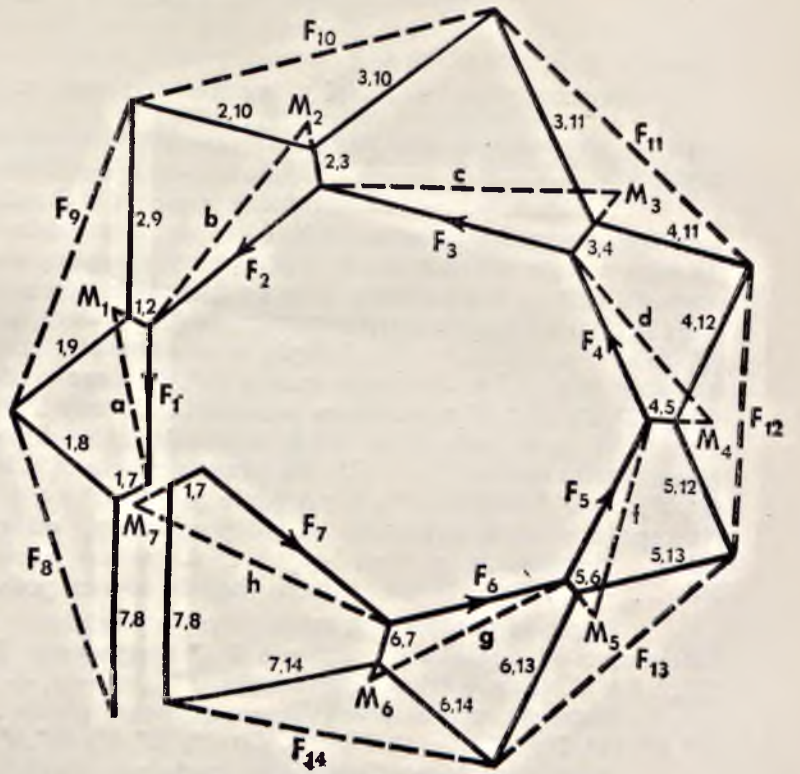
$$b_1) \quad T_{1,2}^* - T_{1,7}^* = -\mu_1, \quad T_{2,3}^* - T_{2,1}^* = -\mu_2, \quad T_{3,4}^* - T_{3,2}^* = -\mu_3, \quad T_{4,5}^* - T_{4,3}^* = -\mu_4 \\ T_{5,6}^* - T_{5,4}^* = -\mu_5, \quad T_{6,7}^* - T_{6,5}^* = -\mu_6, \quad T_{7,1}^* - T_{7,6}^* = -\mu_6.$$

¹⁾ Prosta m otrzymamy (rys. 55c) łącząc punkt przecięcia przeciwrzutów $(1^*, 7^*)$ i $(2^*, 7^*)$ z punktem przecięcia $(7^*, 12^*)$ i $(7^*, 13^*)$ względnie $(7^*, 18^*)$. W ten sam sposób otrzymamy, konieczne, dla pozostałych czworoboków sił, proste $l, k \dots g$

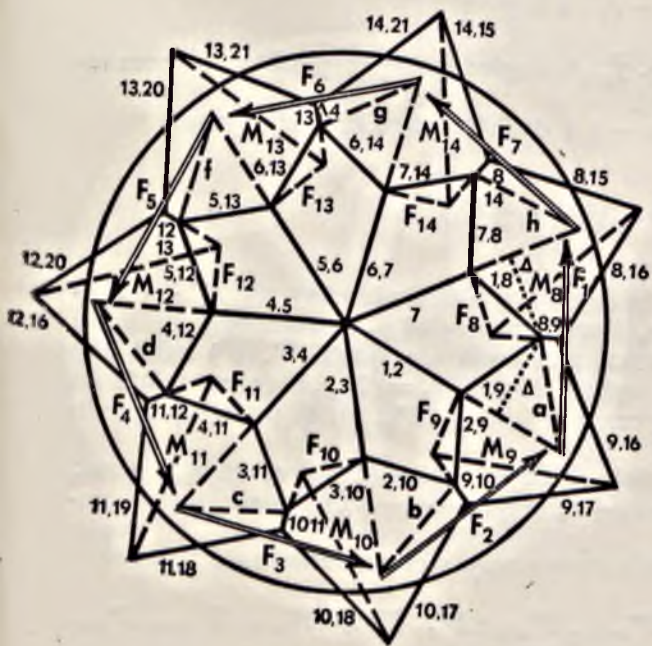
Rys. 55 a.



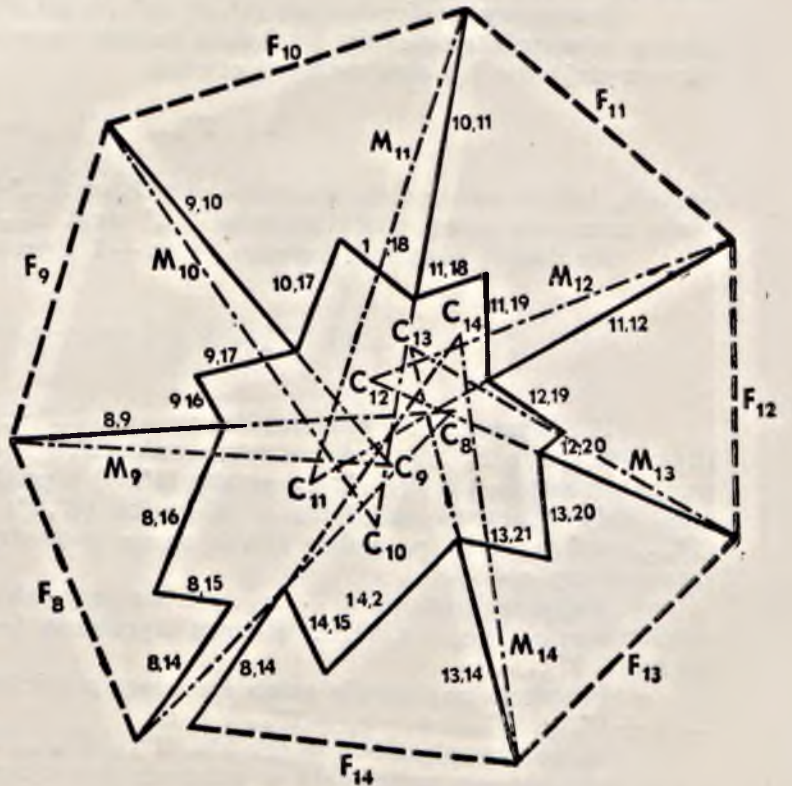
Rys. 55 b.



Rys. 56 d.



Rys. 56 c.



Rys. 56 e.

Mnożąc kolejno pierwsze równanie przez $+1$, drugie przez -1 , trzecie przez $+1$ i t. d. i dodając stronami, otrzymamy ($T^*_{t,k} = -T^*_{k,t}$)

$$c) T^*_{7,1} = \frac{1}{2} (-\mu_1 + \mu_2 - \mu_3 + \dots - \mu_7).$$

Poszczególne wartości μ_i można otrzymać z równania $\mu_i = \frac{M_i}{\Delta_i}$. Podstawiając te wartości w równanie c) otrzymamy $T^*_{7,1}$. Mając to ostatnie możemy kolejno z równań b₁) wyznaczyć pozostałe napięcia $T^*_{1,2}$ $T^*_{2,3}$ \dots $T^*_{6,7}$ sztab górnego pierścienia.

Wielkość μ_1 można również wyznaczyć wykreślnie. Wzór $T^*_{1,2} - T^*_{1,7} = -\mu_1$ przedstawia nam (po pomnożeniu przez Δ_1) równanie momentów siły F^*_1 i napięć czworoboku względem jednego z jego wierzchołków. Przyjawszy dowolną wartość dla ($T^*_{1,7}$) otrzymamy z tego wzoru wartość ($T^*_{1,2}$) i zapomocą jeszcze 2 innych równań równowagi, możemy wyznaczyć wartości dla ($T_{1,8}^*$) i ($T^*_{1,9}$). Założmy więc, że ($T^*_{1,7}$) = 0 to ($T^*_{1,2}$) = $-\mu_1$. Wtedy siła F^*_1 wraz z siłą ($T_{1,2}^*$) = $-\mu_1$ i ($T_{1,8}$) i ($T_{1,9}$) będą w równowadze. Dla otrzymania wykreślnie $\mu_1 = - (T_{12}^*)$ rozkładamy siłę F^*_1 w kierunku sztaby ($1^*, 2^*$) oraz wzdłuż prostej a łączącej punkt przecięcia się sztab ($1^*, 8^*$) i ($1^*, 9^*$) z punktem przecięcia się siły F^*_1 ze sztabą ($1^*, 2^*$). (Rys. 56 c). *)

W tym celu (rys. 56 d) wykreślamy wielobok sił $F^*_1, F^*_2, \dots, F^*_8$, równoległe do ich pierwszych rzutów F'_1, \dots, F'_7 . Na przeciwzrucie F^*_1 budujemy trójkąt sił (F^*_1, a, μ_1), gdzie $\mu_1 \parallel (1^*, 2^*)$; na F^*_2 trójkąt (F^*_2, b, μ_2) gdzie $\mu_2 \parallel 2^*, 3^*$ i t. d. aż do trójkąta (F^*_7, h, μ_7) gdzie $\mu_7 \parallel (1^*, 7^*)$. Następnie w myśl równania c), odejmujemy μ_1 od odcinka μ_2 , różnicę $\mu_2 - \mu_1$ od odcinka μ_3 ; od μ_4 odejmujemy $\mu_3 - \mu_2 + \mu_1$ i t. d. aż do odcinka μ_7 , od którego odejmujemy $\mu_6 - \mu_5 + \dots - \mu_1$. Ta ostatnia różnica będzie równą podwójnemu napięciu T^*_{71} .

Napięcia pozostałych sztab górnego pierścienia otrzymamy z równań b₁) ($T_{12}^* - T_{17}^* = -\mu_1$). Odejmując od odcinka μ_1 napięcie T_{17}^* otrzymamy T_{12}^* . Przez odjęcie T_{12}^* od μ_2 otrzymamy $T_{2,3}^*$ i t. d. (Sprawdzian dokładności $T^*_{1,7} = -\mu_7 + T^*_{6,7}$).

Napięcia sztab przekątnych górnego piętra otrzymamy zapomocą pięciokątów sił F^*_1 ($1^*, 2^*$) ($1^*, 7^*$) ($1^*, 8^*$) ($1^*, 9^*$); F^*_2 ($2^*, 1^*$) ($2^*, 3^*$) ($2^*, 9^*$) ($2^*, 10^*$) i t. d.

Przejdźmy teraz do węzłów średniego pierścienia. W każdym takim węźle np. 8-mym schodzi się sześć sztab. Napięcia dwóch sztab ($1^*, 8^*$) i ($7^*, 8^*$) są już wyznaczone i dają wypadkową $\overline{F}_8^* = \overline{T}_{1,8}^* + \overline{T}_{7,8}^*$. Natomiast nieznanymi są napięcia w pozostałych czterech sztabach. Analogicznie w węzłach 9-tym do 14-go otrzymamy ze znanych napięć dwóch sztab wypadkowe $\overline{F}_9^* = \overline{T}_{1,9}^* + \overline{T}_{2,9}^*$ i t. d. do $\overline{F}_{14}^* = \overline{T}_{8,14}^* + \overline{T}_{14,15}^*$.

Rozważmy sześciobok sił ($1^*, 8^*$) ($8^*, 7^*$) ($8^*, 9^*$) ($8^*, 14^*$) ($8^*, 15^*$) ($8^*, 16^*$) węzła 8-go i napiszmy równanie momentów względem punktu przecięcia się sztab ($8^*, 15^*$), ($8^*, 16^*$). Podobnie jak powyżej (rów. b₁) otrzymamy 7 równań

$$b) T^*_{8,9} - T^*_{8,14} = -c_8 \quad \text{i t. p.}$$

gdzie c_8 będzie równaniem momentu siły $\overline{F}_8^* = \overline{T}_{1,8}^* + \overline{T}_{7,8}^*$ względem tegoż punktu (po pomnożeniu momentu przez ramię napięcia $T^*_{1,8}$ wzgl. $T^*_{7,8}$).

Mnożąc te równanie kolejno przez $+1$ i przez -1 i dodając stronami, otrzymamy

$$c) T^*_{14,8} = \frac{1}{2} (-c_8 + c_9 - c_{10} + \dots - c_{14})$$

Dla wyznaczenia poszczególnych wartości c_i , budujemy wielobok łamany sił $F^*_8 \dots T^*_{14}$. (Rys. 56e.). Siłę F^*_8 rozkładamy w kierunku ($8^*, 9^*$) $\parallel c_8$ i wzdłuż prostej μ_8 , przechodzącej przez punkt przecięcia się siły F^*_8 ze sztabą ($8^*, 9^*$) z punktem przecięcia się sztab ($8^*, 15^*$) i ($8^*, 16^*$) (rys. 56d). Pierwsza składowa w kierunku ($8^*, 9^*$) będzie równa $c_8 = (T^*_{8,9})$, (przy założeniu ($T^*_{8,14}$) = 0), a druga μ_8 będzie równa sumie geometrycznej ($T^*_{8,15}$) + ($T^*_{8,16}$). W podobny sposób wyznaczamy $c_9 \dots c_{17}$.

Mając wykreślone $c_8 \dots c_{14}$, odejmujemy odcinek c_8 od c_9 , różnicę $c_9 - c_8$ od c_{10} ; od c_{11} odejmujemy $c_{10} - c_9 + c_8$ i t. d. Połowa wyrażenia ($-c_8 + c_9 - c_{10} + \dots - c_{14}$) będzie równa naprężeniu $T^*_{14,8}$.

Pozostałe naprężenia sztab średniego pierścienia otrzymamy stosując równanie $T^*_{8,9} = -c_8 + T^*_{8,14}$, $T^*_{9,10} = -c_9 + T^*_{9,8}$ i t. d.

Za pomocą pięcioboków jak F^*_8 , $T^*_{8,9}$ $T^*_{8,14}$, $T^*_{8,15}$, $T^*_{8,16}$; F^*_9 , $T^*_{9,8}$, $T^*_{9,10}$, $T^*_{9,16}$, $T^*_{9,17}$ i t. d. wyznaczmy naprężenia w sztabach przekątnych dolnego piętra.

) Dla odróżnienia rzeczywistych napięć w sztabach ($1^, 2^*$) ($1^*, 7^*$) ($1^*, 8^*$) i ($1^*, 9^*$) oznaczam możliwe napięcia, czyniące zadość warunkom równowag li tylko w tym węźle, przez ($T^*_{1,2}$) i t. d. w nawiasie.

RÉSUMÉ.

L'auteur avait l'intention de représenter la transformation, dite de prof. Mayor, en vue de ses applications à statique, cinématique et systèmes articulés de l'espace.

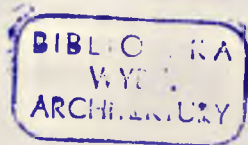
Cette transformation consiste en représentation des vecteurs, qui jouent un rôle prépondérant en mécanique, dans un système focale. (Complexe de Chasles ou complexe d'action d'un système de forces).

Vue, que la notion du système focale n'est pas assez répandue, je commence par l'exposé de ses propriétés (§ 1), en me basant sur un système de forces gauches et de dynames.

Puis (§ 2) je démontre la possibilité de représenter des éléments géométriques (point, droite et plan) dans un système focale.

Le § 3 est consacré à la représentation des systèmes des forces et dynames dans un système focale, dit fondamentale ou directeur.

Enfin dans les §§ 4 et 5 je résous quelques problèmes de la statique et cinématique et je calcule, grâce à cette transformation, les tensions dans les barres de divers systèmes articulés de l'espace.



6197