

Politechnika Warszawska – Wydział Inżynierii Lądowej

Roman Nagórski

METODY MATEMATYCZNE INŻYNIERA LĄDOWEGO II

METODY MATEMATYCZNE INŻYNIERA LĄDOWEGO I to kurs matematyki na studiach I w kierunku inżynierii lądowej, natomiast MMIL II, to wybrane zaawansowane elementy matematyki tzw. stosowanej, adresowane do studentów studiów II stopnia, dyplomantów, doktorantów, pracowników naukowo-badawczych, projektantów złożonych konstrukcji i wykonawców skomplikowanych budów, zainteresowanych pięknem lub przydatnością MATEMATYKI, zestawione w trzech blokach tematycznych, nazwanych dość umownie:

Cz. 1. Analiza

Cz. 2. Równania

Cz. 3. Probabilistyka

Dołączony dalej Spis treści przedstawia zakres tematyczny niniejszego materiału dydaktycznego, a tu warto podkreślić dwie kwestie. Materiał ten ma bardziej charakter syntetycznego konspektu niż podręcznika (nawet skryptu). I druga ważna rzecz, to położenie nacisku na warstwę pojęciową (której przyswojenie zezwala, na przykład, na czytanie ze zrozumieniem tekstów technicznych z dużym pierwiastkiem matematycznym) oraz na warstwę „narzędziową” formułowania i rozwiązywania problemów technicznych środkami matematycznymi. Stąd brak w tym materiale tak charakterystycznych elementów „matematyki czystej” jakimi są dowody twierdzeń (nie licząc podawanych niekiedy uzasadnień lub szkiców dowodów pewnych twierdzeń).

Autor^{*)}

^{*)} z wielkim podziękowaniem dla współpracowników za inspiracje, uwagi i pomoc przy kształtowaniu tego materiału: prof. Sławomirowi Czarnieckiemu, dr inż. Magdalenie Złotowskiej, dr inż. Karolowi Bołbotowskiemu i mgr inż. Pawłowi Tutcie oraz z nadzieją, że powstanie kiedyś część czwarta „, lub może dodatkowe rozdziały... lub chociaż wersje 2.0 poszczególnych części niniejszego materiału

Warszawa, kwiecień 2023

Spis treści

Background: Krótka podróż po działach matematyki

Część 1. Analiza

1. Przestrzenie metryczne
 - 1.1. Pojęcie przestrzeni metrycznej
 - 1.2. Podstawowe, wybrane pojęcia topologiczne
 - 1.3. Przestrzenie metryczne ośrodkowe i zupełne
2. Przestrzenie liniowe
 - 2.1. Konwencja sumacyjna
 - 2.2. Pojęcie przestrzeni liniowej
 - 2.3. Baza algebraiczna. Przestrzenie skończone wymiarowe
 - 2.4. Przestrzenie unormowane i przestrzenie unitarne
 - 2.5. Przestrzeń wektorowa euklidesowa
3. Odwzorowania liniowe i wieloliniowe
 - 3.1. Odwzorowania liniowe
 - 3.2. Funkcjonały liniowe
 - 3.3. Operatory liniowe
 - 3.4. Odwzorowania wieloliniowe
 - 3.5. Formy dwuliniowe
 - 3.6. Produkt dualny
 - 3.7. Tensory
 - 3.8. Równania liniowe
4. Przestrzenie afiniczne
 - 4.1. Pojęcie przestrzeni afinicznej
 - 4.2. Podzbiory przestrzeni afinicznej
 - 4.3. Układ odniesienia. Współrzędne punktu
 - 4.4. Reprezentacje analityczne zbiorów w przestrzeni afinicznej
 - 4.5. Przekształcenia zbiorów w przestrzeni afinicznej
 - 4.6. Pola na zbiorach w przestrzeni afinicznej
5. Podstawowe zagadnienia analizy matematycznej
 - 5.1. Granica i zbieżność
 - 5.2. Ciągłość
 - 5.3. Pochodna i różniczkowalność
 - 5.4. Całka i całkowność
 - 5.5. Trygonometryczne szeregi Fouriera

Część 2. Równania

1. Wiadomości wstępne
 - 1.1. Przestrzenie liniowe funkcji regularnych
 - 1.2. Przestrzeń dystrybucji
 - 1.3. Liniowe operatory różniczkowe
 - 1.4. Liniowe operatory różniczkowe cząstkowe
 - 1.5. Liniowe operatory całkowite

2. Równania różniczkowe. Wprowadzenie
 - 2.1. Podstawowe definicje i klasyfikacja ogólna
 - 2.2. O rozwiązaniach równań różniczkowych
 - 2.3. Przykłady równań
3. Równania różniczkowe zwyczajne
 - 3.1. Wiadomości ogólne
 1. Postacie równań
 2. Sprowadzanie do układu równań z pochodnymi rzędu pierwszego
 3. Sprowadzanie układu równań do pojedynczego równania
 4. Całki pierwsze
 5. Postacie rozwiązań
 - 3.2. Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych
 1. Równanie rzędu pierwszego o zmiennych rozdzielonych
 2. Równanie rzędu pierwszego liniowe
 3. Równanie rzędu pierwszego zupełne
 4. Równanie liniowe o stałych współczynnikach
 5. Równanie liniowe o zmiennych współczynnikach. Równanie Eulera
 6. Równanie o współczynnikach wielomianowych. Funkcje specjalne
 7. Układ równań o stałych współczynnikach
 - 3.3. Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych z warunkami dodatkowymi
 1. Zagadnienie Cauchy'ego i zagadnienie początkowe
 2. Zagadnienia brzegowe
 3. Zagadnienie spektralne
4. Równania różniczkowe cząstkowe
 - 4.1. Wiadomości wstępne
 - 4.2. Równania rzędu pierwszego
 1. Równanie liniowe jednorodne
 2. Równanie quasi-liniowe. Przypadek $n = 2$
 3. Równanie liniowe niejednorodne. Przypadek $n = 2$
 - 4.3. Równania rzędu drugiego
 1. Wprowadzenie
 2. Klasyfikacja równań cząstkowych liniowych drugiego rzędu
 3. Sprowadzanie równań cząstkowych liniowych drugiego rzędu do postaci kanonicznej
 4. Orientacja hiperpowierzchni (krzywej, powierzchni) względem równania cząstkowego drugiego rzędu
 5. Warunki graniczne. Zagadnienie graniczne – sformułowanie klasyczne
 6. Zagadnienie brzegowe
 7. Zagadnienie początkowe
 8. Zagadnienie brzegowo-początkowe
 9. Zagadnienie spektralne
 - 4.4. Równania wyższych rzędów
 1. Zagadnienie brzegowe zginania płyty – sformułowanie klasyczne
 2. Zagadnienie brzegowo-początkowe drgań belki – sformułowanie klasyczne
5. Sformułowania nieklasyczne zagadnień granicznych
 - 5.1. Wprowadzenie
 - 5.2. Nieklasyczne sformułowania zagadnienia brzegowego
 1. Klasyczne sformułowanie globalne
 2. Sformułowanie silne (mocne)
 3. Sformułowanie słabe
 4. Sformułowanie dystrybucyjne
 5. Sformułowanie wariacyjne
 6. Przykład rozwiązania zagadnienia Dirichleta na podstawie różnych sformułowań
 - 5.3. Sformułowanie globalne zagadnienia brzegowo-początkowego
 - 5.4. Sformułowanie dystrybucyjne zagadnienia początkowego
 1. Przypadek równania zwyczajnego
 2. Przypadek równania cząstkowego

6. Metody rozwiązywania zagadnień granicznych
 - 6.1. Wprowadzenie
 - 6.2. Metody (szeregów) Fouriera
 1. Metoda sprowadzania do zagadnień granicznych
 2. Metoda sprowadzania do zagadnień algebraicznych
 3. Metoda spektralna
 - 6.3. Metody szeregów potęgowych
 1. Metoda uogólnionych funkcji analitycznych
 2. Metoda funkcji elementarnych i specjalnych
 - 6.4. Metody transformacji całkowych
 1. Podstawowe określenia i sformułowanie metody
 2. Transformacja Laplace'a
 3. Transformacje nieskończone Fouriera
 4. Transformacja Hankela
 - 6.5. Metody przybliżone
 1. Uwagi wstępne. Rozwiązania przybliżone zagadnień granicznych
 2. Metody ważonych residuów. Przypadek redukcji do zagadnień algebraicznych
 3. Metody ważonych residuów. Przypadek redukcji do zagadnień granicznych
 4. Metody dyskretyzacyjne. Metoda różnic skończonych
 5. Metody asymptotyczne. Metoda małego parametru

Część 3. Probabilistyka

1. Prawdopodobieństwo zdarzeń
 - 1.1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych. Zdarzenia
 - 1.2. Rozkład prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo zdarzenia
2. Zmienne losowe jednowymiarowe
 - 2.1. Zmienna losowa jednowymiarowa. Rozkład prawdopodobieństwa. Dystrybuanta
 - 2.2. Zmienna losowa jednowymiarowa. Charakterystyki liczbowe i funkcyjne
3. Zmienne losowe wielowymiarowe (wektory losowe)
4. Ciągi zmiennych losowych. Zbieżność i twierdzenia graniczne
5. Procesy stochastyczne – wprowadzenie
6. Elementy statystyki matematycznej
 - 6.1. Podstawowe pojęcia i twierdzenia
 - 6.2. Estymacja
 - 6.3. Weryfikacja hipotez statystycznych
 Literatura pomocnicza
 Wykaz rozkładów prawdopodobieństwa

Część 3A. Probabilistyka

(wprowadzenie – konspektowe)

1. Prawdopodobieństwo zdarzeń
2. Zmienne losowe jednowymiarowe
3. Zmienne losowe dwu(wielo)wymiarowe
4. Wektory losowe i ciągi losowe
5. Procesy stochastyczne – wstęp
6. Wprowadzenie do statystyki matematycznej
 - 6.1. Podstawowe pojęcia i twierdzenia
 - 6.2. Estymacja
 - 6.3. Weryfikacja hipotez statystycznych
 Literatura pomocnicza
 Wykaz rozkładów prawdopodobieństwa

Roman Nagórski

METODY MATEMATYCZNE INŻYNIERA LĄDOWEGO II

Background:

Syntetyczny przegląd zakresu podstawowej wiedzy matematycznej
klasycznej i współczesnej, czyli
krótka podróż po działach matematyki „gdzie jesteśmy i dokąd zmierzamy”

1. Logika matematyczna

- zdania,
- rachunek zdań,
- prawa rachunku zdań,
- formy zdaniowe, kwantyfikatory,
- teorie i ich właściwości. (metamatematyka)

2. Teoria mnogości (teoria zbiorów)

- zbiory,
- rachunek zbiorów,
- prawa rachunku zbiorów,
- iloczyny kartezjańskie,
- relacje matematyczne, ich rodzaje i właściwości,
- funkcje, ich rodzaje i właściwości,
 - odwzorowanie f zbioru X w Y ,
 - odwzorowanie f zbioru X na zbiór Y ($f(X) = Y$) – surjekcja,
 - odwzorowanie f zbioru X w Y „1 – 1” (różnowartościowa) – injekcja
 - injekcja i surjekcja f zbioru X na zbiór Y – bijekcja
- równoliczność zbiorów, zbiory skończone, przeliczalne i kontinua, moc zbiorów (liczby kardynalne).

2a. Topologia

- zbiory i ich szczególne właściwości (domkniętość, otwartość, spójność, zwartość),
- funkcje i ich szczególne właściwości (ciągłość funkcji na zbiorach otwartych i domkniętych, homeomorfizmy).

3. Algebra klasyczna

- zbiory liczbowe i ich właściwości,
- działania na zbiorach liczbowych i ich właściwości
- funkcje liczbowe na zbiorach liczbowych i ich właściwości (wynikające z właściwość i działań na liczbach),
- rachunek macierzowy

4. Algebra współczesna

- struktury algebraiczne i ich właściwości (półgrupa, grupa, pierścień, ciało, przestrzeń liniowa, algebra)
- przekształcenia podzbiorów struktury algebraicznej na zbiory struktury algebraiczną i ich właściwości.

4a. Algebra liniowa

- przestrzenie liniowe,
- odwzorowania liniowe i wieloliniowe, formy i tensory,
- równania liniowe

5. Geometria klasyczna – euklidesowa (podejście aksjomatyczne),

- zbiory punktów i ich właściwości,
- przekształcenia zbiorów na zbiory i ich właściwości.

5a. Geometria współczesna – afiniczna (podejście strukturalne)

- przestrzenie afiniczne ich właściwości, przestrzeń euklidesowa
- zbiory afiniczne i quasi-afiniczne i ich właściwości,
- geometria analityczna (reprezentacje arytmetyczne zbiorów i ich przekształceń),

6. Analiza matematyczna (klasyczna)

- ciągi i szeregi liczbowe oraz ich właściwości,
- funkcje rzeczywiste zmiennych rzeczywistych i ich właściwości (monotoniczność, wypukłość, ekstrema, różnowartościowość; funkcje elementarne) oraz:
 - * granica i ciągłość,
 - * pochodna i różniczkowalność,
 - * całka i całkowalność, miara.

5b. Geometria współczesna – różniczkowa

- rozmaitości różniczkowe w przestrzeniach afinicznych,
- pola na rozmaitościach,
- geometrie nieafiniczne.

6a. Analiza matematyczna (współczesna)

- odwzorowania liniowe i wieloliniowe ograniczone na przestrzeniach unormowanych (analiza funkcjonalna),
- odwzorowania na przestrzeniach afinicznych metrycznych i ich właściwości:
 - * granica i ciągłość,
 - * pochodna i różniczkowalność,
 - * miara i całka.

6b. Analiza matematyczna – kontynuacje

- analiza numeryczna, !!! metody numeryczne – algebra i analiza numeryczna
- analiza tensorowa,
- równania różniczkowe (zwyczajne i cząstkowe),
- równania całkowe,
- probabilistyka:
 - * rachunek prawdopodobieństwa (prawdopodobieństwo i zmienne losowe)
 - * procesy stochastyczne,
 - * statystyka matematyczna
- ...

Podkreślone elementy są przedmiotem materiału „Metody Matematyczne Inżyniera Łądowego II”

MMIL II

Część pierwsza. ANALIZA

1. Przestrzenie metryczne

- 1.1. Pojęcie przestrzeni metrycznej
- 1.2. Podstawowe, wybrane pojęcia topologiczne
- 1.3. Przestrzenie metryczne ośrodkowe i zupełne

1. PRZESTRZENIE METRYCZNE

1.1. Pojęcie przestrzeni metrycznej

Definicja. **Przestrzenią metryczną** nazywamy układ $\{\mathbb{D}, d\}$, gdzie \mathbb{D} jest niepustym zbiorem elementów X, Y, Z, \dots , zwanych punktami, a d odwzorowaniem

$d: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{R}$ (\mathcal{R} – zbiór liczb rzeczywistych), zwanym metryką, spełniającym następujące warunki:

- 1) $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$;
- 2) $d(X, Y) = d(Y, X) \quad \forall X, Y \in \mathbb{D}$
- 3) $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y) \quad \forall X, Y, Z \in \mathbb{D}$.

Liczbę $d(X, Y)$ nazywamy odległością punktu X od Y lub (na mocy warunku 2)) odległością między punktami X i Y . Jeżeli $\mathbb{B} \subset \mathbb{D}$ i $d' = d|_{\mathbb{B} \times \mathbb{B}}$, to układ $\{\mathbb{B}, d'\}$ nazywamy **podprzestrzenią metryczną** przestrzeni $\{\mathbb{D}, d\}$, a \mathbb{B} nazywamy podzbiorem metrycznym przestrzeni \mathbb{D} .

Uwaga. Mówimy i piszemy krótko: przestrzeń (metryczna) \mathbb{D} – chociaż na danym zbiorze (punktów) może być określonych wiele różnych metryk. Metryki d i d' są równoważne (z definicji), jeśli

$$\exists \alpha, \beta \in \mathcal{R} (0 < \alpha < \beta) \quad \alpha d(X, Y) \leq d'(X, Y) \leq \beta d(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathbb{D}.$$

Przykład. Niech $\mathcal{R}^n = \{X = (x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathcal{R}, i = 1, \dots, n\}$ zbiór ciągów n -elementowych o wyrazach rzeczywistych i niech $\mathbb{D} = \mathcal{R}^n$. Niech następnie

$$d(X, Y) = \left[\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \right]^{1/2},$$

$$d'(X, Y) = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|,$$

$$d''(X, Y) = \max_i |y_i - x_i|,$$

dla dowolnych $X = (x_i), Y = (y_i)$. Odwzorowania d, d', d'' są metrykami na przestrzeni \mathcal{R}^n (i to metrykami równoważnymi). Zazwyczaj $\mathcal{R}^n \stackrel{\text{ozn.}}{=} \{\mathbb{D}, d\}$ nazywamy arytmetyczną przestrzenią metryczną (z metryką euklidesową).

Przykład. Niech Ω dowolny zbiór elementów ξ, η, ζ, \dots . Zbiór odwzorowań

$$\mathbb{D} = F(\Omega; \mathcal{R}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{ f : \Omega \rightarrow \mathcal{R}; \sup_{\xi \in \Omega} |f(\xi)| < \infty \},$$

tj. odwzorowań o wartościach rzeczywistych i ograniczonych na Ω wraz z odwzorowaniem

$$d(f, g) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\xi \in \Omega} |g(\xi) - f(\xi)|$$

jest przestrzenią metryczną (tzw. funkcyjną); punktami przestrzeni \mathbf{D} są tu odwzorowania ze zbioru $F(\Omega; \mathcal{R})$ z metryką 'supremum'.

Przykład. Niech $\{\mathbf{D}_1, d_1\}, \dots, \{\mathbf{D}_n, d_n\}$ przestrzenie metryczne. Wtedy $\{\mathbf{D}, d\}$ przy

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \times \dots \times \mathbf{D}_n; \quad d(X, Y) = \max_{i=1, \dots, n} d_i(X_i, Y_i),$$

$$\text{dla } X = (X_1, \dots, X_n), Y = (Y_1, \dots, Y_n) \in \mathbf{D},$$

jest przestrzenią metryczną.

1.2. Podstawowe, wybrane pojęcia topologiczne

Niech \mathbf{D} przestrzeń metryczna z ustaloną metryką d .

Odległość między zbiorami $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbf{D}$:

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \inf d(X, Y), \quad X, Y \in \mathbf{D}.$$

Zbiór \mathbf{Z} ($\mathbf{Z} \subset \mathbf{D}$) ograniczony;

$$\rho(\mathbf{Z}) = \sup_{X, Y \in \mathbf{Z}} d(X, Y) < \infty \quad (\rho(\mathbf{Z}) - \text{średnica zbioru}).$$

Ciąg (X_n) punktów z $\{\mathbf{D}, d\}$ ($n \in \mathbf{N}$) jest zbieżny do X z $\{\mathbf{D}, d\}$ (ma granice $X \in \mathbf{D}$), co zapisujemy:

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} d(X_n, X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} d(X_n, X) = 0).$$

Domknięcie zbioru \mathbf{Z} ($\mathbf{Z} \subset \mathbf{D}$):

$$\bar{\mathbf{Z}} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \text{clos}(\mathbf{Z}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{X' \in \mathbf{D}; \exists (X_n) \subset \mathbf{Z} \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X'\}.$$

! $\mathbf{Z} \subset \bar{\mathbf{Z}}$.

Zbiór \mathbf{Z} jest domknięty $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \mathbf{Z} = \bar{\mathbf{Z}}$.

Zbiór \mathbf{A} jest gęsty w zbiorze \mathbf{B} ($\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{D}$) $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \mathbf{B} \subset \bar{\mathbf{A}} \subset \mathbf{D}$ ($\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \bar{\mathbf{Z}} \subset \mathbf{D}$).

Kula (otwarta) o środku C i promieniu r :

$$\mathbf{K}(C, r) = \{X \in \mathbf{D}; d(X, C) < r\}.$$

Kula domknięta o środku C i promieniu r – domknięcie kuli $\mathbf{K}(C, r)$:

$$\bar{\mathbf{K}}(C, r) = \{X \in \mathbf{D}; d(X, C) \leq r\}.$$

Sfera o środku C i promieniu r :

$$\mathbf{S}(C, r) = \{X \in \mathbf{D}; d(X, C) = r\}.$$

Punkt X zbioru Z nazywa się wewnętrzny $\Leftrightarrow \exists r > 0 \mathbb{K}(X, r) \subset Z$.

Wnętrze zbioru Z (ozn. $\text{Int } Z$) = zbiór (wszystkich) punktów wewnętrznych zbioru Z .

Brzeg zbioru Z :

$$\partial Z = \text{clos } Z - \text{int } Z.$$

Punkt brzegowy zbioru Z – punkt należący do brzegu ∂Z .

Zewnętrznie zbioru $Z \subset \mathbb{D}$:

$$\text{out } Z = \mathbb{D} - \text{clos } Z.$$

Punkt zewnętrzny zbioru Z – punkt należący do zewnątrz $\text{out } Z$.

Zbiór Z otwarty $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} Z = \text{int } Z$.

! Kula (otwarta) jest zbiorem otwartym, kula domknięta i sfera są zbiorami domkniętymi. Sfera jest brzegiem kuli otwartej i kuli domkniętej.

!! Iloczyn dowolnie wielu i suma skończenie wielu zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

!!! Suma dowolnie wielu i iloczyn skończenie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Dopełnienie zbioru Z :

$$Z' = \mathbb{D} - Z.$$

! Dopełnienie zbioru domkniętego jest zbiorem otwartym, a dopełnienie zbioru otwartego jest zbiorem domkniętym.

!! $\mathbb{D}' = \emptyset$ (zbiór pusty), $\emptyset' = \mathbb{D}$.

Zbiór Z jest otoczeniem punktu $X \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} X \in \text{int } Z$

Jeśli Z jest otoczeniem punktu X , to $Z - \{X\}$ sąsiedztwo punktu X .

Punkt X zbioru Z izolowany $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists r > 0 \mathbb{K}(X; r) \cap Z = \{X\}$.

Zbiór złożony jedynie z punktów izolowanych – zbiór dyskretny.

Zbiór Z skończony (policzalny) – wszystkie elementy zbioru Z można ponumerować liczbami $1, 2, \dots, N$ dla pewnego $N \in \mathcal{N}$ (policzyć), tj. przedstawić w postaci (X_1, X_2, \dots, X_N) .

Zbiór Z przeliczalny – wszystkie elementy zbioru Z (nieskończonego) można ponumerować liczbami naturalnymi (ze zbioru \mathcal{N}), tj. ustawić w ciąg (nieskończony) (X_1, X_2, \dots) .

! Zbiór liczb wymiernych \mathcal{Q} jest przeliczalny, gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych \mathcal{R} .

Zbiór Z jest spójny $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} Z = A \cup B \Rightarrow (\overline{A} \cap B \neq \emptyset \vee A \cap \overline{B} \neq \emptyset)$,

tj. zbioru Z nie można rozdzielić na dwa podzbiory A i B tak, by domknięcie jednego podzbioru nie miało punktów wspólnych z drugim podzbiorem.

Zbiór otwarty i spójny, to obszar V , a domknięcie obszaru V , to obszar domknięty $\overline{V} = \text{clos } V = V \cup \partial V$. Obszar domknięty i ograniczony, to bryła.

Zbiór Z jest zwarty $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ każdy ciąg ograniczony punktów zbioru Z ma podciąg zbieżny do punktu zbioru Z , tj. $(\forall (X_1, X_2, \dots) \subset Z \ \rho((X_i)) < \infty) \Rightarrow$
 $(\exists X \in Z \wedge \exists (i_j) \subset (1, 2, \dots) \lim_{i_j \rightarrow \infty} X_{i_j} = X)$.

! Z zwarty, to Z domknięty i ograniczony.

Zbiór Z jest wypukły $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall X, Y \in Z \ \overline{XY} \subset Z$ (\overline{XY} - odcinek o końcach X i Y).

Odcinek o końcach X i Y w przestrzeni D :

$$\overline{XY} \stackrel{\text{def.}}{=} \{Z \in D : d(X, Y) = d(X, Z) + d(Z, Y)\}.$$

1.3. Przestrzenie metryczne ośrodkowe i zupełne

Definicja. Niech $\{D, d\}$ przestrzeń metryczna. Przestrzeń D jest ośrodkowa, jeżeli istnieje w niej zbiór B co najwyżej przeliczalny i gęsty ($\overline{B} = D$).

! Dowolny podzbiór Z przestrzeni ośrodkowej $\{D, d\}$ jest przestrzenią ośrodkową $\{Z, d'\}$ z metryką $d' = d|_{Z \times Z}$.

!! Zbiór \mathcal{R} jako przestrzeń metryczna jest ośrodkowy.

!!! Produkt (iloczyn) kartezjański przestrzeni metrycznych $D_1 \times \dots \times D_n$ jest przestrzenią ośrodkową \Leftrightarrow wszystkie przestrzenie D_i są ośrodkowe (por. P. 3 z p. 1.1).

Definicja. Niech $\{D, d\}$ przestrzeń metryczna. Przestrzeń D jest zupełna, jeżeli każdy ciąg (X_n) punktów przestrzeni D , spełniający warunek Cauchy'ego:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N} \ n, m > N \ d(X_n, X_m) < \varepsilon,$$

jest zbieżny do pewnego $X \in D$ (tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$).

! Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.

!! Zbiór \mathcal{R} jako przestrzeń metryczna jest zupełny.

!!! Podzbiór Z przestrzeni zupełnej $\{D, d\}$ jest przestrzenią zupełną $\{Z, d'\}$ z metryką

$$d' = d|_{Z \times Z} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} Z = \text{clos } Z \text{ (} Z \text{ jest domknięty)}.$$

!V Produkt (iloczyn) kartezjański przestrzeni zupełnych $D_1 \times \dots \times D_n$ jest przestrzenią zupełną \Leftrightarrow wszystkie przestrzenie D_i są zupełne (por. P. 3 z p. 1.1).

MMIL II

Część pierwsza. ANALIZA

2. Przestrzenie liniowe

- 2.1. Konwencja sumacyjna
- 2.2. Pojęcie przestrzeni liniowej
- 2.3. Baza algebraiczna. Przestrzenie skończone wymiarowe
- 2.4. Przestrzenie unormowane i przestrzenie unitarne
- 2.5. Przestrzeń wektorowa euklidesowa

2. PRZESTRZENIE LINIOWE

2.1. Konwencja sumacyjna

W sumach wielkości indeksowanych postaci:

$$A = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n,$$

$$B_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_j = \alpha_{i1} \beta_1 + \alpha_{i2} \beta_2 + \dots + \alpha_{in} \beta_n,$$

$$C = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn},$$

pomijamy symbol \sum , jeśli wskaźniki podlegające sumowaniu, zwane **martwymi**, powtarzają się. Piszemy zatem:

$$A = \alpha_i \beta_i, \quad B_i = \alpha_{ij} \beta_j, \quad C = \alpha_{ii}.$$

Oznaczenie wskaźnika martwego jest nieistotne:

$$A = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n.$$

Wskaźniki nie podlegające sumowaniu, zwane **wolnymi**, muszą być jednakowe po obu stronach równości, Na przykład:

$$B_i = \alpha_{ij} \beta_j.$$

Wskaźniki umieszczamy także na górnym poziomie (i bywa, że po lewej stronie litery rdzeniowej). Na przykład:

$$A = \alpha_i^i, \quad B^j = \alpha^{ij} \beta_i, \quad {}_r^k C = {}_r^k \alpha_i \beta^i.$$

Nie należy wskaźników na górnym poziomie rozumieć jako wykładników potęg. Wielkości potęgowane umieszczamy w nawiasach:

$$(\alpha^i)^2, \quad (\alpha^i)^j \beta_j, \quad ((\alpha_{ij})^k \beta_k).$$

Jeżeli wyróżniamy „i-ty” składnik sumy

$$\alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n,$$

to wskaźnik tego składnika podkreślamy (wyłączamy go z konwencji sumacyjnej), czyli:

$$\underline{\alpha}_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \underline{\alpha}_i \beta_i + \dots + \alpha_n \beta_n.$$

Wielkościami numerowanymi za pomocą wskaźników mogą być wielkości liczbowe i wektorowe (a także inne obiekty matematyczne).

2.2. Pojęcie przestrzeni liniowej

Definicja. **Przestrzenią liniową (wektorową)** nad ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R} nazywamy niepusty zbiór \vec{V} elementów, zwanych wektorami (oznaczanych przez \vec{x}, \vec{y}, \dots) wraz z dwoma działaniami:

- **sumą wektorów**

$$\vec{V} \times \vec{V} \rightarrow \vec{V}; \quad \vec{z} = \vec{x} + \vec{y},$$

- **iloczynem wektora przez liczbę**

$$\mathcal{R} \times \vec{V} \rightarrow \vec{V}; \quad \vec{z} = \alpha \vec{x},$$

spełniającymi warunki:

1) łączności dodawania

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}),$$

2) przemienności dodawania

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x},$$

3) rozdzielności dodawania względem mnożenia

$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}, \quad (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x},$$

4) łączności iloczynu

$$\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x},$$

5) istnienia wektora zerowego $\vec{0}$ takiego, że

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x},$$

6) istnienia wektora przeciwnego $\vec{-x}$ do wektora \vec{x} takiego, że

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{x} - \vec{x} = \vec{0},$$

7) niezmienniczości wektora mnożonego przez liczbę 1

$$1\vec{x} = \vec{x},$$

dla dowolnych wektorów $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ oraz liczb α, β .

! $0\vec{x} = \vec{0}$ dla każdego $\vec{x} \in \vec{V}$ ($\vec{x} + 0\vec{x} = 1\vec{x} + 0\vec{x} = (1+0)\vec{x} = 1\vec{x} = \vec{x}$, $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x} \Rightarrow 0\vec{x} = \vec{0}$).

W poniższych przykładach przedstawiamy trzy główne kategorie przestrzeni wektorowych.

Przykład. **Przestrzeń arytmetyczna**

Zbiór

$$\mathcal{R}^n = \{ \overset{\text{def}}{\vec{x}} = (x_1, \dots, x_n) = \overset{\text{ozn}}{(x_i)}; x_i \in \mathcal{R}, i = 1, \dots, n \}$$

czyli

$$\mathcal{R}^n = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \dots \times \mathcal{R}$$

n razy

z działaniami

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{y} &\stackrel{\text{def}}{=} (x_i + y_i) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \alpha \vec{x} &\stackrel{\text{def}}{=} (\alpha x_i) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)\end{aligned}$$

dla dowolnych $\vec{x} = (x_i), \vec{y} = (y_i) \in \mathcal{R}^n$ i $\alpha \in \mathcal{R}$, jest przestrzenią wektorową.

Wektorem zerowym jest ciąg n zer:

$$\vec{0} = (0, \dots, 0),$$

a wektorem przeciwnym do wektora – ciągu $\vec{x} = (x_i)$ jest ciąg liczb przeciwnych do x_i :

$$-\vec{x} = (-x_i) = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Dla $n = 1$ wnioskujemy, że \mathcal{R} jest także przestrzenią wektorową przy

$$\mathcal{R}^1 \stackrel{\text{ozn}}{=} \mathcal{R}, \quad (x_1) \stackrel{\text{ozn}}{=} x.$$

Przykład. Przestrzeń funkcyjna

Niech Ω dowolny zbiór, a \vec{V} dowolna przestrzeń wektorowa. Zbiór funkcji (odwzorowań)

$$F(\Omega, \vec{V}) = \{ \vec{x} = \vec{f}(\xi), \xi \in \Omega \},$$

wraz z działaniami

$$(\vec{f} + \vec{g})(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{f}(\xi) + \vec{g}(\xi), \quad \xi \in \Omega,$$

$$(\alpha \vec{f})(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \vec{f}(\xi), \quad \xi \in \Omega$$

dla dowolnych $\vec{x} = \vec{f}(\xi), \vec{y} = \vec{g}(\xi)$ ($\xi \in \Omega$) i $\alpha \in \mathcal{R}$, tworzy przestrzeń wektorową.

Przykład. Przestrzeń ciągów

Niech $\{\vec{V}_i, i \in I\}$ (I - zbiór skończony lub przeliczalny indeksów) będzie rodziną przestrzeni wektorowych. Zbiór

$$\vec{V} = \{ \vec{x} = (\vec{x}_i); \vec{x}_i \in \vec{V}_i, i \in I \}$$

z działaniami

$$\vec{x} + \vec{y} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{x}_i + \vec{y}_i), \quad \alpha \vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \vec{x}_i)$$

dla dowolnych $\vec{x} = (\vec{x}_i), \vec{y} = (\vec{y}_i) \in \vec{V}$ i $\alpha \in \mathcal{R}$, jest przestrzenią wektorową.

Na przykład, gdy $I = \mathcal{N}$ (zbiór liczb naturalnych), to

$$\vec{x} = (\vec{x}_i) = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \dots) - \text{ciąg wektorów},$$

a gdy ponadto $\vec{V}_i = \mathcal{R}$, $i \in I = \mathcal{N}$, to

$$\vec{x} = (x_i) = (x_1, \dots, x_n, \dots) - \text{ciąg liczbowy}.$$

Definicja. Zbiór \vec{U} zawarty w przestrzeni wektorowej (liniowej) \vec{V} nazywamy podprzestrzenią (liniową) przestrzeni \vec{V} , jeżeli \vec{U} z działaniami określonymi w \vec{V} i ograniczonymi do \vec{U} stanowi przestrzeń wektorową.

Twierdzenie (kryterium podprzestrzeni). Jeżeli dla każdego $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{U} \subset \vec{V}$ i $\alpha \in \mathcal{R}$ jest $\vec{x} + \vec{y} \in \vec{U}$ i $\alpha \vec{x} \in \vec{U}$, to \vec{U} jest podprzestrzenią (liniową) przestrzeni \vec{V} .

Definicja. Niech $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\} \subset \vec{V}$ dowolny skończony podzbiór wektorów i niech $(\vec{v}_i) \stackrel{\text{ozn}}{=} (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$. Wektor

$$\vec{x} = \xi_i \vec{v}_i \quad (! \text{konwencja sumacyjna}),$$

dla $(\xi_i) = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathcal{R}^m$, nosi nazwę **kombinacji liniowej** wektorów – ciągu (\vec{v}_i) .

Przykład. Niech

$$\vec{U} \stackrel{\text{ozn}}{=} \text{lin}(\vec{v}_i) \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{x} = \xi_i \vec{v}_i; (\xi_i) \in \mathcal{R}^m\},$$

gdzie (\vec{v}_i) dowolny ustalony podzbiór (ciąg, układ) m wektorów przestrzeni wektorowej \vec{V} .

Zbiór \vec{U} wszystkich kombinacji liniowych wektorów $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni \vec{V} (na mocy kryterium) – tzw. **przestrzenią generowaną** przez układ wektorów $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ lub przestrzenią rozpiętą przez układ (zbiór, ciąg) wektorów $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$.

Definicja. Niech \vec{U}_1 i \vec{U}_2 podprzestrzenie liniowe przestrzeni liniowej \vec{V} . Zbiór

$$\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 = \{\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2; \vec{x}_1 \in \vec{U}_1, \vec{x}_2 \in \vec{U}_2\}$$

nazywamy **sumą podprzestrzeni** \vec{U}_1 i \vec{U}_2 . Jeżeli, ponadto, $\vec{U}_1 \cap \vec{U}_2 = \{\vec{0}\}$, to mamy wtedy **sumę prostą** \vec{U} podprzestrzeni \vec{U}_1 i \vec{U}_2 , co zapisujemy $\vec{U} = \vec{U}_1 \oplus \vec{U}_2$.

! Suma, a w konsekwencji suma prosta $\vec{U} = \vec{U}_1 \oplus \vec{U}_2$ podprzestrzeni (liniowych) \vec{U}_1 i \vec{U}_2 przestrzeni liniowej \vec{V} jest jej podprzestrzenią liniową.

2.3. Przestrzenie skończenie wymiarowe. Baza algebraiczna

Definicja. Podzbiór $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \stackrel{\text{ozn}}{=} (\vec{e}_i) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ przestrzeni wektorowej \vec{V} nazywa się **liniowo niezależnym**, jeżeli prawdziwa jest implikacja:

$$\alpha_i \vec{e}_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Definicja. Zbiór $\vec{B} = (\vec{e}_i)$ wektorów z przestrzeni liniowej \vec{V} nazywamy **bazą** (algebraiczną), jeżeli:

- 1) \vec{B} jest liniowo niezależny,
- 2) \vec{B} generuje \vec{V} ($\text{lin } \vec{B} = \vec{V}$).

Definicja. Jeżeli w przestrzeni \vec{V} istnieje n -elementowa baza \vec{B} , to \vec{V} nazywamy **n -wymiarową (skończenie wymiarową o wymiarze n)** i piszemy $\dim \vec{V} = n$.

! Jeżeli istnieje w \vec{V} baza n -elementowa, to istnieje nieskończenie wiele baz i każda jest n -elementowa.

!! Jeżeli \vec{B} jest n -elementową bazą przestrzeni \vec{V} , to

$$\forall \vec{x} \in \vec{V} \exists (x^i) \in \mathcal{R}^n \quad \vec{x} = x^i \vec{e}_i,$$

gdzie (x^i) są tzw. współczynnikami rozkładu lub **współrzędnymi** wektora \vec{x} w bazie \vec{B} . Przy tym rozkład ten jest jednoznaczny, bowiem

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = y^i \vec{e}_i \Rightarrow (x^i - y^i) \vec{e}_i = \vec{0} \Rightarrow x^i - y^i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Przykład. Bazą przestrzeni arytmetycznej \mathcal{R}^n jest układ ciągów („ n -tek”)

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1), \end{aligned}$$

czyli

$$\vec{e}_i = (\delta_{ij}),$$

gdzie

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n)$$

jest tzw. **symbolem Kroneckera**.

! Przestrzeń funkcyjna $F(\Omega; \vec{V})$ jest w ogólności nieskończenie wymiarowa.

Przykład. Niech (\vec{e}_i) ($i = 1, \dots, k, k+1, n$) wektory liniowo niezależne przestrzeni \vec{V} . Wtedy

$$\text{lin}_{i=1, \dots, n} (\vec{e}_i) = \text{lin}_{i=1, \dots, k} (\vec{e}_i) \oplus \text{lin}_{j=k+1, \dots, n} (\vec{e}_j)$$

!! Niech (\vec{e}_i) i $(\vec{e}_i)^{\text{ozn}} = (\vec{e}_{i'})$ ($i, i' = 1, \dots, n$) będą dwiema bazami przestrzeni n -wymiarowej. Zatem:

$$\vec{e}_{i'} = A_{i'}^i \vec{e}_i, \quad \vec{e}_i = A_i^{i'} \vec{e}_{i'},$$

a w konsekwencji

$$\vec{e}_{i'} = A_{i'}^i \vec{e}_i = A_{i'}^i A_i^{j'} \vec{e}_{j'}, \quad \vec{e}_{i'} = \delta_{i'}^{j'} \vec{e}_{j'},$$

skąd

$$A_{i'}^i A_i^{j'} = \delta_{i'}^{j'},$$

czyli w notacji macierzowej

$$[A_{i'}^i][A_i^{j'}] = [\delta_{i'}^{j'}]$$

lub w zapisie absolutnym

$$\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1},$$

przy

$$\mathbf{A} = [A_{i'}^i], \quad \mathbf{A}' = [A_i^{i'}],$$

- tzw. **macierzach transformacji baz** (z bazy (\vec{e}_i) do $(\vec{e}_{i'})$ i na odwrót).

Jeżeli $\det \mathbf{A} > 0$, to bazy (\vec{e}_i) i $(\vec{e}_{i'})$ są **zgodnie zorientowane**.

Niech

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x^{i'} \vec{e}_{i'}$$

Wobec

$$\vec{z} = x^{i'} \vec{e}_{i'} = x^{i'} A_i^{i'} \vec{e}_i = x^i \vec{e}_i = x^i A_i^{i'} \vec{e}_{i'},$$

mamy

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i, \quad x^i = A_i^i x^{i'},$$

czyli (w notacji macierzowej)

$$[x^{i'}] = [A_i^{i'}][x^i], \quad [x^i] = [A_i^i][x^{i'}].$$

Otrzymaliśmy regułę transformacji współrzędnych wektora.

przestrzenie liniowe (wektorowe)



2.4. Przestrzenie unormowane i unitarne

Definicja. Przestrznią (liniową, wektorową) **unormowaną** nazywamy parę (układ) $\{\vec{V}, |\cdot|\}$, gdzie \vec{V} jest przestrzenią wektorową, a $|\cdot|$ funkcją, zwaną **normą**, o następujących własnościach:

$$|\cdot|: \vec{V} \rightarrow [0, \infty) \subset \mathcal{R},$$

- 1) $|\vec{x}| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
- 2) $|\alpha \vec{x}| = |\alpha| |\vec{x}| \quad \forall \alpha \in \mathcal{R} \quad \forall \vec{x} \in \vec{V}$,
- 3) $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V}$.

Liczba $|\vec{x}|$ – **norma** lub **długość** wektora \vec{x} .

! Wektor jednostkowy (inaczej **wersor**) – wektor o długości jednostkowej (\vec{i} – wersor $\Leftrightarrow |\vec{i}| = 1$).

Przykład. Przestrzeń wektorowa arytmetyczna \mathcal{R}^n jest unormowana – z normą dla $\vec{x} = (x_i)$:

$$|\vec{x}|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$|\vec{x}|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2},$$

$$|\vec{x}|_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

!! Jeżeli przestrzeń \vec{V} jest skończenie wymiarowa, to każde dwie normy na \vec{V} są **równoważne**, tzn.

$$\exists \alpha, \beta > 0 \quad \alpha |\vec{x}|_1 \leq |\vec{x}|_2 \leq \beta |\vec{x}|_1 \quad \forall \vec{x} \in \vec{V}.$$

!!! Jeżeli \vec{U} jest podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej $\{\vec{V}; |\cdot|\}$, to \vec{U} jest również unormowana – z normą $|\cdot|$ obciętą do \vec{U} .

Twierdzenie. Niech $\{\vec{V}; |\cdot|\}$ przestrzeń liniowa unormowana, $\mathbf{D} = \vec{V}$ i $d: \mathbf{D} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{R}$:

$d(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{y} - \vec{x}|$, $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{V}$. Wtedy $\{\mathbf{D}, d\}$ jest przestrzenią metryczną. Metrykę d nazywamy **generowaną (indukowaną) przez normę $|\cdot|$** .

Definicja. Jeżeli przestrzeń unormowana jest zupełna ze względu na metrykę generowaną przez normę, to nosi ona nazwę **przestrzeni Banacha**.

! Przestrzeń unormowana skończenie wymiarowa jest przestrzenią Banacha.

!! Podprzestrzeń skończenie wymiarowa przestrzeni unormowanej jest domknięta.

Przykład. Niech \mathcal{K} zbiór zwarty przestrzeni \mathcal{R}^n . Niech $C(\mathcal{K}, \mathcal{R}^m)$ przestrzeń liniowa funkcji ciągłych na \mathcal{K} o wartościach w \mathcal{R}^m (jako podprzestrzeń liniowa przestrzeni funkcyjnej $F(\mathcal{K}, \mathcal{R}^m)$ funkcji ograniczonych). Przestrzeń ta jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{K}} |f(x)| \quad (|\cdot| \text{ dowolna norma w } \mathcal{R}^m)$$

Przykład. Niech \mathcal{U} zbiór otwarty w przestrzeni \mathcal{R}^n . Niech $L(\mathcal{U}, \mathcal{R})$ przestrzeń liniowa funkcji całkownych na \mathcal{U} o wartościach w \mathcal{R} – jako podprzestrzeń liniowa przestrzeni funkcyjnej $F(\mathcal{U}, \mathcal{R})$. Przestrzeń ta jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|f\| = \int_{\mathcal{U}} |f(x)| dV \quad (dV - \text{miara elementarnego podobszaru } dV)$$

w zbiorze \mathcal{U} równa $dV = dx_1 \dots dx_n$).



Definicja. **Przestrzenią (liniową) unitarną (przestrzenią z iloczynem skalarnym)** nazywamy parę $\{\vec{V}; \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, gdzie \vec{V} jest przestrzenią liniową (wektorową), a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ odwzorowaniem

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \vec{V} \times \vec{V} \rightarrow \mathcal{R} \quad (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \stackrel{\text{ozn}}{=} \vec{x} \cdot \vec{y}),$$

zwanym **iloczynem skalarnym** (produktem wewnętrznym), spełniającym następujące warunki:

- 1) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$, $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
- 2) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$,
- 3) $(\alpha \vec{x}' + \beta \vec{x}'') \cdot \vec{y} = \alpha \vec{x}' \cdot \vec{y} + \beta \vec{x}'' \cdot \vec{y}$.

Twierdzenie. Przestrzeń unitarna jest unormowana („automatycznie”) – z normą:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}, \quad \vec{x} \in \vec{V}$$

(tzw. **normą generowaną przez iloczyn skalarny**).

Definicja. Jeżeli przestrzeń unitarna jest zupełna ze względu na metrykę indukowaną przez normę generowaną przez iloczyn skalarny, to nosi ona nazwę **przestrzeni Hilberta**.

! Przestrzeń unitarna skończenie wymiarowa jest przestrzenią Hilberta.

!! Prawdziwa jest nierówność Cauchy'ego – Buniakowskiego – Schwartza):

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$$

Definicja. Wektory \vec{x} i \vec{y} nazywamy prostopadłymi ($\vec{x} \perp \vec{y}$), gdy $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

!!! Wektor $\vec{0}$ jest prostopadły do każdego wektora \vec{x} .

Przykład. W przestrzeni \mathcal{R}^n iloczyn skalarny, zwany **standardowym**, określony jest następująco:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \vec{x} = (x_i), \quad \vec{y} = (y_i).$$

Generuje on normę (tzw. normę **euklidesową**):

$$|\vec{x}|_2 = \sqrt{x_i x_i} \bullet$$

Przykład. Niech \mathcal{U} oznacza obszar w przestrzeni \mathcal{R}^n i niech

$$\mathbf{L}^2_\rho(\mathcal{U}) = \left\{ f \in F(\mathcal{U}; \mathcal{R}) : \int_{\mathcal{U}} \rho(x) f^2(x) dV < \infty \right\},$$

przy $dV = dx_1 \dots dx_n$ i $x = (x_1, \dots, x_n)$, będzie przestrzenią tych funkcji z przestrzeni funkcyjnej $F(\mathcal{U}; \mathcal{R})$, które są całkowne na \mathcal{U} z kwadratem i wagą $\rho : \mathcal{U} \rightarrow [0, \infty)$. Jest to przestrzeń liniowa (jako podprzestrzeń liniowa przestrzeni $F(\mathcal{U}; \mathcal{R})$), a przy tym unitarna z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_{\mathcal{U}} \rho(x) f(x) g(x) dV.$$

Dla $\rho \equiv 1$ mamy przestrzeń funkcji całkownych z kwadratem na obszarze \mathcal{U} , tj. przestrzeń Hilberta $\mathbf{L}^2(\mathcal{U})$ z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{U}} f(x) g(x) dV.$$

Iloczyn skalarny generuje normę średniokwadratową – odpowiednio z wagą ρ i z wagą $\rho \equiv 1$

$$\|f\|_\rho = \left(\int_{\mathcal{U}} \rho(x) f^2(x) dV \right)^{1/2}, \quad \|f\| = \left(\int_{\mathcal{U}} f^2(x) dV \right)^{1/2}.$$

Przykład. Przestrzenią unitarną jest przestrzeń ciągów sumowalnych z kwadratem z wagą $\rho = (\rho_i)$ i z wagą $\rho = (1, 1, \dots)$:

$$l^2_\rho(I) = \left\{ \vec{x} = (x_i); x_i \in \mathcal{R} \quad \forall i \in I \right\}, \quad I - \text{przeliczalny zbiór wskaźników (indeksów),}$$

$$l^2(I) = \{ \vec{x} = (x_i); x_i \in \mathcal{R} \ \forall i \in I \},$$

w szczególności, gdy $l^2_\rho(I) = \{ \vec{x} = (x_i); x_i \in \mathcal{R} \ \forall i \in I = \mathcal{N} \}$ oraz

$$l^2 = \left\{ (x_i); x_i \in \mathcal{R} \ \forall i \in I = \mathcal{N}, \sum_i x_i^2 < \infty \right\},$$

Następujące twierdzenia są prawdziwe w odniesieniu do przestrzeni unitarnej:

Twierdzenie (Pitagorasa). Jeżeli $\vec{x} \perp \vec{y}$, to $|\vec{x} + \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$.

Twierdzenie. Niech \vec{U} podzbiór przestrzeni unitarnej \vec{V} . Zbiór $\vec{U}^\perp = \{ \vec{y} \in \vec{V}; \vec{y} \perp \vec{x}, \vec{x} \in \vec{U} \}$, zwany dopełnieniem ortogonalnym, jest podprzestrzenią liniową przestrzeni \vec{V} .

Twierdzenie (o rzucie ortogonalnym). Niech \vec{V} przestrzeń unitarna, a \vec{U} jej skończenie wymiarowa podprzestrzeń liniowa. Wtedy

$$\forall \vec{x} \in \vec{V} \ \exists \vec{a} \in \vec{U} \ \vec{x} = \vec{y} + \vec{a}, \ \{ \vec{y} \} \perp \vec{U}.$$

Wektor $\vec{a} = \text{rzut}_{\vec{U}} \vec{x}$ nosi nazwę **rzutu ortogonalnego** \vec{x} na \vec{U} .

Twierdzenie. Zbiór $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ jest liniowo niezależny w $\{ \vec{V}; <, > \}$, jeżeli $G = \det [\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j] \neq 0$.

Definicja. Ciąg (\vec{x}_n) wektorów przestrzeni unormowanej \vec{V} jest **zbieżny do wektora** \vec{x} w normie $|\cdot|$ przestrzeni \vec{V} ($\vec{x}_n \xrightarrow{|\cdot|} \vec{x}$), tj. ma granicę \vec{x} ($\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{x}$), jeśli $|\vec{x}_n - \vec{x}| \xrightarrow{|\cdot|} 0$.

Definicja. Wektor \vec{s} jest **sumą nieskończoną (szeregiem)** ciągu nieskończonego (\vec{x}_n) wektorów przestrzeni unormowanej \vec{V} , tzn. $\vec{s} = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{x}_n$, jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{s}_n = \vec{s}$, gdzie $\vec{s}_n = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i$

((\vec{s}_n) ciąg sum częściowych). Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \vec{x}_n$ jest zbieżny (do wektora \vec{s} w normie $|\cdot|$ przestrzeni \vec{V}).

! Jeżeli $\vec{s} = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{x}_n$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{r}_n = \vec{0}$ przy $\vec{r}_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \vec{x}_k = \vec{s} - \vec{s}_n$, $n \in \mathcal{N}$.

Ogólna teoria szeregów Fouriera

Niech \vec{V} przestrzeń wektorowa (liniowa) z iloczynem skalarnym „ \cdot ”, $(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ i normą $|\cdot|$ generowaną przez ten iloczyn.

Definicja. Ciąg (\vec{e}_n) elementów przestrzeni \vec{V} nazywamy **układem ortogonalnym / ortonormalnym**, jeżeli $\vec{e}_k \perp \vec{e}_m$ dla $k \neq m$ / $\vec{e}_k \cdot \vec{e}_m = \delta_{km}$ ($k, m = 1, 2, 3, \dots$).

! Elementy ciągu (\vec{e}_n) można indeksować dowolnymi elementami ze zbioru przeliczalnego (np. $(\vec{e}_{n,m})$ przy $(n,m) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$). Numerowanie liczbami naturalnymi jest tu stosowane dla ustalenia uwagi.

!! Układ ortogonalny (\vec{g}_n) można łatwo zortonormalizować: $\vec{e}_n = \vec{g}_n / |\vec{g}_n|$ ($\vec{g}_n \neq \vec{0}$).

Definicja. Szeregiem Fouriera elementu \vec{x} z przestrzeni \vec{V} względem układu ortonormalnego (\vec{e}_n) nazywamy szereg (jeśli jest zbieżny) $\sum_{n=1}^{\infty} (\vec{x} \cdot \vec{e}_n) \vec{e}_n$, co zapisujemy następująco:

$$\vec{x} \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\vec{x} \cdot \vec{e}_n) \vec{e}_n.$$

Definicja. Układ ortonormalny (\vec{e}_n) w przestrzeni \vec{V} nazywamy:

a) **bazą hilbertowską**, jeżeli

$$\forall \vec{x} \in \vec{V} \quad \vec{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (\vec{x} \cdot \vec{e}_n) \vec{e}_n$$

(szereg Fouriera elementu \vec{x} jest zbieżny do \vec{x} w normie dla każdego \vec{x} z \vec{V}).

b) **układem zupełnym**, jeśli

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_n = 0 \quad \forall n \in \mathcal{N} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0},$$

c) **układem zamkniętym**, jeżeli

$$\forall \vec{x} \in \vec{V} \quad |\vec{x}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\vec{x} \cdot \vec{e}_n)^2.$$

Twierdzenie. Niech (\vec{e}_n) układ ortonormalny w przestrzeni Hilberta \vec{V} . Wtedy następujące warunki są równoważne:

- (\vec{e}_n) jest bazą hilbertowską przestrzeni \vec{V} ,
- (\vec{e}_n) jest układem zupełnym przestrzeni \vec{V} ,
- (\vec{e}_n) jest układem zamkniętym przestrzeni \vec{V} .

Twierdzenie. W ośrodkowej przestrzeni Hilberta istnieje baza Hilberta.

Uwaga. Jeżeli (\vec{g}_n) jest układem ortogonalnym przestrzeni unitarnej \vec{V} (wektory $\vec{e}_n = \vec{g}_n / |\vec{g}_n|$ tworzą układ ortonormalny), to mamy następujące definicje:

- szeregu Fouriera elementu \vec{x} z przestrzeni \vec{V} względem układu ortogonalnego

$$\vec{x} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vec{x} \cdot \vec{g}_n}{|\vec{g}_n|^2} \vec{g}_n,$$

- bazy hilbertowskiej (\vec{g}_n)

$$\vec{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vec{x} \cdot \vec{g}_n}{|\vec{g}_n|^2} \vec{g}_n,$$

- układu zupełnego (\vec{g}_n)

$$\vec{x} \perp \vec{g}_n = 0 \quad \forall n \in \mathcal{N} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0},$$

- układu zamkniętego (\vec{g}_n)

$$|\vec{x}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\vec{x} \cdot \vec{g}_n)^2}{|\vec{g}_n|^2}.$$

Uwaga. Niech \mathcal{V} obszar domknięty¹ w przestrzeni \mathcal{R}^n i niech

$$L_n^2 = \left\{ u : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R}; \int_{\mathcal{V}} u^2(x) dV < \infty \right\}$$

przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem na obszarze \mathcal{V} ($x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V}$). Jest to przestrzeń liniowa, a przy tym unitarna (Hilberta) z iloczynem skalarnym:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathcal{V}} u(x)v(x) dV$$

i normą

$$\|u\| = \left(\int_{\mathcal{V}} u^2(x) dV \right)^{1/2}.$$

W przestrzeni tej dwie funkcje uważamy za równe, jeżeli są równe prawie wszędzie na \mathcal{V} (notacja: $u = v$), tzn. z wyjątkiem zbioru, którego miara V (długość dla $n=1$, pole dla $n=2$, objętość dla $n=3$) jest równa zero (jeżeli u i v są ciągłe, to $u = v$ oznacza $u \equiv v$).

Uwaga. Niech (φ_n) oznacza układ ortogonalny zupełny funkcji w przestrzeni $L_n^2(\mathcal{V})$ i niech

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi_n, \quad u_n = \frac{\langle u, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2},$$

oznacza szereg Fouriera funkcji u .

Zbieżność w normie $\|\cdot\|$, czyli tzw. **zbieżność średniokwadratowa** szeregu s do funkcji u , tj.

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi_n(x),$$

gdzie

$$u_n = \frac{\int_{\mathcal{V}} u(x) \varphi_n(x) dV}{\left| \int_{\mathcal{V}} \varphi_n^2(x) dV \right|}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

oznacza, że

¹ czyli domknięcie pewnego obszaru

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{V}} \left[u(x) - \sum_{n=1}^N u_n \varphi_n(x) \right]^2 dV = 0.$$

Oprócz tej zbieżności możemy jeszcze rozważać zbieżność punktową szeregu s do funkcji u :

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi_n(x), \quad x \in \mathcal{V},$$

tj. zbieżność ciągu liczbowego dla każdego x

$$u(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_n \varphi_n(x),$$

czyli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad \exists N \in \mathcal{N} \quad \forall n > N \quad |u(x) - \sum_{n=1}^N u_n \varphi_n(x)| < \varepsilon,$$

a także zbieżność jednostajną szeregu s do funkcji u na zbiorze zwartym² $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$

$$u(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi_n(x), \quad x \in \mathcal{K},$$

gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathcal{N} \quad \forall n > N \quad \forall x \in \mathcal{K} \quad |u(x) - \sum_{n=1}^N u_n \varphi_n(x)| < \varepsilon.$$

² zbiór zwarty w przestrzeni \mathcal{R}^n – zbiór domknięty i ograniczony

2.5. Przestrzeń euklidesowa

Definicja. Przez **wektorową** (liniową) **przestrzeń euklidesową** rozumiemy przestrzeń wektorową skończenie wymiarową z iloczynem skalarnym i normą generowaną przez ten iloczyn.

Przykład. Jak wcześniej to już skonstatowano, ale przypominamy dla podkreślenia, że przestrzeń arytmetyczna \mathcal{R}^n ciągów $\vec{x} = (x_i) = (x_1, \dots, x_n)$ jest wektorowa skończenie wymiarowa (n -wymiarowa) z działaniami

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \quad \alpha(x_i) = (\alpha x_i), \quad \forall (x_i), (y_i) \in \mathcal{R}^n, \quad \alpha \in \mathcal{R},$$

a formuła

$$(x_i) \cdot (y_i) = x_i y_i$$

określa iloczyn skalarny (który generuje normę $|(x_i)| = \sqrt{x_i x_i}$) – czyli \mathcal{R}^n jest przestrzenią euklidesową.

Baza standardowa: $(\delta_{ij}) = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in})$ ($i = 1, \dots, n$) jest ortonormalna ($(\delta_{ij}) \cdot (\delta_{kj}) = \delta_{ij} \delta_{kj} = \delta_{ik}$), a więc jest hilbertowska, co w konsekwencji oznacza, że

$$(x_i) = \sum_{k=1}^n x_k (\delta_{ki}), \quad |(x_i)|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Niech (\vec{e}_n) będzie ustaloną (dowolną) bazą przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej \vec{E} . Układ liczb (G_{ij}) , gdzie

$$G_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j,$$

nazywamy **obiektem** lub **tensorem podstawowym**, zaś $\mathbf{G} = [G_{ij}]$, a $G = \det[G_{ij}]$ – wyróżnikiem obiektu podstawowego. Przy tym jest:

$$G_{ij} = G_{ji} \quad (\mathbf{G} = \mathbf{G}^T), \quad G > 0, \quad G_{ii} > 0.$$

Niech

$$[G^{ij}] = [G_{ij}]^{-1}.$$

Układ liczb (G^{ij}) nazywamy **obiektem** (tensorem) **podstawowym odwrotnym**. Oczywiście jest $[G^{ij}] = \mathbf{G}^{-1}$. Ponieważ $\mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{I}$ (macierz jednostkowa), więc

$$G_{ik} G^{kj} = \delta_i^j,$$

(δ_i^j) – symbol Kroneckera). Ponadto

$$G^{ij} = G^{ji}, \quad \det[G^{ij}] = 1/G.$$

Następnie definiujemy wektory:

$$\vec{e}^i = G^{ij} \vec{e}_j \quad (i = 1, \dots, n).$$

Przy tym mamy

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}_k = (G^{ij} \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k = G^{ij} \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = G^{ij} G_{jk} = \delta_k^i,$$

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}^k = (G^{ij} \vec{e}_j) \cdot \vec{e}^k = G^{ij} \vec{e}_j \cdot \vec{e}^k = G^{ij} \delta_j^k = G^{ik}.$$

Ponieważ $\det[\vec{e}^i \cdot \vec{e}^k] = \det[G^{ik}] = 1/G$, więc (\vec{e}^i) jest bazą przestrzeni \vec{E} – nazywamy ją **kobazą (bazą wzajemną)** bazy (\vec{e}_i) .

Niech $\vec{x} \in \vec{E}$ – dowolny wektor. Dokonujemy rozkładu \vec{x} w obu bazach (\vec{e}_i) i (\vec{e}^i) :

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x_i \vec{e}^i.$$

Współrzędne (x^i) wektora \vec{x} nazywamy **współrzędnymi kontrawariantnymi**, a współrzędne (x_i) – **kowariantnymi**. Przy tym jest:

$$x^i = \vec{x} \cdot \vec{e}^i = G^{ij} x_j, \quad x_i = \vec{x} \cdot \vec{e}_i = G_{ij} x^j.$$

Iloczyn skalarny wektorów można przedstawić w następujących postaciach:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = G_{ij} x^i y^j = x^i y_i = G^{ij} x_j y_i = x_j y^j.$$

Niech teraz

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j) = (1, 2) \\ -1, & (i, j) = (2, 1) \\ 0, & (i, j) = (1, 1), (2, 2) \end{cases} \quad \text{dla } n = 2, \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1; & (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1; & (i, j, k) = (2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2) \\ 0; & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \quad \text{dla } n = 3.$$

oraz

$$e_{ij} = \sqrt{G} \epsilon_{ij}, \quad e^{ij} = \frac{1}{\sqrt{G}} \epsilon_{ij}, \quad e^i_j = G^{ik} e_{kj}, \quad e_i^j = G^{jk} e_{ik} \quad (n = 2),$$

$$e_{ijk} = \sqrt{G} \epsilon_{ijk}, \quad e^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{G}} \epsilon_{ijk}, \quad e^i_{jk} = G^{ir} e_{rjk}, \quad e_i^j = G^{jr} e_{irk}, \dots, \quad e^{ij}_k = G_{rk} e^{ijr} \quad (n = 3).$$

Obiekty (ϵ_{ij}) i (ϵ_{ijk}) noszą nazwę **symboli Ricci'ego**, a obiekty (e_{ij}) , (e^{ij}) , \dots , (e_{ijk}) – **pseudotensorów Ricci'ego** (odpowiednio w przestrzeni dwu- i trójwymiarowej).

W przestrzeni trójwymiarowej \vec{E} ($n = 3$) definiuje się iloczyn wektorowy i mieszany wektorów:

$$\vec{x} \times \vec{y} = e_{ijk} x^i y^j \vec{e}^k, \quad \vec{x} \vec{y} \vec{z} = e_{ijk} x^i y^j z^k,$$

przy czym

$$\vec{x} \times \vec{y} = e^{ijk} x_i y_j \vec{e}_k = e^i_{jk} x_i y^j \vec{e}^k = \dots,$$

$$\vec{x} \vec{y} \vec{z} = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = e^{ijk} x_i y_j z_k = e^i_{jk} x_i y^j z^k = \dots.$$

Niech teraz (\vec{e}_i) oraz (\vec{e}'_i) będą dwiema bazami, a (\vec{e}^i) oraz (\vec{e}'^i) – ich kobazami. Korzystając z reguły transformacji baz możemy uzyskać następujące **związki transformacyjne** wprowadzonych obiektów:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_i &= A_i^j \vec{e}_j, & \vec{e}_i &= A_i^j \vec{e}'_j, \\ \vec{e}'^i &= A_i^j \vec{e}^j, & \vec{e}^i &= A_i^j \vec{e}'^j, \\ x^i &= A_i^j x'^j, & x^i &= A_i^j x'^j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{i'} &= A_{i'}^i x_i, & x_i &= A_i^{i'} x_{i'}, \\
G_{i'j'} &= A_{i'}^i A_{j'}^j G_{ij}, & G_{ij} &= A_i^{i'} A_j^{j'} G_{i'j'}, \\
G^{i'j'} &= A_i^{i'} A_j^{j'} G^{ij}, & G^{ij} &= A_i^i A_j^j G^{i'j'}, \\
e_{i'j'} &= \in A_{i'}^i A_{j'}^j e_{ij}, & e_{ij} &= \in A_i^{i'} A_j^{j'} e_{i'j'}, \\
e^{i'j'} &= \in A_i^{i'} A_j^{j'} e^{ij}, & e^{ij} &= \in A_i^i A_j^j e^{i'j'}, \\
e_{i'j'k'} &= \in A_{i'}^i A_{j'}^j A_{k'}^k e_{ijk}, & e_{ijk} &= \in A_i^{i'} A_j^{j'} A_k^{k'} e_{i'j'k'}, \\
e^{i'j'k'} &= \in A_i^{i'} A_j^{j'} A_k^{k'} e^{ijk}, & e^{ijk} &= \in A_i^i A_j^j A_k^k e^{i'j'k'},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\in = \text{sgn det}[A_{i'}^i],$$

przy czym

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= x^i \vec{e}_i = x^{i'} \vec{e}_{i'} = x_i \vec{e}^i = x_{i'} \vec{e}^{i'}, \\
\vec{x} \cdot \vec{y} &= G_{ij} x^i y^j = G_{i'j'} x^{i'} y^{j'} = G^{ij} x_i y_j = G^{i'j'} x_{i'} y_{j'}, \\
\vec{x} \times \vec{y} &= e_{ijk} x^i y^j z^k = \in e_{i'j'k'} x^{i'} y^{j'} z^{k'} = \dots = e^{ijk} x_i y_j z_k = \in e^{i'j'k'} x_{i'} y_{j'} z_{k'}, \\
\vec{x} \vec{y} \vec{z} &= e_{ijk} x^i y^j z^k = \in e_{i'j'k'} x^{i'} y^{j'} z^{k'} = \dots = e^{ijk} x_i y_j z_k = \in e^{i'j'k'} x_{i'} y_{j'} z_{k'}.
\end{aligned}$$

Przez **przestrzeń euklidesową zorientowaną** rozumiemy przestrzeń (wektorową) euklidesową z rodziną baz zgodnie zorientowanych ($\text{det}[A_{i'}^i] > 0$, $\in = 1$).

Natomiast przez **przestrzeń wektorową kartezyjską** rozumiemy przestrzeń euklidesową z rodziną baz (dopuszczalnych) ortonormalnych zgodnie zorientowanych (tzw. kartezyjskich).

Niech (\vec{e}_i) baza ortonormalna (kartezyjska), tj.

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

W konsekwencji:

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \delta_{ij}, & G^{ij} &= \delta^{ij}, & G &= 1, & \vec{e}^i &= \vec{e}_i, \\
x_i &= x^i \quad \text{dla dowolnego } \vec{x} = x^i \vec{e}_i = x_i \vec{e}^i.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \delta^{ij} x_i y_j = x_i y_i.$$

Jeżeli (\vec{e}_i) oraz $(\vec{e}_{i'})$ dwie bazy kartezyjskie, to

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{i'} &= A_{i'}^i \vec{e}_i = A_{i'i} \vec{e}_i & (A_{i'i} &= A_{i'}^i)^{\text{ozn}}, \\
\vec{e}_i &= A_i^{i'} \vec{e}_{i'} = A_{ii'} \vec{e}_{i'} & (A_{ii'} &= A_i^{i'})^{\text{ozn}},
\end{aligned}$$

a więc

$$A_{i'i} A_{j'j} \delta_{ij} = \delta_{i'j'},$$

czyli

$$[A_{i'i}][A_{j'j}]^T = [\delta_{i'j'}].$$

! W przestrzeni kartezyjskiej znika różnica pomiędzy kowariatnością i kontrawariatnością.

MMIL II

Część pierwsza. ANALIZA

3. Odwzorowania liniowe i wieloliniowe

- 3.1. Odwzorowania liniowe
- 3.2. Funkcjonały liniowe
- 3.3. Operatory liniowe
- 3.4. Odwzorowania wieloliniowe
- 3.5. Formy dwuliniowe
- 3.6. Produkt dualny
- 3.7. Tensory
- 3.8. Równania liniowe

3. ODWZOROWANIA LINIOWE I WIELOLINIOWE

3.1. Odwzorowania liniowe

Niech \vec{V}, \vec{W} dowolne przestrzenie wektorowe (liniowe).

Definicja. Odwzorowanie $L: \vec{V} \rightarrow \vec{W}; \vec{z} = L\vec{x}$ ($\vec{x} \in \vec{V}, \vec{z} \in \vec{W}$) nazywa się **liniowym**, jeżeli:

$$\begin{aligned}L(\vec{x} + \vec{y}) &= L\vec{x} + L\vec{y} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V}, \\L(\alpha\vec{x}) &= \alpha L\vec{x} \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}, \forall \vec{x} \in \vec{V}.\end{aligned}$$

! Zamiast określenia (terminu) „odwzorowanie liniowe” używa się również określeń: przekształcenie liniowe, funkcja liniowa a także (w szczególnych przypadkach) operator liniowy, funkcjonal liniowy – w zależności od kontekstu lub zwyczaju.

Twierdzenie. Niech $L: \vec{V} \rightarrow \vec{W}$ odwzorowanie liniowe.

- 1) odwzorowanie $L|_{\vec{U}}$ jest liniowe, jeśli \vec{U} jest podprzestrzenią liniową \vec{V} ;
- 2) zbiór $\ker L = L^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{x} \in \vec{V}; L\vec{x} = \vec{0}\}$ jest podprzestrzenią liniową \vec{V} ;
- 3) zbiór $\text{Im } L = L(\vec{V}) = \{\vec{z} \in \vec{W}; \vec{z} = L\vec{x}, \vec{x} \in \vec{V}\}$ jest podprzestrzenią liniową \vec{W} ;
- 4) jeśli \vec{V} jest skończenie wymiarowa, to
$$\dim \vec{V} = \dim(\ker L) + \dim(\text{Im } L);$$
- 5) L jest iniektywne¹ (nieosobliwe) wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker L = \{\vec{0}\}$.

Twierdzenie. Zbiór odwzorowań liniowych \vec{V} w \vec{W} , tj. $L(\vec{V}; \vec{W}) = \{L: \vec{V} \rightarrow \vec{W}; L \text{ - liniowe}\}$, z działaniami:

$$(L' + L'')\vec{x} = L'\vec{x} + L''\vec{x}, \quad (\alpha L)\vec{x} = \alpha(L\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \vec{V},$$

jest przestrzenią liniową (podprzestrzenią liniową przestrzeni $F(\vec{V}; \vec{W})$).

Przykład. Niech $\vec{V} = \mathcal{R}$, a \vec{W} dowolna przestrzeń liniowa. Funkcja

$$L: x \in \mathcal{R} \rightarrow x\vec{w} \in \vec{W}$$

jest liniowa dla każdego ustalonego $\vec{w} \in \vec{W}$ ($L \in L(\mathcal{R}; \vec{W})$). Liniowe jest też odwzorowanie

$$I: \vec{W} \rightarrow L(\mathcal{R}; \vec{W}); I\vec{w} = L, Lx = x\vec{w}.$$

Jest ono ponadto bijektywne², a więc jest izomorfizmem³ między przestrzeniami \vec{W} i $L(\mathcal{R}; \vec{W})$.

¹ odwzorowanie iniektywne = odwzorowanie różnowartościowe

² odwzorowanie bijektywne = odwzorowanie iniektywne i „na” (surjektywne) ($L(\vec{V}) = \vec{W}$)

³ izomorfizm = odwzorowanie liniowe i bijektywne

Przykład. Niech $\vec{B} = (\vec{e}_i)$ ustalona baza przestrzeni wektorowej n -wymiarowej \vec{V} .

Odwzorowanie

$$I_{\vec{B}} : \vec{V} \rightarrow \mathcal{R}^n; \quad I_{\vec{B}}(\vec{x}) = (x^i), \quad \vec{x} = x^j \vec{e}_j.$$

Jest liniowe, a ponadto bijektywne, czyli jest izomorfizmem pomiędzy \vec{V} i \mathcal{R}^n .

Jeśli $\vec{V} = \vec{E}$ jest euklidesowa a $\vec{B} = (\vec{e}_i)$ ortonormalna, to $I_{\vec{B}}$ jest izometrią (zachowuje iloczyn skalarny i normę).

Przykład. Niech $\vec{V} = \mathcal{R}^n$ i $\vec{W} = F(I; \mathcal{R})$ ($I = [\alpha, \beta] \subset \mathcal{R}$). Niech (ξ_i) ustalony ciąg punktów podziału przedziału $[\alpha, \beta] : \alpha = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n = \beta$. Odwzorowanie

$$L : \mathcal{R}^n \rightarrow F(I; \mathcal{R}); \quad (x_i) \rightarrow f(\cdot), \quad f(\xi) = x_i + \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} x_{i+1}, \quad \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}] \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

jest liniowe (wykres funkcji $\xi \rightarrow f(\xi)$ jest łamaną o wierzchołkach (ξ_i, x_i) w przestrzeni \mathcal{R}^2 par (ξ, x)).

Twierdzenie. Niech $\vec{V}, \vec{W}, \vec{U}$ przestrzenie wektorowe i niech $L \in L(\vec{V}; \vec{W}), N \in L(\vec{W}; \vec{U})$.

Złożenie odwzorowań L i N , tj.

$$NL : \vec{V} \rightarrow \vec{U}; \quad (NL)\vec{x} = N(L\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \vec{V},$$

jest liniowe.

Niech \vec{V} i \vec{W} przestrzenie wektorowe skończenie wymiarowe ($\dim \vec{V} = n, \dim \vec{W} = m$) i niech (\vec{v}_i) baza \vec{V} , a (\vec{w}_j) baza \vec{W} . Rozważmy $\vec{z} = L\vec{x}$ dla $\vec{x} \in \vec{V}, \vec{z} \in \vec{W}$ i $L \in L(\vec{V}; \vec{W})$. Dokonajmy rozkładów:

$$\vec{x} = x^i \vec{v}_i, \quad \vec{z} = z^j \vec{w}_j, \quad L\vec{v}_i = L_i^j \vec{w}_j.$$

Ponieważ

$$\vec{z} = z^j \vec{w}_j = L\vec{x} = L(x^i \vec{v}_i) = x^i L\vec{v}_i = x^i L_i^j \vec{w}_j,$$

więc (z porównania):

$$z^j = x^i L_i^j \quad \text{lub} \quad \mathbf{z} = \mathbf{L}^T \mathbf{x},$$

przy $\mathbf{x} = [x^j]_{n \times 1}, \mathbf{z} = [z^i]_{m \times 1}, \mathbf{L} = [L_i^j]_{n \times m}$. Związki te określają odwzorowanie liniowe przestrzeni \mathcal{R}^n w przestrzeń \mathcal{R}^m .

Układ liczb (L_i^j) nazywamy reprezentacją liczbową (\mathbf{L} - reprezentacją macierzową)

odwzorowania L (w bazach (\vec{v}_i) i (\vec{w}_j)), a zarazem reprezentacją odwzorowania liniowego \mathcal{R}^n w \mathcal{R}^m (w bazach standardowych).

! Jeżeli L jest iniektywne (nieosobliwe), to

$$\dim \vec{V} = \dim(\text{Im} \vec{V}) \leq \dim \vec{W}.$$

!! Jeżeli $(\vec{v}_i), (\vec{v}_{i'})$ dwie bazy \vec{V} i $\vec{v}_i = A_i^i \vec{v}_{i'}$, a $(\vec{w}_j), (\vec{w}_{j'})$ dwie bazy \vec{W}

$$L_i^j = A_i^i L_i^j B_j^j, \quad L_i^j = A_i^i L_i^j B_j^j.$$

!!! W ustalonych bazach dziedzin i przestrzeni wartości odwzorowań liniowych:

- macierz sumy odwzorowań liniowych jest równa sumie macierzy tych odwzorowań;
- macierz iloczynu odwzorowania liniowego przez liczbę rzeczywistą jest równa tej liczbie rzeczywistej przez macierz odwzorowania;
- macierz złożenia odwzorowań liniowych jest równa iloczynowi macierzy tych odwzorowań.

Twierdzenie. Niech \vec{V} i \vec{W} przestrzenie unitarne, a odwzorowanie $L \in L(\vec{V}; \vec{W})$. Wtedy:

- 1) $\vec{V} = \ker L \oplus (\ker L)^\perp$, jeśli $\dim \vec{V} < \infty$,
- 2) $\vec{W} = \text{Im } L \oplus (\text{Im } L)^\perp$, jeśli $\dim \vec{V} < \infty$ i $\dim \vec{W} < \infty$

Definicja. Niech przestrzenie $\{\vec{V}; |\cdot|_{\vec{V}}\}$ i $\{\vec{W}; |\cdot|_{\vec{W}}\}$ liniowe unormowane, a $L \in L(\vec{V}; \vec{W})$.

Odwzorowanie L nazywamy **liniowym ograniczonym** (odwzorowanie jest **ograniczone**), jeżeli

$$\exists c > 0 \quad |L\vec{x}|_{\vec{W}} \leq c |\vec{x}|_{\vec{V}} \quad \forall \vec{x} \in \vec{V}.$$

Twierdzenie. Zbiór $B(\vec{V}; \vec{W})$ wszystkich odwzorowań liniowych ograniczonych jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $L(\vec{V}; \vec{W})$, unormowaną względem normy

$$\|L\| = \sup_{|\vec{x}|_{\vec{V}} \leq 1} |L\vec{x}|_{\vec{W}} = \inf_{|\vec{x}|_{\vec{V}} \leq 1} c \quad |L\vec{x}|_{\vec{W}} \leq c, \quad \vec{x} \in B(\vec{V}; \vec{W}).$$

! Jeżeli $\dim \vec{V} < \infty$, to odwzorowanie $L \in L(\vec{V}; \vec{W})$ jest ograniczone.

Definicja. Niech przestrzenie $\{\vec{V}; |\cdot|_{\vec{V}}\}$ i $\{\vec{W}; |\cdot|_{\vec{W}}\}$ liniowe unormowane. Odwzorowanie

$L \in L(\vec{V}; \vec{W})$ jest ciągle na przestrzeni \vec{V} wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (\vec{x}_n)

wektorów z przestrzeni \vec{V} zbieżnego w normie $|\cdot|_{\vec{V}}$ do wektora \vec{x} ($\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{x}$) jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L\vec{x}_n = L\vec{x} \quad (\text{w normie } |\cdot|_{\vec{W}}) \quad \text{dla każdego } \vec{x} \in \vec{V}.$$

Twierdzenie. Odwzorowanie $L \in L(\vec{V}; \vec{W})$ jest ciągle wtedy i tylko wtedy, gdy:

- 1) jest ciągle dla $\vec{x} = 0$;
- 2) jest ograniczone.

3.2. Funkcjonały liniowe

Definicja. Przez **funkcjonały liniowe**, zwane również **formami liniowymi**, rozumiemy odwzorowania liniowe określone na przestrzeni liniowej (dowolnej) o wartościach w przestrzeni liczb rzeczywistych. Jeżeli dziedzina funkcjonału liniowego jest skończenie wymiarowa, to nazywamy go także **kowektorem**.

Uwaga. W odniesieniu do funkcjonałów liniowych pozostaje prawdziwe wszystko, co sformułowano w rozdz. 3.1 w przypadku, gdy $\vec{W} = \mathbb{R}$ (jako jednowymiarowa przestrzeń

arytmetyczna). Poniżej podano niektóre (dodatkowe, specyficzne) fakty dotyczące funkcjonałów liniowych i przestrzeni tych funkcjonałów.

Przykład. Niech $I = [0, l] \subset \mathbb{R}$ przedział liczbowy, a \vec{V} niech będzie zbiorem tych funkcji ciągłych $u(\cdot) : I \rightarrow \mathcal{R}$ takich, że $u(0) = 0$. Zbiór \vec{V} jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $F(I; \mathcal{R})$ (co nietrudno sprawdzić na podstawie kryterium podprzestrzeni liniowej), a więc jest przestrzenią liniową (funkcyjną).

Niech $p(\cdot) : I \rightarrow \mathcal{R}$ będzie funkcją przedziałami ciągłą. Odwzorowanie

$$u(\cdot) \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} p(\xi)u(\xi)d\xi$$

jest funkcjonałem liniowym na \vec{V} . Jest nim także odwzorowanie

$$u(\cdot) \rightarrow Pu(l) \quad (P \in \mathcal{R}).$$

Są to, na przykład, prace wirtualne sił obciążenia zewnętrznego (o gęstości p) działających podłużnie na pręt o długości l zamocowany w końcu o współrzędnej $\xi = 0$ i obciążenia skupionego o wartości P w końcu $\xi = l$ tego pręta.

Przykład. Niech \vec{V} będzie przestrzenią unitarną, a \vec{v} ustalonym jej wektorem. Odwzorowanie

$$v : \vec{V} \rightarrow \mathcal{R}; v \vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{x}$$

jest funkcjonałem liniowym.

Definicja. Przestrzeń $\vec{V} = L(\vec{V}; \mathcal{R})$ funkcjonałów liniowych na \vec{V} nosi nazwę **przestrzeni dualnej** do \vec{V} .

! Jeżeli \vec{U} jest podprzestrzenią liniową \vec{V} , to \vec{V} jest podprzestrzenią liniową \vec{U} w tym sensie, że

$$x \in \vec{V} \Rightarrow x \Big|_{\vec{U}} \in \vec{U}.$$

Twierdzenie. Jeżeli $\dim \vec{V} = n$, to $\dim \vec{V} = n$. Ponadto, jeżeli (\vec{e}_i) jest bazą \vec{V} , to istnieje dokładnie jedna baza (e^i) przestrzeni dualnej \vec{V} , zwana bazą dualną, taka że $e^i \vec{e}_j = \delta_j^i$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

!! Niech $\dim \vec{V} = n$, (e^i) baza dualna do (\vec{e}_i) oraz $x = x_i e^i$, gdzie (x_i) są tzw. współrzędnymi kowariantnymi kowektora x . Wtedy $x \vec{x} = x_i x^i$ dla $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$.

Każdy ciąg liczbowy (x_i) z \mathcal{R}^n definiuje kowektor na przestrzeni \mathcal{R}^n określony wzorem:

$(x^i) \rightarrow x_i x^i$ (\mathcal{R}^n można utożsamić z \mathcal{R}^n). Bazą dualną do bazy standardowej jest baza standardowa.

!!! Jeśli $\vec{e}_{i'} = A_i^{i'} \vec{e}_i$ – reguła transformacji bazy (\vec{e}_i) do $(\vec{e}_{i'})$ w przestrzeni \vec{V} , a (e^i) i $(e^{i'})$ – bazy dualne, to $e^{i'} = A_i^{i'} e^i$. Jeśli przy tym $x = x_i e^i = x_{i'} e^{i'}$, to $x_{i'} = A_i^{i'} x_i$.

Twierdzenie (Riesza). Niech \vec{E} – przestrzeń euklidesowa. Wtedy:

$$\forall x \in \vec{E} \quad \exists \vec{x} = \mathbf{I}_R \vec{x} \in \vec{E} \quad \forall \vec{y} \in \vec{E} \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

! Odwzorowanie Riesza $\mathbf{I}_R : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ jest izomorfizmem.

!! Niech (\vec{e}_i) baza przestrzeni \vec{E} , (\vec{e}^i) – jej kobaza, a (e^i) – baza dualna w przestrzeni \vec{E} .
Ponieważ

$$\begin{aligned} \forall \vec{x} = x^j \vec{e}_j \quad e^i \vec{x} &= x^j e^i \vec{e}_j = x^j \delta_j^i = x^i = \\ &= \vec{e}^i \cdot \vec{x} = x^j \vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = x^j \delta_j^i = x^i, \end{aligned}$$

więc $\mathbf{I}_R e^i = \vec{e}^i$. Jeśli ponadto zdefiniujemy $e^i = \overset{\text{def}}{G_{ij}} e^j$, to wobec $e^i \vec{x} = \vec{e}^i \cdot \vec{x}$ dla każdego \vec{x} ,
jest $\mathbf{I}_R e^i = \vec{e}^i$.

Uwaga. Przestrzeń $B(\vec{V}; \mathcal{R}) \overset{\text{ozn.}}{=} V'$ funkcjonalów (form) liniowych ograniczonych jest
podprzestrzenią liniową przestrzeni V^*

3.3. Operatory liniowe

Definicja. Przez **operator liniowy** rozumiemy odwzorowanie liniowe określone na przestrzeni
liniowej lub na jej podprzestrzeni liniowej o wartościach w tej przestrzeni liniowej.

Przykład. Niech $\vec{V} = C(\mathcal{R}; \mathcal{R})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych na \mathcal{R} o wartościach w \mathcal{R} (jest
to podprzestrzeń liniowa przestrzeni funkcyjnej $F(\mathcal{R}; \mathcal{R})$), a $\vec{U} = C^1(\mathcal{R}; \mathcal{R})$ jest podprzestrzenią
liniową przestrzeni \vec{V} , złożoną z funkcji różniczkowalnych o ciągłej pochodnej na \mathcal{R} .

Odwzorowanie

$$\mathbf{K} : \vec{V} \supset \vec{U} \rightarrow \vec{V}; \quad \mathbf{K}u = Du = \frac{d}{dt}u.$$

jest operatorem liniowym.

! Przestrzeń operatorów liniowych na przestrzeni \vec{V} o wartościach w \vec{V} , czyli przestrzeń liniową
 $L(\vec{V}; \vec{V})$ oznaczamy przez $L(\vec{V})$.

Uwaga. Jeżeli $\mathbf{K}, \mathbf{S} \in L(\vec{V})$, to przez \mathbf{SK} rozumiemy złożenie (iloczyn) operatorów:

$$\mathbf{SK} : \vec{V} \xrightarrow{\mathbf{K}} \vec{V} \supset \text{Im } \mathbf{K} \xrightarrow{\mathbf{S}} \vec{V}.$$

W ogólności $\mathbf{SK} \neq \mathbf{KS}$. Jeśli jednak $\mathbf{SK} = \mathbf{KS}$, to operatory \mathbf{K} i \mathbf{S} nazywamy przemiennymi
względem siebie.

Szczególnym przypadkiem składania (mnożenia) operatorów jest potęgowanie: $\mathbf{K}^0 = \mathbf{I}$ (operator identyczności), $\mathbf{K}^n = \mathbf{K} \mathbf{K}^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Jeżeli \mathbf{K} jest iniektywny (nieosobliwy), to jest odwracalny, tzn. istnieje

$$\mathbf{K}^{-1}: \vec{V} \supset \text{Im} \mathbf{K} \rightarrow \vec{V}; \quad \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{I},$$

Powyższe operacje wprowadzają w przestrzeni $L(\vec{V})$ dodatkową strukturę – algebrę operatorów.

!! Niech \vec{V} przestrzeń skończenie wymiarowa, $\dim \vec{V} = n$, (\vec{e}_i) - baza. Macierz operatora $\mathbf{K} \in L(\vec{V})$ jest określona następująco:

$$\mathbf{K} = [K_i^j]; \quad \mathbf{K} \vec{e}_i = K_i^j \vec{e}_j.$$

Przy tym, jeśli

$$\vec{x} = x^j \vec{e}_j, \quad \vec{z} = z^i \vec{e}_i, \quad \vec{z} = \mathbf{K} \vec{x},$$

to

$$z^i = K_j^i x^j, \quad \mathbf{z} = \mathbf{K} \mathbf{x}.$$

Jeżeli $\vec{V} = \vec{E}$ - euklidesowa, to piszemy $\mathbf{K} \vec{e}_i = K_i^j \vec{e}_j$ oraz $\mathbf{K} \vec{e}_i = K_{ij} \vec{e}^j$, $\mathbf{K} \vec{e}^i = K^{ij} \vec{e}_j$ i $\mathbf{K} \vec{e}^i = K_j^i \vec{e}^j$, czyli $K_{ij} = G_{rj} K_i^r$, $K^i_j = G^{ri} K_{rj}$, ..., $K_i^j = (\mathbf{K} \vec{e}_i) \cdot \vec{e}^j$, $K_{ij} = (\mathbf{K} \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j$, ...

!!! Jeżeli (\vec{e}_i) , (\vec{e}'_i) dwie bazy przestrzeni skończenie wymiarowej \vec{V} oraz $\vec{e}'_i = A_i^j \vec{e}_j$, to $K_i^j = A_i^k A_j^l K_k^l$ i $K_i^j = A_i^k A_j^l K_k^l$, gdzie $[K_i^j]$ i $[K_i^j]$ macierze operatora \mathbf{K} odpowiednio w bazach (\vec{e}_i) i (\vec{e}'_i) .

!V Operator $\mathbf{K} \in L(\vec{V})$ jest iniektywny (nieosobliwy) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz tego operatora w dowolnej bazie jest nieosobliwa. Przy tym każdy operator iniektywny na przestrzeni skończenie wymiarowej jest bijektywny.

V Macierz złożenia operatorów (w danej bazie) jest iloczynem macierzy tych operatorów. Macierz operatora odwrotnego do operatora nieosobliwego (w danej bazie) jest odwrotnością macierzy operatora (w tej bazie).

Definicja. **Niezmiennikiem** operatora liniowego \mathbf{K} na przestrzeni wektorowej skończenie wymiarowej \vec{V} nazywamy wyrażenie utworzone z wyrazów macierzy \mathbf{K} tego operatora w bazie (\vec{e}_i) , niezależne od wyboru bazy (tj. wyrażenie o tej samej wartości w każdej bazie).

Ważnymi przykładami niezmienników operatora są:

$$\text{tr} \mathbf{K} = K_i^i, \quad \det \mathbf{K} = \det [K_i^j].$$

! Każda funkcja liczbowo niezmienników operatora jest jego niezmiennikiem. Na przykład, jeśli $I(\mathbf{K})$ jest niezmiennikiem operatora \mathbf{K} , to jest nim również $I^2(\mathbf{K})$ oraz $\sqrt{I(\mathbf{K})}$ itp.

Definicja. Operator \mathbf{K} na przestrzeni unitarnej \vec{V} nazywamy **ściśle dodatnio określonym** / **dodatnio określonym** / **półokreślonym dodatnio** \Leftrightarrow odpowiednio:

$$\begin{aligned} \exists c > 0 \quad (\mathbf{K}\vec{x}) \cdot \vec{x} &\geq c \vec{x} \cdot \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \vec{V}; \\ (\mathbf{K}\vec{x}) \cdot \vec{x} &> 0 \quad \forall \vec{x} \in \vec{V}, \vec{x} \neq \vec{0}; \\ (\mathbf{K}\vec{x}) \cdot \vec{x} &\geq 0 \quad \forall \vec{x} \in \vec{V}. \end{aligned}$$

! Operator liniowy na przestrzeni unitarnej ściśle dodatnio określony jest dodatnio określony, a operator dodatnio określony jest dodatnio półokreślony.

Definicja. Niech \vec{V} przestrzeń liniowa unormowana, a $\mathbf{K} \in L(\vec{V})$. Operator \mathbf{K} nazywamy **eliptycznym**, jeżeli

$$\exists c > 0 \quad \forall \vec{x} \in \vec{V} \quad |\mathbf{K}\vec{x}| \geq c |\vec{x}| \quad \forall \vec{x} \in \vec{V}.$$

! Każdy operator liniowy eliptyczny jest nieosobliwy. Jeżeli \vec{V} jest skończenie wymiarowa (i unormowana), to każdy operator liniowy nieosobliwy na \vec{V} jest eliptyczny.

!! Jeżeli operator \mathbf{K} na przestrzeni unitarnej \vec{V} jest ściśle dodatnio określony, to jest eliptyczny, gdyż (na mocy nierówności Cauchy'ego):

$$c |\vec{x}|^2 = c \vec{x} \cdot \vec{x} \leq (\mathbf{K}\vec{x}) \cdot \vec{x} \leq |\mathbf{K}\vec{x}| |\vec{x}| \Rightarrow c |\vec{x}| \leq |\mathbf{K}\vec{x}|.$$

Uwaga. Niech \vec{V} przestrzeń liniowa unormowana, a $\mathbf{K} \in L(\vec{V})$. Operator \mathbf{K} jest **ograniczony**, jeżeli

$$\exists c > 0 \quad \forall \vec{x} \in \vec{V} \quad |\mathbf{K}\vec{x}| \leq c |\vec{x}| \quad \forall \vec{x} \in \vec{V}.$$

! Niech $L(\vec{V})$ przestrzeń liniowa unormowana. Wtedy $\sup_{|\vec{x}| \leq 1} |\mathbf{K}\vec{x}| = \inf_{|\vec{x}| \leq 1} c$ ^{ozn} $= |\mathbf{K}|$ przy $|\vec{x}| \leq 1$ jest normą w przestrzeni $L(\vec{V})$.

!! Jeżeli \vec{V} unormowana jest skończenie wymiarowa, to każdy operator liniowy na \vec{V} jest ograniczony.

Definicja. Niech \vec{V} przestrzeń liniowa unormowana, a $\mathbf{K} \in L(\vec{V})$. Operator \mathbf{K} nazywamy **pełnociągłym (zwartym)**, jeżeli obraz dowolnego zbioru ograniczonego w \vec{V} jest zwarty w \vec{V} .

Twierdzenie. Zbiór operatorów pełnociągłych $K(\vec{V})$ na przestrzeni liniowej unormowanej \vec{V} jest podprzestrzenią liniową unormowaną przestrzeni operatorów ograniczonych $B(\vec{V})$. Ponadto, jeśli operator \mathbf{K} jest na \vec{V} **skończenie wymiarowy** (z def. $\dim(\text{Im}(\mathbf{K})) < \infty$), to jest pełnociągły.

Definicja. Niech \vec{V} przestrzeń liniowa skończenie wymiarowa unitarna. Mówimy, że operator $\mathbf{K}^T \in L(\vec{V})$ jest **transpozycją operatora** $\mathbf{K} \in L(\vec{V})$, jeżeli

$$(\mathbf{K} \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\mathbf{K}^T \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in (\vec{V}).$$

! Jeżeli $\mathbf{K}^T = \mathbf{K} / \mathbf{K}^T = -\mathbf{K}$, to operator \mathbf{K} nazywamy **symetrycznym** / **antysymetrycznym**.

Twierdzenie. Operacja transpozycji operatora liniowego $T: L(\vec{V}) \rightarrow L(\vec{V}); T(\mathbf{K}) = \mathbf{K}^T$ ma przy tym następujące właściwości:

- 1) $(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)^T = \mathbf{K}_1^T + \mathbf{K}_2^T$, $(\alpha \mathbf{K})^T = \alpha \mathbf{K}^T$ (T jest liniowa),
- 3) $|\mathbf{K}^T| = |\mathbf{K}|$, jeżeli \mathbf{K} i \mathbf{K}^T – ograniczone,
- 4) jeżeli (\vec{e}_i) baza ortonormalna przestrzeni $\vec{V} = \vec{E}$, to macierz transpozycji operatora liniowego jest równa transpozycji macierzy tego operatora,
- 5) przestrzeń $L(\vec{E})$ jest unitarna z iloczynem skalarnym $\mathbf{K} \cdot \mathbf{N} \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}(\mathbf{N}^T \mathbf{K})$,
- 6) operatory $\mathbf{S} = \mathbf{K} \mathbf{K}^T$ i $\mathbf{N} = \mathbf{K}^T \mathbf{K}$ są symetryczne,
- 7) dowolny operator liniowy \mathbf{K} można przedstawić w postaci

$$\mathbf{K} = \mathbf{S} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{K} + \mathbf{K}^T), \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{K} - \mathbf{K}^T),$$

gdzie \mathbf{S} operator symetryczny, a \mathbf{A} operator niesymetryczny.

Ponadto, jeżeli \vec{V} skończenie wymiarowa ($\dim \vec{V} = n$), to $\mathbf{K} = \mathbf{B} + \mathbf{D}$, $\mathbf{B} = [(1/n) \text{tr} \mathbf{K}] \mathbf{I}$ - część kulista operatora \mathbf{K} , \mathbf{D} - dewiator operatora \mathbf{K} .

Definicja. Niech \vec{V} przestrzeń unitarna i niech \mathbf{U} operator na \vec{V} taki, że istnieją operatory \mathbf{U}^T i \mathbf{U}^{-1} . Jeżeli $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$, to \mathbf{U} nazywamy **operatorem unitarnym**.

! Jeżeli $\mathbf{R} \in L(\vec{E})$ oraz \mathbf{R} unitarny i $\det \mathbf{R} = 1$, to \mathbf{R} nazywa się **operatorem rotacji** (lub po prostu: rotacją).

Twierdzenie (o rozkładzie polarnym operatora). Niech $\mathbf{K} \in L(\vec{E})$ i $\det \mathbf{K} > 0$. Wtedy istnieją jednoznacznie określone operatory unitarne \mathbf{U} i \mathbf{Q} oraz operatory dodatnio określone \mathbf{C} i \mathbf{B} takie, że

$$\mathbf{K} = \mathbf{C} \mathbf{U} = \mathbf{Q} \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}^2 = \mathbf{K} \mathbf{K}^T, \quad \mathbf{B}^2 = \mathbf{K}^T \mathbf{K}.$$

Definicja. Niech \vec{V} przestrzeń unitarna oraz $\vec{a}, \vec{b} \in \vec{V}$. **Iloczynem tensorowym** wektorów \vec{a}, \vec{b} nazywamy odwzorowanie

$$\vec{a} \otimes \vec{b}: \vec{V} \rightarrow \vec{V}; \vec{a} \otimes \vec{b} \vec{x} = (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{b}, \quad \forall \vec{x} \in \vec{V}.$$

Twierdzenie. $\vec{a} \otimes \vec{b} \in L(\vec{V})$. Ponadto:

- 1) $(\vec{a} \otimes \vec{b})^T = \vec{b} \otimes \vec{a}$,
- 2) $\vec{a} \otimes (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{a} \otimes \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \otimes \vec{c} = \vec{a} \otimes \vec{c} + \vec{b} \otimes \vec{c}$,
- 3) $\alpha(\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \otimes \vec{b} = \vec{a} \otimes (\alpha \vec{b})$, $\alpha \in \mathcal{R}$.

Twierdzenie. Jeżeli (\vec{e}_i) jest bazą przestrzeni euklidesowej \vec{E} , to $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$ jest bazą przestrzeni $L(\vec{E})$. Ponadto, jeśli $K \in L(\vec{E})$, to $K = K^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$, gdzie $K \vec{e}_i = K_i^j \vec{e}_j$ ($[K_i^j]$ jest macierzą operatora K w bazie (\vec{e}_i) , a $K^{ij} = G^{ir} K_r^j$ zgodnie z „grą wskaźników”).

Twierdzenie. Niech \vec{U} podprzestrzeń liniowa domknięta przestrzeni Hilberta \vec{V} . Wtedy operator rzutowania ortogonalnego $P: \vec{V} \rightarrow \vec{U} \subset \vec{V}$; $P(\vec{x}) = \text{rzut}_{\vec{U}} \vec{x}$ (istniejący na podstawie tw. o rzucie ortogonalnym) ma następujące właściwości:

$$1) P^2 = P, \quad |P|_{\vec{U}} = I; \quad 2) \text{Im}(P) = \vec{U}, \quad \text{ker}(P) = \vec{U}^\perp; \quad 3) \|P\| = 1.$$

Bardzo ważnym elementem „teorii operatorów liniowych” jest analiza widmowa.

Definicja. Niech K operator liniowy (dowolny), a I operator identyczności na przestrzeni wektorowej (dowolnej) \vec{V} . Liczba λ nazywa się **wartością regularną** operatora K , jeżeli operator $K - \lambda I$ jest izomorfizmem na \vec{V} (bijekcją, bo $K - \lambda I$ jest liniowy z definicji). Zbiór wszystkich wartości regularnych operatora nosi nazwę **rezolwenty** operatora K a jego dopełnienie – **widmem (spektrum)** operatora K (ozn. $\text{Sp}K$).

Definicja. Liczba λ nazywa się **wartością własną** operatora K na przestrzeni wektorowej \vec{V} , jeżeli istnieje wektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ taki, że $K \vec{x} = \lambda \vec{x}$, tzn. $K - \lambda I$ jest operatorem osobliwym. Jądro tego operatora, czyli $\text{ker}(K - \lambda I)$ (a więc zbiór wszystkich \vec{x} takich, że $K \vec{x} = \lambda \vec{x}$ nazywa się **podprzestrzenią własną** operatora K odpowiadającą wartości własnej λ (ozn. \vec{V}_λ).

Twierdzenie. Niech \vec{V} skończenie wymiarowa ($\dim \vec{V} = n$). Wtedy zbiór wszystkich wartości własnych jest widmem operatora $K \in L(\vec{V})$, a każda z wartości własnych jest pierwiastkiem równania charakterystycznego $\det(K - \lambda I) = 0$ (jest przy tym niezmiennikiem operatora K). Ponadto, jeśli λ jest p -krotnym pierwiastkiem tego równania, to $\dim \vec{V}_\lambda = p$. Jeśli zaś $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ jest widmem operatora K , to $\vec{V} = \vec{V}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \vec{V}_{\lambda_r}$.

Twierdzenie. Niech \vec{E} przestrzeń euklidesowa (n -wymiarowa) i niech $K \in L(\vec{E})$. Wtedy:

- 1) λ jest wartością własną operatora $K \Leftrightarrow \lambda$ jest wartością własną operatora K^T ;
- 2) λ jest wartością własną operatora $K \Rightarrow$ istnieje $\vec{y} \in \vec{E}$ takie, że równanie $K \vec{x} - \lambda \vec{x} = \vec{y}$ nie ma rozwiązania. Równanie to ma rozwiązanie $\Leftrightarrow \vec{y} \perp \vec{E}_\lambda(K^T)$ (tzn. $\vec{y} \cdot \vec{x}_\lambda = 0$ dla wszystkich wektorów własnych \vec{x}_λ operatora K^T);
- 3) jeśli $K^T = K$, to $\text{Sp}K \subset [\lambda', \lambda'']$, gdzie $\lambda' = \inf_{\|\vec{x}\| \leq 1} (K \vec{x}) \cdot \vec{x}$, $\lambda'' = \sup_{\|\vec{x}\| \leq 1} (K \vec{x}) \cdot \vec{x}$. Ponadto, jeśli $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $K \vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1$, $K \vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2$, to $\vec{x}_1 \perp \vec{x}_2$;
- 4) jeżeli operator K jest dodatnio określony, to jego wszystkie wartości własne są dodatnie;
- 5) jeśli $K^T = K$ i $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \text{Sp}K$ ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ (w ciągu $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$))

p -krotna wartość własna występuje p razy), to istnieje taka baza $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ w przestrzeni \vec{E} , zwana bazą spektralną, która jest ortonormalna i $\forall \vec{x} \in \vec{E} \quad \mathbf{K} \vec{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k (\vec{x} \cdot \vec{e}_k) \vec{e}_k$.

Uogólnieniami tego twierdzenia są:

Twierdzenie. Niech \vec{V} przestrzeń Hilberta, a $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T \in \mathbf{B}(\vec{V})$. Wtedy również $\text{Sp } \mathbf{K} = [\lambda', \lambda'']$, gdzie $\lambda' = \inf_{\|\vec{x}\| \leq 1} (\mathbf{K} \vec{x}) \cdot \vec{x}$, $\lambda'' = \sup_{\|\vec{x}\| \leq 1} (\mathbf{K} \vec{x}) \cdot \vec{x}$ oraz podprzestrzeń własna odpowiadająca różnym wartościom własnym są ortogonalne. Ponadto, jeśli \mathbf{K} jest dodatnio określony, to wszystkie wartości własne są dodatnie

Twierdzenie. Niech \vec{V} przestrzeń Hilberta (nieskończenie wymiarowa) i $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T \in \mathbf{K}(\vec{V})$ operator symetryczny pełnościągły. Niech $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ ciąg niezerowych wartości własnych operatora \mathbf{K} takich, że $|\lambda_1| > |\lambda_2|, \dots$ oraz k_1 – krotność wartości własnej λ_1 ($k_1 = \dim \vec{V}_{\lambda_1}$), k_2 – krotność wartości własnej λ_2 ($k_2 = \dim \vec{V}_{\lambda_2}$), \dots . Niech (μ_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) ciąg złożony z kolejnych wartości własnych λ_i występujących tyle razy, ile wynoszą krotności k_i . Niech następnie (\vec{e}_n) tzw. układ ortonormalny pełny wektorów własnych odpowiadających wartościom własnym (μ_n) w ten sposób, że $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k_1})$ jest bazą ortonormalną przestrzeni \vec{V}_{λ_1} , $(\vec{e}_{k_1+1}, \dots, \vec{e}_{k_1+k_2})$ jest bazą ortonormalną przestrzeni \vec{V}_{λ_2} itd. Wtedy:

- 1) jeżeli \vec{V} jest ośrodkowa, to istnieje baza hilbertowska złożona z pełnego układu ortonormalnego (\vec{e}_n) i bazy ortonormalnej przestrzeni $\vec{V}_0 = \ker \mathbf{K}$, jeśli \mathbf{K} osobliwy, tzn. jeśli $\lambda = 0$ jest wartością własną operatora \mathbf{K} (bazę tę nazywamy spektralną);
- 2) $\forall \vec{x} \in \vec{V} \quad \mathbf{K} \vec{x} = \sum_n (\mu_n \vec{x} \cdot \vec{e}_n) \vec{e}_n$;
- 3) następujące warunki są równoważne:
 - a) pełny układ ortonormalny jest zupełny w przestrzeni \vec{V} (nazywamy go bazą hilbertowską spektralną);
 - b) operator \mathbf{K} jest odwracalny,
 - c) zbiór wartości operatora \mathbf{K} jest gęsty w \vec{V} (tzn. $\text{clos}(\text{Im}(\mathbf{K})) = \vec{V}$);
- 4) zbiór wartości własnych operatora \mathbf{K} jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy \mathbf{K} jest skończenie wymiarowy ($\dim(\text{Im } \mathbf{K}) < \infty$);
- 5) jeżeli \mathbf{K} jest dodatnio określony, to wszystkie wartości własne \mathbf{K} są dodatnie, a największa jest równa $\|\mathbf{K}\|$.

Definicja. Niech \mathbf{K} i \mathbf{M} operatory liniowe na \vec{V} . Liczbę λ nazywamy wartością regularną operatora \mathbf{K} względem operatora \mathbf{M} , jeżeli operator $\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}$ jest bijekcją. Zbiór wartości nieregularnych nosi nazwę widma (spektrum) \mathbf{K} względem \mathbf{M} ($\text{Sp } \mathbf{K} / \mathbf{M}$). Należą do niego wartości własne \mathbf{K} względem \mathbf{M} , tzn. te liczby λ , dla których istnieją $\vec{x} \in \vec{V}$ i $\vec{x} \neq \vec{0}$, że $(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \vec{x} = \vec{0}$.

Twierdzenie. Jeżeli \mathbf{M} jest bijekcją na \vec{V} , to wyznaczenie wartości regularnych / widma (spektrum) operatora \mathbf{K} względem operatora \mathbf{M} jest równoważne temu „zadaniu” (w znaczeniu „zwykłym”) dla operatora $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$.

3. 4. Odwzorowania wieloliniowe

Definicja. Niech $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m$ i \vec{W} dowolne przestrzenie wektorowe. Odwzorowanie

$$L: \vec{V}_1 \times \dots \times \vec{V}_m \rightarrow \vec{W}$$

nazywamy **wieloliniowym** (m -liniowym), jeżeli jest liniowe dla każdego argumentu, tzn.

$$L(\vec{x}_1, \dots, \alpha \vec{x}_j + \beta \vec{x}_j'', \dots, \vec{x}_m) = \alpha L(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_m) + \beta L(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j'', \dots, \vec{x}_m), j = 1, 2, \dots, m.$$

! Odwzorowania 1-liniowe (dla $m = 1$) są to odwzorowania liniowe. Jeśli $\vec{V}_1 = \dots = \vec{V}_m = \vec{V}$ i $\vec{W} = \mathcal{R}$, to odwzorowania wieloliniowe (m -liniowe) nazywamy zazwyczaj formami wieloliniowymi (formami m -liniowymi) na \vec{V} .

!! Zbiór $L(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m; \vec{W})$ wszystkich odwzorowań m -liniowych, z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowania przez liczbę, jest przestrzenią liniową – podprzestrzenią liniową przestrzeni $F(\Omega; \vec{W})$ przy $\Omega = \vec{V}_1 \times \dots \times \vec{V}_m$.

Przykład. Niech $\vec{V}_1 = \dots = \vec{V}_m = \vec{V} = \vec{W} = \mathcal{R}$. Wtedy $\mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$:

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \alpha x_1 x_2 \dots x_m \text{ jest formą } m\text{-liniową na } \mathcal{R}$$

Przykład. Niech \vec{E}^3 oznacza trójwymiarową zorientowaną przestrzeń euklidesową. Odwzorowanie

$$\vec{E}^3 \times \vec{E}^3 \rightarrow \vec{E}^3: (\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \vec{x} \times \vec{y}$$

jest dwuliniowe, a odwzorowanie

$$\vec{E}^3 \times \vec{E}^3 \times \vec{E}^3 \rightarrow \mathcal{R}: (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} \cdot \vec{z}$$

jest trójliniowe.

Przykład. Niech $\vec{a}_1 = [a_{1j}], \dots, \vec{a}_n = [a_{nj}]$ wektory kolumnowe z przestrzeni \mathcal{R}^n , czyli kolumny macierzy $[a_{ij}]$. Odwzorowanie

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \rightarrow \det [a_{ij}]$$

jest formą n -liniową. Jest to przykład odwzorowania wieloliniowego alternującego (alternatora m -liniowego):

$$A: \vec{V}_1 \times \dots \times \vec{V}_m \rightarrow \vec{W}$$

takiego, że $A(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) = \vec{0}$, gdy w ciągu wektorów $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m)$ przynajmniej dwa elementy są sobie równe, tzn. gdy istnieją (i, j) takie, że $\vec{x}_i = \vec{x}_j$. Konsekwencją tego warunku definicyjnego alternatora jest antyprzemienność, czyli

$$A(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r, \dots, \vec{x}_s, \dots, \vec{x}_m) = -A(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \dots, \vec{x}_r, \dots, \vec{x}_m).$$

Twierdzenie. Niech $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m$ i \vec{W} skończenie wymiarowe. Dowolne odwzorowanie m -liniowe $L \in L(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m; \vec{W})$, po ustaleniu baz $(\vec{e}_{i_1}^{(1)}, \dots, \vec{e}_{i_m}^{(m)})$ i (\vec{e}_j) odpowiednio przestrzeniach $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m$ i \vec{W} , jest określone przez układ liczb $(L_{i_1 i_2 \dots i_m}^j)$ taki, że $L_{i_1 i_2 \dots i_m}^j \vec{e}_j = L(\vec{e}_{i_1}^{(1)}, \vec{e}_{i_2}^{(2)}, \dots, \vec{e}_{i_m}^{(m)})$, czyli

$$L(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) = x_{(1)}^{i_1} \dots x_{(m)}^{i_m} L_{i_1 i_2 \dots i_m}^j \vec{e}_j = z^j \vec{e}_j = \vec{z}, \quad z^j = x_{(1)}^{i_1} \dots x_{(m)}^{i_m} L_{i_1 i_2 \dots i_m}^j,$$

dla $\vec{x}_1 = x_{(1)}^{i_1} \vec{e}_{i_1}^{(1)}, \dots, \vec{x}_m = x_{(m)}^{i_m} \vec{e}_{i_m}^{(m)}$.

! Jeżeli $\vec{V}_1 = \dots = \vec{V}_m = \vec{V}$, to dla przestrzeni odwzorowań m -liniowych stosujemy oznaczenie $L^m(\vec{V}; \vec{W})$, w szczególności oznaczenie $L^m(\vec{V}; \mathbb{R})$ dla form m -liniowych.

!! Jeżeli \vec{V} skończenie wymiarowa, (\vec{e}_i) i $(\vec{e}_{i'})$ dwie bazy takie, że $\vec{e}_{i'} = A_{i'}^i \vec{e}_i$, to

$$L_{i'_1 \dots i'_m} = A_{i'_1}^{i_1} \dots A_{i'_m}^{i_m} L_{i_1 \dots i_m}.$$

Definicja. Odwzorowanie m -liniowe $L \in L(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m; \vec{W})$ nazywa się **ograniczonym** na przestrzeniach unormowanych $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m$ o wartości w przestrzeni unormowanej \vec{W} , jeżeli

$$\exists c > 0 \forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) \in \vec{V}_1 \times \dots \times \vec{V}_m \quad |L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m)|_{\vec{W}} \leq c |\vec{x}_1|_{\vec{V}_1} |\vec{x}_2|_{\vec{V}_2} \dots |\vec{x}_m|_{\vec{V}_m}.$$

Twierdzenie. Zbiór odwzorowań m -liniowych $L: \vec{V}_1 \times \dots \times \vec{V}_m \rightarrow \vec{W}$, oznaczany przez $B(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m; \vec{W})$, jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $L(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m; \vec{W})$, a przy tym unormowaną tzw. normą dualną

$$\|L\| = \sup_{|\vec{x}_i| < 1} |L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m)|_{\vec{W}} = \inf c \{ \text{warunek def.} \}$$

Twierdzenie. Odwzorowanie m -liniowe $L \in L(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m; \vec{W})$ na przestrzeniach unormowanych $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m$ o wartości w przestrzeni unormowanej \vec{W} jest ograniczone wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągłe, tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{x}_1^{(n)}, \vec{x}_2^{(n)}, \dots, \vec{x}_m^{(n)}) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m)$ np. w normie $\sup_i |\vec{x}_i|_{\vec{V}_i}$

implikuje $\lim_{n \rightarrow \infty} |L(\vec{x}_1^{(n)}, \vec{x}_2^{(n)}, \dots, \vec{x}_m^{(n)})|_{\vec{W}} = |L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m)|_{\vec{W}}$ w normie $|\cdot|_{\vec{W}}$.

Uwaga. Niech $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k, \vec{V}_{k+1}, \dots, \vec{V}_m; \vec{W}$ przestrzenie liniowe i niech

$$\mathbf{X} = L(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k; L(\vec{V}_{k+1}, \dots, \vec{V}_m; \vec{W})),$$

$$\mathbf{Y} = L(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k, \vec{V}_{k+1}, \dots, \vec{V}_m; \vec{W})$$

Wtedy odwzorowanie

$$\Lambda: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}; \quad \mathbf{K} \rightarrow L = \Lambda \mathbf{K},$$

$$L(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_m) = \mathbf{K}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)(\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_m)$$

jest izomorfizmem (liniową bijekcją).

Podobnie, jeśli $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k, \vec{V}_{k+1}, \dots, \vec{V}_m; \vec{W}$ przestrzenie liniowe unormowane i

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k; \mathbf{B}(\vec{V}_{k+1}, \dots, \vec{V}_m; \vec{W})),$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k, \vec{V}_{k+1}, \dots, \vec{V}_m; \vec{W})$$

Wtedy odwzorowanie

$$\Lambda: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}; \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L} = \Lambda \mathbf{K},$$

$$\mathbf{L}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_m) = \mathbf{K}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)(\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_m)$$

jest izometrią ($|\mathbf{L}| = |\mathbf{K}|$).

3.5. Formy dwuliniowe

Spośród odwzorowań wieloliniowych szczególnie ważne znaczenie mają formy dwuliniowe (biliniowe) $\mathbf{B} \in L^2(\vec{V}; \mathcal{R})$. Przy tym odwzorowanie $\mathbf{Q}: \vec{V} \rightarrow \mathcal{R}; \mathbf{Q}(\vec{x}) = \mathbf{B}(\vec{x}, \vec{x})$ nosi nazwę formy kwadratowej na przestrzeni \vec{V} (generowanej przez \mathbf{B}).

Definicja. Forma dwuliniowa \mathbf{B} nazywa się:

- symetryczną, jeżeli

$$\mathbf{B}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbf{B}(\vec{y}, \vec{x}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V};$$

- antysymetryczną, jeżeli

$$\mathbf{B}(\vec{x}, \vec{y}) = -\mathbf{B}(\vec{y}, \vec{x}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V};$$

- ściśle dodatnio określona (eliptyczna), jeśli

$$\exists b > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0} \quad \mathbf{B}(\vec{x}, \vec{x}) > b |\vec{x}|^2 \quad (\vec{x} \in \vec{V} - \text{unormowana});$$

- dodatnio określona, jeśli

$$\mathbf{B}(\vec{x}, \vec{x}) > 0, \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0} \quad (\vec{x} \in \vec{V});$$

- półokreślona dodatnio, jeżeli

$$\mathbf{B}(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0, \quad \forall \vec{x} \in \vec{V};$$

! Jeżeli przestrzeń jest unormowana, to każda forma dwuliniowa eliptyczna jest także dodatnio określona. Ponadto, gdy \vec{V} jest skończenie wymiarowa, to również na odwrót każda forma dwuliniowa dodatnio określona jest eliptyczna. Oczywiście każda forma dodatnio określona jest półokreślona dodatnio.

!! Jeżeli przestrzeń \vec{V} jest unormowana, to forma dwuliniowa \mathbf{B} na podprzestrzeni jest ograniczona, gdy

$$\exists c > 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V} \quad |\mathbf{B}(\vec{x}, \vec{y})| \leq c |\vec{x}| |\vec{y}|.$$

Przykład. Niech \vec{V} przestrzeń unitarna. Iloczyn skalarny jest formą dwuliniową, symetryczną i eliptyczną.

Twierdzenie. Jeżeli \mathbf{B} forma dwuliniowa jest symetryczna i dodatnio określona na przestrzeni \vec{V} (dowolnej), to

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(\vec{x}, \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V}$$

jest iloczynem skalarnym (generowanym przez \mathbf{B}), a $\{\vec{V}; \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbf{B}}\}$ staje się unitarna.

Twierdzenie. Niech \vec{V} skończenie wymiarowa ($\dim \vec{V} = n$), (\vec{e}_i) baza przestrzeni \vec{V} , a \mathbf{B} forma dwuliniowa na \vec{V} . Wtedy

$$\mathbf{B}(\vec{x}, \vec{y}) = B_{ij}x^i y^j = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{y}, \quad \forall \vec{x} = x^i \vec{e}_i, \vec{y} = y^j \vec{e}_j \in \vec{V},$$

gdzie $\mathbf{B} = [B_{ij}]$, $B_{ij} = \mathbf{B}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, $\mathbf{x} = [x^i]$, $\mathbf{y} = [y^j]$. Przy tym, jeśli (\vec{e}'_i) druga baza \vec{V} oraz $\vec{e}'_i = A_i^j \vec{e}_j$, a $[B'_{ij}]$ macierz formy \mathbf{B} w bazie (\vec{e}'_i) , to $B'_{ij} = A_i^k A_j^l B_{kl}$.

Uwaga. Niech $\mathbf{B} = [B_{ij}]$ dana macierz o wymiarach $n \times n$. Wtedy $\mathbf{B} = B_{ij}x^i y^j = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$ jest formą dwuliniową na przestrzeni \mathcal{R}^n . Jest to także forma dwuliniowa na przestrzeni \vec{V} (dowolnej n -wymiarowej) w ustalonej bazie tej przestrzeni. Ponadto:

- forma \mathbf{B} jest symetryczna (antysymetryczna) \Leftrightarrow macierz tej formy jest symetryczna (antysymetryczna),
- macierz $[B_{ij}]$ jest dodatnio określona (półokreślona dodatnio) \Leftrightarrow forma $\mathbf{B} = B_{ij}x^i y^j$ jest dodatnio określona (półokreślona dodatnio).

Twierdzenie (Sylwestra). Niech $\dim \vec{V} = n$. Jeżeli $\mathbf{B} \in L^2(\vec{V}; \mathcal{R})$ i \mathbf{B} jest symetryczna, to istnieje taka baza (\vec{e}_i) przestrzeni \vec{V} , że macierz $[B_{ij}]$ formy \mathbf{B} w tej bazie jest diagonalna, tzn.

$[B_{ij}] = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$. Ponadto, jeśli (\vec{e}'_i) jest drugą taką bazą, że $[B'_{ij}] = \text{diag}[\lambda'_1, \dots, \lambda'_n]$, to w ciągach $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ i $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ jest tyle samo elementów dodatnich, zerowych i ujemnych. W konsekwencji forma \mathbf{B} jest dodatnio określona (półokreślona) \Leftrightarrow wszystkie λ_i są dodatnie (nieujemne).

Twierdzenie (kryterium Hurwitza). Forma dwuliniowa symetryczna na przestrzeni skończenie wymiarowej jest dodatnio określona \Leftrightarrow wszystkie wyznaczniki główne macierzy tej formy (w dowolnej bazie) są dodatnie.

Twierdzenie. Niech \mathbf{K} operator liniowy na przestrzeni \vec{V} z iloczynem skalarnym „ \cdot ”. Wtedy

$$\mathbf{B}(\vec{x}, \vec{y}) = (\mathbf{K} \vec{x}) \cdot \vec{y}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V}$$

jest formą dwuliniową. Ponadto:

- a) jeśli operator \mathbf{K} jest symetryczny, to forma \mathbf{B} jest symetryczna,
- b) jeśli operator \mathbf{K} jest eliptyczny, to forma \mathbf{B} jest eliptyczna,
- c) jeśli operator \mathbf{K} jest dodatnio określony (półokreślony), to forma \mathbf{B} jest dodatnio określona (półokreślona).

Uwaga. Niech $\mathbf{K} \in L(\vec{E})$ i $\mathbf{B} \in L^2(\vec{E}; \mathcal{R})$ takie, że $\mathbf{B}(\vec{x}, \vec{y}) = (\mathbf{K} \vec{x}) \cdot \vec{y}$ ($\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$) i niech (\vec{e}_i) baza \vec{E} . Zatem mamy: $B_{ij} = \mathbf{B}(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = (\mathbf{K} \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j = (K_i^r \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_j = K_i^r G_{rj} = K_{ij}$.

Twierdzenie. Niech $\mathbf{B} \in \mathbf{B}^2(\vec{V}; \mathcal{R})$, gdzie \vec{V} unitarna. Wtedy (na mocy twierdzenia Riesz) istnieją jednoznacznie określone operatory $\mathbf{K}, \mathbf{K}^T \in \mathbf{B}(\vec{V})$ takie, że

$$\mathbf{B}(\vec{x}, \vec{y}) = (\mathbf{K} \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\mathbf{K}^T \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V}.$$

Ponadto:

- jeśli forma \mathbf{B} jest symetryczna, to operator \mathbf{K} jest symetryczny,
- jeśli operator \mathbf{K} jest eliptyczny, to forma \mathbf{B} jest ściśle dodatnio określona,
- jeśli forma \mathbf{B} jest dodatnio określona (półokreślona), to operator \mathbf{K} jest dodatnio określony (półokreślony).

Twierdzenie (Laxa-Milgrama). Niech \vec{V} przestrzeń Banacha. Jeżeli forma dwuliniowa \mathbf{B} jest ograniczona, symetryczna i dodatnio określona, to

$$\forall F \in \mathcal{V}' \exists! \vec{x} \in \vec{V} \quad \mathbf{B}(\vec{x}, \vec{y}) = F \vec{y} \quad \forall \vec{y} \in \vec{V}.$$

Ponadto, gdy \vec{V} przestrzeń Hilberta, a \mathbf{B} forma dwuliniowa, ściśle dodatnio określona i ograniczona na \vec{V} , to

$$\forall \vec{F} \in \vec{V} \exists! \vec{x} \in \vec{V} \quad \mathbf{B}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{F} \cdot \vec{y} \quad \forall \vec{y} \in \vec{V}.$$

Uwaga. Niech $\mathcal{V}^* = \mathbf{L}(\vec{V}; \mathcal{R})$. Odwzorowanie

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}, \quad \mathcal{C} \in \mathbf{L}(\vec{V}; \mathcal{V}^*), \quad \mathcal{B} \in \mathbf{L}^2(\vec{V}; \mathcal{R}); \quad (\mathcal{C} \vec{x}) \vec{y} = \mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V}$$

jest izomorfizmem przestrzeni $\mathbf{L}(\vec{V}; \mathcal{V}^*), \mathbf{L}^2(\vec{V}; \mathcal{R})$.

3.6. Produkt dualny

Niech \vec{V} dowolna przestrzeń wektorowa, a \vec{V}^* przestrzeń dualna do \vec{V} (\vec{V}^* - przestrzeń form liniowych).

Definicja. Przez **produkt dualny** rozumiemy odwzorowanie dwuliniowe z przestrzeni odwzorowań $\mathbf{L}(\vec{V}, \vec{V}^*; \mathcal{R}): \vec{V} \times \vec{V}^* \in \langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle_{\mathcal{R}}$.

! Jeżeli \vec{V} skończenie wymiarowa, (\vec{e}_i) baza \vec{V} , a (\vec{e}^i) baza dualna (baza przestrzeni \vec{V}^* taka, że $\langle \vec{e}^i, \vec{e}_j \rangle = \delta_j^i$), to $\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle = x_i x^i$, przy $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$, $\vec{x}^* = x^i \vec{e}^i$, $(x_i), (x^i) \in \mathcal{R}^n$.

Uwaga. Jeżeli \vec{V} przestrzeń unormowana, to przestrzeń form liniowych ograniczonych \mathcal{V}' jest podprzestrzenią liniową \vec{V}^* i wtedy produkt dualny $\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle_{\mathcal{V}' \times \vec{V}^*}$ jest ograniczony,

a więc należy do przestrzeni $\mathbf{B}(\mathcal{V}', \vec{V}^*; \mathcal{R})$. Jeżeli ponadto \vec{V} jest skończenie wymiarowa, to

$$\vec{V} = \mathcal{V}' \text{ i wtedy } \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle^*.$$

! Jeżeli \vec{V} jest przestrzenią Hilberta, to na mocy tw. Riesz jest $\langle x, \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \vec{y} \cdot \vec{x}$, gdzie $\vec{y} = I_{\mathbb{R}}^* x$ ($I_{\mathbb{R}}$ – izometria Riesz).

Definicja. Niech \vec{V}^* przestrzeń dualna do \vec{V} , \vec{W}^* przestrzeń dualna do \vec{W} i $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\vec{V}^*} \dots \langle \cdot, \cdot \rangle_{\vec{W}^*}$ odpowiadające im produkty dualne. Niech $L \in L(\vec{V}, \vec{W})$. Odwzorowaniem **dualnym** do odwzorowania L (odwzorowaniem **sprzężonym** z L) nazywamy odwzorowanie

$$L^*: \vec{W}^* \rightarrow \vec{V}^*; \langle L^* w, \vec{v} \rangle_{\vec{V}^*} = \langle w, \vec{v} \rangle_{\vec{W}^*} \quad \forall w \in \vec{W}^* \quad \forall \vec{v} \in \vec{W}^*.$$

3.7. Tensory

Definicja. **Tensorom o walencji** (p, q) ($p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; \mathbb{N} – zbiór liczb naturalnych) nazywamy odwzorowanie $p+q$ liniowe (p -krotnie kontrawariantne i q -krotnie kowariantne):

$$T \in L(\underbrace{\vec{V}, \dots, \vec{V}}_{p \text{ - razy}}, \underbrace{\vec{V}, \dots, \vec{V}}_{q \text{ - razy}}; \mathbb{R}),$$

gdzie \vec{V} dowolna przestrzeń wektorowa, a \vec{V}^* przestrzeń do niej dualna (przestrzeń form liniowych na \vec{V}).

Uwaga. Przez tensory o walencji $(0, 0)$ rozumiemy (z definicji) elementy przestrzeni \mathcal{R} (przestrzeni \mathcal{R}), czyli tzw. skalary ($T \in \mathcal{R}$).

Przykład. Przez tensory o walencji $(1, 0)$ rozumiemy elementy przestrzeni $L(\vec{V}; \mathbb{R}) = \vec{V}^*$. Ponieważ $\vec{V} \subset \vec{V}^*$ (ściślej \vec{V} jest izomorficzna z podprzestrzenią przestrzeni \vec{V}^*), więc wektory przestrzeni \vec{V} można traktować jako tensory o walencji $(1, 0)$. Jeżeli $\vec{V} \stackrel{\text{isom}}{=} \vec{V}^*$ (np., gdy \vec{V} skończenie wymiarowa), to przyjmujemy, że tensorami o walencji $(1, 0)$ są wektory.

Przykład. Tensorami o walencji $(0, 1)$ są elementy przestrzeni $L(\vec{V}^*; \mathbb{R}) = \vec{V}$, czyli formy (funkcjonały) liniowe (kwektory, gdy \vec{V} jest skończenie wymiarowa).

Przykład. Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle^*$ produkt dualny na przestrzeni $\vec{V}^* \times \vec{V}$, czyli odwzorowanie z przestrzeni $L(\vec{V}^*, \vec{V}; \mathbb{R})$. Zatem $T(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle^*$ ($T(x, \vec{x}) = \langle x, \vec{x} \rangle^* = x \cdot \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in \vec{V}^*$, $\forall x \in \vec{V}$) jest tensorem o walencji $(1, 1)$.

Przykład. Tensory o walencji $(0, 2)$, to elementy przestrzeni $L(\vec{V}^*, \vec{V}^*; \mathbb{R}) = L^2(\vec{V}^*; \mathbb{R})$, czyli formy dwuliniowe.

! Przestrzeń (wektorową) tensorów o walencji (p, q) oznaczają będziemy przez $L^{(p, q)}(\vec{V}, \vec{V}^*; \mathbb{R})$.

Definicja. Iloczynem tensorowym elementów $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ przestrzeni \vec{V} oraz elementów v_1^*, \dots, v_q^* przestrzeni \vec{V}^* nazywamy odwzorowanie:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \otimes \dots \otimes \vec{v}_p \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^* &: \underbrace{\vec{V} \times \dots \times \vec{V}}_{p \text{ - razy}} \times \underbrace{\vec{V}^* \times \dots \times \vec{V}^*}_{q \text{ - razy}} \rightarrow \mathcal{R}; \\ \left(\vec{v}_1 \otimes \dots \otimes \vec{v}_p \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^* \right) &\left(x_1, \dots, x_p, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_q \right) = \\ &= \langle x_1, \vec{v}_1 \rangle^* \dots \langle x_p, \vec{v}_p \rangle^* \langle v_1^*, \vec{x}_1 \rangle^* \dots \langle v_q^*, \vec{x}_q \rangle^*. \end{aligned}$$

Twierdzenie. Iloczyn tensorowy $\vec{v}_1 \otimes \dots \otimes \vec{v}_p \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^*$ jest tensorem o walencji (p, q) (z przestrzeni $L^{(p,q)}(\vec{V}, \vec{V}^*; \mathcal{R})$) – tzw. afinorem.

Twierdzenie. Niech \vec{V} przestrzeń wektorowa skończenie wymiarowa ($\dim \vec{V} = n$) i niech (\vec{e}_i) baza przestrzeni \vec{V} , a (e^i) baza dualna (baza przestrzeni \vec{V}^*). Wtedy układ n^{p+q} afinorów $(\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q})$ jest bazą przestrzeni tensorów $L^{(p,q)}(\vec{V}, \vec{V}^*; \mathcal{R})$, tj. dla dowolnego tensora T z tej przestrzeni jest:

$$T = T_{\vec{i}_1 \dots \vec{i}_p}^{i_1 \dots i_p} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q},$$

gdzie $(T_{\vec{i}_1 \dots \vec{i}_p}^{i_1 \dots i_p})$ jest układem współrzędnych tensora T w powyższej bazie przestrzeni tensorów, przy czym

$$T_{\vec{i}_1 \dots \vec{i}_p}^{i_1 \dots i_p} = T \left(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, \vec{e}_{j_1}, \dots, \vec{e}_{j_q} \right).$$

Ponadto, jeśli (\vec{e}'_i) druga baza przestrzeni \vec{V} i $\vec{e}'_i = A_i^j \vec{e}_j$, to

$$T_{\vec{j}'_1 \dots \vec{j}'_q}^{i_1 \dots i_p} = A_{i_1}^{j'_1} \dots A_{i_p}^{j'_p} A_{j'_1}^{j_1} \dots A_{j'_q}^{j_q} T_{\vec{j}_1 \dots \vec{j}_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Uwaga. Niech $\vec{V} = \vec{E}$ przestrzeń euklidesowa (n -wymiarowa). Wtedy \vec{E}^* jest izomorficzna z \vec{E}

($I_R: \vec{E}^* \rightarrow \vec{E}$ jest izomorfizmem Riesz tak, że $\langle x, \vec{x} \rangle^* = \langle I_R x, \vec{x} \rangle = \langle x, I_R \vec{x} \rangle$). Zatem, jeśli

$T \in L^{(p,q)}(\vec{E}, \vec{E}^*; \mathcal{R})$, to $T(x_1, \dots, x_p, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_q) = T(I_R^{-1} \vec{y}_1, \dots, I_R^{-1} \vec{y}_p, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_q) =$

$= \tilde{T}(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_q)$ dla dowolnych $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_q \in \vec{E}$ (oraz $x_1 = I_R^{-1} \vec{y}_1, \dots, x_p = I_R^{-1} \vec{y}_p$),

gdzie $\tilde{T} \in L^{p+q}(\vec{E}; \mathcal{R})$ jest formą $p+q$ liniową na przestrzeni \vec{E} , a więc jest tensorem, zwanym tensorem euklidesowym rzędu $p+q$. Przy tym

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T \left(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, \vec{e}_{j_1}, \dots, \vec{e}_{j_q} \right) = \tilde{T} \left(\vec{e}^{i_1}, \dots, \vec{e}^{i_p}, \vec{e}_{j_1}, \dots, \vec{e}_{j_q} \right) = \tilde{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q},$$

gdzie (\vec{e}^i) jest kobazą bazy (\vec{e}_i) ($\vec{e}^i = G^{ij} \vec{e}_j$). W tym sensie uzasadnione jest określenie, iż tensor T jest p -krotnie kontrawariantny i q -krotnie kowariantny. Z tym jednak, że w przypadku tensora euklidesowego \tilde{T} mamy (przykładowo): $\tilde{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = G^{i_p r} \tilde{T}^{i_1 \dots i_{p-1}}_{r j_1 \dots j_q} = G_{s j_1} \tilde{T}^{i_1 \dots i_p s}_{s j_2 \dots j_q}$ (i podobnie w przypadku innych wskaźników, co określane jest mianem „gry wskaźników”).

! Niech $T \in L^{p+q}(\vec{E}; \mathcal{R})$ tensor euklidesowy rzędu $r = p+q$.. Wtedy jest:

$$T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes \vec{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}^{j_q},$$

przy czym

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T \left(\vec{e}^{i_1}, \dots, \vec{e}^{i_p}, \vec{e}_{j_1}, \dots, \vec{e}_{j_q} \right).$$

Definicja. Przez afinory euklidesowe rozumiemy tensory (euklidesowe) następujące:

$$\vec{a}_1 \otimes \dots \otimes \vec{a}_r \in L^r(\vec{E}; \mathcal{R}); (\vec{a}_1 \otimes \dots \otimes \vec{a}_r)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{a}_1 \cdot \vec{x}_1 \dots \vec{a}_r \cdot \vec{x}_r$$

dla dowolnych $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r \in \vec{E}$.

Definicja. Niech \vec{V} przestrzeń wektorowa (dowolna), $T \in L^{(p,q)}(\vec{V}, \vec{V}; \mathcal{R})$, $S \in L^{(r,s)}(\vec{V}, \vec{V}; \mathcal{R})$.

Przez iloczyn (tensorowy) tensorów T i S rozumiemy tensor

$T \otimes S \in L^{(p+r, q+s)}(\vec{V}, \vec{V}; \mathcal{R})$ taki, że

$$T(x_1, \dots, x_p, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_q) S(y_1, \dots, y_r, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s) = T \otimes S(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_r, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_q, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s)$$

!! Jeżeli \vec{V} skończenie wymiarowa, to $(T \otimes S)_{j_1 \dots j_q l_1 \dots l_s}^{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} S_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}$.

Definicja. Niech \vec{V} przestrzeń wektorowa skończenie wymiarowa. **Kontrakcją** tensora

$T \in L^{(p,q)}(\vec{V}, \vec{V}; \mathcal{R})$ względem pary (i_r, j_s) (przy $p \geq 1, q \geq 1$) nazywamy tensor

$$\tilde{T} \in L^{(p-1, q-1)}(\vec{V}, \vec{V}; \mathcal{R}) \text{ taki, że } \tilde{T}_{j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_{r-1} i_{r+1} \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_{s-1} k j_{s+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_{r-1} k i_{r+1} \dots i_p} \text{ w każdej}$$

bazie (\vec{e}_i) przestrzeni \vec{V} oraz bazie dualnej (e^i) przestrzeni \vec{V} .

Uwaga. Jeżeli przestrzeń \vec{V} jest unormowana, to możemy rozpatrywać tensory ograniczone z

przestrzeni $B^{(p,q)}(\vec{V}, \vec{V}; \mathcal{R})$, w definicji, których zamiast produktu dualnego $\langle \cdot, \cdot \rangle^*$

z przestrzeni $L(\vec{V}, \vec{V}; \mathcal{R})$, mamy produkt dualny $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ z przestrzeni $B(\vec{V}, \vec{V}; \mathcal{R})$.

3.8. Równania liniowe

Niech \vec{V} i \vec{W} dowolne przestrzenie liniowe (wektorowe) a $L: \vec{V} \rightarrow \vec{W}$ dowolne odwzorowanie liniowe (dane).

Przez **równanie liniowe** rozumiemy równanie postaci

$$(1) \quad L\vec{x} = \vec{b},$$

gdzie \vec{b} jest (danym) elementem przestrzeni \vec{W} , a \vec{x} jest (nieznanym, szukanym) elementem przestrzeni \vec{V} .

Przez **rozwiązanie** równania (1) rozumiemy każdy element \vec{x} , który spełnia to równanie, tzn. $\vec{b} = L\vec{x}$. **Rozwiązaniem ogólnym** równania (1) w zbiorze $\vec{U} \subset \vec{V}$ nazywamy natomiast wszystkie rozwiązania ze zbioru

$$(2) \quad \vec{X}_{(\vec{b}/\vec{U})} = L^{-1}\{\vec{b}\} \cap \vec{U}$$

lub

$$(2') \quad \vec{X}_{(\vec{b})} = L^{-1}\{\vec{b}\},$$

jeśli $\vec{U} = \vec{V}$.

Równanie nazywamy **jednorodnym**, jeżeli $\vec{b} = \vec{0}$ (w przeciwnym przypadku – **niejednorodnym**). Wtedy odpowiednio

$$(3) \quad \vec{X}_{(\vec{0}/\vec{U})} = \ker L \cap \vec{U}, \quad \vec{X}_{(\vec{0})} = \ker L.$$

Zatem zbiór (2) można przedstawić w postaci

$$(4) \quad \vec{X}_{(\vec{b}/\vec{U})} = \{\vec{x} \in \vec{V}; \vec{x} = \vec{x}_o + \vec{x}_s, \vec{x}_o \in \vec{X}_{(\vec{0})}\} \cap \vec{U},$$

gdzie \vec{x}_s jest jakimkolwiek rozwiązaniem równania (1), a $\vec{X}_{(\vec{0})} = \ker L$.

Jeżeli $\dim \vec{V} = n$, $\dim \vec{W} = m$, (\vec{v}_i) jest bazą \vec{V} , a (\vec{w}_j) jest bazą \vec{W} , zaś $L\vec{v}_i = L_i^j \vec{w}_j$, to dla $\vec{x} = x^i \vec{v}_i$, $\vec{b} = b^j \vec{w}_j$ równanie jest równoważne następującemu:

$$(5) \quad L_i^j x^i = b^j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Równanie (5) jest szczególnym przypadkiem **równania liniowego algebraicznego** (układu równań algebraicznych liniowych), które w notacji macierzowej zapisujemy następująco:

$$(6) \quad \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

gdzie $\mathbf{K} = [K_{ij}]_{n \times m}$, $\mathbf{x} = [x_i]_{1 \times n}$, $\mathbf{b} = [b_j]_{1 \times m}$, tzn. jest reprezentacją równania (1) przy

$$L: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m, \quad L_i^j = K_{ji}, \quad x_i = x^i, \quad b_j = b^j.$$

Zgodnie z twierdzeniem Kroneckera-Capelli rozwiązanie równania (6) istnieje (zbiór (4) przy $\vec{V} = \vec{U} = \mathcal{R}^n$, $\vec{W} = \mathcal{R}^m$ jest niepusty) wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy \mathbf{K} jest równy rzędowi macierzy dołączonej \mathbf{K}_d , czyli

$$(7) \quad \text{rank } \mathbf{K} = \text{rank } \mathbf{K}_d,$$

gdzie $\mathbf{K}_d = [K_{ij}, b_j]$, tzn. do macierzy \mathbf{K} dodajemy jako ostatnią kolumnę wektor \mathbf{b} .

Ponieważ $\dim \vec{V} = \dim(\text{Im } L) + \dim(\ker L)$, więc w przypadku równania (5) wynika z tego, że

$$n = \dim(\text{Im } L) + \dim(\ker L), \quad \dim(\text{Im } L) \leq m, \quad \dim(\ker L) \geq 0.$$

Zatem warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania równania (6) dla każdego $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^m$ jest $n \geq m$ (liczba niewiadomych większa lub równa od liczby równań). Natomiast warunkiem koniecznym jednoznaczności rozwiązania równania (6) jest $n \leq m$. W efekcie dla $n = m$ rozwiązanie równania (6) istnieje i jest jednoznaczne wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker L = \vec{0}$, tzn. macierz \mathbf{K} jest nieosobliwa ($\det \mathbf{K} \neq 0$).

MMIL II

Część pierwsza. ANALIZA

4. Przestrzenie afiniczne

- 4.1. Pojęcie przestrzeni afinicznej
- 4.2. Podzbiory przestrzeni afinicznej
- 4.3. Układ odniesienia. Współrzędne punktu
- 4.4. Reprezentacje analityczne zbiorów w przestrzeni afinicznej
- 4.5. Przekształcenia zbiorów w przestrzeni afinicznej
- 4.6. Pola na zbiorach w przestrzeni afinicznej

4. PRZESTRZENIE AFINICZNE

1.1. Pojęcie przestrzeni afinicznej

Definicja. **Przestrzenią afiniczną** nazywamy układ $\{\mathbf{A}, \vec{V}, \vec{\varphi}\}$, gdzie \mathbf{A} jest niepustym zbiorem elementów X, Y, Z, \dots , zwanych **punktami**, a \vec{V} jest przestrzenią liniową, zwaną przestrzenią stowarzyszoną z \mathbf{A} , a $\vec{\varphi}: \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow \vec{V}$ – spełniającym następujące warunki:

jeśli wprowadzimy oznaczenie $\vec{\varphi}(X, Y) = \overrightarrow{XY}$, to

- 1) dla dowolnych $X, Y, Z \in \mathbf{A}$ jest $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZX} = \vec{0}$,
- 2) dla dowolnego ustalonego $O \in \mathbf{A}$ odwzorowanie $\mathbf{A} \rightarrow \vec{V}; X \rightarrow \overrightarrow{OX}$ jest bijekcją.

Wektor $\overrightarrow{XY} = \vec{\varphi}(X, Y)$ nazywamy **wektorem zaczepionym** o początku X i końcu Y (lub wektorem zaczepionym w punkcie X o końcu Y), zaś wektor \vec{v} z przestrzeni \vec{V} nosi nazwę **wektora swobodnego** przestrzeni afinicznej.

Uwaga. Zamiast „przestrzeń afiniczna $\{\mathbf{A}, \vec{V}, \vec{\varphi}\}$ ” używamy skrótu „przestrzeń afiniczna \mathbf{A} ”

! Z definicji przestrzeni afinicznej wynika, że

- 1) $\forall X, Y \in \mathbf{A} \exists! \vec{v} \in \vec{V} \vec{v} = \overrightarrow{XY}$;
- 2) $\forall X \in \mathbf{A} \forall \vec{v} \in \vec{V} \exists! Y \in \mathbf{A} \overrightarrow{XY} = \vec{v}$ (ozn. $Y = X + \vec{v}$);
- 3) $\forall X, Y \in \mathbf{A} \overrightarrow{XX} = \vec{0}, \overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$;
- 4) $\forall X \in \mathbf{A} \forall \vec{v}, \vec{w} \in \vec{V} X + (\vec{v} + \vec{w}) = (X + \vec{v}) + \vec{w}$;
- 5) wektor swobodny \vec{v} jest tożsamy z klasą równoważności w relacji $\vec{\varphi} \quad X \sim Y \Leftrightarrow \overrightarrow{XY} = \vec{v}$

Przykład. Niech \vec{V} dowolna przestrzeń wektorowa. Przyjmując $\mathbf{A} = \vec{V}$ oraz $\vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{y}) \stackrel{\text{def.}}{=} \vec{y} - \vec{x}$ nietrudno jest wykazać, że układ $\{\mathbf{A} = \vec{V}, \vec{V}, \vec{\varphi}(\cdot, \cdot)\}$ jest przestrzenią afiniczną, jeśli wektory \vec{x}, \vec{y}, \dots potraktujemy jako punkty. W szczególności, jako afiniczną można traktować przestrzeń arytmetyczną \mathcal{R}^n .

Definicja. Jeżeli na zbiorze \mathbf{A} jest określona metryka d (tzn. $\{\mathbf{A}; d\}$ jest przestrzenią metryczną), to \mathbf{A} nazywamy **przestrzenią afiniczną metryczną**.

Szczególny przypadek przestrzeni afinicznej metrycznej otrzymujemy wtedy, gdy przestrzeń wektorowa stowarzyszona jest unormowana, a metryka generowana jest przez normę.

Twierdzenie. Niech przestrzeń stowarzyszona \vec{V} przestrzeni afinicznej \mathbf{A} jest unormowana, z normą $|\cdot|$. Wtedy odwzorowanie:

$$d : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathcal{R}; d(X, Y) = |\overrightarrow{XY}|$$

jest metryką na zbiorze \mathbf{A} .

!! Jeżeli \overrightarrow{V} jest unitarna, z iloczynem skalarnym „ \cdot ”, to metryka jest „generowana” przez iloczyn skalarny: $d(X, Y) = |\overrightarrow{XY}| = \sqrt{\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XY}}$, $X, Y \in \mathbf{A}$.

Definicja. Jeżeli przestrzeń wektorowa \overrightarrow{V} , stowarzyszona z przestrzenią afiniczną \mathbf{A} , jest skończenie wymiarowa (n -wymiarowa), to \mathbf{A} nazywamy skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną (n -wymiarową; $\dim \mathbf{A} = n$; ozn. \mathbf{A}^n).

Uwaga. Niezwykle ważną strukturą matematyczną, łączącą cechy skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej unitarnej, przestrzeni metrycznej i przestrzeni afinicznej jest afiniczna przestrzeń euklidesowa, w której „uprawia się” **geometrię euklidesową**.

Definicja. **Afiniczną przestrzenią euklidesową** \mathbf{E} (n -wymiarową \mathbf{E}^n) nazywamy skończenie wymiarową (n -wymiarową) przestrzeń afiniczną z euklidesową wektorową przestrzenią stowarzyszoną \overrightarrow{E} (n -wymiarową \overrightarrow{E}^n) i metryką generowaną przez normę (generowaną przez iloczyn skalarny w przestrzeni \overrightarrow{E}).

Przykład. Afiniczną przestrzenią euklidesową (tzw. arytmetyczną) jest przestrzeń \mathcal{R}^n ciągów liczbowych n -elementowych $\mathbf{x} = (x_i)$, $\mathbf{y} = (y_i)$ (ciągi te mają dualny charakter – punktów i wektorów, tj. $\mathbf{x} = \vec{x}$, $\mathbf{y} = \vec{y}$) takich, że $\overrightarrow{\mathbf{xy}} = (y_i - x_i)$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_i + y_i)$, $\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_i)$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_i$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_i x_i}$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(y_i - x_i)(y_i - x_i)}$ (przy zastosowaniu konwencji sumacyjnej).

Przykład. Przestrzeń $\mathbf{E} = \overrightarrow{E}$, przy $\overrightarrow{\mathbf{xy}} = \vec{y} - \vec{x}$, gdzie \overrightarrow{E} jest wektorową przestrzenią euklidesową, jest afiniczną przestrzenią euklidesową.

Definicja. Niech $\{\mathbf{A}, \overrightarrow{V}, \vec{\varphi}\}$ przestrzeń afiniczna, \mathbf{B} podzbiór \mathbf{A} ($\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$), \overrightarrow{U} podprzestrzeń liniowa \overrightarrow{V} oraz $\vec{\psi}$ obcięcie $\vec{\varphi}$ do \mathbf{B} , czyli $\vec{\psi}(X, Y) = \vec{\varphi}(X, Y)$ dla $X, Y \in \mathbf{B}$. Jeżeli układ $\{\mathbf{B}, \overrightarrow{U}, \vec{\psi}\}$ jest przestrzenią afiniczną, to mówimy, że jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\{\mathbf{A}, \overrightarrow{V}, \vec{\varphi}\}$ (k -wymiarową, jeśli $\dim \overrightarrow{U} = k$). O zbiorze \mathbf{B} mówimy, że jest (pod)zbiorem afinicznym przestrzeni \mathbf{A} .

! Jeśli \mathbf{E} jest afiniczną przestrzenią euklidesową, a \mathbf{F} podzbiorem afinicznym (k -wymiarowym), to \mathbf{F} jest afiniczną przestrzenią euklidesową (k -wymiarową).

Przykład. Niech A ustalony punkt przestrzeni afinicznej \mathbf{A} o przestrzeni stowarzyszonej \overrightarrow{V} i niech $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ ustalony podzbiór przestrzeni \overrightarrow{V} . Wtedy zbiór

$$\mathbf{B} = \{ Y \in \mathbf{A}; Y = A + \eta^j \vec{u}_j, (\eta^j) \in \mathcal{R}^k \}$$

jest podzbiorem afinicznym przestrzeni \mathbf{A} (k -wymiarowym, jeśli (\vec{u}_j) ($j = 1, \dots, k$) są liniowo niezależne). Przestrzenią stowarzyszoną \mathbf{B} jest $\vec{U} = \text{lin}(\vec{u}_j)$.

4.2. Podzbiory przestrzeni afinicznej

Pierwszą klasą (typem) zbiorów w przestrzeni afinicznej są podzbiory afiniczne, w tym podzbiory skończenie wymiarowe. Nazywamy je odpowiednio:

- prostymi, jeśli są to zbiory 1-wymiarowe,
- płaszczyznami, jeśli są to zbiory 2-wymiarowe,
- hiperpłaszczyznami, jeśli są to zbiory k -wymiarowe w przestrzeni n -wymiarowej lub nieskończenie-wymiarowej.

Podzbiory przestrzeni afinicznej nie będące afinicznymi nazywamy nieafinicznymi. Jest więc „w sumie” mnoga „rozmaitość” podzbiorów przestrzeni afinicznej, których własności oraz podziały na typy (klasyfikacje) zależą od dodatkowej struktury, w jaką wyposażona jest przestrzeń i od własności stanowiących kryteria klasyfikacyjne.

I tak, w dowolnej przestrzeni afinicznej możemy zdefiniować równoległość dwóch zbiorów afinicznych \mathbf{B} i \mathbf{B}' , jeżeli odpowiednio ich przestrzenie stowarzyszone (jako podprzestrzeni afinicznych) \vec{U} i \vec{U}' są takie, że \vec{U} jest podprzestrzenią liniową \vec{U}' lub na odwrót lub $\vec{U} = \vec{U}'$ (ozn. $\mathbf{B} \parallel \mathbf{B}'$).

W przestrzeni afinicznej, której przestrzeń stowarzyszona jest unitarna można zdefiniować prostopadłość (ortogonalność) dwóch zbiorów afinicznych \mathbf{B} i \mathbf{B}' , jeżeli odpowiednio ich przestrzenie stowarzyszone (jako podprzestrzeni afinicznych) \vec{U} i \vec{U}' są ortogonalne, tzn. $\vec{U} \perp \vec{U}'$ (ozn. $\mathbf{B} \perp \mathbf{B}'$).

Spośród zbiorów nieafinicznych (w dowolnej przestrzeni afinicznej \mathbf{A}) można wyróżnić zbiory quasi-afiniczne k -wymiarowe: zbiór \mathbf{C} jest quasi-afiniczny k -wymiarowy (w przestrzeni afinicznej \mathbf{A}), jeżeli istnieje k -wymiarowy zbiór afiniczny \mathbf{B} zawierający \mathbf{C} ($\mathbf{C} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{A}$) i nie istnieje żaden l -wymiarowy zbiór afiniczny zawierający \mathbf{C} (np. odcinek jest quasi-afiniczny 1-wymiarowy, okrąg jest quasi-afiniczny 2-wymiarowy i – jak zobaczymy dalej – jest nieafiniczny zakrzywiony 1-wymiarowy, koło jest quasi-afiniczne 2-wymiarowe itd.).

W wypadku, gdy przestrzeń afiniczna jest metryczna, do jej podzbiorów odnoszą się wszystkie pojęcia i właściwości „topologiczne” sformułowane w p. 1.2. Afiniczność jednakże, a zwłaszcza euklidesowość, daje nowe możliwości definiowania pojęć lub wnioskowania o pojęciach zdefiniowanych.

Niech zatem \mathbf{E} będzie przestrzenią euklidesową (n -wymiarową). Wtedy – przykładowo:

- zbiór \mathbf{Z} (zawarty w \mathbf{E}) jest zwarty $\Leftrightarrow \mathbf{Z}$ jest domknięty i ograniczony;
- zbiór \mathbf{Z} (zawarty w \mathbf{E}) jest spójny \Leftrightarrow jest łukowo spójny, tzn. $\forall X, Y \in \mathbf{Z} \exists XY \subset \mathbf{Z}$

(przez łuk XY w przestrzeni \mathbf{E} rozumiemy zbiór homeomorficzny z odcinkiem \overline{XY} , homeomorfizm zaś to odwzorowanie bijektywne i ciągłe wraz z odwzorowaniem odwrotnym, natomiast odcinek \overline{XY} w przestrzeni \mathbf{E} , to zbiór $\{P \in \mathbf{E} : \overrightarrow{XP} = \xi \overrightarrow{XY}, \xi \in [0,1]\}$;

- zbiór \mathbf{Z} jest obszarem jednopójnym $\Leftrightarrow \mathbf{Z}$ jest obszarem (por. p. 1.2) takim, że każdą sferę $\mathbf{S}(X, r)$ zawartą w zbiorze \mathbf{Z} dla pewnego r , można przekształcić w sposób ciągły w punkt X za pomocą funkcji $\varepsilon \in [0, 1]$; $\varepsilon \rightarrow \mathbf{S}(X, (1-\varepsilon)r) \subset \mathbf{Z}$ ($\mathbf{S}(X,0) = \{X\}$).

Ważnym pojęciem dotyczącym zbiorów w przestrzeni \mathbf{E} jest miara (Riemanna). Niech \mathbf{K} będzie k -wymiarową kostką w przestrzeni \mathbf{E} ($1 \leq k \leq n$). tzn.

$$\mathbf{K} = \overline{XY}_1 \times \dots \times \overline{XY}_k,$$

przy czym wektory $\vec{u}_j = \overrightarrow{XY}_j$ ($j = 1, \dots, k$) tworzą układ ortogonalny. Kostka \mathbf{K} jest k -wymiarowym zbiorem quasi-afinicznym – obszarem domkniętym

$$\mathbf{K} = \{P \in \mathbf{E} : P = X + \eta^j \vec{u}_j; \eta^j \in [0,1]\}$$

w k -wymiarowej podprzestrzeni afinicznej

$$\mathbf{F} = \{P \in \mathbf{E} : P = X + \eta^j \vec{u}_j; (\eta^j) \in \mathcal{R}^k\}.$$

Przez miarę (k -wymiarową) Riemanna (krotko: miarę) kostki \mathbf{K} rozumiemy liczbę

$$K = \overset{\text{ozn.}}{\text{mes}(\mathbf{K})} = \overset{\text{ozn.}}{|\mathbf{K}|} = \overset{\text{def.}}{|\overrightarrow{XY}_1| \dots |\overrightarrow{XY}_k|}; \text{ dla } k = 1 \text{ miara ta nosi nazwę długości } (\mathbf{K} = \overline{XY}_1$$

jest odcinkiem), dla $k = 2$ – pola powierzchni ($\mathbf{K} = \overline{XY}_1 \times \overline{XY}_2$ jest prostokątem), a dla $k = 3$ – objętości ($\mathbf{K} = \overline{XY}_1 \times \overline{XY}_2 \times \overline{XY}_3$ jest prostopadłością).

Za pomocą miary kostki definiujemy miarę (Riemanna) zbiorów o bardziej złożonych „kształtach”. Niech \mathbf{Z} k -wymiarowy zbiór quasi-afiniczny zawarty w k -wymiarowym zbiorze afinicznym \mathbf{F} przestrzeni \mathbf{E} . Niech \mathbf{K}_r' ($r \in I' \subset \mathcal{N}$) i \mathbf{K}_s'' ($s \in I'' \subset \mathcal{N}$) będą dwiema rodzinami kostek rozłącznych lub o wspólnych kostkach co najwyżej $k-1$ -wymiarowych i takimi, że $\bigcup_{r \in I'} \mathbf{K}_r' \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \bigcup_{s \in I''} \mathbf{K}_s''$. Niech $K' = \sum_{r \in I'} \text{mes } \mathbf{K}_r'$ oraz $K'' = \sum_{s \in I''} \text{mes } \mathbf{K}_s''$. Jeżeli istnieje $K = \sup K' = \inf K''$, to K nazywamy k -wymiarową miarą zbioru \mathbf{Z} , ozn. $K = \text{mes } \mathbf{Z}$. Przy tym jeśli miara ta istnieje, to miara $k+1$ -wymiarowa jest równa zeru.

4.3. Układ odniesienia. Współrzędne punktu

Definicja. Niech $\mathbf{A}^n = \{ \mathbf{A}, \vec{V}^n, \vec{\varphi} \}$ n -wymiarowa przestrzeń afiniczna i niech $\mathbf{O} \in \mathbf{A}^n$

ustalony punkt \mathbf{A}^n , a (\vec{e}_i) ustalona baza przestrzeni stowarzyszonej \vec{V}^n . Układ

$\mathbf{U} = \{ \mathbf{O}; (\vec{e}_i) \}$ nazywamy układem odniesienia lub reperem globalnym przestrzeni \mathbf{A}^n .

Twierdzenie. Niech $\mathbf{U} = \{ \mathbf{O}; (\vec{e}_i) \}$ ustalony układ odniesienia przestrzeni afinicznej \mathbf{A}^n .

Wtedy odwzorowanie

$$l_0 : X \rightarrow \vec{x} = \overrightarrow{OX} \in \vec{V}^n, X \in A^n$$

jest bijekcją afiniczną (obrazami zbiorów afinicznych k -wymiarowych są k -wymiarowe zbiory afiniczne w przestrzeni \vec{V}^n traktowanej jako przestrzeń afiniczna), a odwzorowanie

$$l_u : X \rightarrow (x^i) \in \mathcal{R}^n, X \in A^n; \vec{x} = \overrightarrow{OX} = x^i \vec{e}_i$$

jest bijekcją afiniczną (obrazami zbiorów afinicznych k -wymiarowych są k -wymiarowe zbiory afiniczne w przestrzeni \mathcal{R}^n traktowanej jako przestrzeń afiniczna).

! Wektor $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ nosi nazwę wektora położenia punktu X , a ciąg (x^i) nazywamy układem współrzędnych afinicznych punktu X przestrzeni A^n względem układu odniesienia \mathbf{U} (x^i są zwane współrzędnymi afinicznymi lub prostoliniowymi). Mówimy, że układ odniesienia \mathbf{U} generuje układ współrzędnych prostoliniowych w przestrzeni A^n .

!! Jeżeli $A^n = E^n$ jest euklidesowa, a baza (\vec{e}_i) jest ortonormalna, to układ odniesienia $\mathbf{U} = \{O; (\vec{e}_i)\}$ nazywamy kartezjańskim, a współrzędne $x^i = x_i^{\text{ozn.}}$ ($i = 1, \dots, n$) nazywamy kartezjańskimi. Odwzorowania l_0, l_u są wtedy izomeriami (oprócz równoległości zachowują także odległość i prostopadłość – odległość między dwoma punktami w E^n jest taka sama jak między ich obrazami w \vec{E}^n i \mathcal{R}^n , podobnie prostopadłość wektorów w E^n jest prostopadłością ich obrazów w przestrzeniach \vec{E}^n i \mathcal{R}^n).

!!! Niech $\mathbf{U} = \{O; (\vec{e}_i)\}$ i $\mathbf{U}' = \{O'; (\vec{e}'_i)\}$ dwa układy odniesienia przestrzeni afinicznej A^n . Niech (ξ^i) będą współrzędnymi punktu O' względem układu odniesienia \mathbf{U} , (x^i) współrzędnymi punktu X względem \mathbf{U} , a (x'^i) współrzędnymi X względem \mathbf{U}' (X – punkt dowolny w A^n). Niech $\vec{e}'_i = A_i^i \vec{e}_i$. Wtedy

$$x^i = \xi^i + A_i^i x'^i.$$

Definicja. Przestrzeń afiniczna (w szczególności euklidesowa) jest zorientowana, jeśli bazie (\vec{e}_i) ustalonego układu odniesienia \mathbf{U} nadamy określoną orientację, a w innych układach odniesienia dopuszczamy bazy zgodnie zorientowane.

Definicja. Niech \mathbf{U} układ odniesienia przestrzeni afinicznej A^n . Przestrzeń (afiniczną n -wymiarową)

$$A\mathbf{U} = \{X \in A^n; X = O + x^i \vec{e}_i, (x^i) \in \mathcal{R}^n\},$$

czyli obraz przestrzeni \mathcal{R}^n w odwzorowaniu:

$$I_{\mathbf{U}}^{-1} : (x^i) \rightarrow X = O + x^i \vec{e}_i, (x^i) \in \mathcal{R}^n,$$

nazywamy przestrzenią położenia względem układu odniesienia \mathbf{U} .

U. Pojęcie to jest kluczowe dla opisu ruchu w mechanice.

4.4. Reprezentacje analityczne zbiorów w przestrzeni afinicznej

W prowadzenie (przyjęcie) w przestrzeni afinicznej \mathbf{A}^n układu odniesienia $\mathbf{U} = \{O; (\vec{e}_i)\}$ prowadzi do reprezentacji analitycznej tej przestrzeni i zawartych w niej zbiorów, tzn. umożliwia reprezentację liczbową zbioru \mathbf{Z} za pomocą odwzorowania odwrotnego do odwzorowania:

$$(x^i) \rightarrow X = O + x^i \vec{e}_i \in \mathbf{Z} \subset \mathbf{A}^n; (x^i) \in \mathcal{Z} \subset \mathcal{R}^n.$$

W szczególności zbiór liczbowy \mathcal{Z} może być obszarem w przestrzeni arytmetycznej \mathcal{R}^n , a więc wtedy \mathbf{Z} jest obszarem w przestrzeni afinicznej \mathbf{A}^n , gdy \mathbf{A}^n jest metryczna.

Jeżeli zbiór \mathbf{Z} nie jest obszarem w \mathcal{R}^n , ale jest tworem o regularnym kształcie, to współrzędne (x^i) punktów tego zbioru mogą nie być niezależne, ale mogą spełniać pewne relacje – założmy, że \mathcal{Z} jest zbiorem tych współrzędnych $(x^i) \in \mathcal{X} \subset \mathcal{R}^n$ (\mathcal{X} – obszar), które spełniają równania :

$$F_j(x^1, \dots, x^n) = 0, \quad j = 1, \dots, r,$$

tj. równania hiperpowierzchni k -wymiarowej \mathbf{Z} ($k = n - r$), jeśli F_j są niezależne, tzn. klasy C^1 na \mathcal{X} o macierzy Jakobi'ego rzędu r na \mathcal{X} . Dla $n = 2, r = 1$ mamy po prostu krzywą płaską, dla $n = 3, r = 1$ – powierzchnię, a dla $n = 3, r = 2$ – przecięcie dwóch powierzchni, czyli krzywą przestrzenną.

Tego typu reprezentacja jest tzw. reprezentacją afiniczną (prostoliniową). Możliwa i często bardzo dogodna jest inna reprezentacja – tzw. reprezentacja krzywoliniowa. Przedstawimy zatem syntetycznie reprezentację dowolną (w szczególności prostoliniową lub krzywoliniową).

Niech

$$(u^j) \rightarrow (x^i) \in \mathcal{X} \subset \mathcal{R}^n; (u^j) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^k$$

będzie danym odwzorowaniem iniektywnym klasy C^1 o macierzy Jacobi'ego $[\partial x^i / \partial u^j]$ rzędu k na obszarze \mathcal{U} , zwanym odwzorowaniem definiującym współrzędne uogólnione (dowolne) (u^j) reprezentujące zbiór

$$\mathbf{Z} = \{X \in \mathbf{A}^n; X = O + x^i(u^j) \vec{e}_i, (u^j) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^k\}.$$

Jeżeli $k = 1$, to $\mathbf{Z} = \mathbf{L}$ jest krzywą, dla $k = 2$ mamy powierzchnię $\mathbf{Z} = \mathbf{S}$ (lub obszar płaski, gdy $k = n = 2$), a dla $n > k \geq 3$ mówimy o hiperpowierzchni k -wymiarowej (lub o obszarze przestrzennym dla $n = k \geq 3$).

Funkcje $\vec{x} = \vec{x}(u^j)$ oraz $x^i = x^i(u^j)$ przy $(u^j) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^k$ noszą nazwę odpowiednio reprezentacji lub mapy wektorowej oraz analitycznej zbioru \mathbf{Z} , zwanego także k -wymiarową rozmaitością klasy C^1 , tzn. zbioru tych $X = O + \vec{x}(u^j) = O + x^i(u^j) \vec{e}_i$ dla $(u^j) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^k$ w danym, ustalonym układzie odniesienia \mathbf{U}_O , w ustalonych współrzędnych

uogólnionych (dowolnych) (u^j) . Reprezentacja ta generuje tzw. geometrię wewnętrzną rozmaitości \mathbf{Z} , a także jest podstawą tzw. „geometrii zewnętrznej”.

Wektory $\vec{g}_j = \partial \vec{x} / \partial u^j$ nazywamy bazą lokalną rozmaitości \mathbf{Z} , wyznaczającą w punkcie $X = O + x^i(u^j) \vec{e}_i$ tzw. podprzestrzeń styczną do \mathbf{Z}

$$\mathbf{T}_X = \{ Y \in \mathbf{A}^n : Y = X(u^j) + \eta^i \vec{g}_i(u^j), (\eta^i) \in \mathcal{R}^k \}.$$

Wektory $\vec{g}_i(u^j)$ są bowiem styczne do tzw. linii parametrycznych u^i (w punkcie $X(u^j)$), tj. krzywych (w szczególności prostych) $\mathbf{L}_i = \{ \tilde{X} = O + \tilde{x}_i(\tilde{u}^i) \}$ na rozmaitości \mathbf{Z} , gdzie $\tilde{x}_i(\tilde{u}^i) = \vec{x}(u^1, \dots, \tilde{u}^i, \dots, u^k)$ (tzn. $u^i = \tilde{u}^i$ jest zmienne, a pozostałe z u^1, \dots, u^k ustalone).

W efekcie dla wszystkich u^i powstaje na \mathbf{Z} siatka linii parametrycznych \mathbf{L}_i . Jest to siatka ciągła, tzn. przez każdy punkt $X \in \mathbf{Z}$ przechodzi k linii $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_k$ przecinających się w tym punkcie.

Podprzestrzeń (przestrzeń) styczna \mathbf{T}_X jest k -wymiarową podprzestrzenią afiniczną w \mathbf{A}^n , bowiem wektory \vec{g}_i są liniowo niezależne ($\alpha^i \vec{g}_i = \alpha^i \partial \vec{x} / \partial u^i = \alpha^i \partial x^j / \partial u^i \vec{e}_j = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha^i = 0$ dla $i = 1, \dots, k$, gdyż macierz $[\partial x^j / \partial u^i]$ jest rzędu k).

Niech

$$d\mathbf{T}_X = \{ Y \in \mathbf{A}^n : Y = X(u^j) + \eta^i \vec{g}_i(u^j), (\eta^i) \in [0, du^i] \},$$

przy $X = X(u^j)$ i $\vec{g}_i = \vec{g}_i(u^j)$ oraz du^i infinitezymalnych. Wtedy $d\mathbf{T}_X \approx d\mathbf{Z}_X$, gdzie $d\mathbf{Z}_X$ jest elementarnym płatem \mathbf{Z} , tj. częścią \mathbf{Z} wyznaczoną (ograniczoną) przez linie parametryczne przy $\tilde{u}^i = u^i$ oraz $\tilde{u}^i = u^i + du^i$ ($i = 1, \dots, k$). Niech następnie dZ będzie k -wymiarową miarą zbioru $d\mathbf{T}_X$. Wtedy

$$\text{mes}(\mathbf{Z}) = \int_{\mathcal{U}} dZ$$

nazywamy miarą (k -wymiarową) rozmaitości \mathbf{Z} .

Jeżeli $k = n$, to każda z baz lokalnych (\vec{g}_i) (w każdym punkcie X) jest bazą przestrzeni stowarzyszonej \vec{V} (tak, jak baza globalna (\vec{e}_i)). Jeśli $k < n$, to bazę (\vec{g}_i) rozszerza się do pełnej bazy przestrzeni \vec{V} . Rozszerzenie to nie jest jednoznaczne. Należy je odpowiednio zdefiniować, tj. wprowadzić taki układ wektorów (\vec{g}_i^*) ($\vec{g}_i^* = \vec{g}_i^*(u^j)$ dla $(u^j) \in \mathcal{U}$ oraz $i = 1, \dots, n$), że $\vec{g}_r^* = \vec{g}_r$ dla $r = 1, \dots, k < n$ oraz $(u^j) \in \mathcal{U}$. Przykładowo:

1) dla $k = 1, n = 2$, czyli dla krzywej (lub prostej) na płaszczyźnie: $\vec{g}_2^* \perp_{\text{ozn.}} \vec{g}_1$ tak, że $(\vec{g}_1^*, \vec{g}_2^*)$ ma tę samą orientację, co (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , przy $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}^2$; jeśli $\vec{x} = \vec{x}(u)$ ($u = u^1 \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}$) jest klasy C^2 i $d^2 \vec{x} / du^2 \neq \vec{0} \quad \forall u \in \mathcal{U}$, to jako \vec{g}_2^* przyjmuje się wektor normalny główny \vec{n} , tzn.

- $\vec{g}_1^* = \vec{g}_1 = \vec{t} = d\vec{x}/ds$ (wersor styczny), $\vec{g}_2^* = \vec{n}$, przy $u = s$ – parametr naturalny,
 $d^2\vec{x}/ds^2 = k_n \vec{n}$, k_n – krzywizna ($k_n = 1/\rho$, ρ – promień krzywizny);
- 2) dla $k = 1, n = 3$, tj. dla krzywej przestrzennej w przestrzeni $\mathbf{A}^3 = \mathbf{E}^3$, przyjmuje się, przy $u^1 = s$ (parametr naturalny) i $\vec{g}_1^* = \vec{g}_1 = \vec{t} = d\vec{x}/ds$ (wersor styczny): $\vec{g}_2^* = \vec{n}$ (wersor normalny główny – $d\vec{t}/ds = k_n \vec{n}$) oraz $\vec{g}_3^* = \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$ (wersor binormalny);
- 3) dla $k = 2, n = 3$, tj. dla powierzchni w przestrzeni $\mathbf{A}^3 = \mathbf{E}^3$, przyjmuje się zwykle $\vec{g}_r^* = \vec{g}_r = \partial\vec{x}/\partial u^r$ ($r = 1, 2$) i $\vec{g}_3^* = \vec{a}_3 = \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 / |\vec{g}_1 \times \vec{g}_2|$ albo $\vec{g}_r^* = \vec{a}_r = \vec{g}_r / |\vec{g}_r|$ ($r = 1, 2$) i $\vec{g}_3^* = \vec{a}_3 = \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 / |\vec{g}_1 \times \vec{g}_2|$.

Do zdefiniowania „metryki lokalnej” w zbiorze \mathbf{Z} , czyli do określenia długości ds elementarnego łuku krzywej \mathbf{L} ($\mathbf{L} \subset \mathbf{Z}$), a także do innych celów, wprowadza się w przestrzeni $\mathbf{A}^n = \mathbf{E}^n$ tensor metryczny $(g_{rs}(u^i))$: $g_{rs} = \vec{g}_r \cdot \vec{g}_s$. Mamy bowiem: $(ds)^2 = g_{rs} du^r du^s$ dla łuku $d\mathbf{L}$ o końcach o współrzędnych (u^i) i $(u^i + du^i)$. Ponadto definiujemy następujące obiekty „geometrii wewnętrznej” na \mathbf{Z} :

- wyróżnik tensora metrycznego: $g = \det [g_{rs}]$;
 - tensor metryczny odwrotny (g^{rs}) : $[g^{rs}] = [g_{rs}]^{-1}$;
 - pseudotensory Ricci’ego (e_{rs}) (e_{rst}), odpowiednio przy $n = 2, n = 3$:
 $e_{rs} = \sqrt{g} \epsilon_{rs}$, $e_{rst} = \sqrt{g} \epsilon_{rst}$;
 - kobazę lokalną (\vec{g}^r) : $\vec{g}^r = g^{rs} \vec{g}_s$;
 - symbole Christoffela I i II rodzaju (Γ_{rst}) i (Γ^r_{st}) : $\Gamma_{rst} = \vec{g}_r \cdot \vec{g}_{st}$, $\Gamma^r_{st} = \vec{g}^r \cdot \vec{g}_{st}$, gdzie
 $\vec{g}_{st} = \partial\vec{g}_r / \partial u^s = \partial^2\vec{x} / \partial u^r \partial u^s$, jeśli \mathbf{Z} jest klasy C^2
- (oczywiście dla każdego $X(u^i) \in \mathbf{Z}$).

Analogicznie, przy wykorzystaniu bazy lokalnej rozszerzonej (\vec{g}_i^*) , definiujemy obiekty „geometrii zewnętrznej” na \mathbf{Z} w przestrzeni \mathbf{E}^n .

Przykład. Rozważmy szerzej ważny z praktycznego punktu widzenia przypadek geometrii (wewnętrznej i zewnętrznej) powierzchni \mathbf{S} ($k = 2$) w przestrzeni trójwymiarowej \mathbf{E} ($n = 3$). Przyjmijmy wygodną w tym przypadku umowę, że indeksy oznaczone małymi literami greckimi przyjmują wartości 1, 2 ($\alpha, \beta, \dots = 1, 2$), a indeksy oznaczone małymi literami łacińskimi przyjmują wartości 1, 2, 3 ($i, j, k, \dots = 1, 2, 3$). Mamy zatem, w tym przy wykorzystaniu wprowadzonych już wielkości:

A) parametryzację (mapę) wektorową i analityczną powierzchni \mathbf{S}

$$\vec{x} = x(u^1, u^2), \quad x^i = x^i(u^1, u^2), \quad (u^\alpha) \in \mathcal{U} \quad (\text{obszar w } \mathcal{R}^2)$$

oraz siatkę linii parametrycznych na \mathbf{S} o parametryzacjach

$$\vec{x}_1 = x(u^1, u^2 |_{\text{const}}), \quad \vec{x}_2 = x(u^1 |_{\text{const}}, u^2);$$

B) elementy geometrii wewnętrznej:

- bazę lokalną styczną do powierzchni (baza wektorów stycznych do linii parametrycznych w punkcie $X(u^1, u^2)$)

$$\vec{g}_\alpha = d\vec{x}_\alpha / du^\alpha = \vec{x}_{,\alpha},$$

generująca podprzestrzeń styczną $\mathbf{T}(u^1, u^2)$ w punkcie $X(u^1, u^2)$ oraz bazę lokalną wersorów

$$\vec{a}_\alpha = \vec{g}_\alpha / |\vec{g}_\alpha|;$$

- tensor metryczny ($g_{\alpha\beta}$) i pierwsza forma kwadratowa powierzchni \mathbf{S}

$$g_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta, \quad I = (ds)^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta,$$

gdzie $(ds)^2 = (\overline{ds}_1 + \overline{ds}_2)^2 = (\vec{g}_\alpha du^\alpha) \cdot (\vec{g}_\beta du^\beta)$;

- wyróżnik g i tensor metryczny odwrotny ($g^{\alpha\beta}$)

$$g = \det[g_{\alpha\beta}], \quad [g^{\alpha\beta}] = [g_{\alpha\beta}]^{-1};$$

- kobaza lokalna (\vec{g}^α) oraz kobaza lokalna wersorów (\vec{a}^α) styczne do \mathbf{S}

$$\vec{g}^\alpha = g^{\alpha\beta} \vec{g}_\beta, \quad \vec{a}^\alpha = \vec{g}^\alpha / |\vec{g}^\alpha|,$$

przy czym

$$g^{\alpha\beta} = \vec{g}^\alpha \cdot \vec{g}^\beta = g^{\beta\alpha}, \quad \vec{g}^\alpha \cdot \vec{g}_\beta = g_\alpha^\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$$

$$|\vec{g}_1 \times \vec{g}_2| = \sqrt{g}, \quad |\vec{g}^1 \times \vec{g}^2| = 1/\sqrt{g};$$

- pseudotensory Ricci'ego ($e_{\alpha\beta}$) i ($e^{\alpha\beta}$)

$$e_{\alpha\beta} = \sqrt{g} \epsilon_{\alpha\beta}, \quad e^{\alpha\beta} = \sqrt{g} \epsilon^{\alpha\beta},$$

oraz

$$e_\alpha^\beta = g^{\beta\gamma} e_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\gamma} e^{\gamma\beta}, \quad e^\alpha_\beta = g^{\alpha\gamma} e_{\gamma\beta} = g_{\beta\gamma} e^{\alpha\gamma};$$

- symbole Christoffela I rodzaju i II rodzaju

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \vec{g}_{\alpha,\beta} \cdot \vec{g}_\gamma, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \vec{g}_{\alpha,\beta} \cdot \vec{g}^\gamma,$$

gdzie

$$\vec{g}_{\alpha,\beta} = \vec{x}_{,\alpha\beta} = \vec{x}_{,\beta\alpha} = \vec{g}_{\beta,\alpha},$$

a więc

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = g_{\gamma\delta} \Gamma_{\beta\alpha}^\delta, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\delta}^\gamma = g^{\gamma\delta} \Gamma_{\alpha\beta\delta};$$

C) elementy geometrii zewnętrznej:

- wersor normalny do powierzchni \mathbf{S}

$$\vec{g}_3 = \vec{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 = \vec{g}^3 = \vec{a}^3 = \sqrt{g} \vec{g}^1 \times \vec{g}^2,$$

a więc także baza lokalna (\vec{g}_i) i jej kobaza (\vec{g}^i) oraz bazy jednostkowe, tzw. „fizyczne”

(\vec{a}_i) i (\vec{a}^i) , przy czym

$$\vec{g}_i \times \vec{g}_j = e_{ijk} \vec{g}^k = e_i^k \vec{g}_k, \quad \vec{g}^i \times \vec{g}^j = e^{ijk} \vec{g}^k = e^{ij}{}^k \vec{g}_k, \quad \vec{g}^i \times \vec{g}^j = e^{ij}{}^k \vec{g}^k = e^{ijk} \vec{g}_k$$

- tensor krzywiznowy ($b_{\alpha\beta}$) i druga forma kwadratowa powierzchni **S**

$$b_{\alpha\beta} = \vec{x}_{,\alpha\beta} \cdot \vec{g}_3 = \vec{g}_{\alpha,\beta} \cdot \vec{g}_3 = \vec{g}_{\beta,\alpha} \cdot \vec{g}_3 = b_{\beta\alpha}, \quad \Pi = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta;$$

- wyróżnik b i tensor krzywiznowy odwrotny ($b^{\alpha\beta}$) i mieszany (b_α^β)

$$b = \det[b_{\alpha\beta}], \quad [b^{\alpha\beta}] = [b_{\alpha\beta}]^{-1}, \quad [b^{\alpha\beta}] = [b^{\beta\alpha}], \quad b_\alpha^\beta = b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = b^{\beta\gamma} g_{\alpha\gamma},$$

- krzywizna Gaussa

$$K_G = b / g,$$

według znaku której dzieli się (klasyfikuje) punkty na powierzchni / powierzchnie na eliptyczne, paraboliczne i hiperboliczne, gdy odpowiednio $K_G > 0$, $K_G = 0$ i $K_G < 0$ w danym punkcie / w każdym punkcie powierzchni;

D) podstawowe równości wiążące elementy geometrii powierzchni:

- wzory Gaussa-Weingartena (wyrażające rozkład pochodnych wektorów bazy lokalnej w tej bazie)

$$\vec{g}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{g}_\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{g}_3 = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \vec{g}^\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{g}^3, \quad \vec{g}_{3,\alpha} = -b_\alpha^\beta \vec{g}_\beta = -b_{\alpha\beta} \vec{g}^\beta;$$

- wzory na symbole Christoffela (w zależności od pochodnych tensora metrycznego)

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma});$$

- związki Codazziego-Mainardiego i tożsamość Gaussa¹⁾

$$b_{1\alpha,2} - b_{2\alpha,1} = b_{11}\Gamma_{\alpha 2}^1 + b_{12}(\Gamma_{\alpha 2}^2 - \Gamma_{\alpha 1}^1) - b_{22}\Gamma_{\alpha 1}^2,$$

$$K_G = \frac{1}{2g}(2g_{12,12} - g_{11,22} - g_{22,11}) + \frac{1}{g}(\Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{12\alpha} - \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{11\alpha});$$

Uwaga. Do rozmaitości k -wymiarowych w przestrzeni afinicznej euklidesowej

(n -wymiarowej; $1 \leq k \leq n$) zaliczymy także spójne zbiory \mathbf{Z} , które można przedstawić w

postaci sumy zbiorów k -wymiarowych $\mathbf{Z}^{(I)}$ określonych przez mapy $\vec{x}^{(I)} = \vec{x}^{(I)}(u^j)$,

$(u^j) \in \mathcal{U}^{(I)} \subset \mathcal{R}^k$ ($I = 1, \dots, N$). Łącznie rodzina map $\{\vec{x}^{(I)} = \vec{x}^{(I)}(u^j), I = 1, \dots, N\}$ tworzy

atlas rozmaitości $\mathbf{Z} = \bigcup \mathbf{Z}^{(I)}$, przy czym jeśli $\mathbf{Z}^{(I)} \cap \mathbf{Z}^{(J)} \neq \emptyset$ dla pewnych I i J , to

$\vec{x}^{(I)}(u^j) = \vec{x}^{(J)}(u^j)$ dla $(u^j) \in \mathcal{U}^{(I)} \cap \mathcal{U}^{(J)}$.

Przykładem tego typu rozmaitości jest część sfery $\mathbf{S}(\mathbf{O}, r)$ w przestrzeni \mathbf{E}^3 ($k = 2, n = 3$), jeśli

jako współrzędne parametryczne (u^1, u^2) przyjmujemy współrzędne kartezjańskie tej z

płaszczyzn, którą można wzajemnie jednoznacznie zrzutować daną część sfery

(np. $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2} \vec{e}_3$, $(x_1, x_2) \in \mathcal{U} = (-r/2, r/2) \times (-r/2, r/2)$). Innego typu

¹ Rezultat ten Gauss nazwał *Theorema Egregium* (najdoskonalsze twierdzenie), bo uznał za takie to, że typ powierzchni jest elementem geometrii wewnętrznej

reprezentację (mapy, atlas) otrzymujemy wtedy, jeśli jako współrzędne parametryczne przyjmujemy współrzędne geograficzne (długość i szerokość geograficzną).

Uwaga. Ważnym przykładem rozmaitości są obszary n -wymiarowe \mathbf{V} w przestrzeni \mathbf{E}^n ($n = 2$ lub $n = 3$), których brzeg jest sumą rozmaitości k -wymiarowych ($k = 1, \dots, n-1$) oraz izolowanych punktów (wierzchołków, naroży). Na przykład, brzeg obszaru prostokątnego w przestrzeni \mathbf{E}^2 jest sumą czterech odcinków otwartych (boków bez końców), będących jednowymiarowymi rozmaitościami (zbiorami quasi-afinicznymi), oraz czterech punktów (wierzchołków prostokąta).

4.5. Przekształcenia zbiorów w przestrzeni afinicznej

Niech $\{\mathbf{A}, \vec{V}, \vec{\varphi}\}$ i $\{\mathbf{A}', \vec{V}', \vec{\varphi}'\}$ dwie przestrzenie afiniczne i niech \mathbf{Z} zbiór w \mathbf{A} , a $\mathcal{P}: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{A}'$ odwzorowanie injektywne zbioru \mathbf{Z} na zbiór $\mathbf{Z}' = \text{Im } \mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{Z})$. W języku geometrii afinicznej (w języku przestrzeni afinicznych) mówimy, że \mathcal{P} jest przekształceniem zbioru \mathbf{Z} na \mathbf{Z}' (tzn. \mathcal{P} jest bijekcją \mathbf{Z} na \mathbf{Z}').

Przykład. Niech \mathbf{A}^n przestrzeń afiniczna n -wymiarowa, $\mathbf{U} = \{\mathbf{O}, (\vec{e}_i)\}$ jej ustalony układ odniesienia, zaś $\mathbf{A}' = \mathcal{R}^n$. Przykładem przekształcenia zbioru na zbiór jest odwzorowanie (bijektywne) $\mathcal{P} = \text{lu}$, gdzie przykładem przekształcenia zbioru na zbiór $\mathcal{Z} = \text{lu}(\mathbf{Z})$

$$\text{lu}: \mathbf{A} \supset \mathbf{Z} \longrightarrow \mathcal{Z} \subset \mathcal{R}^n; X \longrightarrow (x^i), \overline{OX} = x^i \vec{e}_i.$$

Szczególnie ważne są przekształcenia zbiorów, gdy $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$, tj. w tej samej przestrzeni afinicznej.

Definicja. Niech \mathbf{A} dowolna przestrzeń afiniczna, a \mathbf{Z} i \mathbf{Z}' jej podzbiory. Przekształcenie bijektywne zbioru \mathbf{Z} na \mathbf{Z}' , zachowujące orientację nazywamy deformacją zbioru \mathbf{Z} do konfiguracji \mathbf{Z}' .

Uwaga. Niech \mathbf{E} przestrzeń euklidesowa, \mathcal{D} deformacją zbioru \mathbf{Z} na \mathbf{Z}' : $X' = \mathcal{D}(X)$, $X \in \mathbf{Z}$. Jeżeli

$$|\overline{X'Y'}| = |\overline{XY}| \quad \forall X, Y \in \mathbf{Z} \quad (X' = \mathcal{D}(X), Y' = \mathcal{D}(Y)),$$

to \mathcal{D} nazywamy deformacją sztywną (innymi słowy, jest to izometria, która zachowuje orientację).

! Deformacją sztywną jest w szczególności translacja (przesunięcie) zbioru \mathbf{Z} o wektor \vec{w} przestrzeni stowarzyszonej \vec{E} :

$$\mathcal{T}_{\vec{w}}: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}'; X \rightarrow X' = X + \vec{w} \quad (\overline{XX'} = \vec{w} \quad \forall X \in \mathbf{Z}),$$

\vec{w} - wektor przesunięcia (translacji) zbioru \mathbf{Z} .

!! Deformacją sztywną jest także rotacja zbioru \mathbf{Z} dookoła punktu $A \in \mathbf{E}$ (A - środek rotacji / obrotu):

$$\mathcal{R}: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}'; \mathcal{R}(X) = X', \overline{AX'} = \mathcal{R}(\overline{AX}),$$

gdzie $\mathbf{R} \in L(\overline{\mathbf{E}})$ jest operatorem rotacji/obrotu (por. p. 3.3).

!!! Jeżeli $\mathbf{Z}' = \mathcal{D}(\mathbf{Z})$, gdzie \mathcal{D} deformacja, to \mathbf{Z} i \mathbf{Z}' nazywamy zbiorami przystającymi.

!V Dowolna deformacja sztywne jest złożeniem translacji i rotacji. Dowolna deformacja jest złożeniem deformacji sztywnej i odkształcenia.

Uwaga. Przekształcenia zbiorów dogodnie jest definiować i analizować na podstawie różnego typu reprezentacji (wektorowych lub analitycznych), tj. funkcji (wektorowych lub liczbowych) punktów lub współrzędnych punktów tych zbiorów.

Niech \mathbf{A} i \mathbf{A}' przestrzenie afiniczne skończone wymiarowe ($\dim \mathbf{A} = n$, $\dim \mathbf{A}' = m$),

a $\mathbf{U} = \{\mathbf{O}, (\vec{e}_i)\}$, $\mathbf{U}' = \{\mathbf{O}', (\vec{e}'_j)\}$ odpowiednio ustalone w nich układy odniesienia

definiujące współrzędne (prostoliniowe) (x^i) , (x'^j) :

$$l_{\mathbf{U}}: \mathbf{X} \rightarrow (x^i); \quad \overline{\mathbf{OX}} = \vec{x} = x^i \vec{e}_i, \quad \mathbf{X} \in \mathbf{A}, \quad (x^i) \in \mathcal{R}^n;$$

$$l'_{\mathbf{U}'}: \mathbf{X}' \rightarrow (\xi^j); \quad \overline{\mathbf{O'X}'} = \vec{x}' = x'^j \vec{e}'_j, \quad \mathbf{X}' \in \mathbf{A}', \quad (\xi^j) \in \mathcal{R}^m.$$

Niech $\mathcal{P}: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}'$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{A}$, $\mathbf{Z}' \subset \mathbf{A}'$ będzie przekształceniem takim, że $\vec{x}' = \vec{\xi}(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in \mathbf{Z}$

(funkcja ta zwana jest funkcją przekształcenia \mathcal{P}). Jest ona pierwszą reprezentacją wektorową przekształcenia \mathcal{P} i jest równoważna następującym reprezentacjom analitycznym:

- reprezentacji m -wymiarowej we współrzędnych prostoliniowych (kartezjańskich, gdy $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{A}' = \mathbf{E}'$)

$$x'^j = \xi^j(x^i), \quad (x^i) \in \mathcal{Z} \subset \mathcal{R}^n, \quad (x'^j) \in \mathcal{Z}' \subset \mathcal{R}^m,$$

gdzie $(x'^j) = l'_{\mathbf{U}'}(\mathcal{P}(l_{\mathbf{U}}^{-1}(x^i)))$, $\mathcal{Z} = l_{\mathbf{U}}(\mathbf{Z})$, $\mathcal{Z}' = l'_{\mathbf{U}'}(\mathbf{Z}')$;

- jeżeli w przestrzeni \mathbf{A} (lub tylko na zbiorze \mathbf{Z}) wprowadzimy współrzędne uogólnione (u^r):

$$x^i = x^i(u^r), \quad (u^r) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^k, \quad (x^i) \in \mathcal{Z} \quad (k \leq n),$$

a w przestrzeni \mathbf{A}' wprowadzimy współrzędne uogólnione (θ^s):

$$x'^i = x'^i(\theta^s), \quad (\theta^s) \in \mathcal{V} \subset \mathcal{R}^m, \quad (x'^i) \in \mathcal{Z}',$$

to otrzymamy reprezentację analityczną we współrzędnych uogólnionych (w szczególności może być $(u^r) = (x^i)$ lub $(x'^i) = (\theta^s)$).

W przypadku, gdy $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ (np., gdy $\mathcal{P} = \mathcal{D}$ jest deformacją zbioru \mathbf{Z}), to możemy postąpić jak wyżej, wprowadzając dwa układy odniesienia $\mathbf{U} = \{\mathbf{O}, (\vec{e}_i)\}$ i $\mathbf{U}' = \{\mathbf{O}', (\vec{e}'_i)\}$ (teraz $m = n$

oraz $(x'^j) = (x^{i'})$, $j = i' = 1, \dots, n$), czyli dla układu współrzędnych (prostoliniowych lub uogólnionych) – jeden dla reprezentacji analitycznej zbioru \mathbf{Z} , a drugi dla reprezentacji

obrazu $\mathbf{Z}' = \mathcal{P}(\mathbf{Z})$. Możemy też użyć tej samej reprezentacji liczbowej przestrzeni \mathbf{A} do reprezentacji analitycznej zbioru \mathbf{Z} , pamiętając jednak by użyć innego oznaczenia na

współrzędne punktów $\mathbf{X} \in \mathbf{Z}$ niż na współrzędne ich obrazów $\mathbf{X}' = \mathcal{P}(\mathbf{X})$ – np. we

współrzędnych prostoliniowych za pomocą funkcji analitycznych przekształcenia \mathcal{P} :

$$x^{i'} = \xi^{i'}(x^r), \quad (x^r) \in \mathcal{Z}.$$

Drugą, podstawową w dziedzinie inżynierii lądowej, reprezentacją wektorową przekształcenia \mathcal{P} zbioru \mathbf{Z} na zbiór \mathbf{Z}' w przestrzeni afinicznej \mathbf{A} jest reprezentacja przemieszczeniowa, którą

jest funkcja wektorowa (pole wektorowe):

$$\vec{w} = \vec{w}(X), \quad X \in Z,$$

gdzie $\vec{w}(X) = \overrightarrow{XX'}$ jest wektorem przemieszczenia punktu X do jego obrazu $X' = \mathcal{P}(X)$.

Ustalając w przestrzeni \mathbf{A} (n -wymiarowej) układ odniesienia $\mathbf{U} = \{O, (\vec{e}_i)\}$ oraz uwzględniając $X = O + x^i \vec{e}_i$, $\vec{w} = w^i \vec{e}_i$, otrzymujemy następującą reprezentację przemieszczeniową analityczną we współrzędnych prostoliniowych (w szczególności kartezjańskich):

$$w^i = w^i(x^j), \quad (x^j) \in Z, \quad Z = \text{lu}(Z).$$

Wprowadzając w zbiorze Z współrzędne uogólnione $(u^r) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^k$ oraz bazę lokalną rozszerzoną (pełną) (\vec{g}_j^*) ($\vec{g}_j^* = \vec{g}_j^*(u^r)$ dla $X(u^r) \in Z$ przy $(u^r) \in \mathcal{U}$, $j = 1, \dots, n$) i uwzględniając rozkład $\vec{w} = *w^j \vec{g}_j^*$ wektora $\vec{w}(X)$ przy $X = X(u^r) \in Z$, otrzymujemy reprezentację przemieszczeniową analityczną we współrzędnych uogólnionych przekształcenia \mathcal{P} :

$$*w^j = *w^j(u^r), \quad (u^r) \in \mathcal{U}.$$

4.6. Pola na zbiorach w przestrzeni afinicznej

Tym „dziwnym” terminem „pole na zbiorze” określa się funkcję, której argumentami są punkty ze zbioru – dziedziny funkcji (lub współrzędne punktów z tego zbioru).

Definicja. Niech \mathbf{A} przestrzeń afiniczna o przestrzeni stowarzyszonej \overline{V} i niech \overline{W} przestrzeń wektorowa (obie nad ciałem \mathcal{R}), niech Z zbiór (dowolny) przestrzeni \mathbf{A} . Przez pole na zbiorze Z rozumiemy funkcję o dziedzinie Z i o wartościach w przestrzeni \overline{W} .

Uwaga. W zależności od specyfikacji przestrzeni \mathbf{A} , zbioru Z oraz przestrzeni \overline{W} otrzymujemy przypadki szczególne pól, odpowiednio dodatkowo nazywanych.

Przykładowo, jeżeli przestrzeń \mathbf{A} jest dowolna, zbiór Z jest dowolny, a $\overline{W} = \mathcal{R}$, to pole $\alpha = \alpha(X)$, $\alpha \in \mathcal{R}$, $X \in Z$, nazywamy połem skalarowym, a jeśli $\overline{W} = \mathcal{R}^m$, to o polu $(\xi^j) = (\xi^j(X))$, $(\xi^j) \in \mathcal{R}^m$, $X \in Z$, powiemy, że jest połem wektorowym analitycznym lub że jest to wektor pól skalarowych $\xi^j = \xi^j(X)$, $X \in Z$ ($j = 1, 2, \dots, m$).

W przypadku, gdy $\overline{W} = \overline{V}$, to mamy typowy przykład pola wektorowego $\vec{v} = \vec{v}(X)$, $\vec{v} \in \overline{V}$, $X \in Z$ (np. pole przemieszczeń $\vec{w} = \vec{w}(X)$, $\vec{w} \in \overline{V}$, $X \in Z$ określające deformację zbioru Z).

Ważne przypadki pól na zbiorze Z mamy wtedy, gdy Z jest rozmaitością, \overline{W} jest przestrzenią wektorową złożonych obiektów (mających wszakże związek ze strukturą przestrzeni \mathbf{A}). Takimi są, przykładowo, pola tensorowe, gdy $\overline{W} = L^{(p,q)}(V^*, \overline{V}; \mathcal{R})$, oraz pola operatorów liniowych, gdy $\overline{W} = L(\overline{V})$.

Jeżeli $\mathbf{A} = \mathcal{R}^n$, i $\mathbf{Z} = Z \subset \mathcal{R}^n$, to *de facto* pola określone na Z są funkcjami jednej zmiennej ($n = 1$) lub funkcjami wielu zmiennych rzeczywistych ($n > 1$) (o wartościach skalarowych, wektorowych lub tensorowych). W tego typu przypadkach również stosujemy określenie „pole”, zwłaszcza, gdy Z jest zbiorem współrzędnych zbioru geometrycznego \mathbf{Z} .

Uwaga. Podobnie, jak to sformułowano w drugiej uwadze w p. 4.5, również przypadku pól dogodne są do „obróbki rachunkowej” ich reprezentacje analityczne.

Niech \mathbf{A} przestrzeń afiniczna n -wymiarowa (n -wymiarowa jest również przestrzeń wektorowa stowarzyszona \vec{V}), niech $\mathbf{U} = \{O, (\vec{e}_i)\}$ układ odniesienia (ustalony) generujący układ współrzędnych prostoliniowych (reprezentację analityczną lu: $X \rightarrow (x^i)$, $X \in \mathbf{A}$, $(x^i) \in \mathcal{R}^n$, $\vec{OX} = \vec{x} = x^i \vec{e}_i \in \vec{V}$), niech $({}^*e^i)$ baza dualna do (\vec{e}_i) i niech Z analityczny obraz zbioru \mathbf{Z} , w przestrzeni \mathbf{A} , na którym określone jest pole

- skalarowe: $X \rightarrow \alpha(X)$, $X \in \mathbf{Z}$, $\alpha(X) \in \mathcal{R}$,
- wektorowe: $X \rightarrow \vec{v}(X)$, $X \in \mathbf{Z}$, $\vec{v}(X) \in \vec{V}$,
- operatorów liniowych: $X \rightarrow \mathbf{K}(X)$, $X \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{K}(X) \in L(\vec{V})$
- tensorowe: $X \rightarrow \mathbf{T}(X)$, $X \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{T}(X) \in L^{(p,q)}(\vec{V})$

itp. Uwzględniając $X = X(x^r)$ (przy $(x^r) = lu(X)$, $X \in \mathbf{Z}$) oraz rozkłady $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$,

$\mathbf{K} = K_i^j {}^*e^i \otimes \vec{e}_j$, $\mathbf{T} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes {}^*e^{j_1} \otimes \dots \otimes {}^*e^{j_q}$ otrzymujemy następujące

reprezentacje analityczne (liczbowe) pól:

- skalarowego: $\alpha = \alpha(x^r)$, $(x^r) \in Z$, $\alpha \in \mathcal{R}$,
- wektorowego: $v^j = v^j(x^r)$, $(x^r) \in Z$, $(v^j) \in \mathcal{R}^n$,
- operatorów liniowych: $K_i^j = K_i^j(x^r)$, $(x^r) \in Z$, $(K_i^j) \in \mathcal{R}^{n \times n}$,
- tensorowego: $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x^r)$, $(x^r) \in Z$, $(T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}) \in \mathcal{R}^{n^{p+q}}$

we współrzędnych prostoliniowych.

Gdyby na zbiorze \mathbf{Z} – rozmaitości k -wymiarowej ($1 \leq k \leq n$) – wprowadzić reprezentację analityczną za pomocą współrzędnych uogólnionych: $x^i = x^i(u^r)$, $(u^r) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^k$, $(x^i) \in Z$, a w każdym punkcie $X(u^r)$ wprowadzić bazę lokalną rozszerzoną $\vec{g}_j^*(u^r)$ (bazę przestrzeni \vec{V} dla każdego $X(u^r)$) oraz do niej dualną $({}^* \vec{g}^j(u^r))$ (bazę przestrzeni dualnej \mathbf{V}^*), to otrzymalibyśmy analogicznie reprezentacje analityczne (liczbowe) pól – tyle, że teraz we współrzędnych uogólnionych (jako funkcje liczbowe zmiennych $(u^r) \in \mathcal{U}$).

MMIL II

Część pierwsza. ANALIZA

5. Podstawowe zagadnienia analizy matematycznej

- 5.1. Granica i zbieżność
- 5.2. Ciągłość
- 5.3. Pochodna i różniczkowalność
- 5.4. Całka i całkowalność
- 5.5. Trygonometryczne szeregi Fouriera

5. PODSTAWOWE ZAGADNIENIA ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Takie pojęcia jak granica, ciągłość, pochodna czy też całka to są te pojęcia, które głównie kojarzą się nam z analizą matematyczną. Dlaczego więc dopiero teraz będą omówione? I to czasem ponownie, gdyż niektóre tematy były już poruszane.

Przede wszystkim, dlatego że główne pojęcie rachunku różniczkowego (jako części analizy matematycznej) jakim jest pochodna funkcji sformułujemy dla odwzorowań określonych w metrycznej przestrzeni afinicznej (głównie o metryce generowanej przez normę przestrzeni stowarzyszonej), w szczególności w przestrzeni liniowej unormowanej (można ją traktować dwójako, również jako przestrzeń afiniczną), o wartościach w przestrzeni liniowej unormowanej. Całkować zaś będziemy funkcję zmiennej lub zmiennych rzeczywistych, ale także pole na zbiorze w metrycznej przestrzeni afinicznej (w szczególności na rozmaitościach) o wartościach w przestrzeni liniowej unormowanej. Natomiast pojęcie granicy, a więc zbieżność i niejako w konsekwencji ciągłość rozważać będziemy głównie w przestrzeni „tylko” metrycznej i o wartościach w przestrzeni metrycznej, w szczególności w przestrzeni liniowej unormowanej i w przestrzeni arytmetycznej.

Na zakończenie przedstawimy zagadnienie o charakterze zdecydowanie aplikacyjnym, tj. najważniejsze „fakty” dotyczące szeregów trygonometrycznych Fouriera (egzemplifikacji ogólnej teorii szeregów Fouriera w przestrzeniach unitarnych z rozdz. 1.4).

Zamiast ogólnego pojęcia „funkcja” jako przyporządkowania każdemu elementowi z jednego zbioru dokładnie jednego elementu z drugiego zbioru stosować będziemy termin „odwzorowanie”- także do wielu przypadków szczególnych. Zaś termin „funkcja” stosować będziemy zazwyczaj do odwzorowań o wartościach liczbowych (rzeczywistych) lub o zmiennej liczbowej, a jeśli funkcja taka będzie określona na zbiorze odwzorowań (na przestrzeni funkcyjnej), to nazywać ją będziemy zwykle „funkcjonałem”. Natomiast, gdy odwzorowanie jest z przestrzeni w nią samą, to określać je będziemy zazwyczaj terminem „przekształcenie” (lub „operator”, gdy jest liniowe). W końcu, przez „pole” rozumiemy często odwzorowanie na zbiorze punktów (zwykle w przestrzeni afinicznej – także takiej, która jest traktowana jako przestrzeń afiniczna). Oczywiście powyższe określenia nie są jednoznaczne – raczej zwyczajowe, zależne często od kontekstu występowania danego pojęcia.

5.1. Granica i zbieżność

W zasadzie ten podrozdział jak i następny mógłby się znaleźć w rozdz. 1 poświęconym przestrzeniom metrycznym. Zawiera on bowiem głównie elementy wprowadzające do topologii przestrzeni metrycznych (z wyjątkiem, pojęcia słabej zbieżności, które wymaga znajomości elementów algebry liniowej – rozdz. 2 i 3). Jednak tytułowe terminy, tj. „granica i zbieżność” są głównie „konsumowane” przez takie pojęcia, jak „ciągłość”, „pochodna”, a także „zbieżność ciągów i szeregów funkcyjnych oraz ich różniczkowalność i całkowalność”.

Niech zatem $\{\mathbf{D}; d\}$ przestrzeń metryczna punktów X, Y, \dots .

Definicja. Ciąg (X_n) punktów przestrzeni \mathbf{D} ma granice X z przestrzeni \mathbf{D} ($\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$) lub inaczej ciąg (X_n) dąży do X ($X_n \rightarrow X$) wtedy tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} d(X_n, X) = 0$.

! $\lim_{n \rightarrow \infty} d(X_n, X) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N} \forall n > N d(X_n, X) < \varepsilon$.

!! $\lim_{n \rightarrow \infty} d(X_n, X) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N} \forall n, m > N d(X_n, X_m) < \varepsilon$ (warunek Cuchy'ego).

Twierdzenie odwrotne do powyższego jest prawdziwe w przestrzeniach metrycznych zupełnych.

Definicja. Punkt S jest punktem skupienia zbioru \mathbf{Z} przestrzeni \mathbf{D} , jeżeli $S = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ dla pewnego ciągu (X_n) takiego, że $X_n \neq S$ i $X_n \in \mathbf{Z}$ dla każdego $n > N_0$ i pewnego $N_0 \in \mathcal{N}$.

Niech $\{\mathbf{D}'; d'\}$ również przestrzeń metryczna, \mathbf{Z} zbiór zawarty w \mathbf{D} i niech $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{D}'$ dane odwzorowanie.

Definicja. Element S' ($S' \in \mathbf{D}'$) jest granica odwzorowania f w punkcie skupienia S zbioru

\mathbf{Z} (zapis: $S' = \lim_{X \rightarrow S} f(X)$ lub $f(X) \rightarrow S'$), jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} f(X_n) = S'$ dla każdego ciągu (X_n)

takiego, że $X_n \neq S$ i $X_n \in \mathbf{Z}$ dla każdego $n > N_0$ i pewnego N_0 oraz $S = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$.

Twierdzenie. $S' = \lim_{X \rightarrow S} f(X) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 d(X, S) < \delta \Rightarrow d'(f(X), S') < \varepsilon$.

Twierdzenie. Jeżeli przestrzeń \mathbf{D}' jest zupełna, to warunkiem koniecznym a zarazem wystarczającym na to, by istniała granica odwzorowania f w punkcie skupienia S zbioru \mathbf{Z} jest, aby był spełniony następujący warunek Cauchy'ego (w języku „ $\delta - \varepsilon$ ”):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 d(X, S) < \delta \text{ i } d(Y, S) < \delta \Rightarrow d'(f(X), f(Y)) < \varepsilon$$

Twierdzenie. Niech $\mathbf{Z} \subset \mathbf{D}_1 \times \dots \times \mathbf{D}_k, f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{D}'$, gdzie $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_k, \mathbf{D}'$ przestrzenie

metryczne i niech $S = (S_1, \dots, S_k)$ będzie punktem skupienia zbioru \mathbf{Z} ($X_n = (X_{1n}, \dots, X_{kn}) \rightarrow S = (S_1, \dots, S_k)$ przy $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow X_{jn} \rightarrow S_j$ przy $n \rightarrow \infty$ dla $j = 1, \dots, k$).

Wtedy S' jest granicą f w punkcie S (ozn. $\lim_{X \rightarrow S} f(X) = S'$, $f(X) \rightarrow S'$) $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(X_n) = S'$ dla $X_n = (X_{1n}, \dots, X_{kn}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S = (S_1, \dots, S_k)$, tj. $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$.

Twierdzenie. Niech $\mathbf{Z} \subset \mathbf{D}$, $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{D}' = \mathbf{D}'_1 \times \dots \times \mathbf{D}'_m$, gdzie $\mathbf{D}, \mathbf{D}'_1, \dots, \mathbf{D}'_m$ przestrzenie metryczne, $f = (f_1, \dots, f_m)$ (tj. $f(X) = (f_1(X), \dots, f_m(X))$) dla każdego $X \in \mathbf{Z}$ i niech S punkt skupienia zbioru \mathbf{Z} ($S \in \mathbf{D}$). Wtedy $S' = (S'_1, \dots, S'_m) \in \mathbf{D}'$ jest granicą odwzorowania f w punkcie S (ozn. $\lim_{X \rightarrow S} f(X) = S'$, $f(X) \rightarrow S'$) $\Leftrightarrow \lim_{X \rightarrow S} f_j(X) = S'_j$ ($f_j(X) \rightarrow S'_j$) dla $j = 1, \dots, m$.

Uwaga. Zbieżność w produkcie kartezjańskim $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \times \dots \times \mathbf{D}_k$ przestrzeni metrycznych $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_k$, odpowiednio z metrykami d_1, \dots, d_k jest rozumiana jako zbieżność każdej składowej:

$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = (X_{1n}, \dots, X_{kn}) \rightarrow X = (X_1, \dots) \Leftrightarrow X_{Jn} \rightarrow X_J$ przy $n \rightarrow \infty$ dla każdego

$J = 0, \dots, K$ i jest ona równoważna zbieżności względem metryki d przestrzeni \mathbf{D} generowanej przez metryki d_1, \dots, d_k , np. przy X_K

$$d(X, Y) = \max_{J=1, \dots, K} d_J(X_J, Y_J) \quad \text{lub} \quad d(X, Y) = \sum_{J=1}^K d_J(X_J, Y_J)$$

($X = (X_j), Y = (Y_j)$) takiej, że $d(X_n, X) \rightarrow 0 \Leftrightarrow d_J(X_{nJ}, X_J) \rightarrow 0$ dla każdego $J = 0, 1, \dots, K$.

Uwaga. Niech $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}'$ przestrzenie metryczne, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2$, $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{D}'$; $(X_1, X_2) \rightarrow X'$. Oprócz granicy S' funkcji f w punkcie (S_1, S_2) zbioru \mathbf{Z} ($S' = \lim_{(X_1, X_2) \rightarrow (S_1, S_2)} f(X_1, X_2)$)

definiuje się jeszcze granice, zwane iterowanymi:

$$S'_{12} = \lim_{X_1 \rightarrow S_1} \lim_{X_2 \rightarrow S_2} f(X_1, X_2),$$

$$S'_{21} = \lim_{X_2 \rightarrow S_2} \lim_{X_1 \rightarrow S_1} f(X_1, X_2).$$

Przy tym, granica S' istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice S'_{12} i S'_{21} oraz $S'_{12} = S'_{21}$. Wtedy też $S' = S'_{12} = S'_{21}$.

Uwaga. W przypadku, gdy $\mathbf{Z} = \mathcal{Z} \subset \mathcal{R} = \mathbf{D}$ (f jest funkcją zmiennej rzeczywistej), wtedy można zdefiniować granice „w nieskończoność”: $S'_{\pm\infty} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ dla

dowolnego ciągu (x_n) takiego, że $x_n \rightarrow \pm\infty$ i $x_n \in \mathcal{Z}$ (\mathcal{Z} jest nieograniczony odpowiednio „z góry” lub „z dołu”). Można też zdefiniować granice „lewostronna” i „prawostronna” funkcji

zmiennej rzeczywistej, tj, $S'_\pm = \lim_{x \rightarrow s^\pm} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ dla dowolnego ciągu liczbowego (x_n) takiego, że $x_n \rightarrow s^\pm$ czyli $x_n \in \mathbb{Z}$, i odpowiednio $x_n < s$ (dla s^-), $x_n > s$ (dla s^+).

Uwaga. W przypadku, gdy $\mathbf{D}' = \mathcal{R}$ ($f = f$ – funkcja rzeczywista), granica funkcji może być równa $+\infty$ lub $-\infty$, jeśli $f(x_n) \rightarrow \pm\infty$ dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do punktu skupienia dziedziny \mathbf{Z} funkcji f . Jeśli $f, g : \mathbf{D} \supset \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{R}$ i $\lim_{X \rightarrow S} f(X) = a$, $\lim_{X \rightarrow S} g(X) = b$ (S – punkt

skupienia zbioru \mathbf{Z}), to

- $\lim_{X \rightarrow S} |f(X)| = |a|$
- $\lim_{X \rightarrow S} [f(X) \pm g(X)] = (a \pm b)$
- $\lim_{X \rightarrow S} [f(X)g(X)] = ab$
- $\lim_{X \rightarrow S} [f(X)/g(X)] = a/b$, jeśli $g(X) \neq 0$, $b \neq 0$.

Oprócz granicy ciągu elementów przestrzeni metrycznej, granicy funkcji w punkcie (funkcji na przestrzeni metrycznej o wartościach w przestrzeni metrycznej, mamy jeszcze pojęcie granicy ciągu funkcji o wartościach w przestrzeni metrycznej. Przy tym granica ta może być trojakiemu rodzaju.

Definicja. Niech (f_n) ciąg odwzorowań (funkcji) $f_n : \Omega \rightarrow \mathbf{D}$ ($n \in \mathcal{N}$), gdzie Ω dowolny zbiór, a \mathbf{D} przestrzeń metryczna (z metryką d). Niech $\Phi(\Omega, \mathbf{D})$ zbiór wszystkich odwzorowań $f : \Omega \rightarrow \mathbf{D}$.

1) Jeżeli w zbiorze (przestrzeni odwzorowań) $\Phi(\Omega, \mathbf{D})$ lub jego podzbiórze (podprzestrzeni) jest określona metryka ρ , to mówimy, że ciąg (f_n) jest zbieżny do funkcji f ($f : \Omega \rightarrow \mathbf{D}$) w metryce ρ , co zapisujemy, co zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{\rho}{=} f \text{ lub } f_n \xrightarrow[\rho]{n \rightarrow \infty} f,$$

gdym $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n, f) = 0$, czyli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N} \forall n > N \rho(f_n, f) < \varepsilon.$$

2) Ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji f ($f : \Omega \rightarrow \mathbf{D}$), co zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \equiv f \quad f_n \Rightarrow f,$$

gdym

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N} \forall n > N \forall X \in \Omega d(f_n(X), f(X)) < \varepsilon.$$

3) Ciąg (f_n) jest zbieżny (punktowo) do funkcji f ($f : \Omega \rightarrow \mathbf{D}$), co zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad (f_n \rightarrow f),$$

gdym

$$\forall X \in \Omega \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N} \forall n > N d(f_n(X), f(X)) < \varepsilon,$$

czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(X) = f(X)$ lub $f_n(X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(X) \quad \forall X \in \Omega$.

! Jeżeli $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$, to $f_n(X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(X) \quad \forall X \in \Omega$.

!! Niech $\mathcal{I}(\Omega, \mathbf{D})$ zbiór wszystkich odwzorowań $f: \Omega \rightarrow \mathbf{D}$ ograniczonych ($f(\Omega) < \infty$).

Wtedy $\rho(f, g) = \sup_{X \in \mathbf{D}} d(f(X), g(X))$ jest metryką w $\mathcal{I}(\Omega, \mathbf{D})$. Przy tym, jeśli $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} f$, to

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \quad (f_n, f \in \mathcal{I}(\Omega, \mathbf{D})).$$

Uwaga. Niech \vec{V} przestrzeń liniowa unormowana z normą $|\cdot|_{\vec{V}}$. Wtedy $\mathbf{D} = \vec{V}$ jest przestrzenią metryczną z metryką generowaną przez normę: $d(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{y} - \vec{x}|_{\vec{V}} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V}$. Zbieżność ciągu (\vec{x}_n) elementów przestrzeni \vec{V} ($n \in \mathcal{N}$) do granicy \vec{x} tej przestrzeni jest teraz rozumiana następująco (jako granica w normie):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{x} \quad (\vec{x}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \vec{x}) \Leftrightarrow |\vec{x}_n - \vec{x}|_{\vec{V}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

W konsekwencji, podobnie jak zbieżność w normie, rozumiana jest granica funkcji $\vec{f}: \mathbf{D} \supset \mathbf{Z} \rightarrow \vec{V}$ (\mathbf{D} – przestrzeń metryczna z metryką d , \vec{V} – przestrzeń unormowana z normą $|\cdot|$), w punkcie skupienia S zbioru \mathbf{Z} , tj. $\lim_{X \rightarrow S} \vec{f}(X) = \vec{s} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{f}(X_n) = \vec{s}$ (w normie $|\cdot|$) dla $X_n \rightarrow S$ (w metryce d) przy $X_n \neq S, X_n \in \mathbf{Z}$. W szczególności może być $\mathbf{D} = \vec{U}$ (przestrzeń unormowana), $\mathbf{Z} \subset \vec{U}$ oraz $d(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{y} - \vec{x}|_{\vec{U}}$ (norma w \vec{U}).

Również podobnie, jako zbieżność w normie, rozumiemy zbieżność ciągu funkcyjnego (\vec{f}_n) do funkcji \vec{f} w przestrzeni $F(\Omega; \vec{V})$ (Ω – dowolny zbiór, \vec{V} – przestrzeń unormowana z normą $|\cdot|$), która jest przestrzenią liniową:

1) zbieżność punktowa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{f}_n = \vec{f} \quad (\vec{f}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \vec{f}) \Leftrightarrow \forall X \in \Omega \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N} \quad \forall n > N \quad |\vec{f}_n(X) - \vec{f}(X)| < \varepsilon,$$

2) zbieżność jednostajna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{f}_n \equiv \vec{f} \quad (\vec{f}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \vec{f}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N} \quad \forall n > N \quad \forall X \in \Omega \quad |\vec{f}_n(X) - \vec{f}(X)| < \varepsilon,$$

3) zbieżność w normie

Jeżeli $G(\Omega; \vec{V})$ jest podprzestrzenią liniową (przestrzeni $F(\Omega; \vec{V})$) unormowaną (z normą $\|\cdot\|$), to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{f}_n \stackrel{\|\cdot\|}{=} \vec{f} \quad (\vec{f}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} \vec{f}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N} \quad \forall n > N \quad \|\vec{f}_n - \vec{f}\| < \varepsilon.$$

Przykład. Biorąc $\Omega = \mathcal{U}$ (podzbiór mierzalny w przestrzeni \mathcal{R}^k), $\vec{V} = \mathcal{R}$, a jako $G(\Omega; \vec{V})$

przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem $L^2(\mathcal{U}; \mathcal{R}) = \{f: \mathcal{R}^k \supset \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R};$

$\int_{\mathcal{U}} f^2(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k < \infty\}$ z normą $\|f\| = \{\int_{\mathcal{U}} f^2(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k\}^{1/2}$, mamy

zbieżność średniokwadratową:

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} f \Leftrightarrow \int_{\mathcal{U}} [f_n(x_1, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, x_k)]^2 dx_1 \dots dx_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Taka zbieżność ciągu (f_n) nie implikuje zbieżności punktowej dla wszystkich (x_1, \dots, x_k) ani tym bardziej zbieżności jednostajnej na zbiorze \mathcal{U} .

Przykład. Biorąc $\Omega = \vec{U}$ (podprzestrzeń liniowa przestrzeni unormowanej \vec{V} z normą $|\cdot|_{\vec{U}}$) oraz $G(\vec{U}, \vec{V}) = B(\vec{U}, \vec{V})$ (przestrzeń odwzorowań liniowych ograniczonych z normą $\|\vec{f}\| = \sup_{\|\vec{x}\| \leq 1} |\vec{f}(\vec{x})|_{\vec{U}}$), mamy zbieżność w normie, która implikuje zbieżność punktową ciągu funkcyjnego odwzorowań liniowych oraz zbieżność jednostajną takich odwzorowań na zbiorach ograniczonych.

Uwaga. W przestrzeniach liniowych mamy także pojęcie słabej zbieżności. Niech \vec{V} - przestrzeń liniowa, a $\vec{V}^* = L(\vec{V}, \mathcal{R})$ przestrzenią dualną do \vec{V} . Ciąg (\vec{x}_n) elementów przestrzeni \vec{V} ma słabą granicę (jest słabo zbieżny do) \vec{x} tej przestrzeni, tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{x} \text{ lub } \vec{x}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} \vec{x} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \vec{x}, \vec{x}_n \rangle^* = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle^* \quad \forall \vec{x} \in \vec{V}^*$$

W konsekwencji, dla ciągu funkcji (\vec{f}_n) z przestrzeni $(\Omega - \text{dowolny zbiór})$ możemy mówić o słabej zbieżności punktowej ciągu (\vec{f}_n) do funkcji $\vec{f} \in F(\Omega; \vec{V})$, tj.

$$\vec{f}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} \vec{f} \Leftrightarrow \forall X \in \Omega \quad \vec{f}_n(X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} \vec{f}(X)$$

lub o zbieżności dystrybucyjnej, tj.

$$\vec{f}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{**} \vec{f} \Leftrightarrow \forall f^* \in [F(\Omega; \vec{V})]^* \quad f^*(\vec{f}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f^*(\vec{f})$$

$[F(\Omega; \vec{V})]^*$ = przestrzeń dualna do $F(\Omega; \vec{V})$.

Natomiast granicę funkcji $\vec{f} \in F(\mathbf{Z}; \vec{V})$ w punkcie skupienia S zbioru $\mathbf{Z} \subset \mathbf{D}$ (\mathbf{D} - przestrzeń metryczna z metryką d) rozumiemy jako granicę:

$$\lim_{X \rightarrow S} \vec{f}(X) = \vec{s} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{f}(X_n) = \vec{s} \quad \forall (X_n) \subset \mathbf{Z}, X_n \rightarrow S \text{ i } X_n \neq S.$$

W przypadku, gdy $\vec{f} \in F(\vec{Z}; \vec{V})$ ($\vec{Z} \subset \vec{U}, \vec{U}$ - przestrzeń unormowana), można wyróżnić

a) słabo-silną granicę funkcji \vec{f} w punkcie skupienia \vec{x}_s zbioru \vec{Z}

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_s} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{s} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{x}_n) = \vec{s} \quad \forall (\vec{x}_n) \subset \vec{Z} \quad (\vec{x}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} \vec{x}_s, \vec{x}_n \neq \vec{x}_s),$$

b) słabo-słabą granicę funkcji \vec{f} w słabym punkcie skupienia \vec{x}_s zbioru \vec{Z}

$$\lim_{\vec{x} \xrightarrow{*} \vec{x}_s} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{s} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{x}_n) = \vec{s} \quad \forall (\vec{x}_n) \subset \vec{Z} \quad (\vec{x}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} \vec{x}_s, \vec{x}_n \neq \vec{x}_s).$$

! W przypadku, gdy \vec{V} przestrzeń unormowana, to w definicji słabej zbieżności przyjmuje się zbieżność produktu dualnego dla każdego $x \in V' = B(\vec{V}; \mathcal{R})$. Wtedy każda zbieżność w normie (silna zbieżność) implikuje słabą zbieżność. W odniesieniu do ciągu $(x_n) \subset V'$ silna zbieżność w normie w V' (dualnej do normy w \vec{V}) a słaba zbieżność, to

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \Leftrightarrow x_n(\vec{x}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \vec{V} \quad (\text{lub } x_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x(x) \quad \forall x \in V'').$$

Definicja. Niech \vec{V} przestrzeń unormowana, a (\vec{x}_n) elementów tej przestrzeni ($n \in \mathcal{N}$). Tworzymy ciąg (\vec{s}_n) sum częściowych z wyrazów ciągu (\vec{x}_n) :

$$\vec{s}_1 = \vec{x}_1, \quad \vec{s}_n = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n = \sum_{k=1}^n \vec{x}_k \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Przez szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \vec{x}_k$ rozumiemy granicę $\vec{s} = \lim \vec{s}_n$, jeśli istnieje. Mówimy też, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \vec{x}_k$ jest zbieżny, a \vec{s} jest sumą tego szeregu.

! Mówimy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \vec{x}_k$ jest słabo zbieżny, jeżeli $\vec{s} = \lim \vec{s}_n$

Definicja. Niech \vec{V} przestrzeń unormowana i niech (\vec{f}_n) ciąg funkcyjny elementów przestrzeni $F(\Omega; \vec{V})$ (Ω - dowolny zbiór). Tworzymy ciąg funkcyjny $(\vec{s}_n) \subset F(\Omega; \vec{V})$:

$$\vec{s}(X)_1 = \vec{f}_1(X), \quad \vec{s}_n(X) = \vec{f}_1(X) + \dots + \vec{f}_n(X) = \sum_{k=1}^n \vec{f}_k(X), \quad X \in \Omega \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Szereg funkcyjny $\sum_{k=1}^{\infty} \vec{f}_k$ jest zbieżny punktowo, jednostajnie, w normie $\| \cdot \|$ (w podprzestrzeni liniowej unormowanej $G(\Omega; \vec{V})$), jeżeli odpowiednio ciąg funkcyjny (\vec{s}_n) jest zbieżny punktowo, jednostajnie, w normie $\| \cdot \|$.

Szereg funkcyjny $\sum_{k=1}^{\infty} \vec{f}_k$ jest słabo zbieżny punktowo lub dystrybucyjnie, jeżeli odpowiednio ciąg funkcyjny (\vec{s}_n) jest słabo zbieżny punktowo lub dystrybucyjnie.

Twierdzenie (Weierstrassa). Jeżeli $(\vec{f}_n) \subset F(\Omega; \vec{V})$ (\vec{V} przestrzeń unormowana), $(\alpha_n) \subset \mathcal{R}$, $|\vec{f}_n(X)| \leq \alpha_n \quad \forall X \in \Omega \quad \forall n \in \mathcal{N}$ i $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ zbieżny, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \vec{f}_k$ jest zbieżny jednostajnie.

5.2. Ciągłość

Definicja. Niech $\{\mathbf{D}, d\}$ i $\{\mathbf{D}', d'\}$ – przestrzenie metryczne, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{D}$, S – punkt skupienia zbioru \mathbf{Z} , $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{D}'$ dowolne odwzorowanie.

- 1) Odwzorowanie f jest ciągłe (funkcja f jest ciągła) w punkcie $S \Leftrightarrow \lim_{X \rightarrow S} f(X) = f(S)$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall X \in \mathbf{D} (d(X, S) < \delta \Rightarrow d'(f(X), f(S)) < \varepsilon)$;
- 2) odwzorowanie f jest ciągłe na zbiorze $\mathbf{Z} \Leftrightarrow$ odwzorowanie f jest ciągłe w każdym punkcie $S \in \mathbf{Z}$, czyli
 $\Leftrightarrow \forall S \in \mathbf{Z} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall X \in \mathbf{Z} (d(X, S) < \delta \Rightarrow d'(f(X), f(S)) < \varepsilon)$;
- 3) odwzorowanie f jest jednostajnie ciągłe na zbiorze \mathbf{Z}
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall S \in \mathbf{Z} \forall X \in \mathbf{Z} \exists \delta > 0 (d(X, S) < \delta \Rightarrow d'(f(X), f(S)) < \varepsilon)$.

Twierdzenie. Niech \mathbf{D} i \mathbf{D}' przestrzenie metryczne, a $f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$. Następujące warunki są równoważne:

- a) f jest ciągłe na \mathbf{D} ,
- b) $\forall \mathbf{Z} \subset \mathbf{D} f(\text{clos } \mathbf{Z}) \subset \text{clos } f(\mathbf{Z})$,
- c) $\forall \mathbf{Z}' \subset \mathbf{D}' \text{ clos } f^{-1}(\mathbf{Z}') \subset f^{-1}(\text{clos } (\mathbf{Z}'))$,
- d) $\forall \mathbf{Z}' \subset \mathbf{D}' \text{ int } \mathbf{Z}' = \mathbf{Z}' \Rightarrow \text{int } f^{-1}(\mathbf{Z}') = f^{-1}(\mathbf{Z}')$,
- e) $\forall \mathbf{Z}' \subset \mathbf{D}' \text{ clos } f^{-1}(\mathbf{Z}') \subset f^{-1}(\text{clos } (\mathbf{Z}'))$,
- f) $\forall \mathbf{Z}' \subset \mathbf{D}' \text{ cos } \mathbf{Z}' = \mathbf{Z}' \Rightarrow \text{clos } f^{-1}(\mathbf{Z}') = f^{-1}(\mathbf{Z}')$.

Twierdzenie. Niech $\{\mathbf{D}_j, d_j\}$ ($j = 1, \dots, k$) i $\{\mathbf{D}', d'\}$ przestrzenie metryczne. Odwzorowanie $f: \mathbf{D}_1 \times \dots \times \mathbf{D}_k \rightarrow \mathbf{D}'$ jest ciągłe w punkcie (S_1, \dots, S_k) przestrzeni $\mathbf{D}_1 \times \dots \times \mathbf{D}_k$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (X_1, \dots, X_k) \in \mathbf{D}_1 \times \dots \times \mathbf{D}_k \forall j = 1, \dots, k (d_j(X_j, S_j) < \delta \Rightarrow d'(f(X_1, \dots, X_k), f(S_1, \dots, S_k)) < \varepsilon)$$

Twierdzenie. Niech $\{\mathbf{D}, d\}$ i $\{\mathbf{D}'_j, d'_j\}$ ($i = 1, \dots, m$) przestrzenie metryczne. Odwzorowanie $f = (f_1, \dots, f_m): \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'_1 \times \dots \times \mathbf{D}'_m$ jest ciągłe w punkcie S przestrzeni $\mathbf{D} \Leftrightarrow$ odwzorowanie $f_i: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'_i$ jest ciągłe w punkcie S przestrzeni $\mathbf{D} \forall i = 1, \dots, m$.

Twierdzenie. Niech \mathbf{D}, \mathbf{D}' i \mathbf{D}'' przestrzenie metryczne i niech będą dane odwzorowania: $f: \mathbf{D} \supset \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{D}'$, $g: \mathbf{D}' \supset \mathbf{Z}' \rightarrow \mathbf{D}''$ takie, że $f(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}'$, $f(S) = S'$, $S \in \mathbf{Z}$. Niech f ciągłe w punkcie S , a g ciągłe w punkcie S' . Wtedy złożenie $g \circ f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{D}''$; $(g \circ f)(X) = g(f(X))$ jest ciągłe w punkcie S .

Twierdzenie. Niech $f, f_1, f_2: \mathbf{D} \supset \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{R}$ ciągłe w punkcie S . Wtedy odwzorowania $|f|$, $f_1 \pm f_2$, $f_1 f_2$, f_1/f_2 ($f_2 \neq 0$) są ciągłe w punkcie S .

Twierdzenie. Niech $f: \mathbf{D} \supset \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{D}'$, przy czym \mathbf{D} i \mathbf{D}' przestrzenie metryczne, a \mathbf{Z} zbiór zwarty¹. Jeżeli odwzorowanie f jest ciągle na \mathbf{Z} , to jest na \mathbf{Z} również jednostajnie ciągle.

Twierdzenie. Niech $f_n, f: \mathbf{D} \supset \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{D}'$, przy czym \mathbf{D} i \mathbf{D}' przestrzenie metryczne, a $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$.

1) Jeżeli odwzorowanie f_n jest ciągle w punkcie $S \in \mathbf{Z}$ (ciągle na \mathbf{Z}) dla każdego $n \in \mathcal{N}$, to f jest również ciągle w p. S (na zbiorze \mathbf{Z});

2) Jeżeli odwzorowanie f_n jest ograniczone na \mathbf{Z} (tzn. ograniczony jest $f_n(\mathbf{Z})$) dla każdego $n \in \mathcal{N}$, to f również jest ograniczone na \mathbf{Z} ;

3) Jeżeli odwzorowanie f_n jest ciągle na \mathbf{Z} dla każdego $n \in \mathcal{N}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ ($X_n, X \in \mathbf{Z}$), to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(X_n) = f(X).$$

Twierdzenie. Niech \mathbf{D} i \mathbf{D}' przestrzenie metryczne, a $\mathbf{Z} \subset \mathbf{D}$. Niech $C(\mathbf{Z}; \mathbf{D}')$ przestrzeń odwzorowań ciągłych na zbiorze \mathbf{Z} o wartościach w przestrzeni \mathbf{D}' . Jeżeli zbiór \mathbf{Z} jest zwarty, to przestrzeń $C(\mathbf{Z}; \mathbf{D}')$ jest przestrzenią metryczną – z metryką Czebyszewa:

$$\rho_C(f_1, f_2) = \sup_{X \in \mathbf{Z}} d'(f_1(X), f_2(X))$$

(d' metryka w \mathbf{D}').

Definicja. Niech \mathbf{D} i \mathbf{D}' przestrzenie metryczne i niech $f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$ odwzorowanie bijektywne. Jeżeli f jest ciągle na \mathbf{D} i f^{-1} ciągle na \mathbf{D}' , to f nazywamy homeomorfizmem (mówimy, że \mathbf{D} i \mathbf{D}' są homeomorficzne).

Twierdzenie. Niech \mathbf{D} , \mathbf{D}' i \mathbf{D}'' przestrzenie metryczne i niech $f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$, $g: \mathbf{D}' \rightarrow \mathbf{D}''$ homeomorfizmy. Wtedy złożenie $g \circ f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}''$ jest również homeomorfizmem.

Twierdzenie. Niech \mathbf{D} i \mathbf{D}' przestrzenie metryczne, przy czym \mathbf{D}' zwarta. Niech $f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$ odwzorowanie bijektywne i ciągle. Wtedy f^{-1} jest również ciągle, a więc f jest homeomorfizmem.

Uwaga. Jeżeli w odwzorowaniu $f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$ przestrzeń \mathbf{D} lub \mathbf{D}' jest przestrzenią liniową unormowaną, a metryka jest generowana przez normę, tzn. $\mathbf{D} = \vec{V}$ lub $\mathbf{D}' = \vec{W}$, gdzie \vec{V} , \vec{W} przestrzenie unormowane z normami odpowiednio $|\cdot|_{\vec{V}}$, $|\cdot|_{\vec{W}}$, to w definicji ciągłości odwzorowania f należy przyjąć zbieżność w normie danej przestrzeni, czyli zamiast odległości pomiędzy punktami mamy normę różnicy punktów-wektorów.

¹ Zbiór jest zwarty, gdy z każdego ciągu ograniczonego można zestawić podciąg zbieżny (w metryce); podciąg (X_{n_k}) ciągu (X_n) , gdy (n_k) ciąg liczb naturalnych. W przestrzeni euklidesowej zbiór jest zwarty, jeśli jest domknięty i ograniczony

Uwaga. Jeżeli \mathbf{D} przestrzeń metryczna, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{D}$, a \vec{W} przestrzeń unormowana, to przestrzeń $C(\mathbf{Z}, \vec{W})$ odwzorowań ciągłych jest podprzestrzenią liniową przestrzeni wektorowej $F(\mathbf{Z}, \vec{W})$. Podprzestrzenią liniową przestrzeni $C(\mathbf{Z}, \vec{W})$ jest zaś zbiór wszystkich odwzorowań ciągłych na \mathbf{Z} i ograniczonych. Jest to przy tym przestrzeń unormowana, z normą zwaną jednostajną lub Czebyszewa: $\|\vec{f}\| = \sup_{X \in \mathbf{Z}} |\vec{f}(X)|$. Taką przestrzenią jest $C(\mathbf{Z}, \vec{W})$, gdy zbiór \mathbf{Z} jest zwarty.

Uwaga. Jeżeli $\vec{f} \in F(\mathbf{Z}; \vec{W})$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{D}$, \mathbf{D} - przestrzeń metryczna, \vec{W} - przestrzeń unormowana, to oprócz pojęcia ciągłości odwzorowania \vec{f} (w punkcie $S \in \mathbf{Z}$, na zbiorze \mathbf{Z}) można zdefiniować słabą ciągłość: $X \rightarrow S \Rightarrow \vec{f}(X) \xrightarrow{*} \vec{f}(S)$, a gdy ponadto $\mathbf{D} = \vec{V}$ - przestrzeń unormowana, wtedy definiuje się ciągłość słabo-silną: $\vec{x} \xrightarrow{|\cdot|} \vec{s} \Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) \xrightarrow{*} \vec{f}(\vec{s})$ oraz ciągłość słabo-słabą: $\vec{x} \xrightarrow{*} \vec{s} \Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) \xrightarrow{*} \vec{f}(\vec{s})$.

Przykład. W przestrzeni unormowanej \vec{V} działania algebraiczne i norma są odwzorowaniami ciągłymi.

Uwaga. W przestrzeniach odwzorowań liniowych i wieloliniowych ciągłość tych odwzorowań jest równoważna ich ograniczoności.

Niech $\vec{V}, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k, \vec{W}$ przestrzenie unormowane (odpowiednio z normami $|\cdot|_V, |\cdot|_1, \dots, |\cdot|_k, |\cdot|_W$).

Zatem

$$C(\vec{V}; \vec{W}) \cap L(\vec{V}; \vec{W}) = B(\vec{V}; \vec{W}),$$

$$C(\vec{V}_1 \times \dots \times \vec{V}_k; \vec{W}) \cap L(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k; \vec{W}) = B(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k; \vec{W}).$$

Ponadto przestrzenie $B(\vec{V}; \vec{W})$ i $B(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k; \vec{W})$ są unormowane – z normami tzw. dualnymi:

$$\|L\| = \sup_{|\vec{x}_V| \leq 1} |L\vec{x}|_W, \quad \|L\| = \sup_{|\vec{x}_1| \leq 1} \dots \sup_{|\vec{x}_k| \leq 1} |L(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)|_W.$$

Uwaga. Specyficzną "ciągłością" w przestrzeniach $B(\vec{V}; \vec{W})$ jest pełnociągłość, tzn.

- 1) każde odwzorowanie pełnociągłe jest ciągłe ($L: \vec{V} \rightarrow \vec{W}$ jest pełnociągłe, jeżeli dla każdego ciągu ograniczonego $(\vec{x}_n) \subset \vec{V}$ z ciągu $(L\vec{x}_n) \subset \vec{W}$ można utworzyć podciąg zbieżny);
- 2) zbiór $K(\vec{V}; \vec{W})$ odwzorowań pełnociągłych $L: \vec{V} \rightarrow \vec{W}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $B(\vec{V}; \vec{W})$.

! Twierdzenie i wnioski dotyczące ciągłości odwzorowań liniowych i wieloliniowych zamieszczono w rozdz. 3.

5.3. Pochodna i różniczkowalność

Rachunek różniczkowy jest kluczowym elementem analizy matematycznej, a pochodna i różniczkowalność są jego podstawowymi atrybutami. W tym opracowaniu nie chodzi o całościowy wykład rachunku różniczkowego, ale przedstawienie głównych jego elementów w odniesieniu do pochodnych i różniczkowania w miarę ogólnie rozumianych odwzorowań.

Definicja. Niech $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{U}$ (a – punkt skupienia), \vec{W} przestrzeń unormowana, $\vec{f}: \mathcal{U} \rightarrow \vec{W}$ dane odwzorowanie (dana funkcja). Pochodną „zwyčajną” funkcji \vec{f} w „punkcie” a nazywamy

$$\vec{f}'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\vec{f}(x) - \vec{f}(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(a+h) - \vec{f}(a)}{h} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \frac{d\vec{f}}{dx}(a),$$

jeśli granica ta istnieje. Mówimy wtedy, że funkcja \vec{f} jest różniczkowalna w punkcie a .

Jeżeli istnieje $\vec{f}'(a)$ dla każdego $a \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, to funkcja $\vec{f}': \mathcal{U}' \rightarrow \vec{W}; x \rightarrow \vec{f}'(x) = \frac{d\vec{f}}{dx}(x)$ nosi nazwę pochodnej funkcji \vec{f} na zbiorze \mathcal{U}' , zaś funkcja \vec{f} różniczkowalnej na \mathcal{U}' .

Uwaga. Powyższa definicja obejmuje w szczególności „zwykłe” pochodne funkcji rzeczywistych $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ (przy $\vec{W} = \mathbb{R}$).

Wprowadza się również pochodną lewo- i prawostronną $\vec{f}'(a^\pm) = \lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{\vec{f}(x) - \vec{f}(a)}{x - a}$ ($x \rightarrow a^\pm$

oznacza, że $x \rightarrow a$ i odpowiednio $x > a$ lub $x < a$). Przy tym, jeśli $\vec{f}'(a^\pm)$ istnieją i są sobie równe, to istnieje $\vec{f}'(a)$ i $\vec{f}'(a) = \vec{f}'(a^-) = \vec{f}'(a^+)$.

Przez różniczkę $d\vec{f}(a)$ (w punkcie a) nazywamy funkcję liniową: $x \rightarrow d\vec{f}(a)(x) = \vec{f}'(a)x \in \vec{W}$, $x \in \mathbb{R}$ z przestrzeni $L(\mathbb{R}; \vec{W})$.

Pochodna „zwyčajna” i różniczkę są „pierwowzorami” dwóch pochodnych odwzorowań, które dalej wprowadzimy.

Definicja. Niech \mathbf{A} przestrzeń afiniczna o przestrzeni stowarzyszonej unormowanej \vec{V} (z normą $\|\cdot\|_{\vec{V}}$) z metryką generowaną przez normę i niech \vec{W} przestrzeń unormowana (z normą $\|\cdot\|_{\vec{W}}$). Niech \mathbf{U} podzbiór otwarty przestrzeni \mathbf{A} . Mówimy, że odwzorowanie $\vec{f}: \mathbf{U} \rightarrow \vec{W}$ ma pochodną kierunkową w punkcie $P \in \mathbf{U}$ w kierunku wektora \vec{h} , jeżeli istnieje granica:

$$\partial_{\vec{h}} \vec{f}(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(P + t\vec{h}) - \vec{f}(P)}{t}$$

(dla $t \rightarrow 0$ i takich, że $P + t\vec{h} \in \mathbf{U}$). Odwzorowanie $X \rightarrow \partial_{\vec{h}} \vec{f}(X)$, $X \in \mathbf{U}_{\vec{h}}$, gdzie

$\mathbf{U}_{\vec{h}} = (\mathbf{U} \cap \bigcup_{X \in \mathbf{U}} \mathbf{U}_{\vec{h}}(X))$, $\mathbf{U}_{\vec{h}}(X) = \{Y \in \mathbf{U}; Y = X + t\vec{h}, t \in (-\varepsilon_X, +\varepsilon_X)\}$ nazywamy pochodną

kierunkową odwzorowania \vec{f} (w kierunku wektora \vec{h}).

! Niech $g_{\vec{h}}(t) = \vec{f}(P + t\vec{h})$ dla $t \in \mathcal{U}_{\vec{h}}(P)$ takich, że $P + t\vec{h} \in \mathbf{U}$. Wtedy $g'_{\vec{h}}(0) = \partial_{\vec{h}} \vec{f}(P)$.

Definicja. Niech \mathbf{A} przestrzeń afiniczna o przestrzeni stowarzyszonej unormowanej \vec{V} (z normą $|\cdot|_{\vec{V}}$) z metryką generowaną przez normę i niech \vec{W} przestrzeń unormowana (z normą $|\cdot|_{\vec{W}}$). Niech \mathbf{U} podzbiór otwarty przestrzeni \mathbf{A} i niech dane będzie odwzorowanie $\vec{f} : \mathbf{U} \rightarrow \vec{W}$. Jeżeli istnieje odwzorowanie liniowe ograniczone $d\vec{f}(P) \in B(\vec{V}; \vec{W})$ takie, że

$$d\vec{f}(P)(\vec{x}) \stackrel{\text{ozn.}}{=} d\vec{f}(P)\vec{x} \stackrel{\text{def.}}{=} \partial_{\vec{x}}\vec{f}(P) \quad \forall \vec{x} \in \vec{V},$$

to nazywamy je pochodną Gâteaux (G-pochodną) odwzorowania \vec{f} (w punkcie P). Niech $\tilde{\mathbf{U}}$ zbiór tych $X \in \mathbf{U}$, dla których istnieje G-pochodna odwzorowania \vec{f} (w punkcie X). Wtedy odwzorowanie: $\tilde{\mathbf{U}} \rightarrow B(\vec{V}; \vec{W}); X \rightarrow d\vec{f}(X)$ nosi nazwę pochodnej Gâteaux (G-pochodnej) odwzorowania \vec{f} na zbiorze $\tilde{\mathbf{U}}$. Mówimy, że \vec{f} jest różniczkowalne w sensie Gâteaux (G-różniczkowalne) odpowiednio w punkcie P lub na zbiorze $\tilde{\mathbf{U}}$.

! Jeżeli odwzorowanie \vec{f} jest G-różniczkowalne na zbiorze \mathbf{U} , to \vec{f} jest ciągłe na \mathbf{U} .

Definicja. Niech \mathbf{A} przestrzeń afiniczna o przestrzeni stowarzyszonej unormowanej \vec{V} (z normą $|\cdot|_{\vec{V}}$) z metryką generowaną przez normę i niech \vec{W} przestrzeń unormowana (z normą $|\cdot|_{\vec{W}}$). Niech \mathbf{U} podzbiór otwarty przestrzeni \mathbf{A} i niech dane będzie odwzorowanie $\vec{f} : \mathbf{U} \rightarrow \vec{W}$. Jeżeli istnieje odwzorowanie liniowe ograniczone $D\vec{f}(P) \in B(\vec{V}; \vec{W})$ takie, że

$$\vec{f}(P + \vec{h}) = \vec{f}(P) + D\vec{f}(P)\vec{h} + o(P, \vec{h}),$$

gdzie

$$|o(P)\vec{h}|_{\vec{W}} / |\vec{h}|_{\vec{V}} \rightarrow 0 \quad \text{przy} \quad |\vec{h}|_{\vec{V}} \rightarrow 0,$$

to nazywamy je pochodną Fréchet (F-pochodną) odwzorowania \vec{f} (w punkcie P). Niech $\tilde{\mathbf{U}}$ zbiór tych $X \in \mathbf{U}$, dla których istnieje F-pochodna odwzorowania \vec{f} (w punkcie X). Wtedy odwzorowanie: $\tilde{\mathbf{U}} \rightarrow B(\vec{V}; \vec{W}); X \rightarrow D\vec{f}(X)$ nosi nazwę pochodnej Fréchet (F-pochodnej) na zbiorze $\tilde{\mathbf{U}}$. Mówimy, że \vec{f} jest różniczkowalne w sensie Fréchet (F-różniczkowalne) odpowiednio w punkcie P lub na zbiorze $\tilde{\mathbf{U}}$.

Uwaga. W powyższych definicjach pochodnej (kierunkowej, Fréchet, Gâteaux) można w szczególności jako \mathbf{A} przyjąć przestrzeń unormowaną \vec{V} (zgodnie z tym, że przestrzeń liniową można traktować jako afiniczną, przyjmując $\vec{xy} = \vec{y} - \vec{x}$).

Sformułujemy teraz twierdzenia określające relacje pomiędzy zdefiniowanymi trzema pochodnymi odwzorowania typu \vec{f} .

Twierdzenie. Niech $\vec{f} : \mathbf{U} \rightarrow \vec{W}$, gdzie \mathbf{U} podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej \mathbf{A} o przestrzeni stowarzyszonej \vec{V} , a \vec{V} i \vec{W} przestrzenie unormowane. Jeżeli \vec{f} jest

F-różniczkowalne w punkcie $P \in U$, to dla każdego $\vec{h} \in \vec{V}$ istnieje pochodna kierunkowa $\partial_{\vec{h}} \vec{f}(P)$ oraz $\partial_{\vec{h}} \vec{f}(P) = D \vec{f}(P) \vec{h}$. W konsekwencji istnieje G-pochodna oraz $d \vec{f}(P) = D \vec{f}(P)$.

Twierdzenie. Niech \vec{V} i \vec{W} przestrzenie unormowane zupełne (przestrzenie Banacha), a $\vec{f} : U \rightarrow \vec{W}$, gdzie U podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej A o przestrzeni stowarzyszonej \vec{V} . Jeżeli \vec{f} jest G-różniczkowalne na zbiorze U oraz pochodna $d \vec{f} : U \rightarrow B(\vec{V}, \vec{W})$ jest ciągła na U , to odwzorowanie \vec{f} jest F-różniczkowalne na U i $D \vec{f}(X) = d \vec{f}(X)$, $X \in U$.

Twierdzenie. Niech \vec{V} przestrzeń unormowana skończenie wymiarowa (np. euklidesowa), \vec{W} przestrzeń unormowana zupełna (przestrzeń Banacha), a U podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej A (metrycznej skończenie wymiarowej) o przestrzeni stowarzyszonej \vec{V} . Jeżeli $\vec{f} : U \rightarrow \vec{W}$ ma pochodną kierunkową $\partial_{\vec{h}} \vec{f}(X) \forall X \in U \forall \vec{h} \in \vec{V}$, to \vec{f} jest G-różniczkowalne na U i G-pochodna jest ciągła na U (w konsekwencji, na mocy tw. powyżej, \vec{f} jest też F-różniczkowalne i $D \vec{f} = d \vec{f}$ na zbiorze U).

Czas teraz wprowadzić pochodne kierunkowe rzędu drugiego i wyższych rzędów.

Definicja. Niech \vec{V} i \vec{W} przestrzenie unormowane, a $\vec{f} : U \rightarrow \vec{W}$, gdzie U podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej A o przestrzeni stowarzyszonej \vec{V} . Odwzorowanie \vec{f} ma pochodną kierunkową $\partial_{\vec{k}\vec{l}}^2 \vec{f}(\vec{P})$ rzędu drugiego w punkcie $P \in U$ w kierunku pary wektorów (\vec{k}, \vec{l}) , jeżeli:

1) istnieje pochodna kierunkowa $\partial_{\vec{k}} \vec{f}(X)$ w pewnym otoczeniu \tilde{U} punktu P ,

2) istnieje granica $\partial_{\vec{l}} \left(\partial_{\vec{k}} \vec{f}(P) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_{\vec{k}} \vec{f}(P + t\vec{l}) - \partial_{\vec{k}} \vec{f}(P)}{t} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \partial_{\vec{k}\vec{l}}^2 \vec{f}(\vec{P})$.

Rekurencyjnie definiujemy pochodne kierunkowe rzędu n dla układu wektorów $(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n-1}, \vec{l}_n)$:

$$\partial_{\vec{l}_n \vec{l}_{n-1} \dots \vec{l}_1}^n \vec{f}(\vec{P}) = \partial_{\vec{l}_n} \left(\partial_{\vec{l}_{n-1} \dots \vec{l}_1}^{n-1} \vec{f}(\vec{P}) \right),$$

jeśli istnieją pochodne kierunkowe rzędu $n-1$ $\partial_{\vec{l}_{n-1} \dots \vec{l}_1}^{n-1} \vec{f}(X)$ w pewnym otoczeniu \tilde{U} punktu $P \in U$.

Twierdzenie. Niech \vec{V} i \vec{W} przestrzenie unormowane, a $\vec{f} : U \rightarrow \vec{W}$, gdzie U podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej A o przestrzeni stowarzyszonej \vec{V} . Zakładamy, że istnieją pochodne $\partial_{\vec{k}\vec{l}} \vec{f}(X)$ i $\partial_{\vec{l}\vec{k}}^2 \vec{f}(X)$ dla X z pewnego otoczenia \tilde{U} punktu $P \in U$ i pochodne te są ciągłe dla $X \rightarrow P$. Wtedy $\partial_{\vec{k}\vec{l}}^2 \vec{f}(X) = \partial_{\vec{l}\vec{k}}^2 \vec{f}(X)$.

! Analogiczne właściwości przemienności zachodzą dla pochodnych kierunkowych wyższych rzędów niż drugi: przy dowolnej zmianie kolejności w ciągu wektorów

kierunkowych $(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n-1}, \vec{l}_n)$ (z możliwymi powtórzeniami) pochodna $\partial_{\vec{l}_n \vec{l}_{n-1} \dots \vec{l}_1}^n \vec{f}(\mathbf{P})$ nie ulega zmianie, jeśli tylko obie pochodne istnieją w pewnym otoczeniu punktu P i są w tym punkcie ciągłe.

Definicja. Niech \vec{V} i \vec{W} przestrzenie unormowane, a \mathbf{U} podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej \mathbf{A} o przestrzeni stowarzyszonej \vec{V} . Niech $\vec{f} : \mathbf{U} \rightarrow \vec{W}$ odwzorowanie G-różniczkowalne/F-różniczkowalne w otoczeniu $\tilde{\mathbf{U}}$ punktu $\mathbf{P} \in \mathbf{U}$. Przez pochodną drugiego rzędu w sensie Gâteaux/ Fréchet odwzorowania \vec{f} w punkcie $\mathbf{P} \in \mathbf{U}$ rozumiemy odpowiednio G-pochodną/F-pochodną w punkcie P odwzorowania $d\vec{f} : \tilde{\mathbf{U}} \rightarrow \mathbf{B}(\vec{V}; \vec{W}) / D\vec{f} : \tilde{\mathbf{U}} \rightarrow \mathbf{B}(\vec{V}; \vec{W})$ – po przyjęciu, na mocy izometrii przestrzeni $\mathbf{B}(\vec{V}; \mathbf{B}(\vec{V}; \vec{W})) \equiv \mathbf{B}^2(\vec{V}; \vec{W})$, jest

$$d^2 \vec{f}(\mathbf{P}) \in \mathbf{B}^2(\vec{V}; \vec{W}) / D^2 \vec{f}(\mathbf{P}) \in \mathbf{B}^2(\vec{V}; \vec{W}), \text{ czyli } d^2 \vec{f}(\mathbf{P}) = d(d\vec{f}(\mathbf{P})) / D^2 \vec{f}(\mathbf{P}) = D(D\vec{f}(\mathbf{P})) -$$

po przyjęciu, że na mocy izometrii przestrzeni $\mathbf{B}(\vec{V}; \mathbf{B}(\vec{V}; \vec{W})) \equiv \mathbf{B}^2(\vec{V}; \vec{W})$ jest

$$d^2 \vec{f}(\mathbf{P}) \in \mathbf{B}^2(\vec{V}; \vec{W}) / D^2 \vec{f}(\mathbf{P}) \in \mathbf{B}^2(\vec{V}; \vec{W}), \text{ tzn.}$$

$$d^2 \vec{f}(\mathbf{P})(\vec{k}, \vec{l}) = d(d\vec{f}(\mathbf{P})\vec{k})\vec{l} / D^2 \vec{f}(\mathbf{P})(\vec{k}, \vec{l}) = D(D\vec{f}(\mathbf{P})\vec{k})\vec{l} \text{ dla dowolnych } \vec{k}, \vec{l} \in \vec{V}.$$

!! Przez rekurencję, analogicznie do powyższej definicji, wprowadza się pochodne rzędu n :
- G-pochodną rzędu n w punkcie P

$$d^n \vec{f}(\mathbf{P}) \stackrel{\text{def}}{=} d(d^{n-1} \vec{f}(\mathbf{P})) /$$

F-pochodną rzędu n w punkcie P

$$D^n \vec{f}(\mathbf{P}) \stackrel{\text{def}}{=} D(D^{n-1} \vec{f}(\mathbf{P})).$$

Twierdzenie. Niech \vec{V} i \vec{W} przestrzenie unormowane, a \mathbf{U} podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej \mathbf{A} o przestrzeni stowarzyszonej \vec{V} . Jeżeli odwzorowanie $\vec{f} : \mathbf{U} \rightarrow \vec{W}$ jest:

a) n -krotnie G-różniczkowalne w p. P (tzn. istnieje $d^n \vec{f}(\mathbf{P})$), to dla dowolnego układu wektorów $(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n-1}, \vec{l}_n)$ mamy $d^n \vec{f}(\mathbf{P})(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n-1}, \vec{l}_n) = \partial_{\vec{l}_n \vec{l}_{n-1} \dots \vec{l}_1}^n \vec{f}(\mathbf{P})$;

b) n -krotnie F-różniczkowalne w p. P (tzn. istnieje $D^n \vec{f}(\mathbf{P})$), to dla dowolnego układu wektorów $(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n-1}, \vec{l}_n)$ i dowolnej jego permutacji $(\vec{l}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{l}_{\sigma(n-1)}, \vec{l}_{\sigma(n)})$ mamy

$$D^n \vec{f}(\mathbf{P})(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n-1}, \vec{l}_n) = D^n \vec{f}(\mathbf{P})(\vec{l}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{l}_{\sigma(n-1)}, \vec{l}_{\sigma(n)}).$$

Uwaga. Niech \vec{V} i \vec{W} przestrzenie unormowane, a \mathbf{U} podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej \mathbf{A} o przestrzeni stowarzyszonej \vec{V} . Przez $C_G^n(\mathbf{U}; \vec{W}) / C_F^n(\mathbf{U}; \vec{W})$ rozumiemy zbiór wszystkich odwzorowań $\vec{f} : \mathbf{U} \rightarrow \vec{W}$, które są G- różniczkowalne / F- różniczkowalne na \mathbf{U} do rzędu n , a G-pochodne / F-pochodne są ciągłe na \mathbf{U} . Zbiór ten jest przestrzenią liniową (podprzestrzenią liniową przestrzeni funkcyjnej $F(\mathbf{U}; \vec{W})$). Jeżeli \vec{V} i \vec{W} (jako przestrzenie metryczne) są zupełne, to $C_G^n(\mathbf{U}; \vec{W}) = C_F^n(\mathbf{U}; \vec{W}) \stackrel{\text{ozn.}}{=} C^n(\mathbf{U}; \vec{W})$ - przestrzeń odwzorowań różniczkowalnych o pochodnych ciągłych do rzędu n na zbiorze \mathbf{U} .

Uwaga. Różniczkowalność odwzorowań (pól) na rozmaitościach wymaga pewnych modyfikacji podanych definicji, gdyż na ogół rozmaitość nie jest zbiorem otwartym.

Niech \mathbf{Z} rozmaitość k -wymiarowa w m -wymiarowej przestrzeni afinicznej \mathbf{A} o przestrzeni stowarzyszonej (m -wymiarowej) unormowanej \vec{V} i niech \vec{W} - dowolna przestrzeń unormowana. Rozważamy odwzorowanie (pole) $\vec{f} : \mathbf{Z} \rightarrow \vec{W}$.

Niech P dowolny punkt zbioru \mathbf{Z} taki, że P należy do obrazu $\text{Im } \vec{x}$ parametryzacji (mapy) $\vec{x} = \vec{x}(u), u \in \mathcal{U}$, gdzie \mathcal{U} obszar (otwarty) w \mathcal{R}^k współrzędnych parametrycznych $u = (u^k)$, a $p = (p^k)$ współrzędne punktu P należące do \mathcal{U} . Różniczkowanie odwzorowania $\vec{f} : \mathbf{Z} \rightarrow \vec{W}$ (w punkcie P) oznacza wyznaczanie pochodnych odwzorowania $\vec{F} : \mathcal{U} \rightarrow \vec{W}; \vec{F}(u) = \vec{f}(\text{O} + \vec{x}(u))$ (w punkcie $p = (p^k)$).

Twierdzenie. Niech $\vec{\lambda} : \vec{V} \rightarrow \vec{W}$ odwzorowanie liniowe ograniczone (czyli $\vec{\lambda} \in \mathbf{B}(\vec{V}; \vec{W})$), gdzie \vec{V}, \vec{W} przestrzenie unormowane. Odwzorowanie $\vec{\lambda}$ jest G -różniczkowalne i F -różniczkowalne dla każdego $\vec{x} \in \vec{V}$ (\vec{V} traktujemy również jako przestrzeń afiniczną) i $d\vec{\lambda}(\vec{x}) = D\vec{\lambda}(\vec{x}) = \vec{\lambda} \quad \forall \vec{x} \in \vec{V}$.

Twierdzenie. Niech $\vec{V}, \vec{W}_1, \vec{W}_2, \vec{W}$ przestrzenie unormowane, a \mathbf{U} podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej \mathbf{A} o przestrzeni stowarzyszonej \vec{V} i niech $\vec{\beta}(\cdot, \cdot) \in \mathbf{B}(\vec{W}_1, \vec{W}_2; \vec{W})$ odwzorowanie dwuliniowe ograniczone (ciągłe). Jeżeli odwzorowania $\vec{f} : \mathbf{U} \rightarrow \vec{W}_1$ i $\vec{g} : \mathbf{U} \rightarrow \vec{W}_2$ są

F -różniczkowalne / G -różniczkowalne w punkcie $P \in \mathbf{U}$, to odwzorowanie $\vec{h} : \mathbf{U} \rightarrow \vec{W}; \vec{h}(X) = \vec{\beta}(\vec{f}(X), \vec{g}(X))$ ma w punkcie P następującą F -pochodną / G -pochodną:

$$D\vec{h}(P)\vec{l} = \vec{\beta}(D\vec{f}(P)\vec{l}, \vec{g}(P)) + \vec{\beta}(\vec{f}(P), D\vec{g}(P)\vec{l}) /$$

$$d\vec{h}(P)\vec{l} = \vec{\beta}(d\vec{f}(P)\vec{l}, \vec{g}(P)) + \vec{\beta}(\vec{f}(P), d\vec{g}(P)\vec{l}).$$

Twierdzenie. Niech $\vec{f} : \vec{U} \rightarrow \vec{W}$ odwzorowanie F -różniczkowalne na zbiorze otwartym \vec{U} przestrzeni \vec{V} , gdzie \vec{V}, \vec{W} przestrzenie unormowane. Niech \vec{f} będzie bijektywne. Jeśli istnieje $D\vec{f}^{-1}(\vec{y})$, to

$$D\vec{f}^{-1}(\vec{y})|_{\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})} \circ D\vec{f}(\vec{x}) = \text{Id}, \quad \vec{x} \in \vec{U}.$$

Analogicznie rzecz się ma w przypadku G -pochodnej odwzorowania \vec{f} .

Definicja. Jeżeli $\vec{f} \in C^1(\vec{U}; \vec{W})$ i \vec{f} jest injektywne a ponadto $\vec{f}^{-1} \in C^1(\vec{S}; \vec{V})$ przy $\vec{S} = \vec{f}(\vec{U})$, to \vec{f} nazywa się dyffeomorfizmem zbiorów \vec{U} i \vec{S} ; mówimy wtedy, że zbiory \vec{U} i \vec{S} są dyffeomorficzne (\vec{V}, \vec{W} przestrzenie unormowane, $\vec{U} \subset \vec{V}$, $\vec{S} \subset \vec{W}$, \vec{U} i \vec{S} są otwarte).

Wprowadzimy teraz pojęcie i G-pochodnej cząstkowej i F-pochodnej cząstkowej odwzorowania o wielu zmiennych.

Definicja. Niech będą dane przestrzenie afiniczne $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ (o przestrzeniach stowarzyszonych unormowanych $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m$), \mathbf{U} niech będzie zbiorem otwartym w przestrzeni $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m$, \vec{W} przestrzenią unormowaną, zaś $\vec{f} : \mathbf{U} \rightarrow \vec{W}$ odwzorowaniem zmiennych $X_1 \in \mathbf{A}_1, \dots, X_m \in \mathbf{A}_m$. Przez pochodną cząstkową (w sensie Gâteaux / Fréchet) odwzorowania \vec{f} względem zmiennej X_j w punkcie $P = (P_1, \dots, P_m) \in \mathbf{U}$ rozumiemy pochodną (w sensie Gâteaux / Fréchet) w punkcie P_j odwzorowania cząstkowego zmiennej X_j :

$$\vec{\varphi}_j : \mathbf{U}_j \rightarrow \vec{W}; \vec{\varphi}_j(X_j) = \vec{f}(P_1, \dots, P_{j-1}, X_j, P_{j+1}, \dots, P_m), \quad 1 \leq j \leq m,$$

gdzie $\mathbf{U}_j = \{X_j \in \mathbf{A}_j : (P_1, \dots, P_{j-1}, X_j, P_{j+1}, \dots, P_m) \in \mathbf{U}\}$.

! Pochodną cząstkową w sensie Gâteaux / Fréchet odwzorowania \vec{f} względem zmiennej X_j w punkcie P oznaczamy przez $d\vec{f}_{X_j}(P) / D\vec{f}_{X_j}(P)$. Jeśli jednak G-pochodna jest zarazem F-pochodną, to stosujemy po prostu oznaczenie: $\vec{f}'_{X_j}(P)$ lub $\vec{f}_{,X_j}(P)$ lub $\partial\vec{f}_{X_j}(P)$ a także tradycyjne $\frac{\partial\vec{f}}{\partial X_j}(P)$.

!! Pochodna cząstkowa odwzorowania \vec{f} względem zmiennej X_j jest elementem przestrzeni $B(\vec{V}_j; \vec{W})$.

Twierdzenie. Niech \mathbf{U} podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m$ będący otoczeniem punktu $P = (P_1, \dots, P_m)$, gdzie $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ przestrzenie afiniczne o przestrzeniach stowarzyszonych unormowanych $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m$. Niech

$$\Pi_j : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}_j; \Pi_j(X_1, \dots, X_m) = X_j \quad (j = 1, \dots, m)$$

operacja rzutowania \mathbf{U} na $\mathbf{U}_j = \{X_j \in \mathbf{A}_j : (P_1, \dots, P_{j-1}, X_j, P_{j+1}, \dots, P_m) \in \mathbf{U}\}$, natomiast

$$\Lambda_j : \mathbf{U}_j \rightarrow \mathbf{U}; \Lambda_j(X_j) = (P_1, \dots, P_{j-1}, X_j, P_{j+1}, \dots, P_m) \quad (j = 1, \dots, m)$$

operacja zanurzenia \mathbf{U}_j w \mathbf{U} (w otoczeniu punktu P), zaś

$$\vec{\pi}_j : \vec{V} = \vec{V}_1 \times \dots \times \vec{V}_m \rightarrow \vec{V}_j; \vec{\pi}_j(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m) = \vec{l}_j \quad (j = 1, \dots, m)$$

operacja rzutowania \vec{V} na \vec{V}_j , a

$$\vec{\lambda}_j : \vec{V}_j \rightarrow \vec{V} = \vec{V}_1 \times \dots \times \vec{V}_m; \vec{\lambda}_j(\vec{l}_j) = (\vec{0}, \dots, \vec{l}_j, \dots, \vec{0}) \quad (j = 1, \dots, m)$$

operacja zanurzenia \vec{V}_j w \vec{V} . Jeżeli odwzorowanie $\vec{f} : \mathbf{U} \rightarrow \vec{W}$ (\vec{W} - przestrzeń

unormowana) jest różniczkowalne (w sensie Gâteaux / Fréchet) w punkcie $P = (P_1, \dots, P_m)$, to istnieją pochodne cząstkowe odwzorowania \vec{f} względem wszystkich zmiennych X_j ($j = 1, \dots, m$), a ponadto:

$$D\vec{f}_{X_j}(P) = D\vec{\varphi}_j(P_j), \quad \vec{\varphi}_j(X_j) = (\vec{f} \circ \Lambda)(X_j),$$

$$D\vec{f}_{,X_j}(\mathbf{P}) = [D\vec{f}(\mathbf{P})] \circ \vec{\lambda}_j, \quad D\vec{f}_{,X_j}(\mathbf{P})(\vec{l}_j) = \partial_{\vec{l}_j} \vec{f}(\mathbf{P}),$$

$$D\vec{f}(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^m [D\vec{f}_{,X_j}(\mathbf{P})] \circ \vec{\pi}_j$$

(i odpowiednio w przypadku symbolu „d” G-pochodnej).

Kolejne twierdzenia ustalają pewne relacje pomiędzy G- i F-pochodnymi i pochodnymi kierunkowymi a pochodnymi cząstkowymi.

Twierdzenie. Niech w twierdzeniu poprzednim $\mathbf{A}_1 = \dots = \mathbf{A}_m = \mathcal{R}$ oraz $\vec{\mathbf{W}} = \mathcal{R}$ (czyli $\vec{\mathbf{V}}_1 = \dots = \vec{\mathbf{V}}_m = \mathcal{R}$), a więc $\mathbf{U} = \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^m$. Jeżeli funkcja $y = f(x_1, \dots, x_m)$ jest różniczkowalna w punkcie $(p_1, \dots, p_m) \in \mathcal{U}$, to ma wszystkie pochodne cząstkowe (w zwykłym sensie), przy czym

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_1, \dots, p_m) = d f(p_1, \dots, p_m) \vec{e}_j = D f(p_1, \dots, p_m) \vec{e}_j = \partial_{\vec{e}_j} f(p_1, \dots, p_m),$$

$$d f(p_1, \dots, p_m) \vec{l} = D f(p_1, \dots, p_m) \vec{l} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(p_1, \dots, p_m) l_j,$$

gdzie $(\vec{e}_j) = (\delta_{j1}, \dots, \delta_{jm})$ jest bazą standardową w przestrzeni arytmetycznej \mathcal{R}^m ,

a $\vec{l} = (l_1, \dots, l_m)$.

Twierdzenie. Przy założeniach definicji pochodnej cząstkowej odwzorowania $\vec{f} : \mathbf{U} \rightarrow \vec{\mathbf{W}}$, jeżeli istnieją w pewnym otoczeniu punktu $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_m) \in \mathbf{U}$ wszystkie pochodne cząstkowe (w sensie Gâteaux / Fréchet) i są ciągłe w punkcie \mathbf{P} , to \vec{f} jest różniczkowalne w punkcie \mathbf{P} (w sensie Gâteaux / Fréchet). W konsekwencji \vec{f} jest klasy C^1 ($\vec{f} \in C_G^1(\mathbf{U}; \vec{\mathbf{W}}) / C_F^1(\mathbf{U}; \vec{\mathbf{W}})$) w zbiorze $\mathbf{U} \Leftrightarrow$ istnieją w \mathbf{U} wszystkie pochodne cząstkowe odwzorowania \vec{f} (w sensie Gâteaux / Fréchet) i są ciągłe na \mathbf{U} .

Twierdzenie. Niech \mathbf{U} podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej \mathbf{A} o przestrzeni stowarzyszonej unormowanej $\vec{\mathbf{V}}$ i niech $\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{W}}_1 \times \dots \times \vec{\mathbf{W}}_k$ przestrzeń unormowana (z normą generowaną przez normy przestrzeni $\vec{\mathbf{W}}_1, \dots, \vec{\mathbf{W}}_k$). Odwzorowanie $\vec{f} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k) : \mathbf{U} \rightarrow \vec{\mathbf{W}}$ jest różniczkowalne w punkcie \mathbf{P} / na zbiorze \mathbf{U} / jest klasy C^1 na zbiorze \mathbf{U} (w sensie Gâteaux / Fréchet) \Leftrightarrow wszystkie odwzorowania składowe $\vec{f}_i : \mathbf{U} \rightarrow \vec{\mathbf{W}}_i$ ($i = 1, \dots, k$) są różniczkowalne w punkcie \mathbf{P} / na zbiorze \mathbf{U} / są klasy C^1 na zbiorze \mathbf{U} (w sensie Gâteaux / Fréchet). Ponadto $d\vec{f} = (d\vec{f}_1, \dots, d\vec{f}_k)$ oraz $D\vec{f} = (D\vec{f}_1, \dots, D\vec{f}_k)$.

Uwaga. Wnioskiem z poprzednich twierdzeń w przypadku, gdy

$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_k) : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R}^k \quad (\mathcal{V} \in \mathcal{R}^m),$$

jest następująca reprezentacja G-pochodnej i F-pochodnej odwzorowania \vec{f} w punkcie $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathcal{U}$:

$$d\vec{f}(p) \vec{l} = D\vec{f}(p) \vec{l} = \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p_1, \dots, p_m) l_j \right),$$

czyli reprezentacją pochodnej $d\vec{f}(p) = D\vec{f}(p)$ jest tzw. macierz Jacobi'ego

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p_1, \dots, p_m) \right]_{k \times m}.$$

Definicja. Niech \mathbf{U} podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m$, gdzie $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ przestrzenie afiniczne o przestrzeniach stowarzyszonych unormowanych $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m$ i niech $\vec{f} : \mathbf{U} \rightarrow \vec{W}$ (\vec{W} - przestrzeń unormowana). Pochodną cząstkową (w sensie Gâteaux / Fréchet) rzędu n odwzorowania \vec{f} w punkcie $P \in \mathbf{U}$ definiujemy rekurencyjnie (indukcyjnie) jako pochodną cząstkową (w sensie Gâteaux / Fréchet) odwzorowania \vec{g} w punkcie P , gdzie $\vec{g}(\mathbf{X}) = D^{n-1} \vec{f},_{X_{j_{n-1}} \dots X_{j_1}}(\mathbf{X})$ dla \mathbf{X} z pewnego otoczenia \mathbf{U}_{n-1} punktu P , zawartego w \mathbf{U}

($\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}$), czyli

$$D\vec{g},_{X_{j_n}}(\mathbf{X}) = D_{X_{j_n}} \left(D^{n-1} \vec{f},_{X_{j_{n-1}} \dots X_{j_1}}(\mathbf{X}) \right) \stackrel{\text{ozn}}{=} D^n \vec{f},_{X_{j_n} X_{j_{n-1}} \dots X_{j_1}}(\mathbf{X}) \quad (n > 1),$$

a ciąg numerów (j_1, \dots, j_n) jest utworzony z liczb $(1, 2, \dots, m)$; analogiczna definicja dotyczy symbolu G-pochodnej „d” (zamiast „D”).

Twierdzenie. Jeżeli, przy założeniach ostatniej definicji, odwzorowanie \vec{f} jest n -krotnie różniczkowalne (w sensie Fréchet) w punkcie P , to istnieją wszystkie pochodne cząstkowe do rzędu n w punkcie P , a przy tym

$$D^n \vec{f},_{X_{j_n} \dots X_{j_1}}(P)(\vec{l}_{j_1}, \dots, \vec{l}_{j_n}) = \partial_{\vec{l}_{j_n}, \dots, \vec{l}_{j_1}} \vec{f}(P)$$

dla dowolnego ciągu wektorów $(\vec{l}_{j_1}, \dots, \vec{l}_{j_n}) \in \vec{V}_{j_1} \times \dots \times \vec{V}_{j_n}$ oraz ciągu wskaźników (j_1, \dots, j_n) o wartościach ze zbioru $(1, 2, \dots, m)$, a także

$$D^n \vec{f},_{X_{j_n} \dots X_{j_1}}(P) = [D^n \vec{f}(P)] \circ \vec{\lambda}_{j_n} \circ \dots \circ \vec{\lambda}_{j_1}.$$

Analogicznie dla pochodnej w sensie Gâteaux (o symbolu „d”). Ponadto, jeśli istnieją wszystkie G-pochodne cząstkowe w otoczeniu punktu P do rzędu n i są ciągłe w $p \in P$, to odwzorowanie \vec{f} jest F- różniczkowalne do rzędu n .

W konsekwencji, odwzorowanie \vec{f} jest klasy C^n na zbiorze \mathbf{U} ($\vec{f} \in C_G^n(\mathbf{U}; \vec{W})$ /

$C^n_{\mathbb{F}}(\mathbf{U}; \overline{\mathbf{W}}) \Leftrightarrow$ istnieją i są ciągłe na \mathbf{U} wszystkie pochodne cząstkowe do rzędu n (w sensie Gâteaux / Fréchet).

! Jeżeli odwzorowanie \vec{f} jest n -krotnie różniczkowalne w sensie Gâteaux / Fréchet, to $\vec{f}_{,x_{j_n} \dots x_{j_1}} = \vec{f}_{,x_{i_n} \dots x_{i_1}}$, gdy ciągi (i, \dots, i_n) oraz (j, \dots, j_n) różnią się jedynie porządkiem wyrazów.

!! Jeżeli funkcja $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}$ ($\mathcal{U} \subset \mathcal{R}^m$) jest n -krotnie różniczkowalna w punkcie $(p_1, \dots, p_m) \in \mathcal{U}$, to

$$D^n f(p_1, \dots, p_m)(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n f_{,x_{i_n} \dots x_{i_1}}(p_1, \dots, p_m) l_{i_1} \cdot \dots \cdot l_{i_n}$$

dla dowolnych $\vec{l}_j = (l_{1_j}, \dots, l_{m_j}) \in \mathcal{R}^m$ ($j = 1, \dots, n$).

!!! W przypadku, gdy w definicji i odnośnych stwierdzeniach dotyczących pochodnych cząstkowych dowolnego rzędu (rzędu n) jest $\overline{\mathbf{W}} = \overline{\mathbf{W}}_1 \times \dots \times \overline{\mathbf{W}}_k$, gdzie $\overline{\mathbf{W}}_i$ - przestrzenie unormowane, a $\overline{\mathbf{W}}$ - przestrzeń unormowana normą generowaną przez normy z $\overline{\mathbf{W}}_i$ ($i = 1, \dots, k$), to wystarczy uwzględnić, że $\vec{f}: \mathbf{U} \rightarrow \overline{\mathbf{W}}$ oznacza, iż $\vec{f} = (\vec{f}_i) = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k)$ przy $\vec{f}_i: \mathbf{U} \rightarrow \overline{\mathbf{W}}_i$ oraz $D^n \vec{f} = (D^n \vec{f}_i)$ lub $d^n \vec{f} = (d^n \vec{f}_i)$ dla pochodnych, w tym pochodnych cząstkowych.

Dalej, zamieszczono kilka przykładów zastosowania podanych definicji i sformułowanych twierdzeń, które to przykłady zawierają rezultaty do wykorzystania w dalszych zastosowaniach zarysowanego tu zaledwie rachunku różniczkowego.

Przykład. Niech $\overline{\mathbf{V}}$ będzie przestrzenią unitarną (traktowaną jako przestrzeń afiniczna) i niech $f: \overline{\mathbf{V}} \rightarrow \mathcal{R}$, $f(\vec{x}) = |\vec{x}|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{x}$. Na podstawie właściwości iloczynu skalarnego mamy $f(\vec{p} + \vec{l}) = |\vec{p} + \vec{l}|^2 = |\vec{p}|^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{l} + |\vec{l}|^2$. Ponieważ $[f(\vec{p} + \vec{l}) - f(\vec{p}) - 2\vec{p} \cdot \vec{l}] / |\vec{l}| = |\vec{l}| \rightarrow 0$ przy $|\vec{l}| \rightarrow 0$ i funkcja $\vec{l} \rightarrow 2\vec{p} \cdot \vec{l}$ jest liniowa i ograniczona na $\overline{\mathbf{V}}$ dla dowolnego \vec{p} (na mocy nierówności C-B-S jest $|2\vec{p} \cdot \vec{l}| \leq 2|\vec{p}||\vec{l}|$), więc $Df(\vec{x}) = 2 \langle \vec{x}, \cdot \rangle = d f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \overline{\mathbf{V}}$.

Przykład. Niech $\overline{\mathbf{E}}$ oznacza przestrzeń euklidesową (przestrzeń wektorowa traktowana jako przestrzeń afiniczna) i niech $L(\overline{\mathbf{E}})$ przestrzeń operatorów liniowych na $\overline{\mathbf{E}}$. Przestrzeń $L(\overline{\mathbf{E}})$ jest unitarna z iloczynem skalarnym $\langle \mathbf{K}, \mathbf{N} \rangle = \text{tr}(\mathbf{K}^T \circ \mathbf{N})$ (i normą generowaną przez ten iloczyn: $\|\mathbf{K}\|^2 = \text{tr}(\mathbf{K}^T \circ \mathbf{K})$). Niech $f(\mathbf{K}) = \mathbf{K}^3 = \mathbf{K} \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{K} \in L(\overline{\mathbf{E}})$, $\mathbf{K} \in L(\overline{\mathbf{E}})$. Ponieważ $f(\mathbf{P} + \mathbf{L}) = (\mathbf{P} + \mathbf{L}) \circ (\mathbf{P} + \mathbf{L}) \circ (\mathbf{P} + \mathbf{L}) = \mathbf{P}^3 + \mathbf{P}^2 \circ \mathbf{L} + \mathbf{P} \circ \mathbf{L} \circ \mathbf{P} + \mathbf{P} \circ \mathbf{L}^2 + \mathbf{L}^2 \circ \mathbf{P} + \mathbf{L}^3 + \mathbf{L} \circ \mathbf{P}^2 + \mathbf{L} \circ \mathbf{P} \circ \mathbf{L} = f(\mathbf{P}) + (\mathbf{P}^2 \circ \mathbf{L} + \mathbf{P} \circ \mathbf{L} \circ \mathbf{P} + \mathbf{L} \circ \mathbf{P}^2) + o(\mathbf{L})$,

gdzie $o(\mathbf{L}) = \mathbf{P} \circ \mathbf{L}^2 + \mathbf{L}^2 \circ \mathbf{P} + \mathbf{L}^3 + \mathbf{L} \circ \mathbf{P} \circ \mathbf{L}$, przy czym $\|o(\mathbf{L})\| / \|\mathbf{L}\| \rightarrow 0$ dla $\|\mathbf{L}\| \rightarrow 0$. Zatem, wobec liniowości i ograniczoności odwzorowania $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{P}^2 \circ \mathbf{L} + \mathbf{P} \circ \mathbf{L} \circ \mathbf{P} + \mathbf{L} \circ \mathbf{P}^2$, $\mathbf{L} \in L(\bar{E})$ oraz dowolności $\mathbf{P} \in L(\bar{E})$ jest:

$$[Df(\mathbf{K})] \circ \mathbf{L} = \mathbf{K}^2 \circ \mathbf{L} + \mathbf{K} \circ \mathbf{L} \circ \mathbf{K} + \mathbf{L} \circ \mathbf{K}^2 = [df(\mathbf{K})] \circ \mathbf{L}, \forall \mathbf{K} \in L(\bar{E}).$$

W podobny sposób można uzyskać pochodne innych potęg operatora \mathbf{K} .

Przykład. Niech \bar{V} , \bar{W} przestrzenie unormowane i $\bar{K} \in B^2(\bar{V}, \bar{W})$. Niech

$\bar{f}(\bar{x}) = \frac{1}{2} \bar{K}(\bar{x}, \bar{x}) \in \bar{W}$, $\bar{x} \in \bar{V}$. Na podstawie definicji F-pochodnej i niektórych twierdzeń znajdujemy:

$$\begin{aligned} D\bar{f}(\bar{p})\bar{l} &= \frac{1}{2} \bar{K}(\bar{p}, \bar{l}) + \frac{1}{2} \bar{K}(\bar{l}, \bar{p}), \\ D^2\bar{f}(\bar{p})(\bar{k}, \bar{l}) &= \frac{1}{2} \bar{K}(\bar{k}, \bar{l}) + \frac{1}{2} \bar{K}(\bar{l}, \bar{k}), \\ D^n\bar{f}(\bar{p}) &= \bar{0}, \quad \forall \bar{p} \in \bar{V} \quad (n > 2). \end{aligned}$$

Przykład. Niech $I = [a, b] \subset \mathcal{R}$ i $C^1(I, \mathcal{R}^m)$ przestrzeń funkcji klasy C^1 na przedziale I o wartościach wektorowych z \mathcal{R}^m : $\bar{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$. Przestrzeń ta jest unormowana względem normy

$$|\bar{u}(\cdot)| = \sum_{i=1}^m \sup_{t \in I} |u_i(t)| + \sum_{i=1}^m \sup_{t \in I} \left| \frac{du_i}{dt}(t) \right|,$$

a więc afiniczna metryczna względem metryki generowanej przez tę normę.

Niech

$$f(\bar{u}(\cdot)) = \int_a^b F(t, u_1(t), \dots, u_m(t), \frac{du_1}{dt}(t), \dots, \frac{du_m}{dt}(t)) dt,$$

gdzie $F = F(t, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m) = F(t, \bar{u}, \bar{v})$, przy $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{R}^m$ jest daną funkcją (zatem

$f: \mathbf{U} \rightarrow \mathcal{R}$ przy $\mathbf{U} \subset \mathbf{A} = \bar{V} = C^1(I, \mathcal{R}^m)$).

Jeżeli F jest klasy C względem wszystkich zmiennych i klasy C^1 względem zmiennych \bar{u}, \bar{v} ,

to przy $\mathbf{U} = C^1([a, b], \mathcal{R}^m)$ jest:

$$\begin{aligned} f(\bar{u}(\cdot) + \bar{h}(\cdot)) - f(\bar{u}(\cdot)) &= \int_a^b F(t, u_1(t) + h_1(t), \dots, u_m(t) + h_m(t), \dot{u}_1(t) + \dot{h}_1(t), \dots, \dot{u}_m(t) + \dot{h}_m(t)) dt + \\ &\quad - \int_a^b F(t, u_1(t), \dots, u_m(t), \dot{u}_1(t), \dots, \dot{u}_m(t)) dt = \end{aligned}$$

$$\int_a^b \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial F}{\partial u_i}(t, u_1(t), \dots, u_m(t), \dot{u}_1(t), \dots, \dot{u}_m(t)) h_i(t) + \frac{\partial F}{\partial v_i}(t, u_1(t), \dots, u_m(t), \dot{u}_1(t), \dots, \dot{u}_m(t)) \dot{h}_i(t) \right] dt + o(|\bar{u}(\cdot)|)$$

i wtedy F-pochodna funkcjonału f określona jest wzorem:

$$[Df(\vec{u}(\cdot))]\vec{h}(\cdot) = \int_a^b \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial F}{\partial u_i}(t, u_1(t), \dots, u_m(t), \dot{u}_1(t), \dots, \dot{u}_m(t)) h_i(t) + \frac{\partial F}{\partial v_i}(t, u_1(t), \dots, u_m(t), \dot{u}_1(t), \dots, \dot{u}_m(t)) \dot{h}_i(t) \right] dt$$

Jeżeli F jest klasy C^2 (względem wszystkich zmiennych), to przy

$$\mathbf{U} = \{ \vec{u}(\cdot) : I = [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^m; \vec{u}(\cdot) \in C^1([a, b], \mathcal{R}^m) \cap C^2((a, b), \mathcal{R}^m), \vec{u}(a) = \vec{A}, \vec{u}(b) = \vec{B} \}$$

(\vec{A}, \vec{B} – dowolne) F-pochodną funkcjonału f można określić wzorem:

$$[Df(\vec{u}(\cdot))]\vec{h}(\cdot) = \int_a^b \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial F}{\partial u_i}(t, u_1(t), \dots, u_m(t), \dot{u}_1(t), \dots, \dot{u}_m(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v_i}(t, u_1(t), \dots, u_m(t), \dot{u}_1(t), \dots, \dot{u}_m(t)) \right] h_i(t) dt$$

przy $\vec{h}(\cdot) \in \vec{U}^0 = \{ \vec{u}^0(\cdot) \in C^1([a, b], \mathcal{R}^m); \vec{u}^0(a) = \vec{u}^0(b) = \vec{0} \}$.

Ostatni zabieg (1987) miał na celu wprowadzenie do rachunku wariacyjnego, tj. wyznaczanie w danym obszarze punktu stacjonarności funkcjonału o określonej postaci (zwykle całkowej po obszarze lub przedziale liczbowym), tj. odwzorowania w postaci całkowej - części twarzy tak, by uwidoczniła się niechęć do Staszka ze strony młodszego brata. Ponadto

Przykład (warunek konieczny ekstremum funkcjonału). Niech \mathbf{U} podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej \mathbf{A} o przestrzeni stowarzyszonej unormowanej $\vec{V} = \mathcal{R}$. Niech funkcjonał $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathcal{R}$ ma w punkcie $P \in \mathbf{U}$ ekstremum. Jeżeli f jest F-różniczkowalne w punkcie P , to $Df(P) = \mathbf{0}$. Załóżmy (dla ustalenia uwagi), że f ma minimum, czyli $f(X) - f(P) \geq 0$ dla wszystkich X z pewnego otoczenia \mathbf{U}_P punktu P . Zatem na mocy definicji F-pochodnej jest $f(X) - f(P) = Df(P) \vec{P}\vec{X} + o(|\vec{P}\vec{X}|) \geq 0$, czyli jeśli $|\vec{P}\vec{Y}| < \delta$ dla pewnego δ , to o znaku dodatniej różnicy $f(Y) - f(P) > 0$ decyduje $Df(P) \vec{k} > 0$ dla $\vec{k} = \vec{P}\vec{Y}$ ($Y \in \mathbf{U}_P$). Ale $Df(P)(-\vec{k}) = -Df(P) \vec{k}$, gdyż $|\vec{k}| < \delta$ i $Df(P)$ jest odwzorowaniem liniowym, a więc $Df(P) \vec{k} < 0$, co jest niemożliwe. Zatem dla wszystkich \vec{k} , $|\vec{k}| < \delta$ musi być $Df(P) \vec{k} = 0$, co wystarcza do tego, by $Df(P) \vec{l} = 0$ dla dowolnego $\vec{l} \in \vec{V}$, co z kolei oznacza $Df(P) = \mathbf{0}$.

Przykład (różniczkowanie pola tensorowego) Niech \mathbf{U} podzbiór otwarty przestrzeni afinicznej \mathbf{A} o przestrzeni stowarzyszonej unormowanej n -wymiarowej \vec{V} . Niech następnie (\vec{e}_i) - baza

\vec{V} , a (e^i) - baza przestrzeni dualnej (form ograniczonych) \mathbf{V}' i niech

$$\mathbf{T} : \mathbf{U} \rightarrow \vec{\mathbf{W}} = \mathbf{B}^{p+q}(\underbrace{\mathbf{V}', \dots, \mathbf{V}'}_{p\text{-razy}}, \underbrace{\vec{V}, \dots, \vec{V}}_{q\text{-razy}}; \mathcal{R})$$

będzie polem tensorowym (tensorów $\mathbf{T}(X)$ o walencji (p, q) przy $X \in \mathbf{U}$). Niech \mathbf{T} będzie F-różniczkowalne w punkcie $P \in \mathbf{U}$:

$$DT(P) \in B^{p+q+1}(\underbrace{V', \dots, V'}_{p\text{-razy}}, \underbrace{\bar{V}, \dots, \bar{V}}_{q\text{-razy}}; \mathcal{R}) ,$$

czyli $DT(P) \vec{h} = h^i DT(P) \vec{e}_i$ dla dowolnego $\vec{h} = h^i \vec{e}_i$ (obowiązuje konwencja sumacyjna).

Ponieważ $T(X) = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(X) \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$, więc $DT(P) \vec{e}_i = \partial_{\vec{e}_i} T(P) =$

$= \partial_{\vec{e}_i} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(P) \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$. Niech (x^i) prostoliniowy układ współrzędnych, generowany przez układ odniesienia $U = \{O; (\vec{e}_i)\}$ ($X = O + x^i \vec{e}_i \in U \subset A$ dla $(x^i) \in \mathcal{X} \subset \mathcal{R}^n$).

W konsekwencji $DT(P) = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q, k}(P^i) \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \otimes e^k$ przy $P = O + p^i \vec{e}_i$,

Niech teraz $(u^i) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^n$ układ współrzędnych uogólnionych w obszarze U i niech $(\bar{g}_j(u^i))$

baza lokalna w U , a $\left(g^j(u^i) \right)$ jej kobaza. Wtedy, zgodnie z regułami różniczkowania iloczynów funkcji, mamy:

$$\begin{aligned} DT(P) &= T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q, k}(u_P^i) \bar{g}_{i_1}(u_P^i) \otimes \dots \otimes \bar{g}_{i_p}(u_P^i) \otimes g^{j_1}(u_P^i) \otimes \dots \otimes g^{j_q}(u_P^i) \otimes g^k(u_P^i) + \\ &+ T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q, k}(u_P^i) \bar{g}_{i_1}(u_P^i) \otimes \dots \otimes \bar{g}_{i_p}(u_P^i) \otimes g^{j_1}(u_P^i) \otimes \dots \otimes g^{j_q}(u_P^i) \otimes g^k(u_P^i) + \\ &+ T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(u_P^i) \bar{g}_{i_1, k}(u_P^i) \otimes \dots \otimes \bar{g}_{i_p}(u_P^i) \otimes g^{j_1}(u_P^i) \otimes \dots \otimes g^{j_q}(u_P^i) \otimes g^k(u_P^i) + \dots + \\ &+ T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(u_P^i) \bar{g}_{i_1}(u_P^i) \otimes \dots \otimes \bar{g}_{i_p, k}(u_P^i) \otimes g^{j_1}(u_P^i) \otimes \dots \otimes g^{j_q}(u_P^i) \otimes g^k(u_P^i) + \\ &+ T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(u_P^i) \bar{g}_{i_1}(u_P^i) \otimes \dots \otimes \bar{g}_{i_p}(u_P^i) \otimes g^{j_1, k}(u_P^i) \otimes \dots \otimes g^{j_q}(u_P^i) \otimes g^k(u_P^i) + \dots + \\ &+ T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(u_P^i) \bar{g}_{i_1}(u_P^i) \otimes \dots \otimes \bar{g}_{i_p}(u_P^i) \otimes g^{j_1}(u_P^i) \otimes \dots \otimes g^{j_q, k}(u_P^i) \otimes g^k(u_P^i), \end{aligned}$$

gdzie $(\dots)_{,k} = \partial(\dots) / \partial u^k$, (u_P^i) są współrzędnymi ustalonego (ale dowolnego) punktu P obszaru U . Uwzględniając rozkłady w bazie lokalnej:

$$\bar{g}_{r, k}(u^i) = \Gamma_{rk}^l(u^i) \bar{g}_l(u^i), \quad g^s_{, k}(u^i) = -\Gamma_{lk}^s(u^i) g^l(u^i),$$

gdzie Γ_{rk}^l są tzw. symbolami Christoffela (drugiego rodzaju), przy czym

$$0 = \delta_{r, k}^s = \left(g^s \bar{g}_r \right)_{, k} = g^s_{, k} \bar{g}_r + g^s \bar{g}_{r, k},$$

otrzymujemy na F-pochodną pola tensorowego o walencji (p, q) na obszarze przestrzeni afinicznej (w dowolnym punkcie tego obszaru parametryzowanego współrzędnymi dowolnymi) następujący wzór:

$$DT = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} |_k \vec{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{g}_{i_p} \otimes \vec{g}^{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{g}^{j_q} \otimes \vec{g}^k,$$

gdzie

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} |_k = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q k} + T^{r \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \Gamma_{rk}^{i_1} + \dots + T^{i_1 \dots r}_{j_1 \dots j_q} \Gamma_{rk}^{i_p} + \\ - T^{i_1 \dots i_p}_{s \dots j_q} \Gamma_{jk}^s + \dots - T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots s} \Gamma_{jk}^s$$

nosi nazwę pochoďnej kowariantnej pola tensorowego (ściślej – współrzędnych pola tensorowego w bazie lokalnej przestrzeni tensorów).

5. 4. Całka i całkowność

Z kanonu podstawowych pojęć analizy matematycznej pozostała nam „całka”. Właściwie powinno się mówić „całki”, bo jest ich wiele. I powinno się zacząć od teorii „miary”, by sukcesywnie i stopniowo dojść do „całki”. Ale nie ma na to czasu i poza tym jest to dość trudne. W związku z tym proponujemy wariant uproszczony.

Definicja. Niech $\vec{f}: I \rightarrow \vec{W}$ (I – przedział liczbowy w \mathcal{R} , \vec{W} – przestrzeń unormowana).

Całką nieoznaczoną funkcji $\vec{f}(\cdot)$ (zwaną również funkcją pierwotną funkcji $\vec{f}(\cdot)$) nazywamy taką funkcję $\vec{F}: I \rightarrow \vec{W}$ (jeśli istnieje), że $d\vec{F}(t)/dt = \vec{f}(t), \forall t \in I$. Stosujemy przy tym również oznaczenie: $\vec{F} = \int \vec{f}(t) dt$

! Jeżeli $\vec{F} = \vec{F}(t), t \in I$ jest całką nieoznaczoną funkcji $\vec{f} = \vec{f}(t), t \in I$, to

$\vec{F}' = \vec{F}(t) + \vec{C}, t \in I$ (\vec{C} - dowolny wektor z \vec{W}) jest również całką nieoznaczoną funkcji $\vec{f}(\cdot)$. Mówimy, że całka nieoznaczona jest określona z dokładnością do stałej (wektorowej z \vec{W}).

Twierdzenie. Jeżeli $\vec{f}(\cdot) \in C(I, \vec{W})$, to istnieje całka nieoznaczona funkcji $\vec{f}(\cdot)$.

Uwaga. Całka nieoznaczona w rozumieniu powyższej definicji ma prawie wszystkie właściwości całki nieoznaczonej funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej, jak: liniowość operacji całkowania, twierdzenia o całkowaniu przez części i o całkowaniu przez podstawienie i in.

Definicja. Niech $\vec{f}: (a, b) \rightarrow \vec{W}$ dana funkcja (\vec{W} – przestrzeń unormowana). Jeżeli istnieją całka nieoznaczona $\vec{F}(t) = \int \vec{f}(t) dt, t \in (a, b)$ i jej granice $\vec{F}_a = \lim_{t \rightarrow a^+} \vec{F}(t), \vec{F}_b = \lim_{t \rightarrow b^-} \vec{F}(t)$, to

Wektor

$$\vec{I} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}_b - \vec{F}_a \stackrel{\text{ozn } b}{=} \int_a^b \vec{f}(t) dt$$

nazywamy całką oznaczoną funkcji $\vec{f}(\cdot)$ na przedziale $[a, b] \subset \mathcal{R}$.

Twierdzenie. Jeżeli $\vec{f}(\cdot)$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$ (a nawet prawie wszędzie ciągła na $[a, b]$ z wyjątkiem skończonej liczby nieciągłości pierwszego rodzaju), to istnieje całka

oznaczona $\int_a^b \vec{f}(t) dt$.

Uwaga. Całka oznaczona w rozumieniu powyższej definicji ma prawie wszystkie właściwości „zwykłej” całki oznaczonej funkcji rzeczywistej, jak: liniowość operacji całkowania, addytywność względem przedziału całkowania i in.

Podamy teraz sekwencję definicji całki Riemanna - od najprostszej R-całki na kostce po R-całkę na rozmaitości

Definicja. Niech $\mathcal{K} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$ będzie m -wymiarową kostką (domkniętą) w przestrzeni \mathcal{R}^n . Mówimy, że odwzorowanie $\vec{f} : \mathcal{K} \rightarrow \vec{W}$ (\vec{W} - przestrzeń unormowana) jest całkowalne w sensie Riemanna (R-całkowalne) na \mathcal{K} , jeżeli istnieje taki wektor $\vec{I}_R \in \vec{W}$, że dla każdego ciągu podziałów kostki $\mathcal{K} : \mathcal{K}_r = \{ \mathcal{K}_1^{(r)}, \dots, \mathcal{K}_{i_r}^{(r)} \}$ na kostki m -wymiarowe $\mathcal{K}_i^{(r)}$ ($i = 1, 2, \dots, i_r; r = 1, 2, 3, \dots$) takiego, że $\lim_{r \rightarrow \infty} \delta(\mathcal{K}_r) = 0$, gdzie $\delta(\mathcal{K}_r) = \max\{\delta(\mathcal{K}_1^{(r)}), \dots, \delta(\mathcal{K}_{i_r}^{(r)})\}$ ($\delta(\mathcal{A})$ - średnica zbioru) i takiego, że dla dowolnych $x_i^{(r)} = (x_{i1}^{(r)}, \dots, x_{im}^{(r)}) \in \mathcal{K}_i^{(r)}$ ($i = 1, 2, \dots, i_r; r = 1, 2, 3, \dots$) ciąg sum (\vec{S}_r) przy
$$\vec{S}_r = \sum_{i=1}^{i_r} \text{mes}(\mathcal{K}_i^{(r)}) \vec{f}(x_i^{(r)})$$
 (mes - miara m -wymiarowa kostki, tj. $\text{mes } \mathcal{K} = (b_1 - a_1) \dots (b_m - a_m)$; dla $m = 1$ - długość, dla $m = 2$ - pole powierzchni, dla $m = 3$ - objętość) ma granicę \vec{I}_R . Granicę tę nazywamy całką Riemanna (R-całką) odwzorowania \vec{f} na kostce \mathcal{K} i oznaczamy symbolami
$$\vec{I}_R = \int_{\mathcal{K}} \vec{f}(x) dV = \int_{\mathcal{K}} \vec{f}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m.$$

W przypadku jednowymiarowym ($m = 1$) mamy następujące podstawowe twierdzenie

Twierdzenie. Jeżeli istnieje na przedziale $[a, b]$ całka oznaczona funkcji $\vec{f} : [a, b] \rightarrow \vec{W}$, to istnieje na $[a, b]$ całka Riemanna tej funkcji i
$$\int_{[a, b]} \vec{f}(x) dx = \int_a^b \vec{f}(x) dx.$$

Uwaga. Podaną definicję całki Riemanna rozszerzymy na pewnego typu obszary domknięte w przestrzeni \mathcal{R}^m . Niech \mathcal{D} taki obszar domknięty w \mathcal{R}^m , że istnieją ciągi pokryć \mathcal{K}_r i przekryć \mathcal{K}_r^* zbioru \mathcal{D} ($r = 1, 2, 3, \dots$) spełniające warunki:

- 1) $\mathcal{K}_r^* \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{K}_r \subset \mathcal{R}^m \quad \forall r \in \mathcal{N}$,
- 2) $\mathcal{K}_r^* = \mathcal{K}_1^{(r)} \cup \dots \cup \mathcal{K}_{i_r}^{(r)}$ i $\mathcal{K}_r = \mathcal{K}_1^{(r)} \cup \dots \cup \mathcal{K}_{j_r}^{(r)}$,

gdzie $\mathcal{K}_1^{(r)}, \dots, \mathcal{K}_{i_r}^{(r)}$ kostki m -wymiarowe o rozłącznych wnętrzach i o średnicach dążących do zera przy $r \rightarrow \infty$ ($\max\{\delta(\mathcal{K}_1^{(r)}), \dots, \delta(\mathcal{K}_{i_r}^{(r)})\} \rightarrow 0$ przy $r \rightarrow \infty$) oraz podobnie kostki $\mathcal{K}_1^{(r)}, \dots, \mathcal{K}_{j_r}^{(r)}$. Niech $\vec{f} : \mathcal{D} \rightarrow \vec{W}$ (\vec{W} - przestrzeń unormowana) i niech

$$\vec{S}_r = \sum_{i=1}^{i_r} \text{mes}(\mathcal{K}_i^{(r)}) \vec{f}(x_i^{(r)}) \quad \text{przy } x_i^{(r)} \in \mathcal{K}_i^{(r)} \quad \text{ i } \quad \vec{S}_r = \sum_{i=1}^{j_r} \text{mes}(\mathcal{K}_i^{(r)}) \vec{f}(x_i^{(r)}) \quad \text{przy}$$

$x_i^{(r)} \in \mathcal{K}_i^{(r)} \cap \mathcal{D}$ dla $i = 1, 2, \dots, i_r$ ($r = 1, 2, 3, \dots$). Jeżeli istnieją granice: $\vec{S} = \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{S}_r$ dla

każdych $(\mathcal{K}_i^{(r)})$ i $(x_i^{(r)})$ oraz ${}''\bar{S} = \lim_{r \rightarrow \infty} {}''\bar{S}_r$ dla każdego $(\mathcal{K}_i^{(r)})$ i $(x_i^{(r)})$, spełniających

wymienione wyżej warunki, a przy tym $'\bar{S} = {}''\bar{S}$, to $\bar{I}_R = '\bar{S} = {}''\bar{S} \stackrel{\text{ozn}}{=} \int_{\mathcal{D}} \vec{f} dV \stackrel{\text{ozn}}{=} \int_{\mathcal{D}} \vec{f}(x) dx$

($dV = dx = dx_1 \dots dx_m$ - miara kostki elementarnej m -wymiarowej) nazywamy całką Riemanna (R-całką) odwzorowania \vec{f} na obszarze domkniętym \mathcal{D} w przestrzeni \mathcal{R}^m . Mówimy przy tym, że \vec{f} jest całkowalne w sensie Riemanna (R-całkowalne) na \mathcal{D} .

W przypadku $m = 2$ i $m = 3$ mówimy również, że całka jest odpowiednio podwójna i potrójna (stosując przy tym oznaczenia $\iint_{\mathcal{D}} \vec{f}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ i $\iiint_{\mathcal{D}} \vec{f}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$).

! Jeżeli $\mathcal{D} = \mathcal{K}$ (kostka), to powyższa definicja R-całki sprowadza się do poprzedniej definicji R-całki na kostce.

!! Jeżeli $\vec{f} \equiv 1$ (przy $\bar{W} = \mathcal{R}$), to $\int_{\mathcal{D}} dx = \text{mes}_R(\mathcal{D})$ (miara Riemanna – R-miara obszaru

domkniętego \mathcal{D}). Obszar \mathcal{D} jest wtedy mierzalny w sensie Riemanna – R-mierzalny (por. rozdz. 4). Warto dodać, że obszar \mathcal{D} jest R-mierzalny \Leftrightarrow funkcja przynależności do zbioru

\mathcal{D} , tj. $\chi_{\mathcal{D}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathcal{D} \\ 0, & x \notin \mathcal{D} \end{cases}$ jest R-całkowalna na przestrzeni \mathcal{R}^m i $\int_{\mathcal{R}^m} \chi_{\mathcal{D}}(x) dx = \text{mes}_R(\mathcal{D})$.

Twierdzenie. Niech \mathcal{D} taki obszar domknięty w \mathcal{R}^m , że istnieją ciągi pokryć (\mathcal{K}'_r) i przekryć (\mathcal{K}''_r) zbioru \mathcal{D} ($r = 1, 2, 3, \dots$) spełniające warunki:

- 1) $\mathcal{K}'_r \subset \mathcal{K}'_{r+1} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{K}''_{r+1} \subset \mathcal{K}''_r \subset \mathcal{R}^m \quad \forall r \in \mathcal{N}$,
- 2) $\mathcal{K}'_r = '\mathcal{K}'_1^{(r)} \cup \dots \cup '\mathcal{K}'_{i_r}^{(r)}$ i $\mathcal{K}''_r = ''\mathcal{K}''_1^{(r)} \cup \dots \cup ''\mathcal{K}''_{j_r}^{(r)}$,

gdzie $'\mathcal{K}'_1^{(r)}, \dots, '\mathcal{K}'_{i_r}^{(r)}$ kostki m -wymiarowe o rozłącznych wnętrzach i takich, że

$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{mes}_R \text{clos}(\mathcal{D} - \mathcal{K}'_r) = 0$ oraz $''\mathcal{K}''_1^{(r)}, \dots, ''\mathcal{K}''_{j_r}^{(r)}$ kostki m -wymiarowe o rozłącznych

wnętrzach i takich, że $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{mes}_R \text{clos}(\mathcal{K}''_r - \mathcal{D}) = 0$. Niech $\vec{f}: \mathcal{D} \rightarrow \bar{W}$ (\bar{W} - przestrzeń

unormowana) odwzorowanie R-całkowalne na \mathcal{D} i niech $'\bar{I}_r = \sum_{i=1}^{i_r} \int_{\mathcal{K}'_i^{(r)}} \vec{f} dV$,

$''\bar{I}_r = \sum_{j=1}^{j_r} \int_{\mathcal{K}''_j^{(r)}} \vec{f} dV$. Wtedy $\lim_{r \rightarrow \infty} '\bar{I}_r = \lim_{r \rightarrow \infty} ''\bar{I}_r = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} dV$.

Powyższa definicja całki Riemanna jest stosunkowo prostym uogólnieniem całki Riemanna funkcji o wartościach rzeczywistych ($\bar{W} = \mathcal{R}$) analogiczne są więc właściwości całki i całkowania w sensie Riemanna, wyszczególnione w kolejnych twierdzeniach.

Twierdzenie (liniowość R-całkowania). Jeżeli $\vec{f} : \mathcal{D} \rightarrow \overline{\mathbb{W}}$ i $\vec{g} : \mathcal{D} \rightarrow \overline{\mathbb{W}}$ (\mathcal{D} – obszar domknięty w \mathcal{R}^m , $\overline{\mathbb{W}}$ – przestrzeń unormowana) są R-całkowalne, to R-całkowalne jest odwzorowanie $\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}$ i $\int_{\mathcal{D}} (\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}) dV = \alpha \int_{\mathcal{D}} \vec{f} dV + \beta \int_{\mathcal{D}} \vec{g} dV \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}$.

W konsekwencji zbiór odwzorowań $I_{\mathcal{R}}(\mathcal{D}; \overline{\mathbb{W}}) = \{\vec{f} : \mathcal{D} \rightarrow \overline{\mathbb{W}}; \vec{f} \text{ R-całkowalne}\}$ jest przestrzenią liniową.

Twierdzenie (addytywność R-całkowania). Niech $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ obszary domknięte w \mathcal{R}^m takie, że $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \cup \mathcal{D}''$, $\text{int } \mathcal{D}' \cap \text{int } \mathcal{D}'' = \emptyset$. Niech $\vec{f} : \mathcal{D} \rightarrow \overline{\mathbb{W}}$ ($\overline{\mathbb{W}}$ – przestrzeń unormowana) odwzorowanie R-całkowalne na \mathcal{D} . Wtedy $\int_{\mathcal{D}} \vec{f} dV = \int_{\mathcal{D}'} \vec{f} dV + \int_{\mathcal{D}''} \vec{f} dV$.

Twierdzenie (o wartości średniej). Niech \mathcal{D} obszar domknięty w \mathcal{R}^m i niech $\vec{f} : \mathcal{D} \rightarrow \overline{\mathbb{W}}$ ($\overline{\mathbb{W}}$ – przestrzeń unormowana) odwzorowanie ciągle na \mathcal{D} . Wtedy odwzorowanie to jest R-całkowalne na \mathcal{D} i istnieje takie $x_s \in \mathcal{D}$, że $\int_{\mathcal{D}} \vec{f}(x) dx = \text{mes}_{\mathcal{R}}(\mathcal{D}) \vec{f}(x_s)$.

Twierdzenie. Niech \mathcal{D} obszar domknięty w \mathcal{R}^m i niech $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ (\mathcal{D}_1 – obszar domknięty w \mathcal{R}^{m_1} , \mathcal{D}_2 – obszar domknięty w \mathcal{R}^{m_2} , $m_1 + m_2 = m$). Niech $\vec{f} : \mathcal{D} \rightarrow \overline{\mathbb{W}}$ ($\overline{\mathbb{W}}$ – przestrzeń unormowana) odwzorowanie takie, że $\vec{f}(x) = \vec{f}(y, z)$, $y \in \mathcal{D}_1$, $z \in \mathcal{D}_2$. Odwzorowanie \vec{f} jest R-całkowalne na $\mathcal{D} \Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{D}_1$ $\vec{f}(y, \cdot)$ jest R-całkowalna na \mathcal{D}_2 oraz $\forall z \in \mathcal{D}_2$ $\vec{f}(\cdot, z)$ jest R-całkowalna na \mathcal{D}_1 oraz tzw. całki iterowane $\int_{\mathcal{D}_2} \vec{f}(y, z) dz$ i $\int_{\mathcal{D}_1} \vec{f}(y, z) dy$ są odpowiednio R-całkowalne na \mathcal{D}_1 i \mathcal{D}_2 , a przy tym $\int_{\mathcal{D}} \vec{f}(x) dx = \int_{\mathcal{D}_1} \left(\int_{\mathcal{D}_2} \vec{f}(y, z) dz \right) dy = \int_{\mathcal{D}_2} \left(\int_{\mathcal{D}_1} \vec{f}(y, z) dy \right) dz$.

Twierdzenie. Niech \mathcal{D} będzie tzw. obszarem normalnym względem jednej ze zmiennych $x = (x_1, \dots, x_m)$ przy $m > 1$ (np. x_m), tzn. istnieje taki obszar domknięty \mathcal{D}^* w przestrzeni \mathcal{R}^{m-1} i dwie funkcje $\varphi, \psi : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathcal{R}$ takie, że $\varphi(y) \leq \psi(y) \quad \forall y \in \mathcal{D}^*$ oraz $\mathcal{D} = \{x = (y, z), y \in \mathcal{D}^*, z \in [\varphi(y), \psi(y)]\}$. Niech $\vec{f} : \mathcal{D} \rightarrow \overline{\mathbb{W}}$ ($\overline{\mathbb{W}}$ – przestrzeń unormowana) odwzorowanie takie, że $\vec{f}(x) = \vec{f}(y, z)$, $y \in \mathcal{D}^*$, $z \in [\varphi(y), \psi(y)]$. Odwzorowanie \vec{f} jest R-całkowalne na $\mathcal{D} \Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{D}^*$ $\vec{f}(y, \cdot)$ jest całkowalna na $[\varphi(y), \psi(y)]$ oraz R-całkowalne na \mathcal{D}^* jest odwzorowanie $\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \vec{f}(\cdot, z) dz$ i przy tym $\int_{\mathcal{D}} \vec{f}(x) dx = \int_{\mathcal{D}^*} \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \vec{f}(\cdot, z) dz \right) dy$.

Uwaga. Kolejnym uogólnieniem całki Riemanna na obszarze domkniętym \mathcal{D} w przestrzeni \mathcal{R}^m jest całka, również w sensie Riemanna, na rozmaitości domkniętej k -wymiarowej $\overline{\mathbb{M}}$ w

m -wymiarowej afinicznej przestrzeni euklidesowej \mathbf{E}^m , będącej domknięciem rozmaitości \mathbf{M} o parametryzacji (mapie) $X = O + \vec{x}(u)$; $\vec{x}(u) = x^i(u)\vec{e}_i$, $u = (u^j) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^k$, gdzie $\mathbf{U} = \{O; (\vec{e}_i)\}$ – układ odniesienia przestrzeni \mathbf{E}^m , (\vec{e}_i) - baza kartezjańska przestrzeni stowarzyszonej $\vec{\mathbf{E}}^m$, $x = (x^i(u))$ – funkcje klasy C^1 o macierzy Jacobiego $J = \left[x^i_{,j}(u) \right]$ rzędu k , \mathcal{U} – obszar zmienności współrzędnych parametrycznych u rozmaitości \mathbf{M} , \mathcal{X} - zbiór zmienności współrzędnych globalnych tej rozmaitości. Przy tym obrazem elementarnego obszaru zmienności współrzędnych $d\mathcal{U} = (u^j, u^j + du^j)$ o \mathbf{R} -mierze $dU = \text{mes } d\mathcal{U} = du^1 \dots du^k$ jest przy parametryzacji $x = x(u)$ płąt elementarny $d\mathbf{M}$ rozmaitości \mathbf{M} wyznaczony przez punkt X i wektory $d\vec{s}_j = \vec{x}_{,j}(u) du^j = \vec{g}_j(u) du^j$, tj. elementarne wektory bazy podprzestrzeni stycznej \mathbf{T}_X tworzące płąt $d\mathbf{M}$ o \mathbf{R} -mierze $dX = \text{mes } d\mathbf{M} = J(u) dU$. Niech $\vec{f}: \overline{\mathbf{M}} \rightarrow \overline{\mathbf{W}}$ / $\vec{f}: \mathbf{M} \rightarrow \overline{\mathbf{W}}$ ($\overline{\mathbf{W}}$ - przestrzeń unormowana) dane odwzorowanie (pole). Całką Riemanna (R-całką) odwzorowania (pola) \vec{f} na rozmaitości domkniętej $\overline{\mathbf{M}}$ / na rozmaitości \mathbf{M} nazywamy (R-całkę)

$$\int_{\mathbf{M}} \vec{f}(X) dX = \int_{\mathbf{M}} \vec{f}(X) dX \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{D}} \vec{F}(u) du,$$

gdzie $\mathcal{D} = \text{clos } \mathcal{U}$, $\vec{F}(u) = \vec{f}(O + \vec{x}(u))J(u)$, $u \in \mathcal{U}$. W szczególności

$$\text{mes}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M}) = \int_{\mathbf{M}} dX$$

jest miarą Riemanna (R-miarą) k -wymiarowej rozmaitości \mathbf{M} .

Uwaga. Jeżeli rozmaitość k -wymiarowa \mathbf{M} jest sumą rozmaitości k -wymiarowych \mathbf{M}_r , ($r=1, \dots, n$), parami rozłącznych, których domknięcia tworzą spójny zbiór $\overline{\mathbf{M}}$,

parametryzowany atlasem, złożonym z map rozmaitości składowych \mathbf{M}_r , to z definicji do

R-całki na stosujemy zasadę addytywności, tj. $\int_{\mathbf{M}} \vec{f}(X) dX = \sum_{r=1}^n \int_{\mathbf{M}_r} \vec{f}(X) dX$ dla $\vec{f}: \mathbf{M} \rightarrow \overline{\mathbf{W}}$.

Nietrudno zauważyć, że operacja R-całkowania jest liniowa, czyli dla każdych dwóch

R-całkowalnych $\vec{f}, \vec{g}: \mathbf{M} \rightarrow \overline{\mathbf{W}}$ i każdych dwóch $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ odwzorowanie $\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}: \mathbf{M} \rightarrow \overline{\mathbf{W}}$ jest R-całkowalne i $\int_{\mathbf{M}} (\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})(X) dX = \alpha \int_{\mathbf{M}} \vec{f}(X) dX + \beta \int_{\mathbf{M}} \vec{g}(X) dX$.

Uwaga. Na szczególną uwagę zasługują pewne typy R-całek na rozmaitościach 1-, 2- 3-wymiarowych w przestrzeniach euklidesowych 2- i 3-wymiarowych, których dotyczą znane twierdzenia Gaussa.

Szczególną rozmaitością (jednowymiarową – przy $k = 1$) jest krzywa \mathbf{L} , a R-całka na jej łuku $\overline{\mathbf{AB}}$ (o początku A i końcu B), zwana całką krzywoliniową I rodzaju, określona jest wzorem:

$$\int_{AB} \vec{f}(X) ds \stackrel{\text{def}}{=} \int_{u_A}^{u_B} \vec{f}(O + \vec{x}(u)) g(u) du ,$$

gdzie u współrzędna parametryczna wzdłuż krzywej \mathbf{L} , u_A i u_B współrzędne punktów A i B, $g(u) = |\vec{g}(u)|$, $\vec{g}(u) = d\vec{x}(u)/du$ wektor styczny do \mathbf{L} w punkcie $X = O + \vec{x}(u)$, ds jest długością elementarnego łuku $X(u)X(u+du)$ przy $X(u+du) = X(u) + \vec{g}(u)du$ równą (w przybliżeniu) $|\vec{g}(u)|du$, $\vec{f}: \mathbf{L} \rightarrow \vec{W}$ (\vec{W} dowolna przestrzeń unormowana), a całka po prawej stronie powyższej równości jest całką oznaczoną. Natomiast tzw. całka krzywoliniowa II rodzaju, zdefiniowana jest jako następująca szczególna R-całka:

$$\int_{AB} \vec{f}(X) \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{AB} \vec{f}(X) \cdot \vec{t}(X) ds ,$$

gdzie $\vec{t}(X)$ jest wersorem stycznym do \mathbf{L} w punkcie X , a $\vec{f}: \mathbf{L} \rightarrow \vec{E}^m$.

W przypadku rozmaitości dwuwymiarowej ($k=2$) interesuje nas zwłaszcza całka powierzchniowa I rodzaju na powierzchni \mathbf{S} , tj. R-całka

$$\int_{\mathbf{S}} \vec{f}(X) dS \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{U}} \vec{f}(O + \vec{x}(u^1, u^2)) \sqrt{g(u^1, u^2)} du^1 du^2 ,$$

gdzie (u^1, u^2) współrzędne parametryczne z obszaru \mathcal{U} , $\vec{g}_\alpha(u^1, u^2) = \vec{x}_{,\alpha}(u^1, u^2)$,

$$g(u^1, u^2) = \det[\vec{g}_\alpha(u^1, u^2) \cdot \vec{g}_\beta(u^1, u^2)] = |\vec{g}_1(u^1, u^2) \times \vec{g}_2(u^1, u^2)|^2, \quad dS(u^1, u^2) =$$

$\sqrt{g(u^1, u^2)} du^1 du^2$ pole elementarnego płata $d\mathbf{S}$ wyznaczonego przez wektory elementarne

$$d\vec{s}_\alpha = \vec{g}_\alpha(u^1, u^2) du^\alpha \text{ styczne do powierzchni } \mathbf{S} \text{ w punkcie } X(u^1, u^2) \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

a $\vec{f}: \mathbf{S} \rightarrow \vec{W}$ (\vec{W} dowolna przestrzeń unormowana), a także całka powierzchniowa II rodzaju

na powierzchni \mathbf{S} , tj. R-całka w przestrzeni euklidesowej zorientowanej \mathbf{E}^3

$$\int_{\mathbf{S}} \vec{f}(X) \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{S}} \vec{f}(X) \cdot \vec{n}(X) dS ,$$

gdzie $d\vec{S} = \vec{n} dS$, $\vec{n} = \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 / \sqrt{g}$ jest wersorem normalnym do \mathbf{S} ($d\vec{S} = d\vec{s}_1 \times d\vec{s}_2$),

a $\vec{f}: \mathbf{S} \rightarrow \vec{E}^3$.

W przypadku obszaru \mathbf{V} w dwu- lub trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej \mathbf{E} ($k=m=2$ lub $k=m=3$) mamy (tak jak w przypadku dowolnego $k=m$):

$$\left. \begin{array}{l} \int_{\mathbf{A}} \vec{f}(X) dA \\ \int_{\mathbf{V}} \vec{f}(X) dV \end{array} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{U}} \vec{f}(O + \vec{x}(u)) \sqrt{g(u)} du \begin{cases} m=k=2 \\ m=k=3 \end{cases}$$

gdzie $u = (u^j) = (u^1, u^2)$ lub (u^1, u^2, u^3) , zaś $J(u) = \sqrt{g(u)}$, przy czym

$$g(u) = \det[g_{rs}(u)], \quad g_{rs}(u) = \vec{g}_r(u) \cdot \vec{g}_s(u), \quad \vec{g}_j(u) = \vec{x}_{,j}(u).$$

Zgodnie z twierdzeniami Gaussa dla powyższych całek prawdziwe są następujące formuły:

1) formuła Gaussa-Greena ($m = 2$) i Ostrogradskiego-Gaussa ($m = 3$)

$$\int_{\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{V}} \vec{f} \cdot \vec{n} dS = \int_{\mathbf{A} / \mathbf{V}} \operatorname{div} \vec{f} dV,$$

gdzie \mathbf{A} / \mathbf{V} obszar w przestrzeni dwu- lub trójwymiarowej ($m = 2$ lub 3) o brzegu $\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{V}$ kawałkami klasy C^1 , tj. łukami krzywych (przy $m = 2$) lub płacami powierzchni (przy $m = 3$), \vec{n} jest polem wektorów normalnych zewnętrznych, określonym prawie wszędzie na $\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{V}$ (tj. z wyjątkiem wierzchołków i odpowiednio krawędzi brzegu $\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{V}$), $\vec{f} : \mathbf{A} / \mathbf{V} \rightarrow \vec{\mathbf{E}}$ jest ciągła na \mathbf{A} / \mathbf{V} (wraz z brzegiem) i klasy C^1 we wnętrzu $\operatorname{Int} \mathbf{A} / \operatorname{Int} \mathbf{V}$ i wtedy $\operatorname{div} \vec{f} = \operatorname{tr} (\mathbf{D} \vec{f})$ ($\vec{f} = f^i \vec{g}_i$, $\mathbf{D} \vec{f} = f^i |_{,j} \vec{g}_i \otimes \vec{g}^j \Rightarrow \operatorname{div} \vec{f} = f^i |_{,i}$);

2) formuła Gaussa-Stokesa

$$\int_{\partial \mathbf{S}} \vec{f} \cdot \vec{t} ds = \int_{\mathbf{S}} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} dS,$$

gdzie \mathbf{S} powierzchnia ($k = 2$) w przestrzeni zorientowanej \mathbf{E}^3 ($m = 3$) o brzegu $\partial \mathbf{S}$ będącym konturem zamkniętym, złożonym z łuków klasy C^1 o końcach będących wierzchołkami brzegu $\partial \mathbf{S}$, \vec{n} pole wektorów normalnych do \mathbf{S} (określonych przez bazę lokalną na \mathbf{S} : $\vec{n} = \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 / \sqrt{g}$), \vec{t} pole wektorów stycznych do konturu $\partial \mathbf{S}$ (określonym poza jego wierzchołkami) o zwrotach określonych zgodnie z regułą prawoskrętną przez układ $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{n})$, $\vec{f} : \mathbf{S} \rightarrow \vec{\mathbf{E}}^3$ jest klasy C^1 (zgodnie z regułami różniczkowania pól na rozmaitościach), przy czym $\vec{f} = f^\alpha \vec{g}_\alpha + f^3 \vec{n} \Rightarrow \vec{f} \cdot \vec{t} = f^\alpha t_\alpha$, $\operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} = e_\alpha^\beta f^\alpha |_{,\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$); por. r.4. Zauważmy, że f^3 nie występuje w powyższej formule.

Sformułujemy teraz zasadniczą kwestię tego podrozdziału.

Uwaga. Jak już zauważono zdefiniowana w każdym kroku całka typu Riemanna jak i całka oznaczona mają dwie kluczowe własności:

1) addytywność całki

$$\int_{\Omega} \vec{f} d\Omega = \int_{\Omega'} \vec{f} d\Omega + \int_{\Omega''} \vec{f} d\Omega, \text{ jeśli } \Omega = \Omega' \cup \Omega'' \text{ i } \operatorname{mes}(\Omega' \cap \Omega'') = 0;$$

2) liniowość operacji całkowania,

tj. odwzorowania $\vec{\mathbf{I}} : \vec{f} \rightarrow \int_{\Omega} \vec{f} d\Omega \in \vec{\mathbf{W}}$, $\vec{f} \in \mathbf{I}(\Omega; \vec{\mathbf{W}})$ na każdej liniowej podprzestrzeni liniowej

przestrzeni $\mathbf{I}(\Omega; \vec{\mathbf{W}})$ funkcji całkowlanych (podprzestrzeni przestrzeni funkcyjnej $\mathbf{F}(\Omega; \vec{\mathbf{W}})$);

wynik tego odwzorowania $\vec{\mathbf{I}}(\vec{f}) = \int_{\Omega} \vec{f} d\Omega$ nosi nazwę całki (Riemanna) odwzorowania \vec{f} na

zbiórze Ω , zawartym w pewnej przestrzeni afinicznej \mathbf{A} , przy czym $d\Omega = \operatorname{mes}(d\Omega)$ odpowiednia miara elementarnego podzbioru $d\Omega$, zaś $\operatorname{mes}(\Omega) = \int_{\Omega} d(\Omega)$ jest miarą

(Riemanna) zbioru Ω .

Dalsze uogólnienia i rozszerzenia pojęcia całki idą w kierunku następującym: przez całkę względem miary μ (tzw. μ -całkę) odwzorowania $\vec{f} : \Omega \rightarrow \vec{W}$ z przestrzeni liniowej funkcji μ -całkowalnych $I_\mu(\Omega; \vec{W})$, gdzie Ω - element rodziny podzbiorów μ -mierzalnych pewnej przestrzeni Π , \vec{W} - przestrzeń unormowana, rozumiemy wynik odwzorowania

(μ -całkowania) $\vec{I}_\mu : I_\mu(\Omega; \vec{W}) \rightarrow \vec{W}$, $\vec{I}_\mu(\vec{f}) \stackrel{\text{ozn}}{=} \int_\Omega \vec{f} d\mu$, które spełnia warunki addytywności i liniowości 1) i 2).

Przykładem powszechnie stosowanego uogólnienia całki Riemanna jest całka Lebesgue'a (tzw. L-całka) względem miary Lebesgue'a (L-miary) odwzorowania (L-całkowalnego) $\vec{f} : \Omega \rightarrow \vec{W}$, gdzie Ω - podzbiór L-mierzalny euklidesowej przestrzeni afinicznej, \vec{W} - przestrzeń unormowana, o tej własności (co jest sednem uogólnienia), że jeśli istnieje R-całka odwzorowania $\vec{f} : \Omega \rightarrow \vec{W}$, to istnieje również L-całka tego odwzorowania i obie całki są sobie równe (oczywiście istnieją odwzorowania L-całkowalne, które nie są R-całkowalne).

Podamy jeszcze dwa przykłady rozszerzenia pojęcia R-całki.

Przykład. Niech $\Pi = \{p_1, \dots, p_N\}$ ($N \in \mathcal{N}$) będzie danym zbiorem (układem) obiektów (przedmiotów), a $\mu = (m_1, \dots, m_N)$ danym ciągiem (układem) liczb dodatnich, zwanych (umownie) masami elementów układu Π . Niech $\Omega \subseteq \Pi$ dowolny podzbiór elementów o numerach $I_\Omega = \{i_1, \dots, i_K\}$ ($1 \leq K \leq N$) i niech $\vec{f} : \Omega \rightarrow \vec{W}$; $\vec{f} = (\vec{f}_{i_1}, \dots, \vec{f}_{i_K})$ (\vec{W} przestrzeń unormowana). Wtedy dla dowolnego $\vec{f} \in F(\Omega; \vec{W})$

$$\int_\Omega \vec{f} d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in I_\Omega} m_i \vec{f}_i$$

jest całką – tzw. całką dyskretną o ciągu wagowym $(m_{i_1}, \dots, m_{i_K})$.

Przykład. Niech Π dowolny zbiór (przestrzeń), a X_0 dowolny jego element (punkt), zaś \vec{W} dowolna przestrzeń unormowana. Dla dowolnego $\Omega \subseteq \Pi$ i dowolnego $\vec{f} \in F(\Omega; \vec{W})$ definiujemy odwzorowanie

$$\int_\Omega \vec{f} d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \vec{f}(X_0), & X_0 \in \Omega, \\ \vec{0}, & X_0 \notin \Omega \end{cases}$$

które spełnia podstawowe atrybuty dla całki – nazywamy ją całką δ - Diraca. Przy tym miara μ jest określona następująco:

$$\mu(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & X_0 \in \Omega, \\ 0, & X_0 \notin \Omega. \end{cases}$$

Mówimy, że punkt X_0 wybiera z odwzorowania \vec{f} wartość w tym punkcie, jeśli znajdzie się on w dziedzinie tego odwzorowania.

5.5. Szeregi trygonometryczne Fouriera

W rozdz. 2.4 wprowadzono pojęcie rozwinięcia elementu przestrzeni unitarnej Hilberta w szereg Fouriera względem określonej bazy hilbertowskiej. Taką bazą jest ortonormalny układ zupełny (a w konsekwencji zamknięty) – a właściwie wystarczy by był on ortogonalny i zupełny, bo zawsze łatwo go zortonormalizować. Rozwinięcie danego elementu w szereg Fouriera względem układu ortogonalnego zupełnego oznacza, że element ten jest równy swojemu szeregowi Fouriera, a przy tym zbieżność jego szeregu Fouriera jest zbieżnością w normie przestrzeni unitarnej, generowanej przez iloczyn skalarny.

W tym punkcie zajmiemy się przypadkiem, gdy przestrzenią unitarną jest przestrzeń funkcyjna, w której można skonstruować bazę ortogonalną zupełną, złożoną z funkcji trygonometrycznych. Ten przypadek jest szczególny także dlatego, że oprócz zbieżności szeregu Fouriera w normie ma miejsce – przy pewnych warunkach – także zbieżność punktowa i jednostajna. W konsekwencji trygonometryczne szeregi mają znaczny zakres zastosowań (bo między innymi można je różniczkować i całkować wyraz po wyrazie – oczywiście, gdy funkcje będące sumami szeregów są odpowiedniej klasy regularności).

1. Szeregi trygonometryczne Fouriera w przestrzeni funkcji okresowych

Niech $V(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ będzie podprzestrzenią (liniową) przestrzeni (liniowej) funkcji $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ okresowych, o okresie $T = 2\pi$ (dla ustalenia uwagi), oraz całkowalnych z kwadratem na przedziale $[-\pi, \pi]$, tj.

$$V(\mathcal{R}, \mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{\subseteq} L_{\text{okr}}^2([-\pi, \pi]; \mathcal{R}) = \{f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}; f(x+2\pi) = f(x) \forall x \in \mathcal{R}, \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) dx < \infty\}.$$

Twierdzenie. Przestrzeń liniowa $L_{\text{okr}}^2([-\pi, \pi]; \mathcal{R})$ jest przestrzenią unitarną Hilberta z iloczynem skalarnym i normą (generowaną przez ten iloczyn):

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) g(x) dx, \quad \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) dx,$$

a ponadto ciąg funkcji

$$U_{c+s}(\mathcal{R}) = (1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots)$$

jest ortogonalnym układem zupełnym przestrzeni $L_{\text{okr}}^2([-\pi, \pi]; \mathcal{R})$, a więc jest, po unormowaniu, bazą hilbertowską. W efekcie, zgodnie z odnośnymi elementami z rozdz. 2.4, dla każdej funkcji $f(\cdot)$ przestrzeni $V(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ mamy:

$$f(x) = \frac{\| \cdot \|}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + s_n \sin nx)^2, \quad (1)$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

$$s_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Ortogonalność układu $U_{c+s}(\mathcal{R})$ wynika z równości:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dx &= 2\pi, & \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx &= 0, & \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases}, & \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx dx &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Zbieżność szeregu Fouriera w równości (1), czyli zbieżność średniokwadratowa, oznacza, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^N (c_n \cos nx + s_n \sin nx) \right] \right|^2 dx = 0. \quad (4)$$

Ponadto:

$\| \cdot \|$
² = - zbieżność w normie średniokwadratowej

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) dx = \pi \left[\frac{1}{2} c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^2 + s_n^2) \right], \quad (5)$$

(zamkniętość układu $U_{c+s}(\mathcal{R})$)

oraz

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx = 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots \right)$$

$$\Rightarrow \overset{\bullet}{f} = 0 \quad (f(x) = 0 \text{ dla prawie wszystkich } x \in \mathcal{R})^3 \quad (6)$$

(zupełność układu $U_{c+s}(\mathcal{R})$) .

Uwaga. Analogiczne rozważania możemy powtórzyć dla przestrzeni funkcyjnej

$$L_{\text{okr}}^2([0, 2\pi]; \mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}; f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{R}, \int_0^{2\pi} f^2(x) dx < \infty \}.$$

Wtedy bowiem $g \in L_{\text{okr}}^2([0, 2\pi]; \mathcal{R})$ i $f(x) = g(\xi)$ przy $\xi = x + \pi$ implikuje

$f \in L_{\text{okr}}^2([-\pi, \pi]; \mathcal{R})$ oraz zgodnie z (1) i (2)

$$g(\xi) = \frac{\|\cdot\|}{2} \tilde{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{c}_n \cos n\xi + \tilde{s}_n \sin n\xi),$$

gdzie

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi) \cos n\xi d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\tilde{s}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi) \sin n\xi d\xi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) .$$

2. Twierdzenie Dirichleta

Niech $V(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ będzie przestrzenią funkcji $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, które spełniają następujące warunki, zwane dalej warunkami Dirichleta I:

- 1) f jest okresowa, o okresie $T = 2\pi$;
- 2) f jest przedziałami monotoniczna na \mathcal{R} (na $[-\pi, \pi]$);
- 3) f jest ciągła na każdym przedziale domkniętym zawartym w zbiorze \mathcal{R} , z wyjątkiem skończonej liczby punktów tego przedziału, w których f ma nieciągłości pierwszego rodzaju (skoki granic prawo- i lewostronnych).

Uwaga.

1) f jest okresowa na \mathcal{R} wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists T > 0 \quad f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{R}$.

Najmniejsza wartość T spełniająca ten warunek nosi nazwę okresu;

2) f jest przedziałami monotoniczna na \mathcal{R} , jeżeli jest przedziałami monotoniczna na każdym przedziale $[a, b]$, tzn. przedział ten można podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów

³ $\overset{\bullet}{f} = g \Leftrightarrow \|f - g\| = 0 \Leftrightarrow f = g + \varphi, \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(x) dx = 0$

$[x_0 = a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{N-1}, x_N = b]$ ($N \in \mathcal{N}$), w których f jest albo niemalejąca albo nierosnąca;

3) warunek 3) oznacza, że dla każdego przedziału $[a, b]$ i dla każdego $x_0 \in [a, b]$ jest

$$f(x_0^+) = f(x_0^-) \text{ albo } f(x_0^+) \neq f(x_0^-) \text{ jeśli takich } x_0 \text{ w przedziale } [a, b] \text{ jest skończona liczba (}$$

$$f(x_0^\pm) = \lim_{\xi \rightarrow x_0^\pm} f(\xi) \text{)}.$$

Wniosek. Przestrzeń funkcyjna $V(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ (funkcji spełniających Warunki Dirichleta I) jest

podprzestrzenią liniową przestrzeni $L^2_{\text{okr}}([-\pi, \pi]; \mathcal{R})$. Zatem, jeśli $f \in V(\mathcal{R}, \mathcal{R})$, to f spełnia

relacje (1) ÷ (6) z p.1, a przy tym $\| \cdot \|$ oznacza, że $f(x) = 0$ dla wszystkich x z przedziału $[-\pi, \pi]$, z wyjątkiem skończonej liczby tych x , w których $f(x) \neq 0$.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie I (Dirichleta). Jeżeli $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ spełnia Warunki Dirichleta I (warunki 1) ÷ 3)), to szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny punktowo dla każdego $x \in \mathcal{R}$, a przy tym

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + s_n \sin nx) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)],$$

gdzie c_n, s_n wyrażają się wzorami (2) z p. 1, a $f(x^\pm) = \lim_{\xi \rightarrow x^\pm} f(\xi)$. Jeśli ponadto funkcja f

jest ciągła, to szereg Fouriera tej funkcji jest zbieżny jednostajnie do f na każdym przedziale $[c, d]$. Jeśli dodatkowo f jest różniczkowalna, to szereg Fouriera tej funkcji f jest różniczkowalny „wyraz po wyrazie”, a więc:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (ns_n \cos nx - nc_n \sin nx).$$

3. Przypadek funkcji jednej zmiennej na przedziale liczbowym

3P. Rozwinięcie w pełny szereg trygonometryczny Fouriera

Niech $V([a, b]; \mathcal{R})$ będzie przestrzenią funkcji $g : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$, spełniających następujące warunki, zwane dalej Warunkami Dirichleta II.

- 1) g jest przedziałami monotoniczna na $[a, b]$;
- 2) g jest ciągła na $[a, b]$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby nieciągłości pierwszego rodzaju.

Funkcję g z przestrzeni $V([a, b]; \mathcal{R})$ przeskalowujemy do przedziału $[-\pi, \pi]$, a następnie rozszerzamy okresowo na cały zbiór \mathcal{R} w następujący sposób:

$$g = g(\xi), \quad \xi \in [a, b] \rightarrow \tilde{f} = \tilde{f}(x), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$\xi = a + \frac{b-a}{2\pi}(x + \pi), \quad x = \frac{2\pi}{b-a}(\xi - a) - \pi, \quad (a)$$

$$\tilde{f}(x) = g(\xi) \Big|_{\xi = a + \frac{b-a}{2\pi}(x+\pi)}, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (b)$$

$$f(x) = \tilde{f}(x - 2k\pi), \quad x \in [-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (c)$$

Wniosek. Jeżeli funkcja g spełnia warunki 1) ÷ 2) powyżej (W.D.II) to funkcja f spełnia warunki 1) ÷ 3) z rozdz. 2 (W.D.I).

W efekcie, na mocy Tw. I Dirichleta (po uwzględnieniu zależności (a) ÷ (c) pomiędzy x i ξ oraz g , \tilde{f} i f), stwierdzamy prawdziwość twierdzenia.

Twierdzenie IIP (Dirichleta). Jeżeli funkcja $g : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ spełnia warunki 1) ÷ 2) (W.D.II), to następujący szereg Fouriera funkcji g jest zbieżny punktowo:

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n \cos \left[\frac{2\pi n}{b-a}(\xi - a) \right] + s_n \sin \left[\frac{2\pi n}{b-a}(\xi - a) \right] \right\} = \begin{cases} \frac{1}{2} [g(\xi^+) + g(\xi^-)], & \xi \in (a, b) \\ \frac{1}{2} [g(a^+) + g(b^-)], & \xi = a, \xi = b \end{cases}, \quad (1)$$

gdzie

$$c_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b g(\xi) \cos \left[\frac{2\pi n}{b-a}(\xi - a) \right] d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

$$s_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b g(\xi) \sin \left[\frac{2\pi n}{b-a}(\xi - a) \right] d\xi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Ponadto, jeśli funkcja g jest ciągła na przedziale (a, b) , to szereg (1) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g na dowolnym przedziale $[c, d] \subset (a, b)$. Natomiast, gdy funkcja g jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i $g(a) = g(b)$, to szereg (1) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g na tym przedziale.

! W szczególności, gdy $a = 0$, $b = l$, wzory (1), (2) mają prostszą postać:

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos \left(2\pi n \frac{\xi}{l} \right) + s_n \sin \left(2\pi n \frac{\xi}{l} \right) \right] = \begin{cases} \frac{1}{2} [g(\xi^+) + g(\xi^-)], & \xi \in (0, l) \\ \frac{1}{2} [g(0^+) + g(l^-)], & \xi = 0, \xi = l \end{cases}, \quad (3)$$

gdzie

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(\xi) \cos \left(2\pi n \frac{\xi}{l} \right) d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4)$$

$$s_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(\xi) \sin \left(2\pi n \frac{\xi}{l} \right) d\xi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Uwaga. Przestrzeń $L^2([a, b]; \mathcal{R}) = \{g : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}; \int_a^b |g(\xi)|^2 d\xi < \infty\}$ jest liniową przestrzenią unitarną z iloczynem skalarnym $\langle g, h \rangle = \int_a^b g(\xi)h(\xi)d\xi$ i normą $\|g\| = \left(\int_a^b |g(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$. W tej przestrzeni układ funkcji:

$$U_{c+s}([a, b]) = \left(\sqrt{\frac{1}{b-a}}, \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left[\frac{2\pi n}{b-a}(\xi-a) - \pi\right], \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\left[\frac{2\pi n}{b-a}(\xi-a) - \pi\right], \dots \right) \quad (4)$$

jest bazą hilbertowską. Natomiast zbiór $V([a, b]; \mathcal{R})$ funkcji spełniających Warunki Dirichleta II jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $L^2([a, b]; \mathcal{R})$.

Przykład. Rozwiemy w szereg Fouriera, zgodnie z wzorami (3), funkcję $g : [0, l] \rightarrow \mathcal{R}$ określoną następująco:

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{N}{l} \left(1 + N \frac{\xi - \xi_0}{l}\right), & \xi \in [\xi_0 - l/N, \xi_0] \\ \frac{N}{l} \left(1 - N \frac{\xi - \xi_0}{l}\right), & \xi \in [\xi_0, \xi_0 + l/N] \\ 0, & \xi \in [0, l] - [\xi_0 - l/N, \xi_0 + l/N] \\ (N \in \mathcal{N}, N = N_0, N_0 + 1, \dots) \end{cases} \quad (a)$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy:

$$c_0 = \frac{2}{l}, \quad c_n = -\frac{2}{l} \frac{N^2}{(2\pi n)^2} \left[\cos \frac{2\pi n}{l} \left(\xi_0 + \frac{l}{N}\right) - 2 \cos \frac{2\pi n}{l} \xi_0 + \cos \frac{2\pi n}{l} \left(\xi_0 - \frac{l}{N}\right) \right],$$

$$s_n = -\frac{2}{l} \frac{N^2}{(2\pi n)^2} \left[\sin \frac{2\pi n}{l} \left(\xi_0 + \frac{l}{N}\right) - 2 \sin \frac{2\pi n}{l} \xi_0 + \sin \frac{2\pi n}{l} \left(\xi_0 - \frac{l}{N}\right) \right]. \quad (b)$$

Zatem, wobec ciągłości funkcji g mamy dla każdego $\xi \in [0, l]$:

$$g(\xi) = \frac{1}{l} - \frac{1}{2l} \frac{N^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \left[\cos \alpha_n \left(\xi_0 + \frac{l}{N}\right) - 2 \cos \alpha_n \xi_0 + \cos \alpha_n \left(\xi_0 - \frac{l}{N}\right) \right] \cos \alpha_n \xi + \right. \quad (c)$$

$$\left. + \left[\sin \alpha_n \left(\xi_0 + \frac{l}{N}\right) - 2 \sin \alpha_n \xi_0 + \sin \alpha_n \left(\xi_0 - \frac{l}{N}\right) \right] \sin \alpha_n \xi \right\}, \quad \alpha_n = \frac{2\pi n}{l}.$$

Zgodnie z formułą Taylora jest:

$$f(\xi \pm \Delta\xi) = f(\xi) \pm f'(\xi) \Delta\xi + \frac{1}{2} f''(\xi) (\Delta\xi)^2 + o(\Delta\xi)^2,$$

skąd dla funkcji klasy C^2

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta\xi)^2} [f(\xi + \Delta\xi) - 2f(\xi) + f(\xi - \Delta\xi)] = f''(\xi). \quad (d)$$

Stosując równość (d) formalnie w wyrażeniu (c) przy $\Delta\xi = l/N$ oraz przy $f(\xi) = \cos \alpha_n \xi$ i $f(\xi) = \sin \alpha_n \xi$ otrzymujemy w granicy dla $N \rightarrow \infty$ i dla $\xi = \xi_0$:

$$g(\xi) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos \alpha_n \xi_0 \cos \alpha_n \xi + \sin \alpha_n \xi_0 \sin \alpha_n \xi). \quad (e)$$

Niech $\delta(\xi - \xi_0)$ będzie dystrybucją δ -Diraca, tzn. uogólnioną funkcją o właściwościach:

$$\delta(\xi - \xi_0) \begin{cases} = 0, & \xi \neq \xi_0 \\ \neq 0, & \xi = \xi_0 \end{cases}, \quad \int_a^b \delta(\xi - \xi_0) d\xi = \begin{cases} 1, & \xi_0 \in (a, b) \\ 0, & \xi_0 \notin (a, b) \end{cases}, \quad (f)$$

oraz

$$\int_a^b f(\xi) \delta(\xi - \xi_0) d\xi = \begin{cases} f(\xi_0), & \xi_0 \in (a, b) \\ 0, & \xi_0 \notin (a, b) \end{cases} \quad (g)$$

dla dowolnej funkcji f .

Podobne do właściwości (f) ma funkcja $g(\xi)$ określona wzorem (a):

$$g(\xi) \begin{cases} = 0, & \xi \notin [\xi_0 - l/N, \xi_0 + l/N] \\ \neq 0, & \xi \in (\xi_0 - l/N, \xi_0 + l/N) \end{cases}, \quad \int_0^l g(\xi) d\xi = \begin{cases} 1, & [\xi_0 - l/N, \xi_0 + l/N] \subset (0, l) \\ 0, & [\xi_0 - l/N, \xi_0 + l/N] \not\subset (0, l) \end{cases}, \quad (h)$$

Identyczne wyrażenie z (e) otrzymujemy rozwijając $\delta(\xi - \xi_0)$ w szereg Fouriera zgodnie ze wzorami (4) i (g):

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l \delta(\xi - \xi_0) d\xi = \frac{2}{l}, \\ c_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \delta(\xi - \xi_0) \cos \alpha_n \xi d\xi = \frac{2}{l} \cos \alpha_n \xi_0, \\ s_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \delta(\xi - \xi_0) \sin \alpha_n \xi d\xi = \frac{2}{l} \sin \alpha_n \xi_0, \end{aligned}$$

a więc (por. (e))

$$\delta(\xi - \xi_0) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos \alpha_n \xi_0 \cos \alpha_n \xi + \sin \alpha_n \xi_0 \sin \alpha_n \xi). \quad (i)$$

Dystrybucję $\delta(\xi - \xi_0)$ jako uogólnienie funkcji otrzymujemy z funkcji (a) przy $N \rightarrow \infty$.

I mimo, że szereg (i) jest rozbieżny, a $\delta(\xi - \xi_0)$ nie spełnia założeń Tw. II Dirichleta, rozwinięcie (i) ma sens w rozumieniu uogólnionym.

3S. Rozwinięcie w szereg sinusowy Fouriera

Niech $V([0, l]; \mathcal{R})$ będzie przestrzenią funkcji $g : [0, l] \rightarrow \mathcal{R}$, spełniających warunki 1), 2) z p.

3.1, tzw. Warunki Dirichleta II:

Funkcję g z przestrzeni $V([0, l]; \mathcal{R})$ rozszerzamy nieparzyście (antysymetrycznie) na przedział $[-l, 0)$ i przeskalowujemy do przedziału $[-\pi, \pi]$, a następnie rozszerzamy okresowo na cały zbiór \mathcal{R} w następujący sposób:

$$a) \quad \tilde{f}_a(x) = \begin{cases} g(\xi) \Big|_{\xi=\frac{l-x}{\pi}}, & x \in (0, \pi] \\ 0, & x = 0 \\ -g(-\xi) \Big|_{\xi=\frac{l-x}{\pi}}, & x \in [-\pi, 0) \end{cases},$$

$$b) \quad f(x) = \tilde{f}(x - 2k\pi), \quad x \in [-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Wniosek. Jeżeli funkcja g spełnia warunki 1) ÷ 2) z p. 3.1 (W.D.II) to funkcja f spełnia warunki 1) ÷ 3) z rozdz. 2 (W.D.I), a ponadto zgodnie z (2) z rozdz. 1 jest:

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$s_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

gdyż jeśli $f(x)$ jest funkcją nieparzystą w przedziale $(-\pi, \pi)$, to $f(x) \sin nx$ jest funkcją parzystą, a $f(x) \cos nx$ funkcją nieparzystą w tym przedziale.

W efekcie, na mocy Tw. I Dirichleta (po uwzględnieniu zależności pomiędzy x i ξ oraz g , \tilde{f} i f), dochodzimy do twierdzenia:

Twierdzenie IIS (Dirichleta). Jeżeli funkcja $g : [0, l] \rightarrow \mathcal{R}$ spełnia warunki 1) i 2) z p. 3.1 (W.D.II), to następujący szereg Fouriera funkcji g jest zbieżny punktowo (do podanych wartości):

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin \frac{\pi n}{l} \xi = \begin{cases} \frac{1}{2} [g(\xi^+) + g(\xi^-)], & \xi \in (0, l) \\ 0, & \xi = 0, \xi = l \end{cases}, \quad (1a)$$

gdzie

$$s_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2a)$$

Ponadto, jeśli funkcja g jest ciągła na przedziale $(0, l)$, to szereg (1a) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g na dowolnym przedziale $[c, d] \subset (0, l)$. Natomiast, gdy funkcja g jest ciągła na przedziale $[0, l]$ i $g(a) = g(b) = 0$, to szereg (1a) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g na tym przedziale.

Uwaga. W przestrzeni unitarnej $L^2([0, l]; \mathcal{R})$ układ funkcji:

$$U_s([0, l]) = \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x \right) \quad (3a)$$

bazą hilbertowską. Natomiast zbiór $V([0, l]; \mathcal{R})$ funkcji spełniających Warunki Dirichleta II jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $L^2([0, l]; \mathcal{R})$.

Przykład 1. Niech $g(\xi) = 1, \xi \in [0, l]$. Na mocy (2a) jest:

$$s_n = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \pi n \frac{\xi}{l} d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] = \frac{4}{\pi} \begin{cases} \frac{1}{2k-1}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

($k = 1, 2, \dots$),

a zatem, zgodnie z (1a), rozwinięcie „jedności” w szereg sinusowy Fouriera na przedziale $[0, l]$ przedstawia się następująco:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \pi n \frac{\xi}{l} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \pi (2k-1) \frac{\xi}{l} = \begin{cases} 1, & \xi \in (0, l) \\ 0, & \xi = 0, l \end{cases}.$$

Przykład 2. Niech $g(\xi) = p_1, \xi \in (0, l_0), g(\xi) = p_2, \xi \in (l_0, l)$ (np. funkcja obciążenia zewnętrznego o odcinkowo stałej gęstości). Na mocy (2a) mamy:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \sin \pi n \frac{\xi}{l} d\xi = \frac{2}{l} p_1 \int_0^{l_0} \sin \pi n \frac{\xi}{l} d\xi + \frac{2}{l} p_2 \int_{l_0}^l \sin \pi n \frac{\xi}{l} d\xi = \\ &= \frac{2}{\pi n} \left[p_1 \left(1 - \cos n\pi \frac{l_0}{l} \right) + p_2 \left(\cos n\pi \frac{l_0}{l} - (-1)^n \right) \right], \end{aligned}$$

a zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \left[p_1 \left(1 - \cos n\pi \frac{l_0}{l} \right) + p_2 \left(\cos n\pi \frac{l_0}{l} - (-1)^n \right) \right] \sin \pi n \frac{\xi}{l} = \begin{cases} 0, & \xi = 0 \\ p_1, & \xi \in (0, l_0) \\ \frac{1}{2}(p_1 + p_2), & \xi = l_0 \\ p_2, & \xi \in (l_0, l) \\ 0, & \xi = l \end{cases}.$$

3C. Rozwinięcie w szereg kosinusowy Fouriera

Niech $V([0, l]; \mathcal{R})$ będzie przestrzenią funkcji $g : [0, l] \rightarrow \mathcal{R}$, spełniających warunki 1), 2) z p. 3.1 (tzw. Warunki Dirichleta II – W.D.II); por. p. 3.2.

Funkcję g z przestrzeni $V([0, l]; \mathcal{R})$ rozszerzamy parzyście (symetrycznie) na przedział $[-l, 0]$ i przeskalowujemy do przedziału $[-\pi, \pi]$, a następnie rozszerzamy okresowo na cały zbiór \mathcal{R} w następujący sposób :

$$a) \quad \tilde{f}_s(x) = \begin{cases} g(\xi) \Big|_{\xi=\frac{l}{\pi}x}, & x \in [0, \pi] \\ g(-\xi) \Big|_{\xi=\frac{l}{\pi}x}, & x \in [-\pi, 0) \end{cases},$$

$$b) \quad f(x) = \tilde{f}(x - 2k\pi), \quad x \in [-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Wniosek. Jeżeli funkcja g spełnia warunki 1) ÷ 2) z p. 3.1 (W.D.II) to funkcja f spełnia warunki 1) ÷ 3) z rozdz. 2 (W.D.I), a ponadto zgodnie z (2) z rozdz. 1 jest:

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$s_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

gdyż jeśli $f(x)$ jest funkcją parzystą w przedziale $(-\pi, \pi)$, to $f(x) \sin nx$ jest funkcją nieparzystą, a $f(x) \cos nx$ funkcją parzystą w tym przedziale.

W efekcie, na mocy Tw. I Dirichleta (po uwzględnieniu zależności pomiędzy x i ξ oraz g , \tilde{f} i f), dochodzimy do twierdzenia:

Twierdzenie IIC (Dirichleta). Jeżeli funkcja $g : [0, l] \rightarrow \mathcal{R}$ spełnia warunki 1) ÷ 2) z p. 3.1 (W.D.II), to następujący szereg Fouriera funkcji g jest zbieżny punktowo (do podanych wartości):

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{\pi n}{l} \xi = \begin{cases} \frac{1}{2} [g(\xi^+) + g(\xi^-)], & \xi \in (0, l) \\ g(0^+), & \xi = 0, \\ g(l^-), & \xi = l \end{cases}, \quad (1b)$$

gdzie

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2b)$$

Ponadto, jeśli funkcja g jest ciągła na przedziale $[0, l]$, to szereg (1b) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g na tym przedziale.

Uwaga. W przestrzeni unitarnej $L^2([0, l]; \mathcal{R})$ układ funkcji:

$$U_c([0, l]) = \left(\frac{1}{\sqrt{2l}}, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi n}{l} x \right) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3b)$$

jest bazą hilbertowską. Natomiast zbiór $V([0, l]; \mathcal{R})$ funkcji spełniających Warunki Dirichleta II jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $L^2([0, l]; \mathcal{R})$.

Przykład 1. Niech $g(\xi) = p \frac{\xi}{l} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)$, $\xi \in [0, l]$ (np. funkcja obciążenia rozłożonego parabolicznie). Na mocy (2b) jest:

$$c_0 = \frac{1}{3} p, \quad c_n = \frac{2p}{(\pi n)^2} [1 + (-1)^n] \quad (n = 1, 2, \dots),$$

a zatem, zgodnie z (1b), rozwinięcie funkcji g w szereg kosinusowy Fouriera na przedziale $[0, l]$ przedstawia się następująco:

$$\frac{1}{3} p + \frac{4}{\pi^2} p \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \pi n \frac{\xi}{l} = p \frac{\xi}{l} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right),$$

ze zbieżnością jednostajną w przedziale $[0, l]$.

4. Przypadek funkcji dwu i więcej zmiennych na iloczyne kartezyjskim przedziałów liczbowych

Przypadek podstawowy, opisany w rozdz. 2, oraz przypadki „pochodne”, przedstawione w p. 3.1–3.3, przestrzeni funkcyjnych i ich baz hilbertowskich (układów ortogonalnych) mogą posłużyć do konstrukcji przestrzeni funkcyjnych, baz hilbertowskich (układów ortogonalnych) oraz rozwinięć w szeregi Fouriera (wraz z odpowiednimi twierdzeniami typu Dirichleta o zbieżności tych szeregów) dla funkcji dwu i więcej zmiennych rzeczywistych.

Tytułem ilustracji przedstawimy przypadek następujący.

! Niech $L^2([0, a] \times [0, b]; \mathcal{R}) = \left\{ f : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathcal{R}; \int_0^a \int_0^b |f(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta < \infty \right\}$ będzie przestrzenią liniową unitarną z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle = \int_0^a \int_0^b f(\xi, \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta < \infty. \quad (1)$$

!! Można wykazać, że w przestrzeni tej układ funkcji

$$U_{\text{sys}}([0, a] \times [0, b]) = \left(\frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \pi n \frac{\xi}{a} \sin \pi m \frac{\eta}{b} \right)_{n,m}^{\text{ozn}} = \left(\frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \pi \frac{\xi}{a} \sin \pi \frac{\eta}{b}, \right. \\ \left. \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin 2\pi \frac{\xi}{a} \sin \pi \frac{\eta}{b}, \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \pi \frac{\xi}{a} \sin 2\pi \frac{\eta}{b}, \dots \right) \quad (2) \\ (n, m = 1, 2, 3, \dots)$$

jest ortonormalny oraz jest zupełny i zamknięty i w konsekwencji jest bazą hilbertowską w przestrzeni $L^2([0, a] \times [0, b]; \mathcal{R})$. Zatem, jeśli $g \in L^2([0, a] \times [0, b]; \mathcal{R})$, to

$$g(\xi, \eta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} ss_{n,m} \sin \pi n \frac{\xi}{a} \sin \pi m \frac{\eta}{b} \quad (3)$$

(zbieżność średniokwadratowa – w normie generowanej przez iloczyn skalarny (1)), gdzie

$$ss_{n,m} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b g(\xi, \eta) \sin \pi n \frac{\xi}{a} \sin \pi m \frac{\eta}{b} d\xi d\eta \quad (4)$$

oraz

$$\left(\frac{ab}{4} \right)^2 \sum_{n,m=1}^{\infty} ss_{m,n}^2 = \int_0^a \int_0^b |g(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta.$$

Można wykazać następujący wariant twierdzenia Dirichleta:

Twierdzenie III. Jeżeli funkcja $g : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathcal{R}$ spełnia warunki:

⁴⁾ zbieżność szeregu podwójnego $\sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{n,m}$ jest absolutna, tzn. nie zależy od kolejności sumowania,

$$\text{a w szczególności } \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{n,m} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,m} \right)$$

1) funkcja $g_\xi(\eta)$ jest przedziałami monotoniczna na przedziale $[0, b]$ dla każdego $\xi \in [0, a]$ ($g_\xi(\eta) = g(\xi, \eta)$);

2) funkcja $g_\eta(\xi)$ jest przedziałami monotoniczna na przedziale $[0, a]$ dla każdego $\eta \in [0, b]$ ($g_\eta(\xi) = g(\xi, \eta)$);

3) funkcja g jest podobszarami ciągła na prostokącie $(0, a) \times (0, b)$ z nieciągłościami co najwyżej pierwszego rodzaju (skokami wartości) wzdłuż krzywych brzegowych tych podobszarów, przy przejściu z jednego podobszaru do drugiego,

to szereg Fouriera (3) jest zbieżny punktowo dla każdych $(\xi, \eta) \in (0, a) \times (0, b)$, a ponadto szereg Fouriera (3) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g na każdym podobszarze domkniętym zawartym w podobszarze ciągłości tej funkcji, czyli

$$g(\xi, \eta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} ss_{n,m} \sin \pi n \frac{\xi}{a} \sin \pi m \frac{\eta}{b}. \quad (5)$$

Ponadto, jeżeli

4) funkcja g jest ciągła na $[0, a] \times [0, b]$;

5) $g(0, \eta) = g(a, \eta) = g(\xi, 0) = g(\xi, b) = 0$ ($\xi \in [0, a], \eta \in [0, b]$),

to zbieżność szeregu (5) do funkcji g jest jednostajna na $[0, a] \times [0, b]$.

Przykład 1. Niech $g(\xi, \eta) = 1$ dla $(\xi, \eta) \in [0, a] \times [0, b]$. Funkcja ta spełnia warunki 1) ÷ 3), a nawet warunek 4) z Tw. III, ale nie spełnia warunku 5). Zatem zgodnie z (4) jest:

$$\begin{aligned} ss_{n,m} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \pi n \frac{\xi}{a} \sin \pi m \frac{\eta}{b} d\xi d\eta = \\ &= \frac{4}{ab} \int_0^a \sin \pi n \frac{\xi}{a} d\xi \int_0^b \sin \pi m \frac{\eta}{b} d\eta = \\ &= \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{nm}, \quad n, m = 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

(por. P.1 z p. 3.2), a więc

$$\frac{16}{\pi^2} \sum_{n,m=1,3,5,\dots} \frac{1}{nm} \sin \pi n \frac{\xi}{a} \sin \pi m \frac{\eta}{b} = \begin{cases} 1, & \xi \in (0, a), \eta \in (0, b) \\ 0, & \xi = 0, a; \eta = 0, b \end{cases}.$$

Przykład 2. Niech $g(\xi, \eta) = p \frac{\xi}{a} \frac{\eta}{b} \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) \left(1 - \frac{\eta}{b}\right)$ dla $(\xi, \eta) \in [0, a] \times [0, b]$. Ponieważ

funkcja g spełnia warunki 1) ÷ 5) Tw. III, to na całym prostokącie $[0, a] \times [0, b]$ mamy zbieżność jednostajną szeregu Fouriera (5) tej funkcji ze współczynnikami (4):

$$\begin{aligned} ss_{n,m} &= \frac{4p}{ab} \int_0^a \int_0^b \frac{\xi}{a} \frac{\eta}{b} \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) \left(1 - \frac{\eta}{b}\right) \sin \pi n \frac{\xi}{a} \sin \pi m \frac{\eta}{b} d\xi d\eta = \\ &= 4p \left(\int_0^1 x(1-x) \sin \pi n x dx \right) \left(\int_0^1 y(1-y) \sin \pi m y dy \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{4p}{\pi^6} \begin{cases} \frac{1}{n^3 m^3}, & n, m = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n, m = 2, 4, 6, \dots \end{cases} .$$

MMIL II

Część druga. RÓWNANIA

W zjawiskach fizycznych i w działalności technicznej – tam gdzie stosuje się różne modele i teorie wykorzystujące w sposób istotny metody i narzędzia matematyczne – określone pojęcia wyrażane przez wielkości matematyczne związane są relacjami, które najczęściej mają postać równań.

W równaniach tych pewne wielkości są dane (uważane za znane), a pewne za nieznanne (uważane za niewiadome), które usiłujemy wyznaczyć, a co jest jednym z ważniejszych atrybutów działalności inżynierskiej, zwłaszcza o charakterze badawczym. Z tym jednak wiąże się kilka ważnych zagadnień:

- 1) Jakimi wielkościami matematycznymi należy wyrazić poszukiwane wielkości fizyczne lub techniczne czy inne (np. ekonomiczne) i jaka jest prawidłowa postać równania wiążącego te wielkości matematyczne.
- 2) Jak prawidłowo sformułować problem do rozwiązania, czyli które wielkości są znane a które niewiadome oraz jakie warunki na nie można lub należy nałożyć, by rozwiązanie istniało i było jednoznaczne, a także jak jest ono zależne od wielkości danych
- 3) W jaki sposób (jaką metodą, jakim algorytmem) można otrzymać rozwiązanie postawionego (prawidłowo) problemu – w pierwszym rzędzie rozwiązanie ścisłe, czyli dokładne, jeśli sposób taki istnieje, a jeśli nie, to rozwiązanie przybliżone oraz jak je uzyskać i na ile przybliża rozwiązanie dokładne.

W zależności od operacji, jakim niewiadome wielkości są poddawane w sformułowanych równaniach problemu do rozwiązania, mogą to być równania algebraiczne, różniczkowe, całkowite i in. Przy tym, poza (częściowo) równaniami algebraicznymi, w których wielkości niewiadome są sekwencjami liczbowymi, mamy do rozwiązania równania funkcyjne, w których niewiadome są funkcjami – zwykle polami na zbiorach w przestrzeni afinicznej lub ich reprezentacjami analitycznymi w postaci funkcji rzeczywistych zmiennych rzeczywistych.

I chociaż równania algebraiczne wydają się relatywnie prostsze (a głównie chodzi tu o równania algebraiczne liniowe z niewiadomymi sekwencjami liczb), to jednak równania różniczkowe są w sformułowanych problemach najbardziej powszechne (choć potem w procesie ich rozwiązywania sprowadzane są zwykle do równań algebraicznych liniowych). Z natury rzeczy bowiem, przy modelowaniu zjawisk i procesów relatywnie najłatwiej prognozuje się infinitesimalne przyrosty stanów modelowanych układów lub stany ich elementarnych podzbiorów relacjami różniczkowymi.

Zasadniczy tok rozważań poprzedzimy zatem prezentacją przestrzeni funkcyjnych, w których budowane są równania różniczkowe oraz operatorów różniczkowych liniowych działających na funkcje występujące w tych równaniach. Następnie zdefiniujemy ogólne postacie omawianych równań według standardowej klasyfikacji wraz z przyjętą terminologią i dodatkowymi warunkami, czyli tzw. zagadnienia graniczne w sformułowaniach klasycznych i dalej w sformułowaniach nieklasycznych, które zilustrujemy przykładami rozwiązań. W końcowym rozdziale przedstawimy pewną „mapę” metod rozwiązywania zagadnień granicznych – ścisłych, formalnie ścisłych i przybliżonych wraz z próbą metod oceny stopnia przybliżenia rozwiązań dokładnych (lub umownie dokładnych).

1. Wiadomości wstępne

- 1.1. Przestrzenie liniowe funkcji regularnych
- 1.2. Przestrzeń dystrybucji
- 1.3. Liniowe operatory różniczkowe
- 1.4. Liniowe operatory różniczkowe cząstkowe
- 1.5. Liniowe operatory całkowe

1. WIADOMOŚCI WSTĘPNE

Składniki równań różniczkowych, w zależności od ich sformułowań, wymagań i wielu jeszcze innych uwarunkowań są elementami różnych przestrzeni funkcyjnych i związane rozmaitymi operatorami, zwłaszcza różniczkowymi, co do których będziemy stosować jednolite standaryzowane określenia i oznaczenia. Z tego względu warto je na początku wyartykułować, choć to może wydawać się nieco nużące, by potem nie przerywać uwagi zwróconej na treści główne.

1.1. Przestrzenie liniowe funkcji regularnych

Funkcja „regularna” (inaczej również „gładka”), to funkcja „dostatecznie ciągła”. Co to oznacza, przedstawimy w tym podrozdziale.

Niech Ω dowolny zbiór, a \vec{W} przestrzeń liniowa (wektorowa). Zbiór funkcji (odwzorowań)

$$F(\Omega, \vec{W}) = \{ \vec{x} = \vec{f}(\xi), \xi \in \Omega \},$$

wraz z działaniami

$$(\vec{f} + \vec{g})(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{f}(\xi) + \vec{g}(\xi), \quad \xi \in \Omega,$$

$$(\alpha \vec{f})(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \vec{f}(\xi), \quad \xi \in \Omega$$

dla dowolnych $\vec{x} = \vec{f}(\xi)$, $\vec{y} = \vec{g}(\xi)$ ($\xi \in \Omega$) i $\alpha \in \mathcal{R}$, tworzy przestrzeń wektorową, zwaną dalej przestrzenią funkcyjną „wyjściową”.

W zastosowaniach inżynierskich najczęściej przyjmuje się, że Ω jest podzbiorem przestrzeni afinicznej \mathbf{A} , zwykle skończenie wymiarowej – podzbiorem dyskretnym (zbiorem punktów izolowanych) lub rozmaitością (krzywą, powierzchnią lub obszarem) – natomiast \vec{W} jest przestrzenią wektorową \vec{V} stowarzyszoną z \mathbf{A} lub przestrzenią (podprzestrzenią liniową przestrzeni) odwzorowań liniowych bądź wieloliniowych na \vec{V} lub na jej przestrzeni dualnej \vec{V}^* o wartościach w \mathcal{R} lub \vec{V} .

W sytuacjach praktycznych, kiedy dochodzi do obliczeń, konieczne jest operowanie reprezentacjami arytmetycznymi (numerycznymi) rozważanych wielkości czy obiektów matematycznych w ustalonym układzie odniesienia, ustalonej bazie lub parametryzacji, a więc używamy zbiorów liczbowych (liczb rzeczywistych).

Niech zatem \mathcal{R}^n oznacza n -wymiarową przestrzeń euklidesową (afiniczną) ciągów

$x = (x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{ozn.}}{=} (x_i)$ z działaniami dodawania $x' + x'' = (x'_i + x''_i)$ dla $x' = (x'_i)$, $x'' = (x''_i)$

i mnożenia przez liczbę $\alpha x = (\alpha x_i)$ dla $x = (x_i)$, $\alpha \in \mathcal{R}$, z iloczynem skalarnym

(euklidesowym) $x' \cdot x'' = x'_i x''_i$, normą $|x| = \sqrt{x_i x_i}$ i odległością

$d(x', x'') = \overline{x' x''} = \sqrt{(x''_i - x'_i)(x''_i - x'_i)}$ przy $\overline{x' x''} = (x''_i - x'_i)$ (przy zastosowaniu konwencji sumacyjnej względem wskaźnika i).

Natomiast przez \mathcal{R}^m rozumiemy przestrzeń euklidesową (wektorową) m -wymiarową ciągów $y = (y_1, \dots, y_m)$ ^{ozn.} $= (y_j)$ z analogicznymi działaniami: dodawania $y' + y'' = (y'_j + y''_j)$ dla $y' = (y'_j)$, $y'' = (y''_j)$, mnożenia przez liczbę $\beta y = (\beta y_j)$ dla $y = (y_j)$, $\beta \in \mathcal{R}$ z iloczynem skalarnym (euklidesowym) $y' \cdot y'' = y'_j y''_j$ i normą $|x| = \sqrt{x_j x_j}$, generująca metrykę $d(y', y'') = |y'' - y'| = \sqrt{(y''_j - y'_j)(y''_j - y'_j)}$ (nie ma potrzeby nadawania tej przestrzeni struktury przestrzeni afinicznej, przeciwnie niż w przypadku \mathcal{R}^n).

Niech X będzie ustalonym podzbiorem przestrzeni \mathcal{R}^n . Podstawowe znaczenie będzie dla nas mieć przestrzeń odwzorowań (funkcji) $y(\cdot) : X \rightarrow \mathcal{R}^m$ oznaczana przez $V_{n,m}(X)$, zwana przestrzenią podstawową ($V_{n,m}(X) = F(\Omega; \overline{W})$ przy $\Omega = X \subset \mathcal{R}^n$ i $\overline{W} = \mathcal{R}^m$). Odwzorowania $y(\cdot)$ są równoważne, w „języku tradycyjnym”, układowi m funkcji rzeczywistych n zmiennych rzeczywistych: $y_j = y_j(x_1, \dots, x_n) = y_j(x_i)$, $(x_i) \in X \subset \mathcal{R}^n$, $(j = 1, \dots, m)$. W przypadku $m=1$ mamy funkcje (pojedyncze) rzeczywiste n zmiennych rzeczywistych $y = y(x_1, \dots, x_n) = y(x_i)$, $(x_i) \in X \subset \mathcal{R}^n$ (przy $(y_1) = y$) i stosujemy uproszczone oznaczenie $V_{n,1}(X) = V_n(X)$. W przypadku $n = 1$ mamy układ m funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej: $y_j = y_j(x)$, $x \in X \subset \mathcal{R}$ ($j = 1, \dots, m$) przy $(x_1) = x$. Natomiast dla $m = n = 1$ zapis $y = y(x)$, $x \in X \subset \mathcal{R}$ oznacza „zwykłą” funkcję rzeczywistą zmiennej rzeczywistej, a przestrzeń tych funkcji oznaczamy po prostu przez $V(X)$.

Jeżeli dziedzina X jest całą przestrzenią ($X = \mathcal{R}^n$), to stosować będziemy odpowiednio uproszczone oznaczenia na podstawowe przestrzenie funkcyjne: $V_{n,m}(X) = V_{n,m}$ ^{ozn} dla $m > 1$ oraz $V_n(X) = V_n$ ^{ozn} dla $m = 1$ i V dla $m = n = 1$.

Dalej interesować nas będą przede wszystkim określone podprzestrzenie liniowe przestrzeni $V_{n,m}(X)$ – tzw. przestrzenie odwzorowań (funkcji) regularnych lub inaczej gładkich, czyli odwzorowań (funkcji) ciągłych, różniczkowalnych i całkowalnych. Liniowość tych przestrzeni wynika z kryterium podprzestrzeni, na mocy własności liniowości cech definicyjnych tych przestrzeni.

Przez $C_{n,m}(X)$ rozumiemy przestrzeń tych odwzorowań (funkcji) z $V_{n,m}(X)$, które są ciągłe (punktowo) na X . Przy $m = 1$ stosujemy oznaczenie $C_n(X)$, a jeśli ponadto $n = 1$, to oznaczenie $C(X)$ (w przypadku gdy $X = \mathcal{R}^n$ – odpowiednio oznaczenia uproszczone $C_{n,m}$, C_n i C).

Mówimy także, że odwzorowanie (funkcja) jest klasy C , gdy jest ciągle (ciągła) na swoim zbiorze określoności, czyli po prostu jego (jej) dziedzinie.

Niech teraz $X = \mathcal{U}$ będzie zbiorem otwartym przestrzeni \mathcal{R}^n (np. obszarem; dla $n = 1$ uważa się, że \mathcal{U} jest otwartym przedziałem liczbowym). Przez $C_{n,m}^k(\mathcal{U})$ przy $k \in \mathcal{N}$ ($C_n^k(\mathcal{U})$ dla $m = 1$, $C^k(\mathcal{U})$ dla $m = n = 1$) rozumiemy odwzorowania (funkcje) z przestrzeni $V_{n,m}(\mathcal{U})$ (odpowiednio z $V_n(\mathcal{U})$ dla $m = 1$ i z $V(\mathcal{U})$ dla $m = n = 1$), które są k -krotnie różniczkowalne na \mathcal{U} a pochodne są na zbiorze \mathcal{U} ciągłe; mówimy także, że odwzorowania (funkcje) te są klasy C^k . Oczywiście są przy tym inkluzje $C_{n,m}^k(\mathcal{U}) \subset C_{n,m}(\mathcal{U})$ (odpowiednio $C_n^k(\mathcal{U}) \subset C_n(\mathcal{U})$, $C^k(\mathcal{U}) \subset C(\mathcal{U})$). Stąd, przypadek $k = 0$ oznacza poprzednie przestrzenie odwzorowań (funkcji) ciągłych. Natomiast przez $C_{n,m}^\infty(\mathcal{U})$ ($C_n^\infty(\mathcal{U})$, $C^\infty(\mathcal{U})$) rozumiemy przestrzeń, która jest $C_{n,m}^r(\mathcal{U})$ ($C_n^r(\mathcal{U})$, $C^r(\mathcal{U})$) dla każdego $r \in \mathcal{N}$. Jeśli $\mathcal{U} = \mathcal{R}^n$, to możemy stosować uproszczone oznaczenie $C_{n,m}^k$ (C_n^k , C^k), również dla $k = 0$ i $k = \infty$.

W literaturze spotyka się też przestrzenie odwzorowań (funkcji) „lipszycowalnych”, tj. odwzorowań (funkcji) z przestrzeni $V_{n,m}(\mathcal{U})$ (odpowiednio $V_n(\mathcal{U})$, $V(\mathcal{U})$, $V_{n,m}$, ...) spełniających warunek Lipschitza:

$$\forall x \in \mathcal{U} \exists L_x > 0 \exists \mathcal{U}_x \subset \mathcal{U} \forall \xi \in \mathcal{U}_x |y(\xi) - y(x)| \leq L_x |\xi - x|,$$

plasujących je „pomiędzy” funkcjami ciągłymi i różniczkowalnymi (każda funkcja różniczkowalna jest „lipszycowalna”, a każda taka jest ciągła), a w związku z tym przestrzenie te możemy oznaczać symbolami $C_{n,m}^{1/2}(\mathcal{U})$ (odpowiednio $C_n^{1/2}(\mathcal{U})$, $C^{1/2}(\mathcal{U})$, $C_{n,m}^{1/2}$, ...), gdyż prawdziwe są inkluzje $C_{n,m}^0(\mathcal{U}) \subset C_{n,m}^{1/2}(\mathcal{U}) \subset C_{n,m}^1(\mathcal{U})$ ($C_n^0(\mathcal{U}) \subset C_n^{1/2}(\mathcal{U}) \subset C_n^1(\mathcal{U})$, $C^0(\mathcal{U}) \subset C^{1/2}(\mathcal{U}) \subset C^1(\mathcal{U})$, $C_{n,m}^0 \subset C_{n,m}^{1/2} \subset C_{n,m}^1$, ...).

Przestrzenie te są, na mocy kryterium podprzestrzeni, liniowe. Warto jeszcze dodać, że odwzorowanie (funkcja) jest jednostajnie „lipszycowalne(a)”, jeżeli

$$\exists L > 0 \forall x \in \mathcal{U} \exists \mathcal{U}_x \subset \mathcal{U} \forall \xi \in \mathcal{U}_x |y(\xi) - y(x)| \leq L |\xi - x|,$$

a więc np. gdy istnieje $L = \inf L_x > 0$, $x \in \mathcal{U}$ z warunku „zwykłej lipszycowalności”. Wtedy odwzorowanie (funkcja) jest jednostajnie ciągłe (ciągła).

Przez $\overset{\circ}{C}_{n,m}^k(\mathcal{U})$ (odpowiednio $\overset{\circ}{C}_n^k(\mathcal{U})$, $\overset{\circ}{C}^k(\mathcal{U})$, $\overset{\circ}{C}_{n,m}^k$, ...), również dla $k = 0$ i $k = \infty$, rozumiemy zbiór (podprzestrzeń liniową) tych odwzorowań (funkcji) z $C_{n,m}^k(\mathcal{U})$

(odpowiednio $C_n^k(\mathcal{U})$, $C^k(\mathcal{U})$, $C_{n,m}^k, \dots$), których nośniki są ograniczone i zawierają się w ich dziedzinach. Mówimy, że są to przestrzenie odwzorowań (funkcji) o nośnikach zwartych.

Przez nośnik odwzorowania (funkcji) rozumiemy zaś:

$$\text{supp } y(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \text{clos}\{x \in \mathcal{U} : y(x) \neq 0\}.$$

Zatem ograniczony i z definicji domknięty nośnik w przestrzeni euklidesowej jest zwarty i taki jest też nośnik sumy (funkcji) dwóch odwzorowań oraz iloczynu odwzorowania (funkcji) przez liczbę rzeczywistą, co uzasadnia nazwę i liniowość zdefiniowanych wyżej przestrzeni.

Niech \mathcal{V} obszar w przestrzeni \mathcal{R}^n taki, że brzeg $\partial\mathcal{V} \neq \emptyset$ i niech $S \subseteq \mathcal{V}$ będzie hiperpowierzchnią, czyli rozmaitością $n-1$ wymiarową. Niech $\nu = \nu(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in S$, będzie polem wersorów normalnych zewnętrznych do $\partial\mathcal{V}$. Załóżmy, że odwzorowanie $y(\cdot)$ z przestrzeni $V_{n,m}(\mathcal{V} \cup S)$ jest klasy C^k na obszarze \mathcal{V} , tzn. $y(\cdot)|_{\mathcal{V}} \in C_{n,m}^k(\mathcal{V})$ i załóżmy, że istnieją pochodne kierunkowe $\partial_{\nu}^r y(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in S$ dla $r = 0, 1, \dots, l$ ($l \leq k$) ($r = 0$ oznacza $y(\cdot)|_S$) i pochodne te są na S ciągłe. Przestrzeń takich funkcji oznaczamy przez $C_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S)$. Na mocy kryterium podprzestrzeni liniowej jest to też przestrzeń liniowa. Jeżeli $y(\cdot) \in V_{n,m}(\mathcal{V} \cup S)$ i $y(\cdot)|_{\mathcal{V}} \in C_{n,m}^k(\mathcal{V})$ oraz istnieją ciągłe na S granice pochodnych cząstkowych odwzorowania $y = y(x)$, $x \in \mathcal{V}$ do rzędu l ($l \leq k$) przy $x \rightarrow \tilde{x} \in S$, to $y(\cdot) \in C_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S)$, gdyż

$$\partial_{\nu}^r y(\tilde{x}) = \left(\sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \left[\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} y_{j, i_1 \dots i_r}(x) \right] \nu_{i_1}(\tilde{x}) \dots \nu_{i_r}(\tilde{x}) \right), \quad \tilde{x} \in S,$$

przy $x = (x_i)$, $\nu = (\nu_i)$, $y = (y_j)$. Jeśli $n = 1$, a więc $\mathcal{V} = (a, b)$, to $S = \{a\}$ lub $S = \{b\}$ i wtedy

$$\partial_{\nu}^r y(a) = ((-1)^r y_j^{(r)}(a^+)), \quad \partial_{\nu}^r y(b) = (y_j^{(r)}(b^-)), \quad r = 0, 1, \dots, l.$$

Zauważmy jeszcze, że $C_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S)$ można interpretować jako przecięcie przestrzeni

$C_{n,m}^k(\mathcal{V})$ i $C_{n,m}^l(\mathcal{V} \cup S)$, co można zapisać następująco

$$C_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S) = C_{n,m}^k(\mathcal{V}) \cap C_{n,m}^l(\mathcal{V} \cup S) \quad (l \leq k).$$

W przypadku, gdy $S = \partial\mathcal{V}$, to

$$C_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup \partial\mathcal{V}) \stackrel{\text{ozn}}{=} C_{n,m}^{k,l}(\bar{\mathcal{V}}) = C_{n,m}^k(\mathcal{V}) \cap C_{n,m}^l(\bar{\mathcal{V}}) \quad (\bar{\mathcal{V}} = \text{clos } \mathcal{V}; l \leq k).$$

Przestrzenie $C_{n,m}^k(\mathcal{V})$ i $C_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S)$ (\mathcal{V} – obszar, $S \subseteq \partial\mathcal{V} \neq \emptyset$ – (hiper)powierzchnia lub krzywa, gdy $n = 2$) można unormować. Ścisłej w podprzestrzeniach liniowych

$$D_{n,m}^k(\mathcal{V}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ y(\cdot) \in C_{n,m}^k(\mathcal{V}); \sum_{j=1}^m \left(\sup_{x \in \mathcal{V}} |y_j(x)| + \sum_{r=1}^k \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \sup_{x \in \mathcal{V}} |y_{j,i_1 \dots i_r}(x)| \right) < \infty \right\},$$

$$D_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ y(\cdot) \in C_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S); \sum_{j=1}^m \left(\sup_{x \in \mathcal{V}} |y_j(x)| + \sum_{r=1}^k \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \sup_{x \in \mathcal{V}} |y_{j,i_1 \dots i_r}(x)| \right) + \sum_{j=1}^m \left(\sup_{\tilde{x} \in S} |y_j(\tilde{x})| + \sum_{s=1}^l \sup_{\tilde{x} \in S} |\partial_{\nu}^s y_j(\tilde{x})| \right) < \infty \right\}$$

definiujemy normy, tzw. normy jednostajne (Czebyszewa) rzędu k' oraz rzędu (k', l') :

$$\|y(\cdot)\|_{k'} = \sum_{j=1}^m \left(\sup_{x \in \mathcal{V}} |y_j(x)| + \sum_{r=1}^{k'} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \sup_{x \in \mathcal{V}} |y_{j,i_1 \dots i_r}(x)| \right) \quad (1 \leq k' \leq k),$$

$$\|y(\cdot)\|_{k',l'} = \sum_{j=1}^m \left(\sup_{x \in \mathcal{V}} |y_j(x)| + \sum_{r=1}^{k'} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \sup_{x \in \mathcal{V}} |y_{j,i_1 \dots i_r}(x)| \right) + \sum_{j=1}^m \left(\sup_{\tilde{x} \in S} |y_j(\tilde{x})| + \sum_{s=1}^{l'} \sup_{\tilde{x} \in S} |\partial_{\nu}^s y_j(\tilde{x})| \right) \quad (1 \leq l' \leq l \leq k \geq k' \geq 1).$$

Najczęściej jednak stosowane są normy jednostajne (Czebyszewa) rzędu zerowego – również przy $k = 0$ i $l = 0$:

$$\|y(\cdot)\| = \sum_{j=1}^m \sup_{x \in \mathcal{V}} |y_j(x)|, \quad \|y(\cdot)\| = \sum_{j=1}^m (\sup_{x \in \mathcal{V}} |y_j(x)| + \sup_{\tilde{x} \in S} |y_j(\tilde{x})|).$$

Przestrzenie $D_{n,m}^k(\mathcal{V})$ i $D_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S)$ grają ważną rolę w analizie numerycznej (działe analizy matematycznej).

Innego typu odwzorowaniami (funkcjami) regularnymi są odwzorowania (funkcje) całkowne.

Niech $\mathcal{X} = \mathcal{M}$ będzie zbiorem μ -mierzalnym w przestrzeni \mathcal{R}^n a $I_{n,m;\mu}(\mathcal{M})$ niech będzie zbiorem tych odwzorowań (funkcji) $y(\cdot)$ z przestrzeni podstawowej $V_{n,m}(\mathcal{M})$, które są μ -całkowne na \mathcal{M} . Na mocy kryterium podprzestrzeni i własności liniowości całki jest przestrzeń liniowa (odwzorowań / funkcji μ -całkownych). Oczywiście w przypadku tej przestrzeni stosujemy uproszczone oznaczenia: $I_{n;\mu}(\mathcal{M})$ (gdy $m = 1$), $I_{\mu}(\mathcal{M})$ (gdy $m = n = 1$).

Szczególne znaczenie ma przestrzeń unormowana (podprzestrzeń liniowa przestrzeni $I_{n,m;\mu}(\mathcal{M})$)

$$L_{n,m;\mu}^p(\mathcal{M}) = \left\{ y(\cdot) \in I_{n,m;\mu}(\mathcal{M}); \int_{\mathcal{M}} |y(x)|^p d\mu < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$L_{n,m;\mu}^p(\mathcal{M}) = \{y(\cdot) \in I_{n,m;\mu}(\mathcal{M}) : \sup_{x \in \mathcal{M}} |y(x)| < \infty \quad (p = \infty),$$

gdzie $|\cdot|$ oznacza normę euklidesową w przestrzeni \mathcal{R}^m lub normę równoważną, a „sup ess” oznacza kres górny wartości funkcji na zbiorze \mathcal{M} , z wyjątkiem podzbioru miary μ równej zero tych punktów, dla których funkcja jest nieskończona lub nieokreślona. Norma w omawianej przestrzeni jest zdefiniowana następująco:

$$\|y(\cdot)\|_p = \left(\int_{\mathcal{M}} |y(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \quad \|y(\cdot)\|_p = \sup_{x \in \mathcal{M}} |y(x)| \quad (p = \infty)$$

Najważniejsze znaczenie mają przypadki, gdy $p = 1$, $p = 2$ i $p = \infty$. Przy $p = 2$ przestrzeń $L_{n,m;\mu}^2(\mathcal{M})$ jest unitarna z iloczynem skalarnym:

$$\langle y(\cdot), z(\cdot) \rangle = \int_{\mathcal{M}} y(x) \cdot z(x) d\mu,$$

gdzie $y(\cdot) \cdot z(\cdot)$ jest iloczynem skalarnym euklidesowym w przestrzeni \mathcal{R}^m . Warto dodać, że uogólnieniem nierówności Buniakowskiego-Schwartz'a, która explicite przyjmuje postać

$$\left| \int_{\mathcal{M}} \sum_{j=1}^m y_j(x) z_j(x) d\mu \right| \leq \left[\int_{\mathcal{M}} \sum_{j=1}^m y_j^2(x) d\mu \right]^{1/2} \left[\int_{\mathcal{M}} \sum_{j=1}^m z_j^2(x) d\mu \right]^{1/2}$$

przy $x = (x_1, \dots, x_n)$, jest nierówność Höldera

$$\left| \int_{\mathcal{M}} \sum_{j=1}^m y_j(x) z_j(x) d\mu \right| \leq \left[\int_{\mathcal{M}} \left(\sum_{j=1}^m y_j^2(x) \right)^{p/2} d\mu \right]^{1/p} \left[\int_{\mathcal{M}} \left(\sum_{j=1}^m z_j^2(x) \right)^{p'/2} d\mu \right]^{1/p'}$$

gdzie (p, p') jest sprzężoną parą wskaźników następującą zależnością (również dla $p = 1$ i $p = \infty$)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Jeżeli $\mathcal{M} = \mathcal{U}$ zbiór otwarty (obszar) w przestrzeni \mathcal{R}^n , a μ jest miarą Riemanna, tzn. całkowanie jest w sensie Riemanna (ogólniej w sensie Lebesgue'a), to stosujemy uproszczone oznaczenia $I_{n,m}(\mathcal{U})$, $L_{n,m}^p(\mathcal{U})$ oraz $I_n(\mathcal{U})$, $L_n^p(\mathcal{U})$ dla $m = 1$ i $I(\mathcal{U})$, $L^p(\mathcal{U})$ dla $m = n = 1$.

Niech dalej $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ obszar w przestrzeni \mathcal{R}^n - taki, że brzeg $\partial\mathcal{V}$ (jeśli $\partial\mathcal{V} \neq \emptyset$) jest regularny w tym sensie, że istnieje $n-1$ -wymiarowa miara Riemanna (ogólniej – Lebesgue'a) brzegu $\partial\mathcal{V}$ i na tym zbiorze istnieją prawie wszędzie (tj. z wyjątkiem co najwyżej podzbioru o \mathcal{R} -mierze $n-1$ -wymiarowej równej zero) wersory normalne zewnętrzne $\nu(\tilde{x})$ do $\partial\mathcal{V}$.

Mówimy, że odwzorowanie $y(\cdot) \in V_{n,m}(\mathcal{V})$ ma uogólnioną p -pochodną Fréchet rzędu r ,

oznaczaną przez $D^{r;p} y(\cdot)$, jeżeli spełnione są następujące warunki definicyjne tej pochodnej:

$$1) D^{r;p}y(\cdot): \mathcal{V} \rightarrow B^r(\mathcal{R}^n; \mathcal{R}^m);$$

$$2) D^{r;p}y(\cdot)(h^{(1)}, \dots, h^{(r)}) \in L_{n,m}^p(\mathcal{V}) \quad \forall h^{(1)}, \dots, h^{(r)} \in \mathcal{R}^n;$$

$$3) \int_{\mathcal{V}} \left[D^{r;p}y(x)(h^{(1)}, \dots, h^{(r)}) \right] \cdot \overset{\circ}{y}(x) dV = (-1)^r \int_{\mathcal{V}} y(x) \cdot \left[D^r \overset{\circ}{y}(x)(h^{(1)}, \dots, h^{(r)}) \right] dV$$

dla dowolnych $\overset{\circ}{y}(\cdot) \in \overset{\circ}{C}_{n,m}^\infty(\mathcal{V})$, przy czym „ \cdot ” oznacza euklidesowy iloczyn skalarny w przestrzeni \mathcal{R}^m , zaś D^r - „zwykłą” pochodną Fréchet.

! Równość 3) „pochodzi” ze wzoru Ostrogradskiego-Gaussa – jak gdyby pochodna uogólniona $D^{r;p}y(x)$ była zwykłą pochodną $D^r y(x)$.

Przyjmując jako $h^{(1)}, \dots, h^{(r)}$ wektory bazy standardowej przestrzeni \mathcal{R}^n oraz $\overset{\circ}{y}(x) = (\overset{\circ}{y}_j(x))$ otrzymujemy warunek definicyjny uogólnionych p -pochodnych cząstkowych w obszarze \mathcal{V} odwzorowania $y(\cdot) = (y_j(\cdot))$, tj. pochodnych $\partial_{i_1, \dots, i_r}^{r;p} y(\cdot) = (\partial_{i_1, \dots, i_r}^{r;p} y_j(\cdot))$:

$$3') \int_{\mathcal{V}} \left[\partial_{i_1, \dots, i_r}^{r;p} y_j(x) \right] \overset{\circ}{y}_j(x) dV = (-1)^r \int_{\mathcal{V}} y_j(x) \left[\partial_{i_1, \dots, i_r}^r \overset{\circ}{y}_j(x) \right] dV, \quad j = 1, \dots, m$$

dla dowolnych $\overset{\circ}{y}(\cdot) = (\overset{\circ}{y}_j(\cdot)) \in \overset{\circ}{C}_{n,m}^\infty(\mathcal{V})$.

Rozszerzeniem przestrzeni $L_{n,m}^p(\mathcal{V})$ są przestrzenie Sobolewa $W_{n,m}^{p;k}(\mathcal{V})$ tych odwzorowań z $L_{n,m}^p(\mathcal{V})$, dla których istnieją p -pochodne rzędu $r = 1, \dots, k$ (przyjmując $W_{n,m}^{p;0}(\mathcal{V}) = L_{n,m}^p(\mathcal{V})$). Przestrzenie te są unormowane za pomocą norm:

$$\|y(\cdot)\|_{p;k} = \left(\sum_{r=0}^k \int_{\mathcal{V}} |D^{r;p} y(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\|y(\cdot)\|_{\infty;k} = \sum_{r=0}^k \sup_{x \in \mathcal{V}} |D^{r;\infty} y(x)|,$$

przy czym przez normę $|D^{r;p} y(x)|$ w przestrzeni odwzorowań r -liniowych ograniczonych $B^r(\mathcal{R}^n; \mathcal{R}^m)$ można rozumieć którąkolwiek normę w przestrzeni \mathcal{R}^{m+m} , np.

$$|D^{r;p} y(x)| = \sum_{j=1}^m \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \left| \partial_{i_1, \dots, i_r}^{r;p} y_j(x) \right|, \quad x \in \mathcal{V}.$$

Dla $p = 2$ przestrzeń Sobolewa jest unitarna z iloczynem skalarnym

$$\begin{aligned} \langle y(\cdot), z(\cdot) \rangle_k &= \sum_{r=0}^k \langle D^{r;2} y(x), D^{r;2} z(x) \rangle_{L^2} = \sum_{r=0}^k \int_{\mathcal{V}} D^{r;2} y(x) \cdot D^{r;2} z(x) dV = \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{V}} \left[y_j(x) z_j(x) + \sum_{r=1}^k \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \partial_{i_1, \dots, i_r}^{r;2} y_j(x) \partial_{i_1, \dots, i_r}^{r;2} z_j(x) \right] dV, \end{aligned}$$

przy oznaczeniu $W_{n,m}^{2;k}(\mathcal{V}) \stackrel{\text{ozn}}{=} H_{n,m}^k(\mathcal{V})$ i oczywiście $D^{0;2} y(\cdot) = y(\cdot)$ oraz $y = (y_j)$ i $x = (x_i)$.

W przypadku $m = 1$ stosowane są oznaczenia $W_n^{p;k}(\mathcal{V})$ i $H_n^k(\mathcal{V})$, a w przypadku $m = n = 1$ oznaczenia $W^{p;k}(\mathcal{V})$ i $H^k(\mathcal{V})$ (\mathcal{V} jest wtedy przedziałem liczbowym).

Rozszerzeniami przestrzeni Sobolewa odwzorowań regularnych są przestrzenie

$W_n^{p,q;k,l}(\mathcal{V} \cup S)$, $S \subseteq \partial\mathcal{V}$ odwzorowań (funkcji) całkownych z p -tą potęgą i p -pochodnymi uogólnionymi do rzędu k w obszarze \mathcal{V} oraz całkownych z q -tą potęgą i q -pochodnymi uogólnionymi do rzędu l na części S brzegu $\partial\mathcal{V}$ - tzw. pochodnymi dystrybucyjnymi.

Oczywiście chodzi o (odpowiednio rozumiane) pochodne uogólnione w kierunku normalnej zewnętrznej o wersorze $\nu(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in S$ na części (lub całości) brzegu obszaru \mathcal{V} .

Ważnym przypadkiem szczególnym przestrzeni Sobolewa są przestrzenie tzw. odwzorowań

(funkcji) próbnych (odchyleń wirtualnych) $\overset{\circ}{W}_n^{p,q;k,l}(\mathcal{V} \cup S)$, $S \subseteq \partial\mathcal{V}$ (będące

podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $W_n^{p,q;k,l}(\mathcal{V} \cup S)$). Tworzą je te odwzorowania

$y(\cdot)$, których q -pochodne w kierunku wersorów normalnych zewnętrznych do S do rzędu l (odpowiednio rozumiane) zerują się na S prawie wszędzie.

Spośród powyższych przestrzeni Sobolewa wyróżniają się te o wskaźnikach $p = q = 2$, czyli

przestrzenie $W_n^{2,2;k,l}(\mathcal{V} \cup S)$ i $\overset{\circ}{W}_n^{2,2;k,l}(\mathcal{V} \cup S)$, którym można nadać strukturę przestrzeni unitarnej z iloczynem skalarnym:

$$\begin{aligned} \langle y(\cdot), z(\cdot) \rangle_{k,l} &= \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{V}} \left[y_j(x) z_j(x) + \sum_{r=1}^k \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \partial_{i_1, \dots, i_r}^{r;2} y_j(x) \partial_{i_1, \dots, i_r}^{r;2} z_j(x) \right] dV +, \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_S \left[y_j(\tilde{x}) z_j(\tilde{x}) + \sum_{s=1}^l \partial_{\nu(\tilde{x})}^{s;2} y_j(\tilde{x}) \partial_{\nu(\tilde{x})}^{s;2} z_j(\tilde{x}) \right] dS \end{aligned}$$

Są one oznaczane standardowo symbolami $H_n^{k,l}(\mathcal{V} \cup S)$ i $\overset{\circ}{H}_n^{k,l}(\mathcal{V} \cup S)$.

Warto odnotować, że zachodzą inkluzje:

$$C_n^k(\mathcal{V}) \subset W_n^{p;k}(\mathcal{V}), \quad C_n^k(\mathcal{V}) \subset H_n^k(\mathcal{V});$$

$$C_n^{k,l}(\mathcal{V} \cup S) \subset W_n^{p,q;k,l}(\mathcal{V} \cup S), \quad C_n^{k,l}(\mathcal{V} \cup S) \subset H_n^{k,l}(\mathcal{V} \cup S);$$

$$\overset{\circ}{C}_n^{k,l}(\mathcal{V} \cup S) \subset \overset{\circ}{W}_n^{p,q;k,l}(\mathcal{V} \cup S), \quad \overset{\circ}{C}_n^{k,l}(\mathcal{V} \cup S) \subset \overset{\circ}{H}_n^{k,l}(\mathcal{V} \cup S),$$

przy czym przestrzenie po lewych stronach inkluzji są gęste w odpowiednich przestrzeniach po prawych stronach tych inkluzji w normach tych przestrzeni.

Przy pewnych warunkach przestrzenie typu D (z normami jednostajnymi) i przestrzenie typu W (z normami całkowymi) są przestrzeniami Banacha (tj. zupełnymi jako przestrzenie metryczne odpowiednio względem metryk generowanych przez normy).

Ponadto, przy pewnych warunkach, pochodne uogólnione określone w przestrzeniach Sobolewa są prawie wszędzie identyczne z pochodnymi standardowymi oraz są prawie wszędzie ciągłe. Jest to doniosły rezultat teorii przestrzeni Sobolewa.

1.2. Przestrzeń dystrybucji

Niektóre, ale zarazem ważne zagadnienia dotyczące równań różniczkowych szczególnie dogodnie jest sformułować nie za pomocą funkcji regularnych, ale za pomocą ich pewnych uogólnień – tzw. dystrybucji, których zbiór tworzy również przestrzeń liniową.

Są dwa podejścia do definiowania dystrybucji – oba sobie równoważne. Jedno – podejście Minkowskiego – polega na definiowaniu dystrybucji jako granicy ciągu funkcji regularnych w obszarze o wartościach całek dążących do pewnej granicy; ciąg tych funkcji może mieć granicę będącą funkcją regularną lub nie. Drugie podejście – Schwartza – definiuje dystrybucje jako specyficzne funkcjonały liniowe; mogą być one generowane przez funkcje regularne (i są wtedy z nimi utożsamiane) i mogą być też dystrybucje, których nie da się za pomocą zwykłych funkcji „wygenerować”, ale można je uzyskać jako granica dystrybucji generowanych przez funkcje regularne, co jest zbieżne z podejściem Minkowskiego.

Przez $\overset{\circ}{D}_{n,m}^{\infty}(\mathcal{V})$ rozumiemy przestrzeń $\overset{\circ}{C}_{n,m}^{\infty}(\mathcal{V})$ (z p. 1.1), która nie jest unormowana, więc nie jest wyposażona w zbieżność w normie ciągu odwzorowań, ale jest wyposażona w tzw. topologię zbieżności w następującym sensie: ciąg odwzorowań (funkcji¹) $y_{(s)}^{\circ}(\cdot)$ ($s = 1, 2,$

¹ termin „funkcje” można rozumieć jako synonimu terminu „odwzorowania” lub jako ich przypadek szczególny przy $m = 1$

...) z przestrzeni $\overset{\circ}{D}_{n,m}^{\infty}(\mathcal{V})$ jest zbieżny (D-zbieżny) do odwzorowania $\overset{\circ}{y}(\cdot)$, co zapisujemy

jako $\overset{\circ}{y}_{(s)}(\cdot) \xrightarrow[s \rightarrow \infty]{D \circ} \overset{\circ}{y}(\cdot)$ lub $\lim_{s \rightarrow \infty} \overset{\circ}{y}_{(s)}(\cdot) = \overset{\circ}{y}(\cdot)$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$\overset{\circ}{y}_{(s)}(\cdot) \subset \mathcal{K} \quad \forall s \in \mathcal{N}$, $\overset{\circ}{y}(\cdot) \subset \mathcal{K}$, gdzie \mathcal{K} domknięty i ograniczony (zwarty) w obszarze \mathcal{V}

i $\overset{\circ}{y}_{(s)}(\cdot)|_{\mathcal{K}} \xrightarrow[s \rightarrow \infty]{\circ} \overset{\circ}{y}(\cdot)|_{\mathcal{K}}$.

Przez dystrybucję rozumiemy funkcjonal liniowy y^* na przestrzeni $\overset{\circ}{D}_{n,m}^{\infty}(\mathcal{V})$, ciągły w sensie

„topologii D-zbieżności” w tej przestrzeni, tj. $\overset{\circ}{y}_{(s)} \xrightarrow[s \rightarrow \infty]{D \circ} \overset{\circ}{y} \Rightarrow y^* \overset{\circ}{y}_{(s)} \xrightarrow[s \rightarrow \infty]{\circ} y^* \overset{\circ}{y}$ dla każdego ciągu

D-zbieżnego w przestrzeni $\overset{\circ}{D}_{n,m}^{\infty}(\mathcal{V})$.

Przestrzeń (liniową) wszystkich dystrybucji na przestrzeni $\overset{\circ}{D}_{n,m}^{\infty}(\mathcal{V})$ oznaczamy przez

$D'_{n,m}(\mathcal{V})$ i wyposażamy w „topologię słabej zbieżności”, tj. $y^{*(r)} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{D'} \overset{*}{y} \Leftrightarrow (\lim_{r \rightarrow \infty} y^{*(r)} = \overset{*}{y}) \Leftrightarrow$

$\overset{*}{y} \overset{\circ}{y} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{\circ} \overset{*}{y} \overset{\circ}{y} \quad \forall \overset{\circ}{y} \in \overset{\circ}{D}_{n,m}^{\infty}(\mathcal{V})$, gdzie $y^{*(r)}, \overset{*}{y} \in D'_{n,m}(\mathcal{V})$; $r \in \mathcal{N}$. Produkt dualny na

$D'_{n,m}(\mathcal{V}) \times \overset{\circ}{D}_{n,m}^{\infty}(\mathcal{V})$ oznaczamy jako $\langle \overset{*}{y}, \overset{\circ}{y} \rangle = \overset{*}{y} \overset{\circ}{y}$. Jest on ciągły odpowiednio

zarówno w sensie D-zbieżności jak i D'-zbieżności.

W przypadku, gdy $m = 1$ i $n = 1$, stosujemy odpowiednio uproszczone oznaczenia

$\overset{\circ}{D}_n^{\infty}(\mathcal{V})$, $D'_n(\mathcal{V})$ oraz $\overset{\circ}{D}^{\infty}(\mathcal{V})$, $D'(\mathcal{V})$, a gdy $\mathcal{V} = \mathcal{R}^n$ – odpowiednio oznaczenia $\overset{\circ}{D}_{n,m}^{\infty}$, $D'_{n,m}$

oraz $\overset{\circ}{D}_n^{\infty}$, D'_n ($m = 1$) i $\overset{\circ}{D}^{\infty}$, D' ($m = n = 1$).

Niech $y(\cdot) = (y_j(\cdot)) \in I_{n,m}(\mathcal{V})$. Wtedy

$$\ll \overset{*}{y}, \overset{\circ}{y} \gg \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{V}} y(x) \cdot \overset{\circ}{y}(x) dV = \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{V}} y_j(x) \overset{\circ}{y}_j(x) dV \text{ dla dowolnego } \overset{\circ}{y}(\cdot) = (\overset{\circ}{y}_j(\cdot)) \in \overset{\circ}{D}_{n,m}^{\infty}(\mathcal{V})$$

określa dystrybucję – tzw. dystrybucję przywiedlną lub generowaną przez odwzorowanie

$y(\cdot)$ z przestrzeni $I_{n,m}(\mathcal{V})$. Zatem przyporządkowanie $y(\cdot) \rightarrow \overset{*}{y} \in \overset{*}{D}_{n,m}'(\mathcal{V})$,

$y(\cdot) \in L_{n,m}^p(\mathcal{V})$ ($1 \leq p < \infty$) jest iniekcją liniową (zanurzeniem), pozwalającą utożsamić $\overset{*}{y}$ z

odwzorowaniem $y(\cdot)$, a przy tym spełniającym warunek słabej zbieżności:

$$\ll \overset{*}{y}^{(r)}, \overset{\circ}{y} \gg = \int_{\mathcal{V}} y^{(r)}(x) \cdot \overset{\circ}{y}(x) dV \rightarrow \int_{\mathcal{V}} y(x) \cdot \overset{\circ}{y}(x) dV = \ll \overset{*}{y}, \overset{\circ}{y} \gg, \text{ co wynika z nierówności}$$

$$\text{Höldera } \left(\left| \int_{\mathcal{V}} [y(x) - y^{(r)}(x)] \cdot \overset{\circ}{y}(x) dV \right| \leq \|y(\cdot) - y^{(r)}(\cdot)\|_p \|\overset{\circ}{y}(x)\|_{p'}, \quad p' = p / (p-1) \right).$$

Przykładem dystrybucji nieprzywiedlnej jest dystrybucja δ - Diraca, zdefiniowana

następująco: $\ll \overset{*}{y}^{(r)}, \overset{\circ}{y} \gg = \vec{u} \cdot \overset{\circ}{y}(x_0)$, gdzie \vec{u} jest wektorem w przestrzeni \mathcal{R}^m ,

x_0 - ustalonym punktem obszaru \mathcal{V} . Dystrybucję tę oznaczamy symbolem

$\vec{1} \delta(x - x_0)$, $x \in \mathcal{V}$ ($\vec{1} \in \mathcal{R}^m$, $x_0 \in \mathcal{R}^n$), upoważniającym do zapisu

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{1} \delta(x - x_0) \cdot \overset{\circ}{y}(x) dV = \vec{1} \cdot \overset{\circ}{y}(x_0), \quad \overset{\circ}{y}(\cdot) \in \overset{\circ}{D}_{n,m}^{\infty}(\mathcal{V}).$$

Zgodnie z definicją całki δ - Diraca zapis ten można rozszerzyć na funkcje próbne z

przestrzeni $I_{n,m}(\mathcal{V})$.

Dystrybucje można różniczkować. Przez pochoďną dystrybucyjną (Fréchet) rzędu k

dystrybucji $\overset{*}{y} \in \overset{*}{D}_{n,m}'(\mathcal{V})$ rozumiemy odwzorowanie k -liniowe $D^k \overset{*}{y} \in L^k(\mathcal{R}^k; \overset{*}{D}_{n,m}'(\mathcal{V}))$ takie, że

$$\ll D^k \overset{*}{y}(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}), \overset{\circ}{y} \gg = (-1)^k \ll \overset{*}{y} D^k \overset{\circ}{y}(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) \gg$$

dla dowolnych $\overset{\circ}{y}(\cdot) \in \overset{\circ}{D}_{n,m}^{\infty}(\mathcal{V})$ i dowolnych $h^{(1)}, \dots, h^{(k)} \in \mathcal{R}^n$. Jeżeli pochoďna dystrybucyjna

dystrybucji przywiedlnej y^* generowanej przez odwzorowanie $y(\cdot)$ jest też przywiedlna, to pochodna dystrybucyjna $D^k y^*$ jest generowana przez pochodną uogólnioną $D^k y(\cdot)$, czyli

$$\int_{\mathcal{V}} D^k y(x)(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) \cdot \overset{\circ}{y}(x) dV = (-1)^k \int_{\mathcal{V}} y(x) \cdot \overset{\circ}{D^k y}(x)(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) dV$$

dla dowolnych $\overset{\circ}{y}(\cdot) \in \overset{\circ}{D}_{n,m}^\infty(\mathcal{V})$ i dowolnych $h^{(1)}, \dots, h^{(k)} \in \mathcal{R}^n$. Jeżeli przy tym

$D^k y(\cdot) \in L_{n,m}^p(\mathcal{V})$, czyli $D^k y(\cdot) = D^{k;p} y(\cdot)$, to $y(\cdot) \in W_{n,m}^{p;k}(\mathcal{V})$.

1.3. Liniove operatory różniczkowe

Niech \mathcal{V} obszar w przestrzeni \mathcal{R}^n i niech $U_{n,m}^k(\mathcal{V})$ przestrzeń funkcyjna $C_{n,m}^k(\mathcal{V})$ lub $D_{n,m}^k(\mathcal{V})$ lub $W_{n,m}^{p;k}(\mathcal{V})$ ($1 \leq p \leq \infty$). Przy $k=0$ stosujemy oznaczenie $U_{n,m}^0(\mathcal{V}) \stackrel{\text{ozn}}{=} U_{n,m}(\mathcal{V})$ (bowiem odpowiednio przestrzenią $U_{n,m}(\mathcal{V})$ jest $C_{n,m}(\mathcal{V})$ lub $D_{n,m}(\mathcal{V})$ lub $W_{n,m}^{p;0}(\mathcal{V}) = L_{n,m}^2(\mathcal{V})$). Niech następnie $a_r(\cdot) = (a_{j,l;i_1,\dots,i_r}(\cdot))$ ($j, l = 1, \dots, m; i_1, \dots, i_r = 1, \dots, n$) dany układ funkcji określonych na \mathcal{V} o wartościach w \mathcal{R} , czyli element przestrzeni $V_{n,m \times m \times n^r}(\mathcal{V})$.

Utwórzmy wyrażenie

$$A_{n,m}^r y(x) \stackrel{\text{ozn}}{=} a_r(x) D^r y(x) \stackrel{\text{def}}{=} (a_{j,l;i_1,\dots,i_r}(x) y_{l,i_1,\dots,i_r}(x)), \quad x \in \mathcal{V} \quad (r = 1, \dots, k),$$

w którym obowiązuje konwencja sumacyjna względem l i względem i_1, \dots, i_r . Pochodne y_{l,i_1,\dots,i_r} rozumiane są w sensie „zwykłym”, gdy $U_{n,m}^k(\mathcal{V}) = C_{n,m}^k(\mathcal{V}) / D_{n,m}^k(\mathcal{V})$ (wtedy na ogół $a_r(\cdot) \in C_{n,m \times m \times n^r}(\mathcal{V}) / D_{n,m \times m \times n^r}(\mathcal{V})$), natomiast gdy $U_{n,m}^k(\mathcal{V}) = W_{n,m}^{p;k}(\mathcal{V})$, w szczególności gdy $U_{n,m}^k(\mathcal{V}) = H_{n,m}^k(\mathcal{V})$, to pochodne y_{l,i_1,\dots,i_r} są rozumiane jako pochodne uogólnione $\partial_{i_1,\dots,i_r}^{r;p} y_l$ (wtedy na ogół $a_r(\cdot) \in L_{n,m \times m \times n^r}^\infty(\mathcal{V})$). Dodatkowo przyjmujemy umowę, że dla $r=0$ jest (przy braku różniczkowania)

$$A_{n,m}^0 y(x) \stackrel{\text{ozn}}{=} a_0(x) y(x) \stackrel{\text{def}}{=} (a_{j,l}(x) y_l(x)), \quad x \in \mathcal{V},$$

przy oznaczeniach $a_0(x) = (a_{j,l}(x))$, $a_{j,i}(x) \stackrel{\text{ozn}}{=} a_{j,i}(x)$, $y(x) = (y_l(x))$, $x \in \mathcal{V}$ ($j, l = 1, \dots, m$).

Niech następnie

$$K_{n,m}^k y(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=0}^k A_{n,m}^r y(x) = \sum_{r=0}^k a_r(x) D^r y(x), \quad x \in \mathcal{V},$$

przy założeniu, że $\sim a_k(x) \equiv 0$. Odwzorowanie

$$K_{n,m}^k : V_{n,m}(\mathcal{V}) \rightarrow V_{n,m}(\mathcal{V}); \quad \text{Dom } K_{n,m}^k \subseteq U_{n,m}^k(\mathcal{V}), \quad \text{Im } K_{n,m}^k \subseteq U_{n,m}(\mathcal{V})$$

jest liniowe – jeśli $k > 0$, to nazywamy je operatorem różniczkowym liniowym, zwyczajnym przy $n = 1$ i cząstkowym przy $n > 1$ (dla $k = 0$ jest ono operatorem algebraicznym):

$K_{n,m}^0 = A_{n,m}^0$). Jeżeli przy tym $a_r(x) = \text{const}$ dla $x \in \mathcal{V}$, to jest to tzw. operator o stałych współczynnikach (w przypadku przeciwnym – o zmiennych współczynnikach).

W szczególności operatorem różniczkowym może być tylko operator o najwyższych pochodnych (rzędu $k > 0$): $K_{n,m}^k = A_{n,m}^k$, gdy $a_r(x) \equiv 0$ dla $r = 0, 1, \dots, k-1$ i $\sim a_k(x) \equiv 0$.

Przez rząd operatora $K_{n,m}^k$ rozumiemy liczbę naturalną $S = k \cdot \text{rank}[a_{j,l;k}(x)]$, przy założeniu, że $\text{rank}[a_{j,l;k}(x)]$ (rząd macierzy) jest identyczny dla prawie wszystkich $x \in \mathcal{V}$.

Przykład. Niech $n = 1$ przy $k > 0$ i $\mathcal{V} = (\alpha, \beta)$ ($\alpha \geq -\infty, \beta \leq \infty$). Wtedy wyrażenie na operator różniczkowy zwyczajny przedstawia się następująco:

$$K_{1,m}^k y(x) = \sum_{r=0}^k a_r(x) y^{(r)}(x) = \left(\sum_{r=0}^k \sum_{l=1}^m a_{jl;r}(x) y_l^{(r)}(x) \right), \quad x \in \mathcal{V} = (\alpha, \beta)$$

przy oznaczeniach uproszczonych: $a_r(x) = (a_{jl,r}(x))$, $a_{j,l;1,1,\dots,(r\text{-razy})}^{\text{ozn}} = a_{jl,r}$, $x = (x_1) = x$ wobec $i_1 = \dots = i_r = 1$ i $y^{(r)}(x) = (y_l^{(r)}(x))$, $y_l^{(r)} = d^r y_l / d x^r$.

Jeżeli $m = 1$, to operator różniczkowy zwyczajny oznaczamy symbolem $K_{1,1}^k = K^k$ „Działa” on na funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej z przedziału liczbowego:

$$K^k y(x) = \sum_{r=0}^k a_r(x) y^{(r)}(x), \quad x \in \mathcal{V} = (\alpha, \beta) \quad (\sim a_k \equiv \sim 0),$$

tj. $y(\cdot) \in U^k(\mathcal{V})$, $a_r(\cdot) \in U(\mathcal{V})$ ($r = 0, 1, \dots, k$).

Przykład. Niech $m = 1$ przy $n > 1$. Wtedy wyrażenie określające operator różniczkowy cząstkowy, oznaczany dalej symbolem $K_{n,1}^k = K_n^k$, działający na pojedynczą funkcję z przestrzeni $U_{n,1}^k(\mathcal{V}) = U_n^k(\mathcal{V})$ można zapisać następująco:

$$K_n^k y(x) = \sum_{r=0}^k a_r(x) D^r y(x) = \sum_{r=0}^k \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n a_{i_1, \dots, i_r}(x) y_{i_1, \dots, i_r}(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) = (x_i) \in \mathcal{V},$$

przy $(y_1(\cdot)) = y(\cdot)$ i $a_{1,1;i_1, \dots, i_r}^{\text{ozn}}(\cdot) = a_{i_1, \dots, i_r}^{\text{ozn}}(\cdot)$, $x = (x_1, x_2) = (\xi, \eta)$, $a_1(\cdot, D^r y = (y_{i_1, \dots, i_r}))$.

Przez rząd operatora K_n^k rozumiemy zatem liczbę k , przy założeniu, że $a_k(x) \neq (0)$ dla

prawie wszystkich $x \in \mathcal{V}$. W przypadku operatora o stałych współczynnikach ($a_r(\cdot) = \text{const}$ dla $r = 0, 1, \dots, k$) mamy *explicite*

$$K_n^k y(x) = \sum_{r=0}^k \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n a_{i_1, \dots, i_r} y_{i_1, \dots, i_r}(x_1, \dots, x_n).$$

Przykład. Niech $k = 1$ przy $n > 1$. Na podstawie przykładu poprzedniego i wcześniejszych oznaczeń mamy *explicite* po przyjęciu oznaczeń $i_0 = 0$, $i_1 = i = 1, \dots, n$:

$$K_n^1 y(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) y_{,i}(x_1, \dots, x_n) + a_0(x_1, \dots, x_n) y(x_1, \dots, x_n).$$

Przykładowo, przyjmując $n = 2$ i wprowadzając oznaczenia $x = (x_1, x_2) = (\xi, \eta)$,

$a_1(x_1, x_2) = a(\xi, \eta)$, $a_2(x_1, x_2) = b(\xi, \eta)$, $a_0(x_1, x_2) = c(\xi, \eta)$, zapisujemy operator różniczkowy liniowy rzędu pierwszego w obszarze \mathcal{V} płaszczyzny $\xi\eta$ w postaci klasycznej następująco:

$$K_2^1 y(\xi, \eta) = a(\xi, \eta) \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) \frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, \eta) + c(\xi, \eta) y(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \mathcal{V}$$

czyli zapisem dłuższym niż dla dowolnych k i n .

Przykład. Niech $k = 2$ przy $n > 1$. Przyjmując prostsze oznaczenia na wskaźniki występujące w wyrażeniu na operator K_n^2 , tj. $i_1 = i$, $i_2 = j$ oraz $i_0 = 0$, zapisujemy ten operator następująco:

$$K_n^2 y(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) y_{,ij}(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) y_{,i}(x_1, \dots, x_n) + a_0(x_1, \dots, x_n) y(x_1, \dots, x_n),$$

przy czym można założyć, że $a_{ij} = a_{ji}$ z uwagi na symetrię $y_{,ij} = y_{,ji}$. Przykładami

operatora K_n^2 w obszarze \mathcal{V} płaszczyzny $(x_1, x_2) = (\xi, \eta)$, tj. przy $n = 2$, są następujące operatory, często wykorzystywane w rozmaitych zastosowaniach:

1) operator Laplace'a (laplasjan)

$$\Delta = \partial_{11} + \partial_{22} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

2) operator falowy

$$\square = \partial_{11} - \partial_{22} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

3) operator dyspersji

$$D = \partial_{11} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}.$$

Uwaga. Oprócz operatorów różniczkowych liniowych mają pewne zastosowanie także operatory różniczkowe nieliniowe, zwłaszcza quasi-liniowe:

$$\mathbf{K}_{n,m}^k(y(x)) = \mathbf{A}_{n,m}^k y(x) + G(x, \mathbf{A}_{n,m}^0 y(x), \mathbf{A}_{n,m}^1 y(x), \dots, \mathbf{A}_{n,m}^{k-1} y(x)), \quad x \in \mathcal{V},$$

gdzie G jest odpowiednio regularnym wyrażeniem względem swoich argumentów, o wartościach w przestrzeni \mathcal{R}^m .

Wprowadzimy teraz, oprócz wyżej zdefiniowanych operatorów różniczkowych (w szczególności także algebraicznych) w obszarze \mathcal{V} , operatory różniczkowe (i algebraiczne) na (hiper)powierzchni (krzywej przy $n = 2$) brzegowej $S \subseteq \partial\mathcal{V}$ (jeśli $\partial\mathcal{V} \neq \emptyset$), czyli tzw. operatory różniczkowe (algebraiczne) brzegowe (graniczne) na części lub całości brzegu (granicy) $\partial\mathcal{V}$ obszaru \mathcal{V} . O S zakładamy, że dla prawie wszystkich $\tilde{x} \in S$ (tj. z wyjątkiem punktów zbioru o mierze Riemanna n -wymiarowej równej zero, czyli z wyjątkiem zbioru wierzchołków, boków, krawędzi, ścian ...) istnieje ciągłe pole wersorów normalnych zewnętrznych $\nu = \nu(\tilde{x})$, a w równaniu tej (hiper)powierzchni (krzywej przy $n = 2$) postaci $f(\tilde{x}) = 0$ funkcja f spełnia jednostajny warunek Lipschitza; o S mówimy wtedy, że składa się z (hiper)płatów (łuków przy $n = 2$) spełniających warunek Lipschitza – obrazowo: nie jest zbyt „pomarszczona / pofałdowana”.

Niech $\mathbf{U}_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S)$ ($0 \leq l \leq k$) oznacza przestrzeń $\mathbf{C}_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S)$ lub $\mathbf{D}_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S)$ lub też $\mathbf{W}_{n,m}^{p,q;k,l}(\mathcal{V} \cup S)$ (w szczególności $\mathbf{H}_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S)$ przy $p = q = 2$). Tworzymy wyrażenia

$$\mathbf{B}_{n,m}^l y(\tilde{x}) = \sum_{s=0}^l b_s(\tilde{x}) \partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\tilde{x}) = \left(\sum_{s=0}^l \sum_{t=1}^m b_{jt;s}(\tilde{x}) \partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y_t(\tilde{x}) \right), \quad \tilde{x} \in S,$$

gdzie $b_s(\tilde{x}) = (b_{jt;s}(\tilde{x}))$, $y(\tilde{x}) = (y_t(\tilde{x}))$ ($j, t = 1, \dots, m$; $s = 0, 1, \dots, l$), $\partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\tilde{x}) = \partial_{\nu(\tilde{x})}^s y(\tilde{x})$ jest „zwykłą” pochodną kierunkową, gdy $\mathbf{U}_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S) = \mathbf{C}_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S) / \mathbf{D}_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S)$ oraz

$\partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\tilde{x}) = \partial_{\nu(\tilde{x})}^{s;q} y(\tilde{x})$ jest q -pochodną uogólnioną kierunkową (dystrybucyjną), gdy

$\mathbf{U}_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S) = \mathbf{W}_{n,m}^{p,q;k,l}(\mathcal{V} \cup S)$ przy $s = 1, \dots, l$, natomiast jeśli $s = 0$ (i $l = s = 0$), to mamy operację algebraiczną (operator algebraiczny): $b_0(\tilde{x}) \partial_{\nu(\tilde{x})}^{(0)} y(\tilde{x}) = b_0(\tilde{x}) y(\tilde{x}) = (b_{jt}(\tilde{x}) y_t(\tilde{x}))$,

po przyjęciu $\partial_{\nu(\tilde{x})}^{(0)} y(\tilde{x}) = y(\tilde{x})$ i $b_{j,t;0}(\tilde{x}) = b_{jt}(\tilde{x})$ ($\tilde{x} \in S$). Wyżej wprowadzone wyrażenie

definiuje operator brzegowy (liniowy) $\mathbf{B}_{n,m}^l: \mathbf{U}_{n,m}^{k,l}(\mathcal{V} \cup S) \rightarrow \mathbf{U}_{n,m}(S)$ - różniczkowy przy $l \geq 1$ i algebraiczny przy $l = 0$ (odpowiednio $\mathbf{U}_{n,m}(S) = \mathbf{C}_{n,m}(S) / \mathbf{D}_{n,m}(S)$ lub $\mathbf{L}_{n,m}^q(S)$).

Podobnie, jak w przypadku operatora $\mathbf{K}_{n,m}^k$ operator brzegowy $\mathbf{B}_{n,m}^l$ nazywamy o stałych współczynnikach, gdy $b_s(\tilde{x}) = \text{const}$ na S .

Przykład. Jeśli $m = 1$, to stosujemy uproszczone oznaczenie tego operatora:

$$\mathbf{B}_n^l y(\tilde{x}) = \sum_{s=0}^l b_s(\tilde{x}) \partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S,$$

przy $(b_{1,1;s}(\tilde{x})) \stackrel{\text{ozn}}{=} b_s(\tilde{x})$, $(y_1^{(s)}(\tilde{x})) \stackrel{\text{ozn}}{=} y^{(s)}(\tilde{x})$, gdzie teraz $b_s(\tilde{x})$ ($s = 0, 1, \dots, l$) i $y(\tilde{x})$ są pojedynczymi funkcjami rzeczywistymi. Przykładowo, operatory brzegowe dla $l = 0$ i $l = 1$ mają postać:

$$\mathbf{B}_n^0 y(\tilde{x}) = b_0(\tilde{x}) y(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S \text{ – operator algebraiczny,}$$

$$\mathbf{B}_n^1 y(\tilde{x}) = b_1(\tilde{x}) \partial_{\nu(\tilde{x})}^{(1)} y(\tilde{x}) + b_0(\tilde{x}) y(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S \text{ – operator różniczkowy}$$

Przykład. Niech $n = 1$. W tym przypadku, wobec $\mathcal{V} = (\alpha, \beta)$, $S = \{\alpha\}$ lub $S = \{\beta\}$ lub $S = \partial\mathcal{V} = \{\alpha, \beta\}$, $\tilde{x} = \alpha$ lub $\tilde{x} = \beta$, $\partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\tilde{x}) = (-1)^s y^{(s)}(\alpha^+)$ lub $\partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\tilde{x}) = y^{(s)}(\beta^-)$, możemy przyjąć zapis:

$$\mathbf{B}_{1,m}^l y \Big|_{x=\tilde{x}} = \sum_{s=0}^l \begin{Bmatrix} b'_s \\ b''_s \end{Bmatrix} y^{(s)}(\tilde{x}^*) = \left(\sum_{s=0}^l \sum_{t=1}^m \begin{Bmatrix} b'_{jt;s} \\ b''_{jt;s} \end{Bmatrix} \right) y_t^{(s)}(\tilde{x}^*), \quad \begin{cases} \tilde{x} = \alpha, \tilde{x}^* = \alpha^+ \\ \tilde{x} = \beta, \tilde{x}^* = \beta^- \end{cases} \quad (j, t = 1, \dots, m > 1),$$

przy $b'_s = (b'_{jt;s})$, $b''_s = (b''_{jt;s})$ będących układami (macierzami) liczb rzeczywistych, oraz

$$\mathbf{B}^l y \Big|_{x=\tilde{x}} = \sum_{s=0}^l \begin{Bmatrix} b'_s \\ b''_s \end{Bmatrix} y^{(s)}(\tilde{x}^*), \quad \begin{cases} \tilde{x} = \alpha, \tilde{x}^* = \alpha^+ \\ \tilde{x} = \beta, \tilde{x}^* = \beta^- \end{cases} \quad (m = 1)$$

przy $(b'_{11;s}) \stackrel{\text{ozn}}{=} b'_s$, $(b''_{11;s}) \stackrel{\text{ozn}}{=} b''_s$, $(y_1^{(s)}(\tilde{x}^*)) \stackrel{\text{ozn}}{=} y^{(s)}(\tilde{x}^*)$ ($s = 0, 1, \dots, l$) będących „zwykłymi” liczbami rzeczywistymi.

Uwaga. Oprócz operatorów brzegowych (granicznych) wprowadza się analogiczne operatory liniowe na $\text{var } S$ zawartej w obszarze \mathcal{V} , zwłaszcza gdy brzeg $\partial S \subset \partial\mathcal{V}$ i gdy S „rozcina” \mathcal{V} na dwie części \mathcal{V}^- i \mathcal{V}^+ (lub \mathcal{V}^l i \mathcal{V}^p lub \mathcal{V}^d i \mathcal{V}^g). Niech S będzie takim tworem geometrycznym, a $\nu = \nu(\tilde{x})$ polem wersorów określonym wszędzie lub prawie wszędzie na S , umownie zewnętrznych do S . Operator wspomniany, zwany operatorem „wewnętrznym” definiujemy analogicznie jak operator brzegowy:

$$\mathbf{P}_{n,m}^l y(\tilde{x}) = \sum_{s=0}^l p_s(\tilde{x}) \partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\tilde{x}) = \left(\sum_{s=0}^l \sum_{t=1}^m p_{jt;s}(\tilde{x}) \partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y_t(\tilde{x}) \right), \quad \tilde{x} \in S,$$

gdzie $p_s(\tilde{x}) = (p_{jt;s}(\tilde{x}))$, $y(\tilde{x}) = (y_t(\tilde{x}))$ ($j, t = 1, \dots, m; s = 0, 1, \dots, l$), jak również wszystkie analogie wprowadzonych przypadków szczególnych operatora brzegowego $(\mathbf{P}_n^l, \mathbf{P}_{1,m}^l, \dots)$.

1.4. Liniowe operatory różniczkowe cząstkowe

Zajmiemy się szerzej liniowymi operatorami cząstkowymi działającymi na pojedyncze funkcje ($m = 1, n > 1$), tj. operatorami $K_n^k: U_n^k(\mathcal{V}) \rightarrow U_n(\mathcal{V})$ ($k > 0$) przy

$$K_n^k y(x) = \sum_{r=0}^k a_r(x) D^r y(x) = \sum_{r=0}^k \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n a_{i_1, \dots, i_r}(x) y_{i_1, \dots, i_r}(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{ozn}}{=} (x_i) \in \mathcal{V}$$

i przy założeniu, że $a_k(x) \neq 0$ dla wszystkich lub prawie wszystkich $x \in \mathcal{V}$ (\mathcal{V} – obszar). Przez $a_r(\cdot)$ dla $r = 1, \dots, k$ rozumiemy układ funkcji $(a_{i_1, \dots, i_r}(\cdot))$ z przestrzeni $U_n^r(\mathcal{V})$, a przez $D^r y(\cdot)$ układ $(y_{i_1, \dots, i_r}(\cdot))$ odpowiednich pochodnych cząstkowych („zwykłych” lub uogólnionych p -pochodnych) funkcji $y(\cdot)$, zaś przez „iloczyn” $a_r(\cdot) D^r y(\cdot)$ oznacza operację mnożenia skalarnego obu układów; dla $r = 0$ mamy „zwykły” iloczyn funkcji $a_0(\cdot)$ i $y(\cdot)$.

Niech

$$K_n^k(x; h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1, \dots, i_k}(x) h_{i_1}^{(1)} \dots h_{i_k}^{(k)},$$

dla $x \in \mathcal{V}$ i $h^{(1)} = (h_{i_1}^{(1)}), \dots, h^{(k)} = (h_{i_k}^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ oraz

$$\tilde{K}_n^k(x; h) = K_n^k(x; h, \dots, k\text{-razy}) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1, \dots, i_k}(x) h_{i_1} \dots h_{i_k}, \quad x \in \mathcal{V},$$

przy $h^{(1)} = \dots = h^{(k)} = h = (h_i)$. Funkcję K_n^k nazywamy formą stowarzyszoną z operatorem K_n^k (K_n^k jest dla każdego $x \in \mathcal{V}$ formą k -liniową na przestrzeni \mathcal{R}^n – *de facto* „stowarzyszoną” z operatorem z pochodnymi rzędu najwyższego A_n^k – \tilde{K}_n^k jest dla każdego $x \in \mathcal{V}$ formą k -wymiarową na przestrzeni \mathcal{R}^n). Jeżeli operator A_n^k jest o stałych współczynnikach, tzn. $a_k(x) = \text{const}$, a więc także gdy K_n^k jest o stałych współczynnikach, to piszemy $K_n^k(h^{(1)}, \dots, h^{(k)})$ i $\tilde{K}_n^k(h)$.

Forma K_n^k jest podstawą klasyfikacji operatora K_n^k . Nazywamy go

- eliptycznym,
- parabolicznym,
- hiperbolicznym,

w punkcie $x \in \mathcal{V}$ / w obszarze \mathcal{V}

wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednio forma stowarzyszona jest

- dodatnio określona,
 - osobliwa,
 - nieosobliwa, ale określona niedodatnio
- w punkcie $x \in \mathcal{V}$ / w obszarze \mathcal{V} .

Forma K_n^k jest w punkcie $x \in \mathcal{V}$ dodatnio określona $\Leftrightarrow \tilde{K}_n^k(x; h) > 0 \quad \forall h \neq 0$,
 a więc w szczególności, gdy jest ściśle dodatnio określona
 ($\Leftrightarrow \exists c > 0 \quad \forall h \neq 0 \quad \tilde{K}_n^k(x; h) \geq c |h|^k$) i oczywiście forma K_n^k jest dodatnio określona
 w obszarze $\mathcal{V} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{V} \quad \tilde{K}_n^k(x; h) > 0 \quad \forall h \neq 0$.

Z definicji formy K_n^k i jej dodatniej określoności wynika, że warunkiem eliptyczności operatora K_n^k jest parzystość jego rzędu $k = 2\kappa$. Jednakże precyzyjne i proste podanie warunków osobliwości i określoności formy stowarzyszonej nie jest łatwe w przypadku ogólnym.

Jeżeli forma $K_n^{2\kappa}$ jest półokreślona dodatnio, tzn. $\tilde{K}_n^{2\kappa}(x; h) \geq 0 \quad \forall h$, ale nie jest dodatnio określona, tzn. $\exists h \neq 0 \quad \tilde{K}_n^{2\kappa}(x; h) = 0$, to jest ona osobliwa, a więc operator $K_n^{2\kappa}$ jest w tym przypadku paraboliczny.

Jeśli forma K_n^k ma postać kanoniczną, tzn. $a_{i_1, \dots, i_k}(x) = 1$ lub -1 lub 0 dla $i_1 = \dots = i_k = 1, \dots, n$ a dla pozostałych wartości i_1, \dots, i_k współczynniki $a_{i_1, \dots, i_k}(x) = 0$, to wtedy łatwo identyfikujemy typ operatora K_n^k . Mianowicie jeśli k – nieparzyste i jeśli $a_{i_1, \dots, i_k}(x) = 1$ lub -1 dla $i_1 = \dots = i_k = 1, \dots, n$, to forma K_n^k jest określona i nieosobliwa, a operator K_n^k jest hiperboliczny, a jeśli wśród tych $a_{i_1, \dots, i_k}(x)$ jest co najmniej jedno 0 , to forma K_n^k jest osobliwa, a operator K_n^k jest paraboliczny. Natomiast, gdy $k = 2\kappa$ jest parzyste, to w przypadku, gdy wśród współczynników $a_{i_1, \dots, i_k}(x)$ dla $i_1 = \dots = i_{2\kappa} = 1, \dots, n$ jest co najmniej jedno 0 , to forma $K_n^{2\kappa}$ jest osobliwa, a operator $K_n^{2\kappa}$ jest paraboliczny, a jeśli zera nie ma, ale jest co najmniej jedna para $(-1, 1)$, to forma $K_n^{2\kappa}$ jest określona i nieosobliwa i nie dodatnio określona, zaś operator $K_n^{2\kappa}$ jest hiperboliczny, zaś gdy takiej pary nie ma tylko same 1 lub same -1 , to operator K_n^k jest eliptyczny, ewentualnie przemnożony przez -1 .

W przypadku rozważanych często i dokładniej operatorów rzędu drugiego współczynniki

$a_{i_1, i_2}^{ozn}(x) = a_{ij}(x)$ można zestawić w macierz $A(x) = [a_{ij}(x)]$ i wykorzystać znane definicje i twierdzenia z algebry macierzy w kontekście określoności i osobliwości formy dwuliniowej

$K_n^2(x; h', h'') = [h_i']^T [a_{ij}(x)] [h_j'']$. I tak, operator K_n^2 jest:

- eliptyczny $\Leftrightarrow \forall [h_i] \neq [0] \quad [h_i]^T [a_{ij}(x)] [h_j] > 0$ ($A(x)$ dodatnio określona),

- paraboliczny $\Leftrightarrow \det A(x) = 0$ ($A(x)$ jest osobliwa),

- hiperboliczny $\Leftrightarrow \det A(x) \neq 0$ oraz $A(x)$ jest nie dodatnio i nie ujemnie określona.

Przykład. Operator

1) Laplace'a $K_2^2 = \Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$ jest eliptyczny (w każdym obszarze płaszczyzny x_1x_2), gdyż forma K_2^2 stowarzyszona z Δ jest dodatnio określona, bowiem forma kwadratowa

$$\tilde{K}_2^2 = (h_1)^2 + (h_2)^2 > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0);$$
 widoczne jest to wprost z postaci macierzy

$A = \text{diag}[1 \ 1]$ i kanonicznej postaci operatora;

2) falowy $K_2^2 = \square = \partial_{11} - \partial_{22}$ jest hiperboliczny (w każdym obszarze płaszczyzny x_1x_2), gdyż macierz $A = \text{diag}[1 \ -1]$ jest nieosobliwa ($\det A = -1 \neq 0$) i niedodatnio określona

$$(\exists (h_1, h_2) = (h, 0) \neq (0, 0) \quad \tilde{K}_2^2 = (h)^2 - (0)^2 > 0$$

i $\exists (h_1, h_2) = (0, h) \neq (0, 0) \quad \tilde{K}_2^2 = (0)^2 - (h)^2 < 0$), co widoczne jest też wprost z kanonicznej postaci operatora \square ;

3) dyspersji $K_2^2 = D_1^2 = \partial_{11}$ jest paraboliczny (w każdym obszarze płaszczyzny x_1x_2), gdyż macierz $A = \text{diag}[1 \ 0]$ jest osobliwa ($\det A = 0$), ale półokreślona dodatnio, bowiem

$\forall (h_1, h_2) \quad \tilde{K}_2^2 = (h_1)^2 > 0$ i $\exists (h_1, h_2) = (0, h) \neq (0, 0) \quad \tilde{K}_2^2 = (0)^2 > 0$; paraboliczność operatora dyspersji wynika także wprost z kanoniczności jego postaci.

Założmy teraz, że operator K_n^k ma ciągle rozszerzenie na z obszaru \mathcal{V} na jego domknięcie $\overline{\mathcal{V}} = \text{clos } \partial\mathcal{V}$ i niech S będzie płatem (hiper)powierzchni (łukiem krzywej dla $n = 2$), zwanym dalej także $\text{var } S$, takim, że $S \subseteq \mathcal{V}$ dla wszystkich lub prawie wszystkich $\tilde{x} \in S$ określone jest ciągle pole wersorów $\nu(\tilde{x})$

normalnych zewnętrznych (ewentualnie umownie) do S .

Definiujemy funkcję $S_n^k: S \rightarrow \mathcal{R}$

$$S_n^k(\tilde{x}) = \tilde{K}_n^k(\tilde{x}; \nu(\tilde{x})) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1, \dots, i_k}(\tilde{x}) \nu_{i_1}(\tilde{x}) \dots \nu_{i_k}(\tilde{x}),$$

będącą podstawą klasyfikacji (hiper)powierzchni (krzywej dla $n = 2$) względem operatora K_n^k .

Mówimy, że S ma (w punkcie $\tilde{x} \in S$) względem K_n^k orientację przestrzenną, charakterystyczną lub czasową, jeżeli odpowiednio $S_n^k(\tilde{x}) > 0$, $S_n^k(\tilde{x}) = 0$ lub $S_n^k(\tilde{x}) < 0$ dla wszystkich $\tilde{x} \in S$ (w tym punkcie).

Z powyższych określeń i definicji typów operatora wynika, że orientacja każdej (hiper)powierzchni (krzywej przy $n = 2$) względem operatora eliptycznego jest przestrzenna. Natomiast względem operatora parabolicznego i hiperbolicznego może być różna. Ale jeżeli forma stowarzyszona K_n^k z operatorem parabolicznym K_n^k jest (w punkcie $\tilde{x} \in S$) półokreślona dodatnio, to orientacja tworu $n-1$ – wymiarowego S może być przestrzenna lub charakterystyczna (w tym punkcie).

Przykład. Niech $n = 2$ i $\mathcal{V} = \mathcal{R}^2$ i niech $\text{var}S$ będzie prostą o równaniu

1) $x_1 = a$.

Wtedy $\tilde{x} = (a, \eta)$ (η - dowolne), $\nu = (1, 0)$. Tak więc w przypadku:

a) operatora falowego $\square = \partial_{11} - \partial_{22}$ jest $S_2^2(\tilde{x}) = (1)^2 - (0)^2 > 0$, a zatem prosta ta ma orientację przestrzenną;

b) operatora dyspersji $D = \partial_{11}$ jest $S_2^2(\tilde{x}) = (1)^2 > 0$, a zatem prosta ta ma orientację przestrzenną;

2) $x_2 = b$.

Wtedy $\tilde{x} = (\xi, b)$ (ξ - dowolne), $\nu = (0, 1)$. Tak więc w przypadku:

a) operatora falowego $\square = \partial_{11} - \partial_{22}$ jest $S_2^2(\tilde{x}) = (0)^2 - (1)^2 < 0$, a zatem prosta ta ma orientację czasową;

b) operatora dyspersji $D = \partial_{11}$ jest $S_2^2(\tilde{x}) = (0)^2 = 0$, a zatem prosta ta ma orientację charakterystyczną;

3) $x_1 + x_2 = c$.

Wtedy $\tilde{x} = (\xi, c - \xi)$ (ξ - dowolne), $\nu = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Tak więc w przypadku:

a) operatora falowego $\square = \partial_{11} - \partial_{22}$ jest $S_2^2(\tilde{x}) = (\sqrt{2}/2)^2 - (\sqrt{2}/2)^2 = 0$, a zatem prosta ta ma orientację charakterystyczną;

b) operatora dyspersji $D = \partial_{11}$ jest $S_2^2(\tilde{x}) = (\sqrt{2}/2)^2 > 0$, a zatem prosta ta ma orientację przestrzenną.

1.5. Operatory całkowe

I chociaż równaniami całkowymi nie będziemy się zajmować, to nieco wprowadzenia do wiedzy o liniowych operatorach całkowych może być przydatne – z racji ich zastosowań w niektórych

transformacjach całkowych (służących m.in. do rozwiązywania równań różniczkowych) oraz zastosowań w Metodzie Elementów Brzegowych (MEB), specyficznym przypadku szczególnym MES jak uważają jedni lub szczególnej alternatywie MES jak uważają inni.

Niech \mathcal{M} podzbiór μ -mierzalny przestrzeni \mathcal{R}^n , a $k(\cdot, \cdot) : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^m$ dane

odwzorowanie, dla którego istnieje μ -całka $z(x) = \int_{\mathcal{M}} k(x, \xi) y(\xi) d\mu$ dla każdego

odwzorowania $y(\cdot)$ z danej przestrzeni liniowej $M_{n,m;\mu}(\mathcal{M})$, będącej podprzestrzenią

przestrzeni liniowej odwzorowań μ -całkowalnych $I_{n,m;\mu}(\mathcal{M})$.

Odwzorowanie

$$\mathbf{K}_{n,m} : \mathbf{V}_{n,m;\mu}(\mathcal{M}) \supset \mathbf{I}_{n,m;\mu}(\mathcal{M}) \supset \mathbf{M}_{n,m;\mu}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{V}_{n,m;\mu}(\mathcal{M});$$

$$\mathbf{K}_{n,m} y(x) = \int_{\mathcal{M}} k(x, \xi) y(\xi) d\mu \quad \forall x \in \mathcal{M}$$

jest liniowe – nazywamy je operatorem całkowym (odwzorowanie $k(\cdot, \cdot)$ nosi nazwę jądra tego operatora); \forall oznacza „dla prawie każdego ...” względem miary μ , $\mathbf{V}_{n,m;\mu}(\mathcal{M})$ przestrzeń funkcyjną podstawową $\mathbf{V}_{n,m}(\mathcal{M})$, w której dwa elementy $y(\cdot)$ i $z(\cdot)$ są sobie równe, gdy $y(x) = z(x) \quad \forall x \in \mathcal{M}$, co zapisujemy $y(\cdot) \doteq z(\cdot)$. Przy tym $y(\cdot) = (y_j(\cdot))$,

$$k(\cdot, \cdot) = (k_{jl}(\cdot, \cdot)) \text{ i } k(x, \xi) y(\xi) = \left(\sum_{l=1}^m k_{jl}(x, \xi) y_l(\xi) \right), \quad x, \xi \in \mathcal{M}.$$

Przy $m = 1$ stosujemy oznaczenia $\mathbf{V}_{n;\mu}(\mathcal{M})$, $\mathbf{I}_{n;\mu}(\mathcal{M})$, $\mathbf{M}_{n;\mu}(\mathcal{M})$ i \mathbf{K}_n oraz stosowne uproszczenia oznaczeń $(y_1(\cdot)) \stackrel{\text{ozn}}{=} y(\cdot)$, $(k_{11}(\cdot, \cdot)) \stackrel{\text{ozn}}{=} k(\cdot, \cdot)$ i $((\mathbf{K}_{n,m} y(x))_1) \stackrel{\text{ozn}}{=} \mathbf{K}_{n,m} y(x)$. Jeśli $m = n = 1$, to odpowiednio piszemy $\mathbf{V}_{\mu}(\mathcal{M})$, $\mathbf{I}_{\mu}(\mathcal{M})$, $\mathbf{M}_{\mu}(\mathcal{M})$ i \mathbf{K} . Jeśli natomiast, μ jest miarą Riemanna ($d\mu = dV, dS, ds$ odpowiednio do wymiaru miary) lub ogólniej miarą Lebesgue'a, to pomijamy wyróżnik μ w ww. oznaczeniach przestrzeni: $\mathbf{V}_{n,m}(\mathcal{M}), \dots, \mathbf{M}(\mathcal{M})$.

Przykład. Niech $\mathcal{M} = \mathcal{D}$ będzie zbiorem zwartym, R-mierzalnym w przestrzeni \mathcal{R}^n . Niech $k(\cdot, \cdot) = (k_{jl}(x, \xi))$, $x = (x_i), \xi = (\xi_i) \in \mathcal{D}$ będzie odwzorowaniem klasy $\mathbf{C}_{n \times n, m \times m}(\mathcal{D} \times \mathcal{D})$ i niech $y(\cdot) = (y_l(\cdot)) \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathcal{D}) = \mathbf{C}_{n,m}(\mathcal{D})$ ($j, l = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n$). Wtedy

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{n,m} : \mathbf{C}_{n,m}(\mathcal{D}) &\rightarrow \mathbf{C}_{n,m}(\mathcal{D}); \quad \mathbf{K}_{n,m} y(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{D}} k(x, \xi) y(\xi) dV = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{l=1}^m \int_{\mathcal{D}} \dots \int_{\mathcal{D}} k_{jl}(x_i, \xi_i) y_l(\xi_i) dV(\xi_i) \right) \end{aligned}$$

jest prawidłowo zdefiniowanym operatorem całkowym. Ponieważ odwzorowanie ciągłe na zbiorze zwartym jest ograniczone, więc można przyjąć, że jest to operator liniowy

$$\mathbf{K}_{n,m} : \mathbf{D}_{n,m}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{D}_{n,m}(\mathcal{D}).$$

Przykład. Niech $\mathcal{M} = \mathcal{V}$ będzie obszarem w przestrzeni \mathcal{R}^n . Niech $k(\cdot, \cdot) = (k_{jl}(x, \xi))$,

$$x = (x_i), \xi = (\xi_i) \in \mathcal{V} \text{ będzie odwzorowaniem klasy } \mathbf{L}_{n \times n, m \times m}^2(\mathcal{V} \times \mathcal{V})$$

($\iint_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}} |k(x, \xi)|^2 dV(x) dV(\xi) < \infty$) i niech $y(\cdot) = (y_l(\cdot)) \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathcal{V}) = \mathbf{L}_{n,m}^2(\mathcal{V})$

($j, l = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n$). Wtedy

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{n,m} : \mathbf{L}_{n,m}^2(\mathcal{V}) &\rightarrow \mathbf{L}_{n,m}^2(\mathcal{V}); \quad \mathbf{K}_{n,m} y(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{V}} k(x, \xi) y(\xi) dV = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{l=1}^m \int_{\mathcal{V}} \dots \int_{\mathcal{V}} k_{jl}(x_i, \xi_i) y_l(\xi_i) d\xi_1 \dots d\xi_n \right) \end{aligned}$$

jest prawidłowo zdefiniowanym operatorem całkowym. W szczególności jest tak

w przypadku, gdy jądro $k(\cdot, \cdot)$ jest słabo osobliwe, tzn. $k(x, \xi) = \kappa(x, \xi) / |x - \xi|^\alpha$,

$x, \xi \in \mathcal{V}$ ($x \neq \xi$), gdzie $\kappa(\cdot, \cdot) \in \mathbf{C}_{n \times n, m \times m}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}_{n \times n, m \times m}^\infty(\mathcal{V} \times \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}_{n \times n, m \times m}^2(\mathcal{V} \times \mathcal{V})$,

$0 < \alpha < n/2$.

MMIL II

Część druga. RÓWNANIA

2. Równania różniczkowe. Wprowadzenie

2.1. Podstawowe definicje i klasyfikacja ogólna

2.2. O rozwiązaniach równań różniczkowych

2.3. Przykłady równań

2. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE. WPROWADZENIE

W tym niedużym rozdziale wprowadzającym „łagodnie” w problematykę równań różniczkowych przedstawimy nieco „generalistów”, zilustrowanych prostymi przykładami, by rozważania nie były zbyt „górnolotne”.

2.1. Podstawowe definicje i klasyfikacja ogólna

Jeżeli równanie matematyczne $F = 0$ ($F = (F_j) \in \mathcal{R}^m$), w którym niewiadome odwzorowanie (układ funkcji, funkcja) $u = (u_l): \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R}^m$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}^n$, \mathcal{V} – obszar ($m, n \in \mathcal{N}$) występuje w wyrażeniu na co najmniej jedną składową F_j przez co najmniej jedną pochodną (rzędu co najmniej pierwszego) co najmniej jednej składowej $u_l = u_l(x)$, $x = (x_i) \in \mathcal{V}$ tego odwzorowania, to równanie takie nazywamy równaniem różniczkowym.

Biorąc powyższe pod uwagę możemy, w języku skonkretyzowanym i bardziej tradycyjnym, wyróżnić cztery przypadki:

- układ m równań cząstkowych $F_j = 0$, tj. z pochodnymi cząstkowymi niewiadomego układu m funkcji (rzeczywistych) n zmiennych (rzeczywistych) $u_j = u_j(x_i)$, $j = 1, 2, \dots, m$ ($i = 1, \dots, n$) – przy $m > 1$, $n > 1$,
- pojedyncze równanie cząstkowe $F = 0$, tj. z pochodnymi cząstkowymi niewiadomej funkcji (rzeczywistej) n zmiennych (rzeczywistych) $u = u(x_i)$ – przy $m = 1$, $n > 1$,
 $(F_1)^{\text{ozn}} = F$, $(u_1)^{\text{ozn}} = u$,
- układ m równań zwyczajnych $F_j = 0$, tj. z pochodnymi zwyczajnymi niewiadomego układu m funkcji (rzeczywistych) jednej zmiennej rzeczywistej $u_j = u_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m$ – przy $m > 1$, $n = 1$ ($x_1)^{\text{ozn}} = x$),
- pojedyncze równanie zwyczajne $F = 0$, tj. z pochodnymi zwyczajnymi niewiadomej funkcji (rzeczywistej) jednej zmiennej (rzeczywistej) $u = u(x)$ – przy $m = 1$, $n = 1$,
 $(F_1)^{\text{ozn}} = F$, $(u_1)^{\text{ozn}} = u$, $(x_1)^{\text{ozn}} = x$.

Reasumując, w przypadkach pierwszym i trzecim ($m > 1$) mówimy (tradycyjnie) o układach równań różniczkowych, natomiast w przypadkach drugim i czwartym ($m = 1$) chodzi o równanie różniczkowe (pojedyncze).

W przypadkach pierwszym i drugim ($n > 1$) w równaniach występują pochodne cząstkowe niewiadomych funkcji – wtedy równania różniczkowe nazywamy cząstkowymi, np.:

- $2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 = 0, \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad (m = 2, n = 2),$
- $\frac{\partial u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (m = 1, n = 2).$

Natomiast, w przypadkach drugim i czwartym ($n = 1$) pochodne niewiadomych funkcji są zwyczajne, a równania różniczkowe noszą nazwę zwyczajnych, np.:

- $2 \frac{du_1}{dx} + u_2 = 0, \frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx} = 0 \quad (m = 2),$
- $x \frac{du}{dx} + u^2 = 0 \quad (m = 1).$

W przypadku równań cząstkowych obszar \mathcal{V} może być ograniczony lub nieograniczony. Dla $n = 2$ mamy, na przykład: $\mathcal{V} = (a, b) \times (c, d)$ (prostokąt, przy czym jeśli $d = \infty$, to półpasmo), $\mathcal{V} = \{(x_1, x_2) : (x_1)^2 + (x_2)^2 < a^2\}$ (koło), a dla $n = 3$, przykładowo: $\mathcal{V} = \mathcal{A} \times (a, b)$, gdzie \mathcal{A} jest obszarem w przestrzeni \mathcal{R}^2 (jeśli, np. \mathcal{A} jest kołem, a $b = \infty$, to \mathcal{V} jest półnieskończonym walcem). W przypadku równań zwyczajnych przez \mathcal{V} rozumiemy przedział liczbowy (x', x'') , przy czym $x'' < \infty$ lub $x'' = \infty$.

Do dopełnienia definicji równania różniczkowego brakuje jeszcze skonkretyzowania postaci lewej strony dostatecznie ogólnej postaci równania (wektorowego) $F = 0$, czyli wyrażenia F dla dowolnych i szczególnych wartości parametrów równania m i n oraz maksymalnego rzędu pochodnych niewiadomej u , oznaczanego przez k .

Dostatecznie ogólną postać równania różniczkowego, z wykorzystaniem wprowadzonych w rozdz. 1.3 operatorów różniczkowych, zapiszemy następująco:

$$F(x, A_{n,m}^0 u(x), A_{n,m}^1 u(x), \dots, A_{n,m}^k u(x)) = 0, \quad (m \geq 1, n \geq 1, k \geq 1),$$

gdzie

$$F = (F_j) : \mathcal{V} \times \underbrace{\mathcal{R}^m \times \dots \times \mathcal{R}^m}_{k+1 \text{ razy}} \supset \text{Dom}(F) \rightarrow \mathcal{R}^m$$

F_j dane funkcje ciągłe (co najmniej), a $u = (u_j) \in C_{n,m}^k(\mathcal{V})$, $x = (x_i) \in \mathcal{V}$ ($j = 1, \dots, m$; $i = 1, \dots, n$), przy czym dla $m = 1$ lub $n = 1$ stosujemy zwykle odpowiednie wyszczególnione wcześniej i w rozdz. 1.3 oznaczenia upraszczające bądź uszczegółwiające zapisy równań rozważanych równań różniczkowych. Dodajmy jeszcze, że wymaganie ciągłości i różniczkowości danych i niewiadomych odwzorowań (funkcji) w rozumieniu klasycznym oznacza, że w większości prezentowanych wywodów będziemy zajmować się z założenia sformułowaniami klasycznymi równań i związanych z nimi zagadnień, przy czym klasyczność formułowania obejmuje przede wszystkim jego lokalność, tj. spełnienie równania różniczkowego dla każdego punktu obszaru \mathcal{V} oraz spełnienie dodatkowych relacji (warunków) na (hiper)powierzchni (krzywej dla $n = 2$) S dla wszystkich (lub prawie

wszystkich) punktów tego zbioru, a następnie czynienie zadość założeniom odpowiedniej gładkości poszukiwanego rozwiązania. Natomiast sformułowaniu nieklasycznym poświęcimy odrębną uwagę w dwóch rozdziałach.

W dalszym ciągu całej tej części niniejszego opracowania z matematyki *gros* uwagi poświęcimy równaniom różniczkowym liniowym, gdy wyrażenie (wektorowe)

$F = K_{n,m}^k u(x) - f(x)$, $x \in \mathcal{V}$, gdzie $K_{n,m}^k \in L(C_{n,m}^k(\mathcal{V}); C_{n,m}(\mathcal{V}))$ jest danym liniowym (pełnym) operatorem różniczkowym z pochodnymi o rzędzie maksymalnym równym k ($k \geq 1$), tj. $K_{n,m}^k = \sum_{r=0}^k A_{n,m}^r$, przy czym $A_{n,m}^r$ jest operatorem różniczkowym z pochodnymi rzędu r ($r \geq 1$) przy $A_{n,m}^k \neq 0$, a $A_{n,m}^0$ jest operatorem algebraicznym, $u \in C_{n,m}^k(\mathcal{V})$ jest niewiadomym odwzorowaniem, zaś $f \in C_{n,m}(\mathcal{V})$ jest odwzorowaniem danym (tzw. prawą stroną równania liniowego). Zatem nasze równanie różniczkowe można zapisać w następującej zwyczajowej postaci

$$K_{n,m}^k u = f \quad \text{w } \mathcal{V}.$$

Tak więc nazwa tego równania (cząstkowe lub zwyczajne) jest taka, jak operatora $K_{n,m}^k$ (i dalsze nazewnictwo również). Równanie to nazywamy przy tym jednorodnym, gdy $f \equiv 0$ (w przypadku przeciwnym – niejednorodnym). Podobnie, równanie powyższe jest o stałych (zmiennych) współczynnikach, gdy takim jest operator $K_{n,m}^k$. No i przy $k = 0$ równanie jest algebraiczne.

Gdy typ równania (układu równań, pojedynczego równania), tj. parametr n i jego rzęd $s = km$ są akurat nieistotne można użyć zapisu symbolicznego wskazującego na równanie różniczkowe liniowe

$$K u = f \quad \text{w } \mathcal{V}.$$

2.2. O rozwiązaniach równań różniczkowych

Jakiegokolwiek odwzorowanie $u_s \in C_{n,m}^k(\mathcal{V})$, określone jednoznacznie na \mathcal{V} , które spełnia równanie $F = 0$ tożsamościowo, tj. $F(x, \dots)|_{u=u_s} \equiv 0$, nazywamy rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną przy $k > 0$) tego równania. Odwzorowanie $u_o \in C_{n,m}^k(\mathcal{V})$, które spełnia nasze równanie i z którego, w wyniku specyfikacji elementów dowolnych, można otrzymać dowolne rozwiązanie szczególne tego równania nosi nazwę rozwiązania ogólnego (przy $n = 1$) lub rozwiązania dowolnego (przy $n > 1$) lub też, gdy $k > 0$, odpowiednio całki ogólnej ($n = 1$) bądź całki dowolnej ($n > 1$). Stąd, poszukiwanie (wyznaczanie) rozwiązań równania różniczkowego określa się też jako całkowanie tego równania. Jeżeli $n = 1$, to zbiór \mathcal{L} par (x, u^*) w przestrzeni \mathcal{R}^{1+m} przy $u^* = u(x)$, $x \in \mathcal{V} = (a, b)$, gdzie u jest rozwiązaniem równania

różniczkowego (zwyčajnego) przy $m > 1$ nazywa się (hiper)krzywą całkową tego równania, zaś zbiór $\mathcal{T} = \{ u(x), x \in (a, b) \}$ w przestrzeni \mathcal{R}^m nosi nazwę trajektorii tego równania.

W przypadku, gdy $n > 1$ przy $m = 1$, zbiór $\mathcal{S} = \{ (x, u^*): u^* = u(x), x \in \mathcal{V} \}$ w przestrzeni \mathcal{R}^{n+1} , gdzie u jest rozwiązaniem równania różniczkowego (cząstkowego), określamy terminem (hiper)powierzchni całkowej tego równania.

Przykładowo,

- 1) $u_s = x^2, u_{\mathcal{S}} = x^2 + 5$ są całkami szczególnymi równania $u' = 2x$ ($m = n = 1, k = 1$);
- 2) $u_s = \sin x, u_{\mathcal{S}} = \cos x$ są całkami szczególnymi równania $u'' + u = 0$ ($m = n = 1, k = 2$);
- 3) $u_s = 2x_1, u_{\mathcal{S}} = 2x_1 + x_2^2$ są rozwiązaniami szczególnymi równania $u_{,1} = 2$ ($m = 1, n = 2, k = 1$);
- 4) $u_s = (2x, x^2), u_{\mathcal{S}} = (2x + 1, x^2 + x)$ są rozwiązaniami szczególnymi układu równań $u_1' = 2, u_2' - u_1 = 0$ ($m = 2, n = 1, k = 1$),

podczas, gdy

- 1) $u_o = x^2 + C$ (C – stała dowolna) jest całką ogólną równania $u' = 2x$ ($m = n = 1, k = 1$);
- 2) $u_o = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ (C_1, C_2 – stałe dowolne) jest całką ogólną równania $u'' + u = 0$ ($m = n = 1, k = 2$);
- 3) $u_o = 2x_1 + C(x_2)$, jest dowolnym rozwiązaniem równania $u_{,1} = 2$, jeśli $C(x_2)$ jest dowolną funkcją zmiennej x_2 ($m = 1, n = 2, k = 1$);
- 4) $u_o = (2x + C_1, x^2 + C_1x + C_2)$ (C_1, C_2 – stałe dowolne) jest rozwiązaniem ogólnym układu równań $u_1' = 2, u_2' - u_1 = 0$ ($m = 2, n = 1, k = 1$).

Aby uzyskać jednoznaczne rozwiązanie szczególne, to (jak wynika z charakteru rozwiązania ogólnego) należy narzucić dotatkowe warunki, jakie powinna spełnić całka szczególna.

Właściwością równania liniowego jest następująca postać rozwiązania ogólnego (dowolnego) $u_{o,n}$ równania niejednorodnego:

$$u_{o,n} = u_{s,n} + u_{o,j},$$

gdzie $u_{s,n}$ jest jakimkolwiek (!) rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego,

a $u_{o,j}$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego, gdyż $K_{n,m}^k u_{o,n} = K_{n,m}^k (u_{s,n} + u_{o,j}) = K_{n,m}^k u_{s,n} + K_{n,m}^k u_{o,j} = f + 0 = f$. Oznacza to, że zbiór wszystkich elementów $u_{o,j}$ pokrywa się z podprzestrzenią liniową przestrzeni $C_{n,m}^k(\mathcal{V})$, jakim jest

$\ker K_{n,m}^k$, natomiast zbiór wszystkich $u_{o,n}$, czyli przeciwobraz $\{f\}$ w operatorze $K_{n,m}^k$ jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $C_{n,m}^k(\mathcal{V})$.

2.3. Przykłady równań

Oprócz równań liniowych w ogólnej postaci wyróżnimy także równania prawie liniowe, tj. równania postaci:

$$A_{n,m}^k u + G(x, A_{n,m}^0 u, \dots, A_{n,m}^{k-1} u) = 0,$$

gdzie G jest danym odwzorowaniem ciągłym (układem funkcji ciągłych, funkcją ciągłą) wszystkich swoich argumentów w pewnym obszarze przestrzeni \mathcal{R}^{n+km} ($k \geq 1$).

Poniżej podajemy jeszcze kilka przykładów różnego typu równań różniczkowych:

a) układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego

Jeżeli $k = 1$, $n = 1$ i m – dowolne oraz $A_{1,m}^1 u = \left(\frac{du_1}{dx}, \dots, \frac{du_m}{dx} \right)^{\text{ozn}} = \left(\frac{du}{dx} \right)$ i $G = -f(x, u)$

przy $A_{1,m}^0 u = u$, to mamy układ równań w tzw. postaci normalnej – zwartej lub rozwiniętej:

$$\frac{du}{dx} = f(x, u) \quad \text{lub} \quad \frac{du_j}{dx} = f_j(x, u_1, \dots, u_m), \quad j = 1, \dots, m,$$

gdzie $u = (u_1, \dots, u_m) : (x', x'') \rightarrow \mathcal{R}^m$, $x \in (x', x'')$, $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{R}^{1+m} \supset \text{Dom } f \rightarrow \mathcal{R}^m$; identyczną postać jak wyżej po lewej stronie ma pojedyncze równanie rzędu pierwszego w postaci normalnej ($m = 1$);

b) równanie różniczkowe zwyczajne liniowe rzędu k

Jeżeli przy $n = 1$, $m = 1$ i k dowolnym $A_{1,1}^r u = a_r \frac{d^r u}{dx^r} = u^{(r)}$ ($r = 0, 1, \dots, k$; $a_k \neq 0$), to mamy następujące równanie różniczkowe liniowe rzędu k :

$$a_0(x)u + a_1(x)u^{(1)}(x) + \dots + a_k(x)u^{(k)}(x) = f(x), \quad x \in (x', x'')$$

gdzie $a_k(x) \neq 0$ na przedziale (x', x'') ;

c) układ równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego

Jeżeli $k = 1$, $n > 1$, $m > 1$ i $A_{n,m}^0 u = \left(\sum_{l=1}^m a_{jl;0}(x)u_l(x) \right)$,

$A_{n,m}^1 u = \left(\sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n a_{jl;i}(x)u_{l,i}(x) \right)$, $u = (u_j(x))$, $f = (f_j(x))$, $x = (x_i) \in \mathcal{V} \subset \mathcal{R}^n$, to

wymieniony układ równań ma postać:

$$\sum_{l=1}^m \left[\sum_{i=1}^n a_{jl;i}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u_l}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) + b_{jl}(x_1, \dots, x_n) u_l(x_1, \dots, x_n) \right] = f_j(x_1, \dots, x_n), \quad (19)$$

gdzie $a_{jl;0} \stackrel{\text{ozn}}{=} b_{jl}$;

d) równanie różniczkowe cząstkowe liniowe o pochodnych rzędu k

Jeżeli $k > 1$, $n > 1$ i $m = 1$ oraz $K_{n,1}^k u = A_{n,1}^k u = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 \dots i_k}(x) \partial_{i_1 \dots i_k} u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$,

przy co najmniej jednej funkcji $a_{i_1 \dots i_k}(x) \neq 0$ dla $x \in \mathcal{V}$, to wymienione równanie ma postać:

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_n) \partial_{i_1 \dots i_k} u(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V}.$$

MMIL II

Część druga. RÓWNANIA

3. Równania różniczkowe zwyczajne

3.1. Wiadomości ogólne

1. Postacie równań
2. Sprowadzanie do układu równań z pochodnymi rzędu pierwszego
3. Sprowadzanie układu równań do pojedynczego równania
4. Całki pierwsze
5. Postacie rozwiązań

3.2. Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych

1. Równanie rzędu pierwszego o zmiennych rozdzielonych
2. Równanie rzędu pierwszego liniowe
3. Równanie rzędu pierwszego zupełne
4. Równanie liniowe o stałych współczynnikach
5. Równanie liniowe o zmiennych współczynnikach. Równanie Eulera
6. Równanie o współczynnikach wielomianowych. Funkcje specjalne
7. Układ równań o stałych współczynnikach

3.3. Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych z warunkami dodatkowymi

1. Zagadnienie Cauchy'ego i zagadnienie początkowe
2. Zagadnienia brzegowe
3. Zagadnienie spektralne

3. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

W tym rozdziale zajmiemy się równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Z uwagi na powtórzenia w dużym stopniu wiedzy z tego zakresu na kursie matematyki na studiach pierwszego stopnia oraz z uwagi na wiadomości dotyczące powyższych równań zawarte w rozdz. 1 i 2 materiał poniższy będzie przedstawiony w dużym stopniu w sposób syntetyczny, aczkolwiek ilustrowany przykładami.

3.1. Wiadomości ogólne

1. Postacie równań

Równanie różniczkowe zwyczajne - rrz (wektorowe przy $m > 1$) o maksymalnym rzędzie pochodnych k przedstawia się w ogólnej postaci następująco:

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(k)}(x)) = 0, \quad x \in X = (x', x''), \quad (1)$$

gdzie niewiadome odwzorowanie $u(\cdot) \in C_{1,m}^k(X)$, F jest danym wyrażeniem o dziedzinie $\text{Dom } F \subset \mathcal{R}^{1+(k+1)m}$ i o wartościach w przestrzeni \mathcal{R}^m klasy C (co najmniej) i C^1 względem $u^{(k)}$, spełniającym warunek nieosobliwości macierzy Jacobi'ego $\partial F / \partial u^{(k)}$ na przedziale X . Przez rząd tego równania rozumiemy liczbę $s = km$. Wiedząc czym jest zmienna u w powyższym równaniu można je zapisać w bardziej zwartej jeszcze postaci

$$F(x, u, u', \dots, u^{(k)}) = 0, \quad x \in X, \quad (2)$$

Przez postać normalną rrz o pochodnych rzędu k rozumiemy równanie (wektorowe przy $m > 1$), które można, na przykład, otrzymać z postaci (1):

$$u^{(k)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(k-1)}(x)), \quad x \in X, \quad (3)$$

lub krócej równanie (por. (2))

$$u^{(k)} = f(x, u, u', \dots, u^{(k-1)}), \quad x \in X, \quad (4)$$

gdzie f jest danym wyrażeniem o dziedzinie $\text{Dom } f \subset \mathcal{R}^{1+km}$ i o wartościach w przestrzeni \mathcal{R}^m klasy C (co najmniej).

Postacią normalną rrz wektorowego o pochodnych rzędu pierwszego jest w szczególności

$$u' = f(x, u), \quad x \in X, \quad (5)$$

która z kolei w formie rozwiniętej staje się (przy $m > 1$) układem m równań zwyczajnych rzędu pierwszego

$$\frac{du_j}{dx} = f_j(x, u_1, \dots, u_m), \quad x \in X, \quad j = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Postać (5) zasługuje na uwagę między innymi dlatego, że (jak zobaczymy dalej) do niej można sprowadzić dowolny układ rrz dowolnego rzędu ($m, k > 1$ – dowolne). W związku z tym, wiele podręczników i monografii poświęconych rrz zajmuje się głównie takimi równaniami.

Dosyć często spotykaną, dogodną w pewnych zagadnieniach jest tzw. postać symetryczna układu rrrz rzędu pierwszego, w której zmienna niezależna x i zmienne zależne u_1, \dots, u_m traktowane są równoprawnie:

$$(x, u_1, \dots, u_m) = (y_1, \dots, y_n), \quad n = m + 1.$$

Postać ta jest następująca:

$$\frac{d y_1}{Y_1(y_1, \dots, y_n)} = \frac{d y_2}{Y_2(y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{d y_n}{Y_n(y_1, \dots, y_n)}, \quad (7)$$

gdzie Y_1, \dots, Y_n są funkcjami ciągłymi w pewnym obszarze $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n$.

Układ równań w postaci normalnej (6) można zapisać w postaci symetrycznej

$$\frac{d x}{1} = \frac{d u_1}{f_1(x, u_1, \dots, u_m)} = \dots = \frac{d u_m}{f_m(x, u_1, \dots, u_m)}.$$

Natomiast układ równań (7) można zapisać w postaci normalnej, jeśli tylko co najmniej jedna funkcja Y_j nie ma miejsc zerowych w pewnym obszarze $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}^1$. Jeśli jest to, na przykład, funkcja Y_1 , to przyjmując y_1 jako zmienną niezależną mamy:

$$\frac{d y_2}{d y_1} = \frac{Y_2(y_1, \dots, y_n)}{Y_1(y_1, \dots, y_n)}, \dots, \frac{d y_n}{d y_1} = \frac{Y_n(y_1, \dots, y_n)}{Y_1(y_1, \dots, y_n)}, \quad (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{D}', \quad (8)$$

czyli postać (6) przy $u_1 = y_2, \dots, u_m = y_n$ ($m = n - 1$), $x = y_1$, $f_1 = Y_2/Y_1, \dots, f_m = Y_n/Y_1$.

Równanie różniczkowe zwyczajne liniowe - rrrzl (wektorowe) o maksymalnym rzędzie pochodnych k ma postać następującą:

$$a_0(x)u(x) + a_1(x)u^{(1)}(x) + \dots + a_k(x)u^{(k)}(x) = f(x), \quad x \in \mathcal{X} \quad (9)$$

gdzie $a_r(\cdot) = (a_{jl;r}(\cdot))$, $f(\cdot) = (f_j(\cdot))$ ($r = 0, 1, \dots, k$; $j, l = 1, \dots, m$) dane układy funkcji, przy założeniu, że $\det[a_{jl;k}(x)] \neq 0$ dla każdego $x \in \mathcal{X}$. Równanie powyższe można zapisać w postaci macierzowej i zarazem zwartej następująco:

$$[a_{jl;0}(x)][u_l] + [a_{jl;1}(x)][u_l^{(1)}(x)] + \dots + [a_{jl;k}(x)][u_l^{(k)}(x)] = [f_j(x)]. \quad (10)$$

Po pominięciu w tym równaniu nawiasów kwadratowych otrzymujemy rozwinięty zapis układu m równań dla $j = 1, \dots, m$:

$$\sum_{l=1}^m \{ a_{jl;0}(x)u_l + a_{jl;1}(x)u_l^{(1)}(x) + \dots + a_{jl;k}(x)u_l^{(k)}(x) \} = f_j(x). \quad (11)$$

¹ jeśli $Y_i(y_1^0, \dots, y_n^0) = 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $(y_1^0, \dots, y_n^0) \in \mathcal{D}$, to (y_1^0, \dots, y_n^0) jest punktem osobliwym układu równań (7) – punktem równowagi obiektu fizycznego opisanego równaniami (7); rozwiązanie takiego układu równań w otoczeniu punktu równowagi wymaga odrębnych rozważań

Odpowiednikiem bardzo zwięzłego zapisu (2) dowolnego układu m równań zwyczajnych jest w przypadku równań liniowych zapis poniższy

$$a_0 u + a_1 u^{(1)} + \dots + a_k u^{(k)} = f, \quad (12)$$

który po wykorzystaniu pojęcia operatora różniczkowego zwyczajnego o maksymalnym rzędzie pochodnych k przyjmuje symboliczną postać

$$K_{1,m}^k u = f. \quad (13)$$

Wszystkie postacie wektorowego rrrz (tj. z wyjątkiem postaci (7), (10) i (9)) obejmują wprost przypadek pojedynczego równania z niewiadomą funkcją u – z tym, że równanie (13) zapisujemy w sposób uproszczony

$$K^k u = f. \quad (14)$$

Przykład. W celu prostej ilustracji powyższych rozważań podajemy na zakończenie tego punktu przykład układu dwóch równań liniowych niejednorodnych rzędu drugiego o stałych współczynnikach :

$$\begin{aligned} 2u_1'' + u_2'' + u_1 + u_2 &= 2 \sin x, \\ u_1'' + u_2'' + u_1 + 2u_2 &= -\sin x, \end{aligned} \quad x \in (0, \infty)$$

Przykład ten będzie się pojawiać w wielu miejscach tego rozdziału jako dość reprezentatywny dla ilustrowanych nim wywodów. Przyjmując, że x jest zmienną czasową, można go interpretować jako równania drgań liniowych wymuszonych nietłumionych układu materialnego sprężystego o dwóch stopniach swobody.

Jest to przypadek szczególny równania (9) (por. również (10) przy $m = k = 2$, $s = km = 4$ oraz

$$\begin{aligned} u(x) &= \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} 2 \sin x \\ -\sin x \end{bmatrix}, \\ a_0(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad a_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a_2(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Niezależnie od tego, jaka jest postać wektorowego rrrz rzędu $s = km$ dowolnego (2) czy liniowego (10) można to równanie sprowadzić do równoważnego układu s równań rzędu pierwszego.

2. Sprowadzanie do układu równań z pochodnymi rzędu pierwszego

Ideę tej operacji przedstawimy najpierw na prostym przykładzie.

Przykład. Rozważmy układ dwóch równań ($m = 2$) z poprzedniego przykładu. Zawiera on pochodne rzędu drugiego niewiadomych funkcji ($k = 2$). Ponieważ drugie pochodne są pierwszymi pochodnymi pierwszych pochodnych, to te pierwsze pochodne wprowadzamy jako nowe niewiadome funkcje, a wzory definicyjne tych nowych niewiadomych dopisujemy do istniejących równań, uwzględniając w tych równaniach nowe niewiadome.

Zatem zapisujemy (dla ułatwienia postępowania) istniejące równania następująco:

$$\begin{aligned} 2(u_1')' + (u_2')' + u_1 + u_2 &= 2 \sin x, \\ (u_1')' + (u_2')' + u_1 + 2u_2 &= -\sin x, \end{aligned} \quad (a)$$

wprowadzamy nowe niewiadome

$$u_3 = u_1', \quad u_4 = u_2', \quad (b)$$

uwzględniamy wzory (b) w równaniach (a) i dopisujemy równości (b) jako dodatkowe równania (w pierwszej kolejności):

$$\begin{aligned} u_1' - u_3 &= 0, \\ u_2' - u_4 &= 0, \\ 2u_3' + u_4' + u_1 + u_2 &= 2 \sin x, \\ u_3' + u_4' + u_1 + 2u_2 &= -\sin x, \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy układ czterech równań ($\tilde{m} = 4 = s = km$) z pochodnymi rzędu pierwszego ($\tilde{k} = 1$) nowego układu (wektora) niewiadomych funkcji $\tilde{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Ten prosty schemat postępowania (z powyższego przykładu) można powielić w przypadku dowolnego układu równań w postaci wektorowej (2) (m, k – dowolne). Mianowicie, wprowadzamy sekwencyjnie nowe niewiadome, będące pochodnymi wektora aktualnych niewiadomych do rzędu $k-1$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 = u, \quad \tilde{u}_2 = \tilde{u}_1' = u', \quad \tilde{u}_3 = \tilde{u}_2' = u'', \dots, \tilde{u}_k = \tilde{u}_{k-1}' = u^{(k-1)}, \\ \tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k) = (u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_{km}) \end{aligned}$$

oraz następujące wyrażenia

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 = \tilde{u}_1' - \tilde{u}_2, \quad \dots, \quad \tilde{F}_{k-1} = \tilde{u}_{k-1}' - \tilde{u}_k, \quad \tilde{F}_k = F, \\ \tilde{F} = (\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_{k-1}, \tilde{F}_k) = (u_1' - u_2, \dots, F_1, \dots, F_m). \end{aligned}$$

Wtedy równanie (2) jest równoważne równaniu

$$\tilde{F}(x, \tilde{u}, \tilde{u}') = 0,$$

a więc równaniu wektorowemu ($\tilde{F} \in \mathcal{R}^s$, $s = km$) o pochodnych rzędu pierwszego.

Zaletą takiego układu jest to, że po znalezieniu jego rozwiązania mamy wyznaczone nie tylko niewiadome funkcje, ale także ich pochodne do rzędu $k-1$, a pochodne rzędu k możemy wyznaczyć z równania. Wadą zaś jest duży rozmiar wektora nieznanymi funkcji, gdy wyjściowe równanie zawiera pochodne dużego rzędu.

3. Sprowadzanie układu równań do pojedynczego równania

Postępowaniem alternatywnym do przedstawionego w p. 2, często dogodnym przy znajdowaniu rozwiązań równań różniczkowych (nie tylko zwyczajnych) jest sprowadzanie układu tych równań do jednego równania. Rozważmy prosty przykład ($k = 1, m = 2, s = 2$):

$$2u_1' - 3(u_2')^2 = 1, \quad u_1'' + 2u_2 = 0.$$

Wyznaczając z drugiego równania $u_2 = -1/2 u_1''$ i podstawiając do pierwszego otrzymujemy

$$2u_1' - \frac{3}{4}(u_1''')^2 = 1.$$

Natomiast, różniczkując równanie pierwsze, wyznaczając $u_1'' = 3u_2' u_2''$ i podstawiając do drugiego równania dostajemy $3u_2' u_2'' + 2u_2 = 0$.

Sprowadzenia układu równań do jednego równania można dokonać różnymi metodami.

Metoda eliminacji (jak w powyższym przykładzie) polega na wyrugowaniu z układu równań $m-1$ niewiadomych funkcji i pozostawienie jednej przez zastosowanie dopuszczalnych operacji algebraicznych na równaniach i ich różniczkowania. Wymaga nieraz dużej pomysłowości i przede wszystkim praktyki w jej stosowaniu. Inna metoda, zwana ogólnie metodą potencjału (dotyczy także równań cząstkowych) polega na takim wyrażeniu niewiadomych funkcji za pomocą nowej niewiadomej, że $m-1$ równań jest spełnionych tożsamościowo, a jedno prowadzi do równania na tę nową niewiadomą funkcję. Metoda ta ma w specyficznych przypadkach szczególnych specyficzne nazwy. Jedną z odmian jest metoda rachunku operatorowego, która ma zastosowanie do układu równań o stałych współczynnikach i którą teraz przedstawimy.

Równanie operatorowe (14) przedstawiamy w następującej postaci macierzowej

$$[K_{jl}][u_l] = [f_j], \quad (a)$$

gdzie K_{jl} jest operatorem różniczkowym zwyczajnym działającym na funkcję u_l w j -tym równaniu ($j, l = 1, \dots, m$), a więc zgodnie z (11) w postaci

$$K_{jl} = \sum_{r=0}^k a_{jl;k-r} d^{k-r}, \quad (b)$$

gdzie d jest symbolem pochodnej traktowanym jak element algebraiczny, a rząd tej pochodnej jak wykładnik potęgi (K_{jl} jest wielomianem stopnia k względem zmiennej d).

Wprowadzamy wektor funkcji $U = (U_1, \dots, U_m) \in C_{1,m}^s(X)$ ($s = k, m$) za pomocą zapisu macierzowego:

$$[u_l] = [K_{ls}^*][U_s], \quad (c)$$

gdzie K_{ls}^* jest operatorem różniczkowym liniowym, o stałych współczynnikach, utworzonym jako dopełnienie algebraiczne elementu K_{sl} w macierzy $[K_{jl}]$, przy traktowaniu symbolu pochodnej d jako zmiennej algebraicznej ($[K_{jl}^*]$ jest macierzą dopełnień macierzy $[K_{jl}]$).

Podstawiając wzór (c) do równania (a) i uwzględniając formułę obliczenia wyznacznika macierzy otrzymujemy równania różniczkowe w postaci operatorowej

$$K^* U_j = f_j \quad (j = 1, \dots, m), \quad K^* = \det[K_{jl}], \quad (d)$$

gdzie K^* jest operatorem różniczkowym zwyczajnym rzędu s . Równania (d) są identyczne (z dokładnością do prawej strony), o postaci równania (14). W celu znalezienia całki ogólnej równania jednorodnego (14), czyli równania jednorodnego (a) wystarczy wyznaczyć rozwiązanie jednego z równań jednorodnych (d), tj. rzrł jednorodnego o stałych

współczynnikach

$$K^* V = 0, \quad (e)$$

po przyjęciu (na przykład)

$$U_1 = \dots = U_{m-1} = 0, \quad U_m = V. \quad (f)$$

Wtedy na podstawie (c) i (f) mamy:

$$u_j = K_{jm}^* V, \quad x \in X, \quad j = 1, \dots, m. \quad (g)$$

Przykład. Sprowadzimy do jednego równania metodą rachunku operatorowego układ równań jednorodnych z przykładu w p. 2:

$$\begin{aligned} 2u_1'' + u_2'' + u_1 + u_2 &= 0, \\ u_1'' + u_2'' + u_1 + 2u_2 &= 0, \end{aligned} \quad x \in (0, \infty).$$

Zatem, macierz operatorów różniczkowych (b) ma postać

$$[K_{jl}] = \begin{bmatrix} 2d^2 + 1d^0 & 1d^2 + 1d^0 \\ 1d^2 + 1d^0 & 1d^2 + 2d^0 \end{bmatrix},$$

a w konsekwencji jej wyznacznik – postać

$$K^* = 1d^4 + 3d^2 + 1d^0,$$

zaś macierz jej dopełnień algebraicznych przedstawia się następująco

$$[K_{jl}^*] = \begin{bmatrix} d^2 + 2d^0 & -d^2 - d^0 \\ -d^2 - d^0 & 2d^2 + 1d^0 \end{bmatrix}.$$

Tak więc wyjściowy układ równań sprowadziliśmy do równania pojedynczego z niewiadomą funkcją $V = V(x)$, $x \in (0, \infty)$:

$$K^* V = V^{(4)} + 3V'' + V = 0,$$

po scałkowaniu którego, znajdujemy

$$u_1 = K_{12}^* V(x) = -V''(x) - V(x),$$

$$u_2 = K_{22}^* V(x) = 2V''(x) + V(x).$$

4. Całki pierwsze

Ważną rolę przy całkowaniu równań różniczkowych pełnią całki pierwsze układu rrz.

Rozważmy, dla ustalenia uwagi, układ rrz rzędu pierwszego w postaci normalnej (6), zwartej i rozwiniętej:

$$\frac{du}{dx} = f(x, u), \quad (a)$$

$$\frac{du_j}{dx} = f_j(x, u_1, \dots, u_m), \quad j = 1, \dots, m, \quad (b)$$

gdzie $u = (u_1, \dots, u_m): X = (x', x'') \rightarrow \mathcal{R}^m$, $x \in X$, $f = (f_1, \dots, f_m): \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}^m$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^{1+m}$, przy założeniu, że funkcja f (każda funkcja f_j) jest co najmniej ciągła względem wszystkich zmiennych w pewnym obszarze \mathcal{D} .

Funkcję

$$\varphi = \varphi(x, u_1, \dots, u_m) = \varphi(x, u), \quad (c)$$

klasy C^1 na pewnym obszarze $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ (przy $x \in (\alpha, \beta) \subset \mathcal{X}$), nazywamy całką pierwszą równań (b) (równania wektorowego (a)), jeżeli dla dowolnego rozwiązania szczególnego $u = u(x)$ ($u_j = u_j(x)$, $j = 1, \dots, m$) przyjmuje wartość stałą, tzn.

$$\varphi(x, u_1(x), \dots, u_m(x)) \equiv \varphi(x, u(x)) \equiv C = \text{const}, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Wtedy w konsekwencji, zgodnie z (b), jest też:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u_1(x), \dots, u_m(x)) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(x, u_1(x), \dots, u_m(x)) \times f_j(x, u_1(x), \dots, u_m(x)) \equiv 0, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

tzn. funkcja $v = \varphi(y_0, y_1, \dots, y_m) = \varphi(y)$ przy $y = (y_0, y_1, \dots, y_m) = (x, u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{D}' \subset \mathcal{R}^{1+m}$ spełnia (jest całką) równanie różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego

$$\sum_{i=0}^m f_i(y) \partial_i v(y) = 0 \quad (f_0 = 1).$$

Przykład. Niech $u_1' = u_2$, $u_2' = -u_1$ ($m = 2$). Rozwiązaniem ogólnym tego układu równań jest układ dwóch funkcji $u_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $u_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $x \in \mathcal{R}$, a całką pierwszą funkcja $\varphi = u_1^2 + u_2^2$, gdyż dla każdego układu wartości stałych całkowania C_1 i C_2 jest: $(C_1 \cos x + C_2 \sin x)^2 + (-C_1 \sin x + C_2 \cos x)^2 = C_1^2 + C_2^2 = C = \text{const}$, $x \in \mathcal{R}$.

Całki pierwsze układu równań (b)

$$\varphi_l = \varphi_l(x, u_1, \dots, u_m), \quad l = 1, \dots, r \leq m, \quad (d)$$

są niezależne, jeśli (z definicji) macierz Jacobiego

$$J = \left[\frac{\partial \varphi_l}{\partial u_j} \right]_{m \times r}$$

jest rzędu r w obszarze \mathcal{D}' .

Założmy, że $\det \left[\frac{\partial \varphi_l}{\partial u_j} \right]_{r \times r} \neq 0$ ($j, l = 1, \dots, r$) w pewnym podobzdarze $\mathcal{D}'' \subset \mathcal{D}'$. Wtedy

zależności (d) można odwrócić względem u_1, \dots, u_r (potraktować (d) jak układ równań względem u_1, \dots, u_r przy danych $\varphi_l = C_l$, $l = 1, \dots, r$), otrzymując:

$$u_j = \psi_j(x, C_1, \dots, C_k; u_{k+1}, \dots, u_m), \quad j = 1, \dots, r < m \quad (e)$$

czyli rozwiązania pierwszych r równań (b). Podstawiając (e) do pozostałych równań (b), otrzymujemy pozostałe $m-r$ równania do rozwiązania z niewiadomymi u_{k+1}, \dots, u_m :

$$\frac{du_j}{dx} = f_j(x, \psi_1(x, C_1, \dots, C_k; u_{k+1}, \dots, u_m), \dots, \psi_k(x, C_1, \dots, C_k; u_{k+1}, \dots, u_m), u_{k+1}, \dots, u_m), \quad j = k+1, \dots, m. \quad (f)$$

Przykład. Zastosujmy wyżej opisany sposób redukcji liczby równań różniczkowych do rozwiązania układu równań różniczkowych ruchu kulistego bryły sztywnej (np. żyroskopu).

Niech $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ będą trzema składowymi w kierunku osi głównych bryły wektora chwilowej prędkości kątowej, a J_1, J_2, J_3 będą głównymi momentami bezwładności tej bryły. Mamy zatem do rozwiązania (przy braku sił zewnętrznych) następujący układ równań (przy $x = t$ – zmienna czasowa)

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3, \quad J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1, \quad J_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (J_2 - J_1)\omega_2\omega_1.$$

Mnożąc powyższe równania odpowiednio przez $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ i dodając stronami otrzymujemy:

$$J_1\omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} + J_2\omega_2 \frac{d\omega_2}{dt} + J_3\omega_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0.$$

Zauważmy, że lewa strona tego równania jest pochodną zupełną wyrażenia na energię kinetyczną bryły w ruchu kulistym, czyli

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad E = \frac{1}{2}(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2).$$

Zatem $E = E(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ jest całką pierwszą rozpatrywanego układu równań – energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu kulistym przy braku sił zewnętrznych, poza siłami reakcji w środku tego ruchu, jest stała: $E = E(t) = \text{const}$.

Drugą całkę pierwszą otrzymamy mnożąc równania różniczkowe ruchu bryły odpowiednio przez $J_1\omega_1, J_2\omega_2, J_3\omega_3$ i dodając stronami. Mamy zatem:

$$J_1^2\omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} + J_2^2\omega_2 \frac{d\omega_2}{dt} + J_3^2\omega_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0,$$

$$\frac{dK^2}{dt} = 0, \quad K^2 = \frac{1}{2}(J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2),$$

gdzie $K = (J_1\omega_1, J_2\omega_2, J_3\omega_3)$ są składowymi wektora krętu w kierunkach głównych osi bezwładności. Zatem K^2 jest całką pierwszą rozpatrywanych równań różniczkowych.

Przyjmując, że $J_1 > J_2 > J_3$, wyliczamy z całek pierwszych ω_1^2 i ω_2^2 :

$$\omega_1^2 = -\alpha_1\omega_3^2 + \beta_1, \quad \omega_2^2 = \alpha_2\omega_3^2 - \beta_2,$$

gdzie

$$\alpha_1 = \frac{J_3(J_1 - J_3)}{J_2(J_1 - J_2)}, \quad \beta_1 = \frac{2J_1E - K^2}{J_2(J_1 - J_2)},$$

$$\alpha_2 = \frac{J_3(J_2 - J_3)}{J_1(J_1 - J_2)}, \quad \beta_2 = \frac{2J_2E - K^2}{J_1(J_1 - J_2)}.$$

Wyrażenia na ω_1^2 i ω_2^2 podstawiamy do trzeciego równania różniczkowego ruchu, które pozostaje do rozwiązania.

5. Postacie rozwiązań

Rozwiązanie ogólne wektorowego równania różniczkowego zwyczajnego (2) można zapisać następująco:

$$u_o = \zeta(x; C_{(s)}), \quad (15)$$

gdzie $C_{(s)} = (C_1, \dots, C_s) \in \mathcal{P}_{(s)} \subseteq \mathcal{R}^s$ jest wektorem stałych dowolnych ze zbioru s -wymiarowego $\mathcal{P}_{(s)}$ (w szczególności $\mathcal{P}_{(s)} = \mathcal{R}^s$), zwanych stałymi całkowania, tzn. dla każdego dopuszczalnego układu wartości stałych (C_1, \dots, C_s) ze zbioru $\mathcal{P}_{(s)}$ odwzorowanie $\mathcal{X} \ni x \rightarrow \zeta(x; C_{(s)}) \in \mathcal{R}^m$ spełnia tożsamościowo równanie (2), przy czym odwzorowanie to jest klasy $C_{1,m}^k(\mathcal{X})$. Liczba s jest rzędem równania (2) i przy założeniu, że $\det[\partial F / \partial u^{(k)}] \neq 0$ jest $s = km$.

Niestety nie istnieje przepis (metoda, algorytm) na wyznaczenie odwzorowania (15) w przypadku dowolnego rrrz (2). Obfita literatura przedmiotu rrrz podaje jedynie rozwiązania lub wskazówki służące wyznaczeniu niewiadomej (15) (zwłaszcza przy $m=1$) w mniej lub bardziej szczególnych przypadkach). Stosunkowo więcej można powiedzieć o całkowaniu równań liniowych, zwłaszcza o stałych współczynnikach. Przedstawimy to w zarysie w dalszym toku wywodów.

W przypadku wektorowego równania liniowego (13) (m i k – dowolne przy $s \geq 1$) mamy następującą właściwość:

$$u_o = u_{s;n} + u_{o;j}, \quad (16)$$

gdzie $u_{s;n} = \eta(x)$, $x \in \mathcal{X}$ jest dowolną (jakakolwiek) całką szczególną równania niejednorodnego (13), a $u_{o;j} = \xi(x; C_{(s)})$, $x \in \mathcal{X}$, $C_{(s)} \in \mathcal{R}^s$ - całką ogólną równanie jednorodnego (13), tzn.

$$K_{1,m}^k u_{s;n} = f, \quad K_{1,m}^k u_{o;j} = 0. \quad (17)$$

Ponadto, wobec liniowości operatora $K_{1,m}^k$ jest, co można wykazać, $\dim(\ker K_{1,m}^k) = s$, a w konsekwencji

$$u_{o;j} = C_1 u_{(1)}(x) + \dots + C_s u_{(s)}(x), \quad x \in \mathcal{X}, \quad (18)$$

gdzie $\{u_{(1)}, \dots, u_{(s)}\}$ jest bazą algebraiczna przestrzeni $\ker K_{1,m}^k$, zwaną fundamentalnym układem całek równania $K_{1,m}^k u = 0$. Poszukiwać będziemy zatem liniowo niezależnych całek szczególnych równania jednorodnego (13) oraz całek szczególnych równania niejednorodnego (13), przy szczególnych (zwłaszcza ważnych w praktyce inżynierskiej) postaciach prawej strony f tego równania.

3.2. Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych

1. Równanie rzędu pierwszego o zmiennych rozdzielonych

Rozważmy rzz rzędu pierwszego w postaci normalnej

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (a)$$

przy funkcji f którą można przedstawić następująco:

$$f(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)}, \quad (b)$$

gdzie funkcje g i h są ciągłe. Wprowadzając infitezymalne przyrosty dx i dy zmiennych x i y stwierdzamy, że równanie (a) będzie spełnione, gdy

$$g(x)dx = h(y)dy. \quad (c)$$

Niech

$$G(x) = \int g(x)dx, \quad H(y) = \int h(y)dy. \quad (d)$$

Ponieważ $dG = dH$, więc z dokładnością do stałej dowolnej G i H są sobie równe, czyli

$$\int g(x)dx + C_1 = \int h(y)dy + C_2. \quad (e)$$

Równość (e) można traktować jako uwikłaną postać całki ogólnej $y = \zeta(x; C)$ ($C = C_1 - C_2$) równania (a) lub funkcji do niej odwrotnej $x = \xi(y; C')$ ($C' = C_2 - C_1$).

Przykład. Znajdziemy rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Mamy równanie o zmiennych rozdzielonych (c)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

a więc zgodnie z (e) jest

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y},$$

skąd

$$\ln |x| + C = \ln |y|$$

i w konkwencji

$$y = \pm e^C x.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$y = Dx \quad (D = \pm e^C - \text{stała dowolna}).$$

Przykład. Rozważmy równanie

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c),$$

gdzie f dana funkcja ciągła, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Zastosujemy podstawienie

$$u = ax + by + c,$$

które wobec równości

$$\frac{du}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} = a + b f(u),$$

sprowadza równanie wyjściowe do równania o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{du}{a + b f(u)} = dx.$$

Przykładowo, niech

$$\frac{dy}{dx} = x + y + 7.$$

Wtedy równanie przekształcone ma, zgodnie z powyższym, przy

$$f(u) = u = x + y + 7 \quad \text{i} \quad a = b = 1,$$

postać

$$\frac{du}{1 + u} = dx.$$

Po scałkowaniu stron tego równania mamy kolejno

$$\ln |1 + u| = x + C, \quad |1 + u| = e^C e^x, \quad 1 + u = \pm e^C e^x,$$

$$u = De^x - 1, \quad y = De^x - x - 8.$$

Jest wiele równań różniczkowych zwyczajnych, które poprzez odpowiednie podstawienia sprowadzają je do równań o zmiennych rozdzielonych.

2. Równanie pierwszego rzędu liniowe

Równaniem liniowym pierwszego rzędu jest równanie

$$y' + p(x)y = q(x), \quad x \in X, \quad (\text{a})$$

gdzie $p, q \in C(X)$ - dane.

Jeżeli $q(x) = 0$, to równanie jednorodne $y' + p(x)y = 0$ jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Zatem znajdujemy rozwiązanie:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + C, \quad y = De^{-\int p(x)dx}.$$

Następnie wykorzystujemy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego, aby znaleźć rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego. Stosujemy metodę uzmienniania stałych (tu stałej). Przyjmujemy, że stała D w całce ogólnej równania jednorodnego jest teraz funkcją zmiennej x , $D = D(x)$, taką aby $y(x) = D(x)e^{-\int p(x)dx}$ spełniało tożsamościowo równanie niejednorodne (a).

Zatem

$$y(x) = D(x)e^{-\int p(x)dx}, \quad y'(x) = D'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)D(x)e^{-\int p(x)dx}$$

wstawiamy do równania (a), otrzymując:

$$D'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)D(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)D(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$D'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$D'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

$$D(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$$

Ostatecznie mamy:

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx,$$

gdzie C jest stałą dowolną.

Jest chyba jedyny przypadek równania różniczkowego zwyczajnego w postaci ogólnej, którego rozwiązanie ogólne dało się wyrazić wzorem, sprowadzającym to rozwiązanie do możliwości wyznaczenia całek nieoznaczonych funkcji ciągłych.

Przykład. Znajdziemy rozwiązanie ogólne równania

$$y' - \operatorname{ctg} x y = \sin^3 x.$$

Mamy zatem:

$$p(x) = -\operatorname{ctg} x, \quad q(x) = \sin^3 x,$$

$$\int p(x)dx = \ln \frac{1}{|\sin x|}, \quad -\int p(x)dx = \ln |\sin x|,$$

$$e^{\int p(x)dx} = \frac{1}{\sin x}, \quad e^{-\int p(x)dx} = \sin x,$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx = \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x,$$

i ostatecznie

$$y(x) = \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \right) \sin x.$$

3. Równanie rzędu pierwszego zupełne

Rozważmy równanie różniczkowe rzędu pierwszego o postaci

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p(x, y)}{q(x, y)}, \quad (a)$$

które zapiszemy następująco:

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0, \quad (b)$$

gdzie $p, q \in C_2^1(\mathcal{D})$ funkcje dane, \mathcal{D} – obszar. Jeżeli istnieje $U \in C_2^2(\mathcal{D})$ taka, że

$$U_{,x}(x, y) = p(x, y), \quad U_{,y}(x, y) = q(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad (c)$$

to po podstawieniu (c) do równania (b) otrzymujemy

$$U_{,x}(x, y)dx + U_{,y}(x, y)dy = dU(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D},$$

co oznacza, że

$$U(x, y) = C$$

jest równaniem rodziny krzywych całkowych równania różniczkowego (a), U jest jego całką pierwszą. Równanie (b) nosi nazwę równania zupełnego. Warunkiem koniecznym i wystarczającym jego zaistnienia jest, aby obszar był jednospójny i zachodziła równość ($U_{,xy}(x, y) = U_{,yx}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}$):

$$p_{,y}(x, y) = q_{,x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}. \quad (d)$$

Przykład. Znajdziemy rozwiązanie równania

$$(4x^3 + 2xy^2 + 1)dx + (2x^2y - 1)dy = 0.$$

Mamy

$$p(x, y) = 4x^3 + 2xy^2 + 1, \quad q(x, y) = 2x^2y - 1.$$

Sprawdzamy warunek (d) czy równanie (b) jest równaniem zupełnym:

$$p_{,y}(x, y) = 4xy, \quad q_{,x}(x, y) = 4xy.$$

Jest. Zatem znajdujemy kolejno na podstawie (c):

$$U_{,x} = p(x, y) = 4x^3 + 2xy^2 + 1,$$

$$U_{,y} = q(x, y) = 2x^2y - 1,$$

$$U = \int p(x, y)dx = x^4 + x^2y^2 + x + C(y),$$

$$U_{,y} = 2x^2y + C'(y) = 2x^2y - 1,$$

$$C'(y) = -1, \quad C(y) = -y + C_1,$$

$$U = x^4 + x^2y^2 + x - y + C_1$$

Rozwiązaniem równania (b) jest więc

$$x^4 + x^2y^2 + x - y + C_1 = C_2,$$

gdzie C_1, C_2 - stałe dowolne. Ostatecznie rodzina krzywych całkowych równania (b) przedstawia się następująco:

$$x^4 + x^2y^2 + x - y = C.$$

Bywa, że równanie różniczkowe jest postaci (b), ale nie spełnia warunku zupełności (d). Ale bywa też, że istnieje funkcja $\lambda \in C_2^1(\mathcal{D})$, zwana czynnikiem całkującym, przez którą mnożymy równanie i dzięki czemu tak zmodyfikowane równanie już spełnia warunek (d), czyli:

$$p'_{,y}(x, y) = q'_{,x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D},$$

gdzie

$$p'(x, y) = \lambda(x, y)p(x, y) \quad q'(x, y) = \lambda(x, y)q(x, y).$$

Przykład. Znajdziemy rozwiązanie równania

$$(4x^2 + 2y^2)dx + (2xy)dy = 0.$$

Równanie to nie jest zupełne, a przy tym dość trudne do scałkowania. Ale prostsze będzie, gdy przemnożymy przez czynnik całkujący x . Otrzymamy wtedy równanie zupełne (warunek (d) będzie spełniony):

$$(4x^3 + 2xy^2)dx + (2x^2y)dy = 0.$$

Zatem, jeśli $U_{,x} = 4x^3 + 2xy^2$, to $U = x^4 + x^2y^2 + C_1(y)$. Z kolei $U_{,y} = 2x^2y + C'_1(y) = 2x^2y$, skąd $C_1(y) = \text{const}$ i ostatecznie równanie rodziny krzywych całkowych ma postać

$$x^4 + x^2y^2 = C.$$

4. Równanie liniowe o stałych współczynnikach

Rozważmy równanie liniowe rzędu k o stałych współczynnikach:

$$y^{(k)} + p_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + p_1y' + p_0y = f(x), \quad x \in X \quad (\text{a})$$

(X - przedział liczbowy). Zgodnie z wiadomościami z p. 5 poprzedniego podrozdziału rozwiązanie ogólne tego równania ma postać:

$$y = C_1y_{(1)}(x) + \dots + C_ky_{(k)}(x) + y_s(x), \quad x \in X, \quad (\text{b})$$

gdzie $(y_{(1)}(\cdot), \dots, y_{(k)}(\cdot))$ jest układem liniowo niezależnych całek równania jednorodnego:

$$y_{(r)}^{(k)} + p_{k-1}y_{(r)}^{(k-1)} + \dots + p_1y_{(r)}^{(1)} + p_0y_{(r)} = 0 \quad (r = 1, \dots, k)$$

(fundamentalnym układem rozwiązań tego równania), (C_1, \dots, C_k) - układem niezależnych stałych (stałych całkowania), zaś $y_s(\cdot)$ - jakąkolwiek całką szczególną równania (niejednorodnego) (a).

A. Niezależne całki równania jednorodnego

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem całek $y_{(r)}(\cdot)$ z wyrażenia (b), czyli całek równania jednorodnego:

$$y^{(k)} + p_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + p_1y' + p_0y = 0. \quad (\text{c})$$

Poszukujemy je w postaci:

$$y_{(r)} = e^{\rho x}, \quad x \in \mathcal{R}. \quad (\text{d})$$

Po wstawieniu do równania (c) otrzymujemy tzw. równanie charakterystyczne:

$$\rho^k + p_{n-1}\rho^{k-1} + \dots + p_1\rho + p_0 = 0, \quad (\text{e})$$

będące równanie algebraiczne stopnia k , tzn. jeżeli ρ jest pierwiastkiem równania (e), to funkcja (d) należy do fundamentalnego układu całek równania (c).

Równanie (e), o współczynnikach rzeczywistych, ma k pierwiastków rzeczywistych lub zespolonych (w tym wypadku parami sprzężonych), wliczając w to krotność pierwiastków.

Można więc wyznaczyć k liniowo niezależnych całek równania (c), jeśli uwzględnimy, że:

- jeżeli w przypadku pierwiastka rzeczywistego $\rho_r = \rho_0$ jego krotność wynosi κ , to całkami niezależnymi są funkcje

$$y_{r'} = e^{\rho_0 x}, \quad y_{r'+1} = x e^{\rho_0 x}, \quad \dots, \quad y_{r'+\kappa-1} = x^{\kappa-1} e^{\rho_0 x}, \quad (\text{f})$$

- jeśli w przypadku pierwiastka zespolonego $\rho_r = \alpha + i\omega$ jego krotność wynosi λ , to całkami liniowo niezależnymi są funkcje

$$y_{r''} = e^{\alpha x} \sin \omega x, \quad y_{r''+1} = e^{\alpha x} \cos \omega x, \quad y_{r''+2} = x e^{\alpha x} \sin \omega x, \quad y_{r''+3} = x e^{\alpha x} \cos \omega x, \quad \dots, \quad (\text{g})$$

$$y_{r''+2\lambda-2} = x^{\lambda-1} e^{\alpha x} \sin \omega x, \quad y_{r''+2\lambda-1} = x^{\lambda-1} e^{\alpha x} \cos \omega x.$$

Tak więc, wyznaczenie fundamentalnego układu całek równania (c) jest zdeterminowane możliwością znalezienia pierwiastków równania charakterystycznego (e).

Przykład. Wyznaczymy rozwiązanie ogólne równania

$$y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

Równanie charakterystyczne ma zatem postać

$$\rho^4 + 2\rho^3 + 3\rho^2 + 2\rho + 1 = 0.$$

Można je zapisać następująco:

$$\left[\left(\rho + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right]^2 = 0.$$

Zatem mamy sprzężoną parę podwójnych pierwiastków zespolonych

$$\rho_{1,2;3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

a więc zgodnie z (g) i (b) następujące rozwiązanie zadania:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + C_2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right) + x e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_3 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + C_4 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right).$$

B. Całka szczególna równania niejednorodnego

1° Metoda uzmienniania stałych całkowania

Jeżeli znamy fundamentalny układ całek równania jednorodnego (c), a więc jego rozwiązanie ogólne

$$y = C_1 y_{(1)}(x) + \dots + C_k y_{(k)}(x),$$

to całkę szczególną równania niejednorodnego (a) przyjmujemy w postaci

$$y_s = C_1(x) y_{(1)}(x) + \dots + C_k(x) y_{(k)}(x), \quad x \in X$$

zakładając, że funkcje $C_1(x), \dots, C_k(x)$ są klasy $C^1(\mathcal{X})$. Po zróźniczkowaniu tego wyrażenia i przyjęciu

$$C_1'(x)y_{(1)}(x) + \dots + C_k'(x)y_{(k)}(x) = 0,$$

mamy

$$y_s' = C_1(x)y_{(1)}'(x) + \dots + C_k(x)y_{(k)}'(x).$$

Kolejno dokonujemy tej samej operacji na kolejnych pochodnych $y_s^{(r)}$ aż do rzędu k , przyjmując tym razem

$$C_1'(x)y_{(1)}^{(k-1)}(x) + \dots + C_k'(x)y_{(k)}^{(k-1)}(x) = f(x)$$

i otrzymując

$$y_s^{(k)}(x) = C_1(x)y_{(1)}^{(k)}(x) + \dots + C_k(x)y_{(k)}^{(k)}(x).$$

W ten sposób, po podstawieniu wyrażen na funkcję i kolejne pochodne do równania niejednorodnego (a) stwierdzamy, że jest ono spełnione dzięki temu, że $(y_{(r)}, y_{(r)}', \dots, y_{(r)}^{(k)})$ spełniają równanie jednorodne (c) i spełniony jest układ równań

$$\begin{bmatrix} y_{(1)} & y_{(2)} & \dots & y_{(k)} \\ y_{(1)}' & y_{(2)}' & \dots & y_{(k)}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{(1)}^{(k-1)} & y_{(2)}^{(k-1)} & \dots & y_{(k)}^{(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \dots \\ C_k' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ f \end{bmatrix}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Właściwością fundamentalnego układu całek równania jednorodnego (c) jest nieosobliwość macierzy Wrońskiego (wrońskianu) \mathbf{W} , tzn. $\det \mathbf{W} \neq 0$, gdzie

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} y_{(1)} & y_{(2)} & \dots & y_{(k)} \\ y_{(1)}' & y_{(2)}' & \dots & y_{(k)}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{(1)}^{(k-1)} & y_{(2)}^{(k-1)} & \dots & y_{(k)}^{(k-1)} \end{bmatrix}, \quad x \in \mathcal{R}.$$

Oznacza to, że istnieje układ funkcji $(C_1(x), \dots, C_k(x))$ określający rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (a). Jego efektywne wyznaczenie sprowadza się zatem do możliwości rozwiązania powyższego układu równań z niewiadomymi $(C_1'(x), \dots, C_k'(x))$ i ich efektywnego całkowania.

Przykład. Znajdziemy metodą uzmienniania stałych całkę ogólną równania:

$$y'' + y = \sin x.$$

Równaniem charakterystycznym jest (przy $k = 2$)

$$\rho^2 + 1 = 0,$$

którego pierwiastkami są $\rho_{1,2} = \pm i$, co oznacza, że

$$y_1 = \sin x, y_2 = \cos x, f = \sin x, x \in \mathcal{R}$$

Układ równań na uzmiennione stałe całkowania ma zatem postać

$$\begin{aligned} C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x &= 0, \\ C_1'(x) \cos x - C_2'(x) \sin x &= \sin x. \end{aligned}$$

Rozwiązując go metodą wyznaczników, otrzymujemy

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \\ W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \sin x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin x \cos x, & W_2 &= \begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x, \\ C_1'(x) &= \frac{W_1}{W} = \sin x \cos x, & C_2'(x) &= \frac{W_2}{W} = -\sin^2 x. \end{aligned}$$

Stąd:

$$C_1(x) = \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + D_1 - \frac{1}{2}, \quad C_2(x) = \int -\sin^2 x dx = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x) + D_2,$$

a w efekcie

$$y(x) = C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x = D_1 \sin x + D_2 \cos x - \frac{1}{2}x \cos x$$

2° Metoda przewidywania

Jeżeli prawa strona równania (a) jest postaci

$$f = e^{\sigma x} x^s (a \sin \vartheta x + b \cos \vartheta x),$$

gdzie s jest liczbą naturalną lub zerem, a a, b, σ, ϑ liczbami (parametrami) rzeczywistymi, to rozwiązania szczególnego tego równania poszukujemy w postaci

$$y_s = e^{\sigma x} (P_l(x) \sin \vartheta x + Q_l(x) \cos \vartheta x),$$

gdzie $P_l(x)$ i $Q_l(x)$ są wielomianami odpowiedniego stopnia, przy czym mogą zachodzić różne przypadki:

1) σ nie jest pierwiastkiem rzeczywistym ani $\sigma + i\vartheta$ nie jest pierwiastkiem zespolonym równania charakterystycznego; wtedy, gdy:

a) $s = 0$, to $P_l(x) = A_0 = \text{const}$, $Q_l(x) = B_0 = \text{const}$ i w efekcie po podstawieniu

przewidywanego wyrażenia na y_s do równania (a) otrzymujemy z porównania stron dwa równania na nieznanne stałe A_0 i B_0 w funkcji stałych a i b oraz pozostałych parametrów σ, ϑ i współczynników w równaniu (a).

b) $s > 0$, to $l = s$ i $P_s(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_sx^s$, $Q_s(x) = B_0 + B_1x + \dots + B_sx^s$, a współczynniki, tzw. nieoznaczone, $A_0, A_1, \dots, A_s, B_0, B_1, \dots, B_s$ wyznaczamy z równań rekurencyjnych otrzymanych po podstawieniu przewidywanego wyrażenia na y_s do równania (a).

2) σ jest pierwiastkiem rzeczywistym równania charakterystycznego o krotności λ i $\varrho = 0$, to całkę szczególną przewidujemy w postaci zaproponowanej jak w p. 1), przemnożonej

wszakże przez x^λ , czyli $y_s = e^{\sigma x} x^\lambda (B_0 + B_1 x + \dots + B_s x^s)$,

3) $\sigma + i\varrho$ jest pierwiastkiem zespolonym równania charakterystycznego o krotności λ , to całkę szczególną przewidujemy w postaci zaproponowanej jak w p. 1), przemnożonej

wszakże przez x^λ .

Dodatkowo, jeżeli prawa strona równania (a) jest sumą funkcji wymienionej postaci, to z uwagi na liniowość tego równania rozwiązanie szczególne będzie odpowiednią sumą stosownych wyrażeń wymienionych w p. 1)-3). W szczególności dotyczy to przypadku, gdy

$$f = a_s x^s + \dots + a_1 x + a_0.$$

Wtedy

$$y_s = x^\lambda (A_s x^s + \dots + A_1 x + A_0),$$

gdzie λ jest krotnością pierwiastka $\sigma = 0$ równania charakterystycznego równania różniczkowego (a).

Przykład. Znajdziemy rozwiązanie ogólne równania

$$y^{(4)} + y''' - 2y'' = x.$$

Równanie charakterystyczne ma postać:

$$\rho^4 + \rho^3 - 2\rho^2 = 0,$$

którego pierwiastkami są:

$$\rho_{1,2} = 0, \quad \rho_3 = 1, \quad \rho_4 = -2.$$

Zatem całkami układu fundamentalnego są:

$$y_{(1)} = 1, \quad y_{(2)} = x, \quad y_{(3)} = e^x, \quad y_{(4)} = e^{-2x}.$$

Ponieważ $f = e^{0x} x^1$, więc całki szczególnej poszukujemy w postaci $y_s = x^2 (A_1 x^1 + A_2)$, co po podstawieniu do równania różniczkowego prowadzi do równań: $-2 \cdot 6A_1 = 1$,

$6A_1 - 2 \cdot 2A_2 = 0$, skąd $A_1 = -1/12$, $A_2 = -1/8$. Tak więc ostatecznie

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-2x} - \frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{12} x^3.$$

3° *Metoda całki Cauchy'ego*

Niech dana będzie w przedziale $[x_0, \infty)$ ciągła funkcja f po prawe stronie równania (a).

Założmy, że udało się wyznaczyć fundamentalny układ całek równania jednorodnego (c), a w konsekwencji rozwiązanie ogólne tego równania w postaci

$$y = C_1 y_{(1)}(x) + \dots + C_k y_{(k)}(x).$$

Oznaczmy przez y_C to powyższe rozwiązanie, które spełnia warunki

$$y_C(x_0) = 0, \quad y_C'(x_0) = 0, \dots, \quad y_C^{(k-2)}(x_0) = 0, \quad y_C^{(k-1)}(x_0) = 1.$$

Stałe C_1, \dots, C_k wyznaczamy zatem z układu równań algebraicznych:

$$\begin{bmatrix} y_{(1)}(x_0) & y_{(2)}(x_0) & \dots & y_{(k)}(x_0) \\ y_{(1)}'(x_0) & y_{(2)}'(x_0) & \dots & y_{(k)}'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{(1)}^{(k-1)}(x_0) & y_{(2)}^{(k-1)}(x_0) & \dots & y_{(k)}^{(k-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Okazuje się, że całka, zwana całką Cauchy'ego, jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego (a)

$$y_s = \int_{x_0}^x y_C(x-\xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in [x_0, \infty),$$

a ponadto

$$y_s(x_0) = 0, \quad y_s'(x_0) = 0, \dots, \quad y_s^{(k-2)}(x_0) = 0, \quad y_s^{(k-1)}(x_0) = 0.$$

Znaczenie tego wzoru jest jednak w dużej mierze pomniejszone przez trudności w wyznaczeniu całki, zwanej splotem funkcji y_C i f .

Przykład. Wyznamy metodą całki Cauchy'ego rozwiązanie szczególne równania

$$y'' + \omega^2 y = f_0 \sin \omega_0 x, \quad x \in [0, \infty)$$

Całą ogólną równania jednorodnego jest funkcja

$$y_j = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x,$$

a całką y_C tego równania spełniającą warunki $y_C(0) = 0, \quad y_C'(0) = 1$ jest funkcja

$$y_C = \frac{1}{\omega} \sin \omega x.$$

Zatem całką szczególną równania wyjściowego jest całka Cauchy'ego

$$y_s = \frac{f_0}{\omega} \int_0^x \sin \omega(x-\xi) \sin \omega_0 \xi d\xi, \quad x \in [0, \infty).$$

Uwzględniając wzór

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{f_0}{2\omega} \int_0^x [\cos(\omega x - \omega \xi - \omega_0 \xi) - \cos(\omega x - \omega \xi + \omega_0 \xi)] d\xi = \\ &= \frac{f_0}{\omega} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} [\omega_0 \sin \omega x - \omega \sin \omega_0 x], \quad x \in [0, \infty) \quad (0 < \omega_0 < \omega) \end{aligned}$$

i jak łatwo jest sprawdzić $y_s(0) = 0, \quad y_s'(0) = 0$.

5. Równanie liniowe o zmiennych współczynnikach. Równanie Eulera

Znalezienie rozwiązania równania liniowego o zmiennych współczynnikach jest, poza równaniem liniowym rzędu pierwszego, prawdziwym wyzwaniem. Weźmy pierwsze

równanie, jakie może się nasunąć:

$$\sin x y'' + x y' + e^{-x} y = \ln x, \quad x \in (0, \infty)$$

i konia z rzędem temu...

Tylko nieliczne równania liniowe w postaci w miarę ogólnej (tj szerszej niż postać unikatowa) dają się jakoś rozwiązywać i często tylko dlatego, że przez nietrywialne podstawienia dają się sprowadzić do równań o stałych współczynnikach.

Do takich należy równanie typu Eulera, spotykane między innymi w zagadnieniach, w których zmienną jest współrzędną radialną układu współrzędnych biegunowych, walcowych lub kulistych.

Równaniem Eulera rzędu k nazywamy równanie różniczkowe zwyczajne liniowe o zmiennych współczynnikach:

$$p_k (ax+b)^k y^{(k)} + p_{k-1} (ax+b)^{k-1} y^{(k-1)} + \dots + p_1 (ax+b)^1 y' + p_0 y = f(x) \quad (a)$$

gdzie $0 \neq a, b, p_i (i=0, 1, \dots, k-1), 0 \neq p_k \in \mathcal{R}$. W prosty sposób, przez podstawienie nowej zmiennej $\xi = ax + b$ i przy założeniu, że $f(x) = \tilde{f}(ax+b)$ oraz uwzględnieniu $\frac{dy}{dx} = a \frac{dy}{d\xi}$,

równanie (a) przedstawiamy w postaci

$$\tilde{p}_k \xi^k \frac{d^k y}{d\xi^k} + \dots + \tilde{p}_1 \xi^1 \frac{dy}{d\xi} + \tilde{p}_0 y = \tilde{f}(\xi), \quad (b)$$

w którym $y = y(\xi)$, $\tilde{p}_i = a^i p_i (i=0, 1, \dots, k) \in \mathcal{R}$. Zatem, bez utraty ogólności możemy założyć, że równanie Eulera ma postać (a) przy $a = 1, b = 0$:

$$p_k x^k y^{(k)} + p_{k-1} x^{k-1} y^{(k-1)} + \dots + p_1 x^1 y' + p_0 y = f(x), \quad x \in (0, \infty). \quad (c)$$

Całki równania jednorodnego (c) poszukujemy w postaci

$$y_{(j)} = Cx^\rho,$$

gdzie C jest stałą dowolną, a ρ pewnym parametrem. Po podstawieniu do równania (c) i uwzględnieniu iż $x^i [x^\rho]^{(i)} = \rho(\rho-1)\dots(\rho-i+1)x^\rho$, otrzymujemy wobec dowolności i ($i=1, \dots, k$) i C równanie algebraiczne

$$p_k \rho(\rho-1)\dots(\rho-k+1) + \dots + p_1 \rho + p_0 = 0,$$

które jest równaniem wielomianowym stopnia k o postaci

$$W_k(\rho) \equiv p_k \rho^k + \dots + p_0 = 0 \quad (d)$$

i które można nazwać równaniem charakterystycznym równania Eulera. Potwierdza to fakt, że po podstawieniu nowej zmiennej $\eta = \ln x$, otrzymujemy z równania Eulera (c) równanie o stałych współczynnikach

$$p_k \frac{d^{(k)}y}{d\eta^k} + \dots + p_0 = g(\eta), \quad (e)$$

gdzie $g(\eta) = f(e^\eta)$.

Zgodnie z powyższym ustaleniem i wskazaniem z p. 4 możemy określić fundamentalny układ liniowo niezależnych całek równania jednorodnego (c):

- jeśli pierwiastek równania (d) $\rho_{(i)}$ jest rzeczywisty λ -krotny, to całkami niezależnymi są funkcje

$$\exp(\rho_{(i)} \ln x) = \exp(\ln(x^{\rho_{(i)}})) = x^{\rho_{(i)}}, \dots, (\ln x)^\kappa \exp(\rho_{(i)} \ln x) = (\ln x)^\kappa \exp(\ln x^{\rho_{(i)}}) = x^{\rho_{(i)}} \ln^\kappa x$$

dla $\kappa = 0, \dots, \lambda - 1$;

- jeśli pierwiastek równania (d) jest zespolony λ -krotny o postaci $\sigma_{(i)} + i\omega_{(i)}$, to również λ -krotny jest pierwiastek sprzężony $\sigma_{(i)} - i\omega_{(i)}$, a w związku z tym całkami niezależnymi równania jednorodnego są funkcje

$$\exp(\sigma_{(i)} \ln x) \sin(\omega_{(i)} \ln x) = x^{\sigma_{(i)}} \sin(\ln x^{\omega_{(i)}}), \exp(\sigma_{(i)} \ln x) \cos(\omega_{(i)} \ln x) = x^{\sigma_{(i)}} \cos(\ln x^{\omega_{(i)}}), \dots,$$

$$(\ln x)^\kappa x^{\sigma_{(i)}} \sin(\ln x^{\omega_{(i)}}), (\ln x)^\kappa x^{\sigma_{(i)}} \cos(\ln x^{\omega_{(i)}}), \dots, \text{ dla } \kappa = 0, \dots, \lambda - 1.$$

Całki szczególnej równania niejednorodnego (c) możemy poszukiwać metodami podobnymi jak w p. 4 w odniesieniu do równania (e), w szczególności metodą przewidywania.

Jeśli więc, przykładowo, $f(x) = cx^\alpha$ ($g(\eta) = c(e^\eta)^\alpha = ce^{\alpha\eta}$), to $y_{(s)} = C_{(s)}x^\alpha$, co po podstawieniu do równania (c) prowadzi do prostego równania algebraicznego

$$C_{(s)} W_k(\alpha) = c.$$

Zatem, jeśli α nie jest pierwiastkiem $\rho_{(i)}$ równania charakterystycznego, to $W_k(\alpha) \neq 0$ i wtedy

$$y_{(s)} = \frac{c}{W_k(\alpha)} x^\alpha.$$

Natomiast, gdy $\alpha = \rho_{(i)}$ jest λ -krotnym pierwiastkiem (rzeczywistym) równania charakterystycznego (d), to całki szczególnej równania (c) poszukujemy w postaci

$$y_{(s)} = C_{(s)} x^\alpha \ln^2 x.$$

Przykład. Jako przykład rozwiązania równania Eulera weźmy równanie rzędu drugiego

$$(ax+b)^2 y'' + p(ax+b)y' + qy = c(ax+b)^\alpha,$$

przy $a > 0$, $c \neq 0$, $x > -b/a$.

Postępując w sposób wyżej opisany, wykonujemy kolejno następujące kroki:

1) szukamy całki ogólnej równania jednorodnego

$$(ax+b)^2 y'' + p(ax+b)y' + qy = 0$$

w postaci $y = C(ax+b)^\rho$, otrzymując równość

$$(ax+b)^2 a^2 \rho(\rho-1)(ax+b)^{\rho-2} + p(ax+b)a\rho(ax+b)^{\rho-1} + q(ax+b)^\rho = 0;$$

2) na podstawie tej równości uzyskujemy równanie charakterystyczne (kwadratowe),

$$a^2 \rho(\rho-1) + pa\rho + q = 0 \quad \text{lub} \quad \rho^2 + \left(\frac{p}{a} - 1\right)\rho + \frac{q}{a^2} = 0,$$

którego pierwiastki, w zależności od znaku wyróżnika $\Delta = \left(\frac{p}{a} - 1\right)^2 - \frac{4q}{a^2}$, są

- dla $\Delta > 0$ – dwiema liczbami rzeczywistymi $\rho_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{a}\right) \mp \frac{1}{4}\sqrt{\left(1 - \frac{p}{a}\right)^2 - \frac{4q}{a^2}}$,

- dla $\Delta = 0$ – identyczne (pierwiastek podwójny) $\rho_{1,2} = \rho_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{a}\right)$,

- dla $\Delta < 0$ – zespoloną parą sprzężoną $\rho_{1,2} = \sigma \mp i\omega$, $\sigma = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{a}\right)$, $\omega = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4q}{a^2} - \left(1 - \frac{p}{a}\right)^2}$;

3) odpowiednio do tego rozwiązanie ogólne równania jednorodnego wyraża się wzorem

- dla $\Delta > 0$

$$y_{(j)} = C_1(ax+b)^{\rho_1} + C_2(ax+b)^{\rho_2},$$

- dla $\Delta = 0$

$$y_{(j)} = C_1(ax+b)^{\rho_0} + C_2(ax+b)^{\rho_0} \ln(ax+b),$$

- dla $\Delta < 0$

$$y_{(j)} = C_1(ax+b)^\sigma \sin[\ln(ax+b)^\omega] + C_2(ax+b)^\sigma \cos[\ln(ax+b)^\omega],$$

gdzie C_1, C_2 stałe całkowania;

3) całkę szczególną równania niejednorodnego znajdujemy metodą przewidywania

$$y_{(s)} = C_{(s)}(ax+b)^\alpha,$$

gdyż po podstawieniu tego wyrażenia do równania otrzymujemy

$$y_{(s)} = \frac{c}{a^2\alpha(\alpha-1) + pa\alpha + q} (ax+b)^\alpha,$$

pod warunkiem, że α nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Gdyby jednak przy $\Delta > 0$ było $\alpha = \rho_1$ lub $\alpha = \rho_2$, wtedy należałoby przyjąć odpowiednio

$$y_{(s)} = C_{(s)}(ax+b)^{\rho_1} \ln(ax+b) \quad \text{lub} \quad y_{(s)} = C_{(s)}(ax+b)^{\rho_2} \ln(ax+b),$$

a więc (po podstawieniu do równania)

$$y_{(s)} = \frac{c}{a^2(2\rho_1 - 1) + pa} (ax + b)^{\rho_1} \ln(ax + b) \text{ lub}$$

$$y_{(s)} = \frac{c}{a^2(2\rho_2 - 1) + pa} (ax + b)^{\rho_2} \ln(ax + b),$$

natomiast, gdy przy $\Delta = 0$ byłoby $\alpha = \rho_0$, to powinno się założyć

$$y_{(s)} = C_{(s)}(ax + b)^{\rho_0} \ln^2(ax + b),$$

co po podstawieniu do równania daje wynik następujący

$$y_{(s)} = \frac{c}{2a^2} (ax + b)^{\rho_0} \ln^2(ax + b).$$

Zauważmy jeszcze na zakończenie, że równaniem Eulera jest także równanie

$$p_k \frac{d y^{(k)}}{d x^k} + p_{k-1} \frac{1}{x} \frac{d y^{(k-1)}}{d x^{k-1}} + \dots + p_1 \frac{1}{x^{k-1}} \frac{d y}{d x} + p_0 \frac{y}{x^k} = f(x), \quad x \in (0, \infty).$$

6. Równanie o współczynnikach wielomianowych. Funkcje specjalne

Kontynuując wątek z p. 5 poszukiwania rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych o zmiennych współczynnikach warto zwrócić uwagę na równania o współczynnikach wielomianowych (ze względów rachunkowych praktycznie prostych o niezbyt wysokim stopniu), które można rozwiązywać metodą współczynników nieoznaczonych. Podejście do zastosowania tej metody jest następujące: wykonujemy kolejne kroki do takiego, przy którym osiągniemy niepowodzenie. Jeżeli takowy krok się nie zdarzy, to mamy sukces. Tyle, że czasem trzeba zastosować dość finezyjne działanie, zwłaszcza przy ustalaniu punktu startowego, od którego rozpoczynamy postępowanie rekurencyjne w celu znajdowania kolejnych nieznanych współczynników w założonych szeregach potęgowych.

A. Algorytm

Krok 1° (wstępny – można go nazwać „kwalifikacyjnym”). Mamy równanie różniczkowe postaci

$$a_k(x)y^{(k)} + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad (a)$$

w którym współczynniki $a_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, k$) są wielomianami zmiennej x (pamiętamy, że stałe są wielomianami stopnia 0, ale jeżeli wszystkie p_i są stałe, to mamy przede wszystkim metody znajdowania rozwiązań opisane w p. 4). Jeżeli prawą stronę można przedstawić w postaci tzw. uogólnionej funkcji analitycznej, tj. w postaci

$$f(x) = x^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \right) \ln x + x^{\lambda-s} \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \right), \quad (b)$$

gdzie $f_n, g_n \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{C}$ - dane (ewentualnie po rozwinięciu danych funkcji w szeregi potęgowe), to całkę tego układu poszukujemy w postaci uogólnionej funkcji analitycznej

$$y(x) = x^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \ln x + x^{\lambda-s} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right), \quad (c)$$

w którym $b_n, c_n \in \mathcal{R}$ to nieznane (tzw. nieoznaczone) współczynniki w powyższych szeregach potęgowych (stąd również nazwa: metoda szeregów potęgowych).

Gdyby całkę szczególną równania (a) można było znaleźć w inny sposób, to postać (c) całki tego równania można wykorzystać do wyznaczenia niezależnych całek układu fundamentalnego rozwiązań równania jednorodnego (a).

Krok 2° (tworzenie rekurencyjnego układu równań dla rozwiązania bez logarytmu). Ten krok warto wykonać w każdym przypadku. Zatem założymy, że $f=0$ jak w równaniu jednorodnym (a) lub że f można przedstawić następująco:

$$f(x) = x^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \right). \quad (d)$$

W takim przypadku postulujemy najpierw rozwiązanie równania (a) w postaci

$$y(x) = x^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \quad (e)$$

Dalej, przedstawimy ideę postępowania, ilustrując ją przykładem równania rzędu drugiego ($k=2$) przy założeniu, że każdy wielomianów a_i jest stopnia pierwszego, tzn.

$$a_i(x) = p_{i0} + p_{i1}x \quad (i=0,1,2). \quad (f)$$

Podstawiając (d) - (f) do równania (a) i uwzględniając iż

$$\frac{d}{dx} x^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{\lambda+n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) b_n x^{\lambda+n-1},$$

$$\frac{d^2}{dx^2} x^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) b_n x^{\lambda+n-2},$$

$$x \frac{d}{dx} x^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) b_n x^{\lambda+n},$$

$$x \frac{d^2}{dx^2} x^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) b_n x^{\lambda+n-1},$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & p_{20} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) b_n x^{\lambda+n-2} + p_{21} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) b_n x^{\lambda+n-1} + p_{10} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) b_n x^{\lambda+n-1} + \\ & + p_{11} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) b_n x^{\lambda+n} + p_{00} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{\lambda+n} + p_{01} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{\lambda+n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{\lambda+n}. \end{aligned}$$

Podstawowym zadaniem w tym kroku postępowania jest ustalenie jaka potęga x jest najmniejsza po lewej stronie równania (chodzi oczywiście o wykładnik tej potęgi) i z jakim współczynnikiem sumarycznym pochodzącym od wszystkich składników w równaniu oraz jakie będą współczynniki sumaryczne przy kolejnych potęgach zmiennej x . Te współczynniki należy przyrównać do współczynników przy takich samych potęgach x po prawej stronie otrzymanego równania. Mamy zatem:

- $x^{\lambda-2}$: $p_{20}\lambda(\lambda-1)b_0 = 0$,
- $x^{\lambda-1}$: $p_{20}(\lambda+1)\lambda b_1 + p_{21}\lambda(\lambda-1)b_0 + p_{10}\lambda b_0 = 0$,
- x^λ : $p_{20}(\lambda+2)(\lambda+1)b_2 + p_{21}(\lambda+1)\lambda b_1 + p_{10}(\lambda+1)b_1 + p_{11}\lambda b_0 + p_{00}b_0 = f_0$, (g)
- $x^{\lambda+1}$: $p_{20}(\lambda+3)(\lambda+2)b_3 + p_{21}(\lambda+2)(\lambda+1)b_2 + p_{10}(\lambda+2)b_2 + p_{11}(\lambda+1)b_1 + p_{00}b_1 + p_{01}b_0 = f_1$,
- $x^{\lambda+n}$: $p_{20}(\lambda+n+2)(\lambda+n+1)b_{n+2} + p_{21}(\lambda+n+1)(\lambda+n)b_{n+1} + p_{10}(\lambda+n+1)b_{n+1} + [p_{11}(\lambda+n) + p_{00}]b_n + p_{01}b_{n-1} = f_n$,

Krok 3° (wyznaczenie całki szczególnej równania niejednorodnego). Załóżmy, że λ nie jest liczbą całkowitą ujemną i $p_{20} \neq 0$. Wtedy bez względu na to jakie byłyby wartości współczynników $b_0^{(s)}, b_1^{(s)}$ szeregu potęgowego w wyrażeniu (e), znajdujemy rekurencyjnie z równań (g) kolejne współczynniki $b_n^{(s)}$ ($n = 2, 3, \dots$), a w efekcie

$$y_{(s)}(x) = x^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(s)} x^n \right), \quad (h)$$

gdzie

$$b_2^{(s)} = \frac{f_0 - (p_{21}\lambda + p_{10})(\lambda+1)b_1^{(s)} - (p_{11}\lambda + p_{00})b_0^{(s)}}{p_{20}(\lambda+2)(\lambda+1)},$$

$$b_{n+2}^{(s)} = \frac{f_n - [p_{10} + p_{21}(\lambda+n)](\lambda+n+1)b_{n+1}^{(s)} - [p_{11}(\lambda+n) + p_{00}]b_n^{(s)} - p_{01}b_{n-1}^{(s)}}{p_{20}(\lambda+n+2)(\lambda+n+1)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Jeżeli nie uda się udowodnić, że szereg potęgowy w wyrażeniu (h) jest zbieżny i przy jakim promieniu zbieżności, to trzeba przynajmniej numerycznie sprawdzić czy istnieje $x^* < 1$, dla którego szereg ten jest zbieżny, a następnie numerycznie oszacować jego promień zbieżności.

Krok 4° (wyznaczenie całek równania jednorodnego (a) – w postaci (e) przy $k = 2$).

Przyjmując wszystkie $f_n = 0$, staramy się tak dobrać wartość parametru λ , by pewna liczba początkowych współczynników b_n mogła przyjmować dowolne wartości. Ustawione w wektor i przyjęte jako liniowo niezależne posłużą do wykreowania liniowo niezależnych całek układu fundamentalnego.

W naszym przypadku stwierdzamy, że jeżeli $p_{20} \neq 0$, to przy $\lambda = 0$ współczynniki b_0, b_1 mogą przyjmować niezerowe dowolne wartości (spełnione są wtedy równości (g)_{1,2}), a więc zakładając

$$(b_0^{(1)}, b_1^{(1)}) = (1, 0), \quad (b_0^{(2)}, b_1^{(2)}) = (0, 1),$$

otrzymujemy na podstawie równości (g)₃₋₅ dwie liniowo niezależne całki równania jednorodnego (a) przy $k = 2$, a więc w tym przypadku komplet

$$y_{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} x^n \quad (j = 1, 2), \quad (i)$$

gdzie

$$(b_0^{(1)}, b_1^{(1)}) = (1, 0), \quad (b_0^{(2)}, b_1^{(2)}) = (0, 1)$$

$$b_2^{(j)} = -\frac{p_{10}b_1^{(j)} + p_{00}b_0^{(j)}}{2p_{20}}, \quad b_3^{(j)} = -\frac{2(p_{21} + p_{10})b_2^{(j)} + (p_{11} + p_{00})b_1^{(j)} + p_{01}b_0^{(j)}}{6p_{20}},$$

$$b_{n+2}^{(j)} = -\frac{(n+1)(p_{21}n + p_{10})b_{n+1}^{(j)} + (p_{11}n + p_{00})b_n^{(j)} + p_{01}b_{n-1}^{(j)}}{p_{20}(n+2)(n+1)} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Tak, jak przy całce szczególnej, dowodzimy zbieżności, a jeśli nie to przynajmniej sprawdzamy numerycznie zbieżność szeregów (i) i próbujemy określić ich promień zbieżności.

Krok 2a° (przypadek osobliwy). Zobaczmy, jak kształtują się równości (g) w przypadku, gdy $p_{20} = 0$. Mamy wtedy

- $x^{\lambda-1}$: $p_{21}\lambda(\lambda-1)b_0 + p_{10}\lambda b_0 = 0$,
- x^λ : $p_{21}(\lambda+1)\lambda b_1 + p_{10}(\lambda+1)b_1 + p_{11}\lambda b_0 + p_{00}b_0 = f_0$, (j)
- $x^{\lambda+1}$: $p_{21}(\lambda+2)(\lambda+1)b_2 + p_{10}(\lambda+2)b_2 + p_{11}(\lambda+1)b_1 + p_{00}b_1 + p_{01}b_0 = f_1$,
- $x^{\lambda+n}$: $p_{21}(\lambda+n+1)(\lambda+n)b_{n+1} + p_{10}(\lambda+n+1)b_{n+1} + p_{11}(\lambda+n)b_n + p_{00}b_n + p_{01}b_{n-1} = f_n$,

Zupełnie inaczej kształtują się relacje pomiędzy współczynnikami b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$)

Krok 3a° (określenie całki szczególnej). Jeżeli nadal założymy, że λ nie jest liczbą całkowitą ujemną, to bez względu na wartość współczynnika $b_0^{(s)}$ z drugiej równości (j) i kolejno z następnych wyznaczamy $b_1^{(s)}$ i następane $b_n^{(s)}$ i w efekcie mamy całkę (h) przy

$$b_1^{(s)} = \frac{f_0 - (p_{11}\lambda + p_{00})b_0^{(s)}}{p_{21}(\lambda+1)\lambda + p_{10}(\lambda+1)},$$

$$b_2^{(s)} = \frac{f_1 - [p_{11}(\lambda+1) + p_{00}]b_1^{(s)} - p_{01}b_0^{(s)}}{(\lambda+2)[p_{21}(\lambda+1) + p_{10}]}, \quad (k)$$

$$b_{n+1}^{(s)} = \frac{f_n - [p_{11}(\lambda+n) + p_{00}]b_n^{(s)} - p_{01}b_{n-1}^{(s)}}{(\lambda+n+1)[p_{21}(\lambda+n) + p_{10}]}, \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Oczywiście także staramy się sprawdzić zbieżność szeregu w tej całce, by się nie okazało iż zachodzi ona jedynie dla $x = 0$.

Krok 4a° (określenie całki równania jednorodnego). Staramy się odpowiedzieć na pytanie przy jakiej wartości λ które z początkowych współczynników b_n mogą przyjmować niezerowe dowolne wartości.

Analizując pierwsze trzy równania (j) dochodzimy do wniosku, że przy $\lambda = 0$ możliwe jest przyjmowanie tylko przez współczynnik b_0 dowolnej wartości (wystarczy przyjąć $b_0 = 1$, bo i tak otrzymana całka mnożona jest przez stałą dowolną). Inne wartości λ nie wchodzą w grę lub prowadzą do tego samego rezultatu (np. $\lambda = -1$ przy $b_0 = 0$ i $b_1 = 1$) Ale to oznacza, że otrzymamy tylko jedną z dwu liniowo niezależnych całek układu fundamentalnego. Zapiszmy ją dla porządku:

$$y_{(1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} x^n, \quad (1)$$

gdzie

$$b_0^{(1)} = 1, \quad b_1^{(1)} = -\frac{p_{00}b_0^{(1)}}{p_{10}}, \quad b_2^{(1)} = -\frac{(p_{11} + p_{00})b_1^{(1)} + p_{01}b_0^{(1)}}{2(p_{21} + p_{10})},$$

$$b_{n+1}^{(1)} = -\frac{(p_{11}n + p_{00})b_n^{(1)} + p_{01}b_{n-1}^{(1)}}{(n+1)(p_{21}n + p_{10})} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Całka powyższa jest to tzw. całka nieosobliwa. W celu wyznaczenia drugiej, tzw. całki osobliwej (dla $x = 0$) niezbędny jest ...

Krok 5° (ustalenie równań rekurencyjnych dla całki osobliwej). Poszukiwać będziemy całki równania (a) w postaci (c). Postać ta posłuży do wyznaczenia całki szczególnej w przypadku, gdy prawa strona równania (a) drugiego rzędu ($k = 2$) ma postać (b) a współczynniki w równaniu postać (f), a także po odpowiednich adaptacjach do określenia całki szczególnej osobliwej równania jednorodnego (a) (przy $k = 2$), gdy współczynnik przy drugiej pochodnej niewiadomej y ma postać $a_2(x) = p_{21}x$ ($p_{20} = 0$).

Uwzględniając

$$x^{\lambda-s} x^n = x^{\lambda-s+n}, \quad x^\lambda x^n \ln x = x^{\lambda+n} \ln x,$$

$$\frac{d}{dx} (x^{\lambda-s} x^n) = (\lambda - s + n) x^{\lambda-s+n-1},$$

$$\frac{d}{dx} (x^\lambda x^n \ln x) = (\lambda + n) x^{\lambda+n-1} \ln x + x^{\lambda+n-1},$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (x^{\lambda-s} x^n) = (\lambda - s + n)(\lambda - s + n - 1) x^{\lambda-s+n-2},$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (x^\lambda x^n \ln x) = (\lambda + n)(\lambda + n - 1) x^{\lambda+n-2} \ln x + (2\lambda + 2n - 1) x^{\lambda+n-2},$$

otrzymujemy następującą równość:

$$\begin{aligned}
& p_{20} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1)b_n x^{\lambda+n-2} \ln x + p_{21} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1)b_n x^{\lambda+n-1} \ln x + \\
& + p_{10} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)b_n x^{\lambda+n-1} \ln x + p_{11} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)b_n x^{\lambda+n} \ln x + \\
& p_{00} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{\lambda+n} \ln x + p_{01} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{\lambda+n+1} \ln x + \\
& p_{20} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-s+n)(\lambda-s+n-1)c_n x^{\lambda-s+n-2} + p_{21} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-s+n)(\lambda-s+n-1)c_n x^{\lambda-s+n-1} + \\
& + p_{10} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-s+n)c_n x^{\lambda-s+n-1} + p_{11} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-s+n)c_n x^{\lambda-s+n} + \\
& + p_{00} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\lambda-s+n} + p_{01} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\lambda-s+n+1} + \\
& + p_{20} \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda+2n-1)b_n x^{\lambda+n-2} + p_{21} \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda+2n-1)b_n x^{\lambda+n-1} + p_{10} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{\lambda+n-1} \\
& + p_{11} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{\lambda+n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{\lambda+n} \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^{\lambda-s+n},
\end{aligned}$$

a w konsekwencji ciąg równości przy kolejnych potęgach x

a) w wariancie z $p_{20} \neq 0$

$$\begin{aligned}
- x^{\lambda-2} \ln x: & p_{20}\lambda(\lambda-1)b_0 = 0, , \\
- x^{\lambda-1} \ln x: & p_{20}(\lambda+1)\lambda b_1 + p_{21}\lambda(\lambda-1)b_0 + p_{10}\lambda b_0 = 0, \\
- x^{\lambda} \ln x: & p_{20}(\lambda+2)(\lambda+1)b_2 + p_{21}(\lambda+1)\lambda b_1 + p_{10}(\lambda+1)b_1 + p_{11}\lambda b_0 + p_{00}b_0 = f_0, \quad (m) \\
- x^{\lambda+1} \ln x: & p_{20}(\lambda+3)(\lambda+2)b_3 + p_{21}(\lambda+2)(\lambda+1)b_2 + p_{10}(\lambda+2)b_2 + p_{11}(\lambda+1)b_1 + p_{00}b_1 + \\
& + p_{01}b_0 = f_1, \\
- x^{\lambda+n} \ln x: & p_{20}(\lambda+n+2)(\lambda+n+1)b_{n+2} + p_{21}(\lambda+n+1)(\lambda+n)b_{n+1} + p_{10}(\lambda+n+1)b_{n+1} + \\
& + [p_{11}(\lambda+n) + p_{00}]b_n + p_{01}b_{n-1} = f_n,
\end{aligned}$$

oraz (przy $s = 0$)

$$\begin{aligned}
- x^{\lambda-2}: & p_{20}\lambda(\lambda-1)c_0 + p_{20}(2\lambda-1)b_0 = 0, , \\
- x^{\lambda-1}: & p_{20}(\lambda+1)\lambda c_1 + p_{21}\lambda(\lambda-1)c_0 + p_{10}\lambda c_0 + p_{20}(2\lambda+1)b_1 + p_{21}(2\lambda-1)b_0 + p_{10}b_0 = 0, \\
- x^{\lambda}: & p_{20}(\lambda+2)(\lambda+1)c_2 + p_{21}(\lambda+1)\lambda c_1 + p_{10}(\lambda+1)c_1 + p_{11}\lambda c_0 + p_{00}c_0 + \\
& + p_{20}(2\lambda+3)b_2 + p_{21}(2\lambda+1)b_1 + p_{10}b_1 + p_{11}b_0 = g_0, \quad (n) \\
- x^{\lambda+n}: & p_{20}(\lambda+n+2)(\lambda+n+1)c_{n+2} + p_{21}(\lambda+n+1)(\lambda+n)c_{n+1} + p_{10}(\lambda+n+1)c_{n+1} + \\
& + [p_{11}(\lambda+n) + p_{00}]c_n + p_{01}c_{n-1} + p_{20}(2\lambda+2n+3)b_{n+2} + p_{21}(2\lambda+2n+1)b_{n+1} + \\
& + p_{10}b_{n+1} + p_{11}b_n = g_n,
\end{aligned}$$

b) w wariancie z $p_{20} = 0$

$$\begin{aligned}
 - x^{\lambda-1} \ln x: & p_{21}\lambda(\lambda-1)b_0 + p_{10}\lambda b_0 = 0, \\
 - x^\lambda \ln x: & p_{21}(\lambda+1)\lambda b_1 + p_{10}(\lambda+1)b_1 + p_{11}\lambda b_0 + p_{00}b_0 = f_0, \\
 - x^{\lambda+1} \ln x: & p_{21}(\lambda+2)(\lambda+1)b_2 + p_{10}(\lambda+2)b_2 + p_{11}(\lambda+1)b_1 + p_{00}b_1 + p_{01}b_0 = f_1, \\
 - x^{\lambda+n} \ln x: & p_{21}(\lambda+n+1)(\lambda+n)b_{n+1} + p_{10}(\lambda+n+1)b_{n+1} + \\
 & + p_{11}(\lambda+n)b_n + p_{00}b_n + p_{01}b_{n-1} = f_n,
 \end{aligned} \tag{o}$$

oraz (przy $s = 0$)

$$\begin{aligned}
 - x^{\lambda-1}: & p_{21}\lambda(\lambda-1)c_0 + p_{10}\lambda c_0 + p_{21}(2\lambda-1)b_0 + p_{10}b_0 = 0, \\
 - x^\lambda: & p_{21}(\lambda+1)\lambda c_1 + p_{10}(\lambda+1)c_1 + p_{11}\lambda c_0 + p_{00}c_0 + \\
 & + p_{21}(2\lambda+1)b_1 + p_{10}b_1 + p_{11}b_0 = g_0, \\
 - x^{\lambda+n}: & p_{21}(\lambda+n+1)(\lambda+n)c_{n+1} + p_{10}(\lambda+n+1)c_{n+1} + p_{11}(\lambda+n)c_n + p_{00}c_n + p_{01}c_{n-1} + \\
 & + p_{21}(2\lambda+2n+1)b_{n+1} + p_{10}b_{n+1} + p_{11}b_n = g_n.
 \end{aligned} \tag{p}$$

Krok 6° (określenie całki szczególnej równania niejednorodnego ze składnikiem osobliwym).

Założmy nadal, że λ nie jest liczbą całkowitą ujemną

a) w wariancie z $p_{20} \neq 0$

Bez względu na to jakie byłyby wartości współczynników $b_0^{(s)}, b_1^{(s)}$ szeregu potęgowego mnożonego przez $\ln x$ w wyrażeniu (c),) kolejne współczynniki $b_n^{(s)}$ ($n = 2, 3, \dots$) znajdujemy rekurencyjnie z równań (g) jak w kroku 3°, tj. ze związków rekurencyjnych (k)

$$b_2^{(s)} = \frac{f_0 - (p_{21}\lambda + p_{10})(\lambda+1)b_1^{(s)} - (p_{11}\lambda + p_{00})b_0^{(s)}}{p_{20}(\lambda+2)(\lambda+1)}, \tag{q}$$

$$b_{n+2}^{(s)} = \frac{f_n - [p_{10} + p_{21}(\lambda+n)](\lambda+n+1)b_{n+1}^{(s)} - [p_{11}(\lambda+n) + p_{00}]b_n^{(s)} - p_{01}b_{n-1}^{(s)}}{p_{20}(\lambda+n+2)(\lambda+n+1)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Natomiast współczynniki $c_0^{(s)}, c_1^{(s)}$ znajdujemy z równań (n)_{1,2} – przy dodatkowym założeniu,

$\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq 1$ oraz $s = 0$ – a kolejne współczynniki $c_n^{(s)}$ ($n = 2, 3, \dots$) z równań (n)_{3,4}

$$\begin{aligned}
 c_0^{(s)} &= -\frac{(2\lambda-1)}{\lambda(\lambda-1)}b_0^{(s)}, \\
 c_1^{(s)} &= -\frac{p_{21}(\lambda-1) + p_{10}}{p_{20}(\lambda+1)\lambda}c_0^{(s)} - \frac{p_{20}(2\lambda+1)b_1^{(s)} + [p_{21}(2\lambda-1) + p_{10}]b_0^{(s)}}{p_{20}(\lambda+1)\lambda}, \\
 c_2^{(s)} &= \frac{g_0 - (\lambda+1)(p_{21}\lambda + p_{10})c_1^{(s)} - (p_{11}\lambda + p_{00})c_0^{(s)}}{p_{20}(\lambda+2)(\lambda+1)} - \\
 & - \frac{p_{20}(2\lambda+3)b_2^{(s)} + [p_{21}(2\lambda+1) + p_{10}]b_1^{(s)} + p_{11}b_0^{(s)}}{p_{20}(\lambda+2)(\lambda+1)},
 \end{aligned} \tag{r}$$

$$c_{n+2}^{(s)} = \frac{g_n - (\lambda + n + 1)[p_{21}(\lambda + n) + p_{10}]c_{n+1}^{(s)} + [p_{11}(\lambda + n) + p_{00}]c_n^{(s)} + p_{01}c_{n-1}^{(s)}}{p_{20}(\lambda + n + 2)(\lambda + n + 1)} - \frac{p_{20}(2\lambda + 2n + 3)b_{n+2}^{(s)} + [p_{21}(2\lambda + 2n + 1) + p_{10}]b_{n+1}^{(s)} + p_{11}b_n^{(s)}}{p_{20}(\lambda + n + 2)(\lambda + n + 1)}.$$

Zauważmy, że jeżeli $f_n = 0$ dla $n = 0, 1, \dots, n_0$ i $f_{n_0+1} \neq 0$ (dla pewnego n_0), to przyjmując $b_0^{(s)} = b_1^{(s)} = 0$ wnioskujemy, że $b_n^{(s)} = 0$ dla $n = 2, \dots, n_0 + 2$ i wtedy kładąc $c_0^{(s)} = 0$ także dla $\lambda = 0$ i $\lambda = 1$ otrzymujemy przy wszystkich $g_n = 0$ iż $c_n^{(s)} = 0$ dla $n = 1, \dots, n_0 + 2$, a więc można zapisać następujące relacje:

$$f(x) = x^{\lambda+n_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{n_0+n} x^n \right) \Rightarrow y_{(s)}(x) = x^{\lambda+n_0+2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{n_0+n+2}^{(s)} x^n \right)$$

$$f(x) = x^{\lambda+n_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{n_0+n} x^n \right) \ln x \Rightarrow y_{(s)}(x) = x^{\lambda+n_0+2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{n_0+n+2}^{(s)} x^n \right) \ln x + x^{\lambda+n_0+2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{n_0+n+2}^{(s)} x^n \right).$$

Oczywiście sprawdzamy i ustalamy w miarę możliwości zbieżność szeregów w całości szczególnej $y_{(s)}$.

b) w wariancie z $p_{20} = 0$

jeżeli $\lambda \neq 0$, to $b_0^{(s)} = 0$, a jeśli $\lambda = 0$, to $b_0^{(s)}$ może przyjmować dowolną wartość, a ponadto zgodnie ze związkami (k)

$$b_1^{(s)} = \frac{f_0 - (p_{11}\lambda + p_{00})b_0^{(s)}}{p_{21}(\lambda + 1)\lambda + p_{10}(\lambda + 1)},$$

$$b_2^{(s)} = \frac{f_1 - [p_{11}(\lambda + 1) + p_{00}]b_1^{(s)} - p_{01}b_0^{(s)}}{(\lambda + 2)[p_{21}(\lambda + 1) + p_{10}]},$$

$$b_{n+1}^{(s)} = \frac{f_n - [p_{11}(\lambda + n) + p_{00}]b_n^{(s)} - p_{01}b_{n-1}^{(s)}}{(\lambda + n + 1)[p_{21}(\lambda + n) + p_{10}]}, \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Natomiast równości (p) prowadzą do związków rekurencyjnych:

- przy $\lambda = 0$ musi być $b_0^{(s)} = 0$, a $c_0^{(s)}$ może przyjmować dowolną wartość, zaś przy $\lambda \neq 0$ jest $c_0^{(s)} = 0$, gdyż $b_0^{(s)} = 0$ na mocy (p)₁,
- dla dowolnej wartości λ (nie będącej nadal liczbą całkowitą ujemną)

$$c_1^{(s)} = \frac{g_0 - p_{00}c_0^{(s)}}{(\lambda + 1)(p_{21}\lambda + p_{10})},$$

$$c_{n+1}^{(s)} = \frac{g_n - [p_{11}(\lambda + n) + p_{00}]c_n^{(s)} - p_{01}c_{n-1}^{(s)}}{(\lambda + n + 1)[p_{21}(\lambda + n) + p_{10}]} - \frac{[p_{21}(2\lambda + 2n + 1) + p_{10}]b_{n+1}^{(s)} + p_{11}b_n^{(s)}}{(\lambda + n + 1)[p_{21}(\lambda + n) + p_{10}]} \quad (s) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Zauważmy, że jeżeli $f_n = 0$ dla $n = 0, 1, \dots, n_0$ i $f_{n_0+1} \neq 0$ (dla pewnego $n_0 > 0$), to przyjmując $b_0^{(s)} = 0$ wnioskujemy, że $b_n^{(s)} = 0$ dla $n = 1, \dots, n_0 + 1$ i wtedy kładąc $c_0^{(s)} = 0$ także dla $\lambda = 0$ otrzymujemy przy wszystkich $g_n = 0$ iż $c_n^{(s)} = 0$ dla $n = 1, \dots, n_0 + 1$, a więc można zapisać następujące relacje:

$$f(x) = x^{\lambda+n_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_{n_0+n} x^n \right) \Rightarrow y_{(s)}(x) = x^{\lambda+n_0+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{n_0+n+1}^{(s)} x^n \right)$$

$$f(x) = x^{\lambda+n_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_{n_0+n} x^n \right) \ln x \Rightarrow y_{(s)}(x) = x^{\lambda+n_0+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{n_0+n+1}^{(s)} x^n \right) \ln x + x^{\lambda+n_0+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{n_0+n+1}^{(s)} x^n \right).$$

Oczywiście też sprawdzamy i ustalamy w miarę możliwości zbieżność szeregów w całe szczególnej $y_{(s)}$.

Krok 7° (4b°) (określenie całki osobliwej równania jednorodnego w przypadku, gdy $p_{20} = 0$ i $\lambda = 0$).

W kroku 4a° określono jedną całkę z fundamentalnego układu całek równania jednorodnego. Ponieważ rozpatrujemy równanie drugiego rzędu ($k = 2$) w przypadku, gdy współczynnik $a_2(x) = p_{21}x$, to drugą liniowo niezależną całkę, tzw. osobliwą poszukujemy w postaci w postaci

$$y_{(2)}(x) = y_{(1)}(x) \ln x + x^{\lambda-s} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(2)} x^n,$$

na podstawie spełnienia równania różniczkowego i wynikających z tego rekurencyjnych równości (o) dla $\lambda = 0$ i przy przyjęciu $b_0^{(2)} = b_0^{(1)} = 1$. Równości (o) prowadzą z kolei przy $b_0^{(2)} = b_0^{(1)} = 1$ do związków rekurencyjnych na współczynniki $b_n^{(2)}$, z których wynika, że wszystkie współczynniki $b_n^{(2)}$ w składniku $\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} x^n \right) \ln x$ są identyczne ze

współczynnikami $b_n^{(1)}$ w całe $y_{(1)}$. Natomiast współczynniki $c_n^{(2)}$ powinniśmy wyznaczyć ze związków rekurencyjnych otrzymanych ze spełnienia równania różniczkowego, tj. równości w wariancie $p_{20} = 0$

$$\begin{aligned}
& + p_{21} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - s + n)(\lambda - s + n - 1) c_n x^{\lambda - s + n - 1} + \\
& + p_{10} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - s + n) c_n x^{\lambda - s + n - 1} + p_{11} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - s + n) c_n x^{\lambda - s + n} + \\
& + p_{00} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\lambda - s + n} + p_{01} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\lambda - s + n + 1} + \\
& + p_{21} \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda + 2n - 1) b_n x^{\lambda + n - 1} + p_{10} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{\lambda + n - 1} \\
& + p_{11} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{\lambda + n} = 0.
\end{aligned}$$

Niestety tu mamy porażkę. Przy danym λ ($\lambda = 0$) nie sposób dobrać tak parametr s , by można było wyznaczyć współczynniki $c_n^{(2)}$ w zależności od $b_n^{(2)}$.

Podsumowując, omawiany przypadek równania drugiego rzędu pokazał wiele niuansów charakterystycznych dla metody szeregów potęgowych, choć oczywiście nie wszystkie.

Przykładowo, jeszcze:

1) szczególnym przypadkiem równania o współczynnikach wielomianowych jest równanie Eulera, którego całką szczególną (równania jednorodnego) jest szereg jednowyrazowy Cx^λ .

2) można w niektórych przypadkach postawić zadanie takiego wyznaczenia wartości początkowych współczynników (których wartości można przyjmować dowolnie), by szereg potęgowy w całości równania różniczkowego „urywał się” od pewnego $n_0 + 1$, tzn. by szereg ten był wielomianem stopnia n_0 .

3) gdybyśmy chcieli wyznaczyć metodą współczynników nieznanymi całkę równania

$$y' + py = 0$$

poszukując tej całki w postaci

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

to po podstawieniu do powyższego równania różniczkowego otrzymalibyśmy równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_{n+1}x^n + p \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0,$$

skąd otrzymalibyśmy ciąg rekurencyjny na wartości współczynników szeregu całki y

$$b_{n+1} = -\frac{p}{n+1} b_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

przy dowolnej wartości współczynnika b_0 .

W przypadku tego ciągu, przyjmując $b_0 = 1$, nietrudno zauważyć, że po pierwsze można współczynnik w szeregu całki y wyrazić jawnym wzorem

$$b_n = \frac{(-p)^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

a po drugie szereg potęgowy

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-p)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-px)^n}{n!},$$

można zidentyfikować jako szereg Maclaurina funkcji elementarnej

$$y = e^{-px}.$$

Ten prosty przykład pokazuje, iż takimi dwoma przypadkami można się spotkać, stosując metodę współczynników nieoznaczonych:

- szereg potęgowy w całe równania różniczkowego ma zidentyfikowane jawnie współczynniki,
- szereg potęgowy w całe równania różniczkowego, o znanych jawnie współczynnikach, został zidentyfikowany jako funkcja elementarna lub funkcja specjalna.

Przypomnijmy, że przez funkcję elementarną rozumiemy taką funkcję, która jest wymieniona w katalogu funkcji elementarnych (należą do nich, m.in. funkcja potęgowa, wielomiany, funkcja wykładnicza, logarytm oraz wymienione z nazwy funkcje trygonometryczne i funkcje do nich odwrotne). Podobnie definiowane są funkcje specjalne: są to wymienione z nazwy funkcje określone za pomocą szeregów potęgowych o jawnie określonych współczynnikach i/lub spełniające wymienione równania różniczkowe (rzędu drugiego o współczynnikach wielomianowych co najwyżej drugiego stopnia). Dalej w p. B przedstawimy i omówimy krótko niektóre z nich.

B. Funkcje specjalne

1° Funkcja hipergeometryczna

Funkcją hipergeometryczną (lub szeregiem hipergeometrycznym) nazywamy

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-1, +1],$$

gdzie $(\delta)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \delta(\delta+1)\dots(\delta+n-1), & n > 0 \end{cases}$ ($\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$), spełniającą równanie różniczkowe

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0.$$

Jeśli $\alpha = -m$ ($m \in \mathcal{N}$), to szereg powyższy redukuje się do wielomianu

$$F(-m, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n} x^n.$$

Funkcję F można określić też wzorem całkowym Eulera

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-\gamma-1} (1-tx)^{-\alpha} dt.$$

Ponadto, m. in., funkcję F dla szczególnych wartości parametrów α, β, γ można wyrazić za

pomocą funkcji elementarnych, np.:

$$F(\alpha, \beta, \beta; x) = (1-x)^{-\alpha}, \quad F(1, 1, 2; -x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Gdybyśmy znajdowali funkcję F z definiującego tę funkcję równania różniczkowego metodą współczynników nieoznaczonych

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

to otrzymalibyśmy następujący związek rekurencyjny

$$b_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)} b_n, \quad b_0 = 1 \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Drugą, oprócz $y_{(1)} = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ całką niezależną równania różniczkowego jest

$$y_{(2)} = x^{1-\gamma} F(1+\alpha-\gamma, 1+\beta-\gamma, 2-\gamma; x), \quad x \in (-1, +1) \quad (\gamma \neq 2, 3, 4, \dots),$$

a w przypadku, gdy $\gamma \neq 2, 3, 4, \dots$ - funkcja $y_{(2)} = F(\alpha, \beta, \gamma; x) \ln x + x^{1-\gamma} G(\alpha, \beta, \gamma; x)$, gdzie

$$G(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{przy czym współczynniki } c_n \text{ znajdujemy w sposób opisany w p. A.}$$

2° Funkcje walcowe

Przez funkcje walcowe rozumiemy funkcje będące rozwiązaniami równania Bessela

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \mu^2)y = 0$$

gdzie μ — parametr zespolony. Jeżeli $\mu = \alpha \in \mathcal{R} \quad (\alpha \geq 0)$, to mamy całkę nieosobliwą, zwaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu α

$$J_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\alpha+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2n},$$

gdzie Γ - funkcja gamma Eulera o właściwości $\Gamma(\alpha+n+1) = n\Gamma(\alpha+n)$ (uogólnienie $n!$, gdyż $\Gamma(n+1) = n!$):

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt.$$

Funkcje Bessela dla całkowitego $\alpha = m \in \mathcal{C}$ można wyrazić za pomocą całki

$$J_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(mt - x \sin t) dt.$$

Na pochodne funkcji $J_m(x)$ ($m \in \mathcal{N}$) mamy następujące wzory:

$$\frac{dJ_m(x)}{dx} = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x) = J_{m-1}(x) - \frac{m}{x} J_m(x) \quad (m \in \mathcal{N}).$$

Całką równania Bessela, niezależną od funkcji Bessela przy $\alpha = m \in \mathcal{C}$, jest funkcja Bessela drugiego rodzaju, zwana też funkcją von Neumana

$$Y_\alpha(x) = \lim_{\mu \rightarrow \alpha} Y_\mu(x), \quad Y_\mu(x) = \frac{J_\mu(x) \cos \mu\pi - J_{-\mu}(x)}{\sin \mu\pi} \quad (\alpha \geq 0)$$

(przy $\alpha \neq m \in \mathcal{C}$ jest nią funkcja $J_{-\alpha}$).

Do funkcji walcowych należą również całki tzw. zmodyfikowanego równania Bessela

$$x^2 y'' + xy' - (m^2 + x^2)y = 0 \quad (m \in \mathbb{C}),$$

tj. funkcje McDonalda (zmodyfikowane funkcje Bessela): pierwszego rodzaju $I_m(x)$ i drugiego rodzaju $K_m(x)$, z którymi stowarzyszone są z kolei funkcje Kelvina: pierwszego rodzaju $ber_m x$, $bei_m x$ i drugiego rodzaju $ker_m x$, $kei_m x$, zdefiniowane następująco

$$ber_m x = \operatorname{Re} J_m(i^{3/2} x), \quad bei_m x = \operatorname{Im} J_m(i^{3/2} x),$$

$$ker_m x = \operatorname{Re}(i^m K_m(i^{1/2} x)), \quad kei_m x = \operatorname{Im}(i^m K_m(i^{1/2} x)),$$

związane z równaniem

$$x^2 y'' + xy' - (m^2 - i x^2)y = 0 \quad (m \in \mathbb{C}),$$

którego niezależnymi całkami są $J_m(i^{3/2} x)$ i $K_m(i^{1/2} x)$.

3° Funkcje kuliste

Przez funkcje kuliste (rzędu zero) stopnia $\mu \in \mathbb{R}$ rozumiemy rozwiązania równania różniczkowego Legendre'a

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' + \mu(1 + \mu)y = 0.$$

Całkę podstawową tego równania zwaną funkcją Legendre'a pierwszego rodzaju oznaczamy przez $P_\mu(x)$, $x \in (-1, 1]$. Jeżeli $\mu \notin \mathbb{C}$, to całką liniowo niezależną od $P_\mu(x)$, $x \in (-1, 1]$ jest $P_\mu(-x)$, $x \in [-1, 1)$. Jeśli zaś $\mu \in \mathbb{C}$, to całką tą jest funkcja Legendre'a drugiego rodzaju $Q_\mu(x)$, $x \in (-1, 1)$.

W przypadku, gdy parametr $\mu = m \in \mathbb{N}$ funkcja kulista staje się wielomianem Legendre'a

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^{(m)}}{dx^m} (x^2 - 1)^m = \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^i \binom{m}{i} \binom{2m-2i}{m} x^{m-2i}.$$

Wielomiany Legendre'a są ortogonalne, tj.

$$\int_{-1}^{+1} P_r(x) P_s(x) dx = 0 \quad (r \neq s).$$

Do funkcji kulistych należy również funkcja Legendre'a pierwszego rodzaju rzędu $r \in \mathbb{N}$ i stopnia $\mu \in \mathbb{R}$: $P_\mu^r(x)$, $x \in [-1, 1]$ i funkcja Legendre'a drugiego rodzaju rzędu $r \in \mathbb{N}$ i stopnia $\mu \in \mathbb{R}$: $Q_\mu^r(x)$, $x \in (-1, 1)$, spełniające uogólnione równanie Legendre'a

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - \frac{r^2}{1 - x^2} y + \mu(1 + \mu)y = 0$$

7. Układ równań liniowych o stałych współczynnikach

W zakresie układów równań liniowych o stałych współczynnikach panuje opinia, że wystarczy rozpatrzeć dobry przykład układu dwóch takich równań o pochodnych rzędu drugiego (układ będzie rzędu czwartego – $m=2$, $k=2$, $s=km=4$), by poradzić sobie z układami dla dowolnych m i k .

Przedstawimy dwie metody działania (i pokrótce o dwie dalsze) mające na celu znalezienie rozwiązania następującego (rozpatrywanego już wcześniej) układu równań

$$\begin{aligned} 2y_1'' + y_2'' + y_1 + y_2 &= 2 \sin x, \\ y_1'' + y_2'' + y_1 + 2y_2 &= -\sin x, \end{aligned} \quad x \in (0, \infty) \quad (a)$$

A. Metoda bezpośrednia

a) wyznaczanie rozwiązania układu jednorodnego

Rozwiązania układu jednorodnego równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach

$$\begin{aligned} 2y_1'' + y_2'' + y_1 + y_2 &= 0, \\ y_1'' + y_2'' + y_1 + 2y_2 &= 0, \end{aligned} \quad (b)$$

poszukujemy w postaci analogicznej jak dla pojedynczego równania

$$u_1 = C_1 e^{\rho x}, \quad u_2 = C_2 e^{\rho x}, \quad (c)$$

gdzie C_1, C_2 stałe, a ρ pewien parametr.

Po podstawieniu (c) do (b) otrzymujemy wniosek, że musi być spełniony układ równań algebraicznych

$$\begin{aligned} (2\rho^2 + 1)C_1 + (\rho^2 + 1)C_2 &= 0, \\ (\rho^2 + 1)C_1 + (\rho^2 + 2)C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (d)$$

Ten układ zaś będzie spełniony dla niezerowego układu stałych (C_1, C_2) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det \begin{bmatrix} 2\rho^2 + 1 & \rho^2 + 1 \\ \rho^2 + 1 & \rho^2 + 2 \end{bmatrix} = 0,$$

co prowadzi do następującego równania charakterystycznego układu równań (b):

$$\rho^4 + 3\rho^2 + 1 = 0. \quad (e)$$

Różnymi, parami sprzężonymi pierwiastkami tego równania są:

$$\rho_{1,2} = \pm \omega_1 i, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}, \quad \rho_{3,4} = \pm \omega_2 i, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}. \quad (f)$$

Dla $\rho_{1,2} = \pm \omega_1 i$ układ równań (d) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} (\sqrt{5} - 2)C_1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}C_2 &= 0, \\ \frac{\sqrt{5} - 1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{5} + 1}{2}C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Są to równania zależne, więc przyjmując $C_1 = 1$, wyliczamy $C_2 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$. W ten sposób wyznaczyliśmy pierwszą parę całek układu fundamentalnego rozwiązań układu równań (b):

$$y_{1(1)} = 1 \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right), \quad y_{2(1)} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right), \quad (g)$$

$$y_{1(2)} = 1 \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right), \quad y_{2(2)} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right).$$

Następnie kładąc $\rho_{3,4} = \pm\omega_2 i$ w układzie równań (d) i przyjmując $C_1 = -1$, wyliczamy

$C_2 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$. W ten sposób wyznaczamy drugą parę całek układu fundamentalnego rozwiązań układu równań (b):

$$y_{1(3)} = -1 \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right), \quad y_{2(3)} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right), \quad (h)$$

$$y_{1(4)} = -1 \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right), \quad y_{2(4)} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right).$$

W efekcie mamy rozwiązanie ogólne jednorodnego układu równań (b):

$$y_{1(j)} = D_1 y_{1(1)} + D_2 y_{1(2)} + D_3 y_{1(3)} + D_4 y_{1(4)}, \quad (i)$$

$$y_{2(j)} = D_1 y_{2(1)} + D_2 y_{2(2)} + D_3 y_{2(3)} + D_4 y_{2(4)}$$

i w postaci jawnej

$$y_{1(j)} = D_1 \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + D_2 \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) - D_3 \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) - D_4 \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right),$$

$$y_{2(j)} = -D_1 \frac{3-\sqrt{5}}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) - D_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) +$$

$$+ D_3 \frac{3+\sqrt{5}}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) + D_4 \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right).$$

b) wyznaczanie rozwiązania szczególnego układu niejednorodnego

1° Metoda uzmienniania stałych

Jeżeli znamy fundamentalny układ całek układu jednorodnego równań, to analogicznie jak w przypadku równania pojedynczego rozwiązanie szczególne układu niejednorodnego równań (a) postulujemy w postaci

$$y_{1(s)} = D_1(x)y_{1(1)}(x) + D_2(x)y_{1(2)}(x) + D_3(x)y_{1(3)}(x) + D_4(x)y_{1(4)}(x),$$

$$y_{2(s)} = D_1(x)y_{2(1)}(x) + D_2(x)y_{2(2)}(x) + D_3(x)y_{2(3)}(x) + D_4(x)y_{2(4)}(x).$$

Różniczkując powyższe wyrażenia żądamy, by

$$D_1'(x)y_{1(1)}(x) + D_2'(x)y_{1(2)}(x) + D_3'(x)y_{1(3)}(x) + D_4'(x)y_{1(4)}(x) = 0,$$

$$D_1'(x)y_{2(1)}(x) + D_2'(x)y_{2(2)}(x) + D_3'(x)y_{2(3)}(x) + D_4'(x)y_{2(4)}(x) = 0,$$

$$D_1'(x)y_{1(1)}'(x) + D_2'(x)y_{1(2)}'(x) + D_3'(x)y_{1(3)}'(x) + D_4'(x)y_{1(4)}'(x) = 2 \sin x,$$

$$D_1'(x)y_{2(1)}'(x) + D_2'(x)y_{2(2)}'(x) + D_3'(x)y_{2(3)}'(x) + D_4'(x)y_{2(4)}'(x) = -\sin x, .$$

Funkcje $D_1(x), \dots, D_4(x)$ istnieją, gdyż macierz Wrońskiego jest ciągła i nieosobliwa, więc po odwróceniu powyższego układu równań otrzymujemy funkcje ciągłe, a zatem całkowlne. Ale rachunkowo jest to zadanie dość uciążliwe, mimo że rezultat jest bardzo prosty (patrz poniżej).

2° Metoda przewidywania

Jeżeli prawe strony równań w układzie (a) są postaci

$$f_1 = e^{\sigma x} (a_1(x) \sin \omega x + b_1(x) \cos \omega x),$$

$$f_2 = e^{\sigma x} (a_2(x) \sin \omega x + b_2(x) \cos \omega x),$$

gdzie $a_1(x)$, $a_2(x)$, $b_1(x)$, $b_2(x)$ wielomiany stopnia s o danych współczynnikach, to całki szczególnej tego układu równań poszukujemy w podobnej postaci

$$y_{1(s)} = e^{\sigma x} x^\kappa (A_1(x) \sin \omega x + B_1(x) \cos \omega x),$$

$$y_{2(s)} = e^{\sigma x} x^\kappa (A_2(x) \sin \omega x + B_2(x) \cos \omega x),$$

gdzie $A_1(x)$, $A_2(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ wielomiany stopnia s o nieznanach współczynnikach, a κ jest krotnością pierwiastka $\rho = \sigma + i\omega$ równania charakterystycznego lub $s = 0$.

W rozpatrywanym przykładzie mamy $\sigma = 0$, $\omega = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $b_1 = b_2 = 0$, a więc

$$y_{1(s)} = A_1 \sin x + B_1 \cos x, \quad y_{2(s)} = A_2 \sin x + B_2 \cos x.$$

Po podstawieniu tych wyrażeń do równań (a) otrzymujemy

$$[(A_1 - 2A_1) + (A_2 - A_2)] \sin x + [(B_1 - 2B_1) + (B_2 - B_2)] \cos x = 2 \sin x,$$

$$[(A_1 - A_1) + (2A_2 - A_2)] \sin x + [(B_1 - B_1) + (2B_2 - B_2)] \cos x = -\sin x.$$

Równania powyższe muszą być spełnione dla każdego x , a zatem

$$(A_1 - 2A_1) + (A_2 - A_2) = 2, \quad (B_1 - 2B_1) + (B_2 - B_2) = 0,$$

$$(A_1 - A_1) + (2A_2 - A_2) = -1, \quad (B_1 - B_1) + (2B_2 - B_2) = 0,$$

skąd znajdujemy $A_1 = -2$, $A_2 = -1$, $B_1 = B_2 = 0$.

Ostatecznie mamy:

$$y_{1(s)} = -2 \sin x, \quad y_{2(s)} = -\sin x.$$

3° Metoda całki Cauchy'ego

Na podstawie wyrażeń (g) - (i) znajdujemy rozwiązanie szczególne układu jednorodnego równań, które spełniają warunki (tzw. początkowe):

$$y_{1(i)}(0) = 0, \quad y_{1(i)}'(0) = 1, \quad y_{2(i)}(0) = 0, \quad y_{2(i)}'(0) = 1.$$

Nietrudno stwierdzić, że $D_2 = D_4 = 0$, natomiast D_1 i D_3 spełniają układ równań (przy przyjętych oznaczeniach):

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} D_{1(C)} + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} D_{3(C)} = 1, \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} D_{1(C)} - \frac{3+\sqrt{5}}{2} D_{3(C)} = -1.$$

W efekcie znajdziemy te dwie stałe, które podstawimy do wyrażenia (i) otrzymując:

$$y_{1(C)} = D_{1(C)} \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} x\right) - D_{3(C)} \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} x\right),$$

$$y_{2(C)} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2} D_{1(C)} \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} x\right) + D_{3(C)} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} x\right).$$

Ostatecznie wyznaczone rozwiązanie szczególne układu równań (a) jest splotem powyższych funkcji i prawych stron tego układu równań

$$y_{1(C)} = 2 \int_0^x \left[D_{1(C)} \sin\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}(x-\xi) - D_{3(C)} \sin\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}(x-\xi) \right] \sin \xi d\xi,$$

$$y_{2(C)} = \int_0^x \left[D_{1(C)} \frac{3-\sqrt{5}}{2} \sin\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}(x-\xi) - D_{3(C)} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \sin\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}(x-\xi) \right] \sin \xi d\xi,$$

B. Metoda spektralna

Układ równań (a) zapiszemy w następującej postaci macierzowej

$$a_2 y'' + a_0 y = f,$$

gdzie

$$a_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad a_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sin x \\ -\sin x \end{bmatrix},$$

przy $x \in [0, \infty)$.

Całek układu jednorodnego równań poszukujemy w postaci harmoniczej

$$y = v e^{i\gamma x}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

która po podstawieniu do tego układu prowadzi do równania macierzowego zagadnienia algebraicznego na wartości własne:

$$(a_0 - \lambda a_2) v = 0, \quad \lambda = \gamma^2$$

dla operatora macierzowego $a_0 : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$, względem operatora macierzowego

$a_2 : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$. Przypomnimy, że jeżeli macierze a_0 i a_2 są dodatnio określone (a takie właśnie są), to widmo składa się z dodatnich wartości własnych, którym odpowiadają wektory

własne tworzące bazę binormalną. W pierwszym kroku metody utworzymy taką bazę.

Mamy zatem

$$\begin{bmatrix} 1-2\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

a stąd równanie charakterystyczne

$$\det(a_0 - \lambda a_2) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0,$$

wartości własne i częstości własne

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}, \quad \gamma_{1,2} = \sqrt{\frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}}$$

Tworzymy wektory własne:

- dla $\lambda = \lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ mamy

$$\begin{bmatrix} 1-2\frac{3-\sqrt{5}}{2} & 1-\frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ 1-\frac{3-\sqrt{5}}{2} & 2-\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1(1)} \\ v_{2(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Po przyjęciu $v_{1(1)} = 1$ z dowolnego równania wyliczamy $v_{2(1)} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Wyznaczyliśmy pierwszy wektor własny

$$v_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix};$$

- dla $\lambda = \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ mamy

$$\begin{bmatrix} 1-2\frac{3+\sqrt{5}}{2} & 1-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ 1-\frac{3+\sqrt{5}}{2} & 2-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1(2)} \\ v_{2(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Przyjmujemy $v_{1(2)} = -1$ i z dowolnego równania wyliczamy $v_{2(2)} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Otrzymaliśmy drugi wektor własny

$$v_{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.$$

Spełniony są warunki biortogonalności $v_{(2)}^T a_0 v_{(1)} = 0$, $v_{(2)}^T a_2 v_{(1)} = 0$ co łatwo wykazać bezpośrednim rachunkiem.

Normalizujemy wektory $v_{(i)}$ względem normy $\|v_{(i)}\|^2 = v_{(i)}^T a_2 v_{(i)}$, tj. tworzymy wersory

własne $e_{(i)} = \frac{v_{(i)}}{\|v_{(i)}\|}$. Mamy zatem

$$\|v_{(1)}\|^2 = v_{(1)}^T a_2 v_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \frac{5-\sqrt{5}}{2},$$

$$\|v_{(2)}\|^2 = v_{(2)}^T a_2 v_{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

i ostatecznie

$$e_{(1)} = \frac{v_{(1)}}{\|v_{(1)}\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \quad e_{(2)} = \frac{v_{(2)}}{\|v_{(2)}\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Wektory $e_{(1)}$, $e_{(2)}$ tworzą bazę binormalną tzn. $e_{(i)}^T a_2 e_{(j)} = \delta_{ij}$ oraz $e_{(i)}^T a_0 e_{(j)} = \lambda_j \delta_{ij}$ co łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Warto przy tym nadmienić, że liczba liniowo niezależnych wektorów własnych odpowiadających danej wartości własnej związana jest z krotnością tej wartości jako pierwiastka równania charakterystycznego.

W następnym kroku wprowadzamy nowe niewiadome za pomocą następującej transformacji i dokonujemy przekształcenia wyjściowego układu równań:

$$y = a z, \quad a = \begin{bmatrix} e_{1(1)} & e_{1(2)} \\ e_{2(1)} & e_{2(2)} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Podstawiamy do równania wyjściowego i mnożymy obustronnie przez a^T z lewej strony:

$$(a^T a_2 a) z'' + (a^T a_0 a) z = a^T f,$$

Otrzymujemy zatem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z'' + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} z = b, \quad b = a^T f,$$

czyli układ równań różniczkowych o niewiadomych rozdzielonych:

$$z_1'' + \lambda_1 z_1 = b_1,$$

$$z_2'' + \lambda_2 z_2 = b_2,$$

gdzie

$$b_1 = e_{(1)}^T f,$$

$$b_2 = e_{(2)}^T f,$$

czyli

$$b_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \sin x \\ -\sin x \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \frac{7+\sqrt{5}}{2} \sin x$$

$$b_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} -1 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sin x \\ -\sin x \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \frac{-7-\sqrt{5}}{2} \sin x$$

Otrzymaliśmy dwa identycznej postaci równania drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Zgodnie z objaśnieniami dotyczącymi tego typu równań z p. 3 mamy

$$z_1 = C_{1(1)} \sin \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} x \right) + C_{2(1)} \cos \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} x \right) + C_{s(1)} \sin x,$$

$$z_2 = C_{1(2)} \sin \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} x \right) + C_{2(2)} \cos \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} x \right) + C_{s(2)} \sin x,$$

gdzie $C_{1(1)}, C_{2(1)}, C_{1(2)}, C_{2(2)}$ - stałe dowolne, a

$$C_{s(1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \frac{7-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}, \quad C_{s(2)} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \frac{7+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}.$$

Po podstawieniu wyrażań na z do związku transformacyjnego $y = A z$, przy uwzględnieniu wzorów na wektory $e_{(1)}, e_{(2)}$, otrzymujemy rozwiązanie ogólne wyjściowego układu równań:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \left[C_{1(1)} \sin \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} x \right) + C_{2(1)} \cos \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} x \right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \frac{7-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \sin x \right] \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \frac{3-\sqrt{5}}{2} \left[C_{1(1)} \sin \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} x \right) + C_{2(1)} \cos \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} x \right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \frac{7-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \sin x \right] \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \left[C_{1(2)} \sin \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} x \right) + C_{2(2)} \cos \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} x \right) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \frac{7+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \sin x \right] \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \left[C_{1(2)} \sin \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} x \right) + C_{2(2)} \cos \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} x \right) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \frac{7+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \sin x \right] \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie wyrażenia te możemy zapisać następująco

$$y_1 = D_1 \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + D_2 \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) - D_3 \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) - D_4 \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) - 2 \sin x,$$

$$y_2 = -D_1 \frac{3-\sqrt{5}}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) - D_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + \\ + D_3 \frac{3+\sqrt{5}}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) + D_4 \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) - \sin x,$$

gdzie D_1, D_2, D_3, D_4 nowe stałe dowolne $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} C_{1(1)} = D_1, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} C_{2(1)} = D_2, \right.$

$$\left. \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} C_{1(2)} = D_3, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} C_{2(2)} = D_4 \right).$$

Otrzymaliśmy rozwiązanie o postaci identycznej jak poprzednio za pomocą metody bezpośredniej, z której możemy odczytać ten sam fundamentalny układ całek jednorodnego układu równań.

C. Metoda sprowadzania do układu równań rzędu pierwszego

Zgodnie z procedurą opisaną w rozdz. 3.1, p.2 dany układ równań różniczkowych zwyczajnych sprowadzamy do układu równań rzędu pierwszego:

$$\begin{aligned} y_1' - y_3 &= 0, \\ y_2' - y_4 &= 0, \\ 2y_3' + y_4' + y_1 + y_2 &= 2 \sin x, \\ y_3' + y_4' + y_1 + 2y_2 &= -\sin x. \end{aligned}$$

Następnie, postępujemy zgodnie z procedurą opisaną w p. 1° lub p. 2°. Na przykład, poszukując rozwiązania równania jednorodnego w postaci $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (C_1, C_2, C_3, C_4) \exp(\rho x)$, otrzymujemy jednorodny układ równań algebraicznych na wektor stałych (C_1, C_2, C_3, C_4) , który może być spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy tego układu

$$K = \begin{bmatrix} \rho & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2\rho & \rho \\ 1 & 2 & \rho & \rho \end{bmatrix}$$

będzie równy zero, co prowadzi do identycznego równania charakterystycznego, którego z kolei pierwiastkami są te same dwie pary pierwiastków $\rho_{1,2} = \pm i \omega_1, \rho_{3,4} = \pm i \omega_2$, gdzie

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}},$$

Każdemu pierwiastkowi odpowiada jedna

postać wektora stałych (C_1, C_2, C_3, C_4) (z dokładnością do stałej dowolnej), a tym samym jeden wektor z układu fundamentalnego całek rozpatrywanego układu równań

$$K_{(i)} C_{(i)} = \begin{bmatrix} \rho_i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \rho_i & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2\rho_i & \rho_i \\ 1 & 2 & \rho_i & \rho_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1(i)} \\ C_{2(i)} \\ C_{3(i)} \\ C_{4(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{(1,2)} = C_{(1,2)}(\pm i \sin \omega_1 x + \cos \omega_1 x), \quad y_{(3,4)} = C_{(3,4)}(\pm i \sin \omega_2 x + \cos \omega_2 x).$$

A zatem, uwzględniając wartości wprowadzonych parametrów, mamy:

$$\begin{bmatrix} \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} i & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \pm 2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} i & \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} i \\ 1 & 2 & \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} i & \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} i \\ \mp \frac{3-\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} i & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \pm 2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} i & \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} i \\ 1 & 2 & \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} i & \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \mp \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} i \\ \pm \frac{3+\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ponieważ nasz układ równań różniczkowych jest spełniony przez funkcje sprzężone z funkcjami $y_{(1,2)}$ i $y_{(3,4)}$ powyżej, to z uwagi na liniowość tych równań spełniony jest także przez następujące kombinacje liniowe

$$\operatorname{Im} y_{(3)} = \frac{1}{2i}(y_{(3)} - \bar{y}_{(3)}), \quad \operatorname{Re} y_{(3)} = \frac{1}{2}(y_{(3)} + \bar{y}_{(3)}),$$

które oznaczając ponownie jako $(y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)}, y_{(4)})$ stanowią fundamentalny układ liniowo niezależnych całek naszego układu równań jednorodnych.

Całkę szczególną układu równań niejednorodnych znajdziemy metodą przewidywania, upraszczając nieco jej postać:

$$y_{1(s)} = A_1 \sin x, \quad y_{2(s)} = A_2 \sin x, \quad y_{3(s)} = B_3 \cos x, \quad y_{4(s)} = B_4 \cos x,$$

przy której znajdujemy $A_1 = B_3 = -2$, $A_2 = B_4 = -1$.

Ostatecznie całka ogólna tego układu równań przedstawia się następująco:

$$y_1 = D_1 \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + D_2 \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) - D_3 \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) - D_4 \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) - 2 \sin x,$$

$$y_2 = -D_1 \frac{3-\sqrt{5}}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) - D_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + \\ + D_3 \frac{3+\sqrt{5}}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) + D_4 \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) - \sin x,$$

$$y_3 = D_1 \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) - D_2 \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + \\ - D_3 \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) + D_4 \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) - 2 \sin x,$$

$$y_4 = -D_1 \frac{3-\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + D_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + \\ + D_3 \frac{3+\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) - D_4 \frac{3+\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) - \sin x,$$

gdzie D_1, D_2, D_3, D_4 stałe dowolne.

D. Metoda sprowadzania do jednego równania

Zgodnie z procedura opisaną w rozdz. 3.1, p.3 dany układ równań różniczkowych zwyczajnych sprowadzamy do jednego równania różniczkowego z tyłoma wariantami prawych stron ile jest równań w układzie wyjściowym, czyli

$$K^*Z(x) = \begin{cases} 2 \sin x \\ - \sin x \end{cases},$$

gdzie $K^* = \det [K_{jl}]$, przy czym $[K_{jl}]$ jest macierzą operatorów różniczkowych w tym układzie

$$[K_{jl}] = \begin{bmatrix} 2d^2 + 1d^0 & 1d^2 + 1d^0 \\ 1d^2 + 1d^0 & 1d^2 + 2d^0 \end{bmatrix},$$

a w konsekwencji jej wyznacznik ma postać

$$K^* = 1d^4 + 3d^2 + 1d^0.$$

Zatem całkę ogólną równania jednorodnego wyznaczamy z równania

$$Z_{(j)}^{(4)} + 3Z_{(j)}'' + Z_{(j)} = 0,$$

a całki szczególne równań niejednorodnych z równań

$$Z_{1(s)}^{(4)} + 3Z_{1(s)}'' + Z_{1(s)} = 2 \sin x, \quad Z_{2(s)}^{(4)} + 3Z_{2(s)}'' + Z_{2(s)} = -\sin x.$$

Macierz dopełnień algebraicznych macierzy $[K_{jl}]$ przedstawia się następująco

$$[K_{jl}^*] = \begin{bmatrix} d^2 + 2d^0 & -d^2 - d^0 \\ -d^2 - d^0 & 2d^2 + 1d^0 \end{bmatrix}.$$

Za jej pomocą powracamy do wektora niewiadomych y_1, y_2 :

$$y_{1(j)} = K_{12}^* Z_{(j)}(x) = -Z_{(j)}''(x) - Z_{(j)}(x),$$

$$y_{2(j)} = K_{22}^* Z_{(j)}(x) = 2Z_{(j)}''(x) + Z_{(j)}(x),$$

$$y_{1(s)} = K_{11}^* Z_{1(s)}(x) + K_{12}^* Z_{2(s)}(x) = Z_{1(s)}''(x) + 2Z_{1(s)}(x) - Z_{2(s)}''(x) - Z_{2(s)}(x),$$

$$y_{2(s)} = K_{21}^* Z_{1(s)}(x) + K_{22}^* Z_{2(s)}(x) = -Z_{1(s)}''(x) - Z_{1(s)}(x) + 2Z_{2(s)}''(x) + Z_{2(s)}(x),$$

Zgodnie z powyższym i wskazówkami z p. 3 otrzymujemy kolejno:

- identyczne z poprzednimi równanie charakterystyczne i jego pierwiastki $\rho_{1,2} = \pm i \omega_1$,

$$\rho_{3,4} = \pm i \omega_2, \text{ gdzie } \omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}};$$

- całkę ogólną równania jednorodnego

$$Z_{(j)} = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) + C_4 \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right);$$

- rozwiązanie ogólne jednorodnego wyjściowego układu równań

$$\begin{aligned} y_{1(j)} &= -\frac{\sqrt{5}-1}{2} C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) - \frac{\sqrt{5}-1}{2} C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + \\ &\quad + C_3 \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) + C_4 \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) = \\ &= D_1 \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + D_2 \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) - D_3 \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) - D_4 \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right), \\ y_{2(j)} &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{\sqrt{5}-1}{2} C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{\sqrt{5}-1}{2} C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + \\ &\quad - C_3 \frac{\sqrt{5}+1}{2} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) - C_4 \frac{\sqrt{5}+1}{2} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) = \end{aligned}$$

$$= -D_1 \frac{3-\sqrt{5}}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) - D_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}x\right) + \\ + D_3 \frac{3+\sqrt{5}}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right) + D_4 \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}x\right),$$

gdzie $D_1 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}C_1$, $D_2 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}C_2$, $D_3 = -C_3 \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $D_4 = -C_4 \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ są nowymi stałymi dowolnymi;

- całki szczególne równania niejednorodnego (metodą przewidywania)

$$Z_{1(s)} = A_{1(s)} \sin x = -2 \sin x, \quad Z_{2(s)} = A_{2(s)} \sin x = \sin x;$$

- całki szczególne niejednorodnego układu równań

$$y_{1(s)} = -2 \sin x, \quad y_{2(s)} = -\sin x.$$

Tak więc otrzymaliśmy w pełni identyczne rozwiązanie jak metodami poprzednimi.

Jeżeli chodzi o metody rozwiązywania układów równań liniowych innych niż układy równań o stałych współczynnikach ($m > 1$), to na uwagę z pewnością zasługuje metoda współczynników nieoznaczonych dla równań o współczynnikach będących prostymi wielomianami zmiennej x . Jeżeli wektor prawych stron $f(x) \in \mathcal{R}^m$ można przedstawić w postaci wektora uogólnionych funkcji analitycznych,

$$f(x) = x^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \right) \ln x + x^{\lambda-s} \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \right),$$

gdzie $f_n, g_n \in \mathcal{R}^m$, $\lambda \in \mathcal{R}$, $s \in C$ - dane (ewentualnie po rozwinięciu danych funkcji w szeregi potęgowe), to całek tego układu poszukujemy analogicznie jak w p.6A w postaci wektora uogólnionych funkcji analitycznych

$$y(x) = x^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \ln x + x^{\lambda-s} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right),$$

w którym $b_n, c_n \in \mathcal{R}^m$ nieznanne (tzw. nieoznaczone) współczynniki w powyższych szeregach potęgowych (stąd również nazwa: metoda szeregów potęgowych).

Dalej postępujemy bardzo podobnie jak w p. 6A dla pojedynczych równań różniczkowych.

3.3. Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych z warunkami dodatkowymi

1. Zagadnienie Cauchy'ego i zagadnienie początkowe

Przez zagadnienie Cauchy'ego dla równania różniczkowego (wektorowego)

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}), \quad x \in X, \quad (\text{a})$$

gdzie f jest danym wyrażeniem klasy C (co najmniej) o dziedzinie $\text{Dom } f \subset \mathcal{R}^{1+km}$

i o wartościach w przestrzeni \mathcal{R}^m , a X przedziałem liczbowym w \mathcal{R} , rozumiemy następujący

problem (zadanie): wyznaczyć takie odwzorowanie $y(\cdot) \in C_{1,m}^k(X)$, które spełnia równanie

(a) tożsamościowo² w przedziale X oraz następujące warunki Cauchy'ego

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^i, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \quad (\text{b})$$

dla danych $x_0 \in X$ oraz $y_0^i \in \mathcal{R}^m$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$),

Warto w tym miejscu przytoczyć podstawowe twierdzenie dotyczące rozwiązywalności powyższego zagadnienia.

Twierdzenie (Cauchy'ego-Kowalewskiej). Jeżeli odwzorowanie f spełnia warunek Lipschitza względem zmiennych $y, y', \dots, y^{(k-1)}$ w przedziale otwartym X zawierającym x_0 , to istnieje takie otoczenie \mathcal{U} liczby x_0 zawarte w X , że zagadnienie (a), (b) ma jednoznaczne

rozwiązanie, jeśli $(x_0, y_0^0, y_0^1, \dots, y_0^{k-1})$ należy do obszaru \mathcal{D} określoności odwzorowania f .

Inaczej to ujmując, przez punkt $(x_0, y_0^0, y_0^1, \dots, y_0^{k-1}) \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}^{1+km}$ przechodzi jedna krzywa $y = y(x)$ w otoczeniu x_0 . Zwraca uwagę jedynie „lokalność” istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego. Zapewnienie istnienia i jednoznaczności „globalnej” (w całym przedziale określoności równania), tj. sformułowanie warunków wystarczających jest dość złożone. Zajmują się tym badania jakościowe teorii rzr (także takimi zagadnieniami jak stabilność rozwiązań, istnienie rozwiązań okresowych, ograniczoność rozwiązań i inne).

Przykład. Niech $y_{(i)}(\cdot)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) będzie fundamentalnym układem całek pojedynczego równania różniczkowego ($m = 1, a_{(k)}(x) \neq 0$ dla prawie wszystkich $x \in X$) jednorodnego, a $y_{(s)}(\cdot)$ całką szczególną równania niejednorodnego

$$a_0 y + a_1 y^{(1)} + \dots + a_k y^{(k)} = f, \quad x \in X.$$

Jak wiadomo rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest równe

$$y(x) = \sum_{i=1}^k C_i y_{(i)}(x) + y_{(s)}(x), \quad x \in X,$$

gdzie C_i ($i = 1, 2, \dots, k$) stałe dowolne.

² tożsamościowo, tzn. $u^{(k)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(k-1)}(x))$, dla każdego $x \in X$

Niech $x_0 \in \mathcal{X}$. Warunki Cauchy'ego przyjmują postać równań

$$\sum_{i=1}^k C_i y_{(i)}^{(j)}(x_0) + y_{(s)}^{(j)}(x_0) = y_0^j, \quad j = 0, 1, \dots, k-1,$$

czyli układu k równań algebraicznych liniowych

$$\left[y_{(i)}^{(j)}(x_0) \right] \{C_i\}^T = \left[y_0^j - y_{(s)}^{(j)}(x_0) \right] \quad (j - \text{numer wiersza})$$

na układ (wiersz) stałych całkowania $\{C_1 C_2 \dots C_k\}$, o macierzy będącej macierzą

Wrońskiego układu fundamentalnego całek $\{y_{(1)}(\cdot) \dots y_{(k)}(\cdot)\}$

$$W = \left[y_{(i)}^{(j)}(x_0) \right], \quad (i = 1, \dots, k; j = 0, 1, \dots, k-1)$$

a więc o wyznaczniku niezerowym dla $x_0 \in \mathcal{X}$. Zatem stałe $\{C_1 C_2 \dots C_k\}$ można wyznaczyć jednoznacznie i w efekcie rozwiązanie zagadnienia początkowego zawsze istnieje i jest jednoznaczne.

Przykład. Ustalić możliwe warunki Cauchy'ego dla układu równań

$$y_1'' - 2x y_1' + 3y_1 + y_2' - 2y_2 = 0,$$

$$2x y_1' - y_2' + 2y_1 - x y_2 = 1.$$

Układ ten nie spełnia standardu zagadnienia Cauchy'ego opisanego na wstępie tego punktu rozważań. Ale postępując zgodnie z procedurą sprowadzenia układu rzr do układu rzr rzędu pierwszego, ustalimy prawidłowe warunki Cauchy'ego. Takie przypadki zdarzają się bowiem w praktyce. Zatem, niech

$$y_3 = y_1'.$$

Wtedy wyjściowy układ równań wraz z powyższą równością można zapisać następująco:

$$y_1' = y_3,$$

$$y_2' = 2y_1 - x y_2 + 2x y_3 - 1.$$

$$y_3' = -3y_1 + 2y_2 + 2x y_3 - y_2'$$

W celu uzyskania postaci należy jeszcze z trzeciego równania wyeliminować y_2' za pomocą wyrażenia z drugiego równania. Ale już widać, że mamy układ trzech równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego ($m = 3, k = 1$), dla którego mamy warunek Cauchy'ego (jeden) w postaci (dla $j = 0$)

$$(y_1(x_0), y_2(x_0), y_3(x_0)) = (y_1^0, y_2^0, y_3^0),$$

co dla wyjściowego układu równań oznacza następujące warunki Cauchy'ego:

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_1'(x_0) = z_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0,$$

z danymi y_1^0, z_1^0, y_2^0 , przy zmianie oznaczenia $y_3^0 = z_1^0$.

Tak więc uzasadniliśmy w sposób ścisły to co się praktycznie wykonuje „na codzień”, iż warunki Cauchy'ego polegają na zadaniu wartości wszystkim funkcjom i ich pochodnym do rzędu o jeden mniejszemu od maksymalnego występującego w wyjściowym układzie równań różniczkowych.

Przejdziemy teraz do omówienia zagadnienia początkowego, podobnego (pozornie tylko) do zagadnienia Cauchy'ego.

Niech $X = (x_0, x^*)$ ($x_0 = 0$ lub $x_0 > 0$, $x^* < \infty$ lub $x^* = \infty$). I niech $y(\cdot) \in C_{1,m}^k(X)$.

Przyjmujemy założenie (umowę), że przez pochodne $y^{(j)}(x_0)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) odwzorowania $y(\cdot)$ rozumiemy granice prawostronne pochodnych $y^{(j)}(x)$, $x \in X$ przy $x \rightarrow x_0^+$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) i że pochodne te istnieją.

Przez zagadnienie początkowe dla równania rrrz (wektorowego) w postaci ogólnej

$$F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0, \quad x \in X, \quad (c)$$

gdzie F jest danym wyrażeniem o dziedzinie $\text{Dom } F \subset \mathcal{R}^{1+(k+1)m}$ i o wartościach w przestrzeni \mathcal{R}^m , klasy C (co najmniej) oraz klasy C^1 względem $y^{(k)}$ o nieosobliwej macierzy $[\partial F / \partial y^{(k)}]$ dla $x \in X$, nazywamy następujący problem (zadanie): wyznaczyć rozwiązanie $y(\cdot) \in C_{1,m}^k(X) \cap C_{1,m}^{k-1}(X_0)$ równania różniczkowego zwyczajnego (c) w danym przedziale lewostronnie domkniętym $X_0 = [x_0, x^*)$, które spełnia w przedziale $X = (x_0, x^*)$ równanie (c) tożsamościowo, a ponadto warunki początkowe (w początku przedziału X_0):

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^i, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \quad (d)$$

dla danych $y_0^i \in \mathcal{R}^m$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$).

Ze względu na postać warunków dodatkowych (b) i (d) (poza rrrz) zagadnienie Cauchy'ego i zagadnienie początkowe nie różnią się istotnie, ale co je istotnie różni to, że w zagadnieniu początkowym nie zadawaliśmy się rozwiązaniem „lokalnym” w otoczeniu x_0 , ale szukamy rozwiązania „globalnego” ze względu na zadany przedział X (matematycznie prawidłowo).

Przykład. Oscylator harmoniczny o masie m_0 i współczynniku sztywności sprężystej k_0 wykonuje drgania swobodne podlegające tłumieniu podkrytycznemu o współczynniku $c_0 < 2\sqrt{k_0 m_0}$. Wyznaczyć funkcję drgań.

Równanie drgań swobodnych (nie wymuszonych siłą) wymienionego oscylatora przedstawia się następująco:

$$m_0 y'' + c_0 y' + k_0 y = 0$$

lub $y'' + 2\lambda y' + \mu^2 y = 0$ ($2\lambda = c_0 / m_0$, $\mu^2 = k_0 / m_0$),

przy $\lambda < \omega$, w którym $y(x)$ określa położenie oscylatora. Drgania swobodne są spowodowane początkowym położeniem y_0 lub prędkością początkową v_0 . Funkcję drgań $y = y(x)$ dla $x \in [0, \infty)$ znajdziemy z rozwiązania zagadnienia początkowego, na które składa się powyższe równanie różniczkowe zwyczajne ($m = 1$) rzędu drugiego ($k = 2$) liniowe o stałych współczynnikach jednorodne dla $x \in (0, \infty)$ oraz warunki początkowe dla $x = 0$

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0.$$

Zespolone pierwiastki równania charakterystycznego są równe $-\lambda \pm i\omega$, $\omega = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$.

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego jest zatem równe

$$y = C_1 e^{-\lambda x} \sin \omega x + C_2 e^{-\lambda x} \cos \omega x,$$

gdzie C_1, C_2 stałe dowolne. Ich wartości znajdziemy z warunków początkowych, prowadzących do dwóch równań

$$C_2 = x_0, \quad \omega C_1 - \lambda C_2 = v_0,$$

po wykorzystaniu których znajdujemy funkcję drgań oscylatora

$$y = e^{-\lambda x} \left(\frac{v_0 + \lambda x_0}{\omega} \sin \omega x + x_0 \cos \omega x \right).$$

W rozdz. 7 poznamy metody bezpośredniego znajdowania zagadnienia początkowego, bez konieczności korzystania z rozwiązywania ogólnego równania różniczkowego.

2. Zagadnienie brzegowe

Zagadnienie brzegowe dla rrrz najczęściej dotyczy równań liniowych, dlatego też sformułujemy je w tym punkcie dla takich właśnie równań (wektorowych) w postaci ogólnej (13)

$$\mathbf{K}_{1,m}^k y = f, \quad x \in X, \quad (a)$$

gdzie $\mathbf{K}_{1,m}^k$ jest operatorem różniczkowym rzędu k (układ równań (a) jest rzędu $s = km$), lub w postaci bardziej jawnej (12)

$$a_0 y + a_1 y' + \dots + a_k y^{(k)} = f. \quad (b)$$

przy czym $a_i(x) = [a_{i,rs}(x)]_{m \times m}$, $f(x) = [f_s(x)]_{m \times 1}$, $y(x) = [y_s(x)]_{m \times 1}$ dla $x \in X$.

Niech $X = (x', x'')$ a $X' = [x', x'')$, $X'' = (x', x'')$, przy czym w szczególności może być $x' = -\infty$ lub $x'' = \infty$. Wprowadzamy tzw. operatory brzegowe („brzegiem” są tu końce przedziału X), liniowe odpowiednio rzędu l' i l'' :

$$\mathbf{B}' y(x') = \sum_{i'=0}^{l'} \alpha_{i'} y^{(i')}(x'), \quad \mathbf{B}'' y(x'') = \sum_{i''=0}^{l''} \alpha_{i''} y^{(i'')}(x''), \quad (c)$$

gdzie $\alpha_{i'} = [\alpha_{i';r's'}]_{m \times m}$ ($i' = 0, 1, \dots, l'$), $\alpha_{i''} = [\alpha_{i'';r''s''}]_{m \times m}$ ($i'' = 0, 1, \dots, l''$), zaś przez

$y^{(i')}(x') = [y_s^{(i')}(x')]_{m \times 1}$ rozumiemy granice prawostronne pochodnych $y^{(i')}(x)$, $x \in X$ dla $x \rightarrow x'^{(+)}$, a przez $y^{(i'')}(x'') = [y_s^{(i'')}(x'')]_{m \times 1}$ rozumiemy granice lewostronne pochodnych $y^{(i'')}(x)$, $x \in X$ dla $x \rightarrow x''^{(-)}$.

Przez zagadnienie brzegowe dla równania (b) rozumiemy następujący problem: wyznaczyć takie odwzorowanie $y(\cdot) \in C_{1,m}^k(X) \cap C_{1,m}^{l'}(X') \cap C_{1,m}^{l''}(X'')$, które spełnia tożsamościowo w przedziale X równanie różniczkowe zwyczajne (b) oraz co najmniej jeden warunek brzegowy postaci

$$\mathbf{B}'_{t'} y(x') \equiv \sum_{i'=0}^{l'} \alpha_{i'}^{t'} y^{(i')}(x') = \beta'_{t'}, \quad t' = 1, \dots, p' \quad (d)$$

i co najmniej jeden warunek brzegowy postaci

$$B''_{t''} y(x'') \equiv \sum_{i''=0}^{l''_{t''}} \alpha_{i''}^{t''} y^{(i'')}(x'') = \beta''_{t''}, \quad t'' = 1, \dots, p'', \quad (e)$$

przy czym dane są $\beta''_{t''} = [\beta''_{t'';s''}]_{m \times 1}$, $\beta''_{t''} = [\beta''_{t'';s''}]_{m \times 1}$, $\alpha_{i''}^{t''}$, $\alpha_{i''}^{t''}$ ($i'' = 0, 1, \dots, l''_{t''}$; $i'' = 0, 1, \dots, l''_{t''}$), $l''_{t''} < k$, $l''_{t''} < k$ i p', p'' - tak że łącznie $p' + p'' = k$, a ponadto warunki brzegowe są niezależne i niesprzeczne, umożliwiające istnienie i jednoznaczność rozwiązania tego zagadnienia.

! W zagadnieniach brzegowych spotykanych w praktyce operator $K_{1,m}^k$ jest parzystego rzędu ($k = 2n$) i wtedy $p' = p'' = n = k/2$).

!! W przypadku, gdy $x' = -\infty$ lub $x'' = +\infty$, mowa jest o tzw. warunkach w nieskończoności rozwiązania powyższego zagadnienia, polegających na żądaniu ograniczoności a nawet zbieżności do zera (wraz z odpowiednimi pochodnymi) rozwiązania $y(x)$ przy $x \rightarrow -\infty / +\infty$.

Przykład. Struna o długości L , z jednej strony zamocowana a z drugiej napięta siłą o wartości S , spoczywa na sprężystym podłożu Winklera o współczynniku sztywności K pod obciążeniem równomiernym o intensywności q . Wyznaczyć funkcję ugięcia struny.

Niech zmienna x parametryzuje strunę wzdłuż jej długości tak, że przy $x = 0$ jest ona zamocowana, a przy $x = L$ napięta siłą S . Niech $y = y(x)$, $x \in [0, L]$ będzie funkcją małego ugięcia struny. Zatem jest

$$y(0) = 0, \quad y'(L) = S,$$

zaś równaniem różniczkowym linii ugięcia jest równanie

$$S y''(x) + q - K y(x) = 0,$$

które zapiszemy następująco (w postaci (a), (b))

$$K_{1,1}^2 y(x) = a_2 y''(x) + a_0 y(x) = f,$$

przy $a_2 = 1$, $a_0 = -\lambda^2 = -K/S$, $f = -q/S$ wraz z warunkami brzegowymi (w postaci (c) i (d))

$$B' y(0) = \alpha'_0 y(0) = 0, \quad B'' y'(L) = \alpha''_1 y'(L) = \beta'',$$

przy $\alpha'_0 = 1$, $\alpha''_1 = 1$, $\beta'' = S$ (zapisano jedynie składniki niezerowe).

Równanie charakterystyczne i jego pierwiastki są następujące $\rho^2 - \lambda^2 = 0$, $\rho_{1,2} = \pm \lambda$, a całką szczególną jest $y_{(s)}(x) = f / \lambda^2 = q / K$. Zatem rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego jest $y = q / K + C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$, a po przyjęciu $C_1 = (D_1 + D_2) / 2$, $C_2 = (D_1 - D_2) / 2$ (D_1, D_2 - nowe stałe dowolne) jest

$$y = q / K + D_1 \cosh(\lambda x) + D_2 \sinh(\lambda x).$$

Spełnienie przez tę funkcję warunków brzegowych prowadzi do równości $q / K + D_1 = 0$, $D_1 \sinh(\lambda L) + D_2 \cosh(\lambda L) = S / \lambda$, a w efekcie do rozwiązania postawionego zagadnienia brzegowego, czyli do funkcji ugięcia struny

$$y = \frac{q}{K} [1 - \cosh(\lambda x)] + \left[\frac{S}{\lambda} + \frac{q}{K} \sinh(\lambda L) \right] \frac{\sinh(\lambda x)}{\cosh(\lambda L)}, \quad x \in [0, L], \quad \lambda = \sqrt{\frac{K}{S}},$$

przy czym $[y] = m$, $[q] = N/m$, $[K] = N/m^2$, $[L] = m$, $[S] = N$, $[\lambda] = 1/m$.

3. Zagadnienie spektralne

Zagadnienie spektralne znane jest (z definicji) dla operatorów liniowych. Takimi operatorami są operatory różniczkowe. Jednakże dla najprostszego z nich zagadnienie: dla jakich wartości λ istnieje funkcja $y(\cdot)$ z przestrzeni liniowej C^1 zawartej w przestrzeni C , taka, że

$D y(x) = \lambda y(x)$ dla każdego $x \in \mathcal{R}$ przy $D = d/dx$. Odpowiedź jest zaskakująca, jak na dotychczasowe doświadczenia z wartościami własnymi i wektorami własnymi. Mianowicie, każda liczba rzeczywista λ jest tą wartością, albowiem odpowiadającą jej funkcja

$$y(\lambda) = e^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ spełnia warunek definicyjny.}$$

Widać z powyższego, że do równania definicyjnego

$$K_{1,m}^k y = \lambda y, \quad x \in \mathcal{X}, \quad (a)$$

należy dodać dodatkowe warunki jakimi mogą być jednorodne warunki brzegowe ($y(\cdot) \equiv 0$ powinno spełniać równanie (a) i warunki brzegowe typu (b))

$$B'y(x') = 0, \quad B''y(x'') = 0, \quad (b)$$

przy $\mathcal{X} = (x', x'')$. Tym samym omawiane zagadnienie przechodzi terminologicznie z zagadnienia na wartości własne dla operatora różniczkowego na zagadnienie brzegowe spektralne dla równania różniczkowego jednorodnego

$$K_{1,m}^k y - \lambda y = 0, \quad x \in \mathcal{X} \quad (c)$$

z warunkami brzegowymi (dopuszczalnymi, tj. niezależnymi, niesprzecznymi, kompletnymi i jednorodnymi) (b), gdzie $B' = [B'_t]$ i $B'' = [B''_t]$ są multioperatorami brzegowymi w końcach x' i x'' przedziału \mathcal{X} : wyznaczyć zbiór $\{\lambda\} \subset \mathbb{R}$ dla których istnieją niezerowe rozwiązania zagadnienia brzegowego (c) i (b) oraz (jeśli to możliwe) określić bazę podprzestrzeni V_λ niezerowych rozwiązań tego zagadnienia (tzw. funkcji własnych) odpowiadających wartości własnej λ).

Przykład. Mamy następujące zagadnienie brzegowe na wartości własne dla równania różniczkowego

$$K_{1,1}^2 y - \lambda y \equiv y'' - \lambda y = 0, \quad x \in \mathcal{X} = (0, l)$$

z warunkami brzegowymi

$$B'y(0) \equiv y(0) = 0, \quad B''y(l) \equiv y'(l) = 0.$$

Równanie charakterystyczne $\rho^2 - \lambda = 0$ ma pierwiastki $\rho_{1,2} = \begin{cases} \pm \mu, & \lambda = \mu^2 > 0 \\ 0, & \lambda = 0 \\ \pm i \omega, & \lambda = -\omega^2 < 0 \end{cases},$

którym odpowiadają następujące postacie rozwiązania ogólnego

$$y = \begin{cases} C_1 \cosh \mu x + C_2 \sinh \mu x, & \lambda = \mu^2 > 0, \\ C_1 + C_2 x, & \lambda = 0, \\ C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x, & \lambda = -\omega^2 < 0, \end{cases}$$

Wykorzystanie warunków brzegowych prowadzi do wniosku, że $C_1 = 0$ w każdym przypadku, $C_2 \neq 0$ tylko, gdy $\lambda = -\omega^2 < 0$ oraz $\cos \omega l = 0$, czyli gdy

$$\omega = \omega_n = (2n-1) \frac{\pi}{l}, \quad \lambda = \lambda_n = -\omega_n^2, \quad y_{(\lambda)} = y_n = \sin \omega_n x \quad (n = 1, 2, \dots).$$

MMIL II

Część druga. RÓWNANIA

4. Równania różniczkowe cząstkowe

- 4.1. Wiadomości wstępne
- 4.2. Równania rzędu pierwszego
 1. Równanie liniowe jednorodne
 2. Równanie quasi-liniowe. Przypadek $n = 2$
 3. Równanie liniowe niejednorodne. Przypadek $n = 2$
- 4.3. Równania rzędu drugiego
 1. Wprowadzenie
 2. Klasyfikacja równań cząstkowych liniowych drugiego rzędu
 3. Sprowadzanie równań cząstkowych liniowych drugiego rzędu do postaci kanonicznej
 4. Orientacja hiperpowierzchni (krzywej, powierzchni) względem równania cząstkowego drugiego rzędu
 5. Warunki graniczne. Zagadnienie graniczne – sformułowanie klasyczne
 6. Zagadnienie brzegowe – sformułowanie klasyczne
 7. Zagadnienie początkowe – sformułowanie klasyczne
 8. Zagadnienie brzegowo-początkowe – sformułowanie klasyczne
 9. Zagadnienie spektralne – sformułowanie klasyczne
- 4.4. Równania wyższych rzędów
 1. Zagadnienie brzegowe zginania płyty – sformułowanie klasyczne
 2. Zagadnienie brzegowo-początkowe drgań belki – sformułowanie klasyczne

4. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE

W tym rozdziale zajmiemy się pojedynczymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Na wstępie zrekapitulujemy wiedzę ogólną z rozdz. 1 i 2 w zastosowaniu do tego typu równań, rozwijając ją w odniesieniu do tych równań w pewnym, nieznacznym stopniu. Następnie zajmiemy się bardziej szczegółowo pewnej klasy równaniami cząstkowymi rzędu pierwszego oraz równaniami cząstkowymi liniowymi rzędu drugiego, traktując te drugie wszakże jako reprezentatywne dla szerszej klasy równań (zwłaszcza parzystego rzędu), szczególnie w zakresie tematyki odnoszącej się do zagadnień granicznych (niezwykle ważnej dla zastosowań praktycznych w obszarze mechaniki stosowanej), co dla podkreślenia ich wagi zilustrujemy dwoma typowymi zagadnieniami dla równań czwartego rzędu. Prezentowane zagadnienia graniczne sformułujemy w ujęciu klasycznym, nieco już historycznym, ale ważnym ze względów dydaktycznych, by dobrze zrozumieć ich istotę i różnice między nimi, także by dla nich można było budować stosunkowo nieliczne ściśle rozwiązania analityczne jako benchmarki dla rozwiązań przybliżonych metodami numerycznymi, powszechnie obecnie stosowanymi w praktyce inżynierskiej. Sformułowaniu nieklasycznym, współcześnie częściej stosowanym, jako bardziej adekwatnym wielu problemom spotykanym w praktyce poświęcimy odrębny rozdział piąty. I chociaż metodom rozwiązywania zagadnień granicznych dedykujemy odrębnie rozdział szósty (ostatni w tej części), to już sygnalnie w tym rozdziale definiowane zagadnienia graniczne zilustrujemy przykładami ich rozwiązania i przy tym tak, by reprezentowane były różne metody ich rozwiązywania.

4.1. Wiadomości wstępne

W tym rozdziale, rozważać będziemy pojedyncze równania różniczkowe cząstkowe, głównie liniowe ($n > 1$, najczęściej $n = 2$ lub $n = 3$) rzędu k (lub $2k$, najczęściej $k = 2$, ale także $k = 1$ i $k = 4$) w postaci (omówionej w rozdz. 1.4 i 2.1):

$$\mathbb{K}_n^k y(x) \equiv \sum_{r=0}^k a_r(x) D^r y(x) \equiv \sum_{r=0}^k \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n a_{i_1, \dots, i_r}(x) y_{i_1, \dots, i_r}(x) = f(x), \quad (1)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \equiv (x_i) \in \mathcal{V}$$

gdzie $\mathbb{K}_n^k = \sum_{r=0}^k A_n^k = \sum_{r=0}^k a_r(\cdot) D^r$ jest operatorem różniczkowym cząstkowym liniowym (skalarowym, tj. przy $m = 1$) na obszarze \mathcal{V} przestrzeni \mathcal{R}^n . przy założeniu, że $a_k(x) \neq 0$ dla wszystkich lub prawie wszystkich $x \in \mathcal{V}$. Przez $a_r(\cdot)$ dla $r = 1, \dots, k$ rozumiemy układ funkcji $(a_{i_1, \dots, i_r}(\cdot))$ z przestrzeni $C_{n^r}(\mathcal{V})$, a przez $D^r y(\cdot)$ układ $(y_{i_1, \dots, i_r}(\cdot))$ pochodnych cząstkowych funkcji $y(\cdot)$, zaś przez „iloczyn” $a_r(\cdot) D^r y(\cdot)$ – operację mnożenia skalarowego obu układów; dla $r = 0$ mamy „zwykły” iloczyn funkcji $a_0(\cdot)$ i $y(\cdot)$. O funkcji $y(\cdot)$ zakładamy, że jest co najmniej klasy $C_n^k(\mathcal{V})$ – co najmniej w tym sensie, że powinny być jeszcze spełnione warunki regularności wynikające z czynienia zadość przez funkcję

$y(\cdot)$ pewnych dodatkowych warunków (równań) na brzegu $\partial\mathcal{V}$ obszaru \mathcal{V} , o których będzie rzecz dalej.

Tymczasem wprowadzamy następujące formalne definicje:

- równanie (1) nazywamy w obszarze \mathcal{V} eliptycznym, hiperbolicznym, parabolicznym, jeżeli odpowiednio eliptyczny, hiperboliczny, paraboliczny jest w obszarze \mathcal{V} operator K_n^k (*de facto* operator A_n^k jako składnik operatora K_n^k);

- równanie (1) ma postać kanoniczną, jeżeli operator A_n^k jako składnik operatora K_n^k w równaniu (1) ma postać kanoniczną;

- rozmierność $n-1$ – wymiarowa (płat hiperpowierzchni przy $n > 3$ lub powierzchni przy $n = 3$ lub łuk krzywej przy $n = 2$) $S \subseteq \text{clos } \mathcal{V}$, zwana dalej *var* S (od *variété* – rozmierność), ma względem równania (1) orientację przestrzenną, charakterystyczną, czasową, jeżeli odpowiednio taką orientację ma *var* S względem operatora K_n^k (tj. względem operatora A_n^k – składnika operatora K_n^k).

! Dowolna *var* S ma względem równania eliptycznego tylko orientację przestrzenną.

Niech *var* S będzie:

1) płatem (łukiem przy $n = 2$) przekroju S^* obszaru \mathcal{V} na dwa rozłączne podobszary

2) płatem (łukiem przy $n = 2$) brzegu $\partial \mathcal{V}$,

spełniającym warunek Lipschitza (S nie jest „zbyt pofałdowany”).

Niech na S dane będzie równanie (rozd. 1.3)

$$B_n^l y(\tilde{x}) \equiv \sum_{s=0}^l b_s(\tilde{x}) \partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S, \quad (2)$$

gdzie $B_n^l y(\cdot) \equiv \sum_{s=0}^l b_s(\cdot) \partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\cdot)$ jest odpowiednio tzw. operatorem „wewnętrznym” /

operatorem brzegowym, $b_s(\cdot)$ ($s = 0, 1, \dots, l$), $\beta(\cdot)$ są danymi funkcjami klasy $C_n(S)$, a

$\nu(\cdot) = (\nu_i(\cdot))$ jest polem wersorów zewnętrznych do S . O funkcji $y(\cdot)$, będącej

rozwiązaniem równania (1), od której żądamy spełnienia równania (2), mówimy, że spełnia

na S odpowiednio warunek Cauchy’ego (2) (gdy $S \subset \mathcal{V}$) / warunek graniczny (gdy $S \subset \partial \mathcal{V}$).

Jeżeli S ma względem równania (1) orientację przestrzenną, to warunek graniczny nosi nazwę

warunku brzegowego, a jeśli orientację charakterystyczną lub czasową, to nazywamy go

warunkiem początkowym. Podobnie, jak w przypadku równania różniczkowego warunek (2)

może być jednorodny, gdy $\beta(\cdot) = 0$ lub niejednorodny w przeciwnym przypadku.

! W przypadku równania eliptycznego, warunek graniczny jest zawsze brzegowy.

!! Różnica między warunkami początkowymi na *var* S o orientacji charakterystycznej i czasowej będzie głównie polegać na liczbie niezależnych warunków, o czym będzie rzecz dalej.

O obszarze \mathcal{V} zakładamy teraz, że jest jednospójny (tj. spójny i „bez dziur”), a jego niepusty brzeg $\partial\mathcal{V}$ jest sumą domknięć płatów (łuków) S_j ($j = 1, \dots, l$) parami rozłącznych i każdy z

płatów (łuków) S_j spełnia warunek Lipschitza. Przez zagadnienie graniczne dla równania (1) (w sformułowaniu klasycznym) rozumiemy następujący problem (zadanie): wyznaczyć taką funkcję $y(\cdot)$ w przestrzeni funkcyjnej

$$\text{Dom } K_n^k = C_n^{k,l_1}(\mathcal{V} \cup S_1) \cap \dots \cap C_n^{k,l_t}(\mathcal{V} \cup S_t), \quad (3)$$

która spełnia tożsamościowo, tj. w prawie każdym punkcie $x \in \mathcal{V}$ równanie (1) oraz warunki graniczne o postaci (2) na każdym z płatów (łuków) S_j przy $l_j < k$ ($j = 1, \dots, t$), niesprzeczne i niezależne oraz w liczbie stosownej do orientacji S_j względem równania, tj. w liczbie nie większej niż $[k/2]$ lub k , przy danych funkcjach $\beta_j(\cdot)$ spełniających warunki ciągłości warunków granicznych na wspólnych $\text{var } L_{r_s} = \text{clos } S_r \cap \text{clos } S_r \neq \emptyset$ oraz przy spełnieniu pozostałych założeń sformułowanych w odniesieniu do równania (1) i warunków granicznych w postaci (2), głównie dotyczących klasy ciągłości wielkości (funkcji) danych.

! Szczegółowo liczbę i rodzaje warunków granicznych jak również warunki ciągłości (zgodności) w powyższej definicji „deklaratywnej” będziemy specyfikować w miarę konkretyzowania zagadnień granicznych. Nadmienimy tylko, że jeżeli wszystkie warunki graniczne są warunkami brzegowymi (jak np. dla każdego równania eliptycznego), to zagadnienie graniczne nazywa się zagadnieniem brzegowym. I podobnie, jeśli wszystkie warunki graniczne są początkowe, to zagadnienie graniczne nazywa się zagadnieniem początkowym. Jeśli zaś typ warunków granicznych jest mieszany, to zagadnienie graniczne nazywa się zagadnieniem brzegowo-początkowym.

!! W tym miejscu wyszczególnimy pewien przypadek stosunkowo ogólny. Mianowicie, zagadnienie brzegowe dla równania eliptycznego rzędu $2k$. Liczba warunków brzegowych (niezależnych i niesprzecznych) powinna być równa k na każdym elemencie S_j brzegu obszaru \mathcal{V} . Dlatego mówimy, że na brzegu $\partial\mathcal{V}$ żądamy spełnienia k warunków brzegowych.

Warunki brzegowe (na części S_j) postaci

$$\sum_{s=0}^{k-1} b_s^j(\tilde{x}) \partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\tilde{x}) = \beta_j(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_j$$

nazywamy warunkami brzegowymi I rodzaju (lub warunkami brzegowymi sztywnymi lub warunkami brzegowymi Dirichleta) – zwykle zapisuje je się w postaci równoważnej (dlaczego?):

$$\partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\tilde{x}) = \beta_j(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_j \quad (s = 0, 1, \dots, k-1). \quad (4)$$

Warunki brzegowe (na części S_j) postaci

$$\sum_{s=k}^{2k-1} b_s^j(\tilde{x}) \partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\tilde{x}) = \beta_j(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_j$$

noszą nazwę warunków brzegowych II rodzaju (lub warunków brzegowych przepływu / obciążenia lub warunków brzegowych von Neumana) – często zapisuje je się w postaci równoważnej (?):

$$\partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\tilde{x}) = \beta_j(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_j \quad (s = k, \dots, 2k-1). \quad (5)$$

Warunki brzegowe pozostałe (w rozważanym przypadku zagadnienia brzegowego) noszą nazwę warunków brzegowych III rodzaju.

Zazwyczaj powyższa terminologia odnosi się także do warunków brzegowych w zagadnieniu brzegowo-początkowym.

!!! Jeżeli obszar \mathcal{V} jest nieograniczony (zawiera „punkt w nieskończoności”), to jako specyficzne „warunki graniczne” dodajemy „warunki w nieskończoności” tj. warunki ograniczoności (lub nawet zanikania) $\partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\tilde{x})$ dla $\tilde{x} \in S_\rho \cap \mathcal{V}$ przy $\rho \rightarrow \infty$ (S_ρ - sfera o promieniu ρ i środka w punkcie $x = 0$).

!?! Jeżeli obszar \mathcal{V} nie jest jednospójny („bez dziur”) ale dwuspójny, tzn. ma jeden brzeg wewnętrzny (i brzeg zewnętrzny), to żądamy spełnienia po jednym warunku granicznym na obu brzegach. Zagadnienie graniczne się bardzo komplikuje, gdy obszar \mathcal{V} jest wielospójny (z wieloma brzegami wewnętrznymi) i każdorazowo powinno być rozpatrywane indywidualnie.

Przez zagadnienie Cauchy’ego dla równania (1) (w sformułowaniu klasycznym) rozumiemy następujący problem (zadanie): wyznaczyć taką funkcję $y(\cdot)$ w przestrzeni funkcyjnej $C_n^k(\mathcal{V})$ która spełnia tożsamościowo równanie (1) oraz warunki Cauchy’ego o postaci (2), w liczbie k warunków niezależnych i niesprzecznych na każdym z płatów (łuków) S_j rozmaitości S , stanowiącej przekrój obszaru \mathcal{V} , przy $l_j < k$ ($j = 1, \dots, t$) i przy danych funkcjach $\beta_j(\cdot)$ spełniających warunki ciągłości (zgodności) warunków Cauchy’ego na wspólnych $\text{var } L_{rs} = \text{clos } S_r \cap \text{clos } S_r \neq \emptyset$ oraz przy spełnieniu pozostałych założeń sformułowanych w odniesieniu do równania (1) i warunków Cauchy’ego w postaci (2), głównie dotyczących klasy ciągłości funkcji (wielkości) danych.

Jest to tzw. złożone zagadnienie Cauchy’ego. Przez proste zagadnienie Cauchy’ego rozumiemy zadanie: wyznaczyć taką funkcję $y(\cdot)$ w przestrzeni funkcyjnej $C_n^k(\mathcal{V})$ która spełnia tożsamościowo równanie (1) w obszarze \mathcal{V} oraz następujące warunki Cauchy’ego na $\text{var } S$ dzielącej \mathcal{V} na dwie rozłączne części:

$$\partial_{\nu(\tilde{x})}^{(s)} y(\tilde{x}) = \beta_s(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S \quad (s = 0, 1, \dots, k-1). \quad (6)$$

Uwaga. Stosunkowo nie trudno jest uogólnić wprowadzone lub wyspecyfikowane pojęcia na równania prawie liniowe postaci

$$A_n^k u + G(x, A_n^0 u, A_n^1 u, \dots, A_n^{k-1} u) = 0, \quad x \in \mathcal{V} \quad (7)$$

oraz na prawie liniowe warunki graniczne postaci

$$\alpha_l \partial_{\nu}^{(l)} u + \gamma(\tilde{x}, u, \partial_{\nu} u, \dots, \partial_{\nu}^{l-1} u) = 0, \quad \tilde{x} \in S, \quad (8)$$

gdyż o klasyfikacji i nazewnictwie tych pojęć decydują *de facto* składniki liniowe z najwyższymi pochodnymi, tj. operatory A_n^k i $\alpha_l \partial_{\nu}^{(l)}$. Jednakże, by złożoność prezentowanych treści nie była zbyt duża „do ogarnięcia”, dokonamy tego w kolejnych dwóch podrozdziałach, na dość reprezentatywnych przypadkach równań cząstkowych rzędu pierwszego i zwłaszcza drugiego.

4.2. Równania rzędu pierwszego

Równaniem różniczkowym (pojedynczym) cząstkowym rzędu pierwszego w postaci ogólnej jest równanie:

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_1, \dots, u_n) = 0, \quad (1)$$

gdzie $u \in C_n^1(\mathcal{V})$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, a $F = F(x, u, v) \in \mathcal{R}$ ($x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{R}$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{R}^n$) jest funkcją co najmniej ciągłą na obszarze $\mathcal{D} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{R}^{1+n}$.

Przedmiotem zainteresowania w tym punkcie będą równania cząstkowe rzędu pierwszego :

- quasi-liniowe, gdy dla $v_i = u_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$)

$$F = a_1(x, u)u_1 + \dots + a_n(x, u)u_n + a_0(x, u), \quad (2)$$

przy $a_0 = a_0(x, u)$, $a_i = a_i(x, u)$ ciągłych i nie wszystkich równych zero na $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V} \times \mathcal{R}$ dla $i = 1, \dots, n$;

- prawie liniowe, gdy

$$F = a_1(x)u_1 + \dots + a_n(x)u_n + a_0(x, u) = A_n^1 u + a_0(x, u), \quad (3)$$

przy a_1, \dots, a_n ciągłych i nie wszystkich równych zero na \mathcal{V} oraz a_0 ciągłej na $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V} \times \mathcal{R}$;

- liniowe, gdy

$$F = a_1(x)u_1 + \dots + a_n(x)u_n + a_0(x)u - f(x) = A_n^1 u + A_n^0 u - f(x), \quad (4)$$

przy a_1, \dots, a_n ciągłych i nie wszystkich równych zero na \mathcal{V} oraz a_0 i f ciągłych na \mathcal{V} , gdzie A_n^1 jest operatorem różniczkowym cząstkowym rzędu pierwszego, a A_n^0 jest operatorem algebraicznym odpowiednio na przestrzeni $C_n^1(\mathcal{V})$ i $C_n(\mathcal{V})$ (por. rozdz. 1).

W przypadku $n = 2$ i $n = 3$ stosować będziemy tradycyjne oznaczenia – odpowiednio

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (5)$$

przy $(x_1, x_2) = (x, y)$ oraz

$$F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) = 0, \quad (6)$$

przy $(x_1, x_2, x) = (x, y, z)$ a także oznaczenia:

$$a_0 = a = P, \quad a_2 = Q, \quad a_3 = R, \quad u_x = p, \quad u_y = q, \quad u = u_z = r. \quad (7)$$

Całka szczególna równania różniczkowego (1) jest hiperpowierzchnią n -wymiarową w przestrzeni \mathcal{R}^{n+1} (powierzchnią w przestrzeni \mathcal{R}^3 przy $n = 2$) – tzw. (hiper)powierzchnią całkową. Rozwiązanie ogólne jest więc rodziną (hiper)powierzchni całkowych w przestrzeni \mathcal{R}^{n+1} . Aby rozwiązanie równania (1) wyznaczyć jednoznacznie, należy więc postawić dodatkowy warunek, jaki rozwiązanie powinna spełnić – np. warunek Cauchy'go : $u = \beta(\tilde{x})$ jest daną funkcją dla $\tilde{x} \in S \subset \mathcal{V}$ (S – rozmaitość $n-1$ wymiarowa) lub ogólnie: (hiper)powierzchnia całkową przechodzi przez daną rozmaitość $n-1$ wymiarową $S' \subset \mathcal{V}'$ przy $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \times \mathcal{R}$ a dla $n = 2$ $S' = \mathcal{L}$ jest krzywą w \mathcal{R}^3). Zadanie to jest zagadnieniem Cauchy'ego.

Poniżej rozważymy wraz z przykładami kilka reprezentatywnych przypadków szczególnych wyznaczania całki dowolnej (całki ogólnej) i całki szczególnej (rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego) równania różniczkowego cząstkowego rzędu pierwszego.

1. Równanie liniowe jednorodne

Rozważmy równanie różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego liniowe jednorodne postaci (por. wzór (4)):

$$A_n^1 u \equiv \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) u_{,i}(x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (8)$$

Prawdziwe są następujące stwierdzenia:

Twierdzenie. Niech $\sum_{i=1}^n a_i^2(x_1^0, \dots, x_n^0) > 0$ ($a_i(x_1^0, \dots, x_n^0)$ nie wszystkie równe zero). Wtedy

w pewnym otoczeniu \mathcal{V} punktu $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ funkcja $u = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ klasy C^1 jest rozwiązaniem równania (8) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = C \quad (9)$$

jest całką pierwszą układu równań zwyczajnych w postaci symetrycznej

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n)}. \quad (10)$$

Wynika to z tego, że jeśli zachodzi (9), to

$$d\varphi = \varphi_{,1} dx_1 + \dots + \varphi_{,n} dx_n = 0, \quad (11)$$

a dx_1, \dots, dx_n są (zgodnie z (10)) proporcjonalne do a_1, \dots, a_n . I na odwrót.

Układ równań (10) nosi nazwę układu równań charakterystyk równania (8).

Twierdzenie. Jeżeli funkcje $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ klasy C^1 w obszarze $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}^n$ są niezależnymi całkami pierwszymi układu równań (10), tzn. macierz Jacobi'ego

$$J = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \end{array} \right]_{(n-1) \times n}$$

jest rzędu $n-1$ w obszarze \mathcal{V} , to funkcja

$$u = \Phi(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)), \quad (12)$$

jest całką dowolną (ogólną) równania (8), przy czym Φ jest dowolną funkcją klasy C^1 w odpowiednim obszarze przestrzeni \mathcal{R}^{n-1} .

Przykład. Znaleźć powierzchnię całkową $u = u(x, y)$ równania

$$yu_{,x} - xu_{,y} = 0, \quad (a)$$

przechodzącą przez krzywą $u = f(x), y = 0$, gdzie $f(x)$ jest daną funkcją klasy C^1 w otoczeniu $x_0 = 1$ o promieniu $r < 1$.

Mamy tu $n = 2$, $(x_1, x_2) = (x, y)$, $a_1(x, y) = y$, $a_2(x, y) = -x$, a w efekcie równanie charakterystyk jest postaci:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}. \quad (b)$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych $x dx = -y dy$, skąd $x^2 + y^2 = C$, a więc

$$\varphi = x^2 + y^2 \quad (c)$$

jest całką pierwszą równania (b). Zatem jeśli $\Phi = \Phi(\xi)$, $\xi > 0$ jest dowolną funkcją klasy C^1 , to

$$u = \Phi(x^2 + y^2)$$

jest rozwiązaniem dowolnym równania (a).

Z warunku Cauchy'ego $u(x,0) = f(x)$ otrzymujemy $\Phi(x^2) = f(x)$, czyli $\Phi(\xi) = f(\sqrt{\xi})$.

Tak więc rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego:

$$yu_x - xu_y = 0 \quad \text{przy} \quad u = f(x) \quad \text{dla} \quad y = 0,$$

przedstawia się następująco:

$$u = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

2. Równanie quasi-liniowe. Przypadek $n = 2$

Rozważmy równanie quasi-liniowe postaci ($n = 2$):

$$P(x, y, u)u_x + Q(x, y, u)u_y + a(x, y, u) = 0, \quad (13)$$

gdzie P, Q, a są danymi funkcjami klasy C^1 w pewnym obszarze $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^3$, przy czym co najmniej jedna z funkcji P, Q jest różna od zera w obszarze \mathcal{D} .

Niech $v = v(x, y, u)$ będzie klasy C^1 w obszarze \mathcal{D} przy $v_u \neq 0$ w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0, u_0) \in \mathcal{D}$. Niech $u = u(x, y)$ będzie w tym otoczeniu rozwiązaniem równania

$$v(x, y, u) = 0 \quad (14)$$

i spełnia równanie (13). Po zróżniczkowaniu (zupełnym) równania (14) względem x, y mamy

$$v_x + v_u u_x = 0, \quad v_y + v_u u_y = 0,$$

skąd $u_x = -v_x / v_u$, $u_y = -v_y / v_u$ i po podstawieniu do (13) otrzymujemy

$$P(x, y, u)v_x + Q(x, y, u)v_y + R(x, y, u)v_u = 0, \quad (15)$$

gdzie $R = -a$. Zatem funkcja $v = v(x, y, u)$ jest rozwiązaniem równania liniowego postaci (8)

przy $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, u)$, $a_1 = P$, $a_2 = Q$, $a_3 = R = -a$. Natomiast rozwiązanie

$u = u(x, y)$ jest funkcją uwikłaną równaniem (14) (w otoczeniu punktu (x_0, y_0, u_0))

obszaru \mathcal{D} .

Można dowieść, że jeżeli niezależnymi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk równania (15) są $\varphi_1(x, y, u)$ i $\varphi_2(x, y, u)$ klasy C^1 w otoczeniu punktu (x_0, y_0, u_0) , to związek

$$\Phi(\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)) = 0, \quad (16)$$

gdzie $\Phi = \Phi(\xi_1, \xi_2)$ jest dowolną funkcją klasy C^1 w odpowiednim obszarze przestrzeni \mathcal{R}^2 , obejmuje wszystkie rozwiązania (rozwiązanie ogólne) równania (13) w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) .

Przykład. Znajdziemy rozwiązanie równania

$$(1 + \sqrt{u - x - y})u_{,x} + u_{,y} = 2 \quad (\text{a})$$

w dostatecznie małym otoczeniu punktu (x_0, y_0, u_0) , w którym funkcja $P(x, y, u) = 1 + \sqrt{u - x - y}$ jest klasy C^1 . W tym celu, zgodnie z (15), bierzemy pod uwagę równanie

$$(1 + \sqrt{u - x - y})v_{,x} + v_{,y} + 2v_{,u} = 0 \quad (\text{b})$$

oraz układ równań charakterystyk tego równania

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{u - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{2}. \quad (\text{c})$$

Na podstawie (c) znajdujemy

$$\frac{dy}{1} = \frac{du}{2} \quad (\text{d})$$

oraz

$$\begin{aligned} \sqrt{u - x - y} dy &= dx - dy, & 2dx &= du + \sqrt{u - x - y} du, \\ \sqrt{u - x - y} dy - 2dx &= -dx - dy, & du - 2dx &= -\sqrt{u - x - y} du, \\ \sqrt{u - x - y} dy - 2dx + du &= du - dx - dy, \\ \sqrt{u - x - y} dy - \sqrt{u - x - y} du &= du - dx - dy, & du &= 2dy, \\ -\sqrt{u - x - y} dy &= du - dx - dy, \end{aligned}$$

skąd

$$\frac{dy}{1} = -\frac{du - dx - dy}{\sqrt{u - x - y}}, \quad (\text{e})$$

a więc całki pierwsze są wobec (d) i (e) równe

$$\varphi_1 = y - \frac{1}{2}u, \quad \varphi_2 = y + 2\sqrt{u - x - y}. \quad (\text{f})$$

Zatem zależność

$$\Phi\left(y - \frac{1}{2}u, y + 2\sqrt{u - x - y}\right) = 0, \quad (\text{g})$$

przy dowolnej $\Phi = \Phi(\xi_1, \xi_2)$ klasy C^1 , określa w sposób niejawni rozwiązanie dowolne $u = u(x, y)$ równania (a).

3. Równanie liniowe niejednorodne. Przypadek $n = 2$

Rozważmy równanie liniowe niejednorodne postaci (przy $n = 2$):

$$P(x, y)u_{,x} + Q(x, y)u_{,y} = R(x, y) \quad (\text{17})$$

z niewiadomą funkcją $u = u(x, y)$ (por. (4), (5) przy $(x_1, x_2) = (x, y)$, $a_0 = 0$, $a_1 = P$, $a_2 = Q$, $b = R$).

Zauważmy, że równanie (17) jest szczególnym przypadkiem równania (13) przy $a = -R$ oraz P i Q niezależnych od u . Zatem tok postępowania z p. 2 może być wykorzystany w przypadku równania (17). Oznacza to, poszukiwanie rozwiązania równania (17) sprowadzono do rozwiązania (8) przy $n = 3$, $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, u)$, zastąpieniu u przez v i wyznaczeniu $v = v(x, y, u)$ w sposób opisany w p. 2, zaś $u = u(x, y)$ z postaci uwikłanej $v(x, y, u) = 0$.

Przykład. Wyznamy rozwiązanie równania

$$u_{,x} + u_{,y} = 1. \quad (a)$$

W tym celu poszukujemy rozwiązania równania

$$v_{,x} + v_{,y} + v_{,u} = 0, \quad (b)$$

którego układ równań charakterystyk ma postać:

$$dx = dy = du. \quad (c)$$

Całki pierwsze niezależne określają funkcje:

$$\varphi_1 = u - x, \quad \varphi_2 = y - x \quad (d)$$

lub

$$\varphi_1 = u - y, \quad \varphi_2 = y - x$$

lub

$$\varphi_1 = u - x, \quad \varphi_2 = u - y.$$

Rozwiązanie dowolne równania (a) określa zatem równość

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad (e)$$

przy dowolnej funkcji $\Phi = \Phi(\xi_1, \xi_2)$ klasy C^1 .

Poszukajmy jeszcze rozwiązania szczególnego równania (a), spełniającego warunek Cauchy'ego:

$$x = r \cos \alpha t, \quad y = r \sin \alpha t, \quad u = x + y, \quad t \in [0, 2\pi/\alpha). \quad (f)$$

Z całek pierwszych

$$u - x = C_1, \quad u - y = C_2 \quad (g)$$

oraz z wyrażen (f) eliminujemy zmienne x, y, u , otrzymując

$$C_1^2 + C_2^2 = r^2, \quad (h)$$

a więc skonkretyzowaną funkcję

$$\Phi(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - r^2. \quad (i)$$

Na podstawie (i), (e) i (d)₃ znajdujemy ostatecznie równanie uwikłane na powierzchni całkową równania (a):

$$(u - x)^2 + (u - y)^2 - r^2 = 0. \quad (j)$$

Ponieważ ze względu na u jest to równanie kwadratowe, więc możemy określić płaty powierzchni całkowej dane przez funkcje:

$$u = \frac{1}{2}(x + y) \pm \frac{1}{4}\sqrt{2r^2 - (x - y)^2} \quad (k)$$

na obszarze \mathcal{V} takim, że $2r^2 - (x - y)^2 > 0$.

4.3. Równania rzędu drugiego

1. Wprowadzenie

Na wstępie tego podrozdziału zrekapitulujemy podstawowe wiadomości dotyczące postaci najważniejszej kategorii równań rozpatrywanych w tym rozdziale (ze względów dydaktycznych i nie tylko) zawarte w rozdziale 1 (zwłaszcza podrozdziale 1.4), rozdziale 2 i podrozdziale 4.1.

Równaniem różniczkowym (pojedynczym) cząstkowym rzędu drugiego w postaci ogólnej jest równanie:

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{,1}, \dots, u_{,n}, u_{,11}, u_{,12}, \dots, u_{,nn}) = 0, \quad (1)$$

gdzie $u = u(x)$ jest niewiadomą funkcją co najmniej klasy $C_n^2(\mathcal{V})$ (a wystarczy jak będzie

klasy $C_n^2(\bar{\mathcal{V}})$), $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}^n$, a $F = F(x, u, v, w) \in \mathcal{R}$ ($x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}$,

$v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{R}^n$, $w = (w_{11}, w_{12}, \dots, w_{nn}) \in \mathcal{R}^{n \times n}$) jest funkcją co najmniej ciągłą na obszarze $\mathcal{D} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{R}^{1+n+nx}$.

Przedmiotem zainteresowania w tym punkcie będą przede wszystkim równania różniczkowe cząstkowe liniowe, gdy przy $v_i = u_{,i}$ oraz $w_{ij} = u_{,ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$):

$$F \equiv K_n^2 u \equiv A_n^2 u + A_n^1 u + A_n^0 u - f \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) w_{ij} + \sum_{i=1}^n a_i(x) v_i + a_0(x) u - f(x) = 0, \quad (2)$$

gdzie a_{ij} , a_i , a_0 i f są ciągłe na \mathcal{V} , zaś A_n^2 , A_n^1 są operatorami różniczkowymi cząstkowymi rzędu drugiego i pierwszego, a A_n^0 operatorem algebraicznym na przestrzeniach

odpowiednio $C_n^2(\mathcal{V})$, $C_n^1(\mathcal{V})$ i $C_n(\mathcal{V})$ (por. rozdz. 1). Zakładamy przy tym, że co najmniej

jeden ze współczynników a_{ij} jest różny od zera na \mathcal{V} . Jeżeli $f \equiv 0$, to równanie $F = 0$ jest

jednorodne – w przeciwnym przypadku niejednorodne. Jeśli $a_{ij}(x) = a_{ij} = \text{const}$, $a_i(x) =$

$a_i = \text{const}$ i $a_0(x) = a_0 = \text{const}$, to mamy równanie o stałych współczynnikach.

Przy $n = 2$ lub $n = 3$ stosować będziemy także notacje tradycyjne:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &= (x, y), & (x_1, x_2, x_3) &= (x, y, z); \\ \text{lub } & & \text{lub } & & & = (x, y, t); \\ & & & & & = (x, t); \end{aligned}$$

oraz

$$u_{,11} = u_{,xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{,12} = u_{,xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots$$

2. Klasyfikacja równań cząstkowych liniowych drugiego rzędu

Niech

$$A_n^2(x; \xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \eta_j = \xi^T A(x) \eta, \quad x \in \mathcal{V} \quad (3)$$

przy $x = (x_i)$, $\xi = (\xi_i)$, $\eta = (\eta_i) \in \mathcal{R}^n$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $\xi^T = [\xi_1, \dots, \xi_n]$, $\eta^T = [\eta_1, \dots, \eta_n]$,
 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, będzie formą dwuliniową, stowarzyszoną z równaniem (2) (*de facto*
 stowarzyszoną z operatorem różniczkowym A_n^2).

Równanie (2) (forma (3)) ma postać kanoniczną, jeżeli operator K_n^2 (tj. A_n^2 ma postać
 kanoniczną, czyli

$$a_{ij}(x) = \lambda_{(i)} \delta_{ij}, \quad \lambda_{(i)} = 1 \text{ lub } -1 \text{ lub } 0 \quad (x \in \mathcal{V}). \quad (4)$$

Równanie postaci (2) nazywamy (w kolejności) eliptycznym, hiperbolicznym, parabolicznym
 w punkcie $x \in \mathcal{V}$ (w obszarze $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$), jeżeli odpowiednio operator K_n^2 (*de facto* operator
 A_n^2) jest eliptyczny, hiperboliczny, paraboliczny, czyli forma A_n^2 jest dodatnio określona,
 nieokreślona i nieosobliwa, osobliwa w punkcie x (w obszarze \mathcal{U}).

! Równanie (2) może być w obszarze \mathcal{V} typu mieszanego (różnego typu dla różnych $x \in \mathcal{V}$).
 Dalej zakładając będziemy, że równanie postaci (2) (rozważane) jest określonego typu (np.
 eliptyczne) w całym obszarze \mathcal{V} .

!! Równanie (2) w postaci kanonicznej (por. (4)) jest odpowiednio:

- a) eliptyczne, gdy wszystkie $\lambda_{(i)}$ są równe +1 lub -1,
- b) hiperboliczne, gdy wszystkie $\lambda_{(i)}$ są różne od zera i co najmniej dwa z nich są różnych
 znaków,
- c) paraboliczne, gdy co najmniej jeden $\lambda_{(i)}$ jest równy zeru.

Przykład. Niech $n = 2$ oraz $\mathcal{V} = \mathcal{R}^2$. Powróćmy jeszcze raz do przykładów z rozdz. 1.3 i 1.4:

1) Równanie $\Delta u = f$, zwane równaniem Poissona, gdzie

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (5)$$

jest operatorem Laplace'a, jest równaniem eliptycznym w postaci kanonicznej, gdyż operator
 Δ jest eliptyczny w postaci kanonicznej. Istotnie, bowiem $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$ oraz
 $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} = 1$. Wynika to również bezpośrednio z postaci formy stowarzyszonej
 $A_2^2 = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2$, dodatnio określonej, gdyż dla $\xi_1 = \eta_1$, $\xi_2 = \eta_2$ jest $A_2^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 > 0$
 oraz $A_2^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$.

2) Równanie $\square u = f$, zwane równaniem falowym (fali płaskiej), gdzie

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (6)$$

jest tzw. operatorem falowym (jednowymiarowym), jest równaniem hiperbolicznym
 w postaci kanonicznej, gdyż operator \square jest hiperboliczny w postaci kanonicznej.

Rzeczywiście, $a_{11} = -a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$ oraz $\lambda_{(1)} = -\lambda_{(2)} = 1$. Wynika to również

bezpośrednio z postaci formy stowarzyszonej $A_2^2 = \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2$, określonej bowiem $\det[a_{ij}] = -1 \neq 0$, a więc $A_2^2 = \alpha^2 > 0$ dla $\xi_1 = \eta_1 = \alpha$, $\xi_2 = \eta_2 = 0$ oraz $A_2^2 = -\beta^2 < 0$ dla $\xi_1 = \eta_1 = 0$, $\xi_2 = \eta_2 = \beta$ oraz $A_2^2 = 0$ dla $\xi_1 = \eta_1 = \alpha$, $\xi_2 = \eta_2 = \alpha$.

2) Równanie $D_1^2 u = f$, zwane równaniem dyspersji (jednokierunkowej), gdzie

$$D_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \quad (7)$$

jest tzw. operatorem dyspersji (jednowymiarowej), jest równaniem parabolicznym w postaci kanonicznej, gdyż operator D_1^2 jest paraboliczny w postaci kanonicznej.

Rzeczywiście, $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$ oraz $\lambda_{(1)} = 1$, $\lambda_{(2)} = 0$. Wynika to również

bezpośrednio z postaci formy stowarzyszonej $A_2^2 = \xi_1\eta_1$, osobliwej bowiem $\det[a_{ij}] = 0$ oraz $A_2^2 = \alpha^2 > 0$ dla $\xi_1 = \eta_1 = \alpha$, $\xi_2 = \eta_2 = 0$ oraz $A_2^2 = 0$ dla $\xi_1 = \eta_1 = 0$, $\xi_2 = \eta_2 = \beta$.

Przytoczymy jeszcze kryterium eliptyczności (równania (2)).

Twierdzenie. Jeżeli wszystkie wyznaczniki główne macierzy $[a_{ij}]$ są dodatnie, to równanie (2) jest eliptyczne.

Uwaga. W przypadku $n = 2$ mamy proste warunki eliptyczności równania

$$\begin{aligned} & a_{11}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{12}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{21}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + a_{22}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + a_0(x, y) u = b(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{V} \subset \mathcal{R}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

(z uwagi na $u_{,xy} = u_{,yx}$ dla funkcji klasy $C_2^2(\mathcal{V})$ można przyjąć $a_{12} + a_{21} = 2\tilde{a}_{12}$, $\tilde{a}_{12} = \tilde{a}_{21}$

oraz $a_{11} = \tilde{a}_{11}$, $a_{22} = \tilde{a}_{22}$ oraz w konsekwencji operator A_2^2 jest symetryczny z macierzą $[\tilde{a}_{ij}]^T = [\tilde{a}_{ij}]$). Równanie (8) jest eliptyczne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

Przykład. Określimy typ równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = b(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{R}^2.$$

Ponieważ $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}$ i $\det[a_{ij}] = -\frac{1}{4} < 0$, więc równanie jest hiperboliczne.

Uwaga. Powyżej zrekapitulowaną klasyfikację równań liniowych można niemal automatycznie rozszerzyć na przypadek równań prawie liniowych postaci

$$K_n^2(u(x)) = A_n^2 u(x) + G(x, u, u_1, \dots, u_n) = 0, \quad (9)$$

gdzie G jest wyrażeniem ciągłym względem wszystkich swoich argumentów, gdyż o klasyfikacji równań decyduje de facto operator A_n^2 , czyli forma $A_n^2(x; \xi, \eta) = \sum_{i,j}^n a_{ij}(x) \xi_i \eta_j$.

3. Sprowadzanie równań cząstkowych liniowych drugiego rzędu do postaci kanonicznej

Przedstawimy dwa przypadki, dla których istnieją stosunkowo efektywne narzędzia sprowadzania równań rzędu drugiego do postaci kanonicznej

1° Przypadek równań o stałych współczynnikach

Można założyć, że $a_{ij} = a_{ji}$, gdyż $\partial_{ij} = \partial_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$), jeśli $u = u(x_1, \dots, x_n)$ jest klasy $C_n^2(\mathcal{V})$. Wykorzystujemy twierdzenie Sylwestera o bezwładności formy dwuliniowej symetrycznej na przestrzeni \mathcal{R}^n (macierzy symetrycznej), tzn. jeśli $[a_{ij}]^T = [a_{ij}]$, to istnieje taka macierz $[m_{ij}]$, że $[m_{ij}]^T [a_{ij}] [m_{ij}] = \text{diag}[\lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(n)}]$, gdzie $\lambda_{(i)} = 1, -1$ lub 0 dla $i = 1, \dots, n$.

Wprowadzamy nowe zmienne $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$[y_k] = [m_{ki}] [x_i], \quad y_k = \sum_{i=1}^n m_{ki} x_i. \quad (10)$$

Mamy zatem (w odniesieniu do równań (2)):

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u &= b, \\ \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=l=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=l=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + a_0 u &= b, \\ \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=l=1}^n a_{ij} m_{ki} m_{lj} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=l=1}^n a_i m_{ki} \frac{\partial u}{\partial y_k} + a_0 u &= b, \\ \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=l=1}^n a_{ij} m_{ki} m_{lj} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=l=1}^n a_i m_{ki} \frac{\partial u}{\partial y_k} + a_0 u &= b, \\ \sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} + \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k \frac{\partial u}{\partial y_k} + a_0 u &= b, \end{aligned}$$

gdź

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} m_{ki} m_{lj} = \tilde{a}_{kl} = \lambda_{(k)} \delta_{kl}, \quad \sum_{i=1}^n a_i m_{ki} = \tilde{a}_k, \quad \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = m_{ki}. \quad (11)$$

Ostatecznie otrzymujemy postać kanoniczną równania (2) na funkcję $u = u(y)$:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{(k)} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} + \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k \frac{\partial u}{\partial y_k} + a_0 u = b. \quad (12)$$

Pozostaje oczywiście problem znalezienia macierzy $[m_{ki}]$ o właściwości (11).

Wykorzystujemy do tego metody algebry liniowej (rachunku, macierzowego, metod numerycznych) sprowadzenia macierzy do postaci diagonalnej $\mathbf{A}^1 = \text{diag}[\mu_{(1)}, \dots, \mu_{(n)}]$,

z której otrzymujemy postać kanoniczną $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{A} \mathbf{\Lambda} = \text{diag} [\lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(1)}]$, przy

$\mathbf{\Lambda} = \text{diag} [\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(n)}]$, przy czym $\alpha_{(i)} = |\mu_{(i)}|^{-1/2}$, gdy $\mu_{(i)} \neq 0$ oraz $\alpha_{(i)} = 1$, gdy $\mu_{(i)} = 0$.

Przykład. Sprowadzimy do postaci kanonicznej równanie

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{R}^2. \quad (\text{a})$$

Zauważmy, że $[m_{ij}]^T [a_{ij}] [m_{ij}] = \text{diag} [1, -1]$ przy

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

tj.

$$[m_{kj}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}. \quad (\text{b})$$

Zastosujemy zatem do równania (a) podstawienie

$$\xi = 2x + y, \quad \eta = x + y. \quad (\text{c})$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (2 \cdot 1 - 3 \cdot 1) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \end{aligned} \quad (\text{d})$$

czym potwierdzamy spodziewany rezultat. Równanie (d) jest więc równaniem falowym, czyli hiperbolicznym.

2° Przypadek równań o zmiennych współczynnikach w przestrzeni \mathcal{R}^2

Rozważmy równanie prawie liniowe

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{V}. \quad (13)$$

Ponieważ klasyfikacja równań w pełni liniowych jest określona *de facto* przez operator różniczkowy drugiego rzędu, a więc również w przypadku równania (13) przez operator

$$A_2^2 u = A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (14)$$

($a_{11} = A$, $a_{12} = a_{21} = B$, $a_{22} = C$), można wprowadzić formę dwuliniową stowarzyszoną z tym operatorem

$$A_2(x, y; (\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)) = A(x, y) \xi_1 \eta_1 + B(x, y) (\xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2) + C(x, y) \xi_2 \eta_2 \quad (15)$$

i w pełni identycznie dokonać klasyfikacji równania (13) lub wykorzystać wprost współczynniki i kryterium określoności lub osobliwości macierzy

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}.$$

Zatem równanie (13) jest w obszarze \mathcal{V} (przy $A(x, y) \geq 0$)

1) eliptyczne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D(x, y) \stackrel{\text{ozn}}{=} A(x, y)C(x, y) - B^2(x, y) > 0,$$

2) hiperboliczne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D(x, y) \stackrel{\text{ozn}}{=} A(x, y)C(x, y) - B^2(x, y) < 0,$$

3) paraboliczne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D(x, y) \stackrel{\text{ozn}}{=} A(x, y)C(x, y) - B^2(x, y) = 0$$

(przy co najmniej jednym ze współczynników A, B, C różnym od zera, dla wszystkich $(x, y) \in \mathcal{V}$).

Równanie (13) można sprowadzić do postaci kanonicznej na podstawie następujących twierdzeń:

Twierdzenie. Typ równania (13) nie zmienia się przy przekształceniu obszaru \mathcal{V} na obszar $\tilde{\mathcal{V}}$ w \mathcal{R}^2 :

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{V}, \quad (16)$$

spełniającym warunki :

1° funkcje φ_1 i φ_2 są klasy $C_2^2(\mathcal{V})$;

2° jacobian przekształcenia (16) jest niezerowy, tzn.

$$J(x, y) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Twierdzenie. Istnieje przekształcenie (16) spełniające warunki 1° i 2°, za pomocą którego można sprowadzić równanie (13) do postaci kanonicznej, tzn. do postaci:

$$\tilde{A} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\tilde{B} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{C} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \tilde{G} \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0$$

przy

- (\tilde{A}, \tilde{C}) równych $(1, 1)$ lub $(1, -1)$ i $\tilde{B} = 0$ lub
- (\tilde{A}, \tilde{C}) równych $(0, 0)$ i $\tilde{B} = \frac{1}{2}$ lub
- (\tilde{A}, \tilde{C}) równych $(1, 0)$ lub $(0, 1)$ i $\tilde{B} = 0$.

! Zauważmy, że przypadek $(\tilde{A}, \tilde{C}) = (0, 0)$ i $\tilde{B} = \frac{1}{2}$ można sprowadzić do przypadku $(\tilde{A}, \tilde{C}) = (1, -1)$ i $\tilde{B} = 0$, przyjmując

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \tilde{\eta} = \frac{1}{2}(\xi - \eta).$$

Jednak jego wyróżnienie jest dogodnie.

!! Twierdzenie powyższe jest konstruktywne, albowiem w drugiej swej części wskazuje sposób otrzymania przekształcenia (16).

Rozważmy zatem każdy z trzech typów równania (13), w zależności od znaku jego wyróżnika D .

a) $D < 0$.

Jeżeli $A = C = 0$ w obszarze \mathcal{V} , to $B \neq 0$ w tym obszarze, więc równanie (13) jest *de facto* w postaci kanonicznej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2B(x, y)} G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{V}.$$

Zatem niech A lub C różne od zera – można założyć, że to $A \neq 0$ w obszarze \mathcal{V} .

Rozważmy równanie różniczkowe cząstkowe (stowarzyszone z (13)):

$$A\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{V}. \quad (17)$$

Ponieważ $D < 0$ i $A > 0$, równanie powyższe można zapisać w postaci:

$$A\frac{\partial \phi}{\partial x} + (B + \sqrt{-D})\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad A\frac{\partial \phi}{\partial x} + (B - \sqrt{-D})\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (18)$$

Oczywiście, gdyż każde rozwiązanie równania (18)₁ lub (18)₂ jest rozwiązaniem równania (15).

Równania charakterystyk równań (18), zwane dalej równaniami charakterystyk równania (13), mają postać:

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \sqrt{-D}}, \quad \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B - \sqrt{-D}},$$

czyli

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{-D}}{A}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{-D}}{A}. \quad (19)$$

Niech $\phi_1(x, y)$, $\phi_2(x, y)$ będą dwoma (niezależnymi) całkami pierwszymi równań (19). Wtedy przekształcenie

$$\xi = \phi_1(x, y), \quad \eta = \phi_2(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{V},$$

sprowadza równanie (13) do postaci kanonicznej (druga postać kanoniczna równania hiperbolicznego):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{G}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

b) $D = 0$

W tym przypadku funkcje A i C nie mogą zerować się jednocześnie w obszarze \mathcal{V} , bo to (wobec $D = 0$) oznaczałoby $B = 0$, czyli brak równania drugiego rzędu. Można założyć, że to $A \neq 0$ ($A > 0$) w obszarze \mathcal{V} . Ponieważ $D = 0$, więc równania (18) redukują się do jednego równania

$$A \frac{\partial \phi}{\partial x} + B \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (20)$$

a równania (19) do jednego równania

$$\frac{d y}{d x} = \frac{B}{A}. \quad (21)$$

(przy $A > 0$ jest $\frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0$).

Niech $\varphi(x, y)$ będzie całką pierwszą równania (21), czyli rozwiązaniem równania (20).

Wtedy przekształcenie

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = x$$

sprowadza równanie (13) do postaci kanonicznej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \tilde{G}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

c) $D > 0$

W tym przypadku równanie charakterystyk (17) nie ma rozkładu na czynniki pierwszego rzędu w dziedzinie rzeczywistej (tylko w zespolonej) – więc nie istnieją rzeczywiste całki pierwsze tego równania.

Niech zatem

$$\varphi = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{V} \quad (i^2 = -1), \quad (22)$$

o rzeczywistych φ_1 i φ_2 , będzie zespoloną całką pierwszą jednego z równań:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{B \pm i\sqrt{D}}{A}, \quad (23)$$

równoważnych równaniu (19). Wtedy przekształcenie

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{V}, \quad (24)$$

sprowadza równanie (13) do postaci kanonicznej (postać kanoniczna równania eliptycznego):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \tilde{G}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Przykład. Sprowadzimy do postaci kanonicznej równanie

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{a})$$

w obszarze $\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2; x > 0, y > 0\}$.

Mamy zatem $A = y^2 > 0$, $B = 0$, $C = -x^2 < 0$, a więc $D = AC - B^2 = -x^2 y^2 < 0$. Równanie (a) jest hiperboliczne w obszarze \mathcal{V} , a równania charakterystyk (19) przyjmują postać:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{y} \Leftrightarrow y \, dy = \mp x \, dx. \quad (\text{b})$$

Są to równania zwyczajne o zmiennych rozdzielonych, których całkami pierwszymi są:

$$\varphi_{1,2} = x^2 \mp y^2. \quad (\text{c})$$

Wprowadzamy zatem nowe zmienne

$$\xi = x^2 + y^2, \quad \eta = x^2 - y^2. \quad (\text{d})$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 2x \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2y \frac{\partial u}{\partial \xi} - 2y \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2x \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + (2x)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + (2x)^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \\ &\quad + (2x)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + (2x)^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(2y \frac{\partial u}{\partial \xi} - 2y \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + (2y)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - (2y)^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \\ &\quad - (2y)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + (2y)^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned} y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 2y^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2y^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} - 2x^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2x^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + \\ &\quad + 4x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 8x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \\ &\quad - 4x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 8x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 4x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \\ &= 16x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} = 4(\xi^2 - \eta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\xi \frac{\partial u}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (\text{e})$$

gdyż na mocy (d) jest

$$x^2 = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad y^2 = \frac{1}{2}(\xi - \eta). \quad (f)$$

Ostatecznie równanie (a) sprowadzone zostało do postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{\eta}{\xi^2 - \eta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\xi}{\xi^2 - \eta^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

4. Orientacja hiperpowierzchni (krzywej, powierzchni) względem równania cząstkowego drugiego rzędu

Poniżej przedstawimy krótką rekapitulację tego tematu, bowiem sprawa z nim jest bardzo prosta (por. rozdz. 1.4 i 4.1). W dużym skrócie zatem: jeżeli w obszarze \mathcal{V} przestrzeni \mathcal{R}^n określone jest równanie liniowe o postaci (2) lub prawie liniowe o postaci (9), a ponadto dana jest rozmaitość $n-1$ wymiarowa $\text{var } S$ w postaci płata $S \subset \mathcal{V}$ lub $S \subset \partial \mathcal{V}$ hiperpowierzchni (dla $n > 3$), powierzchni (dla $n = 3$) lub łuku krzywej (dla $n = 2$), to płat (łuk) S ma względem równania (2) lub (9) orientację przestrzenną, charakterystyczną lub czasową w punkcie $\tilde{x} \in S$ (na S), jeżeli taką odpowiednio orientację ma ten płat (łuk) w punkcie $\tilde{x} \in S$ (na S) względem operatora różniczkowego A_n^2 w równaniu (2) lub (9) (który decyduje o typie równania), czyli gdy odpowiednio

- $S_n^2(\tilde{x}) > 0$ dla $\tilde{x} \in S$ (dla wszystkich $\tilde{x} \in S$), w przypadku orientacji przestrzennej,
- $S_n^2(\tilde{x}) = 0$ dla $\tilde{x} \in S$ (dla wszystkich $\tilde{x} \in S$), w przypadku orientacji charakterystycznej,
- $S_n^2(\tilde{x}) < 0$ dla $\tilde{x} \in S$ (dla wszystkich $\tilde{x} \in S$), w przypadku orientacji czasowej,

gdzie

$$S_n^2(\tilde{x}) \equiv A_n^2(\tilde{x}; \nu(\tilde{x}), \nu(\tilde{x})) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\tilde{x}) \nu_i(\tilde{x}) \nu_j(\tilde{x}), \quad (25)$$

$\nu(\tilde{x}) = (\nu_1(\tilde{x}), \dots, \nu_n(\tilde{x})) \in \mathcal{R}^n$ jest wersorem normalnym (prostopadłym) zewnętrznym do S w punkcie $\tilde{x} \in S$ ($S \subset \partial \mathcal{V}$); jeśli $S \subset \mathcal{V}$, to stronę zewnętrzną S przyjmujemy umownie.

Jeżeli S jest określone przykładowo równaniem $\varphi(\tilde{x}) = 0$, to

$$\nu(\tilde{x}) = \frac{\text{grad } \varphi(\tilde{x})}{|\text{grad } \varphi(\tilde{x})|}, \quad \text{grad } \varphi(\tilde{x}) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\tilde{x}), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\tilde{x}) \right), \quad \tilde{x} \in S \quad (26)$$

! Jeżeli równanie jest eliptyczne, to każda hiperpowierzchnia względem tego równania ma orientację przestrzenną.

5. Warunki graniczne. Zagadnienie graniczne – sformułowanie klasyczne

Omówimy teraz warunki graniczne dla równań cząstkowych drugiego rzędu specyfikując prezentowane wiadomości w rozdz. 1.4 i 3.1, ale zarazem rozwijając je i uogólniając nieco (w sposób i w zakresie dość reprezentatywnym dla innych równań rzędu parzystego).

Niech hiperpowierzchnia (odpowiednio powierzchnia, krzywa) S składa się z płatów rozmaitości $n-1$ wymiarowych S_1, \dots, S_k – tak, że S jest sumą domknięć $\text{clos } S_r$ tych płatów, a każde dwa S_r są rozłączne, zaś część wspólna ich domknięć L_{rs} jest rozmaitością $n-2$ wymiarową (jeśli nie jest zbiorem pustym). Na przykład, obszar prostopadłościenny \mathcal{V} w \mathbb{R}^3 ma sześć płatów-ścian S_r oraz dwanaście krawędzi L_{rs} . O płatach S_r ($r = 1, \dots, k$) zakładamy, że spełniają warunek Lipschitza (nie są zbyt „pomarszczone”).

Zakładamy, że S

a) jest hiperpowierzchnią (powierzchnią, łukiem) S^* zawartą w obszarze \mathcal{V} i dzieli ten obszar na dwa rozłączne podobszary \mathcal{V}_1 i \mathcal{V}_2 ($\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup S^*$)

albo

b) jest brzegiem $\partial\mathcal{V}$ obszaru \mathcal{V} .

Zwykle poszukując rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego żądamy spełnienia na S dodatkowego warunku lub warunków.

Niech równaniem różniczkowym będzie równanie liniowe (2), ewentualnie równanie (9), które przy $G = A_n^1 u + A_n^0 u - f$ staje się równaniem (2), tj. równaniem $K_n^2 u = f$. Zatem, dla ustalenia uwagi zakładamy, że dane jest równanie

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + G \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = 0, \quad x \in \mathcal{V}. \quad (27)$$

gdzie współczynniki a_{ij} są klasy $C(\mathcal{V})$ i co najmniej jeden z nich jest różny od zera (np. dodatni) na \mathcal{V} , a G jest wyrażeniem ciągłym względem wszystkich zmiennych w pewnym obszarze \mathcal{D} odpowiedniej przestrzeni arytmetycznej (odpowiednio współczynniki a_i w operatorze A_n^1 i a_0 w operatorze A_n^0 są ciągłe na \mathcal{V}).

Niech na $S = S^*$ (przypadek a)) dane są warunki Cauchy'ego

$$u(\tilde{x}) = \beta_0(\tilde{x}), \quad \partial_{\lambda(\tilde{x})} u(\tilde{x}) = \beta_1(\tilde{x}), \quad x \in S^* \quad (28)$$

gdzie $\beta_0(\tilde{x})$, $\beta_1(\tilde{x})$ dane funkcje ciągłe na S^* , a λ - dane pole wektorów na S^* niestycznych do S^* .

Niech $\lambda(\tilde{x}) = \sigma(\tilde{x}) + \tau(\tilde{x})$ będzie rozkładem wektora $\lambda(\tilde{x})$ na składową normalną $\sigma(\tilde{x})$ i

styczną $\tau(\tilde{x})$ do S^* . Wtedy, wobec $\partial_{\lambda(\tilde{x})} u(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n u_{,i}(\tilde{x}) \lambda_i(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n u_{,i}(\tilde{x}) \sigma_i(\tilde{x}) +$

$+\sum_{i=1}^n u_{,i}(\tilde{x}) \tau_i(\tilde{x}) = \partial_{\sigma(\tilde{x})} u(\tilde{x}) + \partial_{\tau(\tilde{x})} u(\tilde{x})$, przy $\lambda(\tilde{x}) = (\lambda_i(\tilde{x})) = (\sigma_i(\tilde{x})) + (\tau_i(\tilde{x})) =$

$= (\sigma_i(\tilde{x}) + \tau_i(\tilde{x})) = \sigma(\tilde{x}) + \tau(\tilde{x})$, oraz $\partial_{\sigma(\tilde{x})} u(\tilde{x}) = \frac{1}{\delta(\tilde{x})} \partial_{\nu(\tilde{x})} u(\tilde{x})$ przy $\sigma(\tilde{x}) = \delta(\tilde{x}) \nu(\tilde{x})$, drugi

warunek Cauchy'ego można zapisać następująco:

$$\partial_{\nu(\tilde{x})} u(\tilde{x}) = \tilde{\beta}_1(\tilde{x}), \quad x \in S^*, \quad (28a)$$

gdzie $\tilde{\beta}_1(\tilde{x}) = \delta(\tilde{x})[\beta_1(\tilde{x}) - \partial_{\tau(\tilde{x})} \beta_0(\tilde{x})]$ można uważać za dane na S^* .

Przez zagadnienie Cauchy'ego (w sformułowaniu klasycznym) rozumiemy następujący problem (zadanie): wyznaczyć funkcję $u(\cdot)$ z przestrzeni $C_n^2(\mathcal{V})$, która spełnia tożsamościowo w obszarze \mathcal{V} równanie różniczkowe (27) a na rozmaitości S^* warunki Cauchy'ego (28)₁ i (28)a.

Przejdziemy teraz do formułowania warunków granicznych. Niech równaniem różniczkowym, którego całkę chcemy wyznaczyć, będzie nadal równanie (27) (z możliwą opcją lewej strony w postaci $K_n^2 u$). Niech $\partial\mathcal{V}$ będzie brzegiem jednospójnego obszaru \mathcal{V} (przypadek b)) i niech S_r będzie typowym płatem (łukiem) S .

Przez warunek graniczny (na brzegu $S = \partial\mathcal{V}$ obszaru \mathcal{V}) rozumiemy równanie o następującej postaci, spełnione przez funkcję $u(\cdot)$ z przestrzeni $C_n^{2;l_r}(\mathcal{V} \cup S_r)$ na zbiorze S_r ,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(\tilde{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\tilde{x}) + \gamma(\tilde{x}, u(\tilde{x})) = \beta(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r, \quad (29)$$

dla wszystkich $r = 1, \dots, k$, przy czym $\alpha_i(\cdot)$ ($i = 1, \dots, n$) i $\beta(\cdot)$ są ciągłe na S_r , a $\gamma(\cdot, \cdot)$ jest ciągła na pewnej rozmaitości $\mathcal{P} \subseteq S_r \times \mathcal{R}$ i $\gamma(\tilde{x}, 0) = 0$, $\forall \tilde{x} \in S_r$ oraz $l_r = 1$, gdy co najmniej jeden $\alpha_i(\cdot)$ jest różny od zera (np. dodatni) i $l_r = 0$, gdy wszystkie $\alpha_i(\cdot)$ są równe zeru; funkcja $\gamma(\cdot, \cdot)$ najczęściej jest liniowa:

$$\gamma(\cdot, \cdot) = \alpha_0(\cdot) u(\cdot). \quad (29a)$$

gdzie $\alpha_0(\cdot)$ jest daną funkcją ciągłą na S_r . Ponadto, zakładamy iż na rozmaitościach \mathcal{L}_{rs} warunki graniczne (29) powinny zgodne – spełniać warunki ciągłości, tzn. powinniśmy otrzymać równości, gdy $\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}_0$ przy $\tilde{x} \in S_r$ i gdy $\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}_0$ przy $\tilde{x} \in S_s$ dla każdego $\tilde{x}_0 \in \mathcal{L}_{rs}$

Jeżeli $\beta \equiv 0$ na S_r , to warunek graniczny nazywamy jednorodnym (w przypadku przeciwnym – niejednorodnym).

Jeżeli, wszystkie $\alpha_i(\cdot) \equiv 0$ na S_r , to warunek graniczny (29) jest warunkiem granicznym pierwszego rodzaju:

$$\gamma(\tilde{x}, u(\tilde{x})) = \beta(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r. \quad (30)$$

który dla liniowej funkcji $\gamma(\cdot, \cdot)$ przyjmuje postać

$$\alpha_0(\tilde{x}) u(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r.$$

Jeśli $\partial\gamma / \partial u \neq 0$ na S_r (np. w przypadku (29a), to warunek ten można zapisać w równoważnej postaci, zwanej warunkiem granicznym Dirichleta

$$u(\tilde{x}) = \tilde{\beta}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r, \quad (30a)$$

w której funkcję $\tilde{\beta}(\cdot)$ uważamy za daną (i ciągłą) na S_r .

Jeżeli $\gamma(\cdot, \cdot) \equiv 0$ i co najmniej jeden $\alpha_i(\cdot)$ jest różny od zera (np. dodatni), to warunek graniczny ma postać, zwaną warunkiem granicznym drugiego rodzaju

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(\tilde{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r. \quad (31)$$

Wprowadzając wielkości

$$\lambda_i(\tilde{x}) = \alpha_i(\tilde{x}) / \alpha(\tilde{x}), \quad \alpha(\tilde{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2(\tilde{x})},$$

które można interpretować jako składowe wersora $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ zaczepionego na $\text{var} S_r$ w punkcie \tilde{x} i uwzględniając zależność $\sum_{i=1}^n \alpha_i(\tilde{x}) u_{,i}(\tilde{x}) = \alpha(\tilde{x}) \partial_{\lambda(\tilde{x})} u(\tilde{x})$ możemy warunek graniczny drugiego rodzaju zapisać w następującej równoważnej postaci, zwanej warunkiem granicznym von Neumanna I rodzaju

$$\partial_{\lambda(\tilde{x})} u(\tilde{x}) = \tilde{\beta}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r, \quad (31a)$$

gdzie $\tilde{\beta}(\cdot)$ można traktować jako daną funkcję (ciągłą) a $\lambda(\cdot)$ jako dane pole (ciągłe) wersorów na zbiorze S_r .

Zakładając, że $\lambda(\cdot)$ nie jest polem wektorów stycznych do S_r i dokonując analogicznych operacji na warunku (31a) jak na warunku Cauchy'ego, możemy warunek (31a) przekształcić w równoważny mu warunek graniczny o postaci

$$\partial_{\nu(\tilde{x})} u(\tilde{x}) = \hat{\beta}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r, \quad (31b)$$

gdzie $\hat{\beta}(\cdot)$ można traktować jako daną funkcję (ciągłą) a $\nu(\cdot)$ jako pole (ciągłe) wersorów normalnych zewnętrznych na zbiorze S_r .

Podobnie, pełną postać warunku (29), czyli warunku granicznego trzeciego rodzaju można przekształcić do równoważnej postaci (prawie liniowej), zwanej warunkiem granicznym von Neumanna II rodzaju

$$\partial_{\lambda(\tilde{x})} u(\tilde{x}) + \tilde{\gamma}(\tilde{x}, u(\tilde{x})) = \tilde{\beta}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r, \quad (32)$$

gdzie $\tilde{\beta}(\cdot)$, $\tilde{\gamma}(\cdot, u(\cdot))$ można traktować jako dane funkcje (ciągłe) a $\lambda(\cdot)$ jako dane pole (ciągłe) wersorów na zbiorze S_r ; w wariacie warunku liniowego jest $\tilde{\gamma}(\tilde{x}, u(\tilde{x})) = \tilde{\alpha}_0(\tilde{x}) u(\tilde{x})$, przy danym współczynniku (ciągłym) $\tilde{\alpha}_0(\cdot)$ na S_r .

I również, przy założeniu, że $\lambda(\cdot)$ nie jest polem wektorów stycznych do S_r możemy warunek (32) przekształcić w równoważny mu warunek graniczny (prawie liniowy) o postaci

$$\partial_{\nu(\tilde{x})} u(\tilde{x}) + \hat{\gamma}(\tilde{x}, u(\tilde{x})) = \hat{\beta}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r, \quad (32a)$$

gdzie $\hat{\beta}(\cdot)$, $\hat{\gamma}(\cdot, u(\cdot))$ można traktować jako dane funkcje (ciągłe) a $\nu(\cdot)$ jako pole (ciągłe) wersorów normalnych zewnętrznych na zbiorze S_r ; w wariacie warunku liniowego jest wtedy $\hat{\gamma}(\tilde{x}, u(\tilde{x})) = \hat{\alpha}_0(\tilde{x}) u(\tilde{x})$, przy danym współczynniku (ciągłym) $\hat{\alpha}_0(\cdot)$ na S_r .

Wprowadzając tzw. operatory brzegowe na płacie S_r

$$B_n^1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\tilde{x}) \partial_i, \quad B_n^0 = \alpha_0(\tilde{x}) \text{id}, \quad \tilde{x} \in S_r \quad (33)$$

lub odpowiednio w postaci

$$B_n^\lambda = \sum_{i=1}^n \partial_{\lambda(\tilde{x})}, \quad B_n^{\text{id}} = \text{id}, \quad \tilde{x} \in S_r \quad (33a)$$

(id – identyczność), przy założeniu, że co najmniej jeden $\alpha_i(\cdot)$ jest różny od zera (np. dodatni) i $\alpha_0(\cdot)$ jest różny od zera na S_r , możemy liniowy warunek graniczny na tym płacie (łuku) brzegu $\partial \mathcal{V}$ obszaru \mathcal{V} zapisać odpowiednio następująco:

- warunek pierwszego rodzaju

$$B_n^0 u(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r, \quad (34)$$

- warunek drugiego rodzaju

$$B_n^1 u(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r, \quad (34a)$$

- warunek trzeciego rodzaju

$$B_n^1 u(\tilde{x}) + B_n^0 u(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r, \quad (34b)$$

lub alternatywnie

- warunek Dirichleta

$$B_n^{\text{id}} u(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r, \quad (35)$$

- von Neumanna I rodzaju

$$B_n^\lambda u(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r, \quad (35a)$$

- von Neumanna II rodzaju

$$B_n^\lambda u(\tilde{x}) + B_n^0 u(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r. \quad (35b)$$

(zwykle przy $\lambda(\tilde{x}) = \nu(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in S_r$).

Jeżeli warunek graniczny jest tej samej postaci na wszystkich płatach (łukach) S_r ($r=1, \dots, k$), to mówimy po prostu „warunek graniczny na brzegu obszaru \mathcal{V} ” (choć nie jest to w pełni ścisłe – dlaczego?) W przeciwnym przypadku warunek graniczny nazywamy mieszanym.

W przypadku, gdy płat (łuk) S_r ma względem równania (28) orientację przestrzenną, to warunek graniczny (29) i każdy jego wariant nosi nazwę warunku brzegowego, a jeżeli S_r ma względem równania (28) orientację czasową lub charakterystyczną, to warunek graniczny (29) i każdy jego wariant nosi nazwę warunku początkowego.

Gdy równanie (28) jest eliptyczne, to każdy warunek graniczny jest warunkiem brzegowym. Warunek brzegowy postaci (30a) i (35) nosi również nazwę warunku sztywnego, warunek (31a), (31b) i (35a) jest często zwany warunkiem przepływu, zaś warunek (35b) zwany jest warunkiem wymiany – zwykle przy $\lambda = \nu$. W przypadku, gdy współczynniki $a_{ij}(\cdot)$ są klasy $C_n^1(\mathcal{V} \cup S_r)$ oraz $a_i(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(\tilde{x}) \nu_j(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in S_r$ ($i = 1, \dots, n$), wtedy warunek brzegowy drugiego rodzaju przyjmuje postać

$$\frac{\partial u}{\partial \pi}(\tilde{x}) \stackrel{\text{ozn}}{=} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(\tilde{x}) v_i(\tilde{x}) u_{,i}(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_r \quad (36)$$

i nosi nazwę naturalnego warunku brzegowego i jest, na przykład, warunkiem obciążenia części S_r brzegu $\partial \mathcal{V}$.

Przez zagadnienie graniczne (w sformułowaniu klasycznym) dla równania (27), tj. równania o postaci

$$A_n^2 u + G(x, u, \partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n) = 0, \quad x \in \mathcal{V}, \quad (37)$$

w szczególności liniowej przy

$$G = A_n^1 u + A_n^0 u - f \quad (37a)$$

nazywamy następujący problem (zadanie): wyznaczyć w przestrzeni

$$Dom u = C_n^{2;l_1}(\mathcal{V} \cup S_1) \cap \dots \cap C_n^{2;l_k}(\mathcal{V} \cup S_k) \quad (37b)$$

taką funkcję $u(\cdot)$, która spełnia tożsamościowo w obszarze \mathcal{V} równanie (37), a na każdym z płatów(łuków) S_r brzegu $\partial \mathcal{V}$ ($r = 1, \dots, k$) spełnia warunek graniczny pierwszego rodzaju (30) (lub mu równoważny lub jego przypadek szczególny; wtedy $l_r = 0$) lub drugiego bądź trzeciego rodzaju (lub mu równoważny lub jego przypadek szczególny; wtedy $l_r = 1$) lub też (dwa niezależne warunki graniczne, będące warunkami początkowymi. Występujące w każdej z postaci równania różniczkowego i w każdej z postaci warunku granicznego funkcje dane jak również obszar \mathcal{V} i wszystkie płyty (łuki) jego brzegu $\partial \mathcal{V}$ spełniają przyjęte, wymienione w tym punkcie założenia. Ponadto, gdy obszar \mathcal{V} jest nieograniczony, to funkcja $u(\cdot)$ spełnia warunek w nieskończoności polegający na ograniczoności (lub zbieżności do zera) $u(\cdot)$ na (hiper) powierzchni (odpowiednio łuku krzywej) $S_\rho = \mathcal{V} \cap S(0, \rho)$ przy $\rho \rightarrow \infty$ lub spełnia na odpowiednim S_r dwa warunki początkowe.

! Tę dość ogólną (ramową) definicję zagadnienia granicznego, ale ze względu na konieczność dochowania precyzji zarazem dość zawiłą, przybliżymy w trzech kolejnych punktach definicjami trzech najważniejszych zagadnień granicznych spotykanych w praktyce inżynierskiej. Dla zachowania w pamięci najważniejsze możemy posługiwać się następującym, daleko idącym skrótem: przez zagadnienie graniczne dla równania różniczkowego cząstkowego rzędu drugiego $K_n^2 u = f$ w obszarze \mathcal{V} rozumiemy następujące zadanie do wykonania (rozwiązania): wyznaczyć taką funkcję $u = u(x)$, $x \in \bar{\mathcal{V}}$, która spełnia to równanie różniczkowe tożsamościowo w obszarze \mathcal{V} , a ponadto na jego brzegu $\partial \mathcal{V}$ spełnia prawie wszędzie warunek graniczny w postaci (dopuszczalnej) $B_n u = \beta$, gdzie K_n^2 jest operatorem różniczkowym w obszarze \mathcal{V} , a B_n multioperatorem brzegowym na $\partial \mathcal{V}$.

6. Zagadnienie brzegowe – sformułowanie klasyczne

Dane jest w obszarze \mathcal{V} równanie liniowe eliptyczne

$$K_n^2 u \equiv A_n^2 u + A_n^1 u + A_n^0 u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{,ij} + a_i(x)u_{,i} + a_0(x)u = b(x), \quad x \in \mathcal{V}, \quad (38)$$

w którym eliptyczny jest operator A_n^2 , a wszystkie współczynniki i prawa strona są klasy $C_n(\mathcal{V})$.

Dla ustalenia uwagi zakładamy, brzeg obszaru jednopójnego \mathcal{V} składa się z trzech płatów (hiper)powierzchni lub łuków krzywej (odpowiednio dla $(n > 3)$ $n = 3$ lub $n = 2$) S_1, S_2, S_3 w tym sensie, że $\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 \cup \bar{S}_3 = \partial\mathcal{V}$ i S_1, S_2, S_3 spełniają warunek Lipschitza oraz na S_1 warunek brzegowy (liniowy) jest warunkiem I rodzaju (lub warunkiem Dirichleta – sztywnym warunkiem brzegowym)

$$\alpha_0(\tilde{x})u(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x}) \quad (\text{lub } u(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x})), \quad \tilde{x} \in S_1, \quad (39a)$$

na S_2 warunek brzegowy jest warunkiem II rodzaju (lub warunkiem von Neumanna I rodzaju – warunkiem przepływu)

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(\tilde{x})u_{,i}(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x}) \quad (\text{lub } \partial_{\nu(\tilde{x})}u(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x})), \quad \tilde{x} \in S_2, \quad (39b)$$

a na S_3 warunek brzegowy jest warunkiem III rodzaju (lub warunkiem von Neumanna II rodzaju – warunkiem wymiany)

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(\tilde{x})u_{,i}(\tilde{x}) + \alpha_0(\tilde{x})u(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x}) \quad (\text{lub } \partial_{\nu(\tilde{x})}u(\tilde{x}) + \alpha(\tilde{x})u(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x})), \quad \tilde{x} \in S_2, \quad (39c)$$

przy czym współczynniki w tych warunkach i prawe strony są funkcjami klasy odpowiednio $C_n(S_1)$, $C_n(S_2)$, $C_n(S_3)$, a $\partial_{\nu(\tilde{x})}$ oznacza pochodną kierunkową w kierunku normalnej zewnętrznej do brzegu o wersorze $\nu(\tilde{x})$ w punkcie $\tilde{x} \in \partial\mathcal{V}$ (jeśli istnieje) i o ciągłym polu $\nu(\cdot)$ na odpowiednim płacie (łuku) S_2, S_3 ; pochodną tą można zastąpić pochodną kierunkową w kierunku zewnętrznym niestycznym do brzegu o odpowiednim danym wersorze $\lambda(\tilde{x})$ i o ciągłym danym polu $\lambda(\cdot)$ na odpowiednim płacie (łuku) S_2, S_3 .

Ponadto na rozmaitościach $n-2, \dots, 1$ – wymiarowych i w wierzchołkach $\mathcal{L}_{12} = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$, $\mathcal{L}_{23} = \bar{S}_2 \cap \bar{S}_3$, $\mathcal{L}_{13} = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_3$ powinny być spełnione warunki zgodności (ciągłości)

warunków brzegowych, jeśli są wymagane. Na przykład, jeśli $\lim_{\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}_0} \partial_{\nu(\tilde{x})}u(\tilde{x}) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}_0} \beta_{II}(\tilde{x})$ przy $\tilde{x} \in S_2$ i $\lim_{\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}_0} \partial_{\nu(\tilde{x})}u(\tilde{x}) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}_0} \partial_{\nu(\tilde{x})}\beta_I(\tilde{x})$ przy $\tilde{x} \in S_1$ dla każdego $\tilde{x}_0 \in \mathcal{L}_{12}$, to $\beta_{II}(\tilde{x}_0) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}_0} \partial_{\nu(\tilde{x})}\beta_I(\tilde{x})$, dla $\tilde{x}_0 \in \mathcal{L}_{12}$.

Przez zagadnienie brzegowe (liniowe) rozumiemy zatem następujące zadanie: wyznaczyć w przestrzeni $C_n^{2;0}(\mathcal{V} \cup S_1) \cap C_n^{2;1}(\mathcal{V} \cup S_2) \cap C_n^{2;1}(\mathcal{V} \cup S_3)$ funkcję $u(\cdot)$, która spełnia tożsamościowo równanie (38) w obszarze \mathcal{V} , a na jego brzegu $\partial\mathcal{V}$ warunek brzegowy (39a), (39b) i (39c) na odpowiednim płacie (łuku) S_1, S_2, S_3 tego brzegu. Ponadto, gdy obszar \mathcal{V} jest nieograniczony, to funkcja $u(\cdot)$ spełnia warunek w nieskończoności polegający na ograniczoności (lub zbieżności do zera) $u(\cdot)$ na (hiper) powierzchni (odpowiednio łuku krzywej) $S_\rho = \mathcal{V} \cap S(0, \rho)$ przy $\rho \rightarrow \infty$.

! Oczywiście, w szczególnych przypadkach zagadnienia brzegowego jeden ze zbiorów, a nawet dwa z S_1, S_2, S_3 mogą być zbiorami pustymi. Zagadnienie brzegowe przy $S_2 = S_3 = \emptyset$, z warunkiem brzegowym Dirichleta nazywane jest zagadnieniem Dirichleta.

!! Zauważmy, że jeżeli w równaniu (38) jest $A_n^0 = 0$ to przy $S_1 = S_3 = \emptyset$ rozwiązanie zagadnienia brzegowego jest określone z dokładnością do stałej dowolnej.

!!! W przypadku, gdy obszar V nie jest jednorodny, to na każdym brzegu wewnętrznym należy również postawić warunek brzegowy w jednej z postaci (29) na określonej części tego brzegu. Jednakże problem istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia brzegowego staje się na ogół bardzo złożony.

Przykład. Niech $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \bar{\mathcal{K}} = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2; x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$ będzie funkcją ugięcia membrany kołowej o promieniu R i o napięciu S , obciążoną prostopadle siłami rozłożonymi o gęstości powierzchniowej p oraz zamocowaną na obwodzie koła $\bar{\mathcal{K}}$, tj. $u(\tilde{x}) = 0$ dla $\tilde{x} \in \partial\mathcal{K} = \{\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2); \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 = R^2\}$. Równaniem ugięcia membrany jest równanie (eliptyczne) Poissona

$$S \Delta u(x) + p = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathcal{K} = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < R^2\} \quad (\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}).$$

Mamy zatem do rozwiązania następujące zagadnienie brzegowe:

- równanie różniczkowe (cząstkowe drugiego rzędu, liniowe i eliptyczne niejednorodne)

$$\Delta u(x) = \frac{p}{S}, \quad x \in \mathcal{K}, \quad (\text{a})$$

- warunek brzegowy I rodzaju (Dirichleta) jednorodny

$$u(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in \partial\mathcal{K}. \quad (\text{b})$$

Z uwagi na kształt obszaru $\mathcal{V} = \mathcal{K}$ celowe jest przejście na współrzędne biegunowe (r, φ) wzorami transformacyjnymi

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad r \in [0, R], \quad (\text{c})$$

przy $u = u(r, \varphi)$, $p = p(r, \varphi)$ oraz, po przekształceniach,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{d})$$

Otrzymujemy wtedy do rozwiązania następujące zagadnienie brzegowe:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{S} p, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad r \in [0, R], \quad (\text{e-1})$$

$$u = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r = R, \quad (\text{e-2})$$

z warunkiem ciągłości (okresowości):

$$u(r, 2\pi) = u(r, 0), \quad r \in [0, R]. \quad (\text{f})$$

Zawsze, gdy obszar \mathcal{V} jest osiowo symetryczny, w pierwszej kolejności do rozwiązania zagadnienia granicznego (tu: brzegowego) stosujemy metodę rozwinięć w szereg Fouriera

cosinusowo-sinusowy względem zmiennej obwodowej, czyli zmiennej φ , rozwijając w ten szereg zarówno nieznaną funkcję, jak też funkcje dane zmiennej φ :

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2} u_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [u_n^c(r) \cos n\varphi + u_n^s(r) \sin n\varphi], \quad (\text{g-1})$$

$$p(r, \varphi) = \frac{1}{2} p_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [p_n^c(r) \cos n\varphi + p_n^s(r) \sin n\varphi], \quad (\text{g-2})$$

gdzie u_0, u_n^c, u_n^s są nieznanymi współczynnikami – funkcjami zmiennej r , a p_0, p_n^c, p_n^s – są współczynnikami danymi, zależnymi również od zmiennej radialnej, określonymi wzorami:

$$p_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(r, \varphi) d\varphi, \quad \left. \begin{matrix} p_n^c(r) \\ p_n^s(r) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(r, \varphi) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} d\varphi. \quad (\text{h})$$

Funkcje „sin” i „cos” są okresowe, o wspólnym okresie 2π . Tak więc warunek ciągłości (jest spełniony. Ponieważ p jest z założenia ciągła, a u klasy C^2 , więc szeregi (g) są zbieżne dla wszystkich φ , a ponadto różniczkowalny „wyraz po wyrazie” jest szereg (g-1):

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{du_0}{dr} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{du_n^c}{dr} \cos n\varphi + \frac{du_n^s}{dr} \sin n\varphi \right), \quad (\text{i-1})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 u_0}{dr^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 u_n^c}{dr^2} \cos n\varphi + \frac{d^2 u_n^s}{dr^2} \sin n\varphi \right), \quad (\text{i-2})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 - \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 u_n^c \cos n\varphi + n^2 u_n^s \sin n\varphi). \quad (\text{i-3})$$

Podstawiając wyrażenia (g) i (i) do równania (a) i warunku brzegowego (b) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_0}{dr} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{d^2 u_n^c}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_n^c}{dr} - \frac{n^2}{r^2} u_n^c \right) \cos n\varphi + \right. \\ & \left. + \left(\frac{d^2 u_n^s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_n^s}{dr} - \frac{n^2}{r^2} u_n^s \right) \sin n\varphi \right] = -\frac{1}{S} \left[\frac{1}{2} p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n^c \cos n\varphi + p_n^s \sin n\varphi) \right], \\ & r \in [0, R), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \end{aligned} \quad (\text{j-1})$$

$$\frac{1}{2} u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n^c \cos n\varphi + u_n^s \sin n\varphi) = 0, \quad r = R, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (\text{j-2})$$

skąd z porównania obu stron równości (j) otrzymujemy

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_0}{dr} = -\frac{1}{S} p_0, \quad r \in [0, R), \quad (\text{k-1})$$

$$u_0 = 0, \quad r = R;$$

$$\frac{d^2 u_n^c}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_n^c}{dr} - \frac{n^2}{r^2} u_n^c = -\frac{1}{S} p_n^c, \quad r \in [0, R), \quad (\text{k-2})$$

$$u_n^c = 0, \quad r = R;$$

$$\frac{d^2 u_n^s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_n^s}{dr} - \frac{n^2}{r^2} u_n^s = -\frac{1}{S} p_n^s, \quad r \in [0, R), \quad (\text{k-3})$$

$$u_n^s = 0, \quad r = R.$$

Rozwiązywane zagadnienie brzegowe zostało sprowadzone do ciągu niezależnych zagadnień brzegowych (k) dla równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d^2 u_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} u_n = -\frac{1}{S} p_n, \quad r \in [0, R), \quad (l)$$

z warunkami brzegowymi

$$u_n = 0, \quad r = R \quad (m)$$

($n = 0, 1, 2, \dots$).

Równania (l) są równaniami typu Eulera-Riemanna, których całek ogólnych poszukujemy w postaci

$$u_n = C_n r^{\alpha_n} + u_{n,s}, \quad (n) \quad (n)$$

gdzie $u_{n,s}$ jest całką szczególną (jakakolwiek) równania (l), C_n – stałą dowolną (stałą całkowania), a α_n – współczynnikiem spełniającym równanie charakterystyczne:

$$\alpha_n^2 - n^2 = 0,$$

którego pierwiastkami są

$$\alpha_n = \pm n. \quad (o)$$

W konsekwencji jest

$$u_0 = C_0 r^0 + C_0^* r^0 \ln r + u_{0,s}, \quad (p-1)$$

$$u_n = C_n r^n + C_n^* r^{-n} + u_{n,s} \quad (n > 0). \quad (p-2)$$

Ale składnik $C_0^* r^0 \ln r$ oraz $C_n^* r^{-n}$ jest osobliwy dla $r = 0$, a rozwiązanie omawianego zagadnienia nie powinno zawierać osobliwości. Zatem należy przyjąć $C_n^* = 0$.

! W tym miejscu warto dodać, że gdyby obszar $\mathcal{V} = \mathcal{K}$ nie był jednorodny, tzn. jako osiowo-symetryczny byłby pierścieniem $\mathcal{V} = \mathcal{P} = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2; R_0^2 < x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$, to w przypadku zamocowania jego obu brzegów – okręgu $\partial\mathcal{P}_1 = \{\tilde{x} = (\tilde{x}_1, x_2); \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 = R^2\}$ i okręgu $\partial\mathcal{P}_2 = \{\tilde{x} = (\tilde{x}_1, x_2); \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 = R_0^2\}$ oprócz warunku brzegowego (b), tzn. $u(\tilde{x}) = 0, \tilde{x} \in \partial\mathcal{P}_1$, należałoby dodać warunek brzegowy $u(\tilde{x}) = 0, \tilde{x} \in \partial\mathcal{P}_2$. To zaś skutkowałoby we współrzędnych biegunowych dwoma warunkami – ogólniej niejednorodnymi $u(R, \varphi) = u_1(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]$ oraz $u(R_0, \varphi) = u_2(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]$, przy danych funkcjach $u_1(\varphi)$ i $u_2(\varphi)$, ciągłych, przedziałami monotonicznych i spełniających warunki ciągłości (okresowości) $u_1(2\pi) = u_1(0)$ i $u_2(2\pi) = u_2(0)$, a w efekcie rozwijalnych w szeregi trygonometryczne Fouriera. W konsekwencji implikowałyby to dwa warunki brzegowe dla równania (l): $u_n(R) = u_{1,n}, u_n(R_0) = u_{2,n}$, co pozwoliłoby na wyznaczenie obu stałych w wyrażeniach (p).

Wracając do naszego przykładu należałoby wyznaczyć całkę szczególną $u_{n,s}$, która jednak jest zależna od postaci $p_n(r)$ w równaniu (l). Załóżmy, dla przykładu, że $p_n = \text{const}$, co odpowiada gęstości obciążenia membrany $p = p(\varphi)$. Wtedy, po wykorzystaniu metody przewidywania ($u_n = D_n p_n r^2$), jest:

$$u_{n,s} = \frac{1}{n^2 - 4} \frac{p_n}{S} r^2 \quad (n \neq 2), \quad u_{2,s} = -\frac{1}{4} \frac{p_2}{S} r^2 \ln r. \quad (q)$$

Po uwzględnieniu (q) w wyrażeniach (p) (przy $C_n^* = 0$) i wykorzystaniu warunków brzegowych (m) otrzymujemy:

$$u_0 = \frac{1}{4} \frac{p_0}{S} (R^2 - r^2), \quad u_1 = \frac{1}{3} \frac{p_1}{S} r(R-r), \quad u_2 = \frac{1}{4} \frac{p_2}{S} r^2 \ln \frac{R}{r}, \quad (r-1)$$

$$u_n = \frac{1}{n^2 - 4} \frac{p_n}{S} r^2 \left(1 - \frac{r^{n-2}}{R^{n-2}} \right) \quad (n > 2). \quad (r-2)$$

Ostatecznie, zgodnie z (g), (k), (r) mamy:

$$u = \frac{1}{4} \frac{p_0}{S} (R^2 - r^2) + \frac{1}{4} r^2 \ln \frac{R}{r} \left(\frac{p_2^c}{S} \cos 2\varphi + \frac{p_2^s}{S} \sin 2\varphi \right) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4} r^2 \left(1 - \frac{r^{n-2}}{R^{n-2}} \right) \left(\frac{p_n^c}{S} \cos n\varphi + \frac{p_n^s}{S} \sin n\varphi \right), \quad (s)$$

gdzie

$$p_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\varphi) d\varphi, \quad \left. \begin{matrix} p_n^c \\ p_n^s \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(\varphi) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} d\varphi \quad (n > 0). \quad (t)$$

7. Zagadnienie początkowe – sformułowanie klasyczne

Niech $A_n^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_i \partial_j$ będzie operatorem eliptycznym na przestrzeni \mathcal{R}^n przy $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$. Rozważmy równanie różniczkowe postaci

$$A_n^2 u(x,t) + c(x) \frac{\partial^m}{\partial t^m} u(x,t) = f(x,t), \quad m = 1, 2; \quad (x,t) \in \mathcal{V}' \quad (40)$$

w obszarze $\mathcal{V}' = \mathcal{R}^n \times \mathcal{T}$, $\mathcal{T} = (t_0, \infty)$ przy $x' = (x, t) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ ($x_{n+1} = t$).

Niech

$$A_{n+1}(x'; \xi', \eta') = \begin{cases} A_n(x; \xi, \eta), & m = 1 \\ A_n(x; \xi, \eta) + c(x) \xi_{n+1} \eta_{n+1}, & m = 2 \end{cases} \quad (41)$$

będzie formą dwuliniową stowarzyszoną z równaniem (40) przy $A_n(x; \xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \eta_j$ dodatnio określonej dla $x \in \mathcal{R}^n$, przy $\xi' = (\xi, \xi_{n+1})$, $\eta' = (\eta, \eta_{n+1})$; $\xi, \eta \in \mathcal{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$.

Ponieważ A_n jest z założenia dodatnio określona na przestrzeni \mathcal{R}^n (dla wszystkich $x \in \mathcal{R}^n$), więc forma A_{n+1} jest na przestrzeni \mathcal{R}^{n+1} (dla wszystkich $x \in \mathcal{R}^n$) odpowiednio:

- dodatnio określona, gdy $c > 0$ i $m = 2$ – równanie (40) jest eliptyczne (ten przypadek mieści się w poprzednim zagadnieniu – por. p. F Zagadnienie brzegowe),
- nieokreślona, gdy $c < 0$ i $m = 2$ – równanie (40) jest hiperboliczne (falowe),
- osobliwa, gdy $m = 1$ (przy $c \neq 0$) – równanie (40) jest paraboliczne.

1) *Przypadek równania hiperbolicznego*

Zauważmy, że brzegiem obszaru \mathcal{V}' jest hiperpłaszczyzna $S = \mathcal{R}^n \times \{t_0\}$, która przy $m = 2$ i $c < 0$ ma względem równania (40), wobec $\nu' = (0, \dots, 0, -1)$, orientację czasową, gdyż zgodnie z (25) i (41) dla wszystkich $x \in \mathcal{R}^n$ jest

$$S_{n+1}(\tilde{x}'; \nu') = S_n(x; \nu) + c(-1)^2 = 0 + c(-1)^2 < 0, \quad \tilde{x}' = (x, t_0) \in S.$$

Zauważmy też, że jeśli znamy funkcję $u = u(x, t_0)$, $x \in \mathcal{R}^n$, to znamy wszystkie pochodne cząstkowe $u_{,i}(x, t_0)$, $x \in \mathcal{R}^n$, $i = 1, \dots, n$ (jeśli istnieją). W konsekwencji dwa niezależne warunki graniczne postaci (29), jakie nakładamy na funkcję $u = u(x, t)$ na hiperpowierzchni S można sprowadzić do postaci

$$u(x, t_0) = u_0(x), \quad u_{,i}(x, t_0) = v_0(x), \quad x \in \mathcal{R}^n. \quad (42)$$

gdzie $u_0(x)$ i $v_0(x)$ są dane. Są to warunki początkowe.

Zwracamy uwagę, że są to dwa warunki, gdyż rezygnujemy w tym wypadku z warunku ograniczenia $u = u(x, t)$ przy $t \rightarrow \infty$ (co nie oznacza, że z rozwiązania nie wyniknie iż funkcja $u = u(x, t)$ jest ograniczona przy $t \rightarrow \infty$).

Przez zagadnienie początkowe (w sformułowaniu klasycznym) dla równania (40) (przy $m = 2$ i $c < 0$ oraz operatorze A_n^2 eliptycznym) nazywamy następujący problem: wyznaczyć funkcję $u = u(x, t)$, $x \in \mathcal{R}^n$, $t \in [t_0, \infty)$, która spełnia tożsamościowo równanie (38) dla $x \in \mathcal{R}^n$, $t \in (t_0, \infty)$ oraz warunki początkowe (42) (dla $x \in \mathcal{R}^n$, $t = t_0$). Żądamy przy tym, by funkcja u była klasy C^2 w obszarze \mathcal{V}' i klasy C^1 w obszarze $\bar{\mathcal{V}}$, – przy założeniu, że funkcje f , β_0 i β_1 są ciągłe oraz ciągłe są (co najmniej) współczynniki a_{ij} i c na przestrzeni \mathcal{R}^n .

! Przy zamianie zmiennych $x = (x_1, \dots, x_n)$ na $y = (y_1, \dots, y_n)$, przy której równanie

$A_n^2 u(x) = 0$, sprowadza się do postaci kanonicznej, również równanie (40) sprowadza się do takiej postaci.

!! Rozważania powyższe dotyczą także nieco ogólniejszej postaci równania różniczkowego w stosunku do równania (40), a mianowicie równania w postaci:

$$A_n^2 u(x, t) + A_n^1 u(x, t) + A_n^0 u(x, t) + c_2(x)u_{,tt}(x, t) + c_1(x)u_{,t}(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathcal{V}' \quad (43)$$

($c_2(x) < 0$ dla wszystkich x); operatory A_n^1 , A_n^0 i $c_1 \partial_{,t}$ nie wpływają na klasyfikację i orientację hiperpowierzchni względem tego równania.

Przykład. Równanie fali podłużnej. Zagadnienie początkowe. Rozwiązanie d'Alemberta.

Poszukujemy rozwiązania $u = u(x, t)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $t \in [0, \infty)$ ($n = 1$) równania (40) w postaci

$$u_{,xx}(x, t) - \frac{1}{c^2} u_{,tt}(x, t) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, \infty), \quad (a)$$

z warunkami początkowymi

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (b)$$

przy czym o funkcjach u_0, v_0 zakładamy, że mają nośnik ograniczony, tzn.

$$\text{clos}\{x \in \mathcal{R}; u_0(x) \neq 0\} \subset [-r_u, +r_u], \quad \text{clos}\{x \in \mathcal{R}; v_0(x) \neq 0\} \subset [-r_v, +r_v] \quad (c)$$

dla pewnych r_u, r_v . Ponadto zakładamy, że $c^2 = \text{const}$ ($c > 0$) oraz, że funkcje u_0, v_0 są ciągłe.

Zagadnienie (a)–(b) opisuje, między innymi, propagację fali podłużnej w pręcie nieograniczonym (lub fali poprzecznej w strunie nieograniczonej), czyli zjawisko propagacji zaburzenia w kierunku osi x spowodowanego początkowym przemieszczeniem $u_0 = u_0(x)$ i początkową prędkością przemieszczenia $v_0 = v_0(x)$.

Wprowadzamy nowe zmienne zdefiniowane następująco:

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad (d)$$

skąd

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\eta - \xi}{2c}. \quad (e)$$

Korzystając z zależności:

$$\begin{aligned} u_{,x} &= u_{,\xi} + u_{,\eta}, & u_{,t} &= -cu_{,\xi} + cu_{,\eta}, \\ u_{,xx} &= u_{,\xi\xi} + 2u_{,\xi\eta} + u_{,\eta\eta}, & u_{,tt} &= c^2(u_{,\xi\xi} - 2u_{,\xi\eta} + u_{,\eta\eta}), \end{aligned}$$

doprowadzamy równanie (a) do postaci

$$u_{,\xi\eta} = 0. \quad (f)$$

Rozwiązanie dowolne (ogólne) równania (f) przedstawia się następująco:

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta), \quad (g)$$

gdzie φ i ψ są dowolnymi funkcjami klasy $C^1(\mathcal{R})$, czyli

$$u = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct) \quad (h)$$

spełnia równanie (a).

Podstawiając wyrażenie (h) do warunków początkowych (b) (w celu ich spełnienia) mamy

$$u_0(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad v_0(x) = -c\varphi'(x) + c\psi'(x), \quad (i)$$

skąd

$$\int_0^x v_0(s) ds = -c\varphi(x) + c\psi(x) + A,$$

gdzie A jest stałą dowolną. Z ostatniego równania i równania (i), traktowanych jako układ dwóch równań z niewiadomymi $\varphi(x)$ i $\psi(x)$, wyznaczamy

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c}A - \frac{1}{2c}\int_0^x v_0(s) ds,$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c}A + \frac{1}{2c}\int_0^x v_0(s) ds.$$

Po uwzględnieniu tych wyrażań w równości (h) oraz

$$-\int_0^{x-ct} v_0(s) ds = + \int_{x-ct}^0 v_0(s) ds,$$

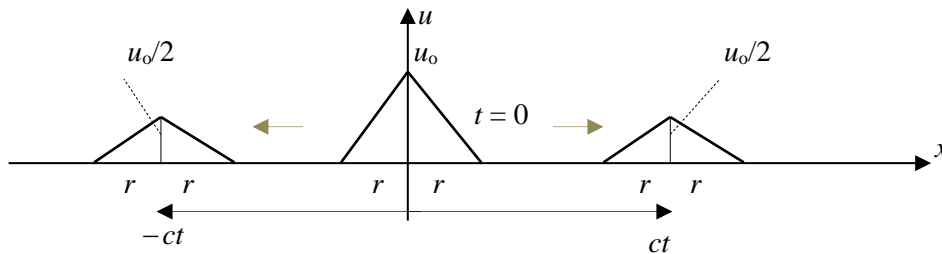
otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie rozważanego zagadnienia początkowego

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [u_0(x-ct) + u_0(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds. \quad (j)$$

Jeżeli, przykładowo

$$u_0(x) = u_0 \begin{cases} 1+x/r, & x \in [-r,0] \\ 1-x/r, & x \in [0,+r] \end{cases}, \quad v_0(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (k)$$

to połowa zaburzenia początkowego w postaci powyższego przemieszczenia przesuwa się w prawo z prędkością c , a połowa tego zaburzenia przesuwa się w lewo na osi x , również z prędkością c .



2) Przypadek równania parabolicznego

Rozważmy równanie (40) przy $m = 1$ i $c \neq 0$ w obszarze $\mathcal{V}' = \mathbb{R}^n \times (t_0, \infty)$. Teraz, przy założeniach eliptyczności operatora A_n^2 , hiperpłaszczyzna brzegowa $S = \mathbb{R}^n \times \{t_0\}$ ma względem równania (40) orientację charakterystyczną, gdyż zgodnie z (41), wobec $\nu' = (0, \dots, 0, -1)$, jest

$$S_n(\tilde{x}', \nu') = 0, \quad \tilde{x}' = (x, t_0) \in S.$$

Wobec tego, że pochodną $u_{,t}(x, t_0)$ można wyliczyć z równania (40) przy $t \rightarrow t_0$, warunek graniczny (29) jako żądanie nie może zawierać pochodnej $u_{,t}$, zaś pochodne $u_{,x_i}$ na S można wyznaczyć na podstawie znajomości u na S . Ostatecznie, warunek graniczny (29), który jest warunkiem początkowym (z uwagi orientację charakterystyczną (hiper)płaszczyzny S) może obejmować jedynie żądanie narzucenia wartości funkcji u na S :

$$u(x, t_0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (44)$$

Zatem przez zagadnienie początkowe dla parabolicznego równania

$$A_n^2 u(x,t) + c(x)u_{,t}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathcal{V}' \quad (45)$$

rozumiemy następujące zadanie: wyznaczyć funkcję $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, \infty)$, która spełnia równanie (43) tożsamościowo dla $x \in \mathbb{R}^n$ i $t \in (t_0, \infty)$ oraz warunek początkowy (43) dla $x \in \mathbb{R}^n$ i $t = t_0$ przy danych funkcjach $f(x,t)$ i $u_0(x)$, $c(x)$ oraz $a_{ij}(x)$ w operatorze A_n^2 . Żądamy przy tym, by funkcja $u = u(x,t)$ była klasy C^2 w obszarze \mathcal{V}' względem zmiennych

x i klasy C^1 w obszarze \mathcal{V} względem zmiennej t oraz klasy C w obszarze $\overline{\mathcal{V}}$ względem zmiennych x i t – przy założeniu, że $f(x, t)$ jest ciągła w obszarze \mathcal{V} , zaś $u_0(x)$ i $a_{ij}(x)$ są ciągłe w przestrzeni \mathcal{R}^n ($\mathcal{V} = \mathcal{R}^n \times (t_0, \infty)$).

! Przy zamianie zmiennych $x = (x_1, \dots, x_n)$ na $y = (y_1, \dots, y_n)$, przy której równanie

$A_n^2 u(x) = 0$, sprowadza się do postaci kanonicznej, również równanie (43) sprowadza się do takiej postaci.

Przykład. Równanie jednowymiarowego przewodnictwa ciepłego wg teorii Fouriera.

Niestacjonarny rozkład temperatury. Rozwiązanie zagadnienia początkowego za pomocą całkowitej transformacji Fouriera.

Wyznamy rozwiązanie $u = u(x, t)$, $x \in \mathcal{R}$, $t \in [0, \infty)$ ($n = 1$) równania jednorodnego

$$u_{,xx}(x, t) - \frac{1}{a^2} u_{,t}(x, t) = 0, \quad x \in \mathcal{R}, t \in (0, \infty), \quad (a)$$

z warunkiem początkowym

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathcal{R}. \quad (b)$$

Funkcja $u = u(x, t)$ przedstawia jednowymiarowy rozkład temperatury w ośrodku nieograniczonym, w przedziale $x \in (-\infty, +\infty)$ w czasie $t \in [0, \infty)$ przy założeniu, że w chwili początkowej $t = 0$ rozkład ten określa funkcja $u_0(x)$.

Wyznamy $u(x, t)$ korzystając z całkowej transformacji Fouriera, której podstawą jest całka Fouriera, tj. wyrażenie po prawej stronie równości:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\alpha x) d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \exp(i\alpha s) ds, \quad i^2 = -1, \quad (c)$$

dla f zanikającej w nieskończoności i bezwzględnie całkownej, tzn.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty. \quad (d)$$

Równość (c) można w sposób równoważny przedstawić następująco:

$$\tilde{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{x}) \exp(i\alpha \tilde{x}) d\tilde{x}, \quad (e-1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\alpha) \exp(-i\alpha x) d\alpha. \quad (e-2)$$

Funkcję \tilde{f} nazywamy transformatą funkcji f . Przyporządkowanie $f \rightarrow \tilde{f}$ określone wzorem (e-1) nazywamy wykładniczą transformacją całkową Fouriera, a przyporządkowanie $\tilde{f} \rightarrow f$ określone wzorem (e-2) nosi nazwę retransformacji całkowitej (wykładniczej) Fouriera.

Jeżeli f jest klasy C^2 na \mathcal{R} i spełnia warunki (d) oraz

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx < \infty. \quad (f)$$

to

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(\tilde{x}) \exp(i\alpha\tilde{x}) d\tilde{x} = -\alpha^2 \tilde{f}. \quad (g)$$

Stosując transformację całkową Fouriera do równania (a) i warunku początkowego (b), otrzymujemy na podstawie (c) i (g) – przy założeniu, że $u(x,t)$ spełnia warunki (d) i (f) względem x :

$$-\alpha^2 \tilde{u}(\alpha, t) - \frac{1}{a^2} \tilde{u}_{,t}(\alpha, t) = 0, \quad \tilde{u}(\alpha, 0) = \tilde{u}_0(\alpha). \quad (h)$$

Powyższe równanie różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego liniowe względem t (h)₁ z warunkiem początkowym (h)₂ (α traktujemy jako parametr – jako stałą) ma rozwiązanie następujące:

$$\tilde{u}(\alpha, t) = \tilde{u}_0(\alpha) \exp(-\alpha^2 a^2 t), \quad t \in [0, \infty), \quad (i)$$

przy

$$\tilde{u}_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tilde{x}) \exp(i\alpha\tilde{x}) d\tilde{x}. \quad (j)$$

Zgodnie ze wzorem na retransformatę funkcji (e-2) otrzymujemy rozwiązanie wyjściowego zagadnienia początkowego (a), (b) w postaci całkowej:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp(-i\alpha x) \exp(-\alpha^2 a^2 t) \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tilde{x}) \exp(i\alpha\tilde{x}) d\tilde{x} \right] d\alpha, \quad (k)$$

jeśli $u_0(x)$ spełnia warunki (d).

Przykładowo, jeżeli początkowy rozkład temperatury jest określony krzywą Gaussa:

$$u_0(x) = u^0 \exp(-x^2/\sigma^2), \quad \sigma = \text{const} > 0, \quad (l)$$

to korzystając z tego, iż

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-c(\xi - m)^2] d\xi = 2\pi, \quad m, c - \text{stałe}, c > 0, \quad (m)$$

znajdujemy kolejno

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\alpha\tilde{x}) u^0 \exp(-\tilde{x}^2/\sigma^2) d\tilde{x} &= u^0 \exp\left(\frac{m^2}{\sigma^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\tilde{x}-m)^2}{\sigma^2}\right] d\tilde{x} = \\ &= \sqrt{\pi} u^0 \sigma \exp\left(-\frac{1}{4} \alpha^2 \sigma^2\right), \quad m = \frac{1}{2} i \alpha \sigma^2, \\ u(x, t) &= \frac{\sqrt{\pi} u^0 \sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\alpha x) \exp(-\alpha^2 a^2 t) \exp\left(-\frac{1}{4} \alpha^2 \sigma^2\right) d\alpha = \\ &= \frac{u^0 \sigma}{2\sqrt{\pi}} \exp(k^2 \lambda^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-k^2 (\alpha + \lambda)^2] d\alpha = \frac{u^0 \sigma}{2k} \exp(k^2 \lambda^2), \end{aligned}$$

przy $k^2 = a^2 t + \sigma^2/4$, $\lambda = ix/(2k^2)$.

Zatem ostatecznie

$$u(x, t) = \frac{u^0 \sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2 + 4a^2 t}\right). \quad (n)$$

Zauważmy, że wraz ze wzrostem t (w miarę upływu czasu) ciepło rozprasza się wzdłuż osi x , a temperatura maleje do zera.

8. Zagadnienie brzegowo-początkowe – sformułowanie klasyczne

1) *Przypadek* $n > 1$

Niech $A_n^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_i \partial_j$ będzie nadal operatorem eliptycznym, ale teraz w obszarze \mathcal{V} przestrzeni \mathcal{R}^n przy $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V}$ i $n > 1$. Niech $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$). Rozważmy równanie różniczkowe postaci

$$A_n^2 u(x, t) + c(x) \frac{\partial^m}{\partial t^m} u(x, t) = f(x, t), \quad m = 1, 2. \quad (46)$$

Bez szkody dla toku rozważań równanie to może mieć postać ogólniejszą:

$$A_n^2 u(x') + A_n^1 u(x') + A_n^0 u(x') + c_2(x) u_{,tt}(x') + c_1(x) \frac{\partial}{\partial t} u_{,t}(x') = f(x'), \quad (47)$$

w obszarze $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \times \mathcal{T}$, $\mathcal{T} = (t_0, \infty)$ przy $x' = (x, t) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ ($x_{n+1} = t$), przy czym

$A_n^1 = \sum_{i=1}^n a_i(x) \partial_i$ jest operatorem różniczkowym rzędu pierwszego względem zmiennych przestrzennych x , a $A_n^0 = a_0(x) \text{id}^1$ operatorem algebraicznym względem x , przy $a_i = a_i(x)$, $a_0 = a_0(x)$ ciągłych dla $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V}$.

Forma stowarzyszona z równaniem (47) wyraża się wzorem

$$A'_n(x'; \xi', \eta') = A_n(x; \xi, \eta) + c_2 \xi_{n+1} \eta_{n+1} \quad (48)$$

gdzie A_n jest formą stowarzyszoną z operatorem A_n^2 dla $x \in \mathcal{V}$ (z założenia dodatkowo określona). W przypadku równania (46) należy w wyrażeniu (48) przyjąć $c_2 = c$, gdy $m = 2$ oraz $c_2 = 0$, gdy $m = 1$. Zatem równanie (47) jest w obszarze \mathcal{V}' :

- 1) eliptyczne, gdy $c_2 > 0$ w obszarze \mathcal{V} ,
- 2) hiperboliczne, gdy $c_2 < 0$ w obszarze \mathcal{V} ,
- 3) paraboliczne, gdy $c_2 = 0$ w obszarze \mathcal{V} .

Przypadek zagadnienia brzegowego (przypadek 1) już rozważono (tu go pomijamy).

Brzeg obszaru „walcowego” \mathcal{V}' składa się z trzech elementów:

$$\partial \mathcal{V}' = S_1 \cup S_2 \cup L, \quad (49)$$

gdzie

$$S_1 = \partial \mathcal{V} \times \mathcal{T}, \quad S_2 = \mathcal{V} \times \{t_0\}, \quad L = \partial \mathcal{V} \times \{t_0\} = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2. \quad (50)$$

Niech $\nu(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in \partial \mathcal{V}$ będzie wersorem normalnym zewnętrznym do $\partial \mathcal{V}$ w przestrzeni \mathcal{R}^n .

Wtedy $\nu'(\tilde{x}') = (\nu(\tilde{x}), 0)$, przy $\tilde{x}' = (\tilde{x}, t) \in S_1$ jest wersorem normalnym zewnętrznym do poboczniczy S_1 i zgodnie z (48)

¹ id – odwzorowanie identycznościowe (id $u = u$)

$$S_{n+1}(\tilde{x}'; \nu') = S_n(\tilde{x}; \nu) + c_2 0^2 > 0, \quad (51)$$

gdyż $S_n(\tilde{x}; \nu) > 0$ dla $\tilde{x} \in \partial\mathcal{V}$, a więc S_1 ma orientację przestrzenną względem równania (47).

Natomiast wektorem normalnym zewnętrznym do podstawy S_2 obszaru \mathcal{V}' jest

$$\nu'(\tilde{x}') = (0, -1) \text{ dla } \tilde{x}' = (x, t_0) \in S_2 \text{ i zgodnie z (48)}$$

$$S_{n+1}(\tilde{x}'; \nu') = S_n(x; 0) + c_2(x)(-1)^2 = c_2(x), \quad (52)$$

gdyż $S_n(x; 0) = 0$ dla $x \in \mathcal{V}$, a więc S_2 ma orientację czasową względem równania (45), gdy $c_2(x) < 0$ dla $x \in \mathcal{V}$ ($S_{n+1} < 0$), oraz orientację charakterystyczną, gdy $c_2(x) = 0$ dla $x \in \mathcal{V}$ ($S_{n+1} = 0$).

Reasumując, na (hiper)powierzchni S_1 stawiamy warunek brzegowy, a na (hiper)powierzchni S_2 – warunek początkowy. Na (hiper)krzywej \mathcal{L} powinny być spełnione warunki zgodności warunków granicznych na S_1 i S_2 .

Przez zagadnienie brzegowo-początkowe (dla $n > 1$) w obszarze \mathcal{V}' dla równania (47) nazywamy następujące zadanie: wyznaczyć funkcję $u = u(x, t)$, $x \in \bar{\mathcal{V}}$, $t \in \bar{\mathcal{T}}$, która spełnia dla $x \in \mathcal{V}$ i $t \in \mathcal{T}$ (tj. w obszarze \mathcal{V}') równanie (47), dla $x = \tilde{x} \in \partial\mathcal{V}$ i $t \in \mathcal{T}$ warunek brzegowy

$$B_n^1 u(\tilde{x}, t) + B_n^0 u(\tilde{x}, t) = \beta(\tilde{x}, t), \quad (53)$$

gdzie teraz

$$B_n^1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\tilde{x}, t) \partial_i, \quad B_n^0 = \alpha_0(\tilde{x}, t) \text{id} \quad (54)$$

w przypadku warunku brzegowego niestacjonarnego oraz

$$B_n^1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\tilde{x}) \partial_i, \quad B_n^0 = \alpha_0(\tilde{x}) \text{id} \quad (54a)$$

w przypadku warunku brzegowego stacjonarnego i jego wszystkich przypadków

szczególnych postaci (34) lub (35) (w szczególności przy $\alpha_i(\tilde{x}) = \nu_i(\tilde{x})$ dla $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ będącego wektorem normalnym zewnętrznym do $\partial\mathcal{V}$), zaś dla $x \in \mathcal{V}$ i $t = t_0$ spełnia warunki początkowe

$$\begin{aligned} u_{,t}(x, t_0) &= \nu_0(x) \text{ przy } c_2(x) < 0, \quad x \in \mathcal{V}; \\ u(x, t_0) &= u_0(x) \text{ przy } c_2(x) < 0, \quad x \in \mathcal{V} \\ \text{lub } c_2(x) &= 0, \quad c_1(x) \neq 0, \quad x \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (55)$$

(przy $c_2(x) = 0$ na \mathcal{V} warunku (53)₁ nie nakładamy, a równości $c_2(x) = 0$ i $c_1(x) = 0$ na \mathcal{V} nie mogą jednocześnie zachodzić).

W szczególności warunek brzegowy (53) może na części $S_1^I = \mathcal{L}^I \times \mathcal{T}$, $S_1^{II} = \mathcal{L}^{II} \times \mathcal{T}$,

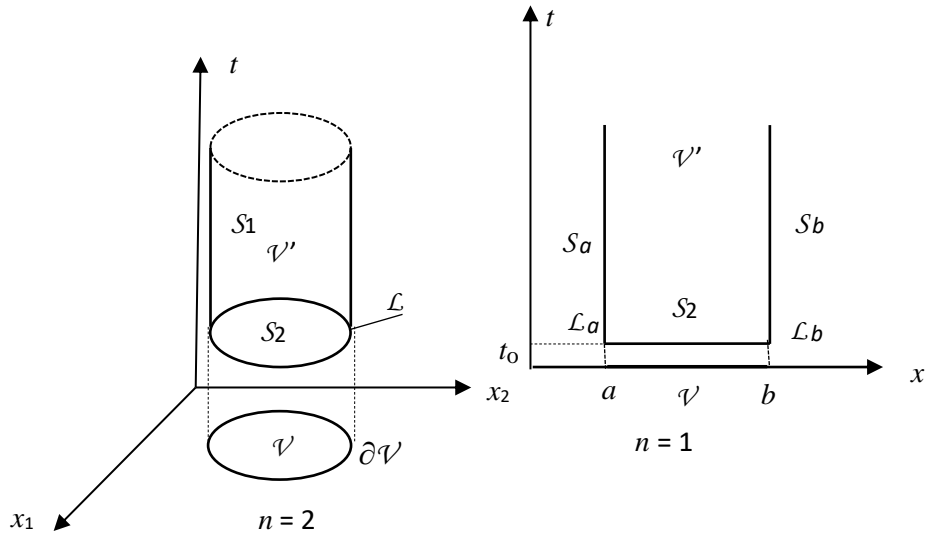
$S_1^{III} = \mathcal{L}^{III} \times \mathcal{T}$ przyjąć odpowiednio postać:

- Dirichleta $u(\tilde{x}, t) = \beta_I(\tilde{x}, t)$, $\tilde{x} \in \mathcal{L}^I$, $t \in \mathcal{T}$,
- von Neumanna $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\tilde{x}, t) = \beta_{II}(\tilde{x}, t)$, $\tilde{x} \in \mathcal{L}^{II}$, $t \in \mathcal{T}$,

- von Neumanna II rodzaju $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\tilde{x}, t) + \alpha(\tilde{x})u(\tilde{x}, t) = \beta_{\text{III}}(\tilde{x}, t)$, $\tilde{x} \in \mathcal{L}^{\text{III}}$, $t \in \mathcal{T}$

przy $\bar{\mathcal{L}}^{\text{I}} \cup \bar{\mathcal{L}}^{\text{II}} \cup \bar{\mathcal{L}}^{\text{III}} = \partial \mathcal{V}$, $\mathcal{L}^{\text{I}} \cap \mathcal{L}^{\text{II}} = \emptyset$, $\mathcal{L}^{\text{II}} \cap \mathcal{L}^{\text{III}} = \emptyset$, $\mathcal{L}^{\text{I}} \cap \mathcal{L}^{\text{III}} = \emptyset$.

Zakłada się, że funkcje $f = f(x, t)$, $\beta = \beta(\tilde{x}, t)$ (odpowiednio $\beta_{\text{I}}(\tilde{x}, t)$, $\beta_{\text{II}}(\tilde{x}, t)$, $\beta_{\text{III}}(\tilde{x}, t)$) oraz współczynniki $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a_0(x)$, $c_2(x)$, $c_1(x)$ i $\alpha_i(\tilde{x})$, $\alpha(\tilde{x})$ są ciągłe na swoich zbiorach określoności. Ponadto wymaga się, by na zbiorze \mathcal{L} spełnione były warunki zgodności – np. warunku brzegowego Dirichleta z warunkiem początkowym: $\beta_{\text{I}}(\tilde{x}, t_0) = u_0(\tilde{x})$. Przy tym żądamy, by funkcja $u = u(x, t)$ jest klasy C^2 względem x na \mathcal{V} , klasy C^2 lub C^1 względem t na \mathcal{T} (w zależności od tego czy $c_2(x) < 0$ czy $c_2(x) = 0$ na \mathcal{V}) oraz odpowiednio C^1 na $\mathcal{V} \cup \bar{\mathcal{L}}^{\text{II}} \cup \bar{\mathcal{L}}^{\text{III}}$ i klasy C na $\mathcal{V} \cup \bar{\mathcal{L}}^{\text{I}}$ przy $t = t_0$.



2) Przypadek $n = 1$

Przypadek jednej zmiennej przestrzennej ($n = 1$) wymaga pewnych modyfikacji rozważań z poprzedniego punktu.

Mianowicie, ponieważ $\mathcal{V} = (a, b)$, to $\mathcal{V}' = (a, b) \times (t_0, \infty)$, $\bar{\mathcal{V}} = [a, b]$, $\bar{\mathcal{V}}' = [a, b] \times [t_0, \infty)$, $\partial \mathcal{V} = \{a\} \cup \{b\}$, $S_1 = S_a \cup S_b$, $S_a = \{a\} \times \mathcal{T}$, $S_b = \{b\} \times \mathcal{T}$, $S_2 = (a, b) \times \{t_0\}$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_a \cup \mathcal{L}_b$, $\mathcal{L}_a = \{a\} \times \{t_0\}$, $\mathcal{L}_b = \{b\} \times \{t_0\}$ ($\mathcal{T} = (t_0, \infty)$).

Równanie różniczkowe (47) redukuje się do postaci

$$a_2(x)u_{,xx}(x, t) + a_1(x)u_{,x}(x, t) + a_0(x)u(x, t) + c_2(x)u_{,tt}(x, t) + c_1(x)u_{,t}(x, t) = b(x, t) \quad (54)$$

przy $a_2(x) > 0$ oraz $c_2(x) < 0$ lub $c_2(x) = 0$, $c_1(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$, $t \in (t_0, \infty)$.

Natomiast warunek brzegowy (51) przyjmuje postać dwóch warunków – dla $\tilde{x} = a$ i $\tilde{x} = b$:

$$\alpha_i(\tilde{x})u_{,x}(\tilde{x}, t) + \alpha_0(\tilde{x})u(\tilde{x}, t) = \beta(\tilde{x}, t), \quad t \in (t_0, \infty) \quad (56)$$

Warunki początkowe (55) pozostają niezmiennione.

W przypadku ośrodka półnieskończonego, tj. dla $a = -\infty$ albo $b = +\infty$ należy odpowiednio pozostawić jeden warunek brzegowy spośród (56), a drugi staje się warunkiem w nieskończoności, tj. np. warunkiem zanikania: $u(\tilde{x}, t) \rightarrow 0$ dla $\tilde{x} \rightarrow \infty$.

Przykład 1. Wyznamy funkcję drgań swobodnych słabo tłumionych struny jednorodnej o długości l zamocowanej na końcach.

Drgania powyższe opisuje równanie jednorodne (brak sił wymuszających)

$$u_{,xx}(x,t) - \frac{1}{c^2}u_{,tt}(x,t) - \frac{2\lambda}{c^2}u_{,t}(x,t) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty) \quad (a)$$

z warunkami brzegowymi

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in (0,\infty) \quad (b)$$

oraz z warunkami początkowymi

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_{,t}(x) = v_0(x), \quad x \in (0,l) \quad (c)$$

Warunki zgodności oznaczają, iż

$$u_0(0) = u_0(l) = 0, \quad v_0(0) = v_0(l) = 0, \quad (d)$$

Rozwiązanie powyższego zagadnienia brzegowo-początkowego znajdziemy, korzystając z metody rozdziału zmiennych. Mianowicie, $u(x,t)$ poszukujemy, w pierwszym kroku, w postaci:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \quad (e)$$

Po podstawieniu (e) do (a) otrzymujemy

$$X''(x)T(t) - \frac{1}{c^2}X(x)T''(t) - \frac{2\lambda}{c^2}X(x)T'(t) = 0$$

czyli

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t) + 2\lambda T'(t)}{c^2 T(t)},$$

co jest możliwe tylko wtedy, gdy

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = a = \text{const}, \quad \frac{T''(t) + 2\lambda T'(t)}{c^2 T(t)} = a = \text{const},$$

gdzie a jest stałą o nieznannej jeszcze wartości. Równości te przekształcamy do znanych postaci równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu o stałych współczynnikach

$$X''(x) - aX(x) = 0, \quad T''(t) + 2\lambda T'(t) - ac^2 T(t) = 0. \quad (f)$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (f)₁ jest (w zależności od znaku stałej a)

$$X(x) = \begin{cases} C_1 \sinh(\alpha x) + C_2 \cosh(\alpha x), & \alpha^2 = a, a > 0; \\ C_1 + C_2 x, & a = 0; \\ C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x), & \alpha^2 = -a, a < 0. \end{cases}$$

Uwzględniając (e) w warunkach (b) stwierdzamy, że funkcja $X(x)$ musi spełniać warunki brzegowe

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (g)$$

co oznacza, że jest to możliwe tylko dla $X(x) = C_1 \sin(\alpha x)$ przy $\alpha = n\pi/l$ i $a = -\alpha^2$ ($n=1, 2, \dots$). Zatem ostatecznie otrzymaliśmy ciąg stałych a oraz ciąg funkcji spełniających równanie (f)₁ i warunki (g):

$$X(x) = C_n \sin(\alpha_n x), \quad x \in [0, l], \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \quad a = -\alpha_n^2 \quad (n=1, 2, \dots). \quad (h)$$

Odpowiednio do tego rozwiązanie ogólne równania (f)₂ przyjmuje postać:

$$T(t) = \exp(-\lambda t) \left(a_n \sin \sqrt{\omega_n^2 - \lambda^2} t + b_n \cos \sqrt{\omega_n^2 - \lambda^2} t \right), \quad \omega_n = c\alpha_n \quad (n=1, 2, \dots), \quad (i)$$

gdzie a_n i b_n stałe dowolne (całkowania), a w konsekwencji zgodnie z (e) otrzymujemy

$$u(x, t) = \exp(-\lambda t) \left(A_n \sin \tilde{\omega}_n t + B_n \cos \tilde{\omega}_n t \right) \sin \alpha_n x, \quad \tilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 - \lambda^2}, \quad (j)$$

przy założeniu tłumienia podkrytycznego ($\lambda < \pi c/l$) (A_n i B_n – nowe stałe dowolne).

Funkcja ta nie spełnia dowolnych warunków początkowych (c).

W kroku następnym zauważamy, że nie tylko wyrażenie (j) spełnia równanie różniczkowe (a) i warunki brzegowe (b), ale również szereg (z uwagi na liniowość zagadnienia)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda t) \left(A_n \sin \tilde{\omega}_n t + B_n \cos \tilde{\omega}_n t \right) \sin \alpha_n x, \quad (k)$$

(jeśli szereg ten jest zbieżny i można go różniczkować „wyraz po wyrazie”). Pozwala to spełnić dowolne (dopuszczalne) warunki początkowe (c):

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \alpha_n x = u_o(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\omega}_n A_n - \lambda B_n) \sin \alpha_n x = v_o(x), \quad (l)$$

tj. wyznaczyć stałe całkowania A_n i B_n . W tym celu obie równości mnożymy przez $\sin \alpha_m x$ i wykorzystujemy ortogonalność funkcji $\sin \alpha_n x$ na przedziale $(0, l)$, Uwzględniając

$$\int_0^l \sin \alpha_n x \sin \alpha_m x dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ l/2, & n = m \end{cases},$$

otrzymujemy:

$$A_m = \frac{v_m^o + \lambda u_m^o}{\tilde{\omega}_m}, \quad B_m = u_m^o, \quad (m)$$

gdzie

$$u_m^o = \frac{2}{l} \int_0^l u_o(x) \sin \alpha_m x dx, \quad v_m^o = \frac{2}{l} \int_0^l v_o(x) \sin \alpha_m x dx. \quad (n)$$

Ostatecznie mamy:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda t) \left(\frac{v_n^o + \lambda u_n^o}{\tilde{\omega}_n} \sin \tilde{\omega}_n t + u_n^o \cos \tilde{\omega}_n t \right) \sin \alpha_n x, \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, \infty). \quad (k)$$

Jeśli, przykładowo,

$$u_o(x) = u^o \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right), \quad v_o(x) = 0,$$

to

$$u_m^o = 4u^o \frac{1 - (-1)^n}{\pi^3 n^3}, \quad v_m^o = 0.$$

W przypadku braku tłumienia ($\lambda = 0$), zgodnie z (k) i (j) mamy:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{v_m^o}{\omega_n} \sin \omega_n t + u_n^o \cos \omega_n t \right) \sin \alpha_n x \quad \left(\alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \omega_n = c\alpha_n \right).$$

Przykład 2. Wyznamy niestacjonarny rozkład temperatury w ośrodku jednowymiarowym o długości l (może to być także warstwa o grubości l), przy założeniu, że na końcach (na powierzchniach skrajnych warstwy) utrzymywana jest temperatura zerowa, a rozkład temperatury jest generowany przez jej rozkład początkowy na długości l (na grubości warstwy l).

Zagadnienie brzegowo-początkowe opisujące powyższy rozkład temperatury można zapisać następująco:

- równanie różniczkowe

$$u_{,xx}(x, t) - \frac{1}{c} u_{,t}(x, t) = 0 \quad (c > 0), \quad (a)$$

- warunki brzegowe

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \quad (b)$$

- warunek początkowy

$$u(x, 0) = u_o(x), \quad x \in (0, l), \quad (c)$$

- warunki zgodności

$$u_o(0) = u_o(l) = 0. \quad (d)$$

Rozwiązanie powyższego zagadnienia brzegowo-początkowego znajdziemy również korzystając z metody rozdziału zmiennych. Mianowicie, $u(x, t)$ poszukujemy najpierw w postaci:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (e)$$

i po podstawieniu (e) do (a) otrzymujemy

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{cT(t)},$$

co jest możliwe, gdy

$$X''(x) - aX(x) = 0, \quad T'(t) - acT(t) = 0 \quad (f)$$

dla pewnej stałej a .

Rozwiązaniem ogólnym równania (f)₁ jest (w zależności od znaku stałej a)

$$X(x) = \begin{cases} C_1 \sinh(\alpha x) + C_2 \cosh(\alpha x), & \alpha^2 = a, a > 0; \\ C_1 + C_2 x, & a = 0; \\ C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x), & \alpha^2 = -a, a < 0. \end{cases}$$

Uwzględniając (e) w warunkach (b) stwierdzamy, że funkcja $X(x)$ musi spełniać warunki brzegowe

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (g)$$

co oznacza, że jest to możliwe dla $X(x) = C_1 \sin(\alpha x)$ przy $\alpha = n\pi/l$ i $a = -\alpha^2$ ($n=1, 2, \dots$).
Zatem ostatecznie otrzymaliśmy identyczny jak w Przykładzie 1 ciąg stałych a oraz ciąg funkcji spełniających równanie (f)₁ i warunki (g):

$$X(x) = C_n \sin(\alpha_n x), \quad x \in [0, l], \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \quad a = -\alpha_n^2 \quad (n=1, 2, \dots), \quad (\text{h})$$

a w konsekwencji ciąg funkcji spełniających równanie (f)₂:

$$T(t) = B_n \exp(-\kappa_n t), \quad t \in [0, \infty), \quad \kappa_n = c\alpha_n^2 \quad (n=1, 2, \dots). \quad (\text{i})$$

Na spełnienie warunku początkowego (c) zezwala suma iloczynów funkcji (i) i (h), czyli szereg (jeśli jest zbieżny)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\kappa_n t) \sin \alpha_n x, \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, \infty), \quad (\text{k})$$

który spełnia równanie różniczkowe (a) i warunki brzegowe (b), a więc dla $t = 0$ jest

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \alpha_n x = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^0 \sin \alpha_n x, \quad (\text{l})$$

skąd otrzymujemy

$$A_n = u_n^0 = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \alpha_n x dx. \quad (\text{m})$$

Zauważmy, że jeżeli na końcu $x = 0$ utrzymywana jest temperatura stała u_0 , a na końcu $x = l$ temperatura u_l , czyli warunki brzegowe są następujące

$$u(0, t) = u_0, \quad u(l, t) = u_l, \quad t \in (0, \infty), \quad (\text{n})$$

a warunek początkowy przestawimy w postaci

$$u(x, 0) = u_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + u_l \frac{x}{l} + u_0^*(x), \quad x \in (0, l), \quad (\text{o})$$

przy

$$u_0^*(0) = u_0^*(l) = 0, \quad (\text{p})$$

to funkcja

$$u(x, t) = u_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + u_l \frac{x}{l} + u^*(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, \infty) \quad (\text{r})$$

spełnia równanie różniczkowe (a), warunki brzegowe (n), warunek początkowy (o) i warunek zgodności (p) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $u^*(x, t)$ spełnia równanie różniczkowe (a) oraz warunki brzegowe (b) i warunek początkowy (c) przy warunku zgodności (d), a więc zgodnie z (k) i (m) jest:

$$u^*(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^0 \exp(-\kappa_n t) \sin \alpha_n x, \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, \infty). \quad (\text{s})$$

Przykład 3. Rozważmy równanie rozkładu temperatury jak w Przykładzie 2, ale w ośrodku półnieskończonym (np. w półprzestrzeni podłoża gruntowego)

$$u_{,xx}(x,t) - \frac{1}{c} u_{,t}(x,t) = 0 \quad (c > 0), \quad x \in (0, \infty), \quad t \in (0, \infty), \quad (\text{a})$$

z warunkiem brzegowym

$$u(0,t) = u_0 \exp(i\omega t), \quad t \in (0, \infty), \quad (\text{b})$$

przedstawiającym cyklicznie (harmonicznie) zmienną temperaturę na granicy ośrodka.

Taka harmoniczna przyczyna niestacjonarnego rozkładu temperatury powoduje, że możliwy jest ten rozkład także harmoniczny względem zmiennej czasowej w dowolnym miejscu ośrodka, tj. funkcji $u = u(x,t)$ poszukujemy w postaci

$$u(x,t) = U(x) \exp(i\omega t), \quad x \in (0, \infty), \quad t \in (0, \infty). \quad (\text{c})$$

Po podstawieniu (c) do (a) i (b) wnioskujemy, że funkcja $U(x)$ musi spełniać równanie różniczkowe zwyczajne

$$U''(x) - \frac{i\omega}{c} U(x) = 0 \quad (\text{d})$$

i warunek brzegowy

$$U(0) = u_0 \quad (\text{e})$$

a także warunek ograniczoności $U(x)$ w nieskończoności:

$$|U(x)| < \infty \quad \text{dla } x \rightarrow \infty. \quad (\text{f})$$

Całą równania (d), spełniającą warunki (e) i (f), jest

$$U(x) = u_0 \exp[-(1+i)x/\delta], \quad (\text{g})$$

gdzie

$$\delta = \sqrt{2c/\omega}. \quad (\text{h})$$

Zatem, zgodnie z (c) i (g), mamy:

$$u(x,t) = u_0 \exp(-x/\delta) \exp[i(\omega t - x/\delta)]. \quad (\text{i})$$

Ponieważ równanie (a) spełnia także funkcja sprzężona z (i), więc ostatecznie

$$u(x,t) = u_0 \exp(-x/\delta) \cos(\omega t - x/\delta). \quad (\text{j})$$

Rozkład temperatury opisany funkcją (j) ma charakter falowy (czynnik $\cos(\omega t - x/\delta)$ reprezentuje falę harmoniczną), z zanikającą amplitudą $u_0 \exp(-x/\delta)$ wraz ze wzrostem x .

Zauważmy, że przewidywane rozwiązanie równania (a) w postaci (c) oznacza, że

$$u(x,0) = U(x), \quad x \in (0, \infty), \quad (\text{c})$$

a więc niemożność spełnienia dowolnego warunku początkowego. Takie rozkłady temperatury (ogólniej stany ośrodka) nazywamy ustalonymi.

9. Zagadnienie spektralne – sformułowanie klasyczne

Podobnie jak w rozdz. 3.3, p.3 zagadnienie spektralne dla operatora różniczkowego cząstkowego liniowego nie omawialiśmy w rozdz. 1.4, ale teraz w powiązaniu z zagadnieniami granicznymi, a konkretnie (tytułem reprezentatywnego przykładu) dla

operatora różniczkowego cząstkowego liniowego rzędu drugiego eliptycznego A_n^2 w obszarze \mathcal{V} o brzegu $\partial\mathcal{V}$ w powiązaniu z warunkiem brzegowym na $\partial\mathcal{V}$, gdyż bez tego warunku, nie miałyby to zagadnienie większego sensu.

Niech zatem dany będzie operator eliptyczny A_n^2 na obszarze \mathcal{V} o brzegu $\partial\mathcal{V}$, składającym się (dla ustalenia uwagi) z płatów (łuków) S_r ($r = 1, 2, 3$) i niech na dany będzie prawie wszędzie multioperator brzegowy B_n^1 , będący na S_1 operatorem pierwszego rodzaju (lub operatorem identyczności – operatorem Dirichleta), na S_2 operatorem drugiego rodzaju (lub operatorem von Neumana I rodzaju), a na S_3 operatorem trzeciego rodzaju (lub operatorem von Neumana II rodzaju). Zakładamy przy tym, że współczynniki w operatorze A_n^2 , w multioperatorze B_n^1 oraz obszar \mathcal{V} i jego brzeg $\partial\mathcal{V}$ spełniają wszystkie założenia wymienione w p. 6 (poświęconym zagadnieniu brzegowemu), a przy tym koniecznie część $S_1 \neq \emptyset$.

Przez zagadnienie spektralne dla operatora różniczkowego cząstkowego liniowego rzędu drugiego eliptycznego w powiązaniu z określonym warunkiem brzegowym (w sformułowaniu klasycznym) rozumiemy następujący (problem zadanie): wyznaczyć zbiór tych liczb $\lambda \in \mathbb{R}$, dla których równanie

$$A_n^2 u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \mathcal{V}, \quad (57)$$

ma niezerowe rozwiązanie klasy $C_n^{2+}(\mathcal{V}) = C_n^{2;0}(\mathcal{V} \cup S_1) \cap C_n^{2;1}(\mathcal{V} \cup S_2) \cap C_n^{2;1}(\mathcal{V} \cup S_3)$ (spełniające to równanie tożsamościowo), spełniające jednorodny warunek brzegowy

$$B_n^1 u(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in \partial\mathcal{V} \quad (58)$$

(prawie wszędzie na odpowiednich płatach / łukach S_1, S_2, S_3 brzegu $\partial\mathcal{V}$). Liczby λ noszą nazwę (również) wartości własnych (w tym zagadnieniu), odpowiadające im funkcje (będące rozwiązaniami tego zagadnienia brzegowego (57)-(58)) noszą nazwę funkcji własnych u_λ .

Zbiór tych funkcji tworzy podprzestrzeń własną V_λ przestrzeni $\ker(A_n^2 - \lambda \text{Id}) \cap C_n^{2+}(\mathcal{V})$.

Przykład. Znajdziemy wartości własne i funkcje własne dla operatora Laplace'a na prostokącie ($n = 2$): $\mathcal{P} = (0, a) \times (0, b)$ z warunkiem Dirichleta (jednorodnym) na brzegu $\partial\mathcal{P}$. Mamy zatem do rozwiązania następujące zagadnienie brzegowe:

$$u_{,xx}(x, y) + u_{,yy}(x, y) = \lambda u(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{P}, \quad (a)$$

z jednorodnym warunkiem Dirichleta

$$u(x, 0) = u(x, b), \quad x \in (0, a), \quad (b-1)$$

$$u(0, y) = u(a, y), \quad y \in (0, b). \quad (b-2)$$

Zastosujmy metodę rozdziału zmiennych. Niech więc

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (c)$$

Po podstawieniu (c) do równania (a) otrzymujemy:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = \lambda X(x)Y(y) \quad (d)$$

Zakładając, że $X(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, a)$ i $Y(y) \neq 0 \quad \forall y \in (0, b)$ mamy

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

co jest możliwe tylko wtedy, gdy

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \gamma = \text{const}, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \delta = \text{const}, \quad \gamma + \delta = \lambda. \quad (\text{e})$$

czyli, gdy

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0, \quad x \in (0, a), \quad Y''(y) - \alpha Y(y) = 0, \quad x \in (0, a)$$

dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$. Rozwiązaniami tych równań są

$$X(x) = \begin{cases} C_1 \sinh(\alpha x) + C_2 \cosh(\alpha x), & \alpha^2 = \gamma, \gamma > 0; \\ C_1 + C_2 x, & \gamma = 0; \\ C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x), & \alpha^2 = -\gamma, \gamma < 0. \end{cases} \quad (\text{f-1})$$

$$Y(y) = \begin{cases} D_1 \sinh(\beta y) + D_2 \cosh(\beta y), & \beta^2 = \delta, \delta > 0; \\ D_1 + D_2 y, & \delta = 0; \\ D_1 \sin(\beta y) + D_2 \cos(\beta y), & \beta^2 = -\delta, \delta < 0. \end{cases} \quad (\text{f-2})$$

Warunki brzegowe (b) będą spełnione, gdy

$$X(0) = X(a) = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0, \quad (\text{g})$$

zaś ich spełnienie jest możliwe przez funkcje (f), gdy

$$X(x) = C_n \sin(\alpha_n x), \quad x \in [0, a], \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \gamma = -\alpha_n^2 \quad (n=1, 2, \dots). \quad (\text{h-1})$$

$$Y(y) = D_m \sin(\beta_m y), \quad y \in [0, b], \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \delta = -\beta_m^2 \quad (m=1, 2, \dots). \quad (\text{h-1})$$

gdzie C_n i D_m stałe dowolne.

Ostatecznie, na mocy (c) i (e) przy $C_n D_m = 1$, znajdujemy rozwiązanie naszego zagadnienia spektralnego:

$$\lambda = \lambda_{n,m} = -(\alpha_n^2 + \beta_m^2), \quad u_{n,m}(x, y) = \sin \alpha_n x \sin \beta_m y, \quad (x, y) \in [0, a] \times [0, b],$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots$$

4.4. Równania wyższych rzędów

Spośród równań wyższych rzędów na uwagę zasługują w zasadzie równania rzędu parzystego, zwłaszcza rzędu czwartego. Jednak systematyczne ich omawianie w sposób analogiczny do rozważań w rozdz. 4.3, wobec wiadomości zawartych w rozdz. 4.1 i rozdz. 1 i 2 nie jest celowe. Wystarczy jak na dwóch reprezentatywnych przykładach równań rzędu czwartego – jednego eliptycznego i jednego parabolicznego dwóch zmiennych ($n = 2$) – pokażemy sformułowania (klasyczne) odpowiednio zagadnienia brzegowego i zagadnienia brzegowo-początkowego wraz przykładami ich rozwiązania metodami również dla nich reprezentatywnymi.

Wymienionymi równaniami są:

- równanie eliptyczne

$$\Delta^2 u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{V} \subset \mathcal{R}^2, \quad (1)$$

opisujące (na przykład) zginanie statyczne płyty wg modelu Kirchhoffa, gdzie operator różniczkowy Δ^2 jest tzw. bilaplasjanem, czyli złożeniem dwóch operatorów Laplace'a (laplasjanów):

$$\Delta^2 = (\partial_{xx} + \partial_{yy})^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \quad (2)$$

- równanie paraboliczne

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in (a, b) \times (t_0, \infty), \quad (3)$$

opisujące (na przykład) drgania poprzeczne belki (wg modelu Bernoulli'ego).

1. Zagadnienie brzegowe zginania płyty – sformułowanie klasyczne

Zagadnienie brzegowe (w sformułowaniu klasycznym), o którym tu mowa, polega na wyznaczeniu takiej funkcji $u(x, y)$, $(x, y) \in \bar{\mathcal{V}}$, która spełnia tożsamościowo równanie różniczkowe (1), tj.

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{V} \quad (4)$$

(funkcja $f(x, y)$ jest dana, z założenia ciągła na \mathcal{V}) oraz dwa warunki brzegowe we wszystkich punktach łuku linii brzegowej \mathcal{L} obszaru \mathcal{V}) w jednym z poniższych przykładowych wariantów:

- 1) $u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{L}$
- 2) $u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{L}$
- 3) $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{L}$

$$4) \tilde{\Delta}u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{m}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \frac{\partial \tilde{\Delta}u}{\partial \nu}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{L},$$

gdzie $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{m}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y})$ są dane (z założenia ciągłe), a

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \nu_x \frac{\partial}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{L}, \quad (5)$$

$\nu = (\nu_x, \nu_y) \in \mathcal{R}^2$ są wektorami normalnymi zewnętrznymi do \mathcal{L} , zaś $\tau = (\tau_x, \tau_y) \in \mathcal{R}^2$

wektorami stycznymi do \mathcal{L} w punktach $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{L}$. Łącznie domknięcia łuków \mathcal{L} tworzą brzeg $\partial \mathcal{V}$ obszaru \mathcal{V} , a każdy z łuków \mathcal{L} spełnia warunek Lipschitza. Od funkcji $u = u(x, y)$ żądamy, by była klasy $C_2^{4,l}(\mathcal{V} \cup \mathcal{L})$ dla każdego z łuków \mathcal{L} , gdzie l jest równe największemu z rzędów pochodnych występujących w obu warunkach brzegowych na \mathcal{L} .

Przykład. Znajdziemy rozwiązanie wyżej opisanego zagadnienia brzegowego dla równania (4) w obszarze prostokątnym $\mathcal{P} = (0, a) \times (0, b)$, z warunkami brzegowymi jednorodnymi typu 2) na brzegu $\partial \mathcal{P}$. W tym celu zastosujemy metodę podwójnych szeregów sinusowych Fouriera.

Rozwiązania tego zagadnienia brzegowego poszukujemy w postaci:

$$u(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b], \quad (a)$$

przedstawiając przy tym funkcję $f(x, y)$ w postaci

$$f(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} f_{n,m} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad (b)$$

gdzie

$$f_{n,m} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy. \quad (c)$$

Zauważmy, że przy założeniu różniczkowalności „wyraz po wyrazie” szeregu (a) oraz zbieżności punktowej szeregu (b) i szeregów powstałych w wyniku różniczkowania szeregu (a), spełnione są jednorodne warunki brzegowe 2), tj.

$$u(0, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m} \sin \left(\frac{n\pi}{a} 0 \right) \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) = 0,$$

$$u(a, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m} \sin \left(\frac{n\pi}{a} a \right) \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) = 0,$$

$$u(x, 0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m} \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{m\pi}{b} 0 \right) = 0,$$

$$u(x, b) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m} \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{m\pi}{b} b \right) = 0,$$

gdyż $\sin 0 = 0$, $\sin n\pi = \sin m\pi = 0$ dla wszystkich $m, n = 1, 2, 3, \dots$ oraz z tego samego powodu

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} u(0, y) = (-1)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(0, y) = - \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi}{a} 0 \right) \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial v^2} u(a, y) &= (+1)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(0, y) = - \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a} \cdot 0\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} u(x, 0) &= (-1)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, 0) = - \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} \cdot 0\right) = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} u(x, b) &= (+1)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, b) = - \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} b\right) = 0.\end{aligned}$$

Podstawiając (a) i (b) do równania (4) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m} \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 + 2 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 \right] \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y = \\ = \sum_{n,m=1}^{\infty} f_{n,m} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y,\end{aligned}$$

skąd (metodą ortogonalizacji funkcjami $\sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y$) znajdujemy współczynniki $u_{k,l}$ w szeregu (a):

$$u_{k,l} = \frac{f_{k,l}}{\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2 \right]^2} = \frac{4a^3 b^3}{\pi^4 [(kb)^2 + (la)^2]^2} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y dx dy. \quad (d)$$

2. Zagadnienie brzegowo-początkowe drgań belki – sformułowanie klasyczne

Zagadnienie brzegowo-początkowe (w sformułowaniu klasycznym), o którym teraz mowa, polega na wyznaczeniu takiej funkcji $u(x, t)$, $(x, t) \in [a, b] \times [t_0, \infty)$, która spełnia tożsamościowo równanie różniczkowe (58), tj.

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in (a, b) \times (t_0, \infty) \quad (6)$$

oraz

1) warunki brzegowe – po dwa w każdym z końców $\tilde{x} = a$ i $\tilde{x} = b$ przedziału (a, b) dla $t \in [t_0, \infty)$ – w postaci (przykładowo):

$$a) \quad u(\tilde{x}, t) = \tilde{u}(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{x}, t) = \tilde{\varphi}(t),$$

$$b) \quad u(\tilde{x}, t) = \tilde{u}(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tilde{x}, t) = \tilde{\rho}(t),$$

$$c) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{x}, t) = \tilde{\varphi}(t), \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\tilde{x}, t) = \tilde{q}(t),$$

$$d) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tilde{x}, t) = \tilde{\rho}(t), \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\tilde{x}, t) = \tilde{q}(t),$$

gdzie $\tilde{u}(t)$, $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{\rho}(t)$, $\tilde{q}(t)$ dane (z założenia ciągłe) na $[t_0, \infty)$;

2) warunki początkowe (dwa) dla $x \in [a, b]$ – w postaci:

$$u(x, t_0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = v_0(x),$$

gdzie $u_0(x)$, $v_0(x)$ dane funkcje (z założenia ciągłe) na $[a, b]$,

3) przy spełnieniu warunków zgodności (przykładowo):

$$a) \tilde{u}(t_0) = u_0(\tilde{x}), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t_0) = v_0(\tilde{x}),$$

$$b) \tilde{\varphi}(t_0) = \frac{\partial u_0}{\partial x}(\tilde{x}), \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(t_0) = \frac{\partial v_0}{\partial x}(\tilde{x}).$$

Od funkcji $u = u(x, t)$ żądamy, by była:

- klasy C^4 względem zmiennej x na przedziale (a, b) dla każdej chwili $t \in (t_0, \infty)$,
- klasy C^2 względem zmiennej t na przedziale (t_0, ∞) dla każdej $x \in (a, b)$,
- klasy C^1 względem zmiennej t na przedziale $[t_0, \infty)$ dla każdej $x \in [a, b]$,
- klasy C^{l_a} względem zmiennej x na przedziale $[a, b)$ i klasy C^{l_b} względem zmiennej x na przedziale $(a, b]$ dla każdej chwili $t \in (t_0, \infty)$, przy l_a i l_b równym odpowiednio rzędowi maksymalnego pochodnej w warunku brzegowym w końcu $\tilde{x} = a$ i $\tilde{x} = b$.

Przykład. Znajdziemy rozwiązanie wyżej sformułowanego zagadnienia brzegowo-początkowego przy $f \equiv 0$ oraz przy warunkach brzegowych ($a = 0, b = l, t_0 = 0$):

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l, t) = 0, \quad t \in [0, \infty) \quad (a)$$

i warunkach początkowych 2) dla $x \in [0, l], t_0 = 0$.

Rozwiązanie tego zagadnienia przedstawia drgania swobodne belki swobodnie podpartej. Zastosujemy metodę spektralną. W tym celu najpierw wyznaczamy widmo częstości i postaci drgań własnych belki. Przyjmując $u(x, t) = U(x) \exp(i\omega t)$ otrzymujemy na podstawie równania różniczkowego jednorodnego (61) oraz warunków brzegowych (a) następujące zagadnienie spektralne:

$$\frac{d^4}{dx^4} U(x) = \lambda U(x), \quad x \in (0, l), \quad \lambda = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (b)$$

$$U(0) = U(l) = 0, \quad \frac{d^2 U}{dx^2}(0) = \frac{d^2 U}{dx^2}(l) = 0.$$

Przewidując rozwiązania równania (b) w postaci $U = \exp(kx)$ otrzymujemy równanie charakterystyczne $k^4 - \lambda = 0$, którego pierwiastkami są $k_{1,2} = \pm\alpha$, $k_{3,4} = \pm i\alpha$ ($i^2 = -1$) przy $\alpha = \sqrt{\omega/c}$, a więc

$$U = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x + C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x. \quad (c)$$

Na podstawie warunków brzegowych (b) otrzymujemy układ równań algebraicznych liniowych jednorodnych na stałe C_1, \dots, C_4 :

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0, & C_2 - C_4 &= 0, \\ C_1 \operatorname{sh} \alpha l + C_3 \sin \alpha l &= 0, & C_1 \operatorname{sh} \alpha l - C_3 \sin \alpha l &= 0, \end{aligned}$$

który ma rozwiązanie niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 \neq 0, \quad C_4 = 0, \\ \sin \alpha l = 0.$$

Tak więc (po przyjęciu $C_3 = 1$)

$$U = U_n = \sin \alpha_n x, \quad \alpha = \alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \omega = \omega_n = c\alpha_n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\lambda = \alpha_n^4), \quad (d)$$

przedstawiają częstotliwości (ω_n) i postacie (U_n) drgań własnych rozważanej belki.

W drugim kroku, zakładając, że szereg

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) U_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \alpha_n x \quad (e)$$

jest zbieżny punktowo i można go różniczkować „wyraz po wyrazie”, żądamy spełnienia przez wyrażenie (e) równania (6) oraz warunków początkowych 2). Mamy zatem (po uwzględnieniu (b) i (d)):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n(t) \frac{d^4 U_n(x)}{dx^4} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} U_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n^4 T_n(t) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} \right] U_n(x) = 0, \quad (f) \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) U_n(x) = u_0(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dT_n}{dt}(0) U_n(x) = v_0(x).$$

Mnożąc równości (f) przez $U_m(x)$ ($m = 1, 2, \dots$), całkując je w granicach $(0, l)$ i wykorzystując ortogonalność funkcji własnych (postaci drgań własnych), tj. fakt, że

$$\int_0^l U_n(x) U_m(x) dx = \int_0^l \sin \alpha_n x \sin \alpha_m x dx = \begin{cases} l/2, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (g)$$

otrzymujemy równości (po przemnożeniu stronami przez $2/l$)

$$\frac{d^2 T_m(t)}{dt^2} + \omega_m^2 T_m(t) = 0, \quad \omega_m = c \alpha_m^2, \quad (h-1)$$

$$\frac{dT_m}{dt}(0) = v_m^0, \quad T_m(0) = u_m^0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (h-2)$$

gdzie

$$u_m^0 = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) U_m(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \alpha_n x dx, \quad (i-1)$$

$$v_m^0 = \frac{2}{l} \int_0^l v_0(x) U_m(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l v_0(x) \sin \alpha_m x dx, \quad (i-2)$$

$$\alpha_m = m\pi/l.$$

Zagadnienie początkowe (h) dla równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego liniowego o stałych współczynnikach ma rozwiązanie następujące:

$$T_m = A_m \sin(\omega_m t) + B_m \cos(\omega_m t), \quad t \in [0, \infty) \quad (j-1)$$

$$B_m = u_m^0, \quad \omega_m A_m = v_m^0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (j-2)$$

a więc ostatecznie, zgodnie z (d), (e), (j), jest:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n^0 \cos \omega_n t + \frac{v_n^0}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin \alpha_n x, \quad t \in [0, \infty), \quad x \in [0, l], \quad (\text{k})$$

a w szczególności, zgodnie z 2)

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^0 \sin \alpha_n x, \quad v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^0 \sin \alpha_n x, \quad (\text{l})$$

gdyż $u_0(x), v_0(x)$ są ciągłe dla $x \in [0, l]$ i spełniają warunki zgodności $u_0(0) = u_0(l) = 0$, $v_0(0) = v_0(l) = 0$.

Przedstawiony w tym przykładzie sposób postępowania można wykorzystać także przy innych jednorodnych warunkach brzegowych – również przy $f(x,t) \neq 0$ (obciążenie dynamiczne na długości belki).

Zauważmy, że jeżeli we wzorach (i) przyjmiemy

$$u_0(x) = u^0 \sin \alpha_k x, \quad v_0(x) = 0, \quad x \in [0, l]$$

dla pewnego k , to na podstawie (g), (i), (k) wnioskujemy, że

$$u(x,t) = u^0 \cos \omega_k t \sin \alpha_k x, \quad t \in [0, \infty), \quad x \in [0, l],$$

czyli belka drga harmonicznie zgodnie z „ k -tą” częstością i postacią drgań własnych.

MMIL II

Część druga. RÓWNANIA

5. Sformułowania nieklasyczne zagadnień granicznych

5.1. Wprowadzenie

5.2. Nieklasyczne sformułowania zagadnienia brzegowego

1. Klasyczne sformułowanie globalne
2. Sformułowanie silne (mocne)
3. Sformułowanie słabe
4. Sformułowanie dystrybucyjne
5. Sformułowanie wariacyjne
6. Przykład rozwiązania zagadnienia Dirichleta na podstawie różnych sformułowań

5.3. Sformułowanie globalne zagadnienia brzegowo-początkowego

5.4. Sformułowanie dystrybucyjne zagadnienia początkowego

1. Przypadek równania zwyczajnego
2. Przypadek równania cząstkowego

5. SFORMUŁOWANIA NIEKLASYCZNE ZAGADNIENÍ GRANICZNYCH

5.1. Wprowadzenie

Prezentowane w rozdz. 4.3, p. 5-9, w rozdz. 4.4 także w rozdz. 3.3, zagadnienia graniczne stanowią pewien kanon i zrazem standard zagadnień, z jakimi naukowcy i inżynierowie z dziedziny inżynierii (nie tylko mechaniki konstrukcji) mogą mieć do czynienia. Zrazem jednak w bezpośrednich zastosowaniach praktycznych sformułowania klasyczne tych zagadnień ustąpiły miejsca tzw. sformułowaniom nieklasycznym, tj. tzw. silnym, słabym, wariacyjnym i dystrybucyjnym sformułowaniom globalnym, będącym podstawą metody elementów skończonych (na podstawie równania prac wirtualnych lub zasady stacjonarności energii potencjalnej), które dzięki rozwojowi technik komputerowych praktycznie opanowały tzw. obliczenia inżynierskie. Podstawowym powodem od strony metematemyczno-mechanicznej jest zdecydowanie większa adekwatność tych sformułowań do problemów, z jakimi mają do czynienia inżynierowie, a dokładniej z różnego typu nieciągłościami – zarówno po stronie obciążeń jak i rozkładu i właściwości materii.

W tym rozdziale zatem, na przykładzie równań rzędu drugiego, wychodząc ze sformułowań klasycznych, pokażemy pewną gamę sformułowań nieklasycznych, istotne cechy wspólne jaki i istotne różnice, a także warunki równoważności tych sformułowań, bazujące na fundamentalnym dla tych sformułowań lemacie du Bois-Reymonda i zilustrowane przykładami uzyskania rozwiązania na ich podstawie pewnego zagadnienia brzegowego, brzegowo-początkowego i początkowego, by uchwycić specyfikę każdego z prezentowanych sformułowań tych zagadnień. Niewątpliwie ich cechą wspólną jest ich globalność, która w pewnym momencie przyjmuje postać równania, które od strony interpretacji mechanicznej można nazwać wspólnym mianem równania prac wirtualnych (lub inaczej równania prac przygotowanych), którego ważnym atrybutem są tzw. funkcje próbne (od strony mechanicznej zwane na ogół przemieszczeniami wirtualnymi lub przygotowanymi lub próbnymi).

Sformułujemy teraz wspomniany lemat podstawowy sformułowań nieklasycznych.

Lemat (du Bois-Reymonda). Jeżeli $a \in C_n(Z)$ i dla dowolnej funkcji próbnej $v \in \overset{0}{C}_n(Z)$ jest $\int_Z a(x)v(x)dZ = 0$, przy odpowiednio rozumianej (określonej) całce typu Riemanna $\int_Z (...)dZ$, to $a \equiv 0$ na Z .

! Lemat ten jest prawdziwy także przy $Z = \mathcal{V}$ (obszar) i $v \in C_n^k(\mathcal{V})$.

5.2. Nieklasyczne sformułowania zagadnienia brzegowego

Rozważmy zagadnienie brzegowe dla równania różniczkowego liniowego rzędu drugiego (cząstkowego i zwyczajnego) w tzw. postaci dywergentnej (dość typowej w mechanice):

$$A_n^2 u(x) + A_n^1 u(x) = b(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V} \subset \mathcal{R}^n, \quad (1)$$

przy założeniu, że obszar (n wymiarowy) \mathcal{V} jest ograniczony, a jego brzeg $\partial\mathcal{V}$ składa się z płatów rozmaitości $n-1$ wymiarowych spełniających warunek Lipschitza oraz

$$A_n^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij}, \quad A_n^1 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij,i}(x) \partial_{ij}. \quad (2)$$

Zakładamy, że równanie (1) jest eliptyczne, tzn. forma

$$A_n^2(x; \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (3)$$

jest dodatnia dla $x \in \mathcal{V}$ i do równania (1) dołączamy warunek brzegowy mieszany

$$B_n u(\tilde{x}) \equiv \begin{Bmatrix} B_n^0 \\ B_n^1 \end{Bmatrix} u(\tilde{x}) = \begin{cases} \beta_0(\tilde{x}), & \tilde{x} \in S_0 \\ \beta_1(\tilde{x}), & \tilde{x} \in S_1 \end{cases} \equiv \beta(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \partial\mathcal{V}, \quad (4)$$

gdzie

$$B_n^0 = \text{id}, \quad B_n^1 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij,i}(\tilde{x}) \nu_i(\tilde{x}) \partial_{ij}, \quad S_0 \cap S_1 = \emptyset, \quad \bar{S}_0 \cup \bar{S}_1 = \partial\mathcal{V}, \quad (5)$$

przy czym $\nu(\tilde{x}) = (\nu_1(\tilde{x}), \dots, \nu_n(\tilde{x}))$ oznaczają wersory normalne do $\partial\mathcal{V}$ w punktach $\tilde{x} \in S_1$.

Warunek brzegowy na S_0 nosi również nazwę sztywnego warunku brzegowego, a na S_1 - naturalnego warunku brzegowego.

W notacji bezpośredniej mamy następujące zagadnienie brzegowe:

$$\sum_{i,j=1}^n [a_{ij}(x) u_{,j}(x)]_{,i} = b(x), \quad x \in \mathcal{V}, \quad (6)$$

$$u(\tilde{x}) = \beta_0(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_0, \quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}(\tilde{x}) \nu_i(\tilde{x}) u_{,j}(\tilde{x}) = \beta_1(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_1, \quad (7)$$

a w notacji symbolicznej (operatorowej)

$$K_n^2 u(x) = b(x), \quad x \in \mathcal{V}, \quad (8)$$

oraz

$$u(\tilde{x}) = \beta_0(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_0, \quad B_n^1(\tilde{x}) = \beta_1(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_1, \quad (9)$$

gdzie

$$K_n^2 = A_n^2 + A_n^1 = \sum_{i,j=1}^n \partial_i [a_{ij}(x) \partial_j(x)] \quad (10)$$

jest „sumarycznym” operatorem różniczkowym.

Podkreślimy jeszcze raz, bowiem w tym miejscu jest to szczególnie ważne, sformułowanie klasyczne zagadnienia brzegowego ma dwa szczególne atrybuty:

1) lokalność, tzn. równanie różniczkowe spełnione jest dla każdego x w obszarze \mathcal{V} , a warunki brzegowe dla każdego \tilde{x} brzegu $\partial\mathcal{V}$ tego obszaru lub prawie każdego \tilde{x} - tj. z wyjątkiem punktów „osobliwych” jak wierzchołki, krawędzie itp.;

2) wymaganie klasy regularności typu C_n^k , tj. do rzędu klasycznych pochodnych wielkości występujących w równaniu i w warunku brzegowym (w tym klasy C_n dla pochodnych rzędu zero, czyli ciągłości funkcji), w szczególności w odniesieniu do funkcji niewiadomej u .

1. Klasyczne sformułowanie globalne

Uwaga 1. W sformułowaniu klasycznym omawianego zagadnienia brzegowego zakładamy, że funkcja $b(x)$ jest klasy¹ $C_n(\mathcal{V})$, funkcje $\beta_0(\tilde{x})$ i $\beta_1(\tilde{x})$ są odpowiednio klasy $C_n(S_0)$ i $C_n(S_1)$, a funkcje (współczynniki) $a_{ij}(x)$ są klasy $C_n^1(\mathcal{V}) \cap C_n(\mathcal{V} \cup S_1)$. Natomiast od rozwiązania $u(x)$ wymagamy, by było klasy $C_n^2(\mathcal{V}) \cap C_n^1(\mathcal{V} \cup S_1) \cap C_n(\mathcal{V} \cup S_0)$.

Niech $v(x)$, $x \in \bar{\mathcal{V}}$ będzie dowolną funkcją ciągłą ($v(x)$ jest klasy $C(\bar{\mathcal{V}})$), zwaną funkcją próbną (lub funkcją testującą). Przemnożmy obie strony równości (8), (9) odpowiednio przez $v(x)$ i $v(\tilde{x})$, scałkujmy odpowiednio po \mathcal{V} i $\partial\mathcal{V}$ oraz dodajmy stronami. Otrzymujemy wtedy równanie:

$$\int_{\mathcal{V}} [K_n u(x) - b(x)] v(x) dV + \int_{S_0} [u(\tilde{x}) - \beta_0(\tilde{x})] v(\tilde{x}) dS + \int_{S_1} [B_n^1 u(\tilde{x}) - \beta_1(\tilde{x})] v(\tilde{x}) dS = 0, \quad \forall v \in C(\bar{\mathcal{V}}). \quad (11)$$

Możemy sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 1. Funkcja $u(x)$, $x \in \bar{\mathcal{V}}$ jest rozwiązaniem klasycznym zagadnienia brzegowego (8)-(9), wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej funkcji v klasy $C(\bar{\mathcal{V}})$ spełnione jest równanie (11)

Równanie (11) nazywamy równaniem globalnym klasycznego sformułowania zagadnienia brzegowego (8)-(9). Natomiast następujące zagadnienie: wyznaczyć funkcję u , która przy założeniach zawartych w Uwadze 1 (czyli przy założeniach klasycznego sformułowania zagadnienia brzegowego (8)-(9)) spełnia równanie (11) dla dowolnej funkcji próbnej v klasy $C(\bar{\mathcal{V}})$ - nosi nazwę klasycznego sformułowania globalnego zagadnienia brzegowego (8)-(9).

Podamy teraz (w drodze pewnego wyjątku) szkic dowodu twierdzenia 1 (bo jest ważny), a właściwie twierdzenia (\Leftrightarrow), bo dowód twierdzenia (\Rightarrow) jest oczywisty (jest nim informacja o sposobie otrzymania równania (11)).

Szkic dowodu Twierdzenia 1. Zauważmy, że:

! Jeżeli $v \in \overset{\circ}{C}_n^k(\mathcal{V})$, to $v(\tilde{x}) = 0$ dla $\tilde{x} \in \partial\mathcal{V}$, a ponadto $\partial^l v(\tilde{x}) / \partial v^l = 0$ dla $\tilde{x} \in S \subset \partial\mathcal{V}$, jeśli tylko określone są wersory normalne zewnętrzne $v(\tilde{x})$ dla $\tilde{x} \in S$ ($l = 1, \dots, k$).

¹ „jest klasy ...” oznacza tyle, co „jest elementem przestrzeni ...”

Jeżeli spełnione jest równanie (11) dla dowolnej $v \in C_n(\bar{\mathcal{V}})$, to również spełnione jest dla dowolnej $v \in \overset{\circ}{C}_n(\mathcal{V}) \subset C_n(\bar{\mathcal{V}})$. Ale wtedy, zgodnie z powyższą uwagą, równanie (11) redukuje się do postaci

$$\int_{\mathcal{V}} [K_n u(x) - b(x)] v(x) dV = 0,$$

a na mocy Lematu podstawowego z rozdz. 5.1 (przy $Z = \mathcal{V}$) jest

$$K_n u(x) - b(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{V}.$$

Skoro tak, to równanie (11) przyjmuje postać następującą:

$$\int_{S_0} [u(\tilde{x}) - \beta_0(\tilde{x})] v(\tilde{x}) dS + \int_{S_1} [B_n^1 u(\tilde{x}) - \beta_1(\tilde{x})] v(\tilde{x}) dS = 0,$$

także dla dowolnych funkcji v ciągłych na S_0 i S_1 o nośniku zawartym bądź w S_0 i S_1 . Wtedy też musi być

$$u(\tilde{x}) - \beta_0(\tilde{x}) = 0, \quad \forall \tilde{x} \in S_0, \quad B_n^1 u(\tilde{x}) - \beta_1(\tilde{x}) = 0, \quad \forall \tilde{x} \in S_1.$$

Tak więc spełnione są i równanie różniczkowe i warunki brzegowe w postaci lokalnej.

2. Sformułowanie silne (mocne)

Analizując postać równania (11) stwierdzamy, że pozostanie ono matematycznie poprawne przy nieco słabszych założeniach odnośnie niektórych jego elementów.

Uwaga 2. Wprowadźmy wielkości

$$s_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) u_{,j}(x), \quad x \in \mathcal{V}, \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

będące składowymi tzw. wektora strumienia lub napięcia $s(x) = (s_i(x))$ w obszarze \mathcal{V} . Wtedy równanie różniczkowe (6) i warunek brzegowy (7) można zapisać następująco

$$\sum_{i=1}^n s_{i,i}(x) = b(x), \quad x \in \mathcal{V}, \quad (13)$$

$$u(\tilde{x}) = \beta_0(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_0, \quad s(\tilde{x}) \cdot \nu(\tilde{x}) = \beta_1(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_1, \quad (14)$$

przy

$$s(\tilde{x}) \cdot \nu(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n s_i(\tilde{x}) \nu_i(\tilde{x}). \quad (15)$$

Przez sformułowanie globalne silne (zwane również mocnym) zagadnienia brzegowego (8)-(9) rozumiemy następujący problem (zadanie do rozwiązania): wyznaczyć w obszarze \mathcal{V} taką funkcję u klasy $C_n(\mathcal{V} \cup S_0)$, spełniającą sztywny warunek brzegowy (14)₁, klasy $C_n^1(\mathcal{V})$ o pochodnych $u_{,i}$ ($i = 1, \dots, n$) różniczkowalnych względem x_i ($i = 1, \dots, n$) prawie wszędzie na \mathcal{V} i prawie wszędzie ciągłych na $\mathcal{V} \cup S_1$ tak, by składowe strumienia (napięcia) s_i – określone za pomocą wzorów (12), przy funkcjach a_{ij} różniczkowalnych względem x_i ($i = 1, \dots, n$) prawie wszędzie na \mathcal{V} i prawie wszędzie ciągłych na $\mathcal{V} \cup S_1$ – były różniczkowalne względem x_i ($i = 1, \dots, n$) prawie wszędzie na \mathcal{V} , a jego dywergencja $\text{div } s = s_{i,i}$ była całkowna na \mathcal{V} , zaś iloczyn $s \cdot \nu$ określony wzorem (15) był całkowny na S_1 oraz by spełniały równanie

$$\int_{\mathcal{V}} [\operatorname{div} s(x) - b(x)] v(x) dV + \int_{S_1} [s(\tilde{x}) \cdot \nu(\tilde{x}) - \beta_1(\tilde{x})] v(\tilde{x}) dS = 0 \quad (16)$$

dla dowolnej funkcji próbnej $v \in C(\bar{\mathcal{V}})$, przy danych: β_0 ciągłej na S_0 , β_1 całkowalnej na S_1 i b całkowalnej na \mathcal{V} . Równanie (16), to silna postać zagadnienia brzegowego (8)-(9).

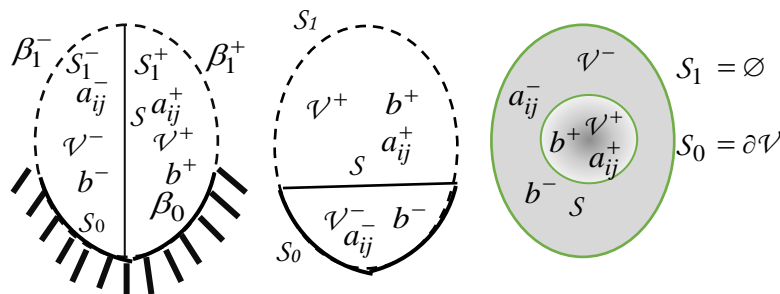
Twierdzenie 2. Przy założeniach sformułowanych w Uwadze 1 z p. 1 dotyczących sformułowania klasycznego zagadnienia brzegowego sformułowanie silne, polegające na spełnieniu równania (16) dla dowolnych funkcji próbnych ciągłych na $\bar{\mathcal{V}}$, jest równoważne sformułowaniu klasycznemu.

To dość oczywiste, gdyż przy założeniach z Uwagi 1 równanie (16) jest tylko innym zapisem równania (11), a więc zgodnie z twierdzeniem 1 z p. 1 mamy tę równoważność.

Przedstawimy teraz dwa przykłady skonkretyzowanego sformułowania silnego zagadnienia brzegowego – pierwszego bardzo praktycznego, odpowiadającego realnym sytuacjom w praktyce inżynierskiej, pokazującego praktyczny walor tego sformułowania, drugiego zaś strictly matematycznego, wykorzystującego przestrzenie Sobolewa, dla którego można wykazać istnienie i jednoznaczność rozwiązania tego zagadnienia.

Przykład 1. Niech \mathcal{V} będzie sumą dwóch (dla ustalenia uwagi) podobszarów \mathcal{V}^- i \mathcal{V}^+ w tym sensie, że $\bar{\mathcal{V}} = \bar{\mathcal{V}}^- \cup \bar{\mathcal{V}}^+$, a $\bar{\mathcal{V}}^- \cap \bar{\mathcal{V}}^+ = \bar{S}$ jest domknięciem rozmaitości $n-1$ wymiarowej S (odpowiednio hiperpowierzchni, powierzchni, krzywej). Niech S_0^- i S_0^+ będą dwoma płatkami rozmaitości S_0 , a S_1^- i S_1^+ będą dwoma płatkami rozmaitości S_1 , na które \bar{S} dzieli (hiper)powierzchnie / krzywe brzegowe S_0 i S_1 obszaru \mathcal{V} . Wtedy $\bar{S}_0^- \cup \bar{S}_0^+ = \bar{S}_0$, $S_0^- \cap S_0^+ = \emptyset$ oraz $\bar{S}_1^- \cup \bar{S}_1^+ = \bar{S}_1$, $S_1^- \cap S_1^+ = \emptyset$.

Podział obszaru \mathcal{V} na podobszary \mathcal{V}^- i \mathcal{V}^+ i jego konsekwencje może wynikać, w sensie praktycznym, z różnic materiałowych, reprezentowanych przez pewnego typu nieciągłości współczynników „materiałowych” a_{ij} przy „przejściu przez (hiper) powierzchnię / krzywą S lub nieciągłości „obciążenia” (źródła zjawiska) reprezentowanego przez funkcję b lub też nieciągłości „obciążenia brzegowego” (strumienia) reprezentowanego przez funkcję β_1 (raczej nie zakładamy nieciągłości warunku sztywnego, tj. funkcji β_0). W szczególności mogą zachodzić różne przypadki, w tym brak zbiorów S_0^- i S_0^+ lub S_1^- i S_1^+ .



Niech zatem

$$a_{ij}^- = a_{ij}|_{\mathcal{V}^-}, \quad a_{ij}^+ = a_{ij}|_{\mathcal{V}^+}, \quad b^- = b|_{\mathcal{V}^-}, \quad b^+ = b|_{\mathcal{V}^+}, \quad \beta_1^- = \beta_1|_{\mathcal{V}^-}, \quad \beta_1^+ = \beta_1|_{\mathcal{V}^+} \quad (17)$$

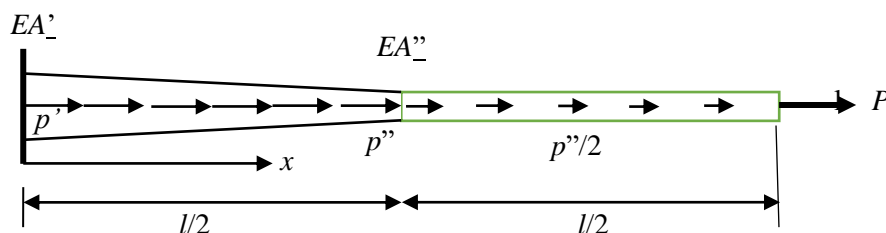
Zakładamy, że

$$\begin{aligned} - a_{ij}^- \in C_n^1(\mathcal{V}^-), \quad a_{ij}^+ \in C_n^1(\mathcal{V}^+), \quad a_{ij} \in C_n(\mathcal{V}), \quad a_{ij}^- \in C_n(\mathcal{V}^- \cup S_1^-), \quad a_{ij}^+ \in C_n(\mathcal{V}^+ \cup S_1^+), \quad (18) \\ - b^- \in C_n(\mathcal{V}^-), \quad b^+ \in C_n(\mathcal{V}^+), \quad \beta_0 \in C_n(S_0), \quad \beta_1^- \in C_n(S_1^-), \quad \beta_1^+ \in C_n(S_1^+). \end{aligned}$$

Przez silne zagadnienie brzegowe rozumiemy wyznaczenie takiej funkcji u w obszarze $\bar{\mathcal{V}}$, która spełnia sztywny warunek brzegowy (14) na części S_0 brzegu $\partial\mathcal{V}$, a ponadto jest klasy $C_n^2(\mathcal{V}^-) \cap C_n^2(\mathcal{V}^+) \cap C_n^1(\mathcal{V}) \cap C_n^1(\mathcal{V}^- \cup S_1^-) \cap C_n^1(\mathcal{V}^+ \cup S_1^+) \cap C_n(\mathcal{V} \cup S_0)$ oraz spełnia równanie (16) dla dowolnej funkcji próbnej $v \in C(\bar{\mathcal{V}})$.

Tytułem ilustracji tego sformułowania, rozważmy przykład pręta o długości l w osiowym stanie deformacji, określonym przez przemieszczenia wzdłużne $u(x)$, obciążonym siłami podłużnymi o gęstości liniowej $p(x)$, o zmiennej sztywności przekroju $EA(x)$, przy $x \in [0, l]$, o nieprzesuwным końcu $x = 0$ i obciążonym siłą osiową P w końcu $x = l$. Niech przy tym

$$EA(x) = \begin{cases} EA' - 2(EA' - EA'') \frac{x}{l}, & x \in (0, l/2) \\ EA'', & x \in (l/2, l) \end{cases}, \quad p(x) = \begin{cases} p' - 2(p' - p'') \frac{x}{l}, & x \in (0, l/2) \\ \frac{1}{2} p'', & x \in (l/2, l) \end{cases}. \quad (a)$$



Mamy zatem (przy $n = 1$):

$$\mathcal{V} = (0, l), \quad \mathcal{V}^- = (0, l/2), \quad \mathcal{V}^+ = (l/2, l), \quad S_0 = S_0^- = \{0\}, \quad S_1 = S_1^+ = \{l\}, \quad S = \{l/2\}, \quad (b)$$

$$\tilde{x} \in S_0 \Rightarrow \tilde{x} = 0, \quad \tilde{x} \in S_1 \Rightarrow \tilde{x} = l, \quad \tilde{x}_0 \in S \Rightarrow \tilde{x}_0 = l/2, \quad (c)$$

$$a_{11}(x) = a(x), \quad a^- = EA' - 2(EA' - EA'') \frac{x}{l}, \quad a^+ = EA'' \quad (\lim_{x \rightarrow \tilde{x}_0^-} a^-(x) = \lim_{x \rightarrow \tilde{x}_0^+} a^+(x) = EA''), \quad (d)$$

$$b = -p, \quad p^- = p' - 2(p' - p'') \frac{x}{l}, \quad p^+ = \frac{1}{2} p'' \quad (\lim_{x \rightarrow \tilde{x}_0^-} p^-(x) \neq \lim_{x \rightarrow \tilde{x}_0^+} p^+(x)), \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = P. \quad (e)$$

Spełnione są więc założenia (18).

Tak więc w tym przykładzie sformułowanie silne zagadnienia brzegowego brzmi następująco: wyznaczyć taką funkcję przemieszczeń $u = u(x)$, $x \in [0, l]$, spełniającą warunek brzegowy $u(0) = 0$, która jest ciągła na przedziale $[0, l]$, różniczkowalna w sposób ciągły na przedziale $(0, l]$, dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły na przedziałach $(0, l/2)$ i $(l/2, l)$ i która spełnia równanie (16), tj. równanie

$$\int_0^l \left[\frac{dS}{dx}(x) + p(x) \right] v(x) dx + [S(l) - P] v(l) = 0 \quad (f)$$

dla dowolnych funkcji $v = v(x)$, ciągłych na przedziale $[0, l]$, przy czym siła podłużna $S(x)$ wyraża się (zgodnie z (12), (15) i (d)) wzorem

$$S = EA(x) \frac{du}{dx}(x), \quad x \in [0, l] . \quad (g)$$

Wykorzystując Lemat podstawowy otrzymujemy z równania (f) równoważne mu relacje

$$\frac{dS}{dx}(x) + p(x) = 0, \quad x \in (0, l/2) \cup (l/2, l); \quad S(l) - P = 0, \quad (h)$$

które po scałkowaniu pierwszej z nich w granicach $[x, l]$ prowadzą do wyrażenia

$$S(x) = P + \int_x^l p(\xi) d\xi = \begin{cases} P + \frac{1}{4} p'' l + \frac{1}{2} \left[p' + p'' - 2(p' - p'') \frac{x}{l} \right] \left(\frac{l}{2} - x \right), & x \in [0, l/2) \\ P + \frac{1}{2} p'' (l - x), & x \in [l/2, l] \end{cases}, \quad (i)$$

będącej funkcją ciągłą na przedziale $[0, l]$. Wobec ciągłości $EA(x)$ wnioskujemy na podstawie wzoru (g), że

$$\frac{du}{dx} = \frac{S(l) + \int_x^l p(\xi) d\xi}{EA(x)} = \begin{cases} \frac{1}{EA' - 2(EA' - EA'') \frac{x}{l}} \left\{ P + \frac{1}{4} p'' l + \frac{1}{2} \left[p' + p'' - 2(p' - p'') \frac{x}{l} \right] \left(\frac{l}{2} - x \right) \right\}, & x \in [0, l/2) \\ \frac{P + p'' (l - x)}{EA''}, & x \in [l/2, l] \end{cases}, \quad (j)$$

a więc u jest klasy C^1 na przedziale $[0, l]$ i klasy C^2 na podprzedziałach $(0, l/2)$ i $(l/2, l)$, gdyż przy $x = l/2$ nie istnieje pochodna funkcji $EA(x)$.

Ogólnie, z pierwszego wzoru (j) wynika, że jeżeli p jest przedziałami ciągła (ze skokami w kilku punktach), a EA ciągła (ale przedziałami różniczkowalna z nieciągłościami pochodnej co najwyżej skokowymi w kilku punktach), to pochodne du/dx są ciągłe i przedziałami różniczkowalne w sposób ciągły, z pochodnymi drugiego rzędu z nieciągłościami co najwyżej typu skokowego, co wynika ze wzoru

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{S(l) + \int_x^l p(\xi) d\xi}{EA(x)} = - \frac{p(x) \cdot EA(x) + \int_x^l p(\xi) d\xi \cdot \frac{d}{dx} EA(x)}{[EA(x)]^2}. \quad (k)$$

Natomiast przemieszczenie u wyznaczamy, całkując wzór (j) w przedziale $[0, x]$ i uwzględniając warunek brzegowy $u(0) = 0$

$$u = \int_0^x \frac{S(l) + \int_\zeta^l p(\xi) d\xi}{EA(\zeta)} d\zeta. \quad (l)$$

Pozostawiamy Czytelnikowi przeanalizowanie możliwych konsekwencji przypadku (wykluczonego ze sformułowania silnego rozpatrywanego zagadnienia brzegowego), gdy $EA(x)$ jest funkcją nieciągłą, ale tylko z nieciągłością w postaci skoku w punkcie $x_0 \in (0, l)$, i będącą odrębnie klasy $C^1([0, x_0])$ i klasy $C^1([x_0, l])$.

Przykład 2. Skonkretyzujemy sformułowanie silne zagadnienia brzegowego (8)-(9) w postaci równania (16) (por. Uwaga 2) z wykorzystaniem przestrzeni Sobolewa i pochodnej uogólnionej (por. rodz. 1.1).

Niech $a_{ij} \in W_n^{\infty, \infty; 1, 1}(\mathcal{V} \cup S_1)$, $b \in L_n^p(\mathcal{V})$, $\beta_0 \in C_n(S_0)$, $\beta_1 \in L_n^q(S_1)$ Przez silne sformułowanie zagadnienia brzegowego (8)-(9) rozumiemy następujące zadanie: wyznaczyć taką funkcję u w obszarze $\bar{\mathcal{V}}$, spełniającą sztywny warunek brzegowy $u = \beta_0$ na S_0 , która jest klasy

$C_n(\mathcal{V} \cup S_0) \cap W_n^{\infty, q; 1, 1}(\mathcal{V} \cup S_1) \cap W_n^{p, 2}(\mathcal{V})$ oraz spełnia równanie

$$\int_{\mathcal{V}} [\operatorname{div} s - b] v dV + \int_{S_1} [s \cdot \nu - \beta_1] v dS = 0 \quad (19)$$

dla dowolnej funkcji próbnej v klasy $L_n^{p'}(\mathcal{V}) \cap C_n(S_0) \cap L_n^q(S_1)$, przy czym

$$s_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_j^{\infty, q; 1, 1} u, \quad s = (s_i), \quad \operatorname{div} s = \sum_{i=1}^n \partial_i^{p; 1} s_i, \quad \nu = (\nu_i), \quad s \cdot \nu = \sum_{i=1}^n s_i \nu_i, \quad (20)$$

$$1/p + 1/p' = 1, \quad 1/q + 1/q' = 1.$$

Wykazuje się, że tak sformułowane zagadnienie początkowe ma rozwiązanie i to dokładnie jedno.

3. Sformułowanie słabe

Powróćmy do równania (11) i załóżmy, że funkcja próbna $v \in C_n^1(\mathcal{V}) \cap C_n(\bar{\mathcal{V}})$ spełnia jednorodny sztywny warunek brzegowy $v = 0$ na zbiorze S_0 . Wtedy zgodnie z (10) mamy

$$\int_{\mathcal{V}} [K_n u(x)] v(x) dV = \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathcal{V}} \partial_i [a_{ij}(x) \partial_j u(x)] v(x) dV = \quad (21)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathcal{V}} \partial_i [a_{ij}(x) \partial_j u(x) v(x)] dV - \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathcal{V}} a_{ij}(x) \partial_j u(x) \partial_i v(x) dV.$$

Jeżeli spełnione są założenia tw. Ostrogradzkiego-Gaussa (m.in. wersory $\nu(\tilde{x})$ określone są prawie wszędzie na $\partial\mathcal{V}$), to

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\mathcal{V}} \partial_i [a_{ij} \partial_j u v] dV = \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial\mathcal{V}} \nu_i a_{ij} \partial_j u v dS = \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial S_0} \nu_i a_{ij} \partial_j u v dS +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial S_1} \nu_i a_{ij} \partial_j u v dS = \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial S_1} \nu_i a_{ij} \partial_j u v dS \quad (22)$$

Po uwzględnieniu (22) w (21), a (21) w (11) możemy to podsumować następującym twierdzeniem (na mocy Twierdzenia 1 z p. 1).

Twierdzenie 3. Przy założeniach sformułowania klasycznego zagadnienia brzegowego (8)-(9) (por. Uwaga z p. 1) funkcja u jest rozwiązaniem tego zagadnienia wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione jest równanie

$$\int_{\mathcal{V}} [\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_j u(x) \partial_i v(x) + b(x)v(x)] dV - \int_{\partial S_1} \beta_1(\tilde{x})v(\tilde{x}) dS = 0 \quad (23)$$

dla dowolnych funkcji v klasy $C_n^1(\mathcal{V}) \cap C_n(\bar{\mathcal{V}})$ spełniających jednorodny warunek brzegowy $v(\tilde{x}) = 0$, $\tilde{x} \in S_0$.

Uwzględniając (22) w (23) możemy powrócić do postaci (11).

Uwaga 3. Porównując równanie (23) z równaniem (16) możemy stwierdzić, że „kosztem” zawężenia przestrzeni funkcji próbnych $C_n(\bar{\mathcal{V}})$ do przestrzeni $C_n^1(\mathcal{V}) \cap C_n(\bar{\mathcal{V}})$ i przestrzeni $\overset{\circ}{V}_n(\bar{\mathcal{V}}) = \{v \in V_n(\bar{\mathcal{V}}); v(\tilde{x}) = 0 \forall \tilde{x} \in S_0 \subset \partial\mathcal{V}\}$ (na mocy kryterium podprzestrzeni), możliwe jest dalsze osłabienie założeń i wymagań wobec funkcji danych, a w konsekwencji wobec funkcji niewiadomej u .

Ma to istotne znaczenie dla adekwatności technicznej (inżynierskiej) postawionego zagadnienia brzegowego – z jednej strony, z drugiej strony zaś – wpływa pozytywnie na proces obliczeniowy funkcji u przy wykorzystaniu różnych metod obliczeniowych i komputerowych algorytmów obliczeniowych. Mianowicie, możliwe jest tzw. słabe sformułowanie rozpatrywanego zagadnienia brzegowego, którego ogólne (deklaratywne) określenie podajemy poniżej.

Przez słabe sformułowanie zagadnienia brzegowego (8)-(9) rozumiemy następujący problem: przy założeniu, że współczynniki a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) są funkcjami klasy C_n w podobszarach obszaru \mathcal{V} , z nieciągłościami tych funkcji co najwyżej skokowymi (nieciągłościami pierwszego rodzaju), funkcje „prawych stron” b i β_1 są odpowiednio całkowne na \mathcal{V} i S_1 , a β_0 jest ciągła na zbiorze S_0 , należy wyznaczyć taką funkcję u w zbiorze (afinicznym) $U_n(S_0) = \{u \in V_n(\bar{\mathcal{V}}) : u(\tilde{x}) = \beta_0 \forall \tilde{x} \in S_0\}$ klasy $C_n(\bar{\mathcal{V}})$, różniczkowalną na \mathcal{V} prawie wszędzie względem x_i ($i = 1, \dots, n$), o pochodnych całkownych na \mathcal{V} , która spełnia równanie (23) dla dowolnych funkcji próbnych z przestrzeni $\overset{\circ}{V}_n(\bar{\mathcal{V}})$ i klasy $C_n(\bar{\mathcal{V}}) \cap C_n^1(\mathcal{V})$ (a nawet tylko różniczkowalnych na \mathcal{V} prawie wszędzie względem x_i ($i = 1, \dots, n$), o pochodnych całkownych na \mathcal{V}).

Zrozumiała jest przy tym relacja pomiędzy sformułowaniem silnym i słabym zagadnienia brzegowego (choć jej uzasadnienie nie jest trywialne).

Twierdzenie 3a. Przy założeniach sformułowania silnego zagadnienia brzegowego (8)-(9) sformułowania silne i słabe są równoważne (dla tych samych funkcji próbnych).

Dalej, przedstawimy dwie skonkretyzowane realizacje sformułowania słabego zagadnienia brzegowego, analogiczne do tych z przykładów sformułowania silnego w p. 2.

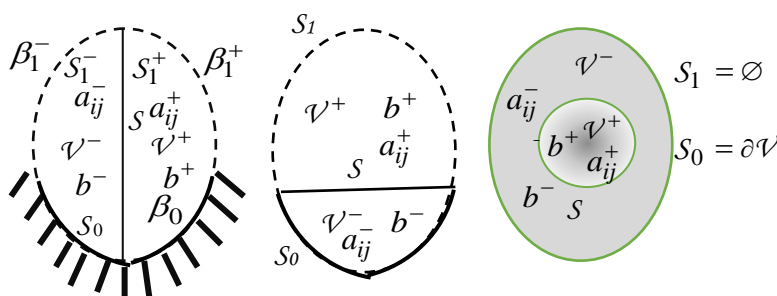
Przykład 1. Niech \mathcal{V} będzie sumą dwóch (dla ustalenia uwagi) podobszarów \mathcal{V}^- i \mathcal{V}^+ w tym sensie, że $\bar{\mathcal{V}} = \bar{\mathcal{V}}^- \cup \bar{\mathcal{V}}^+$, a $\bar{\mathcal{V}}^- \cap \bar{\mathcal{V}}^+ = \bar{S}$ jest domknięciem rozmaitości $n-1$ wymiarowej S (odpowiednio hiperpowierzchni, powierzchni, krzywej). Niech S_0^- i S_0^+ będą dwoma płaszczyznami

rozmaitości S_0 , a S_1^- i S_1^+ będą dwoma płacami rozmaitości S_1 , na które S dzieli (hiper)powierzchnie / krzywe brzegowe S_0 i S_1 obszaru \mathcal{V} . Wtedy $\bar{S}_0^- \cup \bar{S}_0^+ = \bar{S}_0$, $S_0^- \cap S_0^+ = \emptyset$ oraz $\bar{S}_1^- \cup \bar{S}_1^+ = \bar{S}_1$, $S_1^- \cap S_1^+ = \emptyset$.

Podział obszaru \mathcal{V} na podobszary \mathcal{V}^- i \mathcal{V}^+ i jego konsekwencje może wynikać, w sensie praktycznym, z różnic materiałowych, reprezentowanych przez skokowe nieciągłości współczynników „materiałowych” a_{ij} przy „przejściu przez (hiper) powierzchnię / krzywą S lub nieciągłości „obciążenia” (źródła zjawiska) reprezentowanego przez funkcję b lub też nieciągłości „obciążenia brzegowego” (strumienia) reprezentowanego przez funkcję β_1 (raczej nie zakładamy nieciągłości warunku sztywnego, tj. funkcji β_0). W szczególności mogą zachodzić różne przypadki, w tym brak zbiorów S_0^- i S_0^+ lub S_1^- i S_1^+ .

Niech zatem

$$a_{ij}^- = a_{ij}|_{\mathcal{V}^-}, \quad a_{ij}^+ = a_{ij}|_{\mathcal{V}^+}, \quad b^- = b|_{\mathcal{V}^-}, \quad b^+ = b|_{\mathcal{V}^+}, \quad \beta_1^- = \beta_1|_{\mathcal{V}^-}, \quad \beta_1^+ = \beta_1|_{\mathcal{V}^+} \quad (24)$$



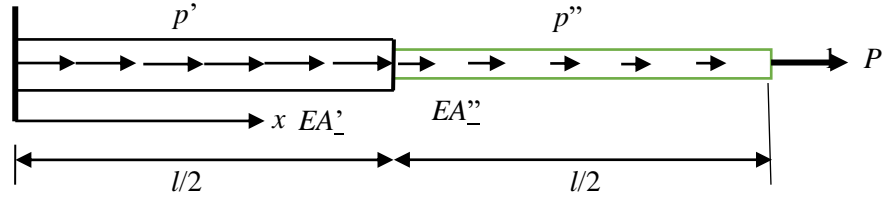
Zakładamy, że

$$\begin{aligned} - a_{ij}^- \in C_n^1(\mathcal{V}^-), \quad a_{ij}^+ \in C_n^1(\mathcal{V}^+), \quad a_{ij}^- \in C_n(\mathcal{V}^- \cup S_1^- \cup S), \quad a_{ij}^+ \in C_n(\mathcal{V}^+ \cup S_1^+ \cup S), \\ - b^- \in C_n(\mathcal{V}^-), \quad b^+ \in C_n(\mathcal{V}^+), \quad \beta_0 \in C_n(S_0), \quad \beta_1^- \in C_n(S_1^-), \quad \beta_1^+ \in C_n(S_1^+). \end{aligned} \quad (25)$$

Przez słabe zagadnienie brzegowe rozumiemy wyznaczenie takiej funkcji u w obszarze $\bar{\mathcal{V}}$, jest elementem zbioru $C_n^1(\mathcal{V}^- \cup S) \cap C_n^1(\mathcal{V}^+ \cup S) \cap C_n(\mathcal{V} \cup S_0) \cap U_n(S_0)$ oraz spełnia równanie (23) dla dowolnej funkcji próbnej z przestrzeni $\overset{\circ}{V}_n(\bar{\mathcal{V}}) \cap C_n^1(\mathcal{V}^- \cup S) \cap C_n^1(\mathcal{V}^+ \cup S) \cap C_n(\mathcal{V} \cup S_0)$. Przypomnijmy, że klasa $C_n^1(\mathcal{V}^- \cup S)$ itp. oznacza możliwość ciągłego przedłużenia pochodnych z obszaru \mathcal{V}^- na rozmaitość przyległą S .

Tytułem ilustracji tego sformułowania, rozważmy przykład pręta o długości l w osiowym stanie deformacji, określonym przez przemieszczenia wzdłużne $u(x)$, obciążonym siłami podłużnymi o gęstości liniowej $p(x)$, o zmiennej sztywności przekroju $EA(x)$, przy $x \in [0, l]$, o nieprzesuwnym końcu $x = 0$ i obciążonym siłą osiową P w końcu $x = l$. Niech przy tym

$$EA(x) = \begin{cases} EA', & x \in (0, l/2) \\ EA'', & x \in (l/2, l) \end{cases}, \quad p(x) = \begin{cases} p', & x \in (0, l/2) \\ p'', & x \in (l/2, l) \end{cases}. \quad (a)$$



Mamy zatem (przy $n = 1$):

$$\mathcal{V} = (0, l), \quad \mathcal{V}^- = (0, l/2), \quad \mathcal{V}^+ = (l/2, l), \quad S_0 = S_0^- = \{0\}, \quad S_1 = S_1^+ = \{l\}, \quad S = \{l/2\}, \quad (b)$$

$$\tilde{x} \in S_0 \Rightarrow \tilde{x} = 0, \quad \tilde{x} \in S_1 \Rightarrow \tilde{x} = l, \quad \tilde{x}_0 \in S \Rightarrow \tilde{x}_0 = l/2, \quad (c)$$

$$a_{11}(x) \stackrel{\text{ozn}}{=} a(x) = EA(x), \quad a^- = EA', \quad a^+ = EA'' \quad \left(\lim_{x \rightarrow \tilde{x}_0^-} a^-(x) \neq \lim_{x \rightarrow \tilde{x}_0^+} a^+(x) \right), \quad (d)$$

$$b = -p, \quad p^- = p', \quad p^+ = p'' \quad \left(\lim_{x \rightarrow \tilde{x}_0^-} p^-(x) \neq \lim_{x \rightarrow \tilde{x}_0^+} p^+(x) \right), \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = P. \quad (e)$$

Spełnione są więc założenia (25).

Tak więc w tym przykładzie sformułowanie słabe zagadnienia brzegowego brzmi następująco: wyznaczyć taką funkcję przemieszczeń $u = u(x)$, $x \in [0, l]$, spełniającą warunek brzegowy $u(0) = 0$, która jest ciągła na przedziale $[0, l]$, różniczkowalna w sposób ciągły na przedziałach $(0, l/2]$ i $[l/2, l]$ i która spełnia równanie (23), tj. równanie

$$\int_0^l \left[EA(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{d\nu}{dx}(x) - p(x)\nu(x) \right] dx - P\nu(l) = 0, \quad (f)$$

czyli zgodnie z (b)-(e) równanie

$$\int_0^{l/2} \left(EA' \frac{du}{dx} \frac{d\nu}{dx} - p' \nu \right) dx + \int_{l/2}^l \left(EA'' \frac{du}{dx} \frac{d\nu}{dx} - p'' \nu \right) dx - P\nu(l) = 0 \quad (g)$$

dla dowolnych funkcji przemieszczeń próbnych spełniających warunek brzegowy $\nu(0) = 0$, które są ciągłe na przedziale $[0, l]$ oraz różniczkowalne w sposób ciągły na przedziałach $[0, l/2]$ i $[l/2, l]$.

Założmy, że również du/dx jest różniczkowalna w sposób ciągły na przedziałach $[0, l/2]$ i $[l/2, l]$. Wtedy, stosując wzór na całkowanie przez części przekształcamy równanie do postaci

$$[S(l/2^+) - S(l/2^-)]\nu(l/2) - \int_0^{l/2} \left(\frac{dS}{dx} + p' \right) \nu dx - \int_{l/2}^l \left(\frac{dS}{dx} + p'' \right) \nu dx + (S(l) - P)\nu(l) = 0$$

gdzie

$$S = \begin{cases} EA' \frac{du}{dx}, & x \in [0, l/2] \\ EA'' \frac{du}{dx}, & x \in [l/2, l] \end{cases}, \quad (h)$$

Biorąc po uwagę warunek ciągłości

$$S(l/2^+) = S(l/2^-) \quad (i)$$

(na podstawie przesłanek fizycznych) otrzymujemy ostatecznie równanie

$$\int_0^l \left(\frac{dS}{dx} + p \right) \nu dx + (P - S(l))\nu(l) = 0. \quad (j)$$

Jest równanie, które można nazwać słabo-silnym sformułowaniem rozpatrywanego przykładu zagadnienia brzegowego – „słabo”, bo dla tej samej klasy funkcji próbnych co w sformułowaniu słabym, a „silnym”, bo dla tej samej postaci równania globalnego, co w sformułowaniu silnym tego zagadnienia, z pewnymi jednak różnicami co do założeń wobec wielkości danych i wymaganiami wobec funkcji niewiadomej. Konsekwencją tego sformułowania jest skokowa nieciągłość pochodnej funkcji przemieszczeń u przy skokowej nieciągłości charakterystyki materiałowej EA , wobec postulatu fizycznego ciągłości siły S (III prawo Newtona).

Przykład 2. Skonkretyzujemy teraz sformułowanie słabe zagadnienia brzegowego (8)-(9) w postaci równania (23) (por. Uwaga 3) z wykorzystaniem przestrzeni Sobolewa i pochodnej uogólnionej (por. rodz. 1.1).

Niech $a_{ij} \in L_n^\infty(\mathcal{V})$, $b \in L_n^p(\mathcal{V})$, $\beta_0 \in C_n(S_0)$, $\beta_1 \in L_n^q(S_1)$ Przez słabe sformułowanie zagadnienia brzegowego (8)-(9) rozumiemy następujące zadanie: wyznaczyć taką funkcję u w zbiorze $U_n(S_0)$, która jest klasy $C_n(\mathcal{V} \cup S_0) \cap W_n^{p;1}(\mathcal{V})$ oraz spełnia równanie

$$\int_{\mathcal{V}} [\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_j^{p;1} u(x) \partial_i^{p;1} v(x) + b(x)v(x)] dV - \int_{\partial S_1} \beta_1(\tilde{x})v(\tilde{x}) dS = 0 \quad (26)$$

dla dowolnej funkcji próbnej v z przestrzeni $\overset{\circ}{V}_n(S_0) \cap L_n^{p'}(\mathcal{V}) \cap C_n(S_0) \cap L_n^{q'}(S_1)$, przy $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$.

Szkic dowodu. Niech

$u = u_0 + w$, $u_0 \in U_n(S_0) \cap C_n(\mathcal{V} \cup S_0) \cap W_n^{p;1}(\mathcal{V})$, $w \in U^{p,q} = \overset{\circ}{V}_n(S_0) \cap L_n^p(\mathcal{V}) \cap C_n(S_0) \cap L_n^q(S_1)$ i niech

$$B(w, v) = \int_{\mathcal{V}} \sum_{i,j=1}^n [a_{ij}(x) \partial_j^{p;1} w(x) \partial_i^{p;1} v(x)] dV, \quad w \in U^{p,q}, \quad v \in U^{p',q'},$$

$$Lv = \int_{\partial S_1} \beta_1(\tilde{x})v(\tilde{x}) dS - \int_{\mathcal{V}} [\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_j^{p;1} u_0(x) \partial_i^{p;1} v(x) + b(x)v(x)] dV.$$

Otóż $B \in B^2(U^{p,q}, U^{p',q'}; \mathcal{R})$, $L \in B(U^{p',q'}; \mathcal{R})$, gdyż $U^{p,q}$, $U^{p',q'}$ są przestrzeniami liniowymi – podprzestrzeniami liniowymi domkniętymi przestrzeni $L_n^{p,q}(\mathcal{V} \cup S_1)$, $L_n^{p',q'}(\mathcal{V} \cup S_1)$. Wtedy równanie (26) można zapisać następująco $B(w, v) = Lv$, a na mocy uogólnionego twierdzenia Laxa-Milgrama $\exists! w \in U^{p,q} B(w, v) = Lv \forall v \in U^{p',q'}$.

4. Sformułowanie dystrybucyjne

Powróćmy do równania (23) i załóżmy, że warunek brzegowy jest jednorodny, tzn. $\beta_0 = 0$ na zbiorze S_0 i $\beta_1 = 0$ na zbiorze S_1 , zaś funkcja próbna $v \in C_n^2(\mathcal{V}) \cap C_n^1(\mathcal{V} \cup S_1) \cap C_n(\bar{\mathcal{V}})$ oraz spełnia jednorodny sztywny warunek brzegowy $v = 0$ na zbiorze S_0 . Wtedy mamy

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{,j} v_{,i} dV = 0. \quad (27)$$

Jeżeli spełnione są założenia tw. Ostrogradzkiego-Gaussa (m.in. wersory $\nu(\tilde{x})$ określone są prawie wszędzie na $\partial\mathcal{V}$), to

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \nu_i u_{,j} dV &= \int_{\mathcal{V}} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \nu_i u)_{,j} dV - \int_{\mathcal{V}} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \nu_i)_{,j} u dV = \\ &= \int_{\partial\mathcal{V}} \sum_{i,j=1}^n \nu_j a_{ij} \nu_i u dV - \int_{\mathcal{V}} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \nu_i)_{,j} u dV = \\ &= \int_{S_1} \sum_{j=1}^n u \sigma_j \nu_j dV - \int_{\mathcal{V}} \sum_{j=1}^n u \sigma_{j,j} dV = \int_{S_1} u \sigma \cdot \nu dV - \int_{\mathcal{V}} u \operatorname{div} \sigma dV, \end{aligned} \quad (28)$$

gdzie

$$\sigma \cdot \nu = \sum_{i=1}^n \sigma_i \nu_i \quad \sigma = (\sigma_i) = (\sum_{j=1}^n a_{ji} \nu_j), \quad \nu = (\nu_i); \quad (29)$$

wielkość σ można nazwać próbnym strumieniem (próbnym napięciem) w zbiorze $\mathcal{V} \cup S_1$.

Jeżeli dodatkowo założymy, że funkcje próbne spełniają warunek $\sum_{i,j=1}^n \nu_j a_{ij} \nu_i = \sigma \cdot \nu = 0$ (naturalny warunek brzegowy) na zbiorze S_1 , to równanie (27) otrzymuje postać

$$\int_{\mathcal{V}} (u \operatorname{div} \sigma + b u) dV = 0 \quad (30)$$

dla dowolnych u z przestrzeni

$$U_n^* = \{u \in C_n(\bar{\mathcal{V}}) \cap C_n^1(\mathcal{V} \cup S_1) \cap C_n^2(\mathcal{V}); u = 0 \text{ na } S_0, \sigma \cdot \nu = 0 \text{ na } S_1\} \quad (31)$$

Po uwzględnieniu (22) w (21), a (21) w (11) możemy to podsumować następującym twierdzeniem (na mocy Tw. 1 z p. 1 i Tw. 3 z p.3).

Twierdzenie 4. Przy założeniach sformułowania klasycznego zagadnienia brzegowego (8)-(9) (por. Uwaga z p. 1) oraz przy $\beta_0 = 0$ i $\beta_1 = 0$ funkcja u jest rozwiązaniem tego zagadnienia wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione jest równanie (30) dla dowolnych funkcji próbnych u z przestrzeni U_n^* określonej wzorem (31).

Uwaga 4. Równanie (30) jest poprawne przy następujących założeniach:

- funkcje a_{ij} i b są całkowalne na \mathcal{V} (także na podzbiorach \mathcal{V} miary V równej zero),

- funkcja u jest klasy $C_n(\bar{\mathcal{V}})$ i spełnia sztywny jednorodny warunek brzegowy na S_0 .

dla dowolnej u należącej do przestrzeni $U_n^*(\bar{\mathcal{V}})$ (a nawet dla funkcji u ciągłych na $\bar{\mathcal{V}}$, zerujących się na zbiorze S_0 różniczkowalnych prawie wszędzie na zbiorze $\mathcal{V} \cup S_1$ o pochodnych całkowalnych na tym zbiorze i różniczkowalnych prawie wszędzie na \mathcal{V} z próbnym strumieniem / napięciem o dywergencji całkowalnej na \mathcal{V} i zerowym prawie wszędzie w kierunku normalnej zewnętrznej na S_1).

Uzasadnia to następujące słabo-dystrybucyjne sformułowanie zagadnienia brzegowego (8)-(9) (przy $\beta_0 = 0$ i $\beta_1 = 0$) przy założeniach wymienionych wyżej w tej Uwadze: wyznaczyć taką funkcję u która spełnia równanie (30) dla dowolnej dopuszczalnej w tym sformułowaniu funkcji próbnej.

Porównując równanie (30) z równaniem (23) możemy stwierdzić, że „kosztem” zawężenia przestrzeni funkcji próbnych, możliwe jest dalsze osłabienie założeń i wymagań wobec funkcji danych, a w konsekwencji wobec funkcji niewiadomej u .

Ma to kolejne istotne znaczenie dla adekwatności technicznej (inżynierskiej) postawionego zagadnienia brzegowego. Mianowicie, możliwe jest określone wyżej (deklaratywnie) tzw. słabo-dystrybucyjne sformułowanie rozpatrywanego zagadnienia brzegowego. W szczególności, chodzi nie tylko o funkcje b z nieciągłościami pierwszego rodzaju na rozmaitościach $n-1$ wymiarowych o mierze V równej zero, ale o funkcje b dane na rozmaitościach r wymiarowych $S_r \subset \mathcal{V}$ ($r = 0, 1, \dots, n-1$; przy $r = 0$ punkty), dla których istnieją całki typu (w sensie dystrybucyjnym; cz. I rozdz. 5.4):

$$\int_{\mathcal{V}} b \nu dV = \int_{S_r} q_r \nu dS_r, \quad (32)$$

gdzie całka po stronie prawej powyższej równości jest (przy $r > 0$) całką Riemanna względem miary dS_r przy danej całkowlanej funkcji q_r (dla $r = 0$ jest całką w sensie Diraca).

Zrozumiała jest przy tym relacja pomiędzy sformułowaniem słabo-dystrybucyjnym zagadnienia brzegowego, a słabym (choć jej uzasadnienie nie jest trywialne).

Twierdzenie 4a. Przy założeniach sformułowania słabego zagadnienia brzegowego (8)-(9) sformułowania słabe i słabo-silne (przy $\beta_0 = 0$ i $\beta_1 = 0$) są równoważne (dla tych samych funkcji próbnych).

Dalej, przedstawimy dwie skonkretyzowane realizacje sformułowania dystrybucyjnego zagadnienia brzegowego, analogiczne do tych z przykładów sformułowania słabego w p. 3.

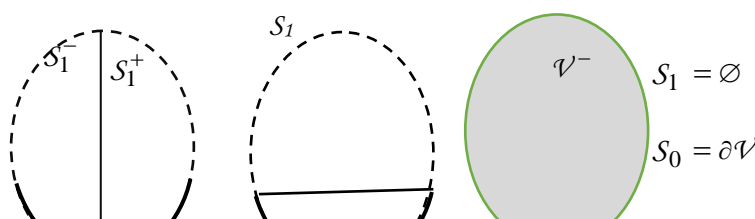
Przykład 1. Niech \mathcal{V} będzie (tak, jak w Przykładzie 1 z p.3) sumą dwóch (dla ustalenia uwagi) podobszarów \mathcal{V}^- i \mathcal{V}^+ w tym sensie, że $\bar{\mathcal{V}} = \bar{\mathcal{V}}^- \cup \bar{\mathcal{V}}^+$, a $\bar{\mathcal{V}}^- \cap \bar{\mathcal{V}}^+ = \bar{S}$ jest domknięciem rozmaitości $n-1$ wymiarowej S (odpowiednio hiperpowierzchni, powierzchni, krzywej). Niech S_0^- i S_0^+ będą dwoma płatkami rozmaitości S_0 , a S_1^- i S_1^+ będą dwoma płatkami rozmaitości S_1 , na które S dzieli (hiper)powierzchnie / krzywe brzegowe S_0 i S_1 obszaru \mathcal{V} . Wtedy $\bar{S}_0^- \cup \bar{S}_0^+ = \bar{S}_0$, $S_0^- \cap S_0^+ = \emptyset$ oraz $\bar{S}_1^- \cup \bar{S}_1^+ = \bar{S}_1$, $S_1^- \cap S_1^+ = \emptyset$.

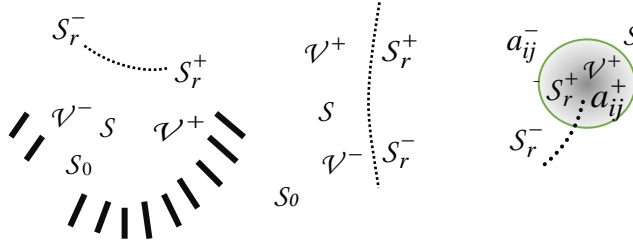
Podział obszaru \mathcal{V} na podobszary \mathcal{V}^- i \mathcal{V}^+ i jego konsekwencje może wynikać, w sensie praktycznym, z różnic materiałowych, reprezentowanych przez skokowe nieciągłości współczynników „materiałowych” a_{ij} przy „przejściu przez (hiper) powierzchnię / krzywą S .

Niech S_r będzie zawartą w obszarze \mathcal{V} r -wymiarową rozmaitością tak, że $S_r^- = S_r \cap \mathcal{V}^-$, $S_r^+ = S_r \cap \mathcal{V}^+$, a $\bar{S}_r = \bar{S}_r^- \cup \bar{S}_r^+$. Niech na rozmaitości S_r dana będzie całkowlana funkcja q_r względem miary dS_r .

Niech zatem

$$a_{ij}^- = a_{ij}|_{\mathcal{V}^-}, \quad a_{ij}^+ = a_{ij}|_{\mathcal{V}^+}, \quad b^- = b|_{\mathcal{V}^-}, \quad b^+ = b|_{\mathcal{V}^+}, \quad q_r^- = q_r|_{S_r^-}, \quad q_r^+ = q_r|_{S_r^+} \quad (33)$$





Zakładamy, że

$$\begin{aligned}
 & - a_{ij}^- \in C_n(\mathcal{V}^- \cup S_1^- \cup S), \quad a_{ij}^+ \in C_n(\mathcal{V}^+ \cup S_1^+ \cup S), \\
 & - q_r^- \in C_n(S_r^-), \quad q_r^+ \in C_n(S_r^+), \quad .
 \end{aligned} \tag{34}$$

Przez słabo-dystrybucyjne zagadnienie brzegowe rozumiemy wyznaczenie takiej funkcji u w obszarze $\bar{\mathcal{V}}$, która jest elementem przestrzeni $C_n(\bar{\mathcal{V}}) \cap \{u \in V_n(\bar{\mathcal{V}}); u = 0 \text{ na } S_0\}$ oraz spełnia równanie (30) dla dowolnej funkcji próbnej z przestrzeni U_n^{**} , tj. równanie

$$\int_{\mathcal{V}^-} u \operatorname{div} \sigma dV + \int_{\mathcal{V}^+} u \operatorname{div} \sigma dV + \int_{S_r^-} q_r^- v dS_r + \int_{S_r^+} q_r^+ v dS_r = 0 \tag{35}$$

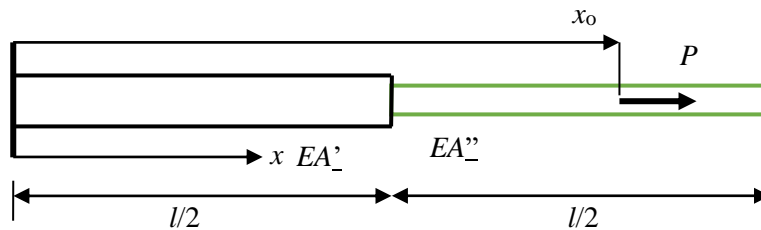
przy

$$\begin{aligned}
 U_n^{**} = \{ & v \in C_n(\bar{\mathcal{V}}) \cap C_n^1(\mathcal{V}^+ \cup S_1^+ \cup S) \cap C_n^2(\mathcal{V}^+) \cap \\
 & \cap C_n^1(\mathcal{V}^- \cup S_1^- \cup S) \cap C_n^2(\mathcal{V}^-); v = 0 \text{ na } S_0, \sigma \cdot \nu = 0 \text{ na } S_1 \}
 \end{aligned} \tag{36}$$

oraz σ określonym za pomocą (29).

Tytułem ilustracji tego sformułowania, rozważmy przykład pręta o długości l w osiowym stanie deformacji, określonym przez przemieszczenia wzdłużne $u(x)$, obciążonym siłami podłużnymi o gęstości liniowej $p(x)$, o zmiennej sztywności przekroju $EA(x)$, przy $x \in [0, l]$, o nieprzesuwym końcu $x = 0$ i obciążonym siłą osiową P w punkcie $x = x_0 \in (l/2, l)$. Niech przy tym

$$EA(x) = \begin{cases} EA', & x \in (0, l/2) \\ EA'', & x \in (l/2, l) \end{cases} . \tag{a}$$



Mamy zatem (przy $n = 1$ i $r = 0$):

$$\mathcal{V} = (0, l), \quad \mathcal{V}^- = (0, l/2), \quad \mathcal{V}^+ = (l/2, l), \quad S_0 = S_0^- = \{0\}, \quad S_1 = S_1^+ = \{l\}, \quad S = \{l/2\}, \tag{b}$$

$$x \in S_r \Rightarrow x = x_0, \quad \tilde{x}_0 \in S \Rightarrow \tilde{x}_0 = l/2, \tag{c}$$

$$\overset{\text{ozn}}{a_{11}(x)} = a(x) = EA(x), \quad a^- = EA', \quad a^+ = EA'' \quad \left(\lim_{x \rightarrow \tilde{x}_0^-} a^-(x) \neq \lim_{x \rightarrow \tilde{x}_0^+} a^+(x) \right), \tag{d}$$

$$q_r^- = 0, \quad q_r^+ = P . \tag{e}$$

Spełnione są więc założenia (34).

Tak więc w tym przykładzie sformułowanie słabo-dystrybucyjne zagadnienia brzegowego brzmi następująco: wyznaczyć taką funkcję przemieszczeń $u = u(x)$, $x \in [0, l]$, spełniającą warunek brzegowy $u(0) = 0$, która jest ciągła na przedziale $[0, l]$, i która spełnia równanie (35), tj. równanie

$$\int_0^l u(x) \frac{d\sigma}{dx}(x) dx + P v(x_0) = 0, \quad (f)$$

gdzie siła podłużna próbna wyraża się wzorem

$$\sigma(x) = \begin{cases} EA' \frac{dv}{dx}(x), & x \in (0, l/2) \\ EA'' \frac{dv}{dx}(x), & x \in (l/2, l) \end{cases} \quad (g)$$

dla dowolnej funkcji przemieszczeń próbnych spełniającej warunek brzegowy $v(0) = 0$, która jest ciągła na przedziale $[0, l]$ oraz różniczkowalna w sposób ciągły na przedziałach $[0, l/2]$ i $[l/2, l]$ oraz spełnia warunek brzegowy

$$\sigma(l) = EA'' \frac{dv}{dx}(l) = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx}(l) = 0. \quad (h)$$

Zatem także dla takiej funkcji v , że

$$\sigma(x) = \begin{cases} Q, & x \in (0, x_0] \\ 0, & x \in (x_0, l] \end{cases} \Rightarrow \quad (i)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}(x) = \begin{cases} \frac{Q}{EA'}, & x \in [0, l/2] \\ \frac{Q}{EA''}, & x \in (l/2, x_0] \\ 0, & x \in (x_0, l] \end{cases} \Rightarrow v = \begin{cases} \frac{Q}{EA'} x, & x \in [0, l/2] \\ \frac{Q}{EA'} \frac{l}{2} + \frac{Q}{EA''} \left(x - \frac{l}{2}\right), & x \in (l/2, x_0] \\ \frac{Q}{EA'} \frac{l}{2} + \frac{Q}{EA''} \left(x_0 - \frac{l}{2}\right), & x \in (x_0, l] \end{cases} \quad (j)$$

przy dowolnej wartości Q .

Nietrudno zauważyć, że taką postać również funkcja u przy $Q = P$. Potwierdza to równanie (f), które wobec (i), (j) oraz

$$\int_0^l u(x) \frac{d\sigma}{dx}(x) dx = u(x_0) \Delta\sigma(x_0)$$

prowadzi do równości

$$\left[\frac{P}{EA'} \frac{l}{2} + \frac{P}{EA''} \left(x_0 - \frac{l}{2}\right) \right] (-Q) + P \left[\frac{Q}{EA'} \frac{l}{2} + \frac{Q}{EA''} \left(x_0 - \frac{l}{2}\right) \right] = 0.$$

Przykład 2. Prezentowane sformułowanie zagadnienia brzegowego ma pewne znamiona sformułowania dystrybucyjnego, ale nim ściśle rzecz biorąc nie jest, gdyż zgodnie z definicją dystrybucji (w sensie Schwartza), żaden ze składników równania (30) jeszcze nią nie jest.

Jeśli jednak:

a) zważymy jeszcze przestrzeń funkcji próbnych do dziedziny dystrybucji jako funkcjonału,

tj. do przestrzeni $\overset{0}{D}_n^\infty(\mathcal{V}) \subset U_n^*(\bar{\mathcal{V}})$ (nośnik funkcji próbnej v jest zawsze dostatecznie „odległy” od brzegu obszaru \mathcal{V}),

b) potraktujemy zapis (32)

$$\int_{\mathcal{V}} b v dV = \int_{S_r} q_r v dS_r, \quad (37)$$

jako definicję funkcjonału liniowego (dystrybucji):

$$b^*: \overset{0}{D}_n^\infty(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{R}; \quad \langle\langle b^*, v \rangle\rangle = \int_{\mathcal{V}} b v dV \stackrel{\text{ozn}}{=} \int_{S_r} q_r v dS_r \quad (r = 1, \dots, n-1; \text{ dla } r=0 \text{ jest}$$

$$\int_{\mathcal{V}} b v dV \stackrel{\text{def}}{=} P v(x_0) \text{ lub } b(x) = P \delta(x - x_0) \text{ a dla } r=n \text{ jest } \int_{\mathcal{V}} b v dV \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{V}_0} q_n v dV \text{ przy}$$

$q_n \in I_n(\mathcal{V}_0)$, $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$); liniowość funkcjonału b^* pozwala łatwo uwzględnić kombinację tego typu „funkcji” b ,

c) przyjmiemy (przy założeniu, że współczynniki a_{ij} są dla ustalenia uwagi stałe w obszarze \mathcal{V}), że zapis (28))

$$\int_{\mathcal{V}} u \operatorname{div} \sigma dV = \int_{\mathcal{V}} u \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{,ij} dV \quad (38)$$

oznacza wartość pochodnej dystrybucyjnej dystrybucji przywiedlnej u^* , określonej przez funkcję generującą $u \in C_n(\bar{\mathcal{V}})$, tzn.

$$\langle\langle u^*, \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{,ij} \rangle\rangle = \int_{\mathcal{V}} u \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{,ij} dV = \int_{\mathcal{V}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij}^2 u \right) v dV = \langle\langle \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij}^2 u^*, v \rangle\rangle$$

możemy równanie (30) zapisać w postaci

$$\langle\langle u^*, \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{,ij} \rangle\rangle = \langle\langle b^*, v \rangle\rangle \quad (39)$$

a nawet w postaci stricte dystrybucyjnej

$$A_n^2 u^* = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij}^2 u^* = b^*, \quad (40)$$

gdzie $D_{ij}^2 u^*$ oznacza pochodną dystrybucyjną (cząstkową rzędu drugiego) dystrybucji u^* a

$D_{ij}^2 u$ pochodną uogólnioną (dystrybucyjną) funkcji generującej u . Natomiast przez

sformułowanie dystrybucyjne zagadnienia brzegowego (8)-(9) z jednorodnym (całkowicie) warunkiem brzegowym ($\beta_0 = 0$ i $\beta_1 = 0$) rozumiemy wyznaczenie takiej funkcji u , klasy

$u \in C_n(\bar{\mathcal{V}})$, zerującej się na części S_0 brzegu obszaru \mathcal{V} , która generuje dystrybucję przywiedlną u^* spełniającą równanie (40).

! Zauważmy, że operator A_n^2 w równaniu (40) jest co do postaci identyczny z operatorem A_n^2 w równaniu (por. (39)): $\langle\langle u, A_n^2 v \rangle\rangle = \langle\langle b^*, v \rangle\rangle$.

!! Zauważmy także, że można w pewien sposób osiągnąć w sformułowaniu dystrybucyjnym osiągnąć efekt niejednorodnego warunku brzegowego na części S_1 brzegu $\partial\mathcal{V}$, a mianowicie

przyjmując zgodnie z (37): $\langle\langle b^*, v \rangle\rangle = \int_{S_{n-1}} q_{n-1} v dS_{n-1}$, przy $q_{n-1} \rightarrow \beta_1$ i $S_{n-1} \rightarrow S_1$

(z granicą odpowiednio pomyślaną).

!!! Oznaczmy przez $G(x, x_0)$ rozwiązanie równania (40) przy $b^* = 1\delta(x - x_0)$. Jest to tzw. funkcja Greena. Jako funkcja x opisuje ona oczywiście pole u w obszarze \mathcal{V} przy jednostkowej dystrybucji δ Diraca w punkcie $x_0 \in \mathcal{V}$, a jako funkcja x_0 opisuje tzw. funkcję wpływu dystrybucji δ Diraca na wartość pola u w punkcie $x \in \mathcal{V}$. Przy tym prawdziwy jest wzór

$$u(x) = \int_{S_r} q_r(x_0) G(x, x_0) dS_r(x_0) \quad (41)$$

gdzie $u(\cdot)$ oznacza rozwiązanie zagadnienia brzegowego w postaci dystrybucyjnej (39) przy $\langle\langle b^*, v \rangle\rangle = \int_{S_r} q_r v dS_r$ dla dowolnej (dopuszczalnej) funkcji próbnej.

5. Sformułowanie wariacyjne

Inne w charakterze w porównaniu do sformułowań zagadnienia brzegowego przedstawionych w p. 1-4 jest sformułowanie wariacyjne, choć związane bezpośrednio, jak zobaczymy, ze sformułowaniem słabym.

Założmy zatem, że spełnione są wszystkie założenia dotyczące sformułowania słabego zagadnienia brzegowego (8)-(9) dotyczące obszaru \mathcal{V} , jego brzegu $\partial\mathcal{V}$, dywergentnej postaci równania różniczkowego, postaci mieszanego warunku brzegowego, współczynników a_{ij} w równaniu różniczkowym i w naturalnym warunku brzegowym na rozmaitości S_1 , funkcji danej b w równaniu różniczkowym oraz funkcji danych β_0 i β_1 w sztywnym i naturalnym warunku brzegowym na częściach S_0 i S_1 brzegu $\partial\mathcal{V}$.

Definiujemy funkcjonal J określony na zbiorze (afinicznym)

$$U_n = \{v \in C_n(\bar{\mathcal{V}}) \cap C_n^1(\mathcal{V} \cup S_1); v = \beta_0 \text{ na } S_0\} \quad (42)$$

o wartościach w zbiorze \mathcal{R} :

$$J(v) = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) v(x)_{,i} v(x)_{,j} + b(x) v(x) \right) dV - \int_{S_1} \beta_1(\tilde{x}) v(\tilde{x}) dS. \quad (43)$$

Z uwagi na eliptyczność formy $A_n^2(x; \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$, $x \in \mathcal{V}$, $\xi \in \mathcal{R}^n$ funkcjonal J ma minimum właściwe $J(u) = J_{\min}$ (tak jak zwykła funkcja $y = ax^2 + bx$, przy $a > 0$) w punkcie stacjonarności $u = u_{\text{stacj}}$ funkcjonału J , (tzn. $J_{\min} = J(u_{\text{stacj}})$) takim, że $\delta J(u_{\text{stacj}}) = 0$, gdzie $\delta J(u)$ jest wariacją funkcjonału J , tj. główną częścią przyrostu $J(u + \delta u) - J(u)$ tego funkcjonału, liniową względem przyrostu δu funkcji u , będącego elementem przestrzeni liniowej:

$$\overset{o}{U}_n = \{\delta u \in C_n(\bar{\mathcal{V}}) \cap C_n^1(\mathcal{V} \cup S_1); \delta u = 0 \text{ na } S_0\} \quad (44)$$

(na mocy kryterium podprzestrzeni, gdyż $u = \beta_0$ i $u + \delta u = \beta_0$ na S_0 implikuje $\delta u = 0$ na S_0).

Zatem jest

$$\begin{aligned}
J(u + \delta u) - J(u) &= \int_{\mathcal{V}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} [(u + \delta u)_{,i} (u + \delta u)_{,j} - u_{,i} u_{,j}] + \right. \\
&\quad \left. + b[(u + \delta u) - u] \right\} dV - \int_{S_1} \beta_1 [(u + \delta u) - u] dS = \\
&= \int_{\mathcal{V}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{,i} \delta u_{,j} + b \delta u \right) dV - \int_{S_1} \beta_1 \delta u dS + \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \delta u_{,i} \delta u_{,j} \right) dV
\end{aligned}$$

a więc

$$J(u) \delta u = \int_{\mathcal{V}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u(x)_{,i} \delta u(x)_{,j} + b(x) \delta u(x) \right) dV - \int_{S_1} \beta_1(\tilde{x}) \delta u(\tilde{x}) dS. \quad (45)$$

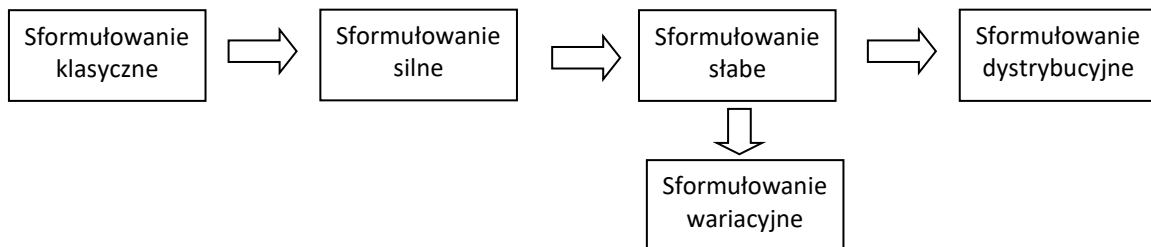
Ponieważ $J(u_{\text{stacj}} + \delta u) - J(u_{\text{stacj}}) > 0 \quad \forall \delta u \neq 0$, z powyższego wynika, że u_{stacj} spełnia równanie

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u(x)_{,i} \delta u(x)_{,j} + b(x) \delta u(x) \right) dV - \int_{S_1} \beta_1(\tilde{x}) \delta u(\tilde{x}) dS = 0 \quad (46)$$

dla dowolnego $\delta u \in \overset{0}{U}_n$, które przy $\delta u = v$ (funkcja próbna) pokrywa się z równaniem (23) sformułowania słabego zagadnienia brzegowego (8)-(9). Ponieważ, jeśli $J(u) = J_{\min}$, to $u = u_{\text{stacj}}$, możemy jako podsumowanie stwierdzić:

Twierdzenie 5. Przy założeniach sformułowania słabego zagadnienia brzegowego (8)-(9) minimum funkcjonału (43) jest osiągnięte dla funkcji u , która jest rozwiązaniem sformułowania słabego (słabym rozwiązaniem) tego zagadnienia.

Uwaga 5. Określona w Tw. 5 relacja do dotycząca funkcji u jako rozwiązania zagadnienia brzegowego i funkcji realizującej minimum funkcjonału upoważnia do następującej definicji:



przez sformułowanie wariacyjne zagadnienia brzegowego (8)-(9), przy założeniach dotyczących sformułowania słabego tego zagadnienia, rozumiemy następujący problem: wyznaczyć taką funkcję u ze zbioru funkcji dopuszczalnych (odpowiedniej klasy regularności i spełniających sztywny warunek brzegowy), dla której funkcjonał J , określony wzorem (43) osiąga minimum właściwe.

Zagadnienie to ma rozwiązanie przy założeniach dotyczących obszaru \mathcal{V} i wielkości danych, sformułowanych w Przykładzie 2 w p. 3, z wykorzystaniem przestrzeni Sobolewa jako klasy regularności funkcji u (która jest przestrzenią unormowaną, a wobec tego wariacja δJ funkcjonału J jest równa pochodnej Fréchet).

W szczególności, co ważne z praktycznego punktu widzenia, dotyczy to przypadku założeń sformułowanych w Przykładzie 1 w p. 3.

Zaletą sformułowania wariacyjnego w porównaniu ze sformułowaniem słabym zagadnienia brzegowego jest, zważywszy powyższy schemat relacji między różnymi sformułowaniem

tego zagadnienia, nie tylko możliwość wykorzystania metod i algorytmów jego rozwiązania na podstawie równań właściwych dla tych sformułowań, ale także wykorzystania wprost metod wyznaczania minimum funkcjonału.

Uwaga 6. Zdefiniowane w Uwadze 5 sformułowanie wariacyjne zagadnienia brzegowego może być punktem wyjścia do rozszerzenia go w kierunku zagadnień brzegowych z dodatkowymi warunkami. Sformułowania wariacyjne zagadnień granicznych stanowią podstawę działu matematyki zwanego rachunkiem wariacyjnym. Tytułem pewnej ilustracji rozważmy zadanie następujące.

Niech J będzie funkcjonałem określonym wzorem (43) na zbiorze (42) i niech

$$H = \int_{\mathcal{V}} h(x, u(x)) dV$$

będzie funkcjonałem o stałej wartości H przy danej funkcji ciągłej $h = h(x, u)$, $x \in \mathcal{V}$, $u \in U_n$ o ciągłej pochodnej $\partial h(x, u)/\partial u$, zwanym ograniczeniem na funkcję u . Niech

$$U_n^H = \{v \in C_n(\bar{\mathcal{V}}) \cap C_n^1(\mathcal{V} \cup S_1); \int_{\mathcal{V}} h(x, u(x)) dV = H, x \in \mathcal{V}; u(\tilde{x}) = \beta_0(\tilde{x}), \tilde{x} \in S_0\}.$$

Przez sformułowanie wariacyjne zagadnienia brzegowego na funkcję u w obszarze $\bar{\mathcal{V}}$ z ograniczeniem funkcjonałem H w tym obszarze, rozumiemy wyznaczenie w zbiorze $U_{n,m}^H$ takiej funkcji u , która minimalizuje funkcjonał J określony wzorem (42).

Twierdzenie 6. Jeżeli u jest rozwiązaniem wariacyjnego sformułowania zagadnienia brzegowego w obszarze $\bar{\mathcal{V}}$ z ograniczeniem funkcjonałem w tym obszarze, to istnieje taka liczba rzeczywista λ , zwana mnożnikiem Lagrange'a, że funkcja u jest punktem stacjonarności w zbiorze U_n funkcjonału zmodyfikowanego

$$\hat{J} = J + \lambda \int_{\mathcal{V}} h(x, u(x)) dV.$$

Zatem zgodnie z rozważaniami na wstępie tego punktu, przy założeniach sformułowania słabego rozpatrywanego zagadnienia i przyjętych wyżej założeniach dotyczących ograniczenia funkcjonałem H , funkcja u ze zbioru U_n^H spełnia równanie (por. (46))

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u(x)_{,i} \delta u(x)_{,j} + [b(x) + \lambda \partial h(x, u(x))/\partial u] \delta u(x) \right) dV +$$

$$- \int_{S_1} \beta_1(\tilde{x}) \delta u(\tilde{x}) dS = 0$$

dla dowolnych δu z przestrzeni liniowej

$$U_n^{\circ H} = \{\delta u \in C_n(\bar{\mathcal{V}}) \cap C_n^1(\mathcal{V} \cup S_1); \int_{\mathcal{V}} \partial h/\partial u(x, u(x)) \delta u(x) = 0, x \in \mathcal{V}; \delta u(\tilde{x}) = 0, \tilde{x} \in S_0\}.$$

6. Przykład rozwiązania zagadnienia Dirichleta na podstawie różnych sformułowań

W tym punkcie pokażemy jak korzystać z prezentowanych sformułowań zagadnienia brzegowego Dirichleta, które w postaci klasycznej składa się z równania Poissona w obszarze prostokątnym płaszczyzny xy z warunkiem brzegowym zerowania się niewiadomej funkcji na brzegu tego prostokąta, by uzyskać rozwiązanie wymienionego zagadnienia, przy

zastosowaniu metody podwójnych szeregów Fouriera.

Mamy zatem do rozwiązania zadanie wyznaczenia funkcji $u = u(x, y)$, która spełnia

- równanie różniczkowe eliptyczne

$$u_{,xx}(x, y) + u_{,yy}(x, y) + p(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{V} = (0, a) \times (0, b), \quad (47)$$

- sztywny warunek brzegowy jednorodny (Dirichleta)

$$u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad y \in [0, b], \quad (48-1)$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad x \in [0, a], \quad (48-2)$$

gdzie $p(x, y)$ funkcja dana. Rozwiązanie to poszukujemy w postaci szeregu podwójnego „sinusowo-sinusowego”

$$u(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y, \quad (49)$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b},$$

przy założeniu, że szereg ten jest punktowo zbieżny oraz, że można odpowiednio go różniczkować „wyraz po wyrazie”. Szereg ten bowiem spełnia warunki brzegowe (48).

Odnajdujemy, że prawie wszędzie na $\partial\mathcal{V}$, tj. z wyjątkiem wierzchołków $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, (a, b) , istnieje wektor normalny zewnętrzny do $\partial\mathcal{V}$: $\nu = (\mp 1, 0)$ lub $\nu = (0, \mp 1)$.

W stosunku do rozważań z p. 1-5 mamy: $n = 2$ oraz $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $b = -p$, $S_0 = \partial\mathcal{V}$, $S_1 = \emptyset$, $\beta_0 = 0$.

1) Rozwiązanie klasyczne

Jeżeli funkcja p jest ciągła na \mathcal{V} i przedziałami monotoniczna ze względu na x i y , to (zgodnie z twierdzeniem Dirichleta) szereg

$$p(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} p_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y, \quad (x, y) \in \mathcal{V} = (0, a) \times (0, b), \quad (50)$$

przy

$$p_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \, dx dy \quad (n, m = 1, 2, \dots) \quad (51)$$

jest zbieżny punktowo na \mathcal{V} . Ponadto (zgodnie z (47)) ciągły na \mathcal{V} i punktowo zbieżny jest szereg

$$u_{,xx} + u_{,yy} = -\sum_{n,m=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_m^2) u_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y, \quad (x, y) \in \mathcal{V} = (0, a) \times (0, b). \quad (52)$$

Z podstawienia (50) i (52) do (47) otrzymujemy

$$u_{nm} = \frac{p_{nm}}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \quad (n, m = 1, 2, \dots). \quad (53)$$

Oczywiście, jeśli zbieżny punktowo jest szereg (50), to również zbieżny punktowo i różniczkowalny wyraz po wyrazie jest szereg (49).

Przykładowo, jeśli $p(x, y) = p_0 = \text{const}$ dla $(x, y) \in (0, a) \times (0, b)$, to

$$p_{nm} = \frac{4}{ab} \frac{p_0}{\alpha_n \beta_m} [1 - (-1)^n][1 - (-1)^m].$$

2) Rozwiązanie klasyczne dla sformułowania globalnego

W tym przypadku zmienia się w stosunku do p. 1) jedynie postępowanie. Mianowicie wykorzystujemy równanie (11), które przyjmuje postać

$$\int_0^a \int_0^b [u_{,xx}(x, y) + u_{,yy}(x, y) + p(x, y)] v(x, y) dx dy = 0 \quad (54)$$

dla dowolnej funkcji $v(x, y)$ klasy $C_2(\bar{\mathcal{V}})$ zerującej się na obwodzie prostokąta \mathcal{V} , a więc w szczególności dla

$$v = v_{kl} \sin \alpha_k x \sin \beta_l y, \quad \forall k, l = 1, 2, 3, \dots \quad (55)$$

i dowolnych v_{kl} .

Podstawiając (49) i (55) do (54) otrzymujemy wobec dowolności v_{kl}

$$u_{kl} = \frac{p_{kl}}{\alpha_k^2 + \beta_l^2} \quad (k, l = 1, 2, \dots), \quad (56)$$

gdzie p_{kl} wyrażone są wzorami (51), a więc wzory identyczne ze wzorami (53). Wykorzystano przy tym równości (ortogonalność funkcji sinus)

$$\int_0^a \sin \alpha_n x \sin \alpha_k x dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ a/2, & n = k \end{cases}; \quad \int_0^b \sin \beta_m y \sin \beta_l y dy = \begin{cases} 0, & m \neq l \\ b/2, & m = l \end{cases}. \quad (57)$$

Wybór funkcji (55) okazał się wystarczający do jednoznacznego określenia współczynników (56), a więc do jednoznacznego rozwiązania omawianego zagadnienia brzegowego w sformułowaniu globalnym. Istnienie zaś tego rozwiązania jest uwarunkowane zbieżnością punktową szeregu (49), a więc przy założeniach dotyczących funkcji $p(x, y)$ jak w p. 1) jest zapewnione.

3) Rozwiązanie dla sformułowania silnego

W sformułowaniu silnym mamy tę samą postać równania (11), co w sformułowaniu globalnym klasycznym, nieco inaczej jedynie zapisaną, tj. w postaci (16), ale po uwzględnieniu odpowiednich związków przyjmuje ona w naszym zadaniu postać (54). Zmieniają się jedynie założenia dotyczące funkcji danych, tj. funkcji $p(x, y)$. Jeżeli pozostawimy tę samą postać (49) poszukiwanej funkcji $u(x, y)$ i ten sam wybór funkcji próbnych w postaci (55), to oczywiście otrzymamy te same wzory (56) na współczynniki u_{kl} . Zmiana założenia dotyczącego funkcji $p(x, y)$ polega na wymaganiu całkowalności i ograniczoności tej funkcji, co oczywiście jest zapewnione przez ciągłość na domkniętym ograniczonym obszarze $\bar{\mathcal{V}}$, ale jest do założenie zbyt silne. Jeżeli $p(x, y)$ jest tylko ograniczona i całkowalna, to istnieją całki (51), a ponadto

$$\exists A > 0 \mid |p_{nm}| \leq A \quad \forall n, m,$$

co zgodnie z (53) zapewnia zbieżność absolutną (nawet jednostajną) szeregu (49). Natomiast wykazanie możliwości dwukrotnego różniczkowania tego szeregu oraz sformułowanie

warunków, przy jakich $p(x, y)$ jest to możliwe, wymaga wykorzystania bardziej finezyjnego aparatu przestrzeni Sobolewa i teorii szeregów Fouriera.

4) Rozwiązanie dla sformułowania słabego

W tym przypadku punktem wyjścia jest równanie (23), które w rozważanym przykładzie przyjmuje postać (wszystkie wielkości w tym równaniu są funkcjami zmiennych (x, y))

$$\int_0^a \int_0^b (u_{,x} v_{,x} + u_{,y} v_{,y} - p v) dx dy = 0 \quad (58)$$

dla dowolnych funkcji v klasy $C_2^1(\mathcal{V}) \cap C_2(\bar{\mathcal{V}})$ spełniającej warunki brzegowe (48) (przy $u = v$), a więc w szczególności dla v postaci (55), która czyni zadość tym wymaganiom.

Nadal poszukujemy rozwiązania zagadnienia w postaci (49), zakładając tylko jednokrotną ich różniczkowalność. Zatem mamy

$$u_{,x} = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm} \alpha_n \cos \alpha_n x \sin \beta_m y, \quad u_{,y} = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm} \beta_m \sin \alpha_n x \cos \beta_m y, \quad (59-1)$$

$$v_{,x} = v_{kl} \alpha_k \cos \alpha_k x \sin \beta_l y, \quad v_{,y} = v_{kl} \beta_l \sin \alpha_k x \cos \beta_l y. \quad (59-2)$$

Po podstawieniu (59) i (55) do równania (58) i po uwzględnieniu (51) i (57) oraz (ortogonalność funkcji cosinus)

$$\int_0^a \cos \alpha_n x \cos \alpha_k x dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ a/2, & n = k \end{cases}; \quad \int_0^b \cos \beta_m y \cos \beta_l y dy = \begin{cases} 0, & m \neq l \\ b/2, & m = l \end{cases}. \quad (60)$$

otrzymujemy

$$\frac{ab}{4} (\alpha_k^2 + \beta_l^2) u_{kl} v_{kl} = \frac{ab}{4} p_{kl} v_{kl} \quad (k, l = 1, 2, \dots), \quad (61)$$

skąd, wobec dowolności v_{kl} , wynikają również wzory (56). Jest to zrozumiałe, bo dotyczy tego samego zagadnienia, tylko inaczej sformułowanego. Rzecz idzie w tym, na ile słabsze mogą być wymagania wobec funkcji $p(x, y)$, by określone za pomocą wzorów (56) współczynniki u_{nm} zezwalały na jednokrotne i tylko jednokrotne różniczkowanie szeregu (49).

Dla pewnej ilustracji przyjmijmy przykładowo

$$p(x, y) = \begin{cases} p_0, & (x, y) \in \mathcal{V}' = (0, a/2) \times (0, b/2) \\ 0, & (x, y) \in \mathcal{V} - \mathcal{V}' \end{cases}.$$

Funkcja nie spełnia założeń sformułowania klasycznego, ale spełnia założenia sformułowania słabego. Na podstawie (51) obliczamy

$$p_{nm} = \frac{4p_0}{ab} \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y dx dy = \frac{4p_0}{ab} \frac{1}{\alpha_n \beta_m} \left(1 - \cos \frac{\pi n}{2}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi m}{2}\right).$$

Ostatecznie, po uwzględnieniu powyższego w (53), a następnie w (49) otrzymujemy

$$u(x, y) = \frac{4p_0}{ab} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \cos \frac{\pi n}{2}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi m}{2}\right)}{\alpha_n \beta_m (\alpha_n^2 + \beta_m^2)} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y.$$

Szereg ten jest bezwzględnie zbieżny na prostokącie \mathcal{V} , ale zgodnie z (47) suma $u_{,x}(x, y) + u_{,y}(x, y)$ jest nieciągła na \mathcal{V} , a więc ze zbieżnością szeregu

$$u_{,xx} + u_{,yy} = -\frac{4p_0}{ab} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \cos \frac{\pi n}{2}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi m}{2}\right)}{\alpha_n \beta_m} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \text{ może być kłopot.}$$

5) Rozwiązanie dla sformułowania wariacyjnego

Rozwiązanie naszego zagadnienia brzegowego na podstawie tego sformułowania jest identyczne z rozwiązaniem na podstawie sformułowania słabego w zakresie postaci i założeń (wymagań) dotyczących funkcji $p(x, y)$ oraz zbieżności szeregu (49) i jego różniczkowalności wyraz po wyrazie. Inny jest natomiast sposób otrzymania tego rozwiązania, a ściślej współczynników u_{nm} w szeregu (49).

Mianowicie, poszukujemy minimum funkcjonału (43), który w rozważanym przykładzie przedstawia się następująco:

$$J(u) = \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{1}{2} [(u_{,x})^2 + (u_{,y})^2] - pu \right\} dx dy. \quad (62)$$

Uwzględniając (49) oraz wykonując całkowanie, przy wykorzystaniu (60) otrzymujemy

$$J = \frac{ab}{8} \sum_{n,m=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_m^2) u_{nm}^2 - \frac{ab}{4} \sum_{n,m=1}^{\infty} p_{nm} u_{nm} \quad (63)$$

gdzie p_{nm} są określone również wzorami (51). Z warunku koniecznego minimum – warunku stacjonarności funkcjonału (63):

$$\frac{\partial J}{\partial u_{kl}} = 0, \quad k, l = 1, 2, \dots$$

otrzymujemy:

$$(\alpha_k^2 + \beta_l^2) u_{kl} - p_{kl} = 0, \quad (64)$$

skąd znajdujemy wyrażenia na u_{kl} identyczne jak (56).

4) Rozwiązanie dla sformułowania dystrybucyjnego

W tym przypadku punktem wyjścia jest równanie (27), które w rozważanym przykładzie ma postać:

$$\int_0^a \int_0^b [u(v_{,xx} + v_{,yy}) + p v] dx dy = 0 \quad (65)$$

dla dowolnej funkcji v klasy $C_2^2(\mathcal{V}) \cap C_2^1(\bar{\mathcal{V}})$ (klasy $C_2^1(\bar{\mathcal{V}})$ z wyjątkiem wierzchołków prostokąta \mathcal{V}), zerującej się na obwodzie $\partial\mathcal{V}$, a więc w szczególności dla v określonych wzorem (55).

Rozwiązania u (klasy $C_2(\bar{\mathcal{V}})$), spełniającej warunki brzegowe (48), poszukujemy też w postaci szeregu (49). Zatem na podstawie równania (65) otrzymujemy:

$$-\frac{ab}{4} u_{kl} v_{kl} (\alpha_k^2 + \beta_l^2) + \frac{ab}{4} p_{kl} v_{kl} = 0 \quad (k, l = 1, 2, \dots), \quad (66)$$

gdzie p_{kl} wyrażone są wzorami (51), a v_{kl} dowolnymi współczynnikami. W efekcie współczynniki u_{kl} również wyrażają się wzorami (56). Również w tym przypadku wybór

funkcji testowych (55) jest wystarczający dla uzyskania jednoznacznego rozwiązania rozważanego zagadnienia brzegowego, natomiast dla istnienia rozwiązania ciągłego wystarczy zbieżność punktowa szeregu (49), a więc tylko istnienie funkcjonału liniowego

$$p^* \nu = \int_0^a \int_0^b p \nu dx dy, \text{ nawet jako zapisu formalnego.}$$

Gdy p^* jest dystrybucją Diraca, tzn. $p = P\delta(x - x_0, y - y_0)$, to zgodnie z (51)

$$p_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P\delta(x - x_0, y - y_0) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y dx dy = \frac{4}{ab} P \sin \alpha_n x_0 \sin \beta_m y_0,$$

a więc

$$u_{nm} = \frac{4}{ab} \frac{P}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \sin \alpha_n x_0 \sin \beta_m y_0,$$

a w konsekwencji zgodnie z (49) i (52) jest

$$u = \frac{4P}{ab} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x_0 \sin \beta_m y_0}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y,$$

$$u_{,xx} + u_{,yy} = -\frac{4P}{ab} \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin \alpha_n x_0 \sin \beta_m y_0 \sin \alpha_n x \sin \beta_m y.$$

Pierwszy z powyższych szeregów jest zbieżny (nawet absolutnie), a drugi rozbieżny. Kłopoty ze zbieżnością mamy już w przypadku szeregów

$$u_{,x} = \frac{4P}{ab} \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\sin \alpha_n x_0 \sin \beta_m y_0}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \cos \alpha_n x \sin \beta_m y,$$

$$u_{,y} = \frac{4P}{ab} \sum_{n,m=1}^{\infty} \beta_m \frac{\sin \alpha_n x_0 \sin \beta_m y_0}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \sin \alpha_n x \cos \beta_m y,$$

co wyklucza zastosowanie w tym przykładzie sformułowania słabego i wariacyjnego, a tym bardziej sformułowania klasycznego.

7) Krótkie podsumowanie

Jak wynika z przedstawionych w tym przykładzie rozważań, bez względu na sformułowanie zagadnienia brzegowego Dirichleta wynik rozwiązania tego zagadnienia jest taki sam, o ile zawsze poszukujemy rozwiązania w tej samej postaci i zbiór funkcji próbnych jest identyczny. Możemy więc bez względu na sformułowanie zagadnienia, wybrać sformułowanie najdogodniejsze dla poszukiwania rozwiązania. Problem zaczyna się wtedy, gdy trzeba określić czy dla danej funkcji p można wyznaczyć pochodne otrzymanej funkcji u .

5.3. Sformułowanie globalne zagadnienia brzegowo-początkowego

Tytułem przykładu rozważmy zagadnienie brzegowo-początkowe dla równania parabolicznego

$$u_{,xx}(x,t) - a^2 u_{,t}(x,t) + q(x,t) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T), \quad (1)$$

z warunkami brzegowymi:

- sztywnym w końcu $x = 0$

$$u(0,t) = \beta_0(t), \quad t \in (0,T), \quad (2)$$

- naturalnym w końcu $x = l$

$$u_{,x}(l,t) = \beta_l(t), \quad t \in (0,T), \quad (3)$$

oraz z warunkiem początkowym:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,l]. \quad (4)$$

Zauważmy, że zagadnienie to formułujemy w obszarze prostokątnym $[0,l] \times [0,T]$ - z tym, że w odróżnieniu od zagadnienia brzegowego z rozdz. 5.2, warunki graniczne stawiamy jedynie na trzech bokach tego prostokąta. A nawet gdyby w równaniu różniczkowym był operator drugiej pochodnej względem zmiennej t (równanie zamiast parabolicznego byłoby hiperboliczne), to czwarty warunek graniczny byłby dodatkowym warunkiem początkowym na boku o orientacji czasowej ($t = 0, x \in [0,l]$).

Niech $v = v(x,t)$ będzie funkcją ciągłą (klasy C) na zbiorze $[0,l] \times [0,T]$. Mnożymy stronami równanie (1) przez $v(x,t)$, przy $(x,t) \in (0,l) \times (0,T)$, a warunki brzegowe (2), (3) odpowiednio przez $v(0,t)$, przy $t \in (0,T)$, zaś warunek początkowy (4) mnożymy przez $a^2 v(x,0)$, przy $x \in [0,l]$. Następnie otrzymane równości całkujemy odpowiednio względem x po przedziale $(0,l)$, względem t po przedziale $(0,T)$ otrzymując:

$$\int_0^T \left\{ \int_0^l [u_{,xx}(x,t) - a^2 u_{,t}(x,t) + q(x,t)] v(x,t) dx \right\} dt - \int_0^T [u_{,x}(l,t) - \beta_l(t)] v(l,t) dt + \quad (5)$$

$$+ \int_0^T [u(0,t) - \beta_0(t)] v(0,t) dt + a^2 \int_0^l [u(x,0) - u_0(x)] v(x,0) dt = 0.$$

Zauważmy, że w wyniku powyższej operacji żaden z wierzchołków nie został uwzględniony dwukrotnie, dlatego (formalnie rzecz biorąc) nie stawiamy w tym zagadnieniu warunków zgodności warunków brzegowych z warunkiem początkowym. Będą one naturalnym wynikiem wymagań (założeń) dotyczących klasy regularności niewiadomej funkcji $u(x,t)$.

Przez sformułowanie globalne klasycznego zagadnienia brzegowo-początkowego (108) – (112) rozumiemy następujące zadanie: wyznaczyć funkcję $u(x,t)$, $(x,t) \in [0,l] \times [0,T]$

- klasy C względem (x,t) na zbiorze $[0,l] \times [0,T]$,
- klasy C^2 względem x na zbiorze $(0,l)$ dla każdej $t \in (0,T)$, o pochodnej $u_{,xx}(x,t)$ ciągłej względem (x,t) na zbiorze $(0,l) \times (0,T)$,
- klasy C^1 względem x na zbiorze $(0,l]$ dla każdej $t \in (0,T)$, o pochodnej $u_{,x}(l,t)$ ciągłej względem t na zbiorze $(0,T)$,
- klasy C^1 względem t na zbiorze $(0,T)$ dla każdego $x \in (0,l)$, o pochodnej $u_{,t}(x,t)$ ciągłej względem (x,t) na zbiorze $(0,l) \times (0,T)$,

przy założeniu, że

- $q(x,t)$ jest ciągła względem (x,t) na zbiorze $(0,l) \times (0,T)$,
- $\beta_0(t)$ i $\beta_l(t)$ są ciągłe na przedziale $(0,T)$,
- $u_0(x)$ jest ciągła na przedziale $[0,l]$,

która to funkcja $u(x,t)$ spełnia równanie (5) dla dowolnej funkcji $v(x,t)$ klasy C względem (x,t) na zbiorze $[0,l] \times [0,T]$.

Wymagania a) i c) implikują następujące warunki zgodności danych w warunkach zgodności warunków brzegowych z warunkiem początkowym:

$$u_0(0) = \beta_0(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \beta(t), \quad u_0'(l) = \lim_{x \rightarrow l} u_0'(x) = \beta_l(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \beta_l(t), \quad (6)$$

przy czym powyżej i dalej stosować będziemy oznaczenia $(\dot{\times})$, $(\dot{\times})'$ na pochodną funkcji względem zmiennej t i x .

Uwaga. Wychodząc z równania (5) można, przez zastosowanie formuły całkowania przez części, otrzymywać (analogicznie jak w p.2-4 w rozdz. 5.2) inne niż powyższe sformułowania globalne zagadnienia brzegowo-początkowego (1)-(4) (przy słabszych założeniach i wymaganiach odnośnie występujących w tych sformułowaniach wielkości danych i niewiadomej funkcji $u(x,t)$ oraz przy odpowiednio zawężonej klasie funkcji próbnych $v(x,t)$).

Rozwiązania $u(x,t)$ rozważanego zagadnienia na podstawie równania (5) poszukujemy w postaci

$$u(x,t) = u_\beta(x,t) + u^*(x,t), \quad (7)$$

gdzie

$$u_\beta(0,t) = \beta_0(t), \quad \frac{\partial u_\beta}{\partial x}(l,t) = \beta_l(t) \quad (8-1)$$

$$u^*(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial x}(l,t) = 0. \quad (8-2)$$

Warunkom (8-1) czyni zadość funkcja

$$u_\beta(x,t) = \beta_0(t) + \beta_l(t)x. \quad (9)$$

Zatem nieznaną funkcję $u^*(x,t)$ powinna zgodnie z (5), (7) spełniać równanie

$$\int_0^T \left\{ \int_0^l [u^*_{,xx}(x,t) - a^2 u^*_{,t}(x,t) + q^*(x,t)] v(x,t) dx \right\} dt - \int_0^T u^*_{,x}(l,t) v(l,t) dt + \int_0^T u^*(0,t) v(0,t) dt + a^2 \int_0^l [u^*(x,0) - u_0^*(x)] v(x,0) dt = 0 \quad (10)$$

dla dowolnej funkcji $v(x,t)$ klasy C względem (x,t) na zbiorze $[0,l] \times [0,T]$, gdzie

$$q^*(x,t) = q(x,t) - a^2 \dot{\beta}_0(t) - a^2 \dot{\beta}_l(t)x, \quad u_0^*(x) = u_0(x) - \beta_0(0) - \beta_l(0)x, \quad (11)$$

Z uwagi na jednorodne warunki brzegowe (7-2) rozwiązania zagadnienia poszukujemy w postaci szeregu

$$u^*(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin \alpha_n x, \quad (12)$$

gdzie, wobec $\sin \alpha_n 0 = 0$, $\cos \alpha_n l = 0$ (por. (8-2)), jest:

$$\alpha_n = n\pi - \pi/2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Przyjmując $v(x,t)$ w postaci

$$v(x,t) = V_m(t) \sin \alpha_m x, \quad m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

gdzie $V_n(t)$ są dowolnymi funkcjami ciągłymi na przedziale $[0, T]$, oraz wykorzystując równości

$$\int_0^l \sin \alpha_n x \sin \alpha_m x dx = \begin{cases} l/2, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}, \quad (15-1)$$

$$\int_0^l x \sin \alpha_m x dx = (-1)^m \frac{1}{\alpha_m^2}, \quad (15-2)$$

$$\int_0^l \sin \alpha_m x dx = \frac{1}{\alpha_m}, \quad (15-3)$$

otrzymujemy – na podstawie (10)-(13) – równanie:

$$-\int_0^T \left[\alpha_m^2 U_m(t) \frac{l}{2} + a^2 \dot{U}_m(t) \frac{l}{2} - q_m^*(t) \right] V_m(t) dt + a^2 \left[\frac{l}{2} U_m(0) - u_m^* \right] V_m(0) = 0, \quad (16)$$

gdzie

$$q_m^*(t) = \int_0^l q^*(x,t) \sin \alpha_m x dx = q_m(t) - \frac{a^2}{\alpha_m} \dot{\beta}_0(t) - (-1)^m \frac{a^2}{\alpha_m^2} \dot{\beta}_l(t), \quad (17-1)$$

$$u_m^* = u_m^o - \frac{1}{\alpha_m} \beta_0(0) - (-1)^m \frac{1}{\alpha_m^2} \beta_l(0), \quad (17-2)$$

$$q_m(t) = \int_0^l q(x,t) \sin \alpha_m x dx, \quad u_m^o = \int_0^l u_o(x) \sin \alpha_m x dx. \quad (17-3)$$

Wobec dowolności $V_m(t)$ w przedziale $[0, T]$ otrzymujemy z równania (16) ciąg zagadnień początkowych dla równań zwyczajnych liniowych rzędu pierwszego:

$$\dot{U}_m(t) + \frac{\alpha_m^2}{a^2} U_m(t) = \frac{2}{la^2} q_m(t) - \frac{2}{l\alpha_m} \dot{\beta}_0(t) - (-1)^m \frac{2}{l\alpha_m^2} \dot{\beta}_l(t), \quad (18-1)$$

$$U_m(0) = \frac{2}{l} u_m^o - \frac{2}{l\alpha_m} \beta_0(0) - (-1)^m \frac{2}{l\alpha_m^2} \beta_l(0), \quad m = 1, 2, \dots \quad (18-2)$$

Przy wykorzystaniu całki Duhamela-Cauchy'ego rozwiązanie zagadnienia (18) można zapisać następująco:

$$U_m(t) = \left[\frac{2}{l} u_m^o - \frac{2}{l\alpha_m} \beta_0(0) - (-1)^m \frac{2}{l\alpha_m^2} \beta_l(0) \right] \exp\left(-\frac{\alpha_m^2}{a^2} t\right) + \int_0^t \exp\left[-\frac{\alpha_m^2}{a^2} (t-\tau)\right] \left[\frac{2}{la^2} q_m(\tau) - \frac{2}{l\alpha_m} \dot{\beta}_0(\tau) - (-1)^m \frac{2}{l\alpha_m^2} \dot{\beta}_l(\tau) \right] d\tau, \quad (124)$$

gdzie

$$q_m(t) = \int_0^l q(x,t) \sin \alpha_m x dx, \quad u_m^o = \int_0^l u_o(x) \sin \alpha_m x dx.$$

5.4. Sformułowanie dystrybucyjne zagadnienia początkowego

1. Przypadek równania zwyczajnego

Rozważmy zagadnienie początkowe dla równania różniczkowego zwyczajnego liniowego o stałych współczynnikach niejednorodne (por. rozdz. 3.2, p.4 i rozdz. 3.3, p.1), tj. zadanie polegające na wyznaczeniu funkcji $u \in C^k(\mathcal{T}) \cap C^{k-1}([t_0, t_1])$ przy $\mathcal{T} = (t_0, t_1)$, która spełnia

- równanie różniczkowe

$$u^{(k)}(t) + p_{k-1}u^{(k-1)}(t) + \dots + p_1u'(t) + p_0u(t) = f(t), \quad t \in \mathcal{T} \quad (1)$$

przy danych współczynnikach $p_i \in \mathcal{R}$ ($i = 0, \dots, k-1$; $k \geq 1$) i danej funkcji $f \in C(\mathcal{T})$,

- z warunkami początkowymi

$$u^{(i)}(t_0) = u_0^i, \quad i = 0, \dots, k-1 \quad (2)$$

przy danych $u_0^i \in \mathcal{R}$ ($i = 0, \dots, k-1$).

Przemnożmy równanie różniczkowe (1) przez funkcję $v \in \overset{\circ}{D}^\infty([t_0, t_1])$ i scałkujemy na przedziale \mathcal{T} :

$$\int_{t_0}^{t_1} u^{(k)}(\tau)v(\tau)d\tau + p_{k-1}\int_{t_0}^{t_1} u^{(k-1)}(\tau)v(\tau)d\tau + \dots + p_1\int_{t_0}^{t_1} u'(\tau)v(\tau)d\tau + p_0\int_{t_0}^{t_1} u(\tau)v(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} f(\tau)v(\tau)d\tau. \quad (3)$$

Wykonując całkowania przez części, przy uwzględnieniu, że $\text{supp } v \subset [t_0, t_1]$, mamy:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} u^{(1)}(\tau)v(\tau)d\tau &= -u^{(0)}(t_0)v(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} u(\tau)v^{(1)}(\tau)d\tau, \\ \dots \\ \int_{t_0}^{t_1} u^{(k-1)}(\tau)v(\tau)d\tau &= -u^{(k-2)}(t_0)v(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} u^{(k-2)}(\tau)v^{(1)}(\tau)d\tau = \\ &= \dots = -u^{(k-2)}(t_0)v(t_0) + \dots - (-1)^{(k-2)}u^{(0)}(t_0)v^{(k-2)}(t_0) - (-1)^{(k-1)}\int_{t_0}^{t_1} u(\tau)v^{(k-1)}(\tau)d\tau, \\ \int_{t_0}^{t_1} u^{(k)}(\tau)v(\tau)d\tau &= -u^{(k-1)}(t_0)v(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} u^{(k-1)}(\tau)v^{(1)}(\tau)d\tau = \\ &= \dots = -u^{(k-1)}(t_0)v(t_0) + \dots - (-1)^{(k-1)}u^{(0)}(t_0)v^{(k-1)}(t_0) - (-1)^{(k)}\int_{t_0}^{t_1} u(\tau)v^{(k)}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

gdyż $v(t_1) = 0, \dots, v^{(k-1)}(t_1) = 0$ ($\text{supp } v$ jest zbiorem domkniętym zawartym w $[t_0, t_1]$). Po uwzględnieniu warunków początkowych (2) w powyższych wyrażeniach, a następnie tych wyrażen w równaniu (3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (-1)^{(k)}u(\tau)v^{(k)}(\tau)d\tau + p_{k-1}\int_{t_0}^{t_1} (-1)^{(k-1)}u(\tau)v^{(k-1)}(\tau)d\tau + \dots - p_1\int_{t_0}^{t_1} u(\tau)v'(\tau)d\tau + \\ + p_0\int_{t_0}^{t_1} u(\tau)v(\tau)d\tau &= \int_{t_0}^{t_1} f(\tau)v(\tau)d\tau + \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{(s)}u_0^{(k-1-s)}v^{(s)}(t_0) + \\ + p_{k-1}\sum_{s=0}^{k-2} (-1)^{(s)}u_0^{(k-2-s)}v^{(s)}(t_0) + \dots + p_1u_0^{(0)}v^{(0)}(t_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Stosując pojęcie dystrybucji (rozdz. 1.2), w tym dystrybucji przywiedlnej i pochodnej dystrybucyjnej oraz dystrybucji δ -Diraca, możemy zapisać następujące zależności w przestrzeni $D'([t_0, t_1])$

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\tau)v(\tau)d\tau = \langle\langle f, v \rangle\rangle, \quad \int_{t_0}^{t_1} (-1)^{(k-1)}u(\tau)v^{(k-1)}(\tau)d\tau = \langle\langle u^{(r)}, v \rangle\rangle,$$

$$(-1)^{(s)} u_0^{(k-1-s)} v^{(s)}(t_0) = u_0^{(k-1-s)} \langle\langle \delta^{(s)}(t-t_0), v \rangle\rangle,$$

przy dowolnych $v \in \overset{\circ}{D}^\infty([t_0, t_1])$, co pozwala równanie (4) zapisać w notacji dystrybucyjnej następująco:

$$u^{(k)} + p_{k-1}u^{(k-1)} + \dots + p_1u^{(1)} + p_0u = f + \sum_{s=0}^{k-1} u_0^{(k-1-s)} \delta^{(s)} + \sum_{r=1}^{k-1} p_{k-r} \sum_{s=0}^{r-1} u_0^{(r-1-s)} \delta^{(s)}, \quad (5)$$

gdzie $\delta^{(s)} = \delta^{(s)}(t-t_0)$, $\delta^{(0)} = \delta(t-t_0)$, przy czym pochodne dystrybucyjne oznaczono (bez obawy o nieporozumienie) identycznie jak pochodną standardową.

Przykład. Sformułowanie dystrybucyjne równania drgań swobodnych oscylatora harmonicznego, tj. równania

$$m_0 u''(t) + c_0 u'(t) + k_0 u(t) = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

czyli (przy $c_0 / m_0 = 2\lambda$, $k_0 / m_0 = \mu^2$)

$$u''(t) + 2\lambda u'(t) + \mu^2 u(t) = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

z warunkami początkowymi

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0,$$

przedstawia się zgodnie z (5) ($k=2$, $p_0 = \mu^2$, $p_1 = 2\lambda$, $u_0^{(0)} = u_0$, $u_0^{(1)} = v_0$, $t_0 = 0$) następująco:

$$u'' + 2\lambda u' + \mu^2 u = (v_0 + 2\lambda u_0) \delta(t) + u_0 \delta'(t),$$

a więc

$$m_0 u'' + c_0 u' + k_0 u = (m_0 v_0 + c_0 u_0) \delta(t) + m_0 u_0 \delta'(t).$$

Najczęściej wykorzystywane jest to równanie przy $u_0 = 0$ oznaczające iż przyrost pędu oscylatora w pewnej chwili jest równoważny działaniu w tej chwili impulsu siły wymuszającej równemu przyrostowi pędu.

2. Przypadek równania cząstkowego

Rozszerzymy teraz sformułowanie dystrybucyjne zagadnienia początkowego na równanie różniczkowe cząstkowe na przykładzie równania parabolicznego

$$A_n^2 u(x, t) - a^2 \partial_t u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathcal{R}^n \times (t_0, t_1), \quad (6)$$

gdzie A_n^2 jest operatorem eliptycznym o stałych współczynnikach $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$) na przestrzeni \mathcal{R}^n , a warunek początkowy ma postać

$$u(x, t) = u_0(x), \quad x \in \mathcal{R}^n. \quad (7)$$

Zakładamy przy tym, $a_{ij} = \text{const}$, $a^2 = \text{const}$, $f \in C(\mathcal{R}^n \times (t_0, t_1))$, $u_0 \in C(\mathcal{R}^n)$ oraz $u \in C(\mathcal{R}^n \times [t_0, t_1])$, $u(\cdot, t) \in C_n^2 \forall t \in (t_0, t_1)$ i $u(x, \cdot) \in C^1(t_0, t_1) \forall x \in \mathcal{R}^n$.

Mnożymy równanie (6) przez funkcję $v \in \overset{\circ}{D}^\infty(\mathcal{R}^n \times [t_0, t_1])$ o nośniku

$\text{supp } v \subset \mathcal{K}_n(0, \rho) \times [t_0, t_1]$ dla pewnego ρ i scałkujemy to równanie po $x \in \mathcal{K}_n(0, \rho)$ ($\mathcal{K}_n(0, \rho)$ - kula) względem dV oraz po $t \in [t_0, t_1]$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{K}_n} A_n^2 u(x, t) v(x, t) dV dt - \int_{\mathcal{K}_n} \int_{t_0}^{t_1} a^2 \partial_t u(x, t) v(x, t) dV dt = \int_{\mathcal{K}_n} \int_{t_0}^{t_1} f(x, t) v(x, t) dV dt. \quad (8)$$

Następnie dokonujemy całkowania przez części jednokrotnie względem zmiennej t i dwukrotnie względem zmiennych x jak w rozdz. 5.2, p. 4, wykorzystując zerowanie się funkcji $v(x, t_1)$ dla wszystkich $x \in \mathcal{K}_n(0, \rho)$ oraz twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa-Stokesa i zerowanie się funkcji $v(\tilde{x}, t)$ i jej pochodnych pochodnych $\partial/\partial v$ na sferze $S_n(0, \rho)$ dla $t \in [t_0, t_1)$, a także wykorzystując definicje dystrybucji, w tym dystrybucji δ - Diraca i pochodnych dystrybucyjnych w przestrzeni $D'(\mathcal{R}^n \times [t_0, t_1))$:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{K}_n} A_n^2 u(x, t) v(x, t) dV dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{K}_n} u(x, t) A_n^2 v(x, t) dV dt = \langle\langle A_n^2 u(x, t), v(x, t) \rangle\rangle, \\ \int_{\mathcal{K}_n} \int_{t_0}^{t_1} a^2 \partial_t u(x, t) v(x, t) dt dV &= -a^2 \int_{\mathcal{K}_n} u(x, t_0) v(x, t_0) dV - a^2 \int_{\mathcal{K}_n} \int_{t_0}^{t_1} u(x, t) \partial_t v(x, t) dV dt = \\ &= -a^2 \int_{\mathcal{K}_n} u_0(x) v(x, t_0) dV - a^2 \int_{\mathcal{K}_n} \int_{t_0}^{t_1} u(x, t) \partial_t v(x, t) dt dV = \\ &= -a^2 \langle\langle u_0(x) \delta_x(t - t_0), v(x, t_0) \rangle\rangle - a^2 \langle\langle \partial_t u(x, t), v(x, t) \rangle\rangle, \\ \int_{\mathcal{K}_n} \int_{t_0}^{t_1} f(x, t) v(x, t) dt dV &= \langle\langle f(x, t), v(x, t) \rangle\rangle, \end{aligned}$$

gdzie pochodne dystrybucyjne w produkcie dualnym oznaczono tak jak pochodne standardowe.

Po uwzględnieniu tych równości w równaniu (8) zapiszemy to równanie następująco w przestrzeni $D'(\mathcal{R}^n \times [t_0, t_1)) \times \overset{\circ}{D}^\infty(\mathcal{R}^n \times [t_0, t_1))$:

$$\begin{aligned} \langle\langle A_n^2 u(x, t), v(x, t) \rangle\rangle - a^2 \langle\langle \partial_t u(x, t), v(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle f(x, t), v(x, t) \rangle\rangle + \\ &- \langle\langle u_0(x) \delta_x(t - t_0), v(x, t_0) \rangle\rangle \end{aligned} \quad (9)$$

lub w przestrzeni $D'(\mathcal{R}^n \times [t_0, t_1))$

$$A_n^2 u(x, t) - a^2 \partial_t u(x, t) = f(x, t) - u_0(x) \delta_x(t - t_0), \quad (x, t) \in \mathcal{R}^n \times [t_0, t_1) \quad (10)$$

czyli w postaci niemal identycznej jak wyjściowe równanie (1), tyle że z włączonym do niego warunkiem początkowym w postaci dystrybucji δ - Diraca względem zmiennej czasowej (w chwili początkowej t_0), w którym to równaniu dystrybucja $a(x, t)$ w $D'(\mathcal{R}^n \times [t_0, t_1))$ jest zdefiniowana jako produkt dualny „przywiedlny” przestrzeni

$$\langle\langle a(x, t), v(x, t) \rangle\rangle = \int_{\mathcal{K}_n} \int_{t_0}^{t_1} a(x, t) v(x, t) dt dV = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{K}_n} a(x, t) v(x, t) dV dt. \quad (11)$$

MMIL II

Część druga. RÓWNANIA

6. Metody rozwiązywania zagadnień granicznych

6.1. Wprowadzenie

6.2. Metody (szeregów) Fouriera

1. Metoda sprowadzania do zagadnień granicznych
2. Metoda sprowadzania do zagadnień algebraicznych
3. Metoda spektralna

6.3. Metody szeregów potęgowych

1. Metoda uogólnionych funkcji analitycznych
2. Metoda funkcji elementarnych i specjalnych

6.4. Metody transformacji całkowych

1. Podstawowe określenia i sformułowanie metody
2. Transformacja Laplace'a
3. Transformacje nieskończone Fouriera
4. Transformacja Hankela

6.5. Metody przybliżone

1. Uwagi wstępne. Rozwiązania przybliżone zagadnień granicznych
2. Metody ważonych residuów. Przypadek redukcji do zagadnień algebraicznych
3. Metody ważonych residuów. Przypadek redukcji do zagadnień granicznych
4. Metody dyskretyzacyjne. Metoda różnic skończonych
5. Metody asymptotyczne. Metoda małego parametru

6. METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ GRANICZNYCH

6.1. Wprowadzenie

W tym rozdziale przedstawimy pewną systematykę oraz omówimy niektóre z metod rozwiązywania zagadnień granicznych, prezentowanych już w dużym stopniu przy okazji ilustracji definiowanych sformułowań tych zagadnień przykładami ich rozwiązań. Omówimy syntetycznie metody rozwiązywania zagadnień w dużym stopniu o wymiarze praktycznym, do których sprowadza się gros zadań z mechaniki i wiele innych zadań z zakresu inżynierii lądowej.

Zajmować się będziemy zagadnieniem granicznym złożonym (w postaci klasycznej – lokalnej) z:

- równania różniczkowego postaci

$$Ku = f, \quad (1)$$

- warunków granicznych postaci

$$Bu = g, \quad (2)$$

w którym $u = u(x) = (u_j(x))$, $x = (x_i) \in \bar{\mathcal{V}}$ jest odwzorowaniem (układem funkcji) ze zbioru (afinicznego) $U = U_{n,m}(\bar{\mathcal{V}})$ będącego podzbiorem odwzorowań odpowiednio regularnych przestrzeni funkcyjnej $V = V_{n,m}(\bar{\mathcal{V}})$, \mathcal{V} jest obszarem przestrzeni \mathcal{R}^n o brzegu $\partial\mathcal{V} = S$ takim, że $\bar{S} = \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, S_1 i S_2 są dostatecznie gładkie (w szczególności może być $S_2 = \emptyset$), K jest operatorem różniczkowym liniowym rzędu $2k$ w obszarze \mathcal{V} ,

$B = (B_\alpha)$ ($\alpha = 0, \dots, k-1$) jest multioperatorem liniowym brzegowym na S , przy czym jeśli

$$B|_{S_1} u = B_{(1)} u = g_{(1)}, \quad (3)$$

jest warunkiem brzegowym na S_1 , to jest to sztywny warunek brzegowy, spełniony przez $u \in U$, zaś $f = (f_j)$, $g = (g_{\alpha j})$, $g_{(1)} = g|_{S_1}$ są danymi odwzorowaniami (układami funkcji) odpowiednio na \mathcal{V} , S i S_1 , o wartościach w przestrzeni \mathcal{R}^m .

Jeżeli dane zagadnienie graniczne jest sformułowane nieklasycznie, to przyjmujemy, że Ku jest pewnym funkcjonałem liniowym na podprzestrzeni $\overset{\circ}{U}$ przestrzeni V funkcji próbnych $v: \bar{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{R}^m$, odpowiednio regularnych i spełniających sztywny jednorodny warunek brzegowy (3) przy $g_{(1)} = 0$ na rozmaitości S_1 , jeśli S_1 ma orientację przestrzenną względem równania (1), zaś Bu jest funkcjonałem liniowym na przestrzeni liniowej $\overset{\circ}{W}$ funkcji próbnych $v|_{S_2}$ przy $v \in \overset{\circ}{U}$. Wtedy też przyjmujemy, że f i g oznaczają odpowiednio funkcjonały liniowe na przestrzeni $\overset{\circ}{U}$ i $\overset{\circ}{W}$. Równanie (1) uwzględniające warunki (2), (3)

rozumiemy następująco (w postaci globalnej)

$$\langle \tilde{K}u, v \rangle = \langle \tilde{f}, v \rangle \quad \forall v \in \overset{\circ}{U} \quad (4)$$

gdzie

$$\langle \tilde{K}u, v \rangle = \langle Ku, v \rangle_{\overset{\circ}{U}} + \langle Bu, v \rangle_{\overset{\circ}{W}}, \quad \langle \tilde{f}, v \rangle = \langle f, v \rangle_{\overset{\circ}{U}} + \langle g, v \rangle_{\overset{\circ}{W}}, \quad v \in \overset{\circ}{U} \quad (5)$$

przy czym $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overset{\circ}{U}}$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overset{\circ}{W}}$ oznaczają odpowiednie produkty dualne.

Przedstawimy, choć syntetycznie, cały wachlarz metod ścisłych, formalnie ścisłych i przybliżonych rozwiązywania zagadnień granicznych. Warto więc zatrzymać się nieco nad tym, co to oznacza. Samo słowo metoda oznacza, że chodzi o taki sposób postępowania skończonego lub sekwencyjnego, w którym wyróżnić można na ogół pewne odrębne kroki tegoż postępowania (w szczególności sposobu sformalizowanego w tym postępowaniu, jednoznacznie określonego, zwanego algorytmem), który dotyczy pewnej rodziny zagadnień granicznych. Oczywiście może się zdarzyć, że ta rodzina będzie jednoelementowa – ważne jest jednak to, by nie okazała się zbiorem pustym. Niepowodzenia, owszem, zdarzają się przy rozwiązywaniu zagadnień granicznych, ale trudno nazywać wykonane postępowanie metodą.

Metodę rozwiązania danej rodziny (klasy) zagadnień granicznych nazwiemy ściłą, jeżeli prowadzi ona do rozwiązania danego zagadnienia z tej rodziny, które można uznać za dokładne jego spełnienie tak, jak ono jest zapisane, a jedyne przybliżenia, jakie są dopuszczalne wynikają z możliwości obliczenia dokładnej wartości znanych funkcji, jakie tworzą to rozwiązanie. Jeżeli zatem mamy zagadnienie sformułowane w postaci klasycznej lokalnej, to rozwiązanie ścisłe tego zagadnienia powinno spełniać tożsamościowo równanie różniczkowe (1) i warunki graniczne (2) na zbiorach ich jednoznacznej określoności, a ponadto rozwiązanie to powinno należeć do zbioru wymaganego dla rozwiązań z rodziny tego zagadnienia. Natomiast, gdy zagadnienie jest sformułowane w postaci globalnej (4), jego rozwiązanie uznamy za ścisłe, jeżeli będzie należało do wymaganego zbioru rozwiązań i spełniało to równanie dokładnie dla wszystkich wymaganych funkcji próbnych dla tego sformułowania.

Metodę rozwiązania danego zagadnienia granicznego (z określonej rodziny zagadnień) nazwiemy formalnie ścisłą, jeżeli prowadzi ona do rozwiązania formalnie ścisłego, tzn. gdy jest ono wynikiem granicy sekwencji (ciągu) postępowań (kroków), która wyznacza rozwiązanie ścisłe, tyle że z granicą nieznaną lub nieosiągalną. Typowym przykładem jest tu metoda szeregów Fouriera, która prowadzi do rozwiązania danego zagadnienia w postaci szeregu Fouriera (trygonometrycznego lub innego układu zupełnego funkcji) zbieżnego, ale o nieznanej granicy (sumy szeregu). Może nią być również taka metoda, która sprowadza rozwiązanie określonego zagadnienia do wyznaczenia rozwiązania ścisłego innego zagadnienia, którego granicą jednoznacznie zdefiniowaną, jest zagadnienie wyjściowe.

Natomiast, metodę rozwiązania danego zagadnienia granicznego (z określonej rodziny zagadnień) nazwiemy przybliżoną, jeżeli nie jest ona dla zagadnień z tej rodziny ścisła ani formalnie ścisła, czyli nie prowadzi do rozwiązania ścisłego ani formalnie ścisłego danego zagadnienia, ale w ścisłym określonym sensie przybliża rozwiązanie ścisłe (które istnieje, choć

na ogół jest nieznaną). Co to znaczy „przybliża” – tym zajmiemy się w podrozdziale 6.5 poświęconemu „metodom przybliżonym”.

Tu zaś warto jeszcze zwrócić uwagę na dwa terminy – a właściwie trzy – na podział metod rozwiązywania zagadnień granicznych na analityczne i numeryczne oraz na stosunkowo nowy termin (w historii matematyki), tj. metody komputerowe. Ta klasyfikacja, co ważne, jest niezależna od poprzednio omówionej, tj. podziału na metody ścisłe, formalnie ścisłe i przybliżone.

Metodę rozwiązania danego zagadnienia granicznego (w dowolnym sformułowaniu) nazwiemy metodą analityczną, jeżeli uzyskane rozwiązanie ma zamkniętą postać (bez konieczności obliczania granic i całkowania) matematycznie poprawnego wyrażenia algebraicznego (lub kilku wyrażeń mu równoważnych) zawierającego funkcje elementarne lub funkcje specjalne. Metodę rozwiązania danego zagadnienia granicznego, która sprowadza to rozwiązanie do wyznaczenia układu liczb (najczęściej rzeczywistych) nazwiemy metodą numeryczną. Pozostaje jeszcze grupa metod quasi-analitycznych (albo quasi-numerycznych), tj. co do postaci rozwiązania takich jak w metodach analitycznych, tj. w postaci poprawnych matematycznie wyrażeń algebraicznych, w których występują granice lub całki funkcji danych lub znanych funkcji złożonych z funkcji elementarnych bądź specjalnych (por. p. 6.3.2), których wyznaczenie wymaga (być może lub na pewno) metody numerycznej lub nieskończonej sekwencji działań (np. iteracyjnie).

Metody komputerowe (do niedawna uważane tylko za numeryczne, obecnie – to w skali historii informatyki – również analityczne, dzięki takim programom użytkowym jak Mathematica) to metody, które świadomie lub z konieczności, przy wykorzystaniu odpowiednich programów działań, stosowane są z użyciem komputerów (a przynajmniej procesorów).

Z tytułu wprowadzenia podamy jeszcze użyteczne w wielu przypadkach rozwiązywania zagadnień granicznych twierdzenie Boggio:

Twierdzenie. Jeżeli operator różniczkowy K jest złożeniem operatorów, tj. $K = K_s \dots K_r \dots K_1$ i złożenie to jest przemienne oraz jeśli $K_r u_r = 0$ dla $r = 1, 2, \dots, s$, to $u = u_1 + u_2 + \dots + u_s$ jest rozwiązaniem równania $K u = 0$.

I na zakończenie wprowadzenia w ”świat metod rozwiązywania zagadnień granicznych” uwaga praktyczna. W stosowaniu tych metod „wszystkie chwyt (matematycznie poprawne) są dozwolone”, o ile prowadzą efektywnie do celu (tj. do rozwiązania danego zagadnienia). Najwyżej, ktoś inny zrobi to sprawniej. I do tego celu służy ten rozdział (oraz ta część opracowania MMIL II).

6.2. Metody (szeregów) Fouriera

Najczęściej stosuje się metodę szeregów Fouriera, wykorzystując fakt, że poszukiwane rozwiązanie danego zagadnienia granicznego postuluje się w postaci szeregu Fouriera względem danego układu ortogonalnego funkcji o nieznanach współczynnikach funkcyjnych lub liczbowych (zgodnie z ogólnym zarysem teorii tych szeregów w Cz.1, r. 2.4 lub w odniesieniu do trygonometrycznych szeregów Fouriera w Cz.1, r. 5.5). Nie ma jednak w sformułowaniu ogólnym tej metody przeciwskażeń, by sumowanie było w zakresie skończonym, tj. by rozwiązanie zagadnienia granicznego postulować w postaci sumy skończonej iloczynów funkcji z danego układu ortogonalnego i współczynników funkcyjnych bądź liczbowych nieznanach. Stąd bardziej stosowna będzie nazwa „metoda Fouriera”. Liczba mnoga zaś bierze się stąd, że znanych jest kilka wariantów tej metody.

1. Przypadek sprowadzenia do układu zagadnień granicznych

Pozornie wygląda na metodę „zamienić problem na wiele (nawet nieskończenie wiele) problemów”. Ale rzecz w tym, że ten problem wyjściowy, nie rozwiązywalny wprost, zamienia się na sekwencję problemów rozwiązywalnych, tej samej postaci.

Rozważmy zagadnienie graniczne (1), (2) z p. 6.1. Przyjmujemy następujące założenia:

1) obszar \mathcal{V} jest postaci

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} \times \mathcal{W},$$

gdzie \mathcal{U} jest obszarem w przestrzeni \mathcal{R}^s , a \mathcal{W} jest obszarem w przestrzeni \mathcal{R}^r ($r + s = n \geq 2$).

Tak więc

$$x \in \mathcal{V} \Leftrightarrow x = (y, z), \quad y \in \mathcal{U}, \quad z \in \mathcal{W},$$

a w konsekwencji

$$\partial\mathcal{V} = \mathcal{U} \times \partial\mathcal{W} \cup \partial\mathcal{U} \times \mathcal{W} \cup \partial\mathcal{U} \times \partial\mathcal{W}.$$

Zakładamy przy tym, że części

$$S_1 = \mathcal{U} \times \partial\mathcal{W}, \quad S_2 = \partial\mathcal{U} \times \mathcal{W}$$

brzegu $\partial\mathcal{V}$ są dostatecznie gładkie (spełniają co najmniej warunek Lipschitza), a na części $\mathcal{L} = \partial\mathcal{U} \times \partial\mathcal{W}$ spełniony jest warunek zgodności warunków granicznych na S_1 i S_2 . Jeżeli warunek graniczny na S_1 jest warunkiem brzegowym, to zwykle zakładamy, że jest to sztywny warunek brzegowy;

2) w przestrzeni funkcyjnej $L_r^2(\bar{\mathcal{W}})$, będącej przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathcal{W}} \varphi(z) \psi(z) dV(z)$$

dany jest układ ortogonalny zupełny funkcji $(\psi_l(\cdot))$ ($l \in \mathcal{N}$) taki, że każda funkcja

$h(\cdot) \in L_{r,m}^2(\bar{\mathcal{W}})$ jest sumą swojego szeregu Fouriera względem układu $(\psi_l(\cdot))$, tzn.

$$h(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \chi_l \psi_l(z), \quad z \in \mathcal{W}, \quad \chi_l \in \mathcal{R}^m \quad (l \in \mathcal{N}),$$

przy czym

$$\int_{\mathcal{W}} h(z) \psi_l(z) dV(z) = \langle \psi_l, \psi_l \rangle \chi_l,$$

$$\int_{\mathcal{W}} \left[h(z) - \sum_{l=1}^L \chi_l \psi_l(z) \right]^2 dV(z) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

Zwracamy uwagę, że $h(z) = (h_1(z), \dots, h_m(z)) \in \mathcal{R}^m$ i $\psi_l(z) \in \mathcal{R}$ dla $z \in \bar{\mathcal{W}}$, tzn. rozwinięcie w szereg Fouriera względem układu funkcji $(\psi_l(\cdot))$ ($l \in \mathcal{N}$) dotyczy każdej z funkcji składowych $h_1(\cdot), \dots, h_m(\cdot)$;

3) każda funkcja $v = v(y, z)$ ze zbioru określoności \mathcal{U} operatora różniczkowego K ma tę właściwość, że $v(y, \cdot) \in L_{r,m}^2(\bar{\mathcal{W}}) \forall y \in \bar{\mathcal{U}}$, a ponadto jej szereg Fouriera

$$v(y, z) = \sum_{l=1}^{\infty} v_l(y) \psi_l(z)$$

jest zbieżny punktowo dla każdego $z \in \bar{\mathcal{W}}$ i dla wszystkich $y \in \bar{\mathcal{U}}$;

4) operator różniczkowy K ma tę właściwość, że

$$Kv = \sum_{l=1}^{\infty} K[v_l(y) \psi_l(z)], \quad \forall (y, z) \in \mathcal{V}$$

oraz

$$K[v_l(y) \psi_l(z)] = [L_l v_l(y)] \psi_l(z), \quad \forall (y, z) \in \mathcal{V}, \quad \forall l \in \mathcal{N},$$

gdzie (L_l) jest ciągiem operatorów różniczkowych działających na elementy podprzestrzeni liniowej przestrzeni funkcyjnej $V_{s,m}(\bar{\mathcal{U}})$ (odpowiednio regularne);

5) warunek graniczny (2) jest jednorodny na części $S_1 = \mathcal{U} \times \partial\mathcal{W}$ brzegu $\partial\mathcal{V}$, tzn.

$$Bv(\cdot, \tilde{z}) = 0 \quad \forall \tilde{z} \in \partial\mathcal{W} \quad (g(\cdot, \tilde{z}) = 0 \quad \forall z \in \partial\mathcal{W})$$

a ponadto operator brzegowy B ma następujące właściwości

$$B[\sum_{l=1}^{\infty} v_l(y) \psi_l(\tilde{z})] = \sum_{l=1}^{\infty} B[v_l(y) \psi_l(\tilde{z})] \quad \forall (y, \tilde{z}) \in S_1 = \mathcal{U} \times \partial\mathcal{W},$$

$$B[v_l(y) \psi_l(\tilde{z})] = 0 \quad \forall (y, \tilde{z}) \in S_1 = \mathcal{U} \times \partial\mathcal{W} \quad \forall l \in \mathcal{N}$$

oraz

$$B[\sum_{l=1}^{\infty} v_l(\tilde{y}) \psi_l(z)] = \sum_{l=1}^{\infty} [\Lambda_l v_l(\tilde{y})] \psi_l(z) \quad \forall (\tilde{y}, z) \in S_2 = \partial\mathcal{U} \times \mathcal{W},$$

gdzie $(\Lambda_l) = (\Lambda_{\alpha,l})$ ($\alpha = 1, \dots, k$) jest ciągiem multioperatorów brzegowych na zbiorze $\partial\mathcal{U}$ dla każdego $\forall l \in \mathcal{N}$;

6) rozwinięcia w szeregi Fouriera odwzorowań (układów) funkcji $f(y, \cdot) \forall y \in \mathcal{U}$ i

$g(\tilde{y}, \cdot) \forall \tilde{y} \in \partial\mathcal{U}$ względem układu funkcji $(\psi_l(\cdot))$ ($l \in \mathcal{N}$) są zbieżne punktowo $\forall z \in \mathcal{W}$:

$$f(y, z) = \sum_{l=1}^{\infty} f_l(y) \psi_l(z),$$

$$g(\tilde{y}, z) = \sum_{l=1}^{\infty} g_l(\tilde{y}) \psi_l(z)$$

gdzie

$$f_l(y) = \frac{1}{\langle \psi_l, \psi_l \rangle} \int_{\mathcal{W}} f(y, z) \psi_l(z) dV(z) = (f_{l,j}(y)) = \frac{1}{\langle \psi_l, \psi_l \rangle} \left(\int_{\mathcal{W}} f_j(y, z) \psi_l(z) dV(z) \right),$$

$$g_l(\tilde{y}) = (g_{\alpha;l}(\tilde{y})) = \frac{1}{\langle \psi_l, \psi_l \rangle} \left(\int_{\mathcal{W}} g_{\alpha}(\tilde{y}, z) \psi_l(z) dV(z) \right) = \\ = (g_{\alpha;j;l}(y)) = \frac{1}{\langle \psi_l, \psi_l \rangle} \left(\int_{\mathcal{W}} g_{\alpha;j}(\tilde{y}, z) \psi_l(z) dV(z) \right).$$

Podstawowy algorytm metody Fouriera polega na następującym:

Zgodnie z założeniem 3) rozwiązania zagadnienia granicznego (1), (2) poszukujemy w postaci:

$$u(y, z) = \sum_{l=1}^{\infty} u_l(y) \psi_l(z). \quad (6)$$

Po podstawieniu wyrażenia (6) do równania (1) i do warunku granicznego (2) na części $S_2 = \partial \mathcal{U} \times \mathcal{W}$ oraz po wykorzystaniu przyjętych założeń, otrzymujemy

$$\sum_{l=1}^{\infty} L_l u_l(y) \psi_l(z) = \sum_{l=1}^{\infty} f_l(y) \psi_l(z) \quad \forall (y, z) \in \mathcal{V} = \mathcal{U} \times \mathcal{W}, \quad (7-1)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \Lambda_l u_l(\tilde{y}) \psi_l(z) = \sum_{l=1}^{\infty} g_l(\tilde{y}) \psi_l(z) \quad \forall (\tilde{y}, z) \in S_2 = \partial \mathcal{U} \times \mathcal{W}. \quad (7-2)$$

Warunek graniczny (2) na części na części $S_1 = \mathcal{U} \times \partial \mathcal{W}$ jest spełniony z założenia. Spełnienie warunku zgodności warunku granicznego na $\mathcal{L} = \partial \mathcal{U} \times \partial \mathcal{W}$ wymaga, by

$$\lim_{\tilde{z} \rightarrow \tilde{z}} \left[\sum_{l=1}^{\infty} g_l(\tilde{y}) \psi_l(z) \right] = 0 \quad \forall (\tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathcal{L} = \partial \mathcal{U} \times \partial \mathcal{W}. \quad (7-3)$$

Zbieżność punktowa szeregów w równościach (7-1) - (7-3) oznacza, że potrzeba i wystarcza, by spełniony był następujący ciąg równań różniczkowych liniowych w obszarze \mathcal{U} i warunków granicznych na brzegu $\partial \mathcal{U}$

- w postaci zwartej (wektorowej w przestrzeni \mathcal{R}^m)

$$L_l u_l(y) = f_l(y), \quad y \in \mathcal{U}, \quad l \in \mathcal{N}; \quad (8-1)$$

$$\Lambda_l u_l(\tilde{y}) = g_l(\tilde{y}), \quad \tilde{y} \in \partial \mathcal{U}, \quad l \in \mathcal{N}; \quad (8-2)$$

- w postaci rozwiniętej

$$\sum_{i=1}^m L_{l,ji} u_{l,i}(y) = f_{l,j}(y), \quad y \in \mathcal{U}, \quad l \in \mathcal{N}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (9-1)$$

$$\sum_{i=1}^m \Lambda_{\alpha;l,ij} u_{l,i}(\tilde{y}) = g_{\alpha;l,j}(\tilde{y}), \quad \tilde{y} \in \partial \mathcal{U}, \quad \alpha = 1, \dots, q, \quad l \in \mathcal{N}; \quad j = 1, \dots, m. \quad (9-3)$$

Warunek ciągłości (7-3) będzie spełniony, gdy

$$\psi_l(\tilde{z}) = 0, \quad \tilde{z} \in \partial \mathcal{W}, \quad l \in \mathcal{N}. \quad (10)$$

Przykład. Najważniejszy przykład (przypadek) omawianego wariantu metody szeregów Fouriera, choć nie w pełni reprezentatywny, to przypadek zagadnienia granicznego w obszarze osiowo-symetrycznym przestrzeni $\mathcal{R}^{n-1} \times (-\infty, +\infty)$ względem osi (przykładowo) Ox_{n-1} przy współrzędnej obwodowej $x_n = z$ i nieznanym odwzorowaniu $u(y, z)$ przy $z \in \mathcal{W} = \mathcal{R}$ i $u(y, \cdot)$ okresowej, o okresie 2π dla każdego $y \in \bar{\mathcal{U}}$ ($s = n-1, r = 1, n > 1$). Jako układ ortogonalny w przestrzeni ośrodkowej Hilberta $L_{\text{okr}(2\pi)}^2(\mathcal{R})$ z iloczynem skalarnym

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^{2\pi} \varphi(z) \psi(z) dz$$

przyjmujemy podstawowy układ trygonometryczny (por. Cz. 1, p. 5.5)

$(1, \sin z, \cos z, \dots, \sin lz, \cos lz, \dots)$ ($l \in \mathcal{N}$).

Układ ten ma następujące ważne właściwości, zgodnie z ogólną teorią szeregów Fouriera (Cz.1, p. 1.4) i twierdzeniem Dirichleta (Cz.1, p. 5.5):

1) układ trygonometryczny jest ortogonalny i zupełny oraz stanowi bazę Hilberta funkcji z przestrzeni $L^2_{\text{okr}(2\pi)}(\mathcal{R})$

2) szereg Fouriera funkcji $h = h(z)$, $z \in \mathcal{R}$, ciągłej i przedziałami monotonicznej jest zbieżny punktowo dla $z \in \mathcal{R}$, tzn.

$$h(z) = \frac{1}{2}h_0 + \sum_{l=1}^{\infty}(h_l^s \sin lz + h_l^c \cos lz),$$

gdzie

$$\begin{cases} h^s \\ h^c \end{cases} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(z) \begin{cases} \sin lz \\ \cos lz \end{cases} dz \quad (l = 0, 1, \dots);$$

ponadto, jeśli funkcja h jest p -krotnie różniczkowalna, to szereg powyższy jest p -krotnie różniczkowalny wyraz po wyrazie, tzn.

$$h'(z) = \sum_{l=1}^{\infty}(lh_l^s \cos lz - lh_l^c \sin lz),$$

...

$$h^{(p)}(z) = \sum_{l=1}^{\infty}(h_l^s \frac{d^{(p)}}{dz^p} \sin lz + h_l^c \frac{d^{(p)}}{dz^p} \cos lz).$$

Powyższy szereg Fouriera i reguła jego różniczkowania dotyczą również każdej składowej wektora funkcji okresowych $h = h(z) = (h_j(z)) \in \mathcal{R}^m$, $z \in \mathcal{R}$.

Uwzględniając właściwości 1) i 2) w odniesieniu do niewiadomego odwzorowania równania (1) z warunkiem granicznym (2), tj.

$$u(y, z) = \frac{1}{2}u_0(y) + \sum_{l=1}^{\infty}[u_l^s(y) \sin lz + u_l^c(y) \cos lz] \in \mathcal{R}^m, \quad y \in \bar{\mathcal{U}}, \quad z \in \mathcal{R},$$

przy nieznanach funkcjach $u_0(y) = (u_{j,0}(y)) \in \mathcal{R}^m$, $u_l^{s/c}(y) = (u_{j,l}^{s/c}(y)) \in \mathcal{R}^m$, $y \in \bar{\mathcal{U}}$,

($l = 1, 2, \dots$), możemy stwierdzić, że jeżeli współczynniki w operatorach K i B nie zależą od zmiennej z oraz szeregi Fouriera względem zmiennej z funkcji (składowych) f i g są zbieżne punktowo

$$f(y, z) = \frac{1}{2}f_0(y) + \sum_{l=1}^{\infty}[f_l^s(y) \sin lz + f_l^c(y) \cos lz] \in \mathcal{R}^m, \quad y \in \mathcal{U}, \quad z \in \mathcal{R},$$

$$g(y, z) = \frac{1}{2}g_0(y) + \sum_{l=1}^{\infty}[g_l^s(y) \sin lz + g_l^c(y) \cos lz] \in \mathcal{R}^m, \quad y \in \mathcal{U}, \quad z \in \mathcal{R},$$

przy

$$\begin{cases} f^s(y) \\ f^c(y) \end{cases} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y, z) \begin{cases} \sin lz \\ \cos lz \end{cases} dz \in \mathcal{R}^m \quad (l = 0, 1, \dots),$$

$$\begin{cases} g^s(\tilde{y}) \\ g^c(\tilde{y}) \end{cases} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\tilde{y}, z) \begin{cases} \sin lz \\ \cos lz \end{cases} dz \in \mathcal{R}^{k \cdot m} \quad (l = 0, 1, \dots),$$

to równanie (1) i warunek graniczny (2) przyjmują odpowiednio postać:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} L_0 u_0(y) + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[L_l^{ss} u_l^s(y) + L_l^{sc} u_l^c(y) \right] \sin lz + \left[L_l^{cs} u_l^s(y) + L_l^{cc} u_l^c(y) \right] \cos lz \right\} = \\ & = \frac{1}{2} f_0(y) + \sum_{l=0}^{\infty} [f_l^s(y) \sin lz + f_l^c(y) \cos lz], \quad y \in \mathcal{U}, \quad z \in \mathcal{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Lambda_0 u_0(\tilde{y}) + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[\Lambda_l^{ss} u_l^s(\tilde{y}) + \Lambda_l^{sc} u_l^c(\tilde{y}) \right] \sin lz + \left[\Lambda_l^{cs} u_l^s(\tilde{y}) + \Lambda_l^{cc} u_l^c(\tilde{y}) \right] \cos lz \right\} = \\ & = \frac{1}{2} g_0(\tilde{y}) + \sum_{l=0}^{\infty} [g_l^s(\tilde{y}) \sin lz + g_l^c(\tilde{y}) \cos lz], \quad \tilde{y} \in \partial \mathcal{U}, \quad z \in \mathcal{R}, \end{aligned}$$

gdzie $L_0, L_l^{ss}, L_l^{sc}, L_l^{cs}, L_l^{cc}$ są operatorami różniczkowymi w obszarze \mathcal{U} , zależnymi w ogólności od pochodnych względem zmiennych $y = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{U}$ i od $l \in \mathcal{N}$ (poza L_0), przy czym $L_l^{ss} = L_l^{cc}, L_l^{sc} = -L_l^{cs}$, zaś $\Lambda_0, \Lambda_l^{ss}, \Lambda_l^{sc}, \Lambda_l^{cs}, \Lambda_l^{cc}$ są operatorami brzegowymi na brzegu $\partial \mathcal{U}$, zależnymi w ogólności od zmiennych \tilde{y} , od pochodnych względem normalnej zewnętrznej do $\partial \mathcal{U}$ i od $l \in \mathcal{N}$ (poza Λ_0), przy czym $\Lambda_l^{ss} = \Lambda_l^{cc}, \Lambda_l^{sc} = -\Lambda_l^{cs}$. Równości powyższe będą spełnione tożsamościowo wtedy i tylko wtedy, gdy niewiadome $u_0(y), u_l^{s/c}(y)$ ($y \in \bar{\mathcal{U}}$) będą rozwiązaniami następującego ciągu (ze względu na $l = 1, 2, \dots$) zagadnień granicznych:

$$\begin{aligned} & L_0 u_0(y) = f_0(y), \quad y \in \mathcal{U}, \\ & \Lambda_0 u_0(\tilde{y}) = g_0(\tilde{y}), \quad \tilde{y} \in \partial \mathcal{U}; \\ & L_l^{ss} u_l^s(y) + L_l^{sc} u_l^c(y) = f_l^s(y), \quad L_l^{cs} u_l^s(y) + L_l^{cc} u_l^c(y) = f_l^c(y), \quad y \in \mathcal{U} \quad l \in \mathcal{N} \\ & \Lambda_l^{ss} u_l^s(\tilde{y}) + \Lambda_l^{sc} u_l^c(\tilde{y}) = g_l^s(\tilde{y}), \quad \Lambda_l^{cs} u_l^s(\tilde{y}) + \Lambda_l^{cc} u_l^c(\tilde{y}) = g_l^c(\tilde{y}), \quad \tilde{y} \in \partial \mathcal{U}. \end{aligned}$$

W częstym przypadku, gdy operator K zawiera tylko pochodne parzystego rzędu względem zmiennej obwodowej z i podobnie operator brzegowy na $\partial \mathcal{U} \times \mathcal{W}$, to powyższy ciąg zagadnień granicznych się upraszcza:

$$L_l^{ss} = L_l^{cc} = L_l, \quad L_l^{sc} = L_l^{cs} = 0, \quad \Lambda_l^{ss} = \Lambda_l^{cc} = \Lambda_l, \quad \Lambda_l^{sc} = \Lambda_l^{cs} = 0,$$

a więc

$$\begin{aligned} & L_0 u_0(y) = f_0(y), \quad y \in \mathcal{U}, \\ & \Lambda_0 u_0(\tilde{y}) = g_0(\tilde{y}), \quad \tilde{y} \in \partial \mathcal{U}; \\ & L_l u_l^{s/c}(y) = f_l^{s/c}(y), \quad y \in \mathcal{U}, \quad l \in \mathcal{N} \\ & \Lambda_l u_l^{s/c}(\tilde{y}) = g_l^{s/c}(\tilde{y}), \quad \tilde{y} \in \partial \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Konkretny prosty przykład zastosowania tego wariantu metody szeregów Fouriera przy $m = 1$ do rozwiązania zagadnienia brzegowego statycznego ugięcia membrany kołowej obciążonej dowolnie w sposób ciągły zamieszczono w rozdz. 4.3, p.6.

Przykład. Inny przykład (przypadek) zagadnienia granicznego, który kwalifikuje się do omawianego wariantu metody Fouriera mamy wtedy, gdy

$$K = K_{s,m}^y + K_{r,m}^z \quad y \in \mathcal{U}, \quad z \in \mathcal{W} \quad (r + s = n \geq 2),$$

gdzie $K_{s,m}^y$ jest operatorem różniczkowym na podprzestrzeni przestrzeni funkcyjnej $V_{s,m}(\mathcal{U})$

(układów funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły do maksymalnego rzędu pochodnych w operatorze $K_{s,m}^y$), a $K_{r,m}^z$ jest operatorem różniczkowym na podprzestrzeni przestrzeni funkcyjnej $V_{r,m}(\mathcal{W})$ (układów funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły do maksymalnego rzędu pochodnych w operatorze $K_{r,m}^z$), oraz

$$B = \begin{cases} B_{s,m}^{\tilde{y}}, & \tilde{y} \in \partial\mathcal{U}, z \in \mathcal{W}, \\ B_{r,m}^{\tilde{z}}, & y \in \mathcal{U}, \tilde{z} \in \partial\mathcal{W}. \end{cases}$$

O układzie funkcji $(\psi_l(\cdot))$ ($l \in \mathcal{N}$) zakładamy, że spełnia założenia 2) i 3) metody, a ponadto

$$K_{r,m}^z[h(y)\psi_l(z)] = [A_{l,m}h(y)]\psi_l(z), \quad y \in \mathcal{U}, z \in \mathcal{W} \quad (l \in \mathcal{N})$$

dla dowolnego układu (wektora) funkcji $h(\cdot) \in V_{s,m}(\mathcal{U})$, gdzie $A_{l,m}$ jest operatorem algebraicznym, a także

$$B_{r,m}^{\tilde{z}}[h\psi_l(\tilde{z})] = 0, \quad h \in \mathcal{R}^m, \tilde{z} \in \partial\mathcal{W} \quad (l \in \mathcal{N}).$$

Rozwiązanie zagadnienia granicznego (1), (2) w postaci (6) sprowadza się zatem do rozwiązania ciągu zagadnień (8) przy

$$L_l = K_{s,m}^y + A_{l,m}, \quad \Lambda_l = B_{s,m}^{\tilde{y}}.$$

Konkretne przykłady realizacji tego przypadku metody Fouriera znajdują się w rozdz. 4.3, p.8 w zastosowaniu do rozwiązania zagadnienia brzegowo-początkowego drgań swobodnych struny i niestacjonarnego rozkładu temperatury, w których metodą rozdziału zmiennych wyznaczono układy funkcji $(\psi_l(\cdot))$ ($l \in \mathcal{N}$) względem zmiennej przestrzennej ($z = x$), następnie wyznaczono funkcje $(u_l(\cdot))$ ($l \in \mathcal{N}$) względem zmiennej czasowej ($y = t$) w wyrażeniu (w szeregu Fouriera) (6).

Uwaga. W przypadku korzystania ze sformułowania globalnego (4), (5) zagadnienia granicznego (1), (2) należy nieco zmodyfikować tok postępowania przy sprowadzeniu tego zagadnienia w obszarze \mathcal{V} do ciągu sformułowań globalnych zagadnień granicznych (8) w obszarze \mathcal{U} . Mianowicie, biorąc pod uwagę iż

$$\begin{aligned} \langle a(x), v(x) \rangle_{\mathcal{V}} &= \int_{\mathcal{V}} \left[\int_{\mathcal{W}} a(y, z) v(y, z) dV(z) \right] dV(y) = \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\int_{\mathcal{W}} a(y, z) \psi(z) dV(z) \right] \mathcal{G}(y) dV(y) = \langle A(y), \mathcal{G}(y) \rangle_{\mathcal{V}}, \\ \langle b(\tilde{y}), v(\tilde{y}) \rangle_{\partial S_2} &= \int_{\partial\mathcal{V}} \left[\int_{\mathcal{W}} b(\tilde{y}, z) \psi(z) dV(z) \right] \mathcal{G}(\tilde{y}) dS(\tilde{y}) = \langle B(\tilde{y}), \mathcal{G}(\tilde{y}) \rangle_{\partial\mathcal{V}}, \\ \langle c(\tilde{z}), \psi(\tilde{z}) \rangle_{\partial S_1} &= \int_{\partial\mathcal{W}} \left[\int_{\mathcal{V}} c(y, \tilde{z}) \mathcal{G}(y) dV(y) \right] \psi(\tilde{z}) dS(\tilde{z}) = \langle C(\tilde{z}), \psi(\tilde{z}) \rangle_{\partial\mathcal{W}} \end{aligned}$$

przy

$$\begin{aligned} v(x) &= \mathcal{G}(y)\psi(z), \quad y \in \bar{\mathcal{V}}, z \in \bar{\mathcal{W}}, \\ A(y) &= \int_{\mathcal{W}} a(y, z) \psi(z) dV(z) = \langle a(y, z), \psi(z) \rangle_{\mathcal{W}}, \quad y \in \mathcal{V} \\ B(\tilde{y}) &= \int_{\mathcal{W}} b(\tilde{y}, z) \psi(z) dV(z) = \langle b(\tilde{y}, z), \psi(z) \rangle_{\mathcal{W}}, \quad \tilde{y} \in \partial\mathcal{V} \\ C(\tilde{z}) &= \int_{\mathcal{V}} c(y, \tilde{z}) \mathcal{G}(y) dV(y) = \langle c(y, \tilde{z}), \mathcal{G}(y) \rangle_{\mathcal{V}}, \quad \tilde{z} \in \partial\mathcal{U} \end{aligned}$$

równanie (4) sformułowania globalnego dla ciągu zagadnień granicznych (8) zapiszemy następująco:

$$\langle \tilde{L}_l u_l, \mathcal{G} \rangle = \langle \tilde{f}_l, \mathcal{G} \rangle \quad \forall \mathcal{G} \in C(\mathcal{U}) \quad (l \in \mathcal{N})$$

gdzie

$$\langle \tilde{L}_l u_l, \mathcal{G} \rangle = \langle L_l u_l, \mathcal{G} \rangle_{\mathcal{U}} + \langle \Lambda_l u_l, \mathcal{G} \rangle_{\partial \mathcal{U}},$$

$$\langle \tilde{f}_l, \mathcal{G} \rangle = \langle f_l, \mathcal{G} \rangle_{\mathcal{U}} + \langle g_l, \mathcal{G} \rangle_{\partial \mathcal{U}}.$$

Uwaga. Śledząc podany „algorytm” omówionego wariantu metody Fouriera zauważamy, że został skonstruowany przede wszystkim dla formalnie ścisłego rozwiązania zagadnienia granicznego w sformułowaniu klasycznym. Ale też można zauważyć, że w wielu miejscach można go rozszerzyć, osłabiając wiele z przyjętych założeń.

Na wstępie, dokonujemy pewnego przeglądu założeń:

Ad 1) To założenie jest dla omawianego wariantu metody Fouriera kluczowe, więc pozostaje w mocy to, że obszar \mathcal{V} jest postaci

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} \times \mathcal{W}$$

i jego konsekwencje, m.in. takie, że \mathcal{U} jest obszarem w przestrzeni \mathcal{R}^s , a \mathcal{W} jest obszarem w przestrzeni \mathcal{R}^r ($r + s = n \geq 2$) oraz

$$x \in \mathcal{V} \Leftrightarrow x = (y, z), \quad y \in \mathcal{U}, \quad z \in \mathcal{W};$$

Ad 2) w przestrzeni funkcyjnej $L^2_{\rho; r}(\bar{\mathcal{W}})$, będącej przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\rho} = \int_{\mathcal{W}} \rho(z) \varphi(z) \psi(z) dV(z),$$

gdzie $\rho(\cdot)$ jest nieujemną, całkowalną funkcją rzeczywistą w obszarze $\bar{\mathcal{W}}$ (tzw. funkcja wagowa), dany jest układ ortogonalny funkcji $(\psi_l(\cdot))$ taki, że $l \in \mathcal{P}$ (\mathcal{P} co najwyżej przeliczalny zbiór indeksów, zaczynający się od $l = 0$ lub $l = 1$), np. skończony układ wielomianów Legendre’a, przeliczalny układ trygonometryczny i in.); w przypadku, gdy $\rho \equiv 1$ stosujemy standardowe oznaczenie $\langle \cdot, \cdot \rangle$;

Ad 3) nie postulujemy nic odnośnie rozwijalności w szereg Fouriera funkcji względem układu $(\psi_l(\cdot))$, a więc i odnośnie zbieżności punktowej;

Ad 4) i 5) założenia te stanowią niejako „element flagowy” tego wariantu metody Fouriera, więc je utrzymujemy, tzn. jeżeli

$$u = \sum_{l \in \mathcal{P}} u_l(y) \psi_l(z), \quad (y, z) \in \bar{\mathcal{V}},$$

to

$$\mathbf{K}u = \sum_{l \in \mathcal{P}} \mathbf{K}[u_l(y) \psi_l(z)] = \sum_{l \in \mathcal{P}} [L_l u_l(y)] \psi_l(z), \quad (y, z) \in \mathcal{V} = \mathcal{U} \times \mathcal{W},$$

$$\mathbf{B}u = \sum_{l \in \mathcal{P}} \mathbf{B}[u_l(y) \psi_l(\tilde{z})] = 0 \quad (\text{przy } g(y, \tilde{z}) = 0), \quad (y, \tilde{z}) \in S_1 = \mathcal{U} \times \partial \mathcal{W},$$

$$\mathbf{B}u = \sum_{l \in \mathcal{P}} \mathbf{B}[u_l(\tilde{y}) \psi_l(z)] = \sum_{l \in \mathcal{P}} [\Lambda_l u_l(\tilde{y})] \psi_l(z), \quad (\tilde{y}, z) \in S_2 = \partial \mathcal{U} \times \mathcal{W};$$

Ad 6) w świetle uwagi 3) tego założenia również nie postulujemy.

Co do toku postępowania, to kształtuje się on następująco:

- wybieramy zgodnie zamiarem co do poszukiwanego rozwiązania zbiór indeksów $I \subseteq \mathcal{P}$

i zakładamy rozwiązanie zagadnienia granicznego (1), (2) w postaci:

$$u(y, z) = \sum_{l \in I} u_l(y) \psi_l(z), \quad (y, z) \in \bar{\mathcal{V}}, \quad (\text{a})$$

gdzie $(u_l(y))$ ($l \in I$) nieznanym układem funkcji (wektorowych) w przestrzeni $V_{s,m}(\bar{\mathcal{W}})$, odpowiednio regularnych (np. to może być przypadek $I = (0)$, gdy $(\psi_l(\cdot))$ jest standardowym pełnym układem trygonometrycznym, a poszukujemy tylko rozwiązania osiowo symetrycznego);

- jeżeli zastosujemy sformułowanie zagadnienia granicznego w postaci lokalnej, to podstawiamy wyrażenie (a) do równania (1) i do warunku granicznego (2) i wykorzystujemy zmodyfikowane założenia 4) i 5), otrzymując

$$\sum_{l \in I} [L_l u_l(y)] \psi_l(z) = f(y, z), \quad (y, z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W}, \quad (\text{b-1})$$

$$\sum_{l \in I} [\Lambda_l u_l(\tilde{y})] \psi_l(z) = g(\tilde{y}, z), \quad (\tilde{y}, z) \in \partial \mathcal{U} \times \mathcal{W}, \quad (\text{b-2})$$

$$\sum_{l \in I} B[u_l(y) \psi_l(\tilde{z})] = 0, \quad (y, \tilde{z}) \in \mathcal{U} \times \partial \mathcal{W}. \quad (\text{b-3})$$

- mnożymy obie strony równości (b-1) i (b-2) przez $\rho(z) \psi_p(z)$ i całkujemy odpowiednio po obszarze \mathcal{W} . Wykorzystując ortogonalność funkcji układu $(\psi_l(\cdot))$, otrzymujemy (po zmianie indeksu p na l):

$$L_l u_l(y) = f_l(y), \quad y \in \mathcal{U}, \quad l \in I; \quad (\text{c-1})$$

$$\Lambda_l u_l(\tilde{y}) = g_l(\tilde{y}), \quad \tilde{y} \in \partial \mathcal{U}, \quad l \in I; \quad (\text{c-2})$$

gdzie

$$f_l(y) = \frac{1}{\langle \psi_l, \psi_l \rangle_\rho} \int_{\mathcal{W}} \rho(z) f(y, z) \psi_l(z) dV(z), \quad (\text{d-1})$$

$$g_l(\tilde{y}) = \frac{1}{\langle \psi_l, \psi_l \rangle_\rho} \int_{\mathcal{W}} \rho(z) g(\tilde{y}, z) \psi_l(z) dV(z). \quad (\text{d-2})$$

W rezultacie mamy układ zagadnień granicznych „zredukowanych” do przestrzeni s -wymiarowej. Załóżmy zatem, że znamy ich rozwiązania i że są one dokładne (ściśle lub formalnie ściśle). Niezbędna jest teraz synteza rozwiązania naszego wyjściowego zagadnienia granicznego. Otrzymujemy je przez podstawienie do wyrażenia (a). Natomiast uzyskaliśmy je w sposób „wszystkie sensowne operacje wykonujemy do skutku”. Zatem, jeżeli suma w wyrażeniu (a) jest skończona (zbiór indeksów I jest skończony), to zapewne jest wykonywalna (sprawdzamy, testujemy). Jeżeli jest nieskończona, to należałoby wykazać zbieżność (dowód formalny jest zazwyczaj trudny, pozostaje testowanie dla różnych wartości zmiennych y i z oraz dla coraz większej liczby wyrazów w wyrażeniu (a)). No i najtrudniejszy element (poza przypadkami oczywistymi) – weryfikacja rozwiązania, tj. sprawdzenie, czy nasze „rozwiązanie” jest rzeczywiście rozwiązaniem (i to jakim?) zagadnienia (1), (2) w odniesieniu do celów, jakie sobie stawialiśmy. Dalsze rozważania w tym rozdziale mogą przybliżyć odpowiedź na to pytanie. Powodzenia.

2. Przypadek sprowadzenia do układu zagadnień algebraicznych

Powróćmy do zagadnienia granicznego postaci (1), (2), przyjmując teraz założenia następujące:

1) operatory K i B , o stałych współczynnikach oraz układy funkcji u, f, g można przedstawić w postaci:

$$K = [K_{jr}]_{m \times m}, \quad B = [B_{\alpha; jr}]_{q \cdot m \times m}, \quad u = [u_j]_{m \times 1}, \quad f = [f_j]_{m \times 1}, \quad g = [g_{\alpha; j}]_{q \cdot m \times 1};$$

2) w ośrodkowej przestrzeni Hilberta $L_n^2(\bar{\mathcal{V}})$ z iloczynem skalarnym

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = \int_{\mathcal{V}} \eta_1(x) \eta_2(x) dV$$

danych jest m układów ortogonalnych zupełnych funkcji

$[\eta_{j;l}(\cdot)]$ ($j = 1, \dots, m; l \in \mathcal{N}^* = \{0\} \cup \mathcal{N}$) takich, że każda ze składowych $h_j(\cdot)$ układu funkcji

$h(\cdot) \in L_{r,m}^2(\bar{\mathcal{V}})$ jest sumą swojego szeregu Fouriera względem układu $(\eta_{j;l}(\cdot))$, tzn.

$$h_j(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_{j;l} \eta_{j;l}(x), \quad j = 1, \dots, m; x \in \bar{\mathcal{V}}$$

(w normie średniokwadratowej), przy czym

$$\int_{\mathcal{V}} h_j(x) \eta_{j;l}(x) dV = \langle \eta_{j;l}, \eta_{j;l} \rangle \lambda_l,$$

$$\int_{\mathcal{V}} \eta_{j;l}(x) \eta_{r;s}(x) dV = \langle \eta_{j;l}, \eta_{r;s} \rangle = \begin{cases} \lambda_{jr;l}, & s = l \\ 0, & s \neq l \end{cases}, \quad (j, r = 1, \dots, m; l, s \in \mathcal{N}^*),$$

zaś

$$\lambda_{jj;l} = \langle \eta_{j;l}, \eta_{j;l} \rangle = \|\eta_{j;l}\|^2$$

a ponadto powyższy szereg jest zbieżny punktowo prawie wszędzie na $\bar{\mathcal{V}}$ i różniczkowalny wyraz po wyrazie do rzędu równego maksymalnemu rzędowi pochodnej w operatorach K_{jr} ($r = 1, \dots, m$);

3) operator K i układy $(\eta_{j;l}(\cdot))$ mają tę właściwość, że dla każdego układu funkcji

$v(\cdot) = (v_j(\cdot))$ ze zbioru określoności $U_{n,m}(\bar{\mathcal{V}})$ operatora K jest

$$K v(x) = [\sum_{r=1}^m K_{jr} v_r(x)] = [\sum_{r=1}^m K_{jr} \sum_{l \in \mathcal{N}^*} v_{r;l} \eta_{r;l}(x)] = [\sum_{r=1}^m \sum_{l \in \mathcal{N}^*} v_{r;l} K_{jr} \eta_{r;l}(x)],$$

przy następujących rozwinięciach w szeregi Fouriera ze zbieżnością w normie i punktową

$$K_{jr} \eta_{r;l}(x) = \sum_{s \in \mathcal{N}^*} L_{jr;ls} \eta_{r;s}(x), \quad x \in \mathcal{V} \quad (j, r = 1, \dots, m; l \in \mathcal{N}^*);$$

4) multioperator B i układy funkcji $(\eta_{j;l}(\cdot))$ mają tę właściwość, że spełniony jest jednorodny

warunek graniczny (2) ($g \equiv 0$), tzn. dla każdego układu funkcji $v(\cdot) = (v_j(\cdot)) \in U_{n,m}(\bar{\mathcal{V}})$ jest

$$B v(\tilde{x}) = [\sum_{r=1}^m B_{\alpha; jr} v_r(\tilde{x})] = [\sum_{r=1}^m B_{\alpha; jr} \sum_{l \in \mathcal{N}^*} v_{r;l} \eta_{r;l}(\tilde{x})],$$

$$[B_{\alpha; jr} \eta_{r;l}(\tilde{x})] = [0], \quad \tilde{x} \in \partial \mathcal{V} \quad (\alpha = 1, \dots, q; j, r = 1, \dots, m; l \in \mathcal{N}^*);$$

5) składowe układu funkcji $f(\cdot) = [f_j(\cdot)]$ są rozwijalne w szeregi Fouriera, tzn.

$$f(x) = [\sum_{l \in \mathcal{N}^*} f_{j;l} \eta_{j;l}(x)], \quad x \in \mathcal{V} \quad (j = 1, \dots, m;)$$

ze zbieżnością w normie i punktową.

Tok postępowania przy zastosowaniu omawianego wariantu metody Fouriera przedstawia się następująco:

- wybieramy, zgodnie z celem poszukiwanego rozwiązania, zbiór indeksów $I \subseteq \mathcal{N}^*$ (skończony lub przeliczalny) i zakładamy rozwiązanie zagadnienia granicznego (1), (2) w postaci:

$$u(x) = [u_j(x)] = \left[\sum_{l \in I} u_{j;l} \eta_{j;l}(x) \right], \quad x \in \bar{\mathcal{V}}, \quad (11)$$

którą podstawiamy do równania (1) i warunku granicznego (2). Na mocy przyjętych założeń otrzymujemy dla poszczególnych składowych wektora $Ku(x)$ i $Bu(\tilde{x})$:

$$\sum_{r=1}^m \sum_{l \in I} u_{r;l} \sum_{s \in \mathcal{N}^*} L_{jr;ls} \eta_{r;s}(x) = f_j(x), \quad x \in \mathcal{V} \quad (j=1, \dots, m; l \in \mathcal{N}^*);$$

$$\sum_{r=1}^m \sum_{l \in \mathcal{N}^*} u_{r;l} B_{\alpha;jr} \eta_{r;l}(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in \partial \mathcal{V} \quad (\alpha=1, \dots, q; j, r=1, \dots, m; l \in \mathcal{N}^*).$$

Mnożąc pierwszą z równości przez $\eta_{j;l}(x)$ dla $j=1, \dots, m; l \in I$ oraz całkując po obszarze \mathcal{V} i uwzględniając warunki ortogonalności układów funkcji $(\eta_{j;p})$ otrzymujemy z kolei równania

$$\sum_{r=1}^m \sum_{l \in I} \lambda_{jr;p} L_{jr;lp} u_{r;l} = \lambda_{jj;p} f_{j;p}, \quad (j, r=1, \dots, m; p \in I). \quad (12)$$

Równania te możemy jeszcze znormalizować dzieląc stronami przez $\lambda_{jj;p} = \|\eta_{j;p}\|^2$:

$$\sum_{r=1}^m \sum_{l \in I} \kappa_{jr;p} L_{jr;lp} u_{r;l} = f_{j;p}, \quad (j, r=1, \dots, m; p \in I), \quad (13)$$

gdzie

$$\kappa_{jr;p} = \lambda_{jr;p} = \langle \eta_{j;p}, \eta_{r;p} \rangle / \langle \eta_{j;p}, \eta_{j;p} \rangle, \quad (j, r=1, \dots, m; p \in I).$$

Stanowią one w ogólności skończony, gdy zbiór I jest skończony lub nieskończony, gdy I jest przeliczalny, algebraiczny układ równań z niewiadomymi układami liczbowymi $[u_{j;l}]_{m \times 1}$ ($l \in I$) o szerokości pasma zależnego głównie od szerokości pasma operatorów algebraicznych $[L_{jr;lp}]$ względem l dla ustalonego p przy danych (j, r) . Po jego rozwiązaniu, sukcesywnie dla kolejnych wartości indeksu l znajdujemy sumę (11), która przy spełnieniu założeń oraz ciągłości danego układu funkcji f powinna być zbieżna dla każdego $x \in \bar{\mathcal{V}}$. Ponadto, gdy $I = \mathcal{N}^*$, to otrzymane rozwiązanie jest formalnie ścisłym rozwiązaniem zagadnienia granicznego (1), (2).

Uwaga. Jeżeli operator K ma tę właściwość, że

$$K_{jr} \eta_{r;l}(x) = L_{jr;l} \eta_{r;l}(x), \quad x \in \mathcal{V},$$

tzn. $L_{jr;lp} = L_{jr;l}$, gdy $l = p$ i $L_{jr;lp} = 0$, gdy $l \neq p$, to układ równań (13) upraszcza się do ciągu układów skończonych równań $m \times m$ postaci:

$$\sum_{r=1}^m \kappa_{jr;l} L_{jr;l} u_{r;l} = f_{j;p}, \quad (j, r=1, \dots, m; p \in I). \quad (14)$$

Przykład. Rozważmy dla ilustracji omawianego przypadku zagadnienie statycznego zginania ze ścinaniem belki wg modelu typu Timoshenki podpartej swobodnie na obu końcach, czyli zagadnienie brzegowe (przy $n = 1$ i $m = 2$):

$$EJ \frac{d^2 \theta}{dx^2} + GA \left(\theta - \frac{dw}{dx} \right) = 0, \quad x \in (0, a) \quad (a-1)$$

$$GA \left(\frac{d\theta}{dx} - \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + q = 0, \quad x \in (0, a) \quad (a-2)$$

oraz

$$w(0) = w(a) = 0, \quad EJ \frac{d\theta}{dx}(0) = EJ \frac{d\theta}{dx}(a) = 0, \quad (b)$$

gdzie $w(\cdot)$ i $\theta(\cdot)$ oznaczają funkcje ugięcia i obrotu przekroju belki, a oznacza długość belki, EJ i EA oznaczają moduły sztywności giętej i poprzecznej.

W przestrzeni $L^2([0, a])$ układy funkcji

$$(\sin \alpha_l x), \quad (1, \cos \alpha_l x), \quad \alpha_l = \frac{\pi l}{a} \quad (l \in \mathcal{N}) \quad (c)$$

stanowią ortogonalne, zupełne układy funkcji. Niewiadome funkcje poszukujemy w postaci szeregów:

$$w(x) = \sum_{l=1}^{\infty} w_l \sin \alpha_l x, \quad \theta(x) = \theta_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \theta_l \cos \alpha_l x, \quad x \in [0, a], \quad (d)$$

które wraz z pochodnymi

$$w'(x) = \sum_{l=1}^{\infty} w_l \alpha_l \cos \alpha_l x, \quad \theta'(x) = -\sum_{l=1}^{\infty} \theta_l \alpha_l \sin \alpha_l x, \quad (e-1)$$

$$w''(x) = -\sum_{l=1}^{\infty} w_l (\alpha_l)^2 \sin \alpha_l x, \quad \theta''(x) = -\sum_{l=1}^{\infty} \theta_l (\alpha_l)^2 \cos \alpha_l x, \quad (e-2)$$

są zbieżne punktowo przy $x \in (0, a)$, jeśli są spełnione warunki Dirichleta. Po podstawieniu (d) i (e) do równań (a) otrzymujemy równości

$$\sum_{l=1}^{\infty} [(GA - EA\alpha_l^2)\theta_l - GA\alpha_l w_l] \cos \alpha_l x + GA\theta_0 = 0, \quad (d-1)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} [GA\alpha_l \theta_l - GA\alpha_l^2 w_l] \sin \alpha_l x = q(x), \quad x \in (0, a), \quad (d-2)$$

podczas gdy spełnienie warunków brzegowych prowadzi do oczywistych równości $\sin 0 = 0$, $\sin l\pi = 0$. Przyjmując $\theta_0 = 0$ i mnożąc równości (d-1) i (d-2) odpowiednio przez $\cos \alpha_p x$ i $\sin \alpha_p x$ oraz całkując po przedziale $[0, a]$ i uwzględniając wyniki całkowania

$$\int_0^a \cos \alpha_l x \cos \alpha_p x dx = \begin{cases} 0, & l \neq p \\ a/2, & l = p \end{cases}, \quad \int_0^a \sin \alpha_l x \sin \alpha_p x dx = \begin{cases} 0, & l \neq p \\ a/2, & l = p \end{cases}, \quad (e)$$

otrzymujemy ciąg układów dwóch równań, z którego wyznaczamy

$$w_l = \frac{GA - EJ\alpha_l^2}{GA EJ \alpha_l^4} q_l, \quad \theta_l = \frac{GA\alpha_l}{GA EJ \alpha_l^4} q_l = \frac{q_l}{EJ \alpha_l^3} \quad (l = 1, 2, \dots), \quad (f)$$

przy czym

$$q_l = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \sin \alpha_l x dx \quad (l = 1, 2, \dots). \quad (g)$$

Jeżeli $q(\cdot)$ jest ciągłą i przedziałami monotoniczną na $[0, a]$, to szereg

$$q(x) = \sum_{l=1}^{\infty} q_l \sin \alpha_l x,$$

jest zbieżny punktowo na przedziale $(0, a)$, a w konsekwencji zbieżne punktowo są szeregi (d) i (e). Jeżeli $q(\cdot) \in L^2([0, a])$, to zapewniona jest zbieżność średniokwadratowa tych szeregów.

3. Metoda spektralna

Specyficznym przypadkiem metody Fouriera jest metoda spektralna, która jako wektory układu funkcji ortogonalnych $\eta_l = (\eta_{j;l})$ ($j = 1, \dots, m; l = 1, 2, \dots$) wykorzystuje ciąg wektorów

własnych odpowiadających wartościom własnym λ_l operatora różniczkowego A , czyli rozwiązanie zagadnienia spektralnego dla operatora różniczkowego:

$$A \eta_l(x) = \lambda_l I \eta_l(x), \quad \eta_l \in V_l, \quad x \in \mathcal{V}, \quad (15)$$

przy warunku brzegowym

$$\Lambda \eta_l(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in \partial \mathcal{V}, \quad (16)$$

gdzie I operator identyczności, V_l podprzestrzeń własna przestrzeni rozwiązań odpowiadająca wartości własnej λ_l , przy czym $V_l \perp V_r$ dla $r \neq l$. Zagadnienie, to omówiono w rozdz. 3.3, p. 1 w przypadku równania zwyczajnego ($n - 1$) oraz w rozdz 4.3, p. 9 w przypadku równania cząstkowego (rzędu drugiego; $n > 1$).

Metodę spektralną stosujemy zwykle w dwóch wariantach:

1) w przypadku, gdy mamy do rozwiązania zagadnienie brzegowe (1), (2), tj., gdy

$$K = A, \quad B = \Lambda, \quad (17)$$

przy $g = 0$ i wtedy rozwiązanie to zakładamy w postaci

$$u(x) = \sum_{l \in I} u_l \eta_l(x), \quad x \in \bar{\mathcal{V}}, \quad (18)$$

co po podstawieniu do równania (1), przemnożeniu go przez $\eta_l(\cdot)$ i scałkowaniu po obszarze \mathcal{V} (czyli po tzw. ortogonalizacji) prowadzi do równości

$$u_r = f_r / \lambda_r, \quad r \in I \quad (19)$$

gdzie $I \subseteq \{1, 2, \dots\}$ jest odpowiednio dobranym zbiorem indeksów,

$$f_r = \langle f, \eta_r \rangle / \langle \eta_r, \eta_r \rangle, \quad (20)$$

przy czym

$$\langle h, \eta \rangle = \int_{\mathcal{V}} \sum_{j=1}^m h_j(x) \eta_j(x) dV \in \mathcal{R}.$$

Zazwyczaj $\lambda_l \rightarrow \infty$ (gdy operator A jest eliptyczny), zatem szereg jest wystarczająco zbieżny,

jeśli tylko $f = \sum_{l=1}^{\infty} f_l \eta_l$ jest zbieżny;

2) w przypadku, gdy mamy do rozwiązania zagadnienie brzegowo-początkowe (1),(2), tj. gdy

$$K = A - c^2 \partial_t^2 - 2\tau \partial_t, \quad x \in \mathcal{V}, \quad t \in (0, \infty), \quad (21)$$

$$B = \begin{cases} \Lambda, & \tilde{x} \in \partial \mathcal{V}, t \in (0, \infty), \\ 1, & x \in \mathcal{V}, t = 0, \\ \partial_t, & x \in \mathcal{V}, t = 0, \end{cases} \quad g = \begin{cases} 0, & \tilde{x} \in \partial \mathcal{V}, t \in (0, \infty), \\ \varphi_0(x), & x \in \mathcal{V}, t = 0, \\ \varphi_1(x), & x \in \mathcal{V}, t = 0, \end{cases} \quad (22)$$

przy danych $f = f(x, t)$ dla $x \in \mathcal{V}$, $t \in (0, \infty)$ oraz $\varphi_0 = \varphi_0(x)$, $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ dla $x \in \bar{\mathcal{V}}$ takich, że $\varphi_0(\tilde{x}) = 0$, $\varphi_1(\tilde{x}) = 0$ dla $\tilde{x} \in \partial \mathcal{V}$, przy których rozwiązanie to zakładamy w postaci

$$u(x, t) = \sum_{l \in I} u_l(t) \eta_l(x), \quad x \in \bar{\mathcal{V}}, \quad t \in [0, \infty), \quad (23)$$

co po podstawieniu do równania (1) i warunku (2), przemnożeniu ich przez $\eta_r(\cdot)$ i scałkowaniu po obszarze \mathcal{V} (czyli po ortogonalizacji) prowadzi do zagadnienia początkowego dla równania zwyczajnego

$$c^2 \ddot{u}_r(t) + 2\tau \dot{u}_r(t) - \lambda_r u_r(t) + f_r(t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \quad (24-1)$$

$$u_r(0) = \varphi_{0;r}, \quad \dot{u}_r(0) = \varphi_{1;r}, \quad (24-2)$$

gdzie $I \subseteq \{1, 2, \dots\}$ jest odpowiednio dobranym zbiorem indeksów, $r \in I$,

$$f_r = \langle f, \eta_r \rangle / \langle \eta_r, \eta_r \rangle, \quad (25-1)$$

$$\varphi_{0;r} = \langle \varphi_0, \eta_r \rangle / \langle \eta_r, \eta_r \rangle, \quad \varphi_{1;r} = \langle \varphi_1, \eta_r \rangle / \langle \eta_r, \eta_r \rangle, \quad (25-2)$$

przy czym

$$\langle h(x, t), \eta(x) \rangle = \int_V \sum_{j=1}^m h_j(x, t) \eta_j(x) dV, \quad t \in [0, \infty).$$

Przykład prostego zastosowania prezentowanego wariantu metody szeregu Fouriera do rozwiązania zagadnienia brzegowego zginania płyty prostokątnej ($m=1, n=2, q=2$) przedstawiono w rozdz. 4.4, p.1, zaś przykład zastosowania do rozwiązania zagadnienia brzegowo-początkowego drgań swobodnych belki Bernoulli'ego ($m=1, n=1, q=2$) przedstawiono w rozdz. 4.4, p.2.

Prezentowane w tym podrozdziale metody znajdowania (niekonicznie znalezione) rozwiązań należą do grupy metod analitycznych, formalnie ścisłych (bardzo rzadko ścisłych) lub przybliżonych).

6.3. Metody szeregów potęgowych

Kolejną grupą metod wyznaczania rozwiązań zagadnień granicznych, jakie należałoby wymienić są metody, w których wykorzystuje się szeregi potęgowe jednej zmiennej x ($n = 1$), a więc metody dotyczące równań różniczkowych zwyczajnych o współczynnikach będących wielomianami tej zmiennej (zwykle prostymi). Te zagadnienia pojawiają się wprost do rozwiązania, ale często powstają jako wynik zastosowania różnych metod (metody Fouriera, transformacji całkowych i in.) do rozwiązania zagadnień granicznych dla równań różniczkowych cząstkowych. Równania o współczynnikach wielomianowych często są wynikiem zamiany zmiennej na zmienną x . Przykładowo, równanie

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + \cot \phi \frac{du}{d\phi} + u = 3 \cos \phi, \quad \phi \in (0, \pi/2),$$

przy $u = u(\phi)$, po podstawieniu $x = \cos \phi$ przechodzi w równanie

$$(1-x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + u = 3x, \quad x \in (0, 1),$$

przy $u = u(x)$.

Wymieniona metoda polega głównie na wyznaczeniu niezbędnych całek liniowo niezależnych równania (układu równań), a następnie wyznaczenie z warunków granicznych stałych całkowania w kombinacji liniowej z tymi całkami. Metoda ta została dość szeroko opisana w rozdz. 3.2, p. 4-7, a zwłaszcza w p. 6, jeśli przyjąć rozszerzającą interpretację, że stałe współczynniki są wielomianami stopnia zerowego, zaś szeregi potęgowe obejmują również rozwinięcia funkcji elementarnych. Dlatego też metodę wymienioną (grupę metod szczegółowych) potraktujemy raczej porządkowo, z racji jej wagi, zwracając wszakże uwagę na pewne „generalia”.

1. Metoda uogólnionych funkcji analitycznych

Jeżeli równanie różniczkowe zwyczajne (wektorowe) ($n = 1, m \geq 1$) jest równaniem o współczynnikach wielomianowych, to zgodnie z ogólną „filozofią przewidywania rozwiązań” zagadnień z równaniami różniczkowymi, rozwiązań tego typu równań poszukujemy w postaci tzw. wektora uogólnionych funkcji analitycznej, tj. w postaci

$$u(x) = x^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \ln x + x^{\lambda-s} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right), \quad (26)$$

w którym $a_n, b_n \in \mathcal{R}^m$ są nieznanymi współczynnikami, jeśli w takiej postaci można przedstawić wektor prawych stron tego równania

$$f(x) = x^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \right) \ln x + x^{\lambda-s} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n \right), \quad (27)$$

gdzie $\alpha_n, \beta_n \in \mathcal{R}^m, \lambda \in \mathcal{R}, s \in \mathcal{C}$ - dane (ewentualnie po rozwinięciu danych funkcji elementarnych w szeregi potęgowe), w szczególności $\alpha_n = \beta_n = 0$ (gdy $f \equiv 0$). Ponieważ pochodne funkcji $u(\cdot)$ są również postaci (26), przy innych wartościach λ i s , oraz ich przemnożenie przez składnik wielomianu też prowadzi do takiej postaci, ostatecznie po lewej

stronie równania (1) otrzymujemy wyrażenie również postaci (26), a dokładniej postaci

$$x^{\lambda-r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \right) \ln x + x^{\lambda-s-r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \right), \quad (28)$$

dla pewnego $r \in \mathbb{C}$ zależnego od największej różnicy maksymalnego rzędu pochodnej i minimalnego stopnia składnika współczynnika wielomianowego przy składniku z tą pochodną w równaniu, gdzie A_n jest wyrażeniem zależnym liniowo od a_n i pewnej liczby współczynników wcześniejszych od a_n , zaś B_n jest wyrażeniem zależnym liniowo od b_n i współczynników wcześniejszych od b_n oraz od a_n i pewnej liczby współczynników wcześniejszych od a_n . Przyrównanie wyrażeń A_n i B_n ze współczynnikami odpowiednio przy tych samych potęgach x z logarytmem i bez logarytmu prowadzi do równań rekurencyjnych na nieznane współczynniki a_n i b_n . Jeżeli w pierwszych równaniach „startowych” można dobrać wartości początkowych współczynników dowolnie w k kombinacjach liniowo niezależnych, gdzie k jest rzędem równania wektorowego (układu równań) (1), to metoda prowadzi do rozwiązania ogólnego równania (1).

Jeżeli otrzymane równania rekurencyjne zezwalają jedynie na rekurencyjne obliczenie wartości kolejnych współczynników a_n i b_n , to współczynniki te pozostają „nieoznaczone” (stąd nazwa „metoda współczynników nieoznaczonych” tego wariantu metody szeregów potęgowych jako metody analitycznej formalnie ścisłej, oczywiście pod warunkiem zbieżności szeregów w wyrażeniu (26) dla pewnego x_0 , a więc i dla $|x| < |x_0|$). Natomiast, w praktyce mogą zajść bardzo różne specyficzne przypadki szczególne.

2. Metoda funkcji elementarnych i specjalnych

Jeżeli można tak dobrać współczynniki początkowe w szeregach potęgowych w wyrażeniu (26), że można jawnie określić wszystkie współczynniki w tych szeregach wzorami zamkniętymi za pomocą poprawnych matematycznie wyrażeń z użyciem jednoznacznie i powszechnie znanych symboli matematycznych, to możemy uznać, że otrzymaliśmy rozwiązanie ściśle (ściłą całość) równania (1) w postaci analitycznej. W szczególności, gdy równanie (1) jest pojedyncze ($m = 1$) rzędu drugiego ($k = 2$), to może okazać się, że otrzymane rozwiązanie postaci (26) lub tylko postaci

$$u(x) = x^{\lambda} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \quad (29)$$

jest tzw. funkcją specjalną, czyli rozwiązaniem jednego ze wyspecyfikowanych postaci równania różniczkowego lub wyspecyfikowaną postacią rozwiązania, a więc jedną z funkcji hipergeometrycznych, kulistych (Legendre’a) lub walcowych (Bessela-Kelvina).

Może być tak, że współczynniki w równaniu różniczkowym są jednomianami stopnia równego rzędowi pochodnej funkcji niewiadomej u w równaniu pojedynczym, przy której ten współczynnik figuruje, to całość takiego równania, zwanego równaniem Eulera, jest wyrażenie postaci (29), w którym szereg potęgowy redukuje się do wyrazu zerowego a_0 (a λ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego równania Eulera).

Wreszcie, gdy współczynniki w równaniu (wektorowym) (1) są wielomianami stopnia zerowego, czyli są stałe, to rozwiązaniem tego równania jest funkcja elementarna postaci

$$u(x) = x^\lambda e^{\sigma x} (a \cos \vartheta x + b \sin \vartheta x), \quad (30)$$

w szczególności każdy z parametrów $\lambda \in \mathbb{C}$, $\sigma, a, b \in \mathbb{R}$ mogą być równe zero, a $\vartheta \in \mathbb{R}$ może być równy jedności. Rozwijając funkcję $e^{\sigma x} (a \cos \vartheta x + b \sin \vartheta x)$ w szereg McLaurina stwierdzamy, całka (30) jest formalnie postaci (29) o znanych wartościach współczynników b_n .

Na zakończenie tego krótkiego résumé, zwrócimy uwagę na „egzotyczne” nieco postacie zamknięte, złożone z funkcji notabene elementarnych, rozwiązań zagadnień z równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, które w wyniku serii podstawień w miejsce zmiennej niezależnej i funkcji niewiadomej prowadzą do całkiem prostego równania. Na przykład, równanie

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \omega^2 u = 0, \quad x \in (0, \infty)$$

którego całką jest funkcja

$$u(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x,$$

otrzymujemy w wyniku podstawień

$$v = \frac{\xi + 1}{\xi - 1} u, \quad \xi = \exp(\omega x)$$

z równania różniczkowego

$$\xi^2 (\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1) \frac{d^2 v}{d\xi^2} + \xi (2\xi^2 + 3\xi + 1) \frac{dv}{d\xi} + (\xi^3 - 3\xi^2 + 3\xi + 1)v = 0, \quad \xi \in (1, \infty).$$

Pytanie, jakie się nasuwa, to jak z tego równania otrzymać bezpośrednio rozwiązanie

$$v = \frac{\xi + 1}{\xi - 1} [a \cos (\ln \omega x) + b \sin (\ln \omega x)]$$

bez znajomości powyższych podstawień.

6.4. Metody transformacji całkowych

1. Podstawowe określenia i sformułowanie metody

Niech $n = r + s$ przy $r \geq 1$ i $n \geq 1$ i niech $x = (y, z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W} = \mathcal{V}$ przy $y = (y_1 = x_1, \dots, y_r = x_r)$, $z = (z_1 = x_{r+1}, \dots, z_s = x_{r+s} = x_n)$, \mathcal{U} - obszar w przestrzeni \mathcal{R}^r , \mathcal{W} - obszar w przestrzeni \mathcal{R}^s lub $\mathcal{W} = \emptyset$, gdy $s = 0$. Niech też $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_r) \in \mathcal{R}^r$. Załóżmy, że dane jest odwzorowanie $\kappa = \kappa(\zeta, y) = (\kappa_{jl}(\zeta, y)) \in \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^m$ przy $\int_{\mathcal{U}} |\kappa(\zeta, y)|^2 dV(y) < \infty \quad \forall \zeta \in \mathcal{R}^r$ i $\forall j, l = 1, \dots, m$.

Transformacją całkową T_ζ^y na obszarze \mathcal{U} względem zmiennych y odwzorowania (funkcji wektorowej, układu funkcji) $v = v(y, z) = (v_l(y, z)) \in \mathcal{R}^m$, $(y, z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W}$ z przestrzeni funkcyjnej $U_{r,m}(\mathcal{U}) = L_{r,m}^2(\mathcal{U})$, tzn. $v = v(\cdot, z) \in L_{r,m}^2(\bar{\mathcal{U}}) \quad \forall z \in \mathcal{W}$, nazywamy przyporządkowanie injektywne

$$\begin{aligned} T_\zeta^y : v(\cdot, z) &\rightarrow \bar{v}(\cdot, z) = (\bar{v}_j(\cdot, z)) \in V_{r,m}(\mathcal{D}; \mathcal{R}^m); \quad \bar{v}(\zeta, z) = \int_{\mathcal{U}} \kappa(\zeta, y) v(y, z) dV(y) = \\ &= (\bar{v}_j(\zeta, z)) = (\sum_{l=1}^m \int_{\mathcal{U}} \kappa_{jl}(\zeta, y) v_l(y, z) dV(y)) \quad \forall z \in \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (31)$$

Transformacja całkowa ma właściwość liniowości. Szczególnymi przypadkami transformacji całkowych są operatory całkowe (por. rozdz. 1.5). Obraz $\bar{v}(\zeta, z) = T_\zeta^y v(y, z)$ odwzorowania (funkcji wektorowej, układu funkcji) $v(y, z)$ nazywamy transformatą odwzorowania (funkcji wektorowej, układu funkcji) $v(y, z)$, zaś przeciwobraz $v(y, z) = (T_\zeta^y)^{-1} \bar{v}(\zeta, z) \stackrel{\text{ozn}}{=} T_y^\zeta \bar{v}(\zeta, z)$ odwzorowania $\bar{v}(\zeta, z)$ nazywamy retransformatą tego odwzorowania (funkcji wektorowej, układu funkcji).

W zależności od specyfikacji obszarów \mathcal{U} i \mathcal{W} oraz jądra $\kappa(\zeta, y)$ transformacji całkowej mamy różne przypadki szczególne transformacji całkowych (pod różnymi nazwami, zwłaszcza transformacji przy $n = r = 1$ i $m = 1$), tj. gdy

$$\mathcal{U} = \{y_1 : a_1 < y_1 < b_1\} \times \dots \times \{y_r : a_r < y_r < b_r\} \quad (a_p \geq -\infty, b_p \leq \infty, p = 1, \dots, r), \quad (32)$$

gdyż wtedy, zgodnie z twierdzeniem o całkach iterowanych, mamy dla $m = 1$ (przy $s > 0$)

$$\int_{\mathcal{U}} \kappa(\zeta, y) v(y, z) dV(y) = \int_{a_1}^{b_1} (\dots (\int_{a_r}^{b_r} \kappa(\zeta_1, \dots, \zeta_r, y_1, \dots, y_r) v(y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s) dy_r) \dots) dy_1,$$

a więc

$$T_\zeta^y v(y, z) = T_{\zeta_1}^{y_1} (\dots T_{\zeta_r}^{y_r} v(y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s)) = \bar{v}(\zeta_1, \dots, \zeta_r, z_1, \dots, z_s), \quad (33)$$

W szczególności, jeśli

$$\kappa(\zeta_1, \dots, \zeta_r, y_1, \dots, y_r) = \kappa_1(\zeta_1, y_1) \dots \kappa_r(\zeta_r, y_r), \quad (34)$$

to

$$T_\zeta^y v(y, z) = T_{\zeta_1}^{y_1} v_1(y_1, z_1, \dots, z_s) \dots T_{\zeta_r}^{y_r} v_r(y_r, z_1, \dots, z_s) = \quad (35)$$

$$= \bar{v}_1(\zeta_1, z_1, \dots, z_s) \dots \bar{v}_r(\zeta_r, z_1, \dots, z_s)$$

dla

$$v(y, z) = v(y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s) = v_1(y_1, z_1, \dots, z_s) \dots v_r(y_r, z_1, \dots, z_s), \quad (36)$$

przy czym

$$T_{\zeta_l}^{y_l} v_l(y_l, z_1, \dots, z_s) = \int_{a_l}^{b_l} \kappa_l(\zeta_l, y_l) v_l(y_l, z_1, \dots, z_s) dy_l = \bar{v}_l(\zeta_l, z_1, \dots, z_s), \quad (37)$$

przy $\kappa_l(\zeta_l, \cdot) \in L^\infty([a_l, b_l]) \forall \zeta_l \in \mathcal{R}$ $v_l(\cdot, z_1, \dots, z_s) \in L^1([a_l, b_l]) \forall (z_1, \dots, z_s) \in \mathcal{R}^s$ dla każdego $l = 1, \dots, r$.

Ważne jest, by transformacja (31) była injektywna, a więc odwracalna i by znana była formuła na wyznaczanie retransformaty nieznanego odwzorowania ze znanej transformaty tego odwzorowania (funkcji wektorowej).

W kontekście zastosowań transformacji całkowych do znajdowania rozwiązań zagadnień granicznych fundamentalne jest, by dobrać tak transformacje całkowe, aby

$$T_{\zeta}^y (K u(y, z)) = A_{\zeta} \bar{u}(\zeta, z) + \bar{B}_{\tilde{y}} u(\tilde{y}, z) + K_z \bar{u}(\zeta, z) = T_{\zeta}^y f(y, z) + T_{\zeta}^y g(\tilde{y}, z) = \bar{f}(\zeta, z) + \bar{g}(\zeta, z), \quad \tilde{y} \in \partial \mathcal{U}, \quad z \in \mathcal{W}, \quad (38-1)$$

$$T_{\zeta}^y (B u(y, \tilde{z})) = B_{\tilde{z}} \bar{u}(\zeta, \tilde{z}) = T_{\zeta}^y g(\zeta, \tilde{z}) = \bar{g}(\zeta, \tilde{z}), \quad \tilde{z} \in \partial \mathcal{W}, \quad (38-2)$$

$$B_{\tilde{y}} u(\tilde{y}, z) = g(\tilde{y}, z), \quad \tilde{y} \in \partial \mathcal{U}, \quad z \in \mathcal{W}, \quad (38-3)$$

gdzie A_{ζ} jest operatorem algebraicznym zależnym od zmiennych ζ traktowanych jako parametry, K_z jest operatorem różniczkowym zależnym od zmiennych z i parametrów ζ , $B_{\tilde{y}}$ jest specyficznym operatorem brzegowym zależnym od zmiennych \tilde{y} , $B_{\tilde{z}}$ jest operatorem brzegowym zależnym od zmiennych \tilde{z} i parametrów ζ . Zatem, jeśli spełniony jest warunek graniczny (38-3), to zagadnienie graniczne (1), (2) zostaje sprowadzone do zagadnienia granicznego (38-1), (38-2), tj.:

$$A_{\zeta} \bar{u}(\zeta, z) + K_z \bar{u}(\zeta, z) = \bar{f}(\zeta, z) + \bar{g}(\zeta, z), \quad z \in \mathcal{W}, \quad (39-1)$$

$$B_{\tilde{z}} \bar{u}(\zeta, \tilde{z}) = \bar{g}(\zeta, \tilde{z}), \quad \tilde{z} \in \partial \mathcal{W}, \quad (39-2)$$

na transformatę $\bar{u}(\zeta, z)$, w którym zmienne ζ są traktowane jako parametry. Jeżeli udaje się wyznaczyć to rozwiązanie tak, że potrafimy wyznaczyć retransformatę odwzorowania (funkcji wektorowej, układu funkcji) $\bar{u}(\zeta, z)$, to znajdujemy rozwiązanie naszego zagadnienia (1), (2).

W przypadku, gdy $s = 0$ ($r = n$, $\mathcal{U} = \mathcal{V}$, $\mathcal{W} = \emptyset$), zagadnienie (1), (2) zostaje sprowadzone do zagadnienia algebraicznego

$$A_{\zeta} \bar{u}(\zeta) = \bar{f}(\zeta). \quad (40)$$

W praktyce, z uwagi na trudności rachunkowe związane ze znajdowaniem retransformat rozwiązań zagadnień (39) lub (40), stosujemy wariant (32), (33) dla $r = 1$ lub $r = 2$ przy $m = 1$ lub $r = 1$ przy $m = 2$ (w tych przypadkach zwykle stosujemy te same transformacje). Dlatego też dalej przybliżymy najczęściej stosowane transformacje całkowe względem jednej zmiennej ($r = 1$) pojedynczych funkcji ($m = 1$). Natomiast w odniesieniu do znajdowania

retransformat wyznaczonych funkcji stosowane są dwa podejścia:

- 1) wykorzystuje się tablice transformat znanych funkcji oraz właściwości danej transformacji, na podstawie których udaje się wyznaczyć retransformatę otrzymanej funkcji;
- 2) stosuje się metody numeryczne, zwłaszcza całkowanie numeryczne, gdy transformacja odwrotna do transformacji danej jest określona za pomocą całki.

Wiele interesujących przykładów zastosowania transformacji całkowych do wyznaczania ścisłych rozwiązań analitycznych zagadnień granicznych z dynamiki konstrukcji wraz z przedstawieniem tych transformacji, ich właściwości i z tablicami transformat zawiera monografia Witolda Nowackiego pt. „Dynamika budowli” (Arkady, Warszawa 1972).

2. Transformacja Laplace’a

Niech $\mathcal{V} = (0, \infty)$ i niech $U_L(\bar{\mathcal{V}})$ będzie zbiorem funkcji rzeczywistych na przedziale $\bar{\mathcal{V}} = [0, \infty)$ spełniających warunki

$$\int_0^a |v(x)| dx < \infty \quad \forall a > 0,$$

$$|v(x)| < A \exp(\alpha x) \quad \forall x > 0 \quad \text{i pewnych } A > 0, \alpha > 1.$$

Zbiór ten jest przestrzenią liniową (na mocy kryterium podprzestrzeni). Definiujemy na niej transformację Laplace’a T_L za pomocą wzoru:

$$\bar{v}(p) = \int_0^{\infty} v(x) \exp(-px) dx, \quad p \in \mathcal{R} \quad (41)$$

(ogólniej: $p \in \mathcal{Z}$). Przykładowo,

$$v(x) = \cos \omega x \Rightarrow \bar{v}(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad (\omega > 0)$$

$$v(x) = \sin \omega x \Rightarrow \bar{v}(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

$$v(x) = H(x - x_0) = \begin{cases} 1, & x \geq x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow \bar{v}(p) = \frac{1}{p} \exp(-x_0 p) \quad (x_0 > 0).$$

Transformacja Laplace’a ma, m.in., następujące właściwości

1) Liniowość: $T_L(v_1 + v_2) = T_L v_1 + T_L v_2, \quad T_L(\alpha v) = \alpha T_L(v);$

2) Reguła podobieństwa: $T_L(v(\alpha x)) = \frac{1}{\alpha} \bar{v}\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (\alpha > 0);$

3) Reguła przesunięcia: $T_L(v(x - x_0)) = \exp(-x_0 p) \bar{v}(p);$

4) Reguła tłumienia: $T_L(v(x) \exp(-\alpha x)) = \bar{v}(p + \alpha);$

5) Transformacja pochodnej funkcji:

$$T_L(v^{(k)}(x)) = p^k \bar{v}(p) - p^{k-1} v(0) - p^{k-2} v'(0) + \dots - p v^{(k-2)}(0) - v^{(k-1)}(0) \quad (k \geq 1);$$

6) Różniczkowanie transformaty: $\frac{d^k}{d p^k} \bar{v}(p) = (-1)^k T_L(x^k v(x));$

7) Transformacja całki: $T_L(\int_0^x v(t) dt) = \frac{1}{p} \bar{v}(p);$

8) Transformacja splotu funkcji: $T_L(\int_0^x v_1(t)v_2(x-t) dt) = \bar{v}_1(p)\bar{v}_2(p)$.

Zastosowanie transformacji Laplace'a do rozwiązywania zagadnień granicznych pokażemy na przykładzie zagadnienia początkowego dla oscylatora harmonicznego obciążonego daną siłą zmienną w czasie (zachowując oznaczenie x na zmienną czasową). Mamy zatem do rozwiązania następujące zagadnienie początkowe złożone z

a) równania różniczkowego: $u'' + \omega^2 u = a \exp(-bx)$, $x \in (0, \infty)$ ($a, b, \omega > 0$),

b) warunków początkowych: $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$.

Dokonujemy transformacji Laplace'a równania różniczkowego, wykorzystując jej właściwości oraz warunki początkowe:

$$T_L(u'' + \omega^2 u) = T_L(a \exp(-bx)),$$

$$T_L(u'' + \omega^2 u) = T_L(u'') + \omega^2 T_L(u),$$

$$T_L(u'') = p^2 \bar{u}(p) - pu_0 - v_0,$$

$$T_L(a \exp(-bx)) = a T_L(1 \exp(-bx)) = a \frac{1}{p+b}.$$

Otrzymujemy równanie algebraiczne na transformatę $\bar{u}(p)$:

$$p^2 \bar{u}(p) - pu_0 - v_0 + \omega^2 \bar{u}(p) = \frac{a}{p+b},$$

skąd znajdujemy wyrażenie na transformatę, które przedstawimy w postaci

$$\bar{u}(p) = \frac{a}{\omega} \frac{1}{p+b} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} + u_0 \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \frac{v_0}{\omega} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Retransformatę można wyznaczyć, korzystając wzoru na transformację odwrotną

$$T_L^{-1} \bar{v} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\alpha - \beta i}^{\alpha + \beta i} \bar{v}(p) \exp(px) dp, \quad (43)$$

przy czym obliczenie całki w tym wzorze nie jest z reguły proste. Można też skorzystać z wykazu transformat i retransformat wielu najczęściej spotykanych funkcji oraz z znacznej listy właściwości transformacji Laplace'a. W ten sposób znajdujemy

$$\begin{aligned} u(x) &= T_L^{-1} \bar{u}(p) = \frac{a}{\omega} T_L^{-1} \left(\frac{1}{p+b} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) + u_0 T_L^{-1} \left(\frac{p}{p^2 + \omega^2} \right) + \frac{v_0}{\omega} T_L^{-1} \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) = \\ &= \frac{a}{\omega} \int_0^x \exp(-b(x-t)) \sin \omega t dt + u_0 \cos \omega x + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega x. \end{aligned}$$

Nietrudno jest zauważyć, że transformacja Laplace'a może być użyteczna w rozwiązywaniu przede wszystkim w tych zagadnieniach, dla których możliwe są do określenia warunki początkowe dla poszukiwanej funkcji.

3. Transformacje nieskończone Fouriera

Transformacja nieskończona (ekspotencjalna) Fouriera była już wprowadzona w rozdz. 4.3, p.7 celem rozwiązania zagadnienia początkowego dla równania parabolicznego niestacjonarnego rozkładu temperatury w ośrodku nieskończonym, względem zmiennej przestrzennej $x \in \mathcal{V} = (-\infty, +\infty)$. Zrekapitulujemy zatem główne definicje i właściwości oraz

przykłady transformaty i retransformaty nieskończonej Fouriera pod kątem zastosowania do znajdowania rozwiązań równań różniczkowych.

Niech U_F będzie przestrzenią tych funkcji $v: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, które spełniają warunki

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |v(x)| dx < \infty.$$

Transformację nieskończoną Fouriera T_F (ekspotencjalną) definiujemy jako przyporządkowanie

$$T_F: v(x) \rightarrow \hat{v}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{R}} v(x) \exp(-i\zeta x) dx. \quad (44)$$

Można wykazać, że

$$! \hat{v}(\cdot) \in L^\infty;$$

$$!! v(\cdot) \in L^2 \cap U_F \Rightarrow \hat{v}(\cdot) \in L^2;$$

$$!!! \hat{v}(\cdot) \in U_F \Rightarrow (T_F^{-1} \hat{v})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{R}} \hat{v}(\zeta) \exp(+i\zeta x) d\zeta. \quad (45)$$

Przykładowo:

$$v(x) = \exp(-\alpha x^2) \rightarrow \hat{v}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \exp(-\zeta^2 / 4\alpha),$$

$$v(x) = \exp(-\alpha |x|) \rightarrow \hat{v}(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \zeta^2},$$

$$v(x) = \exp(-\alpha x) H(x) \rightarrow \hat{v}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\alpha + i\zeta}.$$

Ponadto, transformacja niekończona Fouriera ma m.in. następujące właściwości:

1) T_F jest liniowa;

$$2) T_F v(x-a) = \exp(-i a \zeta) \hat{v}(\zeta);$$

$$3) T_F v(ax) = \frac{1}{|a|} \hat{v}\left(\frac{\zeta}{a}\right);$$

$$4) T_F v^{(k)}(x) = (i\zeta)^k \hat{v}(\zeta);$$

$$5) T_F x^k v(x) = i^k \frac{d^k \hat{v}}{d\zeta^k}(\zeta);$$

$$6) T_F \int_0^x v_1(t) v_2(x-t) dt = \sqrt{2\pi} \hat{v}_1(\zeta) \hat{v}_2(\zeta);$$

$$7) T_F (v_1(x) v_2(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\zeta \hat{v}_1(t) \hat{v}_2(\zeta-t) dt.$$

Tytułem ilustracji zastosowania znajdziemy całkę szczególną równania.

$$-2u''(x) + u(x) = \exp(-2x) H(x)$$

Dokonując transformacji T_F tego równania, otrzymujemy

$$T_F[-2u''(x) + u(x)] = -2 T_F u''(x) + T_F u(x) = [-2(i\zeta)^2 + 1] \hat{u}(\zeta),$$

$$T_F[\exp(-2x)H(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2+i\zeta},$$

skąd znajdujemy wyrażenie na transformatę poszukiwanej całki

$$\hat{u}(\zeta) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2+i\zeta} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1/\sqrt{2}}{1/2+\zeta^2},$$

a w konsekwencji (w zależności od sposobu postępowania)

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \int_0^x H(x-t) \exp(-2(x-t)) \exp(-|t|/\sqrt{2}) dt = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+i\zeta} \frac{1/\sqrt{2}}{1/2+\zeta^2} \exp(+i\zeta x) d\zeta. \end{aligned}$$

Ten prosty przykład nie przesądza o (nie)przydatności transformacji całkowej Fouriera.

Jeżeli wzory (44) i (45) przedstawimy w postaci

$$\begin{aligned} \hat{v}(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{R}} v(x) \exp(-i\zeta x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{R}} v(x) \cos \zeta x dx - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{R}} v(x) \sin \zeta x dx, \\ v(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{R}} \hat{v}(\zeta) \exp(+i\zeta x) d\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{R}} \hat{v}(\zeta) \cos \zeta x d\zeta + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{R}} \hat{v}(\zeta) \sin \zeta x d\zeta, \end{aligned}$$

to wprowadzając oznaczenia

$$\hat{v}_c(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} v(x) \cos \zeta x dx, \quad \hat{v}_s(\zeta) = \int_0^{\infty} v(x) \sin \zeta x dx,$$

dla $v(\cdot)$ z przestrzeni $U_F([0, \infty))$ tych funkcji, które spełniają warunki

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0, \quad \int_0^{+\infty} |v(x)| dx < \infty,$$

otrzymujemy dla rozszerzenia parzystego (symetrycznego) $v^p(x)$ i nieparzystego $v^n(x)$ (przy $v^n(0) = 0$) funkcji $v(\cdot)$ następujące tożsamości:

$$\hat{v}^p(\zeta) = \hat{v}_c(\zeta) = \hat{v}^p(-\zeta), \quad \hat{v}^n(\zeta) = -i \hat{v}_s(\zeta) = -\hat{v}^n(-\zeta),$$

przy $\zeta \in (-\infty, +\infty)$, a więc wystarczy, że dla $\zeta \in [0, +\infty)$, a ponadto

$$\begin{aligned} v(x) &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \hat{v}^p(\zeta) \cos \zeta x d\zeta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{v}_c(\zeta) \cos \zeta x d\zeta = \\ &= 2i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \hat{v}^n(\zeta) \sin \zeta x d\zeta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{v}_s(\zeta) \sin \zeta x d\zeta. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy zatem, że uzasadnione jest zdefiniowanie dla funkcji $v(\cdot)$ z przestrzeni $U_F([0, \infty))$ dwóch transformacji całkowych – transformacji nieskończonej cosinusowej Fouriera i transformacji nieskończonej sinusowej Fouriera:

$$T_{Fc} v: \hat{v}_c(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} v(x) \cos \zeta x dx, \quad (46-1)$$

$$T_{Fs} v: \hat{v}_s(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} v(x) \sin \zeta x dx, \quad (46-2)$$

których odwrotności określone są wzorami:

$$T_{Fc}^{-1} \hat{v}_c : v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{v}_c(\zeta) \cos \zeta x d\zeta, \quad (47-1)$$

$$T_{Fs} \hat{v}_s : v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{v}_s(\zeta) \sin \zeta x d\zeta. \quad (47-2)$$

Do najważniejszych właściwości tych transformacji całkowych należą:

- 1) Liniowość;
- 2) Reguły transformacji pochodnych funkcji.

Jeżeli $v(\cdot)$ i jej kolejne pochodne należą do przestrzeni funkcyjnej $U_F([0, \infty))$, to

$$T_{Fc} v'(x) = \zeta \hat{v}_s(\zeta) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} v(0), \quad T_{Fs} v'(x) = -\zeta \hat{v}_c(\zeta),$$

$$T_{Fc} v''(x) = -\zeta^2 \hat{v}_c(\zeta) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} v'(0), \quad T_{Fs} v''(x) = -\zeta^2 \hat{v}_s(\zeta) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \zeta v(0),$$

$$T_{Fc} v^{(3)}(x) = -\zeta^3 \hat{v}_s(\zeta) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \zeta^2 v(0) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} v''(0),,$$

$$T_{Fs} v^{(3)}(x) = \zeta^3 \hat{v}_c(\zeta) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \zeta v'(0),$$

$$T_{Fc} v^{(4)}(x) = \zeta^4 \hat{v}_c(\zeta) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \zeta^2 v'(0) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} v^{(3)}(0),,$$

$$T_{Fs} v^{(4)}(x) = \zeta^4 \hat{v}_s(\zeta) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \zeta^3 v(0) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \zeta v''(0),$$

...

Wynika z powyższego, że w kontekście zastosowań do rozwiązywania zagadnień granicznych, obie transformacje są przydatne w przypadku obszarów „półnieskończonych”, gdy zmienna przestrzenna lub jedna ze zmiennych przestrzennych jest w przedziale $[0, \infty)$ (np. w przypadku półprostej, półpłaszczyzny lub półprzestrzeni) i głównie w przypadku zagadnień brzegowych dla równań o parzystych pochodnych, które np. w mechanice ośrodków materialnych i konstrukcji są bardzo powszechne, a ponadto warunkami brzegowymi przy $\tilde{x} = 0$, zawierającymi tylko parzyste pochodne (transformacja kosinusowa) lub tylko pochodne nieparzyste (transformacja sinusowa).

W celu ilustracji zastosowania nieskończonej trygonometrycznej transformacji Fouriera rozważmy zginanie półnieskończonej belki Bernoulli'ego o współczynniku sztywności giętej EJ , znajdującej się na sprężystym podłożu Winklera o współczynniku sztywności k , podpartej na końcu przegubowo nieprzesuwnie i obciążonej w tym końcu momentem skupionym M . w sposób ciągły od końca podpartego na odcinku o długości l .

Mamy zatem następujące zagadnienie brzegowe do rozwiązania:

- równanie różniczkowe

$$EJ w^{(4)}(x) + k w(x) = 0$$

- warunki brzegowe

$$w(0) = 0, \quad EJ w''(0) = -M,$$

gdzie $w = w(x)$, $x \in [0, \infty)$ jest funkcją ugięcia belki. Stosując do równania transformację nieskończoną sinusową Fouriera i uwzględniając w wyrażeniu na transformatę $T_{Fs} w^{(4)}(x)$ warunki brzegowe, otrzymujemy wyrażenie na transformatę $\hat{w}(\zeta)$, $\zeta \in [0, \infty)$

$$\hat{w}_s(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{M}{EJ} \frac{\zeta}{\zeta^4 + \alpha^4}, \quad \alpha^4 = \frac{k}{EJ},$$

skąd

$$w = \frac{M}{EJ\alpha^2} \exp(-\alpha x / \sqrt{2}) \sin(\alpha x / \sqrt{2}).$$

Linia ugięcia ma kształt fali stojącej o zanikającej eksponentalnie amplitudzie wraz z odległością od miejsca jej wywołania.

4. Transformacja Hankela

Transformacja Hankela, zwana także transformacją Fouriera-Bessela, ma zastosowanie głównie do zmiennej radialnej z zagadnieniami granicznymi w obszarach osiowo symetrycznych.

Definicję tej transformacji określa wzór

$$T_H : v(r) \rightarrow \tilde{v}_l(\rho) = \int_0^\infty v(r) J_l(r\rho) r dr, \quad (48-1)$$

gdzie \tilde{v}_l jest transformatą rzędu l funkcji $v(\cdot)$ z przestrzeni U_H funkcji $v : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{R}$ przedziałami ciągłych, ograniczonych w tym sensie, że $\int_0^\infty |v(r)| \sqrt{r} dr < \infty$, J_l jest funkcją Bessela rzędu l ($l \geq -1/2$) (zob. rozdz. 3.2, p. 6 i rozdz. 6.3, p.2)

$$J_l(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(l+n+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+l}, \quad (48-2)$$

przy czym

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{J_l(r)}{r} = \begin{cases} \infty, & l < 1 \\ 1/2, & l = 1 \\ 0, & l > 1 \end{cases}, \quad \frac{d}{dr} J_k(r) = \frac{k}{r} J_k(r) - J_{k+1}(r) = J_{k-1}(r) - \frac{k}{r} J_k(r) \quad (k \in \mathcal{N})$$

zaś funkcja gamma Eulera dana jest wzorem

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty t^{q-1} e^{-t} dt, \quad q \in \mathcal{R} \quad (48-3)$$

i ma, m.in., właściwości

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(q+1) = q \Gamma(q), \quad \Gamma(n+1) = n!$$

Transformatę rzędu $l = 0$ oznaczать będziemy po prostu przez \tilde{v} .

Przykładowo, mamy:

$$T_H \left(\frac{1}{r} \right)_0 = \frac{1}{\rho}, \quad T_H(r)_0 = -\frac{1}{\rho^3}, \quad T_H \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)_0 = \frac{1}{\rho} \exp(-\rho |z|) \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Ciekawostką pewną jest to, że transformację odwrotną (retransformatę) określa taki sam wzór jak transformatę

$$T_H^{-1} : \tilde{v}_l(\rho) \rightarrow v(r) = \int_0^\infty \tilde{v}_l(\rho) J_l(\rho r) \rho d\rho. \quad (49)$$

Spośród właściwości transformacji Hankela wymienimy te szczególnie istotne dla wyznaczania rozwiązań równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_H \left(\frac{d}{dr} v(r) \right)_0 &= \mathbf{T}_H (v(r))_1 = \tilde{v}_1(\rho), \\ \mathbf{T}_H \left(\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l^2}{r^2} \right) v(r) \right)_l &= -\rho^2 \tilde{v}_l(\rho), \\ \mathbf{T}_H^{-1} \left(\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{l^2}{\rho^2} \right) \tilde{v}_l(\rho) \right)_0 &= -r^2 v(r). \end{aligned}$$

Dla ilustracji, zastosujemy transformację Hankela do rozwiązania osiowo symetrycznego ugięcia membrany kołowej o promieniu r_1 i napięciu obwodowym S , obciążonej osiowo symetrycznie siłą rozłożoną równomiernie o wartości P na powierzchni kołowej o promieniu r_0 . Mamy zatem do rozwiązania zagadnienie brzegowe na obszarze kołowym \mathcal{K} o promieniu r_1 z nieznaną funkcją $u = u(r)$, $r \in [0, r_1]$ nieosobliwą przy $r = 0$ i z warunkiem brzegowym $u(r_1) = 0$. Równaniem różniczkowym ugięcia membrany jest równanie Poissona

$$S \Delta u(r) = p(r), \quad r \in (0, r_1),$$

przy

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}, \quad p(r) = \begin{cases} \frac{P}{\pi r_0^2}, & r \in [0, r_0) \\ 0, & r \in [r_0, r_1) \end{cases}.$$

Dokonując transformacji Hankela rzędu $l = 0$ powyższego równania otrzymujemy

$$\tilde{u}(\rho) = -\frac{P}{\pi S r_0^2} \frac{\tilde{p}_0(\rho)}{\rho^2},$$

$$\tilde{p}_0(\rho) = \mathbf{T}_H(p_0(r))_0 = \int_0^{r_0} J_0(\rho r) r dr = \frac{p_0 r_0}{\rho} J_1(\rho r_0), \quad p_0(r) = \begin{cases} 1, & r \in [0, r_0) \\ 0, & r \in [r_0, r_1) \end{cases},$$

skąd znajdujemy

$$\tilde{u}(\rho) = \frac{P}{\pi S r_0^2} \frac{1}{\rho^2} \int_0^{r_0} J_0(\rho r) r dr = \frac{P}{\pi S r_0} \frac{1}{\rho^3} J_1(\rho r_0),$$

$$\text{a więc } u(r) = \frac{P}{\pi S r_0^2} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^2} J_0(r\rho) \left(\int_0^{r_0} J_0(\rho r) r dr \right) \rho d\rho = \frac{P}{\pi S r_0} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^3} J_0(r\rho) J_1(r_0 \rho) \rho d\rho =$$

$$= \frac{P}{\pi S r_0^2} \begin{cases} \frac{1}{4} (r_0^2 - r^2) + \frac{1}{2} r_1^2 \ln \frac{r_1}{r_0}, & r \in [0, r_0) \\ \frac{1}{2} r_1^2 \ln \frac{r_1}{r}, & r \in [r_0, r_1] \end{cases}$$

6.5. Metody przybliżone

1. Uwagi wstępne. Rozwiązania przybliżone zagadnień granicznych

Rozważmy zagadnienie graniczne (1), (2) – zarówno w postaci klasycznej jak i w sformułowaniu nieklasycznym (por. (3)).

Możliwości rozwiązania tego zagadnienia w sposób ścisły lub formalnie ścisły (np. za pomocą szeregu Fouriera, szeregu potęgowego czy w postaci całki z transformaty całkowej) są ograniczone (por. p. 6.1 i p. 6.2-6.4). Potrzeby poznawcze i praktyczne, rosnące wraz z postępem naukowym i technicznym powodują, że coraz większego znaczenia nabierają metody przybliżone, zwłaszcza takie, które prowadzi do algorytmów „komputeryzowalnych”.

Wiążą się z tym następujące główne problemy (pytania):

- 1) Jak rozumieć „przybliżoność” rozwiązania danego zagadnienia granicznego, a w szczególności w jakiej „mierze” rozstrzygać dokładność rozwiązania przybliżonego tego zagadnienia ?
- 2) Do jakiego zagadnienia matematycznego i w jaki sposób należy „zredukować” (przetransformować) relacje wyjściowego zagadnienia granicznego?
- 3) W jaki sposób, tj. przy użyciu jakich metod i algorytmów (tj. przy wykorzystaniu jakich „narzędzi” matematycznych) można uzyskać rozwiązanie (przybliżone) zagadnienia, do którego do którego sprowadzono („zredukowano”) wyjściowe zagadnienie graniczne ?

Odnosnie problemu 1), jeżeli rozwiązanie ściśle $u(\cdot)$ zagadnienia wyjściowego należy do zbioru $U_{n,m}(\bar{\mathcal{V}})$ przestrzeni $V_{n,m}(\bar{\mathcal{V}})$ (\mathcal{V} obszar w przestrzeni \mathcal{R}^n), to rozwiązanie przybliżone $v(\cdot)$ może być elementem zbioru $S_{n,m}(\mathcal{Z})$ przestrzeni $V_{n,m}(\mathcal{Z})$, gdzie \mathcal{Z} jest pewnym podzbiorem przestrzeni \mathcal{R}^n – takim, że $\mathcal{X} = \bar{\mathcal{V}} \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset$. Wtedy zasadniczo porównywanie $v(\cdot)$ z $u(\cdot)$ jest możliwe na zbiorze \mathcal{X} . W szczególności, niezbędne jest sprecyzowanie, co oznacza stwierdzenie „ $v(\cdot)$ przybliża $u(\cdot)$ na zbiorze \mathcal{X} ” zapisywane symbolicznie $v(\cdot) \underset{\mathcal{X}}{\approx} u(\cdot)$.

Niech $X_{n,m}(\mathcal{X})$ będzie podzbiorem przestrzeni $V_{n,m}(\mathcal{X})$, z metryką $d_{\mathcal{X}}$ (może to być w szczególności podprzestrzeń liniowa, w tym unormowana z metryką $\rho_{\mathcal{X}}$ generowaną przez normę). Powiemy, że $v(\cdot) \underset{\mathcal{X}}{\approx} u(\cdot)$ z dokładnością ε , jeżeli $d_{\mathcal{X}}(v(\cdot), u(\cdot)) \leq \varepsilon$. Dodatkowo, zbiór \mathcal{X} powinien być bliski $\bar{\mathcal{V}}$, co zapisujemy symbolicznie $\mathcal{X} \approx \bar{\mathcal{V}}$. Oczywiście, nie jest sztuką ocenić w ten sposób rozwiązanie przybliżone, gdy znamy rozwiązanie ścisłe. Trudniej jest, gdy go nie znamy. Ale są metody przybliżone, dla których jest to możliwe. Generalnie zajmują się tym metody jakościowe równań różniczkowych. Jednym ze sposobów jest testowanie dokładności metody przybliżonej na przypadkach stosunkowo prostych (np. ze względu na obszar \mathcal{V} czy prawą stronę równania f), dla których można uzyskać rozwiązanie ściśle zagadnienia granicznego. Te przypadki, to tzw. „benchmarki”.

W przypadku wielu metod przyjmuje się $\mathcal{Z} = \bar{\mathcal{V}}$, co oznacza, że $\mathcal{X} = \bar{\mathcal{V}}$. Są jednak metody (użyteczne), dla których dobór zbioru \mathcal{Z} i relacja $\mathcal{X} \approx \bar{\mathcal{V}}$ nie są proste. Jeżeli \mathcal{Z} jest

obszarem (np. w MES), to można przyjąć, że relacja ta oznacza $\text{mes}(\bar{\mathcal{V}} - \mathcal{X}) \leq \delta$ (lub $\text{mes}(\bar{\mathcal{V}} - \mathcal{Z}) + \text{mes}(\mathcal{Z} - \bar{\mathcal{V}}) \leq \delta$) dla danego δ . Jeżeli, natomiast, \mathcal{Z} jest zbiorem dyskretnym, to relację $\mathcal{X} \approx \bar{\mathcal{V}}$ można rozumieć jako kryterium δ -sieci: $\forall x \in \bar{\mathcal{V}} \exists \zeta \in \mathcal{X} |x - \zeta| \leq \delta$, ale też $\forall \zeta \in \mathcal{X} \exists x \in \bar{\mathcal{V}} |x - \zeta| \leq \delta$.

W powyższych określeniach przybliżenia $u(\cdot)$ przez $v(\cdot)$ i $\bar{\mathcal{V}}$ przez \mathcal{X} chodziłoby o coś więcej, tj. o przybliżenia z dowolną dokładnością (tj. dla dowolnie małych $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$, a więc o skonstruowanie takiej rodziny przybliżeń \mathcal{Z}_I oraz $v_I(\cdot)$ z rodziny zbiorów $S_{n,m}^I(\mathcal{Z}_I)$ przestrzeni $V_{n,m}^I(\mathcal{Z}_I)$ (I należy do zbioru indeksów \mathcal{J}), że dla dowolnej zadanej dokładności istnieje takie I iż jeśli $\mathcal{X}_I = \mathcal{Z}_I \cap \bar{\mathcal{V}}$, to $\mathcal{X}_I \approx \bar{\mathcal{V}}$ oraz $v_I(\cdot) \approx u(\cdot)$ na zbiorze \mathcal{X}_I . O rodzinie takiej mówimy, że jest aproxymacyjna.

Odnosnie konstrukcji rozwiązania przybliżonego $v_I(\cdot)$ pragmatyka postępowania nakazuje, by było ono kombinacją liniową prostych funkcji (np. jednomianów, prostych wielomianów, funkcji trygonometrycznych) i nieznanymi parametrów, które wyznaczymy z zagadnienia zredukowanego zagadnienia wyjściowego lub \mathcal{Z}_I było zbiorem dyskretnym.

Rozwijając nieco problem 2) z wymienionych na wstępie, chodzi o metodę (sposób, algorytm) konstrukcji zbioru \mathcal{Z} , zbioru funkcji (wektorowych) $S_{n,m}(\mathcal{Z})$ oraz zagadnienia, z którego należy wyznaczyć $v(\cdot)$. W szczególności chodzi o sformułowanie sposobu (algorytmu), za pomocą którego będzie możliwa transformacja wyjściowego zagadnienia granicznego (1), (2) (lub (4)) do zagadnienia postaci (na przykład),

$$A(\cdot)v(\cdot) = b(\cdot),$$

gdzie $A(\cdot)$ jest znanym odwzorowaniem (operatorem) na $S_{n,m}(\mathcal{Z})$, $b(\cdot)$ jest znaną funkcją (wektorową), a $v(\cdot)$ poszukiwanym rozwiązaniem przybliżonym. Dalej w tym podrozdziale skoncentrujemy uwagę głównie na tym problemie (zadaniu).

Natomiast w kwestii problemu 3), tj. wyznaczenia rozwiązania przybliżonego $v(\cdot)$ zredukowanego problemu, to założyliśmy, że redukujemy do takiego zagadnienia, które ma rozwiązanie i znana jest metoda jego rozwiązania. Zatem jest to problem techniczny, związany z umiejętnościami obliczeniowymi „warsztatowymi”, którymi w tym opracowaniu nie będziemy się zajmować.

2. Metody ważonych residuów. Przypadek redukcji do równań algebraicznych

Niech \mathcal{Z} będzie obszarem domkniętym w przestrzeni \mathcal{R}^n i niech dla ustalenia uwagi $\mathcal{Z} = \bar{\mathcal{V}}$ (choćby prezentowane metody można skonstruować przy $\mathcal{Z} \neq \bar{\mathcal{V}}$ i odpowiednim warunkiem $\mathcal{Z} \approx \bar{\mathcal{V}}$).

Niech $X_{n,m}(\mathcal{X})$ ($\mathcal{X} = \mathcal{Z} = \bar{\mathcal{V}}$) będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $V_{n,m}(\mathcal{X})$, złożoną z tych funkcji (wektorowych, odwzorowań), dla których określone jest jednoznacznie działanie operatora różniczkowego K w obszarze i operatora (multioperatora) brzegowego na

brzegu $\partial\mathcal{V}$. Niech przy tym $X_{n,m}(\mathcal{X})$ będzie unormowana z normą $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$. Załóżmy, że w przestrzeni $X_{n,m}(\mathcal{X})$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $u(\cdot)$ wyjściowego zagadnienia granicznego ($u(\cdot) \in U_{n,m}(\bar{\mathcal{V}}) \subseteq X_{n,m}(\bar{\mathcal{V}})$).

Niech $(\psi_0(\cdot), \psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot)) \subset X_{n,m}(\mathcal{X})$ ($N \in \mathcal{N}$) będzie danym układem funkcji (wektorowych, odwzorowań), a $S_{n,m}(\mathcal{X}) = \text{lin}(\psi_0(\cdot), \psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$ będzie przestrzenią rozpiętą na tym układzie.

Rozwiązania przybliżonego $v(\cdot)$ rozważanego zagadnienia poszukujemy jako elementu $S_{n,m}(\mathcal{X})$, czyli w postaci:

$$v(x) = a_0\psi_0(x) + a_1\psi_1(x) + \dots + a_N\psi_N(x), \quad x \in \mathcal{X}, \quad (50)$$

gdzie (a_0, a_1, \dots, a_N) jest nieznanym układem współczynników liczbowych. Ponieważ na ogół $v(\cdot)$ nie spełnia relacji wyjściowego zagadnienia granicznego, więc

$$\mathbf{K}v(x) = f(x) + r(x), \quad x \in \mathcal{V}, \quad (51-a)$$

$$\mathbf{B}v(\tilde{x}) = g(\tilde{x}) + \rho(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \partial\mathcal{V}, \quad (51-b)$$

gdzie $r(\cdot) \in V_{n,m}(\mathcal{V})$, a $\rho(\cdot)$ jest odpowiednią multifunkcją (tego samego typu, co $g(\cdot)$) na $\partial\mathcal{V}$, zwanymi odpowiednio residuum równania różniczkowego i residuum warunków granicznych (w mechanice najczęściej mają interpretację reakcji więzów narzuconych przez postać (50) na funkcję $u(\cdot)$).

Niech następnie $\overset{\circ}{U}_{n,m}(\mathcal{V})$ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $V_{n,m}(\mathcal{V})$, zaś $\overset{\circ}{W}_{n,m}(\partial\mathcal{V})$ podprzestrzenią liniową przestrzeni (multi)funkcji określonych na $\partial\mathcal{V}$ – tak, że określone są produkty dualne $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overset{\circ}{U}}$ oraz $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overset{\circ}{W}}$, dla których określone są z kolei

$$\langle r(\cdot), u_0(\cdot) \rangle_{\overset{\circ}{U}} \text{ oraz } \langle \rho(\cdot), w_0(\cdot) \rangle_{\overset{\circ}{W}} \text{ odpowiednio dla wszystkich } u_0(\cdot) \in \overset{\circ}{U}_{n,m}(\mathcal{V}) \text{ i}$$

$$w_0(\cdot) \in \overset{\circ}{W}_{n,m}(\partial\mathcal{V}) \text{ (zwykle są to całki } \langle r(\cdot), u_0(\cdot) \rangle_{\overset{\circ}{U}} = \int_{\mathcal{V}} r(x) \cdot u_0(x) dV \text{ i}$$

$$\langle \rho(\cdot), w_0(\cdot) \rangle_{\overset{\circ}{W}} = \int_{\partial\mathcal{V}} \rho(x) \bullet w_0(x) dS,$$

w których "·" i "•" oznaczają iloczyn skalarny w przestrzeni \mathcal{R}^m i $\mathcal{R}^{\kappa m}$ (κ - połowa rzędu operatora \mathbf{K} w przypadku zagadnienia brzegowego).

Niech z kolei $(\eta_1(\cdot), \dots, \eta_N(\cdot))$ będzie układem liniowo niezależnych funkcji (wektorowych, odwzorowań) z przestrzeni $\overset{\circ}{U}_{n,m}(\mathcal{V})$, zwanych dalej funkcjami wagowymi w obszarze \mathcal{V} a $(\zeta_1(\cdot), \dots, \zeta_N(\cdot))$ układem niezależnych (multi)funkcji z przestrzeni $\overset{\circ}{W}_{n,m}(\partial\mathcal{V})$, zwanych dalej (multi)funkcjami wagowymi na brzegu $\partial\mathcal{V}$.

Istotą metod ważonych residuów jest, by spełnione było równanie

$$\langle r(\cdot), u_o(\cdot) \rangle_{\mathring{U}} + \langle \rho(\cdot), w_o(\cdot) \rangle_{\mathring{W}} = 0 \quad (52)$$

dla dowolnych $u_o(\cdot) \in \text{lin}(\eta_1(\cdot), \dots, \eta_N(\cdot))$ i dowolnych $w_o(\cdot) \in \text{lin}(\zeta_1(\cdot), \dots, \zeta_N(\cdot))$, zwane równaniem ważonych residuów.

W zależności od doboru przestrzeni $X_{n,m}(X)$ i układu $(\psi_0(\cdot), \psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$, doboru przestrzeni $\mathring{U}_{n,m}(\mathcal{V})$ i układu $(\eta_1(\cdot), \dots, \eta_N(\cdot))$ oraz doboru przestrzeni $\mathring{W}_{n,m}(\partial\mathcal{V})$ i układu $(\zeta_1(\cdot), \dots, \zeta_N(\cdot))$, a także od definicji produktów dualnych $\langle r(\cdot), u_o(\cdot) \rangle_{\mathring{U}}$ i $\langle \rho(\cdot), w_o(\cdot) \rangle_{\mathring{W}}$ otrzymujemy określony przypadek szczególny metody z grupy (rodziny) ważonych residuów i adekwatne uzasadnienie jej sensowności (poprawności). Równanie (52) ma zatem charakter równania globalnego.

W szczególnym przypadku całkowitej postaci wymienionych produktów dualnych równanie ważonych residuów przyjmuje postać

$$\int_{\mathcal{V}} r(x) \cdot u_o(x) dV + \int_{\partial\mathcal{V}} \rho(x) \cdot w_o(x) dS = 0,$$

czyli po wykorzystaniu (51), (52) – postać

$$\int_{\mathcal{V}} [Kv(x) - f(x)] \cdot u_o(x) dV + \int_{\partial\mathcal{V}} [Bv(\tilde{x}) - g(\tilde{x})] \cdot w_o(\tilde{x}) dS = 0,$$

przypominającą bardzo postać sformułowania globalnego klasycznego zagadnienia granicznego (por. rozdz. 5.2, p. 1 i rozdz. 5.3).

W innym przypadku, korzystając z pojęcia dystrybucji (por. rozdz. 1.2) i ze sformułowania dystrybucyjnego zagadnienia brzegowego (rozdz. 5.2, p. 4) i zagadnienia początkowego (rozdz. 5.4), przyjmując $\mathring{U}_{n,m}(\mathcal{V}) = C_{n,m}^{\infty}(\mathcal{V})$ i $\langle r(\cdot), u_o(\cdot) \rangle_{\mathring{U}} = \langle\langle r, u_o \rangle\rangle_{\mathcal{V}}$, otrzymujemy po wykorzystaniu (51), wobec $w_o(\tilde{x}) = 0$, $\tilde{x} \in \partial\mathcal{V}$, równanie dystrybucyjne

$$\langle\langle Kv - f, u_o \rangle\rangle_{\mathcal{V}} = 0.$$

Poniżej, w przykładach pokażemy jak ze sformułowania podstawowego (52) równania ważonych residuów otrzymać znane w literaturze szczególne przypadki metody ważonych residuów.

Przykład 1 (metoda Kantorowicza). Dobieramy układ $(\psi_0(\cdot), \psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$ tak, aby

$$\begin{aligned} B\psi_0(\tilde{x}) &= g(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \partial\mathcal{V}, \\ B\psi_I(\tilde{x}) &= 0, \quad \tilde{x} \in \partial\mathcal{V} \quad (I=1, \dots, N) \end{aligned}$$

i przyjmujemy $a_0 = 1$ w sumie (50), czyli postulujemy rozwiązanie przybliżone w postaci

$$v(x) = \psi_0(x) + a_1\psi_1(x) + \dots + a_N\psi_N(x), \quad x \in X. \quad (a)$$

Zatem jest

$$Bv(\tilde{x}) = g(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \partial\mathcal{V},$$

a więc

$$\rho(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in \partial\mathcal{V}. \quad (b)$$

Niech $u_0 = b_1\eta_1(x) + \dots + b_N\eta_N(x)$, $x \in \mathcal{V}$, przy dowolnym ciągu $(b_1, \dots, b_N) \in \mathcal{R}^N$.

Po podstawieniu do równania (52), wobec dowolności (b_I) , otrzymujemy

$$\langle \mathbf{K}v(\cdot) - f(\cdot), \eta_I(\cdot) \rangle_{\circ} = 0 \quad I = 1, \dots, N, \quad (c)$$

co z kolei po uwzględnieniu (a) prowadzi do następującego układu równań algebraicznych na ciąg nieznanych współczynników (a_1, \dots, a_N) w prezentowanej metodzie (niezależnie jaka by nie była definicja produktu dualnego $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\circ}$):

$$\sum_{J=1}^N A_{JI} a_J = B_I, \quad I = 1, \dots, N, \quad (d)$$

gdzie

$$A_{JI} = \langle \psi_J(\cdot), \eta_I(\cdot) \rangle_{\circ}, \quad f_I = \langle f(\cdot) - \mathbf{K}\psi_0(\cdot), \eta_I(\cdot) \rangle_{\circ} \quad (I, J = 1, \dots, N). \quad (e)$$

Jeżeli, na przykład, produkt dualny jest iloczynem skalarnym w przestrzeni unitarnej

$X_{n,m}(X) = L_{n,m}^2(\bar{\mathcal{V}})$ ($X = \bar{\mathcal{V}}$), tj. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\circ} = \langle \cdot, \cdot \rangle$, $\overset{\circ}{U}_{n,m}(\mathcal{V})$ jest podprzestrzenią tych funkcji (wektorowych) $v(\cdot)$ z $L_{n,m}^2(\bar{\mathcal{V}})$, dla których $\mathbf{B}v(\cdot) = 0$ i przy $N \rightarrow \infty$ układ

$(\eta_1(\cdot), \dots, \eta_N(\cdot))$ jest zupełny, a przestrzeń lin $(\psi_0(\cdot), \psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$ jest aproksymacyjna w przestrzeni $L_{n,m}^2(\bar{\mathcal{V}})$, to mamy zapewnioną dokładność rozwiązania przybliżonego (a). Ten przypadek nosi nazwę procedury ortogonalizacji ($\mathbf{K}v(\cdot) - f(\cdot) \perp \overset{\circ}{U}_{n,m}(\mathcal{V})$). W praktyce,

często przyjmuje się $\eta_I(\cdot) = \psi_I(\cdot)|_{\mathcal{V}}$ ($I = 1, \dots, N$). Jeśli przy tym, $\psi_I(\cdot) \perp \psi_J(\cdot)$, to

$$a_I = \frac{\langle f(\cdot) - \mathbf{K}\psi_0(\cdot), \psi_I(\cdot) \rangle}{\langle \psi_I(\cdot), \psi_I(\cdot) \rangle} \quad (I = 1, \dots, N),$$

a suma (a) (bez $\psi_0(\cdot)$) staje się przy $N \rightarrow \infty$ szeregiem Fouriera rozwiązania $u(\cdot) - \psi_0(\cdot)$.

Przykład 2 (metoda Treflza). W tej metodzie układ $(\psi_0(\cdot), \psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$ tak dobieramy, aby teraz

$$\mathbf{K}\psi_0(x) = f(x), \quad x \in \mathcal{V},$$

$$\mathbf{K}\psi_I(x) = 0, \quad x \in \mathcal{V} \quad (I = 1, \dots, N)$$

i przyjmujemy $a_0 = 1$ w sumie (50), czyli postulujemy rozwiązanie przybliżone również w postaci

$$v(x) = \psi_0(x) + a_1\psi_1(x) + \dots + a_N\psi_N(x), \quad x \in X, \quad (a)$$

Zatem teraz jest

$$\mathbf{K}v(x) = f(x), \quad x \in \mathcal{V},$$

a więc

$$r(x) = 0, \quad x \in \mathcal{V}. \quad (b)$$

Niech $w_0 = c_1 \zeta_1(\tilde{x}) + \dots + c_N \zeta_N(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in \partial\mathcal{V}$, przy dowolnym ciągu $(c_1, \dots, c_N) \in \mathcal{R}^N$.

Po podstawieniu do równania (52), wobec dowolności (c_I) , otrzymujemy

$$\langle Bv(\cdot) - g(\cdot), \zeta_I(\cdot) \rangle_{\overset{\circ}{w}} = 0 \quad I = 1, \dots, N, \quad (c)$$

co z kolei po uwzględnieniu (a) prowadzi do następującego układu równań algebraicznych na ciąg nieznanych współczynników (a_1, \dots, a_N) w prezentowanej metodzie (niezależnie jaka by nie była definicja produktu dualnego $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overset{\circ}{w}}$):

$$\sum_{J=1}^N C_{JI} a_J = D_I, \quad I = 1, \dots, N, \quad (d)$$

gdzie

$$C_{JI} = \langle \psi_J(\cdot), \zeta_I(\cdot) \rangle_{\overset{\circ}{w}}, \quad g_I = \langle g(\cdot) - B\psi_0(\cdot), \zeta_I(\cdot) \rangle_{\overset{\circ}{w}} \quad (I, J = 1, \dots, N). \quad (e)$$

Zwykle produkt dualny $\langle \tau(\cdot), w_0(\cdot) \rangle_{\overset{\circ}{w}} = \int_{\partial\mathcal{V}} \tau(x) \bullet w_0(x) dS$, pod warunkiem, że iloczyn skalarny $\tau(\cdot) \bullet w_0(\cdot)$ jest całkowny na $\partial\mathcal{V}$. Zwykle też $\zeta_I(\cdot) = \psi_I(\cdot)|_{\partial\mathcal{V}}$.

Przykład 3 (metoda Galerkina). Rozważmy zagadnienie brzegowe (1), (2) w postaci słabej.

Niech warunek brzegowy na części S_0 brzegu $\partial\mathcal{V}$ będzie warunkiem sztywnym postaci

$B_0 u(\tilde{x}) = g_0(\tilde{x})$ a na pozostałej części S_1 naturalnym warunkiem brzegowym postaci

$B_1 u(\tilde{x}) = g_1(\tilde{x})$. Załóżmy, że rozważane zagadnienie zostało sprowadzone do postaci

$$B(u(\cdot), v(\cdot)) = Lv(\cdot), \quad (a)$$

dla dowolnych funkcji (wektorowych) próbnych z podprzestrzeni liniowej $U_{n,m}^0(\bar{\mathcal{V}})$

przestrzeni funkcyjnej unormowanej funkcji (wektorowych) z przestrzeni $X_{n,m}(\bar{\mathcal{V}})$ (z normą

$\|\cdot\|$), które spełniają jednorodny sztywny warunek brzegowy $B_0 u(\tilde{x}) = 0$, $x \in S_0$, natomiast

$u(\cdot)$ należy do zbioru $U_{n,m}(\bar{\mathcal{V}})$ tych funkcji (wektorowych) przestrzeni $X_{n,m}(\bar{\mathcal{V}})$, które

spełniają sztywny warunek brzegowy, zaś $B(\cdot, \cdot)$ jest formą dwuliniową ciągłą a $L(\cdot)$ forma

liniową ciągłą na przestrzeni $X_{n,m}(\bar{\mathcal{V}})$ postaci

$$B(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_{\mathcal{V}} K(u(x), v(x)) dV = \int_{\mathcal{V}} \sum_{l=0}^k A_{n,m}^l(\partial^{(l)} u(x), \partial^{(l)} v(x)) dV$$

przy $u(\cdot)$ i $v(\cdot)$ obciętych do \mathcal{V} ,

$$L(v(\cdot)) = \int_{\mathcal{V}} f(x) v(x) dV + \int_{S_1} g_1(\tilde{x}) B_1 v(\tilde{x}) dS,$$

przy czym f jest daną funkcją (wektorową) w obszarze \mathcal{V} , B_0 i B_1 są (multi)operatorami

(wektorowymi) a g_0 i g_1 (multi)funkcjami (wektorowymi) na S_0 i S_1 , a

$$A_{n,m}^l(\partial^{(l)} u(x), \partial^{(l)} v(x)) = \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^n \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^n a_{i_1 \dots i_l j_1 \dots j_l} \partial_{i_1 \dots i_l}^{(l)} u(x) \partial_{j_1 \dots j_l}^{(l)} v(x)$$

jest formą dwuliniową na przestrzeni funkcji k -krotnie różniczkowalnych, całkowną na \mathcal{V} ($r = 1, \dots, k$).

W metodzie Galerkina układ funkcji bazowych $(\psi_0(\cdot), \psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$ tak dobieramy w

przestrzeni $X_{n,m}(\bar{\mathcal{V}})$, aby $\psi_0(\cdot) \in U_{n,m}(\mathcal{V})$, $\psi_I(\cdot) \in U_{n,m}^0(\bar{\mathcal{V}})$ ($I = 1, \dots, N$), a więc by

w szczególności

$$\begin{aligned} B_0 \psi_0(\tilde{x}) &= g_0(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S_0, \\ B_0 \psi_I(\tilde{x}) &= 0, \quad \tilde{x} \in S_0 \quad (I = 1, \dots, N) \end{aligned}$$

oraz przyjmujemy $a_0 = 1$ w sumie (50), czyli postulujemy rozwiązanie przybliżone również w postaci

$$v(x) = \psi_0(x) + a_1 \psi_1(x) + \dots + a_N \psi_N(x), \quad x \in \bar{\mathcal{V}}. \quad (b)$$

Rozwiązanie to nie spełnia na ogół równania (a) przy dowolnych dopuszczalnych funkcji próbnych, tzn.

$$B(v(\cdot), v(\cdot)) = Lv(\cdot) + Rv(\cdot), \quad (c)$$

gdzie $R(\cdot)$ jest pewnym funkcjonałem liniowym ciągłym residualnym na przestrzeni $U_{n,m}^o(\bar{\mathcal{V}})$.

Istotą metody Galerkina jest żądanie, by

$$Rv = 0 \quad (d)$$

dla dowolnych $v(\cdot) \in \text{lin}(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot)) \subset U_{n,m}^o(\bar{\mathcal{V}})$, czyli

$$B(v(\cdot), v(\cdot)) = Lv(\cdot) \quad \forall v(\cdot) \in \text{lin}(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot)), \quad (e)$$

a więc

$$B(v(\cdot), \psi_I(\cdot)) = L\psi_I(\cdot) \quad \forall I = 1, \dots, N,$$

co po uwzględnieniu (b) prowadzi do układu równań algebraicznych

$$\sum_{J=1}^N A_{JI} a_J = B_I, \quad I = 1, \dots, N, \quad (f)$$

gdzie

$$A_{JI} = B(\psi_J(\cdot), \psi_I(\cdot)), \quad L_I = L\psi_I(\cdot) - B(\psi_0(\cdot), \psi_I(\cdot)) \quad (I, J = 1, \dots, N).$$

Dodajmy, że zazwyczaj funkcjonał $R(\cdot)$ oznacza istnienie funkcji residualnej $r(x)$, $x \in \mathcal{V}$ i (multi)funkcji residualnej $\rho(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in S_1$ takich, że

$$Lv(\cdot) = \int_{\mathcal{V}} r(x) v(x) dV + \int_{S_1} \rho(\tilde{x}) B_1 v(\tilde{x}) dS, \quad v(\cdot) \in U_{n,m}^o(\bar{\mathcal{V}}).$$

Tym samym przyjmuje się, że $\eta_I(\cdot) = \psi_I(\cdot)|_{\mathcal{V}} \in \overset{\circ}{U}_{n,m}(\mathcal{V}) = \{v(\cdot)|_{\mathcal{V}}; v(\cdot) \in U_{n,m}^o(\bar{\mathcal{V}})\}$ oraz

$$\zeta_I(\cdot) = \psi_I(\cdot)|_{S_1} \in \overset{\circ}{W}_{n,m}(\mathcal{V}) = \{v(\cdot)|_{S_1}; v(\cdot) \in U_{n,m}^o(\bar{\mathcal{V}})\}.$$

Równanie (a) jest spełnione dla wszystkich $v(\cdot) \in \text{lin}(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$, co po odjęciu stronami równania (e) prowadzi do równości

$$B(u(\cdot) - v(\cdot), v(\cdot)) = 0 \quad \forall v(\cdot) \in \text{lin}(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot)).$$

Zatem mamy

$$\begin{aligned} B(u(\cdot) - v(\cdot), u(\cdot) - v(\cdot)) &= B(u(\cdot) - v(\cdot), u(\cdot) - v(\cdot) - v(\cdot)) + \\ &+ B(u(\cdot) - v(\cdot), v(\cdot)) = \\ &= B(u(\cdot) - v(\cdot), u(\cdot) - v(\cdot) - v(\cdot)) \quad \forall v(\cdot) \in \text{lin}(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot)). \end{aligned}$$

Funkcje $u(\cdot) - v(\cdot)$ i $u(\cdot) - v(\cdot) - v(\cdot)$ należą do przestrzeni $U_{n,m}^o(\bar{\mathcal{V}})$, która jest podprzestrzenią liniową domkniętą przestrzeni $X_{n,m}(\bar{\mathcal{V}})$. Zatem, jeśli forma B jest eliptyczna (i ograniczona), to istnieją takie stałe $b_* > 0$ i $b^* > 0$, że

$$0 < b_* \|u(\cdot) - v(\cdot)\|^2 \leq |B(u(\cdot) - v(\cdot), u(\cdot) - v(\cdot))| = |B(u(\cdot) - v(\cdot), u(\cdot) - v(\cdot) - v(\cdot))| \leq \\ \leq b^* \|u(\cdot) - v(\cdot)\| \|u(\cdot) - v(\cdot) - v(\cdot)\| \quad \forall v(\cdot) \in \text{lin}(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot)),$$

czyli

$$\|u(\cdot) - v(\cdot)\| \leq b \|u(\cdot) - v(\cdot) - v(\cdot)\| \quad \forall v(\cdot) \in \text{lin}(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot)) \quad (b = b^* / b_*)$$

Jeśli więc przestrzeń $\text{lin}(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$ jest aproksymacyjna dla $X_{n,m}(\bar{V})$, to

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \exists (b_i) \in \mathcal{R}^N \quad \left\| u(\cdot) - v(\cdot) - \sum_I^N b_I \psi_I(\cdot) \right\| \leq \varepsilon / b \quad ,$$

a zatem $\|u(\cdot) - v(\cdot)\| < \varepsilon$, czyli rozwiązanie przybliżone $v(\cdot)$ może być dowolnie bliskie nieznanemu rozwiązaniu ścisłemu $u(\cdot)$. Jest to spektakularny rezultat metody Galerkina.

Przykład 4 (metoda Ritz'a). Rozważmy sformułowanie wariacyjne zagadnienia brzegowego (1),(2), istniejące przy identycznych założeniach jak sformułowanie słabe w metodzie Galerkina z P. 3. Niech $J = J(u) \in [0, \infty)$, $u \in U_{n,m}(\bar{V})$ będzie funkcjonałem, którego minimum właściwe dla $u(\cdot)$ jest punktem stacjonarności tego funkcjonału. Funkcjonał ten jest postaci

$$J(u) = \frac{1}{2} B(u(\cdot), u(\cdot)) - Lu(\cdot), \quad (a)$$

gdzie B jest formą dwuliniową ciągłą i symetryczną, L formą liniową ciągłą na przestrzeni $X_{n,m}(\bar{V})$, zwykle danymi wzorami (jak w metodzie Galerkina)

$$B(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_{\mathcal{V}} K(u(x), v(x)) dV, \\ L(u(\cdot)) = \int_{\mathcal{V}} f(x) u(x) dV + \int_{S_1} g_1(\tilde{x}) B_1 u(\tilde{x}) dS.$$

Rozwiązania przybliżonego rozważanego zagadnienia poszukujemy w postaci identycznej jak w metodzie Galerkina, tj. w postaci funkcji (wektorowej) realizującej minimum spośród elementów zbioru funkcji w postaci

$$v(x) = \psi_0(x) + a_1 \psi_1(x) + \dots + a_N \psi_N(x), \quad x \in \bar{V}, \quad (b)$$

przy doborze funkcji bazowych jak w metodzie Galerkina. Tym samym, po podstawieniu (b) do (a) funkcjonał staje się funkcją rzeczywistą zmiennych rzeczywistych $\tilde{J} = \tilde{J}(a_1, \dots, a_N)$,

$(a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{R}^N$. Z warunku koniecznego ekstremum

$$\frac{\partial}{\partial a_I} \tilde{J}(a_1, \dots, a_N) = 0, \quad I = 1, \dots, N$$

otrzymujemy układ N równań algebraicznych z N niewiadomymi.

Dla funkcjonału postaci (a) wzory powyższe mają formę następującą

$$\tilde{J} = \sum_{I,J=0}^N B_{IJ} a_I a_J - \sum_{J=0}^N f_J a_J \quad (a_0 = 1),$$

gdzie

$$B_{IJ} = B(\psi_I(\cdot), \psi_J(\cdot)) = B_{JI}, \quad f_J = L\psi_J(\cdot) \quad (I, J = 0, 1, \dots, N),$$

skąd

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial a_I} = \sum_{J=1}^N B_{JI} a_J - \tilde{f}_I = 0, \quad I = 1, \dots, N \quad (\tilde{f}_I = f_I - B(\psi_0(\cdot), \psi_J(\cdot))).$$

3. Metody ważonych residuów. Przypadek redukcji do zagadnień granicznych

Rozważmy nadal zagadnienie graniczne (1), (2) z p. 6.1. Przyjmujemy, że obszar \mathcal{V} jest postaci

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} \times \mathcal{W},$$

gdzie \mathcal{U} jest obszarem w przestrzeni \mathcal{R}^s , a \mathcal{W} jest obszarem w przestrzeni \mathcal{R}^r ($r + s = n \geq 2$).

Tak więc

$$x \in \mathcal{V} \Leftrightarrow x = (y, z), \quad y \in \mathcal{U}, \quad z \in \mathcal{W},$$

a w konsekwencji

$$\partial \mathcal{V} = \mathcal{U} \times \partial \mathcal{W} \cup \partial \mathcal{U} \times \mathcal{W} \cup \partial \mathcal{U} \times \partial \mathcal{W}.$$

Zakładamy przy tym, że części

$$S_1 = \mathcal{U} \times \partial \mathcal{W}, \quad S_2 = \partial \mathcal{U} \times \mathcal{W}$$

brzegu $\partial \mathcal{V}$ są dostatecznie gładkie (spełniają co najmniej warunek Lipschitza), a na części $\mathcal{L} = \partial \mathcal{U} \times \partial \mathcal{W}$ zwykle spełniany jest warunek zgodności warunków granicznych na S_1 i S_2 . Załóżmy też dla ustalenia uwagi, że warunek graniczny na S_1 jest warunkiem brzegowym i że jest to sztywny warunek brzegowy.

Zakładamy oczywiście, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie ściśle

$$u = u(x) = u(y, z), \quad y \in \bar{\mathcal{U}}, \quad z \in \bar{\mathcal{W}}$$

(choć nie jest znane) wyjściowego zagadnienia granicznego.

Niech w przestrzeni $V_{r,m}(\bar{\mathcal{W}})$ dany jest układ bazowy funkcji (wektorowych) liniowo niezależnych $(\psi_0(\cdot), \psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$. Rozwiązania przybliżonego wyjściowego zagadnienia granicznego poszukujemy w postaci

$$v(x) = v(y, z) = a_0(y)\psi_0(z) + a_1(y)\psi_1(z) + \dots + a_N(y)\psi_N(z), \quad y \in \bar{\mathcal{U}}, \quad z \in \bar{\mathcal{W}}, \quad (53)$$

gdzie $(a_0(\cdot), a_1(\cdot), \dots, a_N(\cdot))$ jest układem nieznanych funkcji z przestrzeni $V_s(\bar{\mathcal{U}})$.

O funkcjach $a_I(\cdot)$ i $\psi_I(\cdot)$ zakładamy, że są takiej klasy regularności, by wyrażenie (53)

należało do przestrzeni $X_{n,m}(\bar{\mathcal{V}})$ tych funkcji (wektorowych), dla których określone są jednoznacznie operatory K w obszarze \mathcal{V} i B na brzegu $\partial \mathcal{V}$. Ponadto zakładamy, że funkcja $a_0(y)\psi_0(z)$ spełnia na \bar{S}_1 niejednorodny sztywny warunek brzegowy postaci

$$B[a_0(y)\psi_0(\tilde{z})] = a_0(y)[B_1\psi_0(\tilde{z})] = g_1(y, \tilde{z}), \quad y \in \bar{\mathcal{U}}, \quad \tilde{z} \in \partial \mathcal{W}, \quad (54)$$

skąd powinno być

$$a_0(y) = a_0(y, \tilde{z}) = g_1(y, \tilde{z}) / [B_1\psi_0(\tilde{z})], \quad y \in \bar{\mathcal{U}}, \quad \tilde{z} \in \partial \mathcal{W}, \quad (55)$$

natomiast funkcje $a_I(y)\psi_I(\tilde{z})$ spełniają na \bar{S}_1 jednorodny sztywny warunek brzegowy

$$B[a_I(y)\psi_I(\tilde{z})] = a_I(y)B_1[\psi_I(\tilde{z})] = 0, \quad y \in \bar{\mathcal{U}}, \tilde{z} \in \partial\mathcal{W} \rightarrow B_1[\psi_I(\tilde{z})] = 0, \tilde{z} \in \partial\mathcal{W} \quad (56)$$

$(I = 1, \dots, N).$

Funkcja (wektorowa) (53) nie spełnia na ogół relacji wyjściowego zagadnienia granicznego. Powstają więc residua $r(x)$, $x \in \mathcal{V}$ i $\rho(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in \mathcal{S}_2$ (na $\bar{\mathcal{S}}_1$ jest $\rho(\tilde{x}) = 0$). Z tego względu wprowadzamy przestrzeń funkcyjną

$$S_{r,m}^o(\bar{\mathcal{W}}) = \{\psi(\cdot) \in V_{r,m}(\bar{\mathcal{W}}); B[a(y)\psi(\tilde{z})] = a(y)B_1[\psi(\tilde{z})] = 0, \tilde{z} \in \partial\mathcal{W}\} \quad (57)$$

dla dowolnych $a(\cdot) \in V_s(\mathcal{U})$ oraz przestrzenie funkcyjne $\overset{\circ}{P}_{r,m}(\mathcal{W})$ i $\overset{\circ}{T}_{r,m}(\mathcal{W})$ tych funkcji (wektorowych) odpowiednio regularnych, które są obcięciem odpowiednich funkcji z przestrzeni $S_{r,m}^o(\bar{\mathcal{W}})$ do obszaru \mathcal{W} , a także produkty dualne $\langle \cdot, \cdot \rangle_P^o$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle_T^o$, dla których mają sens $\langle r(y, \cdot), \pi(\cdot) \rangle_P^o$ i $\langle \rho(\tilde{y}, \cdot), \tau(\cdot) \rangle_T^o$ odpowiednio dla $y \in \mathcal{U}$ i $\tilde{y} \in \partial\mathcal{U}$ oraz wszystkich $\pi(\cdot) \in \overset{\circ}{P}_{r,m}(\mathcal{W})$ i $\tau(\cdot) \in \overset{\circ}{T}_{r,m}(\mathcal{W})$.

Podstawowe równania metody otrzymujemy z żądania, by

$$\langle r(y, \cdot), \pi_o(\cdot) \rangle_P^o = 0, \quad \langle \rho(\tilde{y}, \cdot), \tau_o(\cdot) \rangle_T^o = 0, \quad (58)$$

odpowiednio dla każdego $y \in \mathcal{U}$ i $\tilde{y} \in \partial\mathcal{U}$ oraz dla wszystkich $\pi_o(\cdot)$ i $\tau_o(\cdot)$ (tzw. funkcji wagowych) z ustalonych podprzestrzeni (zwanymi podprzestrzeniami wagowymi) przestrzeni $\overset{\circ}{P}_{r,m}(\mathcal{W})$ i $\overset{\circ}{T}_{r,m}(\mathcal{W})$.

W zależności od doboru wymienionych elementów można otrzymać bardziej szczegółowe warianty metody. Tytułem ilustracji, sformułujemy odpowiednik metody Galerkina, zwany metodą Bubnowa-Galerkina.

Przykład 5 (metoda Bubnowa-Galerkina). Niech $s = 1$ i $y = t$ będzie zmienną czasową z przedziału $\mathcal{U} = \mathcal{T} = (0, \infty)$. Obszar \mathcal{W} niech tworzą zmienne przestrzenne $z = (z_1, \dots, z_r)$, z wartościami brzegowymi $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r)$ należącymi do brzegu $\partial\mathcal{W}$, spełniającym warunek Lipschitza. Na zbiorze $\bar{\mathcal{T}} \times \bar{\mathcal{W}}$ sformułowane jest zagadnienie brzegowo-początkowe, o niewiadomej funkcji (wektorowej) $u = u(t, z)$, w postaci globalnej słabej względem zmiennych przestrzennych i postaci lokalnej względem zmiennej czasowej, tj. w postaci (por. rozdz. 4.3 p. 8, rozdz. 5.2 p. 3 i rozdz. 6.5 p. 2)

$$M(\ddot{u}(t, \cdot), v(t, \cdot)) + C(\dot{u}(t, \cdot), v(t, \cdot)) + B(u(t, \cdot), v(t, \cdot)) = Lv(t, \cdot), \quad t \in \mathcal{T} \quad (\dot{} = \partial/\partial t) \quad (a)$$

dla dowolnej funkcji (wektorowej) $v(t, \cdot)$ z przestrzeni $S_{r,m}^o(\bar{\mathcal{W}})$ spełniającej sztywny jednorodny warunek brzegowy $Bv(t, \tilde{z}) = 0$, $\tilde{z} \in \partial\mathcal{W}$ dla każdej $t \in \bar{\mathcal{T}}$ oraz warunki początkowe

$$u(0, z) = g_1^1(z), \quad \dot{u}(0, z) = g_2^2(z), \quad z \in \mathcal{W} \quad (b)$$

gdzie $g_2(\cdot) = (g_2^1(\cdot), g_2^2(\cdot))$ jest daną funkcją biwektorową w obszarze \mathcal{W} , M, C, B są danymi formami dwuliniowymi, a L daną formą liniową, zwykle postaci (por. p.1)

$$M(\ddot{u}(t, \cdot), \nu(t, \cdot)) = \int_{\mathcal{W}} A_{r,m}^{0(M)}(\ddot{u}(t, z), \nu(t, z)) dV(z) = \int_{\mathcal{W}} m_{ij}(z) \ddot{u}_i(t, z) \nu_j(t, z) dV(z), \quad (c-1)$$

$$C(\dot{u}(t, \cdot), \nu(t, \cdot)) = \int_{\mathcal{W}} A_{r,m}^{0(C)}(\dot{u}(t, z), \nu(t, z)) dV(z) = \int_{\mathcal{W}} c_{ij}(z) \dot{u}_i(t, z) \nu_j(t, z) dV(z), \quad (c-2)$$

$$B(u(t, \cdot), \nu(t, \cdot)) = \int_{\mathcal{W}} K(u(t, z), \nu(t, z)) dV(z) = \int_{\mathcal{W}} \sum_{l=0}^k A_{r,m}^l(\partial^{(l)} u(t, z), \partial^{(l)} \nu(t, z)) dV(z), \\ L(\nu(t, \cdot)) = \int_{\mathcal{W}} f(t, z) \cdot \nu(t, z) dV(z), \quad (c-4)$$

przy $u(t, \cdot)$ i $\nu(t, \cdot)$ obciętych do \mathcal{W} , dla wszystkich $t \in \mathcal{T}$.

Rozwiązania przybliżonego poszukujemy w postaci (53) (przy funkcjach bazowych z przestrzeni $X_{r,m}(\bar{\mathcal{W}})$ przy założeniu stacjonarnego warunku brzegowego na $\partial\mathcal{W} \times \bar{\mathcal{T}}$, spełnionego przez funkcję bazową $\psi_0(\cdot)$, tj. (por. (54))

$$B[a_0(t)\psi_0(\tilde{z})] = a_0(t)[B\psi_0(\tilde{z})] = g(\tilde{z}), \quad t \in \bar{\mathcal{T}}, \tilde{z} \in \partial\mathcal{W}$$

przy $a_0(t) = 1, t \in \bar{\mathcal{T}}$ i $B\psi_0(\tilde{z}) = g(\tilde{z}), \tilde{z} \in \partial\mathcal{W}$, przy spełnieniu przez funkcje bazowe $\psi_I(\cdot)$ ($I = 1, \dots, N$) z przestrzeni $S_{r,m}^0(\bar{\mathcal{W}})$ stacjonarnego jednorodnego warunku brzegowego na $\partial\mathcal{W} \times \bar{\mathcal{T}}$ (por. (55)), tj.

$$B[a_I(t)\psi_I(\tilde{z})] = a_I(t)[B\psi_I(\tilde{z})] = a_I(t)0 = 0, \quad t \in \bar{\mathcal{T}}, \tilde{z} \in \partial\mathcal{W},$$

przy $B\psi_I(\tilde{z}) = 0, \tilde{z} \in \partial\mathcal{W}$ ($I = 1, \dots, N$), czyli w postaci

$$\nu(z, t) = \psi_0(z) + a_1(t)\psi_1(z) + \dots + a_N(t)\psi_N(z), \quad t \in \bar{\mathcal{T}}, z \in \bar{\mathcal{W}}, \quad (d)$$

Na ogół funkcja ta nie spełnia relacji (a), (b), więc powstają residua: R w postaci formy liniowej takiej, że spełnione jest równanie słabe (a')

$$M(\ddot{\nu}(t, \cdot), \nu(t, \cdot)) + C(\dot{\nu}(t, \cdot), \nu(t, \cdot)) + B(\nu(t, \cdot), \nu(t, \cdot)) = L\nu(t, \cdot) + R\nu(t, \cdot), \quad t \in \mathcal{T}, \quad (a')$$

zwykle przy $R\nu(t, \cdot) = \int_{\mathcal{W}} r(t, z) \cdot \nu(t, z) dV(z)$ i residua warunków początkowych, tj. funkcja

(bi)wektorowa $\rho(0, z) = (\rho^1(0, z), \rho^2(0, z))$ taka, że spełnione są warunki początkowe (b')

$$\nu(0, z) = g_2^1(z) + \rho^1(z), \quad \dot{\nu}(0, z) = g_2^2(z) + \rho^2(z), \quad z \in \mathcal{W}. \quad (b')$$

Zatem szukamy takiej funkcji (d), dla której podstawowe równania metody

$$R\nu(t, \cdot) = 0, \quad t \in \mathcal{T}$$

oraz

$$\langle \rho^1(\cdot), \nu(0, \cdot) \rangle = 0, \quad \langle \rho^2(\cdot), \nu(0, \cdot) \rangle = 0,$$

spełnione będą dla dowolnej funkcji wagowej postaci

$$\nu_0(t, z) = b_1\psi_1(z) + \dots + b_N\psi_N(z), \quad t \in \bar{\mathcal{T}}, z \in \mathcal{W}, \quad (d)$$

przy

$$\langle \lambda(t, \cdot), \nu(t, \cdot) \rangle = \int_{\mathcal{W}} \lambda(t, z) \cdot \nu(t, z) dV(z), \quad \forall t \in \bar{\mathcal{T}}. \quad (e)$$

Postulat ten oznacza (przy $\langle r(t, \cdot), \pi(\cdot) \rangle_{\mathcal{P}} = \langle r(t, \cdot), \pi(\cdot) \rangle + \langle \rho(0, \cdot), \tau(\cdot) \rangle_{\mathcal{T}} =$

$= \langle \rho(0, \cdot), \tau(\cdot) \rangle$ oraz $\pi(\cdot), \tau(\cdot) \in \text{lin}(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$), po uwzględnieniu wyrażenia (d),

następujące równania (przy zastosowaniu zwyczajowych oznaczeń)

$$\sum_{J=1}^N [M_{IJ} \ddot{a}_J(t) + C_{IJ} \dot{a}_J(t) + K_{IJ} a_J(t)] = F_I(t), \quad t \in \mathcal{T}, \quad I = 1, \dots, N; \quad (\text{f-1})$$

$$\sum_{J=1}^N \Psi_{IJ} a_J(0) = G_I^1, \quad \sum_{J=1}^N \Psi_{IJ} \dot{a}_J(0) = G_I^2, \quad (\text{f-2})$$

gdzie

$$M_{IJ} = M(\psi_I(\cdot), \psi_J(\cdot)), \quad C_{IJ} = C(\psi_I(\cdot), \psi_J(\cdot)), \quad K_{IJ} = B(\psi_I(\cdot), \psi_J(\cdot)),$$

$$F_I = L\psi_I(\cdot) - B(\psi_0(\cdot), \psi_I(\cdot)), \quad (I, J = 1, \dots, N)$$

$$\Psi_{IJ} = \langle \psi_I(\cdot), \psi_J(\cdot) \rangle, \quad G_I^1 = \langle g_1^1(\cdot) - \psi_0(\cdot), \psi_I(\cdot) \rangle, \quad G_I^2 = \langle g_2^2(\cdot), \psi_I(\cdot) \rangle.$$

Otrzymaliśmy do rozwiązania klasyczne zagadnienie początkowe (f) dla układu N równań różniczkowych zwyczajnych, o stałych współczynnikach, niejednorodnych, z warunkami początkowymi na nieznane funkcje $a_I(t)$ $t \in \bar{\mathcal{T}}$, które określamy rozwiązując układy równań algebraicznych (f-2) (nieosobliwe z uwagi na dodatni wyznacznik Grama macierzy $[\Psi_{IJ}]$ ze względu na liniową niezależność układu bazowego $(\psi_I(\cdot))$).

Jeżeli układ bazowy $(\psi_I(\cdot))$ jest ortogonalny ($\langle \psi_I(\cdot), \psi_J(\cdot) \rangle = 0$ przy $I \neq J$), to z łatwością wyznaczamy z (f-2)

$$a_I(0) = G_I^1 / \langle \psi_I(\cdot), \psi_I(\cdot) \rangle, \quad \dot{a}_I(0) = G_I^2 / \langle \psi_I(\cdot), \psi_I(\cdot) \rangle, \quad I = 1, \dots, N.$$

Jeśli ponadto układ bazowy jest binormalny, tzn. $M_{IJ} = M_{(I)} \delta_{IJ}$, $K_{IJ} = K_{(I)} \delta_{IJ}$, a

$C_{IJ} = \alpha M_{IJ} + \beta K_{IJ}$, to przy oznaczeniach $C_{IJ} = C_{(I)} \delta_{IJ}$ ($C_{(I)} = \alpha M_{(I)} + \beta K_{(I)}$) układ równań (f-1) separuje się na N niezależnych równań (tej samej postaci)

$$M_{(I)} \ddot{a}_I(t) + C_{(I)} \dot{a}_I(t) + K_{(I)} a_I(t) = F_I(t), \quad t \in \mathcal{T}, \quad I = 1, \dots, N.$$

Zauważmy, że jeśli przestrzeń funkcyjna $X_{r,m}(\bar{\mathcal{W}})$ jest zanurzona w przestrzeni Hilberta

$L_{r,m}^2(\bar{\mathcal{W}})$ i jako $(\psi_I(\cdot))$ przyjmujemy N pierwszych funkcji bazy hilbertowskiej (układu zupełnego) tej przestrzeni, to przy $N \rightarrow \infty$ mamy zapewnioną zbieżność średniokwadratową $v(z, t) - \psi_0(z)$ względem z dla każdej chwili t , a także spełnienie w granicy równań (a') i (b').

4. Metody dyskretyzacyjne. Metoda różnic skończonych

O ile prezentowane metody z grupy metod ważonych residuów nazywamy metodami aproksymacyjnymi (polegającymi na aproksymacji rozwiązania $u(x)$ w obszarze $\bar{\mathcal{V}}$ pewnym przybliżeniem $v(x)$ również w obszarze $\bar{\mathcal{V}}$ lub mu odpowiednio bliskim), o tyle prezentowane teraz metody nazywane są metodami dyskretyzacyjnymi, gdyż przybliżenie $v(x)$ rozwiązania $u(x)$ znajdujemy dla x ze zbioru dyskretnego \mathcal{X} zawartego w zbiorze \mathcal{Z} punktów izolowanych $x_I, I \in \mathcal{S}$, tworzących siatkę punktów bliską obszarowi $\bar{\mathcal{V}}$ w sensie δ -sieci:

$$\forall x \in \bar{\mathcal{V}} \exists x_I \in \mathcal{Z} \quad d(x, x_I) \leq \delta \quad \text{i} \quad \forall x \in \bar{\mathcal{V}} \exists x_I \in \mathcal{Z} \quad d(x, x_I) \leq \delta. \quad (59)$$

Szukamy zatem rozwiązania $v: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R}^m; v_I = v(x_I), x_I \in \mathcal{X} (I \in \mathcal{S})$. Dla ustalenia uwagi zakładamy, że $\mathcal{X} = \mathcal{Z} \subset \bar{\mathcal{V}}$. Pozostaje zatem określić w jaki sposób dane równanie różniczkowe postaci $K_{n,m}^k u(x) = f(x), x \in \mathcal{V}$ z warunkami granicznymi postaci

$B_{n,m}^{k-1} u(\tilde{x}) = g(\tilde{x}), \tilde{x} \in \partial \mathcal{V}$ zastąpić równaniem różnicowym postaci

$$K_{n,m}^h v_I = F^h f_I, \quad I \in \mathcal{S} (f_I = f(x_I)), \quad (60)$$

gdzie h jest pewnym parametrem zależnym od parametru δ siatki \mathcal{X} .

Dla każdego $x_I \in \mathcal{X}$, zwanego węzłem siatki \mathcal{X} , tworzymy zbiór \mathcal{X}_I , zwany gwiazdą węzła x_I , złożony z punktów $x_J \in \mathcal{X}$ należących do pewnego otoczenia węzła x_I dla $J \in S_I$ (S_I - skończony). Niech przy tym $h_I = \max_{J \in S_I} d(x_I, x_J)$ będzie promieniem gwiazdy \mathcal{X}_I a

$h = \max_{I \in \mathcal{S}} h_I$ rozmiarem siatki \mathcal{X} .

Następnie, dla każdego węzła x_I siatki \mathcal{X} tworzymy operator algebraiczny $A_I : V_I \rightarrow \mathcal{R}^m$ przy $V_I = \{v_{J_I} \in \mathcal{R}^m : J_I \in S_I\}$ - zbiór wartości (wektorowych) z gwiazdy \mathcal{X}_I węzła x_I - o postaci:

$$A_I = \sum_{J_I \in S_I} a_{J_I} v_{J_I} + g_I, \quad (61)$$

zwany schematem różnicowym gwiazdy \mathcal{X}_I węzła x_I , gdzie (a_{J_I}) jest odpowiednio dobranym układem liczb - tzw. układu współczynników gwiazdy \mathcal{X}_I węzła x_I (o sumie równej zero) - tak, by

$$A_I u(x_I) = K u(x_I) + o(h_I^\kappa) \quad (h_I \rightarrow 0), \quad (62)$$

gdzie $o(h_I^\kappa)$ jest wielkością (wektorową) małą rzędu κ .

Nazwa schematu „różnicowego” pochodzi z kilkukrotnego zastosowania różnic $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$ jako operatorów w odniesieniu do funkcji u i jej pochodnych w punktach gwiazdy węzła x_I oraz wykorzystaniu formuły Taylora rozwinięcia funkcji w otoczeniu danego punktu z dokładnością do wielkości małej określonego rzędu (zob. dalej Przykład). Wielkości (wektorowe) g_I , jeśli są niezerowe, wynikają z uwzględnienia niejednorodnych warunków granicznych i występują w przypadku węzłów w pobliżu lub na brzegu $\partial \mathcal{V}$.

Równania rozwiązujące metody formułujemy zgodnie z (60) - (62) następująco (dla każdego węzła siatki z obszaru \mathcal{V} , z uwzględnieniem warunków granicznych dla w przypadku węzłów w pobliżu lub na brzegu $\partial \mathcal{V}$):

$$\sum_{J \in S_I} a_J v_J = F_I, \quad (63.)$$

gdzie

$$F_I = \sum_{J_I \in S_I} d_{J_I} f_{J_I} - g_I, \quad (64)$$

przy czym układ współczynników wagowych (d_{J_I}) gwiazdy \mathcal{X}_I węzła x_I (o sumie równej jedności) uwzględnia charakter zmienności funkcji (wektorowej) $f(x)$, $x \in \mathcal{V}$ w pobliżu tego węzła (w przypadku funkcji wolno zmiennych przyjmuje się $d_{J_I} = \delta_{J_I I}$).

Dalej podamy przykład zastosowania metody różnic skończonych (MRS), której nazwa wywodzi się z przeciwstawienia różnicy (skończonej) funkcji $\Delta y(x)$ różnicy nieskończonej (różniczce) $dy(x)$.

Przykład. Rozważmy zagadnienie początkowe (przy $m = n = 1$)

$$u''(x) + p(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, \infty) \quad (a-1)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = w_0, \quad (a-2)$$

gdzie $p(x), f(x)$ są danymi, ciągłymi i wolnozmiennymi funkcjami, a u_0, w_0 danymi liczbami.

Przyjmujemy następujący zbiór węzłów w przedziale $\bar{V} = [0, \infty)$

$$X = \{x_I = Ih; h > 0, I = 0, 1, 2, \dots\} \quad (b)$$

oraz gwiazdy dla węzłów x_I

$$X_0 = \{x_0 = 0, x_1 = h\} \quad (h_0 = h), \quad (c-1)$$

$$X_I = \{x_{I-1} = (I-1)h, x_I = Ih, x_{I+1} = (I+1)h\}, \quad I = 1, 2, \dots \quad (h_I = 2h). \quad (c-2)$$

Natomiast pochodne funkcji $u(x)$ przybliżamy następująco:

$$u'(0) \approx \frac{1}{h}[u(h) - u(0)] - \frac{1}{2}hu''(0) = \frac{1}{h}[u(h) - u(0)] - \frac{1}{2}h[f(0) - p(0)u(0)], \quad (d-1)$$

$$u''(x_I) \approx \frac{1}{h^2}[u(x_I - h) - 2u(x_I) + u(x_I + h)] = \frac{1}{h^2}\Delta\Delta u(x_{I-1}) \quad (\Delta y_J = y_{J+1} - y_J), \quad (d-2)$$

zgodnie z rozwinięciami według wzoru Taylora

$$u(x_I + h) = u(x_I) + u'(x_I)h + \frac{1}{2}u''(x_I)h^2 + o(h^2), \quad (e-1)$$

$$u(x_I - h) = u(x_I) - u'(x_I)h + \frac{1}{2}u''(x_I)h^2 + o(h^2), \quad (e-2)$$

jeśli $p(0), f(0)$ istnieją.

Tak więc równania MRS na przybliżenia $v(x_I), I = 0, 1, 2, \dots$, nieznanymi wartościami $u(x_I), I = 0, 1, 2, \dots$ formułujemy następująco:

$$v(x_0) = u_0,$$

$$\frac{1}{h}[v(x_1) - v(x_0)] - \frac{1}{2}h[f(x_0) - p(x_0)v(x_0)] = w_0,$$

$$\frac{1}{h^2}[v(x_{I-1}) - 2v(x_I) + v(x_{I+1})] + p(x_I)v(x_I) = f(x_I), \quad I = 1, 2, \dots,$$

Po nieznacznym przekształceniach znajdujemy sukcesywnie w sposób rekurencyjny

$$v(x_1) = u_0 + w_0h + \frac{1}{2}h^2[f(x_0) - p(x_0)u_0],$$

$$v(x_{I+1}) = v(x_I) - v(x_{I-1}) + \frac{1}{2}h^2[f(x_I) - p(x_I)v(x_I)], \quad I = 1, 2, \dots$$

Jak wynika ze wzorów (e), metoda ma dokładność rzędu h^2 . Innym zagadnieniem jest jej stabilność, czyli ograniczoność błędów rachunkowych przy $I \rightarrow \infty$ jeżeli wielkości dane $u_0, w_0, f(x_I)$ obarczone są błędem ε .

5. Metody asymptotyczne. Metoda małego parametru

Metody asymptotyczne, to grupa metod szczegółowych lub ogólnie ujęta jednym niesformalizowanym określeniem metoda postępowania polegającego na uproszczeniu równania różniczkowego w wyjściowym zagadnieniu granicznym do równania lub ciągu równań, których rozwiązania potrafimy znaleźć, a które otrzymujemy w wyniku pominięcia

pewnych niewygodnych składników na podstawie przesłanek, że udział tych składników w rozwiązaniu danego zagadnienia jest nieznaczny (wpływ na to rozwiązanie jest niewielki). Dotyczy to, na przykład, także składnika nieliniowego w równaniu różniczkowym, gdy funkcja będąca rozwiązaniem przyjmuje nieduże wartości, a w związku z tym, składnik nieliniowy jest małą wyższego rzędu. Ideę postępowania i jej uzasadnienie przedstawimy na poniższym przykładzie metody małego parametru.

Przykład (metoda małego parametru). Mamy następujące zagadnienie brzegowe:

$$u'' + \delta(u')^2 + u = 2, \quad x \in (0, \pi/2), \quad (\text{a-1})$$

$$u(0) = 0, \quad u(\pi/2) = 0, \quad (\text{a-2})$$

w którym δ jest parametrem przyjmującym małe wartości.

Przyjmując iż składnik drugi w równaniu ma znaczenie drugorzędne, pomijamy go. W ten sposób otrzymujemy bardzo proste liniowe zagadnienie brzegowe, którego rozwiązaniem jest

$$u(x) = 2 - 2 \sin x - 2 \cos x, \quad x \in (0, \pi/2). \quad (\text{b})$$

Spróbujemy to uzasadnić bardziej formalnie.

Jeżeli w równaniu (a-1), o postaci normalnej (współczynnik przy pochodnej najwyższego rzędu jest równy jedności) występuje przed składnikiem nieliniowym mały wartościowo współczynnik δ , to mamy prawo sądzić, że dla $\delta \rightarrow 0$ rozwiązanie zagadnienia (a) będzie asymptotycznie dążyć do rozwiązania tego zagadnienia przy $\delta = 0$, czyli do rozwiązania (b), zaś dla niewielkich wartości $\delta > 0$ będzie się niewiele różniło od rozwiązania (b).

Rozumowanie powyższe możemy jeszcze wzmocnić. Mianowicie założmy, że rozwiązanie zagadnienia brzegowego (a) zależne od parametru δ , można rozwinąć w szereg potęgowy względem tego parametru, tzn.

$$u(\delta; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n u_n(x), \quad x \in [0, \pi/2]. \quad (\text{c-1})$$

a także

$$u'(\delta; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n u_n'(x), \quad x \in (0, \pi/2), \quad (\text{c-2})$$

$$u''(\delta; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n u_n''(x), \quad x \in (0, \pi/2), \quad (\text{c-3})$$

skąd

$$\begin{aligned} [u'(\delta; x)]^2 &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n u_n'(x) \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} \delta^m u_m'(x) \right] = \\ &= [u_0'(x)]^2 + 2\delta [u_0'(x)u_1'(x)] + \delta^2 [2u_0'(x)u_2'(x) + u_1'(x)u_1'(x)] + \dots, \quad x \in (0, \pi/2). \end{aligned} \quad (\text{c-4})$$

Podstawienie (c) do (a-1) prowadzi do równości

$$[u_0'' + u_0] + \delta [u_1'' + u_1 + (u_0')^2] + \delta^2 [u_2'' + u_2 + 2u_0' u_1' + (u_1')^2] + \dots = 2,$$

która będzie spełniona tożsamościowo, jeśli

$$u_0'' + u_0 = 2,$$

$$u_1'' + u_1 = -(u_0')^2,$$

$$u_2'' + u_2 = -2u_0' u_1' - (u_1')^2,$$

...

z warunkami brzegowymi (a-2).

Zauważmy, że:

1) kolejne wyrazy przybliżenia funkcji $u(\delta; x)$ wyznaczamy z zagadnień liniowych – zerowe przy ewentualnych warunkach granicznych niejednorodnych a kolejne przy warunkach jednorodnych i przy takiej samej postaci równania różniczkowego z prawymi stronami zależnymi od rozwiązań poprzednich zagadnień (w razie trudności z wyznaczeniem całki szczególnej możemy posłużyć się całką Duhamela-Cauchy’ego),

2) przybliżenie zerowe $u_0(x)$ pokrywa się z rozwiązaniem (b) zagadnienia uproszczonego,,

3) wyznaczając $u_1(x)$ i traktując je jako poprawkę $u_0(x)$ możemy zorientować się jakie jest jej znaczenie ilościowe w rozwiązaniu $u(\delta; x)$ - jeśli nieduże, to możemy uznać, że satysfakcjonuje nas przybliżenie zerowe $u_0(x)$, ewentualnie z poprawką $\delta u_1(x)$

(w razie czego, dla pewności, wyznaczamy drugie przybliżenie $u_2(x)$); w naszym zagadnieniu brzegowym mamy:

$$u_1'' + u_1 = 4(\sin 2x - 1), \quad x \in (0, \pi/2),$$

$$u_1(0) = 0, \quad u_1(\pi/2) = 0.$$

Jego rozwiązaniem jest

$$u_1(x) = 4(\sin x + \cos x - \frac{1}{3} \sin 2x - 1), \quad x \in (0, \pi/2).$$

Zatem wobec $\max |u_1(x)| / \max u_0(x) \approx 0,08 / 0,82 \approx 0,1$ poprawka $\delta u_1(x)$ w stosunku do $u_0(x)$ w rozwiązaniu $u(\delta; x)$ jest maksymalnie rzędu $0,1\delta$, a więc asymptotyczne rozwiązanie zagadnienia (a) przy $\delta \rightarrow 0$ jest uzasadnione dla $\delta < 0,5$ (błąd maksymalny rzędu 5%).

Oczywiście zasygnalizowaną metodę małego parametru można również zastosować do zagadnienia liniowego, jeśli mały parametr występuje (przykładowo) przy składniku w równaniu różniczkowym z „niewygodnym” zmiennym współczynnikiem – na przykład w zagadnieniu początkowym:

$$u'' + \delta x u' + u = 2, \quad x \in (0, \infty), \tag{d-1}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0. \tag{d-2}$$

Biorąc pod uwagę (c-1)-(c-3), otrzymujemy na kolejne przybliżenia funkcji $u(\delta; x)$ równania

$$u_0'' + u_0 = 2,$$

$$u_1'' + u_1 = -x u_0',$$

$$u_2'' + u_2 = -x u_1',$$

...

z jednorodnymi warunkami początkowymi.

Mamy teraz:

$$u_0(x) = 2 - 2 \cos x, \quad x \in (0, \infty).$$

$$u_1'' + u_1 = -x \sin x,$$

$$u_1(x) = \frac{1}{2} x^2 \cos x - x \sin x.$$

W tym przypadku zbieżność asymptotyczna $\delta u_1(x) \rightarrow 0$ przy $\delta \rightarrow 0$ zachodzi jedynie dla ograniczonego przedziału zmienności x .

Przykład (zburzenia brzegowe). Interesujący przypadek przedstawia przykład równania w zagadnieniu brzegowym, w którym cały operator różniczkowy L z pochodną najwyższego rzędu w równaniu (dla ustalenia uwagi i uproszczenia strony rachunkowej rzędu drugiego) jest poprzedzony współczynnikiem przyjmującym małą wartość w porównaniu z jednością przy składniku z niewiadomą funkcją:

$$\delta Lu - u = 0, \quad x \in (0, l), \quad (\text{a-1})$$

$$u(0) = u_0, \quad u(l) = u_l, \quad (\text{a-2})$$

gdzie

$$L(\dots) = (\dots)'' + p(x)(\dots)' + q(x)(\dots), \quad (\text{a-3})$$

przy czym współczynniki $p(x)$, $q(x)$ są ciągłymi, wolnozmiennymi funkcjami o wartościach rzędu jedności na przedziale $[0, l]$ ($p(x) \sim 1$, $q(x) \sim 1$ dla $x \in [0, l]$). Zmienność tych współczynników może być powodem trudności w znalezieniu rozwiązania tego zagadnienia. Uprawnione jest jednak następujące rozumowanie.

Składnik δqu możemy uznać za mały wobec u i go pominąć w równaniu (a-1). Z pewnością nie można pominąć składnika $\delta u''$, bo jest to składnik z najwyższą pochodną, co zmieniłoby charakter zagadnienia. Ale pozostawienie go oznacza, że pochodna u'' powinna być rzędu $1/\delta$, by wraz z $\delta pu'$ zrównoważyć funkcję u w tym równaniu. Ale oznacza to także, że pochodna u' powinna być rzędu $1/\sqrt{\delta}$, a więc przy $1/\delta \gg 100$ składnik $\delta pu'$ może być również pominięty wobec u . Zatem równanie (a-1) może być przy $\delta \rightarrow 0$ asymptotycznie uproszczone do postaci

$$u'' - \gamma^2 u = 0, \quad \gamma^2 = 1/\delta, \quad x \in (0, l), \quad (\text{b})$$

a rozwiązanie zagadnienia brzegowego (a) może być zastąpione rozwiązaniem równania (b), czyli

$$u = A \exp(-\gamma x) + B \exp(+\gamma x) = A \exp(-\gamma x) + B' \exp(-\gamma x'), \quad x' = l - x, \quad (\text{c})$$

($B' = B \exp(\gamma l)$) z warunkami brzegowymi (a-2).

Zauważmy ponadto, że składnik $A \exp(-\gamma x)$ szybko zanika wraz ze wzrostem x – tak, że jeśli l jest dostatecznie duże (przedział $[0, l]$ jest dostatecznie długi), to w pobliżu $x' = 0$ ($x = l$) jest

$$u = B' \exp(-\gamma x') = u_l \exp(-\gamma x'). \quad (\text{d-1})$$

I na odwrót, składnik $B' \exp(-\gamma x')$ szybko wtedy zanika wraz ze wzrostem x' i w pobliżu $x = 0$ jest

$$u = A \exp(-\gamma x) = u_0 \exp(-\gamma x). \quad (\text{d-2})$$

Mówimy, że przy dużej wartości γl wartość brzegowa u_0 implikuje zaburzenie brzegowe w pobliżu brzegu $x = 0$, a wartość brzegowa u_l implikuje zaburzenie brzegowe w pobliżu brzegu $x = l$.

Gdyby jednak l nie było duże ($\exp(-\gamma l)$ nie było bliskie zeru), to na stałe A i B' otrzymamy układ równań

$$A + B' \exp(-\gamma l) = u_0, \quad A \exp(-\gamma l) + B' = u_l,$$

z którego znajdujemy (dla dużej wartości γ , ale niezbyt dużej wartości γl)

$$A = \frac{u_0}{1 - \exp(-2\gamma l)} - \frac{u_l \exp(-\gamma l)}{1 - \exp(-2\gamma l)}, \quad B' = \frac{u_l}{1 - \exp(-2\gamma l)} - \frac{u_0 \exp(-\gamma l)}{1 - \exp(-2\gamma l)}$$

a w konsekwencji

$$u = u_0 \frac{\exp(-\gamma x) - \exp(-\gamma l) \exp(-\gamma x')}{1 - \exp(-2\gamma l)} + u_l \frac{\exp(-\gamma x') - \exp(-\gamma l) \exp(-\gamma x)}{1 - \exp(-2\gamma l)}.$$

Uzasadnieniem „namacalnym” powyższego rozumowania może być przykład zagadnienia (a), z operatorem L o stałych współczynnikach p i q , którego rozwiązaniem jest

$$u = A \exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta} + p}{2} x\right) + B \exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta} - p}{2} x'\right), \quad x' = l - x, \quad x \in [0, l]$$

przy

$$A = \frac{u_0}{1 - \exp(-\Delta l)} - \frac{u_l \exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta} - p}{2} l\right)}{1 - \exp(-\Delta l)}, \quad B = \frac{u_l}{1 - \exp(-\Delta l)} - \frac{u_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta} + p}{2} l\right)}{1 - \exp(-\Delta l)},$$

$$\Delta = p^2 + 4(\gamma^2 - q) \approx 4\gamma^2, \quad \sqrt{\Delta} \pm p \approx 2\gamma \quad (\gamma^2 = 1/\delta).$$

Warto na zakończenie dodać, że efekt zaburzenia brzegowego aczkolwiek interesujący nie jest tu najważniejszy. Najważniejszy jest efekt wzrostu rzędu o $\gamma = 1/\sqrt{\delta}$ każdej kolejnej pochodnej funkcji u . Zatem dotyczy to również równania

$$\delta L u + u = 0, \quad x \in (0, l),$$

w zagadnieniu (a), które asymptotycznie przy $\delta \rightarrow 0$ przechodzi w równanie

$$u'' + \gamma^2 u = 0,$$

a więc prowadzi do następującego rozwiązania przybliżonego (przy $\gamma l \neq n\pi$)

$$u = u_0 (\cos \gamma x - \cot \gamma l \sin \gamma x) + u_l \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma l}.$$

I to, póki co, już KONIEC!

MMIL II

Część trzecia. PROBABILISTYKA

1. Prawdopodobieństwo zdarzeń

- 1.1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych. Zdarzenia
- 1.2. Rozkład prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo zdarzenia

2. Zmienne losowe jednowymiarowe

- 2.1. Zmienna losowa jednowymiarowa. Rozkład prawdopodobieństwa.
Dystrybuanta
- 2.2. Zmienna losowa jednowymiarowa. Charakterystyki liczbowe
i funkcyjne

3. Zmienne losowe wielowymiarowe (wektory losowe)

4. Ciągi zmiennych losowych. Zbieżność i twierdzenia graniczne

5. Procesy stochastyczne – wprowadzenie

6. Elementy statystyki matematycznej

- 6.1. Podstawowe pojęcia i twierdzenia
- 6.2. Estymacja
- 6.3. Weryfikacja hipotez statystycznych

Literatura pomocnicza

Wykaz rozkładów prawdopodobieństwa

1. Prawdopodobieństwo zdarzeń

1.1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych. Zdarzenia

Probabilistyka zajmująca się losowością będzie ujęta w sposób aksjomatyczny. Pojęciami pierwotnymi (niedefiniowanymi) są: zdarzenie elementarne (ozn. ω) oraz przestrzeń (zbiór) zdarzeń elementarnych (ozn. Ω).

Definicja. Przez zdarzenie losowe (krótko: zdarzenie) rozumiemy podzbiory zdarzeń elementarnych w przestrzeni Ω (ozn. A, B, \dots) należące do pewnej rodziny \mathcal{S} podzbiorów Ω .

Przykład 1. Ze zbioru n ponumerowanych elementów wybieramy losowo jeden element. Zdarzeniem elementarnym jest wybranie elementu o numerze k – oznaczone przez ω_k .

Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ ^{ozn} $= (\omega_k) (k=1, \dots, n)$. Jest to przykład dyskretnej przestrzeni zdarzeń elementarnych. Zdarzeniem zaś może być wybór elementu o numerze parzystym, np. $A = \{\omega_j\} (j=2, 4, \dots, \leq n)$.

Przykład 2. Niech T oznacza spóźnienie autobusu, który wg rozkładu jazdy powinien kursować co 30 minut ($[T] = \text{min}$). Przyjmując, że spóźnienie jest losowe, jako przestrzeń zdarzeń elementarnych możemy przyjąć $\Omega = [0, 30]$. Jest to przykład ciągłej przestrzeni zdarzeń elementarnych. Zdarzeniem może być spóźnienie nie większe niż 10 minut: $A = [0, 10]$.

Zdarzenia jako podzbiory przestrzeni Ω podlegają działaniom na zbiorach. Związana z tym jest następująca terminologia:

- 1) Zdarzenie niemożliwe $A = \emptyset \subset \Omega$
- 2) Zdarzenie pewne $A = \Omega$
- 3) Zdarzenie A zawarte w zdarzeniu B , $A \subset B$
- 4) Alternatywa zdarzeń A i B , $A \cup B$
- 5) Koniunkcja zdarzeń A i B , $A \cap B$
- 6) Różnica zdarzeń A i B , $A - B$
- 7) Zdarzenia wykluczające się, $A \cap B = \emptyset$
- 8) Zdarzenie przeciwne do A , $\bar{A} = \Omega - A$.

Definicja. Jeżeli Ω jest co najwyżej przeliczalna¹, to przez rodzinę zdarzeń \mathcal{S} rozumiemy rodzinę wszystkich podzbiorów przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω .

¹ zbiór jest przeliczalny, jeśli jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych \mathcal{N}

Uwaga. Jeżeli przestrzeń Ω jest skończona, n -elementowa², to rodzina \mathcal{S} ma 2^n podzbiorów, w tym zdarzenie niemożliwe i zdarzenie pewne, czyli $\binom{n}{0}$ zdarzeń zero-elementowych, $\binom{n}{1}$ zdarzeń 1-elementowych, itd. – zgodnie z równością

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n .$$

Definicja. Niech Ω będzie przestrzenią euklidesową arytmetyczną \mathcal{R}^n lub jej podzbiorem lub innym zbiorem równolicznym (np. geometryczna przestrzeń euklidesowa \mathcal{E}^n).

Przez \mathcal{S}^* rozumiemy następującą rodzinę podzbiorów przestrzeni Ω :

1° $\Omega \in \mathcal{S}^*$,

2° jeśli $A \in \mathcal{S}^*$, to $\Omega - A \in \mathcal{S}^*$,

3° jeśli $A_n \in \mathcal{S}^* \forall n \in \mathcal{N}$, to

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}^* .$$

\mathcal{S}^* nazywamy przeliczalnie addytywnym ciałem podzbiorów przestrzeni Ω .

Definicja. Przez rodzinę \mathcal{S} zdarzeń losowych w przestrzeni Ω rozumiemy najmniejszą rodzinę \mathcal{S}^* , która zawiera wszystkie zbiory otwarte w Ω (czyli tzw. rodzinę borelowską w Ω)

! Postulaty 1°-3° są spełnione, jeśli Ω jest zbiorem przeliczalnym, a \mathcal{S} rodziną wszystkich podzbiorów.

!! Zauważmy, że zgodnie z 1°-3° mamy

▪ $\emptyset = \Omega - \Omega \in \mathcal{S}^*$,

▪ $A_1, A_2 \in \mathcal{S}^*$, to $\Omega - A_1 \cap A_2 = (\Omega - A_1) \cup (\Omega - A_2) = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \in \mathcal{S}^*$, bo $\bar{A}_1, \bar{A}_2 \in \mathcal{S}^*$, a więc $A_1 \cap A_2 = \Omega - (\Omega - A_1 \cap A_2) \in \mathcal{S}^*$.

1.2. Rozkład prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo zdarzenia

Definicja. Niech Ω przestrzeń zdarzeń elementarnych, a \mathcal{S} rodzina zdarzeń (losowych).

Niech $P : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ funkcja spełniająca następujące warunki:

1° $\forall A \in \mathcal{S} \quad P(A) \geq 0$

2° $P(\Omega) = 1$,

3° $A_n \in \mathcal{S} \quad \forall n \in \mathcal{N}$ i $A_n \cap A_m = \emptyset$ dla $n \neq m$, to

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

czyli P jest tzw. przeliczalnie addytywną funkcją zbioru. Funkcję P spełniającą warunki

1°- 3° nazywamy rozkładem prawdopodobieństwa na \mathcal{S} . Liczbę $P(A)$ dla

$A \in \mathcal{S}$ nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A .

² $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$

Podstawowe właściwości rozkładu prawdopodobieństwa na \mathcal{S} ujmuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie.

- 1) $P(\emptyset) = 0$ (prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest zerowe),
- 2) Dla dowolnego ciągu zdarzeń A_1, \dots, A_n parami rozłącznych ($A_n \cap A_m = \emptyset$ dla $n \neq m$) jest

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i),$$

- 3) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ (prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego),
- 4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- 5) $A \subseteq B$; to $P(A) \leq P(B)$,
- 6) $\forall A \in \mathcal{S} \quad P(A) \leq 1$,
- 7) Jeśli $A_i \in \mathcal{S} \quad (i = 1, 2, \dots)$ i $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, to

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n);$$

w szczególności:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 1,$$

- 8) Jeśli $A_i \in \mathcal{S} \quad (i = 1, 2, \dots)$ i $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, to

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n);$$

w szczególności:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0.$$

Definicja. Układ (Ω, \mathcal{S}, P) , gdzie Ω jest przestrzenią zdarzeń elementarnych, \mathcal{S} rodziną zdarzeń z Ω , a P rozkładem prawdopodobieństwa na \mathcal{S} (mówimy także umownie na Ω), nazywamy przestrzenią probabilistyczną.

A. Niech Ω będzie przestrzenią co najwyżej przeliczalną:

Jeżeli $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ jest przeliczalna, to funkcję P określamy następująco:

$$P(\{\omega_i\}) = p_i,$$

gdzie (p_i) jest danym ciągiem liczbowym – takim, że

$$p_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Z tego określenia i układu warunków definicyjnych P wynika, że jeśli

$A \subset \Omega$ i $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots\}$, to

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \dots) = P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + \dots = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots.$$

Jeżeli Ω jest przestrzenią skończoną: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, to

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

W szczególności można przyjąć (rozkład równomierny)

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i=1,2,\dots, n.$$

Wtedy, jeśli $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$ (A – k -elementowe), to $P(A) = \frac{k}{n}$.

Liczbę k nazywamy liczbą zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A .

Przykład. Niech $C = A \cup B$, $\text{card } A = n$, $\text{card } B = m^3$. Ze zbioru C wybieramy losowo s elementów ($s \leq n$). Prawdopodobieństwo p zdarzenia, że wszystkie elementy są z zbioru A jest równe

$$p = \frac{\binom{n}{s}}{\binom{n+m}{s}}.$$

B. Rozważmy przypadek, gdy $\Omega = \mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$. Niech $F: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ będzie funkcją o następujących właściwościach:

1° F jest niemalejąca ($x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$)

2° $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

3° F jest lewostronnie ciągła ($\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a)$)

Taką funkcją F jest, na przykład

$$(*) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi,$$

gdzie f jest dana funkcją nieujemną ($f \geq 0$), całkowaną na dowolnym przedziale (a, b) i taką, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1$$

Rozkład prawdopodobieństwa P na Ω definiujemy następująco: $P([a, b]) = F(b) - F(a)$ dla dowolnego $[a, b]$ ($a < b$). Wykazuje się (twierdzenie o rozszerzeniu miary), że P rozszerza się jednoznacznie na wszystkie podzbiory – elementy rodziny borelowskiej \mathcal{S} podzbiorów \mathcal{R} .

Funkcję F nazywamy dystrybuantą, a jeśli F można przedstawić w postaci (*), to funkcja f nosi nazwę gęstości prawdopodobieństwa na \mathcal{R} .

Prawdziwy jest też fakt odwrotny do powyższego.

Twierdzenie. Jeżeli P jest rozkładem prawdopodobieństwa na \mathcal{R} , to F określona wzorem

$$(**) \quad F(x) = P((-\infty, x))$$

jest dystrybuantą (dowód w [1]).

³ card X – liczność (liczebność) zbioru X

Przykład. Niech

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} .$$

Funkcja ta ma właściwości 1° - 3° definicji dystrybuanty.

Jeżeli $a < c < d < b$, to $P([c,d]) = F(d) - F(c) = \frac{d-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}$.

Rozkład prawdopodobieństwa określony przez wyżej zdefiniowaną dystrybuantę nazywamy równomiernym (jednostajnym, prostokątnym), gdyż gęstość prawdopodobieństwa przedstawia się następująco

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0, & b \leq x \end{cases} .$$

! Zbiór punktów nieciągłości dystrybuanty jest co najwyżej przeliczalny.

C. Niech $\Omega = \mathbb{R}^2$ (dwuwymiarowa arytmetyczna przestrzeń euklidesowa).

Niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki:

1° $F = F(x,y)$ jest niemalejąca ze względu na każdą ze zmiennych x,y (przy ustalonej wartości drugiej zmiennej);

2° $\forall x \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x,y) = 0, \forall y \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x,y) = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} F(x,y) = 1$;

3° $F = F(x,y)$ jest lewostronnie ciągła ze względu na każdą ze zmiennych x, y (przy ustalonej wartości drugiej zmiennej);

4° $\forall x_1 \leq x_2 \quad \forall y_1 \leq y_2 \quad F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0$.

Dla każdych $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ przyjmujemy

$$P(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x_1 \leq x < x_2, y_1 \leq y < y_2\}) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

Tak określona funkcja P rozszerza się jednoznacznie do rozkładu prawdopodobieństwa na rodzinie borelowskiej \mathcal{S} podzbiorów w $\Omega = \mathbb{R}^2$. Funkcja F nosi nazwę jego dystrybuanty.

Przykładem dystrybuanty (spełniającej warunki definicyjne 1° - 4°) jest

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta ,$$

gdzie

$$f \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1 ;$$

f jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa P (określonego powyżej).

Można wykazać, że jeśli P jest rozkładem prawdopodobieństwa w rodzinie zdarzeń \mathcal{S}

w \mathcal{R}^2 , to $F(x,y) = P(\{(x', y') : x' < x, y' < y\})$ jest dystrybuantą (ma właściwości 1° - 4°) (dowód w [1]).

Przykład. Funkcja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)}, & a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \\ 0, & \text{pozostałe } (x,y) \end{cases}$

jest gęstością prawdopodobieństwa dla rozkładu jednostajnego (równomiernego) prawdopodobieństwa w \mathcal{R}^2 (w $[a, b] \times [c, d]$).

Niech \mathcal{A} będzie zbiorem mierzalnym w \mathcal{R}^2 , tzn. dla którego istnieje pole powierzchni $\mu(\mathcal{A})$. Jeżeli \mathcal{A} jest zdarzeniem, to przy równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa na $[a, b] \times [c, d] = \mathcal{B}$ jest

$$P(\mathcal{A}) = \frac{\mu(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})}{\mu(\mathcal{B})} = \frac{\mu(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})}{(b-a)(d-c)} .$$

Definicja. Jeśli $P(B) > 0$, to prawdopodobieństwem (warunkowym) $P(A/B)$ zdarzenia A pod warunkiem zdarzenia B nazywamy

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

Wzór powyższy określa tzw. warunkowy rozkład prawdopodobieństwa zdarzeń z \mathcal{S} . Mianowicie,

1° ponieważ $P(A \cap B) \geq 0$ i $P(B) > 0$, to $P(A/B) \geq 0$;

2° $P(\Omega/B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$,

3° Niech A_1, A_2, \dots, A_n zdarzenia parami rozłączne. Wtedy zdarzenia $A_i \cap B$ ($i=1, \dots, n$) też są parami rozłączne. Wtedy

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i/B\right) &= \frac{P((\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B))}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^n P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n P(A_i/B)P(B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^n P(A_i/B_i) . \end{aligned}$$

Przykład. W magazynie są elementy pochodzące z wytwórni I i II. Są wśród nich elementy dobre (prawidłowe) i niedobre (wadliwe). Niech A oznacza zdarzenie: „wybrany losowo element pochodzi z wytwórni I”, zaś B – zdarzenie „wybrany losowo element jest prawidłowy”. Liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających poszczególnym zdarzeniom zestawiono w tabeli.

Zdarzenie	A	\bar{A}	Razem
B	a	b	a+b
\bar{B}	c	d	c+d
Razem	a+c	b+d	a+b+c+d=n

Na podstawie tabeli jest:

$$P(A \cap B) = \frac{a}{n}, \quad P(B) = \frac{a+b}{n}, \quad P(A/B) = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{a+b}{n}} = \frac{a}{a+b}$$

$$P(A) = \frac{a+c}{n}, P(B/A) = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{a+c}{n}} = \frac{a}{a+c}.$$

Uwaga. Zgodnie ze wzorem definiującym prawdopodobieństwo warunkowe jest
 $P(A \cap B) = P(A/B)P(B)$.

Definicja. Zdarzenia A i B są niezależne, jeżeli

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

! Jeżeli A i B są niezależne i $P(B) > 0$, to

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A),$$

a jeżeli $P(A) > 0$, to

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B).$$

Przykład. Pewien dwuelementowy układ działa, jeżeli a) oba elementy działają, b) przynajmniej jeden element działa. Obliczyć prawdopodobieństwo niezawodności układu, jeżeli prawdopodobieństwo niezawodności elementu jest równe p . Niech A oznacza zdarzenie „działa element pierwszy”, a B – zdarzenie „działa element drugi”. Oba zdarzenia są niezależne.

Ad a) niezawodność układu jest równa

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = p \cdot p = p^2,$$

Ad b) niezawodność układu jest równa

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) + P(A) \cdot P(B) = 2p - p^2.$$

Definicja. Zdarzenia A_1, \dots, A_n są niezależne, jeżeli dla dowolnych k_1, \dots, k_s , gdzie $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq n$ jest $P(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_s}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2}) \dots P(A_{k_s})$.

Natomiast $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ jest ciągiem zdarzeń niezależnych, jeżeli zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n są niezależne dla każdego n .

Przykład. Prawdopodobieństwo wystąpienia elementu wadliwego w „i-tej” partii elementów jest równe p_i ($i=1,2,3$). Z każdej partii pobieramy jeden element. Jakie jest prawdopodobieństwo

- że wszystkie elementy będą wadliwe
- wystąpienia co najmniej jednego elementu niewadliwego?

Niech A_i oznacza zdarzenie wyboru elementu wadliwego z „i-tej” partii. Wtedy $P(A_i) = p_i$, a $P(\bar{A}_i) = 1 - p_i$.

Zdarzenia A_i są niezależne. Wtedy:

Ad a) zdarzenie, że wszystkie elementy są wadliwe $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ oznacza, że $P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = p_1 p_2 p_3$;

Ad b) zdarzenie wystąpienia co najmniej jednego elementu niewadliwego jest równe $\bar{A} = \Omega - A$, skąd $P(\bar{A}) = 1 - p_1 p_2 p_3$.

Twierdzenie (o prawdopodobieństwie zupełnym). Jeżeli A_i (i przebiega przeliczalny lub skończony zbiór indeksów) tworzą układ zupełny zdarzeń, tzn.

$$\bigcup_i A_i = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j, P(A_i) > 0 ,$$

to dla dowolnego zdarzenia B jest

$$P(B) = \sum_i P(B/A_i) P(A_i).$$

Dowód. Mamy następujące równości:

$$B = \Omega \cap B = \left(\bigcup_i A_i \right) \cap B = \bigcup_i A_i \cap B = \bigcup_i B \cap A_i ,$$

skąd

$$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B/A_i)P(A_i)$$

(jeżeli A_i są parami rozłączne, to również $B \cap A_i$ są parami rozłączne).

Twierdzenie (Bayesa). Jeżeli A_i co najwyżej przeliczalny ciąg zdarzeń tworzący układ zupełny ($\bigcup_i A_i = \Omega$ i A_i parami rozłączne) oraz $P(B) > 0$, to dla każdego zdarzenia A_j ze zbioru (A_i) jest

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_i P(A_i)P(B/A_i)} .$$

Dowód. Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego mamy

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_j)P(A_j)}{\sum_i P(B/A_i)P(A_i)} ,$$

Przykład. W laboratorium są tensometry pochodzące z trzech firm, w równej liczbie z każdej. Wiadomo, że dostawy z pierwszej firmy mają 0,5% braków, z drugiej 0,7% braków, a z trzeciej 1% braków. Wybrany losowo tensometr okazał się wadliwy. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pochodzi on z drugiej firmy.

Oznaczamy przez A_i zdarzenie, że wybrany losowo tensometr pochodzi z „ i -tej” firmy ($i=1,2,3$), natomiast przez B zdarzenie, że wybrany tensometr jest wadliwy. Mamy zatem

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}, \quad P(B/A_1) = 0,005, \quad P(B/A_2) = 0,007, \quad P(B/A_3) = 0,010,$$

skąd

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot 0,005 + \frac{1}{3} \cdot 0,007 + \frac{1}{3} \cdot 0,010 = \frac{0,022}{3},$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,007}{\frac{1}{3} \cdot 0,022} = \frac{7}{22}.$$

Opisany przypadek można zmodyfikować na bardziej realistyczny, że z pierwszej firmy mamy np. 7 tensometrów, z drugiej 5 tensometrów, a z trzeciej 8 tensometrów. Wtedy można przyjąć

$$P(A_1) = \frac{7}{20}, P(A_2) = \frac{5}{20}, P(A_3) = \frac{8}{20},$$

a więc odpowiednio mamy

$$P(A_2/B) = \frac{\frac{5}{20} \cdot 0,007}{\frac{7}{20} \cdot 0,005 + \frac{5}{20} \cdot 0,007 + \frac{8}{20} \cdot 0,010} = 0,292$$

2. Zmienne losowe

2.1. Zmienna losowa jednowymiarowa. Rozkład prawdopodobieństwa.

Dystrybuanta.

Niech (Ω, \mathcal{S}, P) – przestrzeń probabilistyczna, gdzie Ω – przestrzeń zdarzeń elementarnych, \mathcal{S} – rodzina zdarzeń, P – rozkład prawdopodobieństwa na \mathcal{S} (na Ω).

Definicja. Przez zmienną losową na Ω rozumiemy funkcję rzeczywistą X określoną na Ω ($X: \Omega \rightarrow \mathcal{R}$) taką, że dla każdej $x \in \mathcal{R}$

$$A_x = \{\omega \in \Omega; X(\omega) < x\} \in \mathcal{S},$$

czyli A_x jest zdarzeniem.

Przykład. W partii produktu (niemasowego) są elementy prawidłowe i wadliwe. Wybieramy jeden element i przyporządkowujemy mu liczbę 1, jeśli jest prawidłowy i 0, jeśli jest wadliwy.

Niech $\Omega = \{\omega_p, \omega_w\}$, gdzie ω_p - element prawidłowy, a ω_w – element wadliwy. Funkcja X jest zdefiniowana jako $X(\omega_p) = 1, X(\omega_w) = 0$ (zdarzeniem elementarnym jest tu wylosowanie z partii elementu prawidłowego - ω_p lub wadliwego - ω_w).

W partii jest 90% elementów prawidłowych i 10% elementów wadliwych. Możemy zatem przyjąć następujący rozkład prawdopodobieństwa:

$$P(\{\omega: X(\omega) = 0\}) = \frac{1}{10}, P(\{\omega: X(\omega) = 1\}) = \frac{9}{10}.$$

! Nie każde zjawisko o charakterze losowym ma możliwość opisanie (przedstawienia) go w postaci liczbowej (za pomocą zmiennej losowej): np. stan zdrowia człowieka, stan urządzenia technicznego, korozja metali i inne.

!! Jeżeli Ω jest co najwyżej przeliczalna, to każde przekształcenie zbioru Ω w zbiór liczbowy w $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$ jest zmienną losową.

!!! Zdefiniowana wyżej zmienna losowa jest jednowymiarowa (zmiennie losowe dwu- i więcej wymiarowe będą zdefiniowane dalej).

Definicja. Niech X zmienna losowa na przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{S}, P) i niech \mathcal{B} rodzina borelowska zbiorów na $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$. Niech P_X funkcja zdefiniowana na \mathcal{B} wzorem

$$P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in A\}), \quad A \in \mathcal{B}$$

Funkcję P_X nazywamy rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X .

Uwaga. P_X spełnia warunki definicyjne 1°- 3° rozkładu prawdopodobieństwa dla $\mathcal{S} = \mathcal{B}$ w $\Omega = \mathcal{R}$, czyli w przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{R}, \mathcal{B}, P_X)$ – tzw. indukowanej przez przestrzeń (Ω, \mathcal{S}, P) . Istotnie,

$$1^\circ P_X(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{B},$$

$$2^\circ P_X(\mathcal{R}) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in \mathcal{R}\}) = P(\Omega) = 1,$$

3° dla dowolnych zdarzeń A_i parami rozłącznych, należących do \mathcal{B} jest

$$P_X\left(\bigcup_i A_i\right) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in \bigcup_i A_i\}) = P\left(\bigcup_i \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in A_i\}\right) = \sum_i P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in A_i\}) = \sum_i P_X(A_i).$$

Definicja. Dystrybuantę wyznaczoną przez rozkład P_X nazywamy dystrybuantą zmiennej losowej X :

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)).$$

Przykład. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby k ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ wynosi $p = \frac{1}{n}$. Zbiór zdarzeń elementarnych to $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, a zdarzenie elementarne ω_k , to wylosowanie liczby k . Zmienna losowa jest zdefiniowana jako $X(\omega_k) = k$. Rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej jest zdefiniowany przez równości:

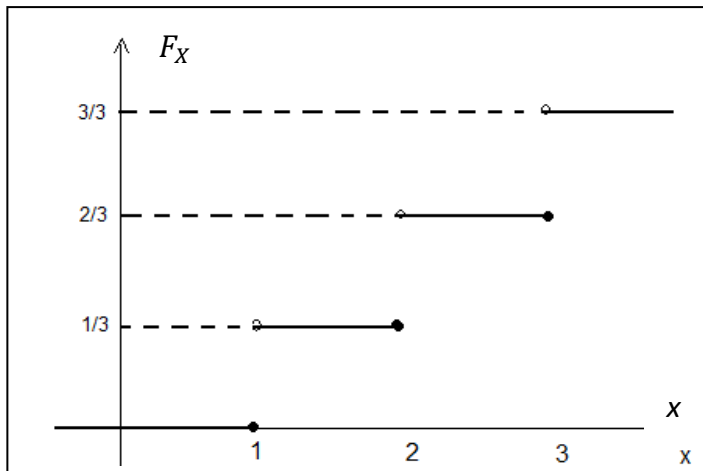
$$P_X(\{k\}) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in \{k\}\}) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = k\}) = P(\{\omega_k\}) = p = \frac{1}{n}$$

Dystrybuantą tej zmiennej losowej X jest, zgodnie ze wzorem definicyjnym, określona następująco:

$$F_X(x) = P(\{\omega: X(\omega) < x\}) = \sum_{\substack{k \\ k < x}} P(\{\omega: X(\omega) = k\}) = \sum_{k < x} p = \frac{k}{n},$$

dla $k < x$.

Na rys. poniżej przedstawiono wykres F_X przy $n=3$ ($p=1/3$)



Jest to tzw. „funkcja schodkowa”. Suma skoków wartości funkcji F_X jest równa 1.

Definicja. Zmienna losowa X jest typu skokowego (jest zmienną dyskretną), jeżeli istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $\mathcal{X} \subset \mathcal{R}$ taki, że $P_X(\mathcal{X}) = 1$. W szczególnym przypadku X jest typu skokowego, gdy \mathcal{X} jest skończony.

Elementy x_k zbioru \mathcal{X} , czyli gdy

$\mathcal{X} = (x_1, x_2, \dots)$ (zbiór przeliczalny)

lub

$\mathcal{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (zbiór skończony)

nazywamy wartościami zmiennej losowej X .

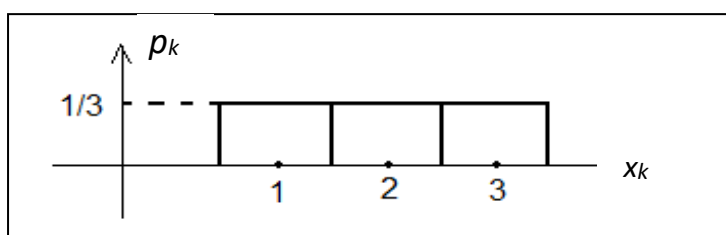
Uwaga. Niech

$$p_k \stackrel{\text{ozn.}}{=} p(x_k) = P_X(\{x_k\}) = P(\{\omega: X(\omega) = x_k\}) \stackrel{\text{ozn.}}{=} P(X = x_k) \geq 0$$

i niech

$$\sum_k p_k = 1 .$$

Zbiór (p_k) liczb $p(x_k)$ wyznacza rozkład prawdopodobieństwa P_X zmiennej typu skokowego (dyskretnej) X . Dystrybuanta F_X zmiennej X jest funkcją schodkową (lewostronnie ciągłą) o skokach p_k dla $x = x_k$. Suma skoków dystrybuanty F_X jest równa 1. Wygodną formą prezentacji zmiennej dyskretnej X jest histogram, czyli wykres funkcji przedziałami stałej, o wartościach p_k , przy czym x_k są środkami tych przedziałów – podstaw prostokątów przedstawiających histogram. Dla przykładu z poprzedniej strony histogram przedstawiono poniżej.



Definicja. Zmienna losowa X ma rozkład jednopunktowy, jeżeli $\mathcal{X} = \{x_0\}$ i $p(x_0) = P(\{\omega: X(\omega) = x_0\}) = 1$. Natomiast, gdy $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$ i $p(x_1) = P(\{\omega: X(\omega) = x_1\}) = p$, $p(x_2) = P(\{\omega: X(\omega) = x_2\}) = q = 1-p$ ($0 < p < 1$), to mówimy, że zmienna X ma rozkład dwupunktowy.

Wprowadzamy tzw. schemat Bernoulliego doświadczeń. W nie zmieniających się warunkach wykonujemy n razy pewne doświadczenie, w wyniku którego może nastąpić zdarzenie A lub \bar{A} . W każdym z doświadczeń jest $P(A) = p$, a $P(\bar{A}) = 1-p = q$ przy $p \in (0,1)$.

Niech Ω_n będzie zbiorem zdarzeń elementarnych w serii n prób. Dla $n = 1$ mamy $\Omega_1 = \{\omega_0, \omega_1\}$, gdzie $\omega_0 = \bar{A}$, $\omega_1 = A$, a $P_1(\{\omega_0\}) = q$, $P_1(\{\omega_1\}) = p$. Dla $n = 2$ jest $\Omega_2 = \{(\omega_0, \omega_0), (\omega_0, \omega_1), (\omega_1, \omega_0), (\omega_1, \omega_1)\} = \{(\omega_{i1}, \omega_{i2}): i_k = 0,1 \text{ dla } k = 1,2\}$, gdzie $\{\omega_0\} = \bar{A}$, $\{\omega_1\} = A$, czyli $(\omega_0, \omega_0) = \{\bar{A}, \bar{A}\}, \dots, (\omega_1, \omega_1) = \{A, A\}$.

Ogólnie, jeśli $\Omega_n = \{(\omega_{i1}, \dots, \omega_{in}); i_k = 0,1 \text{ dla } k = 1, \dots, n\}$, gdzie $\omega_{ik} = \bar{A}$, gdy $i_k = 0$ a $\omega_{ik} = A$, gdy $i_k = 1$. Przy tym Ω_n ma 2^n zdarzeń elementarnych).

Niech P_n będzie rozkładem prawdopodobieństwa w Ω_n . Zakładamy, że

$$(*) \quad P_n(\{\omega_{i1}, \dots, \omega_{in}\}) = P_1(\{\omega_{i1}\}) \cdot \dots \cdot P_1(\{\omega_{in}\}).$$

Doświadczenia, dla których zachodzi równość (*) nazywamy niezależnymi.

Niech zmienną losową X będzie liczba wystąpień zdarzenia A w serii n doświadczeń $(\omega_{i1}, \dots, \omega_{in})$. Zdarzenie $\{\omega: X(\omega) = k\}$, gdzie $\omega \in \Omega_n$, oznacza, że w serii n doświadczeń wystąpiło k razy zdarzenie A (oraz $n-k$ razy zdarzenie \bar{A}). Zmienna losowa X (dyskretna) ma rozkład prawdopodobieństwa określony wzorami:

$$P_n(k) = P(\{\omega \in \Omega_n: X(\omega) = k\}) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k}^{i_1, \dots, i_n} P_n(\omega_{i1}, \dots, \omega_{in}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

gdyż każdemu ciągowi $(\omega_{i1}, \dots, \omega_{in})$ o k wyrazach ω_1 i $n-k$ wyrazach ω_0 odpowiada zgodnie z (*) prawdopodobieństwo $p^k q^{n-k}$, a różnych takich ciągów jest $\binom{n}{k}$.

Ze wzoru Newtona wynika, że

$$\sum_{k=0}^n P_n(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1.$$

O zmiennej losowej X mówimy, że ma rozkład dwumianowy lub rozkład Bernoulliego.

Przykład. Energia elektryczna pochodząca z określonego źródła ma być wykorzystywana z przerwami przez pięć urządzeń ($n = 5$). Aby oszacować zapotrzebowanie na energię zakładamy:

1° w danej chwili prawdopodobieństwo p zapotrzebowanie na energię dla każdego urządzenia jest takie samo,

2° urządzenia pracują niezależnie od siebie,

3° każde z urządzeń korzysta z energii 12 minut w ciągu godziny.

Niech X oznacza liczbę urządzeń korzystających z energii w danej chwili. Znaleźć rozkład zmiennej losowej X . Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że liczba urządzeń pracujących w danej chwili jest większa od 2.

Z warunków Przykładu wynika, że X ma rozkład dwumianowy przy $n = 5$, $p = \frac{12}{60} = 0,2$, $q = 0,8$. Zatem zgodnie ze wzorem definicyjnym:

$$\begin{aligned} P_5(0) &= P(X = 0) = 1 \cdot 0,8^5 \approx 0,33, \\ P_5(1) &= P(X = 1) = 5 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 \approx 0,41, \\ P_5(2) &= P(X = 2) = 10 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 \approx 0,20, \\ P_5(3) &= P(X = 3) = 10 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 \approx 0,05, \\ P_5(4) &= P(X = 4) = 5 \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^4 \approx 0,01, \\ P_5(5) &= P(X = 5) = 1 \cdot 0,2^5 \approx 0,00. \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo tego, że liczba jednocześnie pracujących maszyn jest nie większa od 2 jest równa sumie

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,94.$$

Definicja. Mówimy, że zmienna losowa X (dyskretna) ma rozkład Poissona, jeśli $X = (0,1,2,\dots)$ oraz

$$p(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0,1,2, \dots$$

Przykład. Przeprowadzono n niezależnych doświadczeń ($n=2608$), z których każde trwało 7,5 sek. i polegało na rejestrowaniu przez licznik dochodzących do niego cząstek w wyniku rozpadu radioaktywnego. Zmienną losową jest tu liczba zarejestrowanych cząstek ($X = k$). W tabeli poniżej podano liczby k , liczby n_k doświadczeń, w których zarejestrowano k cząstek, częstość empiryczną $\tilde{p}(k) = \frac{n_k}{n}$, oraz prawdopodobieństwo $p(k)$ obliczone ze wzoru na rozkład Poissona przy $\lambda=3,85$ ($\lambda = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{10} n_k$).

k	n_k	$\frac{n_k}{n}$	$p(k)$
0	57	0,022	0,021
1	203	0,078	0,081
2	383	0,147	0,156
3	525	0,201	0,201
4	532	0,204	0,195
5	408	0,156	0,151
6	273	0,105	0,097
7	139	0,053	0,054

8	45	0,017	0,026
9	27	0,010	0,014
10	16	0,006	0,007
Razem	2608	0,999	1,000

Jak widać, rozkład Poissona prawdopodobieństwa bardzo dobrze przybliża częstość występowania k cząstek. Zagadnienie polegające na wydaniu orzeczenia, czy dany rozkład teoretyczny może aproksymować rozkład empiryczny jest jednym z zagadnień statystyki matematycznej. Poniższe twierdzenie pokazuje, że rozkład Poissona jest rozkładem granicznym rozkładu Bernoulliego.

Twierdzenie (Poissona). Niech zmienna losowa X_n ma rozkład dwumianowy

$$p(n)=P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$$

Jeżeli $p = p(n)$ maleje w ten sposób, że dla pewnego n_0 i każdego $n > n_0$ jest $np(n) = \lambda$, gdzie $\lambda = \text{const}$ (niezależne od n), to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Założmy teraz, że zbiór \mathcal{X} jest nieprzeliczalny i niech $\mathcal{X} = \mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$.

Definicja. Zmienna losowa X o dystrybuancie F jest typu ciągłego, jeżeli istnieje funkcja $f \geq 0$ na \mathcal{R} taka, że

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du.$$

Funkcję f nazywamy gęstością prawdopodobieństwa zmiennej X .

! W punktach, w których f jest ciągła jest $F'(x) = f(x)$. Wtedy bowiem

$$f(x) = \lim_{\Delta x} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x},$$

stąd nazwa „gęstość prawdopodobieństwa”.

!! Każda funkcja $f \geq 0$ taka, że $\int_{-\infty}^{\infty} F(u) du$ istnieje i $\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1$ wyznacza dystrybuantę $F(x)$, która określa rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej typu ciągłego.

!!! Dla zmiennej typu ciągłego jest $P(X = x_0) = 0$ dla dowolnego $x_0 \in R$.

Przykład. Funkcja $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), & x \geq 0 \end{cases}$ jest gęstością prawdopodobieństwa

zmiennej losowej. Dystrybuanta tej zmiennej jest równa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \exp(-\frac{x}{\lambda}), & x \geq 0 \end{cases} .$$

Ponadto dla $\lambda = 1$ jest $P(X < \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = 1 - \exp(-1/2)$, $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = \exp(-2) - \exp(-1)$, $P(x > 1) = 1 - P(x \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - (1 - \exp(-1)) = \exp(-1)$ •

Definicja. O zmiennej losowej (typu ciągłego), o gęstości rozkładu

$$\text{prawdopodobieństwa równej } f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\lambda} \exp(-\frac{x}{\lambda}), & x \geq 0 \end{cases} \quad (x > 0)$$

mówimy, że ma rozkład wykładniczy prawdopodobieństwa.

Uwaga. Przez niezawodność (urządzenia, konstrukcji) rozumie się prawdopodobieństwo bezawaryjnego funkcjonowania w czasie t . Jeżeli T oznacza zmienną losową rozumianą jako czas poprawnego (bezawaryjnego) funkcjonowania, to $P(T < t) = F(t)$ jest dystrybuantą zmiennej T i oznacza prawdopodobieństwo, że bezawaryjność nie przekroczy czasu t . Niezawodność $N(t)$ jest zatem równa $N(t) = P(T \geq t) = 1 - F(t)$.

Korzystając z metod statystyki matematycznej sprawdzono, że dobrą aproksymacją niezawodności jest $N(t) = e^{-t/\lambda}$, $t > 0$, czyli $F(t) = 1 - e^{-t/\lambda}$, a więc zmienna T ma rozkład wykładniczy.

Definicja. O zmiennej losowej, której gęstością prawdopodobieństwa jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

mówimy, że ma rozkład jednostajny (równomierny) prawdopodobieństwa (w przedziale $[a, b]$). Dystrybuanta tej zmiennej jest równa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Przykład. Niech punkt M porusza się ruchem jednostajnym po okręgu o promieniu r . Niech A będzie ustalonym punktem, a X długością łuku \widehat{AM} . Zmienna X jest losowa o rozkładzie równomiernym i gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2\pi r}, & 0 \leq x \leq 2\pi r \\ 0, & x > 2\pi r \end{cases} .$$

Definicja. Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład gamma, jeżeli gęstością prawdopodobieństwa tej zmiennej jest:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}, & x > 0 \end{cases}.$$

Symbol $\Gamma(p)$ oznacza tzw. funkcję gamma Eulera:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

! Funkcja Γ jest uogólnieniem pojęcia „silnia”. Mianowicie, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(1) = 1$.

!! Dla $p = 1$ rozkład gamma staje się rozkładem wykładniczym.

Szczególne znaczenie w probablistyce ma rozkład normalny (rozkład Gaussa).

Definicja. Zmienna losowa X ma rozkład normalny, jeśli jej gęstością prawdopodobieństwa jest funkcja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right],$$

gdzie m i σ są parametrami tego rozkładu: $\sigma \in \mathcal{R}$, $m \in \mathcal{R}$, $\sigma > 0$ (oznaczenie $N(m, \sigma)$).

Wykorzystujemy tu równość

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

dla funkcji e^{-x^2} , dla której nie istnieje elementarna funkcja pierwotna.

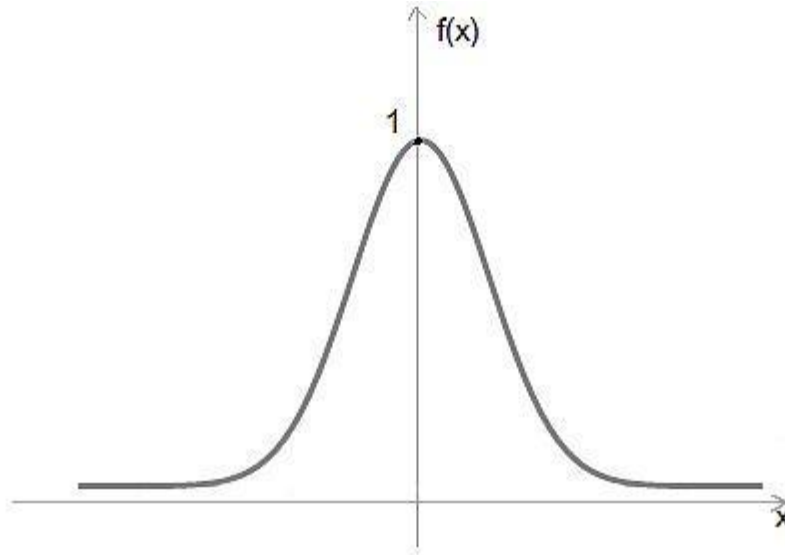
Do obliczania dystrybuanty zmiennej losowej o rozkładzie normalnym korzystamy z tablic funkcji

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du, x \geq 0.$$

Wtedy dystrybuanta zmiennej X o rozkładzie normalnym $N(0,1)$ jest równa:

$$F(x) = \begin{cases} 0,5 + \Phi(x), & x \geq 0 \\ 0,5 - \Phi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Wykres funkcji gęstości f rozkładu $N(0,1)$ naszkicowano dalej. Jest to tzw. krzywa Gaussa.



! Z tablic rozkładu normalnego znajdujemy, że $P(|X - m| > 3\sigma) \approx 0,0027$, co oznacza iż prawie wszystkie wartości zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$ znajdują się praktycznie w przedziale $(m-3\sigma, m+3\sigma)$. Również praktycznie ważne jest, że z prawdopodobieństwem bliskim jedności a mianowicie 0,95 i 0,99 wartości takiej zmiennej losowej są zawarte odpowiednio w przedziałach $(m-1,96\sigma; m+1,96\sigma)$ i $(m-2,58\sigma; m+2,58\sigma)$.

Przykład. Wytrzymałość lin stalowych pochodzących z masowej produkcji jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym $N(100\text{MPa}, 5\text{MPa})$. Obliczymy, ile przeciętnie lin spośród 1000 ma wytrzymałość mniejszą niż 90 MPa.

Przyjmując, że częstość przyjmowania wartości wytrzymałości z przedziału $(-\infty, 90)$ jest równa prawdopodobieństwu

$P(X < 90) |_{N(100,5)} = P\left(\frac{X-100}{5} < \frac{90-100}{5}\right) |_{N(0,1)} = P(Y < -2) = 0,5 - \Phi(2) = 0,02275$ przy $Y = \frac{X-100}{5}$. A więc przeciętnie 23 liny na 1000 mają wytrzymałość mniejszą niż 90 MPa.

Uwaga. Istnieją zmienne losowe, które nie są ani typu skokowego ani typu ciągłego. Mogą to być na przykład, zmienne losowe będące ich „kombinacjami liniowymi”. Niech $X \in [0,10]$ i niech:

$$P_X(X = k) = p_k > 0, \quad k = 0,1, \dots, 10$$

$$\sum_{k=0}^{10} p_k = p_s < 1,$$

$$f: [0,10] \rightarrow R, \quad \int_0^{10} f(x) dx = p_c = 1 - p_s$$

Dystrybuantę zmiennej X definiujemy jako $F(x) = F_s(x) + F_c(x)$, przy

$$F_s(x) = \sum_{k=0}^x p_k, (k = 0, 1, 2, \dots, 10),$$

$$F_c(x) \begin{cases} 0, x < 0 \\ \int_0^x f(u) du, 0 \leq x \leq 10 \\ \int_0^{10} f(u) du = p_c, 10 < x \end{cases}$$

2.2. Zmienna losowa jednowymiarowa. Charakterystyki liczbowe i funkcyjne.

Niech zmienna losowa Y będzie pewną funkcją zmiennej losowej X , tzn.

$$Y(\omega) = g(X(\omega)), \forall \omega \in \Omega.$$

Znając rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X możemy wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y .

Przykład. Niech $Y = aX + b$, gdzie X jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym:

$$P_X(X = 0) = q,$$

$$(p+q=1)$$

$$P_X(X = 1) = p.$$

Ponieważ $X = \frac{1}{a}(Y - b)$, to

$$P_X(X = 0) = P_X\left(\frac{Y - b}{a} = 0\right) = P_Y(Y = b) = q,$$

$$P_X(X = 1) = P_X\left(\frac{Y - b}{a} = 1\right) = P_Y(Y = a + b) = p.$$

Przykład. Niech X będzie zmienną losową typu ciągłego o gęstości f_x , dystrybuancie F_x i niech $Y = aX + b$. Wyznamy gęstość f_Y i dystrybuantę F_Y zmiennej losowej Y .

W przypadku $a > 0$ mamy:

$$F_Y(y) = P(\{\omega: Y(\omega) < y\}) = P(\{\omega: aX(\omega) + b < y\}) = P\left(\left\{\omega: X(\omega) < \frac{y-b}{a}\right\}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

W punktach ciągłości gęstości prawdopodobieństwa jest

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \left(\int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} f_X(u) du \right) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{d}{dy} \left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Natomiast w przypadku $a < 0$ jest (w uproszczonym zapisie)

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(aX + b < y) = P\left(X > \frac{y-b}{a}\right) = 1 - P\left(X < \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right),$$

a w punktach ciągłości gęstości prawdopodobieństwa:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \left[1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \right] = -\frac{d}{dx} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{d}{dy} \frac{y-b}{a} = -f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a}.$$

Zatem łącznie dla dowolnego $a \neq 0$ mamy: $f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$, co określa gęstość prawdopodobieństwa zmiennej Y .

Przykład. Znajdziemy gęstość zmiennej losowej $Y = X^2$, gdzie X jest zmienną losową typu ciągłego o gęstości f_X i dystrybuancie F_X .

Jeżeli przez f_Y i F_Y oznaczymy gęstość i dystrybuantę zmiennej Y , to dla $Y > 0$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(X^2 < y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = P(X < \sqrt{y}) - P(X < -\sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\sqrt{y}) - \frac{d}{dy} F_X(-\sqrt{y}) = \frac{dF_X}{dx}(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{dF_X}{dx}(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

$$F_Y(y) = P(Y < y) = 0 \text{ dla } y \leq 0$$

Ostatecznie więc:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, & y > 0. \end{cases}$$

Twierdzenie. Jeżeli zmienna losowa $Y=g(X)$, gdzie X jest zmienną losową typu ciągłego o gęstości f_X , to dystrybuanta F_Y zmiennej Y jest określona wzorem:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y) = \int_{\{x: g(x) < y\}} f_X(u) du.$$

Jeśli ponadto g jest funkcją różniczkowalną i ściśle monotoniczną, X jest zmienną losową o gęstości f_X , to $Y = g(X)$ jest zmienną losową o gęstości prawdopodobieństwa

$$f_Y(y) = f_X(h(y))h'(y),$$

gdzie $x = h(y)$ jest funkcją odwrotną do $y = g(x)$.

Uwaga! Nie każda funkcja zmiennej losowej jest zmienną losową. Jeśli jednak g jest funkcją borelowską, to złożenie $Y = g(X)$ jest zmienną losową, gdy X jest zmienną losową. Zaś g jest funkcją borelowską, jeśli $\forall a \in \mathcal{R}$ zbiór $\{x: g(x) < a\}$ jest borelowski (jest elementem rodziny zbiorów borelowskich \mathcal{B}). W szczególności borelowska jest funkcja ciągła.

Definicja. Wartością przeciętną (wartością oczekiwaną, nadzieją matematyczną) zmiennej losowej X , oznaczaną symbolem $E(X)$, nazywamy wielkość liczbową określoną następująco:

- 1) jeśli X jest zmienną losową typu skokowego (dyskretnego), o zbiorze wartości $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, przy czym $p(x_k) = P(X=x_k)$, a szereg $\sum_k |x_k| p(x_k)$ jest zbieżny, to

$$E(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k x_k p(x_k);$$

2) jeśli X jest zmienną losową typu ciągłego o gęstości prawdopodobieństwa f i zbieżna jest całka $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx$, to

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Przykład. Zmienna losowa o rozkładzie dwupunktowym $X=\{0,1\}$, $p(0)=q$, $p(1)=p$ ($p+q=1$) ma wartość oczekiwaną $E(X)=0 \cdot q + 1 \cdot p=p$.

Przykład. Obliczymy wartość przeciętną zmiennej losowej X o rozkładzie określonym wzorami (rozkład równomierny) $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, $p(x_k)=P(X=x_k)=\frac{1}{N}$, gdzie N liczebnością zbioru X . Mamy zatem $E(X) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} x_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k = \bar{x}_N$, gdzie \bar{x}_N oznacza średnią arytmetyczną zbioru liczb $\{x_1, \dots, x_N\}$.

Twierdzenie. Jeżeli zmienna losowa $Y = g(X)$, gdzie X jest zmienną losową oraz istnieją $E(X)$ i $E(Y)$, to

1° w przypadku, gdy X jest typu skokowego o co najwyżej przeliczalnym

$X = \{x_1, x_2, \dots\}$ jest

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_k g(x_k)p(x_k);$$

2° w przypadku, gdy X jest typu ciągłego o gęstości f

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

(dowód tw. wynika wprost z definicji E)

Twierdzenie. Jeżeli dla zmiennej losowej X istnieje $E(X)$, to dla dowolnych $a, b \in \mathcal{R}$ istnieje $E(aX+b)$ oraz $E(aX+b) = aE(X)+b$.

(dowód jest wnioskiem z twierdzenia poprzedniego)

Wniosek. Jeżeli $m = E(X)$ istnieje, to $E(X-m) = 0$.

Definicja. Jeżeli X jest zmienną losową, to

$$m_k \stackrel{\text{def}}{=} E(X^k), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

jeśli $E(X^k)$ istnieje, nazywamy momentem rzędu k zmiennej losowej X , a

$$\mu_k = E((X - m)^k), \quad m = m_1 = E(X), \quad k = 1, 2, \dots$$

nosi nazwy momentu centralnego rzędu k zmiennej losowej X .

! Jeżeli istnieje moment rzędu r zmiennej losowej X , to istnieją wszystkie jej momenty rzędu $l < r$.

Uwaga. Dwie różne zmienne losowe X_1 i X_2 mogą mieć tę samą wartość przeciętną ($E(X_1) = E(X_2)$), a mimo to różne rozkłady prawdopodobieństwa. Mówimy, że zmienne te mają różne „rozrzuty” lub „rozproszenia”. Miarą tego jest wariancja.

Definicja. Wariancją zmiennej losowej X nazywany jest jej moment centralny rzędu drugiego, czyli

$$V(X) \stackrel{\text{def}}{=} E((X - E(X))^2)$$

(jeśli istnieje). Natomiast

$$\sigma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{V(X)}$$

nazywamy odchyleniem standardowym zmiennej losowej X (jeśli istnieje $V(X)$).

Twierdzenie Niech X będzie zmienną losową o wariancji $V(X)$. Wtedy

- 1) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$,
- 2) dla dowolnych $a, b \in \mathcal{R}$ $V(aX + b) = a^2V(X)$,
- 3) $V(X) \geq 0$ i $V(X) = 0 \Leftrightarrow X$ ma rozkład jednopunktowy,
- 4) jeśli $V(X) = \sigma^2$ i $E(X) = m$, to dla dowolnego $\varepsilon > \sigma$ jest $P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \sigma^2 / \varepsilon^2$ (nierówność Czebyszewa).

Przykład. Wariancja zmiennej losowej X o rozkładzie dwupunktowym $P(X=0) = q$, $P(X=1) = p$ ($p+q=1$) jest równa: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0^2q + 1^2p - (0q + 1p)^2 = p - p^2 = pq$.

Uwaga. Niech $V(X) > 0$ wariancja zmiennej losowej X , a $E(X)$ jej wartość oczekiwana.

Wtedy zmienna standaryzowana $Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ ma następujące charakterystyki

$E(Y) = 0$, $V(Y) = 1$.

Istotnie

$$E(Y) = E\left(\frac{1}{\sqrt{V(X)}}X - \frac{E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) = \frac{E(X)}{\sqrt{V(X)}} - \frac{E(X)}{\sqrt{V(X)}} = 0$$

$$V(Y) = V\left(\frac{1}{\sqrt{V(X)}}X - \frac{E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) = \frac{1}{(\sqrt{V(X)})^2} V(X) = 1.$$

Przykład. Zmienna losowa o rozkładzie normalnym $N(0,1)$ jest standaryzowana ($E(X) = 0$, $V(X) = 1$). Natomiast zmienna losowa o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$ ma następujące charakterystyki $E(X) = m$, $V(X) = \sigma^2$. Istotnie, dla zmiennej losowej o

rozkładzie normalnym $N(0,1)$ jest $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, więc $E(X) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-x) e^{-(-x)^2/2} dx = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x' e^{-x'^2/2} dx'$$

$\Rightarrow E(X) = -E(X)$, skąd $E(X) = 0$. Natomiast $V(X) = E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = 1$.

Z kolei dla $N(m, \sigma)$ mamy $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m) \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx + \frac{m}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx = m$,

$V(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sigma^3 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \sigma^2$.

Jeśli X ma rozkład $N(m, \sigma)$, to $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ ma rozkład $N(0,1)$.

Przykład. Zmienna losowa X o rozkładzie dwumianowym $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ ma

wartość przeciętną $E(X) = \sum_{k=0}^n k p_n(k) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$

$\sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} =$

np oraz wariancję: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq$.

Przykład. Zmienna losowa X o rozkładzie jednostajnym w przedziale $[a, b]$ ma wartość

przeciętną $E(X) = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{2}(a+b)$ oraz wariancję $V(X) =$

$E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{b^3 - a^3}{b-a} - \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$, gdyż $E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$.

Przykład. Zmienna losowa X o rozkładzie gamma ma wartość przeciętną i wariancję

równe: $E(X) = \int_0^{\infty} x \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(p+1)}{a\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \frac{a^{p+1}}{\Gamma(p+1)} x^p e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(p+1)}{a\Gamma(p)} = \frac{p}{a}$,

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\Gamma(p+2)}{a^2\Gamma(p)} - \frac{p^2}{a^2} = \frac{(p+1)p\Gamma(p)}{a^2\Gamma(p)} - \frac{p^2}{a^2} = \frac{p}{a^2}$, gdyż $E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(p+2)}{a^2\Gamma(p)}$.

Definicja. Przez medianę zmiennej losowej X , oznaczaną symbolem $x_{1/2}$, rozumiemy taką liczbę rzeczywistą, która spełnia warunki:

$$P\left(\left\{\omega: x(\omega) \leq x_{1/2}\right\}\right) \geq \frac{1}{2} \text{ i } P\left(\left\{\omega: x(\omega) \geq x_{1/2}\right\}\right) \geq \frac{1}{2}$$

! Dla każdej zmiennej losowej mediana istnieje, ale może być niejednoznaczna.

Przykład. Niech X zmienna losowa typu skokowego o rozkładzie

$P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{4}$, $P(X=2) = \frac{1}{2}$. Medianą $x_{1/2}$ jest dowolna liczba z przedziału $[1, 2]$. Natomiast wartością przeciętną jest

$$E(X) = 0 * \frac{1}{4} + 1 * \frac{1}{4} + 2 * \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \in [1, 2]$$

!! Dla zmiennej losowej typu ciągłego o gęstości prawdopodobieństwa f i o dystrybuancie F jest

$$\int_{-\infty}^{x_{1/2}} f(x) dx = \frac{1}{2} = F(x_{1/2}) = \int_{x_{1/2}}^{\infty} f(x) dx.$$

Definicja. Kwantylem rzędu p ($0 < p < 1$) zmiennej losowej X o dystrybuancie F nazywamy taką liczbę x_p , że $F(x_p) \leq p \leq F(x_p^+)$

! Mediana jest kwantylem rzędu $p = 1/2$.

Definicja. Funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X nazywamy funkcję zespoloną zmiennej rzeczywistej t , określoną dla każdego $t \in \mathcal{R}$ wzorem $\varphi(t) = E(e^{itX}) = E(\cos tX) + i E(\sin tX)$ ($i^2 = -1$).

! Jeśli X jest typu skokowego i $p(x_k) = P(X = x_k)$, to $\varphi(t) = \sum_k e^{itx_k} p(x_k)$.

!! Jeśli X jest typu ciągłego o gęstości $f(x)$, to $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$.

3. Zmienne losowe wielowymiarowe (wektory losowe)

W tym rozdziale przedstawimy podstawowe wiadomości dotyczące zmiennych losowych wielowymiarowych, a w niektórych kwestiach specyficznych ograniczymy je do zmiennych dwuwymiarowych.

Definicja. Niech (Ω, \mathcal{S}, P) przestrzeń probabilistyczna i niech $\Omega \ni \omega \rightarrow \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{R}^n$. Układ funkcji (X_1, \dots, X_n) na Ω nazywamy n -wymiarową zmienną losową (\mathbf{X} nazywamy wektorem losowym), jeśli

$$(*) \{ \omega \in \Omega: (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in A \} \in \mathcal{S}$$

dla każdego zbioru A rodziny borelowskiej \mathcal{B} w \mathcal{R}^n (najmniejsza rodzina przeliczalnie addytywna zbiorów zawierająca zbiory otwarte w \mathcal{R}^n).

! Niech (X_1, \dots, X_n) n -wymiarowa zmienna losowa. Wtedy X_i ($i=1, \dots, n$) są jednowymiarowymi zmiennymi losowymi. Na odwrót, jeśli X_1, \dots, X_n – zmienne losowe na Ω , to (X_1, \dots, X_n) n -wymiarowa zmienna losowa, tylko jeśli spełniony jest warunek (*).

Definicja. Na rodzinie borelowskiej zbiorów \mathcal{B} w \mathcal{R}^n określamy funkcję $P_{\mathbf{X}}(A) = P(\{ \omega \in \Omega: \mathbf{X}(\omega) \in A \})$, $A \in \mathcal{B}$. Funkcję tę nazywamy rozkładem prawdopodobieństwa wektora losowego \mathbf{X} (zmiennej losowej n -wymiarowej (X_1, \dots, X_n)) na Ω , indukowanym przez rozkład prawd. P na Ω . Funkcję $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P_{\mathbf{X}}(\{(x'_1, \dots, x'_n): x'_1 < x_1, \dots, x'_n < x_n\}) = P(\{\omega: X_1(\omega) < x_1, \dots, X_n(\omega) < x_n\})$, przy $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$, nazywamy dystrybuantą wektora losowego \mathbf{X} (zmiennej losowej n -wymiarowej (X_1, \dots, X_n)).

Uwaga. Odnośnie dwuwymiarowej zmiennej losowej stosować będziemy głównie tradycyjne oznaczenia: (X, Y) , $P_{(X, Y)}$, $F_{(X, Y)}(x, y) = P_{(X, Y)}(X < x, Y < y) = P(\{\omega: X(\omega) < x, Y(\omega) < y\})$. Natomiast wzór $P_{(X, Y)}(\{(x, y): x_1 \leq x < x_2, y_1 \leq y < y_2\}) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$ określa (definiuje) rozkład prawdopodobieństwa za pomocą dystrybuanty.

! Zmienne wielowymiarowe mogą również być typu skokowego i ciągłego.

Definicja. Mówimy, że n -wymiarowa zmienna losowa X jest typu skokowego, jeżeli istnieje, co najwyżej przeliczalny zbiór \mathcal{X} w \mathcal{R}^n taki, że $P(X) = 1$.

! Przyjmujemy oznaczenie: $x_i = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in \mathcal{R}^n$ dla $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ oraz $p(x_i) = P(\{\omega: X(\omega) = x_i\})$. Wówczas $\sum_i p(x_i) = 1$.

!! Elementy zbioru \mathcal{X} można również numerować inaczej. Np. dla zmiennej dwuwymiarowej (X, Y) może być: $\mathcal{X} = \{(x_i, y_j): i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots\}$, $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$, $\sum_{i, j} p(x_i, y_j) = 1$.

Definicja. Zmienna losowa (X_1, \dots, X_n) jest typu ciągłego, jeśli istnieje funkcja nieujemna $f(x_1, \dots, x_n)$ taka, że

$$\forall_{x_1, \dots, x_n} F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

jest dystrybuantą (X_1, \dots, X_n) . Funkcję f nazywamy gęstością prawdopodobieństwa zmiennej (X_1, \dots, X_n) .

! W punktach ciągłości f jest $\frac{\partial^{(n)} F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n)$.

!! Niech $A \in \mathcal{B}$. Wtedy $P_X(A) = \int_A \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$.

Przykład. Funkcja $f(x, y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)}$, $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ i $f(x, y) = 0$ dla pozostałych $(x, y) \in \mathcal{R}^2$ jest gęstością rozkładu ciągłego prawdopodobieństwa zwanego rozkładem jednostajnym (równomiernym).

Definicja. Niech (X, Y) zmienna losowa dwuwymiarowa o dystrybuancie $F(x, y)$. Funkcje $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$, $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$ nazywamy dystrybuantami brzegowymi zmiennej (X, Y) , określającymi brzegowe rozkłady prawdopodobieństwa.

! Jeżeli $f(x, y)$ jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej (X, Y) , to $f_X(x) = \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dy$, $f_Y(y) = \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx$ są gęstościami brzegowych rozkładów prawdopodobieństwa o dystrybuantach F_X i F_Y .

!! Jeżeli (X, Y) jest dwuwymiarową zmienną losową typu skokowego o rozkładzie prawdopodobieństwa określonym liczbami $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$, to $P_X(x_i) =$

$\sum_j p(x_i, y_j)$, $P_Y(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)$ wyznaczają odpowiednio brzegowe rozkłady prawdopodobieństwa.

Przykład.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P_X(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j)$
x_1	$p(x_1, y_1) = \frac{1}{12}$	$p(x_1, y_2) = \frac{1}{12}$	$p(x_1, y_3) = \frac{4}{12}$	$p_X(x_1) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
x_2	$p(x_2, y_1) = \frac{1}{12}$	$p(x_2, y_2) = \frac{1}{12}$	$p(x_2, y_3) = \frac{4}{12}$	$p_X(x_2) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
$P_Y(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)$	$p_Y(y_1) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$p_Y(y_2) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$p_Y(y_3) = \frac{8}{12} = \frac{4}{6}$	1

Przykład. Zmienna losowa (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny o gęstości

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{x-m_1}{\sigma_1} \frac{y-m_2}{\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

$(\sigma_1, \sigma_2 > 0, \rho^2 < 1)$. Wtedy (po przekształceniach)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_1^2} (x - m_1)^2 \right],$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_2^2} (y - m_2)^2 \right]$$

są gęstościami prawdopodobieństwa rozkładów brzegowych. Są to rozkłady jednowymiarowe normalne. Wykorzystaliśmy przy tym równości:

$$\frac{(x - m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{x - m_1}{\sigma_1} \frac{y - m_2}{\sigma_2} + \frac{(y - m_2)^2}{\sigma_2^2} = \left[\frac{x - m_1}{\sigma_1} - \rho \frac{y - m_2}{\sigma_2} \right]^2 + \frac{(y - m_2)^2}{\sigma_2^2} (1 - \rho^2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_1} \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2} \left[x - m_1 - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2) \right]^2 \right\} dx = 1.$$

Definicja. Zmienne losowe X_1, \dots, X_n nazywamy niezależnymi, jeśli dla dowolnych zbiorów borelowskich A_1, \dots, A_n zdarzenia

$$Z_i = \{\omega \in \Omega: X_i(\omega) \in A_i\}, \quad i = 1, \dots, n$$

są niezależne, a w szczególności

$$P_X(\mathbf{X} \in A) = P_{X_1}(X_1 \in A_1) \cdot \dots \cdot P_{X_n}(X_n \in A_n)$$

przy $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ oraz $A = A_1 \times \dots \times A_n$.

! Dla niezależnych zmiennych losowych X_i ($i=1, \dots, n$) wektora losowego $\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_n)$ jest $F(x_1, \dots, x_n) = F'_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$, gdzie F_{X_i} oznacza dystrybuantę zmiennej X_i , a F

dystrybuantę wektora losowego $\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_n)$. W szczególności, dla zmiennych losowych typu ciągłego jest:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n),$$

a dla zmiennej typu skokowego:

$$p_{\mathbf{X}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = p_{X_1}(x_{i_1}) \dots p_{X_n}(x_{i_n}).$$

!! Jeżeli zmienne losowe X_1, \dots, X_n są niezależne oraz $Y_i = g_i(X_i)$ zmienne losowe dla $i=1, 2, \dots, n$, to zmienne losowe Y_1, \dots, Y_n są niezależne.

Przykład. Zmienne losowe brzegowe X, Y rozkładu normalnego zmiennej dwuwymiarowej (X, Y) są niezależne dla $\rho = 0$, gdyż tylko wtedy $f_X(x) f_Y(y) = f(x, y)$, gdzie $f(x, y)$ jest gęstością dwuwymiarowego rozkładu normalnego (por. str. 27).

Uwaga. Niech (X_1, \dots, X_n) n -wymiarowa zmienna losowa i niech zmienna losowa Z będzie funkcją X_1, \dots, X_n , czyli $Z = g(X_1, \dots, X_n)$.

Jeżeli (X_1, \dots, X_n) jest typu ciągłego o gęstości $f(x_1, \dots, x_n)$, to

$$(*) F_Z(z) = \int_{A_z} f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n,$$

gdzie $A_z = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n; g(x_1, \dots, x_n) < z\}$.

Jeżeli (X_1, \dots, X_n) jest typu skokowego, wówczas

$$(**) F_Z(z) = \sum_{g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) < z} p(x_{i_1}, \dots, p_{i_n}).$$

Zastosujemy powyższe reguły (dla przykładu) do sumy zmiennych losowych.

Przykład. Jeżeli $Z = X_1 + \dots + X_n$, to $F_Z(z)$ wyraża się wzorem (*) przy

$A_z = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n; x_1 + \dots + x_n < z\}$. Dla $n = 2$ mamy

$$F_Z(z) = \iint_{\{(x,y):x+y<z\}} f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x,y) dx$$

W punktach ciągłości f mamy $\frac{\partial F_Z}{\partial z} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx = f_Z(z)$.

Jeżeli X i Y są niezależne, to $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$, czyli $f_Z = f_X * f_Y$ (tzw. spłot funkcji).

! Odnotujmy, że nie dla wszystkich g funkcja $Z = g(X_1, \dots, X_n)$ jest zmienną losową. Ale, jeśli g jest borelowska (tzn. $\{(x_1, \dots, x_n); g(x_1, \dots, x_n) < z\}$ jest borelowski dla każdego z), to Z jest zmienną losową.

Definicja. Jeżeli (X_1, \dots, X_n) jest zmienną typu skokowego i zbieżny jest szereg

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} |g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})| p(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$$

to wartością przeciętną funkcji $g(X_1, \dots, X_n)$ nazywamy

$$E(g(X_1, \dots, X_n)) = \sum_{i_1, \dots, i_n} g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) p(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}).$$

Natomiast, jeśli (X_1, \dots, X_n) jest zmienną typu ciągłego i istnieje całka

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x_1, \dots, x_n)| f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$$

to wartością przeciętną funkcji $g(X_1, \dots, X_n)$ nazywamy

$$E(g(X_1, \dots, X_n)) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n.$$

Definicja. Niech l_1, l_2, \dots, l_n dowolne liczby całkowite nieujemne. Momentem rzędu $l_1+l_2+\dots+l_n$ zmiennej losowej (X_1, \dots, X_n) nazywamy wielkość (jeśli istnieje):

$$m(X_1^{l_1}, \dots, X_n^{l_n}) \stackrel{\text{def}}{=} E(X_1^{l_1} \cdot \dots \cdot X_n^{l_n}).$$

Natomiast momentem centralnym rzędu $l_1+\dots+l_n$ nazywamy

$$\mu(X_1^{l_1}, \dots, X_n^{l_n}) \stackrel{\text{def}}{=} E((X_1 - m_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (X_n - m_n)^{l_n}),$$

gdzie

$$m_i = m_{X_i} = m(X_i) \stackrel{\text{def}}{=} E(X_i) = E(X_1^0 \cdot \dots \cdot X_i^1 \cdot \dots \cdot X_n^0).$$

Definicja. Niech dla ustalonej pary (i, j) ($i, j = 1, \dots, n$) jest $l_i = l_j = 1$ ($i \neq j$) oraz $l_k = 0$ dla pozostałych $k = 1, \dots, n$. Moment centralny rzędu 1+1 nazywamy kowariancją zmiennych losowych X_i, X_j , czyli

$$\begin{aligned} \text{cov}_{X_i, X_j} &= \text{cov}(X_i, X_j) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(X_i, X_j) \stackrel{\text{def}}{=} E((X_i - m_i)(X_j - m_j)) = \\ &= E(X_i X_j) - m_i m_j. \end{aligned}$$

Natomiast współczynnikiem korelacji zmiennych X_i, X_j nazywamy

$$\rho_{X_i, X_j} = \rho(X_i, X_j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}},$$

gdzie $\sigma_{X_i}, \sigma_{X_j}$ - odchylenia standardowe zmiennych X_i, X_j , czyli

$$\sigma_{X_i}^2 = E((X_i - m_i)^2) = E(X_i^2) - m_i^2, \quad \sigma_{X_j}^2 = E((X_j - m_j)^2) = E(X_j^2) - m_j^2.$$

Następujące twierdzenie ujmuje podstawowe właściwości wprowadzonych parametrów (charakterystycznych) zmiennej losowej wielowymiarowej (X_1, \dots, X_n) :

Twierdzenie.

1) jeśli istnieją $E(X_i) = m(X_1^0 \cdot \dots \cdot X_i^1 \cdot \dots \cdot X_n^0)$, to $E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$;

- 2) jeśli zmienne losowe X_1, \dots, X_n są niezależne i istnieją $E(X_i)$ ($i = 1, \dots, n$), to $E(X_1 \cdot \dots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot \dots \cdot E(X_n)$;
- 3) jeśli zmienne X_i, X_j są niezależne i istnieją $E(X_i \cdot X_j) = E(X_1^0 \cdot \dots \cdot X_i^1 \cdot \dots \cdot X_j^1 \cdot \dots \cdot X_n^0)$ ($i < j$), to $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$;
- 4) jeżeli istnieją $\mu(X_i, X_j) = \mu(X_1^0 \cdot \dots \cdot X_i^1 \cdot \dots \cdot X_j^1 \cdot \dots \cdot X_n^0)$ i $Z = X_1 + \dots + X_n$ jest zmienną losową, to $V(Z) = E(Z - E(Z))^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \text{cov}(X_i, X_j)$;
- 5) jeśli zmienne losowe X_1, \dots, X_n są niezależne i istnieją $V(X_i) = E((X_i - m_i)^2)$ dla $i=1, \dots, n$ to $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$;
- 6) jeśli $\rho_{X,Y}$ jest współczynnikiem korelacji zmiennych losowych X, Y to $|\rho_{X,Y}| \leq 1$;
- 7) jeżeli X, Y zmienne losowe, to dla dowolnych a, b, c, d ($a \neq 0$ i $c \neq 0$) jest $|\rho_{aX+b, cY+d}| = |\rho_{X,Y}|$;
- 8) jeśli zmienne X, Y są niezależne, to $\rho_{X,Y} = 0$;
- 9) warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by istniały a, b ($a \neq 0$) takie, że $P(\{\omega: Y(\omega) = aX(\omega) + b\}) = 1$ jest $\rho_{X,Y}^2 = 1$.

! Jeżeli $\rho_{X,Y} = 0$, to zmienne losowe X, Y nazywamy nieskorelowanymi (tw. odwrotne do p. 8) nie musi zachodzić).

Dowody większości tez w powyższym twierdzeniu są podane w [1]. Dla przykładu wykażemy tezę 1. w przypadku zmiennej losowej n -wymiarowej typu ciągłego (X_1, \dots, X_n) o gęstości $f(x_1, \dots, x_n)$. Zgodnie z definicją rozkładów brzegowych jest $f_{X_i}(x_i) = \int_{R^{n-1}} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} \cdot dx_{i+1} \cdot dx_n$, a w konsekwencji $E(X_1 + \dots + X_n) = \int_{R^n} (x_1 + \dots + x_i + \dots + x_n) f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n = \sum_{i=1}^n \int_{R^n} x_i f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n = \sum_{i=1}^n \int_R x_i (\int_{R^{n-1}} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n) dx_i = \sum_{i=1}^n E(X_1^0 \cdot \dots \cdot X_{i-1}^0 X_i^1 X_{i+1}^0 \cdot \dots \cdot X_n^0) = \sum_{i=1}^n \int_R x_i f_{X_i}(x_i) dx_i = \sum_{i=1}^n E(X_i)$.

Przykład. Obliczymy współczynniki korelacji zmiennych losowych X, Y , gdy dany jest następujący rozkład prawdopodobieństwa zmiennej (X, Y)

X \ Y	3	5	7	rozkład brzegowy X
0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
2	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
rozkład brzegowy Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Mamy zatem:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$V(X) = \frac{5}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{11}{16},$$

$$E(Y) = 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{18}{4},$$

$$E(Y^2) = 3^2 \cdot \frac{1}{2} + 5^2 \cdot \frac{1}{4} + 7^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{92}{4},$$

$$V(Y) = \frac{92}{4} - \left(\frac{18}{4}\right)^2 = \frac{44}{16},$$

$$E(X \cdot Y) = 0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{4},$$

$$\rho(X, Y) = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\frac{19}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{18}{4}}{\frac{1}{4}\sqrt{11} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{44}} = 1.$$

Zauważmy, że z tabeli wynika, iż $Y = 2X + 3$. Zatem zgodnie z p. 9. twierdzenia $\rho(X, Y) = 1$.

Definicja. Niech (X_1, \dots, X_n) n -wymiarowa zmienna losowa taka, że $V(X_i) > 0$ dla $i=1, \dots, n$. Niech

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \mu(X_i, X_j), & i \neq j, \\ V(X_i), & i = j, \end{cases}$$

gdzie $\mu(X_i, X_j)$ jest kowariancją zmiennych losowych X_i, X_j , a $V(X_i)$ wariancją zmiennej losowej X_i .

Macierzą kowariancyjną wektora losowego $X=(X_1, \dots, X_n)$ nazywamy macierz $K=[\mu_{ij}]$.

! Macierz kowariancyjna jest symetryczna i półokreślona dodatnio.

Jeżeli $Y = \sum_{k=1}^n t_k X_k$, to $V(Y) = \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij} t_i t_j$.

!! Dla dowolnych $i, j=1, \dots, n$ jest (nierówność Cauchy'ego-Schwartz)

$\mu_{ij}^2 \leq \mu_{ii} \mu_{jj}$, co jest równoważne nierówności $\rho^2(X_i, X_j) \leq 1$, gdyż

$\mu_{ij} = \rho(X_i, X_j) V(X_i) V(X_j)$, $\mu_{ii} = V(X_i)$, $\mu_{jj} = V(X_j)$.

Twierdzenie.

a) suma n niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych odpowiednio

$N(m_i, \sigma_i)$ ma rozkład normalny $N(\sum_{i=1}^n m_i, \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2})$

b) suma n niezależnych zmiennych losowych X_1, \dots, X_n o rozkładach gamma takich, że

gęstością zmiennej X_i jest $f_{X_i} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{a^{p_i}}{\Gamma(p_i)} x^{p_i-1} e^{-ax}, & x > 0 \end{cases}$

$(a > 0, p_i > 0, i=1, \dots, n)$ ma rozkład gamma o gęstości $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}, & x > 0 \end{cases}$

gdzie $p=p_1+\dots+p_n$.

Uogólnieniem rozkładu normalnego dwóch zmiennych losowych i n zmiennych losowych niezależnych jest „dowolny” rozkład normalny wektora X n zmiennych losowych o gęstości:

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{|\mathbf{L}|}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n l_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)\right)$$

gdzie $m_i = E(X_i)$, $\mathbf{L}=[l_{ij}]$ jest macierzą odwrotną do macierzy kowariancyjnej \mathbf{K} , a $|\mathbf{L}|=\det \mathbf{L}=1/\det \mathbf{K}$.

! Wszystkie rozkłady brzegowe rozkładu normalnego są rozkładami normalnymi.

!! Jeżeli wektor losowy $X=(X_1, \dots, X_n)$ ma rozkład normalny, $Y=(Y_1, \dots, Y_m)$ i $Y = \mathbf{A}X$, to Y ma również rozkład normalny. Przy tym macierz kowariancji \mathbf{K}_Y wektora Y jest równa $\mathbf{K}_Y = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_X \mathbf{A}$, gdzie \mathbf{K}_X – macierz kowariancji wektora X .

!!! Jeśli (X_1, \dots, X_n) ma rozkład normalny i $\mu_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, n$), to zmienne losowe X_1, \dots, X_n są niezależne i $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right]$.

Definicja. Warunkowym rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X pod warunkiem zdarzenia B ($P(B)>0$) nazywamy rozkład określony wzorem

$$P_X(A|B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} | B) = \frac{1}{P(B)} P(\{\omega : X(\omega) \in A\} \cap B), \forall A \in \mathcal{B}$$

(\mathcal{B} - rodzina borelowska zbiorów).

! Jeżeli (X, Y) dwuwymiarowa zmienna losowa typu dyskretnego

$$X: \Omega \rightarrow \{x_1, x_2, \dots\}, Y: \Omega \rightarrow \{y_1, y_2, \dots\},$$

i $B_j = \{\omega : Y = y_j\}$, $A_i = \{\omega : X = x_i\}$, to mamy rozkład prawdopodobieństwa

warunkowego $P_X(A_i|B_j) = p(x_i|y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$. Dla ustalonego y_j wielkości

$p(x_i|y_j)$ ($i=1,2,\dots$) definiuje warunkowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X pod warunkiem $Y = y_j$. Wtedy dystrybuanta tej zmiennej jest równa

$$F(x|y_j) = \frac{P(X \leq x, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}.$$

Jeżeli (X, Y) dwuwymiarowa zmienna losowa typu ciągłego o gęstości f i dystrybuancie F , a f_Y gęstość zmiennej losowej Y , to dla ustalonego y mamy rozkład warunkowy

zmiennej losowej X o gęstości $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ i dystrybuancie

$$F(x|y) = \int_{-\infty}^x f(u|y) du.$$

Wprowadzimy teraz pojęcie regresji.

Definicja. Niech (X, Y) zmienna losowa dwuwymiarowa, dla której istnieje kowariancja. Niech $E(X|y)$ oznacza wartość przeciętną zmiennej losowej X o rozkładzie warunkowym $P(X|y)$, a $E(Y|x)$ oznacza wartość przeciętną zmiennej losowej Y o rozkładzie warunkowym $P(Y|x)$. Zbiór punktów na płaszczyźnie Oxy o współrzędnych $(x, E(Y|x))$ nazywamy linią regresji (pierwszego rodzaju) zmiennej losowej Y względem zmiennej losowej X . I analogicznie, zbiór punktów na płaszczyźnie Oxy o współrzędnych $(E(X|y), y)$ nazywamy linią regresji zmiennej losowej X względem zmiennej losowej Y .

Przykład. Niech (X, Y) dwuwymiarowa zmienna losowa o rozkładzie normalnym o gęstości $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{x-m_1}{\sigma_1} \frac{y-m_2}{\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$ z rozkładami brzegowymi o gęstościach

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_1^2} (x - m_1)^2 \right], f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_2^2} (y - m_2)^2 \right].$$

Gęstości rozkładów warunkowych są zatem równe: $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2} \left(x - m_1 - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2) \right)^2 \right],$$

a więc rozkładu normalnego $N \left(m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2), \sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} \right)$ oraz $f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2} \left(y - m_2 - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - m_1) \right)^2 \right],$$

czyli rozkładu normalnego $N \left(m_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - m_1), \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \right)$. W efekcie mamy $E(X|y) = m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2)$, $E(Y|x) = m_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - m_1)$.

Zatem linie regresji są liniami prostymi: prosta regresji zmiennej X względem Y ma równanie $x = m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2)$, a prosta regresji Y względem X ma równanie $y = m_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - m_1)$.

! Dla przypadku dwuwymiarowej zmiennej losowej typu skokowego linie regresji są, co najwyżej przeliczalnymi zbiorami punktów płaszczyzny Oxy .

!! Jeśli zmienne losowe X, Y są niezależne, to $E(X|y)=E(X)$, $E(Y|x)=E(Y)$, czyli linie regresji są liniami prostymi równoległymi do osi Oy i Ox płaszczyzny Oxy .

Twierdzenie. Niech (X, Y) dwuwymiarowa zmienna losowa. Wtedy $E((Y - \varphi(X))^2) = \min$, gdy φ z prawdopodobieństwem 1 funkcja $\varphi(x) = E(Y|x)$, czyli $P(\{x: \varphi(x) = E(Y|x)\}) = 1$.

Uwaga. Twierdzenie ma znaczenie praktyczne. Jeżeli mamy zaobserwowane wartości (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) zmiennej losowej (X, Y) , dla których można przyjąć

prawdopodobieństwo $\frac{1}{n}$ ($p(x_i, y_i) = \frac{1}{n}$) i jeśli szukamy funkcji φ , która najlepiej oddaje zależność pomiędzy X i Y , czyli funkcji, w pobliżu której koncentrują się punkty (x_i, y_i) , to można przyjąć, że żądamy, by $\sum_{i=1}^n (x_i - \varphi(y_i))^2 = \min$, gdy $x = \varphi(y)$ lub $\sum_{i=1}^n (y_i - \varphi(x_i))^2 = \min$, gdy $y = \varphi(x)$.

Dla zmiennej losowej (X, Y) typu skokowego warunki powyższe są równoważne warunkowi z twierdzenia. Oznacza to, że jako $\varphi(x)$ należy przyjąć $E(Y|x)$.

Linie regresji pierwszego rodzaju są liniami prostymi tylko w szczególnych przypadkach. Z drugiej strony zależność linowa jest najprostsza. Dlatego, kosztem nawet pewnych niedokładności i większych błędów przybliżeń, poszukuje się najlepiej liniowej zależności pomiędzy zmiennymi X i Y .

Definicja. Prosta regresji (linią regresji drugiego rodzaju) zmiennej losowej Y względem zmiennej losowej X nazywamy prostą $y = \alpha x + \beta$, gdzie α i β liczby, dla których spełniona jest zależność $E((Y - \alpha x - \beta)^2) = \min$.

Twierdzenie. Prosta $y = \alpha x + \beta$ jest prostą regresji drugiego rodzaju zmiennej losowej Y względem zmiennej losowej X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\alpha = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \quad \beta = m_Y - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} m_X,$$

gdzie:

$m_X = E(X)$, $m_Y = E(Y)$ – wartości przeciętne,

$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)}$ – odchylenia standardowe X , Y ,

$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ - współczynnik korelacji X i Y .

Analogicznie prosta regresji (drugiego rodzaju) $x = \gamma y + \delta$ zmiennej X względem zmiennej Y jest przy $\gamma = \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$, $\delta = m_X - \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} m_Y$.

! Współczynniki kierunkowe prostych regresji $\alpha_{Y, X} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$, $\alpha_{X, Y} = \frac{1}{\rho} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ noszą nazwę współczynników regresji.

!! Jeżeli zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny, to proste regresji drugiego rodzaju pokrywają się z prostymi regresji pierwszego rodzaju.

Przykład. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) typu skokowego ma rozkład prawdopodobieństwa określony w tabeli.

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	0	2	4	6	rozkład Y
0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{6}$

2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{6}$
3	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
rozkład X	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Znajdziemy linie regresji $E(Y|x)$, $E(X|y)$ oraz proste regresji drugiego rodzaju.

Znajdujemy $E(Y|x)=E(Y|X=x)$. Mamy zatem

$$E(Y|X = 0) = \frac{1}{P(X = 0)} \sum_{k=0}^3 y_k P(X = 0, Y = y_k) = 0$$

$$E(Y|X = 2) = \frac{3}{2}, E(Y|X = 4) = \frac{3}{2}, E(Y|X = 6) = 3$$

Linia regresji (pierwszego rodzaju) Y względem X jest zbiór punktów

$$\left\{ (0,0), \left(2, \frac{3}{2}\right), \left(4, \frac{3}{2}\right), (6, 3) \right\}.$$

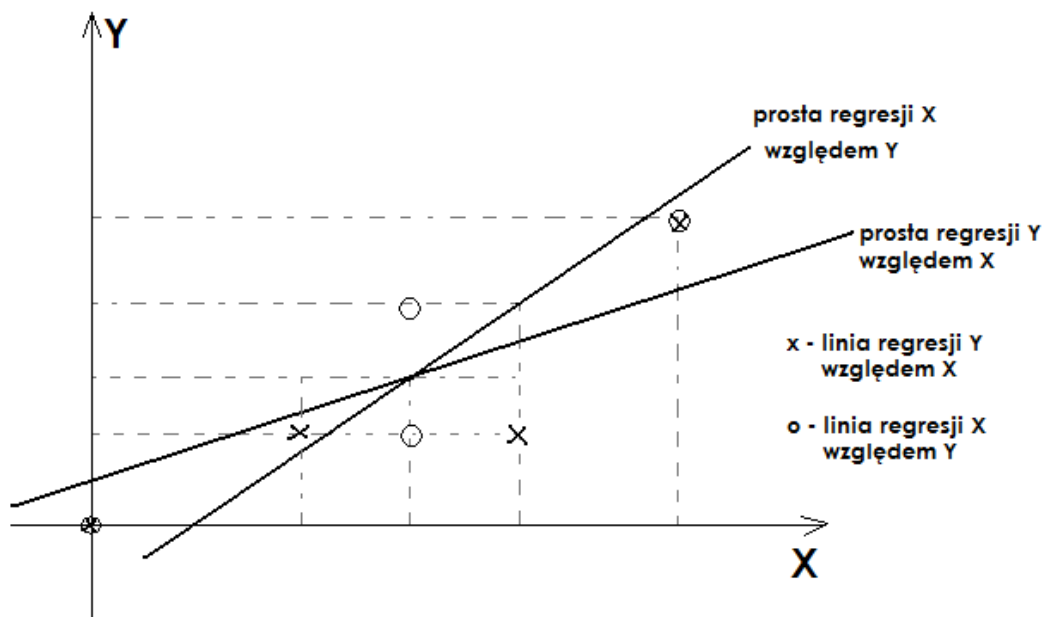
Analogicznie linią regresji X względem Y jest zbiór

$$\{(0,0), (3,1), (3,2), (6, 3)\}.$$

Następnie obliczamy: $E(X)=3$, $E(Y)=\frac{3}{2}$, $V(X)=\frac{11}{3}$, $V(Y)=\frac{11}{12}$, $E(X \cdot Y)=6$, $\rho(X, Y) = \frac{9}{11}$.

Prostą regresji (drugiego rodzaju) Y względem X jest $y - \frac{3}{2} = \frac{9}{12}(x - 3)$ a prostą regresji X względem Y jest $y - \frac{3}{2} = \frac{11}{18}(x - 3)$.

Na rysunku przedstawiono otrzymane wyniki



Duże znaczenie w statystyce matematycznej mają poniżej omówione pokrótce rozkłady zmiennych losowych „generowane” przez układy zmiennych losowych niezależnych o rozkładach normalnych.

Definicja. Rozkładem chi-kwadrat o n stopniach swobody nazywamy rozkład prawdopodobieństwa sumy kwadratów n niezależnych zmiennych losowych o rozkładach $N(0,1)$.

Zmienną losową o rozkładzie chi-kwadrat o n stopniach swobody oznaczamy standardowo przez χ_n^2 , jej dystrybuantę przez K_n , a gęstość prawdopodobieństwa k_n .

! Jeżeli X ma rozkład normalny $N(0,1)$, to $y=X^2$ ma rozkład o gęstości

prawdopodobieństwa $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-y/2}, & y > 0 \end{cases}$ czyli rozkład gamma o

parametrach $p = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$. Stosując twierdzenie o dodawaniu rozkładów zmiennych losowych otrzymujemy gęstość prawdopodobieństwa zmiennej χ_n^2 :

$$k_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}, & x > 0 \end{cases}$$

Przykład. Wartość średnia i wariancja zmiennej $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ są odpowiednio równe (zgodnie z wcześniejszymi przykładami):

$$E(\chi_n^2) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = n E(X_1^2) = n \cdot 1 = n,$$

$$\begin{aligned} V(\chi_n^2) &= E\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^2\right) - (E(\chi_n^2))^2 = E\left(\sum_{i=1}^n X_i^4\right) + E\left(\sum_{i \neq j} X_i^2 X_j^2\right) - n^2 \\ &= n E(X_1^4) + n(n-1)E(X_1^2) \cdot E(X_1^2) - n^2 = n \cdot 3 + n(n-1) - n^2 \\ &= 2n \end{aligned}$$

Powyższe charakterystyki można otrzymać również z konkluzji, że rozkład chi-kwadrat jest szczególnym przypadkiem rozkładu gamma.

Definicja. Rozkładem t-Studenta o n stopniach swobody nazywamy rozkład prawdopodobieństwa ilorazu $t_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}}$, gdzie X i χ_n^2 są niezależnymi zmiennymi

losowymi, X ma rozkład normalny $N(0,1)$, a χ_n^2 ma rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody.

Stosując zasady otrzymywania rozkładów, w tym gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych będących funkcjami zmiennych losowych o znanych rozkładach wykazuje się, że (por.[1]) gęstość prawdopodobieństwa zmiennej t_n wyraża się

wzorem $f_{t_n}(t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi} \Gamma(n/2)} \cdot \frac{1}{(1+t^2/n)^{(n+1)/2}}$. Wykres tej gęstości jest podobny do wykresu gęstości rozkładu normalnego.

Przykład. Obliczymy wartość średnią i wariancję zmiennej t_n .

Ponieważ $f_{t_n}(t) = f_{t_n}(-t)$, więc $E(t_n) = 0$. Natomiast $V(t_n) = E(t_n^2) = E\left(\frac{X^2}{(1/n)X_n^2}\right) = E(X^2) n E\left((X_n^2)^{-1}\right)$. Uwzględniając, że $E(X^2) = 1$, a X_n^2 ma rozkład gamma, mamy: $V(t_n) = n \cdot 1 \cdot \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} dx = n \int_0^\infty \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-2} e^{-x/2} dx$. Ostatnia całka istnieje dla $n > 2$, więc i $V(t_n)$ ma sens dla $n > 2$. Korzystając z właściwości funkcji gamma Eulera Γ otrzymujemy

$$V(t_n) = n \frac{2^{n/2-1} \Gamma(n/2 - 1)}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} = n \frac{\Gamma(n/2 - 1)}{2 \left(\frac{n}{2} - 1\right) \Gamma(n/2 - 1)} = \frac{n}{n - 2}.$$

Uwaga. W statystyce wykorzystuje się prawdopodobieństwa

$$P(X_n^2 \geq X_\alpha^2) = \alpha, \quad (P(|t_n| > t_\alpha) = 2 \int_{t_\alpha}^\infty f_{t_n}(t) dt = \alpha).$$

Dlatego też są stabilizowane wartości X_α^2 i t_α dla pewnych n i α . Przy tym dla $n > 30$ rozkład chi-kwadrat jest bliski normalnemu. Natomiast rozkład t_n ma bardzo ważną właściwość: jeżeli X, X_1, \dots, X_n mają te same rozkłady normalne $N(0, \sigma)$ i są niezależne, to zmienna losowa $Y = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}(X_1^2 + \dots + X_n^2)}}$ ma rozkład prawdopodobieństwa jak t_n ,

niezależny od σ . Przy tym dla dużych wartości n rozkład ten jest bliski normalnemu, gdyż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi} \Gamma(n/2)} \frac{1}{(1+t^2/n)^{(n+1)/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

4. Ciągi zmiennych losowych. Zbieżność i twierdzenia graniczne

Definicja. Niech (Ω, \mathcal{S}, P) przestrzeń probabilistyczna i niech w tej przestrzeni określone są zmienne losowe X_1, X_2, \dots . Tworzą one ciąg losowy (X_n) , jeżeli (X_1, \dots, X_n) jest wektorem losowym dla każdego $n \in \mathcal{N}$.

Uwaga. Ponieważ $(X_n(\omega))$ jest ciągiem liczbowym dla każdego $\omega \in \Omega$, można mówić o zbieżności punktowej ciągu losowego X_n , tzn. $X_n \rightarrow X$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$), jeżeli $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ dla każdego $\omega \in \Omega$, czyli

$$X_n \rightarrow X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall \omega \in \Omega \exists N(\omega) \in \mathcal{N} \forall n > N(\omega) |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon.$$

Zbieżność może być też jednostajna, tj.

$$X_n \Rightarrow X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N} \forall \omega \in \Omega \forall n > N |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon.$$

W probabilistyce wprowadza się jednak jeszcze inne niż powyższe zbieżności ciągów losowych.

Definicja. Ciąg losowy (X_n) jest zbieżny do zmiennej losowej X według prawdopodobieństwa (stochastycznie, według miary), jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}) = 1.$$

Piszemy wtedy $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{wg prawd.}} X$.

! Powyższy warunek definicyjny jest równoważny następującemu:

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Definicja. Ciąg losowy (X_n) jest zbieżny do zmiennej losowej X z prawdopodobieństwem 1 (lub inaczej prawie wszędzie), jeżeli

$$P(\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

co zapisujemy $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{z pr.1}} X$ lub $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\bullet} X$.

Twierdzenie. Jeżeli $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{z pr.1}} X$, to $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{wg prawd.}} X$.

Definicja. Niech $E(X_n^2) < \infty \forall n \in \mathcal{N}$ i $E(X^2) < \infty$. Ciąg losowy (X_n) jest zbieżny do zmiennej losowej X średniokwadratowo, jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - X)^2] = 0.$$

Piszemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$.

Twierdzenie. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, to $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{wg prawd.}} X$.

! Zauważmy, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - X)^2] = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} E|X_n - X| = 0$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E(X).$$

Definicja. Ciąg losowy (X_n) jest zbieżny do zmiennej losowej X według dystrybuant, jeśli ciąg dystrybuant (F_n) ciągu (X_n) jest zbieżny punktowo do dystrybuanty F zmiennej X w każdym punkcie ciągłości dystrybuanty F .

Twierdzenie. Niech F_n będzie dystrybuantą zmiennej losowej X_n ($n = 1, 2, \dots$). Ciąg losowy (X_n) jest zbieżny do zera według prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(X_n) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Uwaga. Szczególnym przypadkiem zbieżności w odniesieniu do ciągu losowego (X_n) jest zbieżność ciągu losowego (Y_n) sum

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

do zmiennej losowej Y (zbieżność w określonym sensie), którą nazywamy szeregiem zmiennych losowych X_1, X_2, \dots i zapisujemy następująco:

$$Y = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \quad \text{lub} \quad Y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n .$$

Ponieważ ciąg (Y_n) może mieć pewne charakterystyki rozbieżne (np. wariancję $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ ciągu zmiennych losowych o rozkładach normalnych $N(0, \sigma_i)$) rozważa się również sumy Y_n mnożone przez współczynniki A_n dążące do zera, czyli ciągi losowe postaci

$$A_n \sum_{i=1}^n X_i .$$

Podamy teraz szczególnie ważne w probabilistyce definicje i twierdzenia o granicach ciągów losowych powyższej postaci.

Definicja (słabe prawo wielkich liczb). Niech (X_n) ciąg losowy taki, że istnieje $m_n = E(X_n)$ dla każdego n . Jeśli

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{wg prawd.}} 0 ,$$

to mówimy, że dla ciągu (X_n) zachodzi słabe prawo wielkich liczb.

Definicja (mocne prawo wielkich liczb). Niech (X_n) ciąg losowy taki, że istnieje $m_n = E(X_n)$ dla każdego n . Jeśli

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{z pr. 1}} 0 ,$$

to mówimy, że dla ciągu (X_n) zachodzi mocne prawo wielkich liczb.

Twierdzenie (prawo wielkich liczb Markowa). Jeżeli ciąg losowy (X_n) jest taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} V \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = 0 ,$$

to dla ciągu (X_n) zachodzi słabe prawo wielkich liczb.

Dowód podano w [1].

! Warunek (wystarczający) w powyższym twierdzeniu nazywa się warunkiem Markowa.

!! Jeżeli zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne, to warunek Markowa przyjmuje postać:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = 0.$$

!!! Jeżeli zmienne X_1, X_2, \dots mają jednakowe rozkłady, dla których istnieje wariancja σ^2 , to

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{wg prawd.}} 0, \quad m = E(X_1).$$

Fakt ten jest podstawą szacowania nieznanego wartości przeciętnej m średnią arytmetyczną

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Uwaga. Prawa wielkich liczb wykorzystuje się przy opracowywaniu danych doświadczalnych (obserwacji, pomiarów).

Przykład. Wykonano n niezależnych rzutów monetą. Przez Y_n oznaczono liczbę orłów w n rzutach: $Y_n = X_1 + \dots + X_n$, gdzie $X_i = 1$ gdy wypadnie orzeł i $X_i = 0$ gdy wypadnie reszka ($i = 1, \dots, n$). Intuicyjnie sądzimy, że jeśli n jest duże, to Y_n/n jest bliskie $1/2$. Prawa wielkich liczb to uzasadniają. Mamy więc:

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(X_i = 0) = \frac{1}{2}, \quad E(X_i) = \frac{1}{2}, \quad V(X_i) = \frac{1}{4}.$$

Zauważmy następnie, że

$$E(Y_n) = \frac{n}{2}, \quad E\left(\frac{1}{n} Y_n\right) = \frac{1}{2}.$$

Z prawa wielkich liczb wynika, że

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} Y_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Twierdzenie (prawo wielkich liczb Chinczyna). Jeśli (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach mających wartość przeciętną m , to dla ciągu (X_n) zachodzi słabe prawo wielkich liczb.

Twierdzenie (prawo wielkich liczb Kołgomorowa). Jeśli (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wariancjach $V(X_n)$ spełniających warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(X_n)}{n^2} < \infty,$$

to dla ciągu losowego (X_n) zachodzi mocne prawo wielkich liczb.

Uwaga. Prawa wielkich liczb mówią o zbieżności sum zmiennych losowych ze współczynnikiem wygaszającym $A_n = 1/n$ do zmiennej o rozkładzie prawdopodobieństwa jednopunktowym. Współczynnik $A_n = 1/n$ jest zatem silnie wygaszający. Natomiast twierdzenia o zbieżności ciągów $(A_n Y_n)$ – tzw. centralne twierdzenia graniczne – formułują warunki zbieżności sum zmiennych losowych ze

współczynnikiem mniej (stabiliej) wygaszającym $A_n \sim 1/\sqrt{n}$, przy zbieżności do zmiennej o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Niech (X_n) ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach mających wartość przeciętną m i wariancję $\sigma^2 > 0$. Niech

$$U_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - m).$$

Zgodnie z wcześniejszymi wzorami jest

$$E(U_n) = 0, \quad V(U_n) = 1,$$

czyli zmienne losowe U_n są standaryzowane. Niech następnie

$$F_n(u) = P(U_n < u)$$

będzie dystrybuantą zmiennej U_n ($n = 1, 2, \dots$).

Twierdzenie (Linderberga-Levy'ego). Ciąg losowy (U_n) jest zbieżny według dystrybuant do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $N(0,1)$, czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp(-x^2/2) dx, \quad u \in \mathcal{R}$$

(dowód podano w [1]).

! W praktycznych zastosowaniach zbieżność powyższa oznacza, że dla dużych n jest

$$P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - mn}{\sigma\sqrt{n}} < u \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp(-t^2/2) dt,$$

czyli $\sum_{i=1}^n X_i$ ma w przybliżeniu rozkład $N(mn, \sigma\sqrt{n})$.

Przykład. Wykonano 100 niezależnych doświadczeń. W wyniku każdego doświadczenia może zajść zdarzenie A z prawdopodobieństwem $P(A) = 1/4$ lub zdarzenie \bar{A} z prawdopodobieństwem $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 3/4$. Obliczymy prawdopodobieństwo p tego, że w 100 doświadczeniach częstość występowania zdarzenia A różni się od $1/4$ o mniej niż $\varepsilon = 0,1$.

Niech Y_{100} oznacza liczbę wystąpień zdarzenia A w wykonanej serii $n = 100$ doświadczeń. Z warunków przykładu wynika, że $Y_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$, przy $P(X_i = 1) = 1/4$ i $P(X_i = 0) = 3/4$, $E(Y_{100}) = 1/4 \cdot 100 = 25$, $V(Y_{100}) = 1/4 \cdot 3/4 \cdot 100$, $\sqrt{V(Y_{100})} = 10/4 \cdot \sqrt{3}$. Obliczymy $p = P(|1/100 \cdot Y_{100} - 1/4| < 0,1)$. Mamy zatem

$$p = P(|Y_{100} - 25| < 10) = P\left(\frac{|Y_{100} - 25|}{10/4 \cdot \sqrt{3}} < \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = 2P(0 \leq U_{100} < 4/\sqrt{3}) = 2\Phi(4/\sqrt{3}) = 0,9812.$$

5. Procesy stochastyczne - wprowadzenie

Tytułem wprowadzenia (jedynie) podamy poniżej najważniejsze pojęcia wstępne dotyczące kolejnego „działu” probabilistyki, tj. poświęconego procesom stochastycznym.

Niech (Ω, \mathcal{S}, P) przestrzeń probabilistyczna i niech \mathcal{T} ustalony (dowolny) podzbiór \mathcal{R} (w szczególności cały \mathcal{R} : $\mathcal{T} = \mathcal{R}$). Niech dalej ω oznacza element zbioru Ω (zdarzenie elementarne w przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω), t (ewentualnie z indeksem: t_0, t_1, \dots) oznacza element zbioru \mathcal{T} , zwany chwilą lub zmienną czasową (także czysto umownie).

Definicja. Funkcję $X: \mathcal{T} \times \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ nazywamy funkcją losową jednowymiarową, jeśli

$$\forall t \in \mathcal{T} \quad \forall x \in \mathcal{R} \quad \{\omega: X(t, \omega) < x\} \in \mathcal{S},$$

czyli dla każdej ustalonej chwili t funkcja

$$X_t: \Omega \rightarrow \mathcal{R} \quad (X_t(\omega) = X(t, \omega), \quad \omega \in \Omega)$$

jest zmienną losową. Jeżeli \mathcal{T} jest przedziałem liczbowym (np. $\mathcal{T} = [t_0, \infty)$), to funkcję losową nazywamy procesem stochastycznym.

Uwaga. Jeżeli w powyższej definicji przyjąć $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n): \mathcal{T} \times \Omega \rightarrow \mathcal{R}^n$ i dla każdej liczby $t \in \mathcal{T}$ wektor $\mathbf{X}(t, \cdot) = (X_1(t, \cdot), \dots, X_n(t, \cdot)): \Omega \rightarrow \mathcal{R}^k$ jest wektorem losowym (k -wymiarową zmienną losową), to $\mathbf{X}(t, \omega)$ nazywamy k -wymiarową funkcją losową, a w szczególności k -wymiarowym procesem stochastycznym, gdy \mathcal{T} jest przedziałem liczbowym (przedziałem czasu). Zmienna t ma oczywiście charakter deterministyczny (nie jest losowa).

Uwaga. Niech X jest jednowymiarową funkcją losową, a \mathcal{T} zbiorem co najwyżej przeliczalnym: $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \dots\}$. Wtedy funkcja X jest de facto n -wymiarową zmienną losową ($X_1 = X_{t_1}, \dots, X_n = X_{t_n}$), gdy $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_n\}$ (jest skończony) lub ciągiem losowym ($X_1 = X_{t_1}, X_2 = X_{t_2}, \dots$), gdy $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \dots\}$ (jest przeliczalny).

Definicja. Niech $X = X(t, \omega), t \in \mathcal{T}, \omega \in \Omega$ będzie procesem stochastycznym. Funkcję $x = x(t) = X_\omega(t) = X(t, \omega), t \in \mathcal{T} (\omega \in \Omega)$ – ustalone) nazywamy realizacją procesu stochastycznego (dla zdarzenia elementarnego ω).

! Funkcja $x = x(t)$ nie ma charakteru losowego i jest odpowiednikiem wartości x zmiennej losowej X .

Przykład. Punkt materialny w chwili początkowej $t_0 = 0$ znajduje się na osi x w punkcie x_0 i następnie porusza się z prędkością stałą v_0 . Niech $x_0 = X_0(\omega)$, $v_0 = V_0(\omega)$, gdzie (X_0, V_0) jest dwuwymiarową zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(m_x, m_v, \sigma_x, \sigma_v, \rho)$. Położenie punktu na osi x w chwili t określa współrzędna $X(t, \omega) = X_0(\omega) + t V_0(\omega)$, która opisuje ruch losowy tego punktu jako proces stochastyczny. Realizacje tego procesu są funkcjami ruchu postaci $x(t) = x_0 + v_0 t$, $t \in \mathcal{T}$. Natomiast zmienna losowa X_t (dla ustalonego t) ma rozkład normalny $N\left(m_x + m_v t, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_v^2 t^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_v t}\right)$.

Pojęcia rozkładu prawdopodobieństwa i dystrybuanty procesu stochastycznego wprowadza się w następujący sposób.

Definicja. Niech $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ nazywamy n -wymiarowym rozkładem prawdopodobieństwa procesu stochastycznego, a dystrybuanta tej zmiennej losowej nosi nazwę n -wymiarowej dystrybuanty procesu stochastycznego.

! Oznaczając powyższą dystrybuantę przez F_n i operując wektorami $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ i $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ mamy:

$$F_n(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) = F_n(\mathbf{t}; \mathbf{x}) = P(\{\omega : X(t_1, \omega) < x_1, \dots, X(t_n, \omega) < x_n\}).$$

Definicja. Jeżeli istnieje nieujemna funkcja f_n taka, że

$$F_n(\mathbf{t}; \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{R}^n} f_n(\mathbf{t}; \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

gdzie $d\mathbf{x} = dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n$, to f_n nazywamy n -wymiarową gęstością prawdopodobieństwa procesu stochastycznego.

! Znajomość funkcji F_n i f_n nie daje pełnego obrazu procesu stochastycznego.

Definicja. Wartością przeciętną procesu stochastycznego X nazywamy funkcję $m: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}$ taką, że

$$m(t) = E(X_t), \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

a wariancją tego procesu nazywamy taką funkcję $V: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}$, że

$$V(t) = E(X_t - m(t))^2, \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

Natomiast funkcja kowariacyjna jest równa:

$$K(t_1, t_2) = E[(X_{t_1} - m(t_1))(X_{t_2} - m(t_2))], \quad \forall t_1, t_2 \in \mathcal{T},$$

a funkcja korelacyjna jest równa

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sqrt{V(t_1)V(t_2)}}.$$

Uwaga. Zdefiniowane wyżej wielkości są naturalnym przeniesieniem ze zmiennych losowych X oraz (X_1, X_2) na zmienną losową X_t oraz (X_{t_1}, X_{t_2}) .

Poniżej podano także przykładowe tego typu przeniesienia na procesy stochastyczne pojęć granicy, pochodnej i całki zmiennej losowej.

Definicja. Zmienna losowa Y_0 jest średniokwadratową granicą procesu stochastycznego X , gdy $t \rightarrow t_0$ tzn.

$$\text{l.i.m.}_{t \rightarrow t_0} X_t = Y_0,$$

(l.i.m. – limit in mean), gdy $\lim_{t \rightarrow t_0} E\left((X_t - Y_0)^2\right) = 0$.

Definicja. Proces stochastyczny jest średniokwadratowo ciągły dla $t = t_0$, jeżeli

$$\text{l.i.m.}_{t \rightarrow t_0} X_t = X_{t_0}.$$

Definicja. Jeżeli istnieje zmienna losowa \dot{X}_{t_0} taka, że

$$\text{l.i.m.}_{t \rightarrow t_0} \frac{X_t - X_{t_0}}{t - t_0} = \dot{X}_{t_0},$$

to mówimy, że \dot{X}_{t_0} jest średniokwadratową pochodną procesu X względem t dla $t = t_0$. Mówimy, że proces X jest średniokwadratowo różniczkowalny dla $t = t_0$.

Uwaga. Proces stochastyczny $X: \mathcal{T} \times \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ jest średniokwadratowo różniczkowalny względem t w przedziale \mathcal{T} , jeżeli istnieje proces stochastyczny

$\dot{X}: \mathcal{T} \times \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ taki, że dla każdej chwili $t \in \mathcal{T}$ zmienna losowa \dot{X}_t jest średniokwadratową pochodną procesu X .

Definicja. Niech $[t', t''] \subset \mathcal{T}$, $t' = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t''$, przy czym dla $n \rightarrow \infty$ ciąg podziałów przedziału będzie normalny i niech $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$. Zmienna losowa Y jest średniokwadratową całką Riemanna procesu stochastycznego $X: \mathcal{T} \times \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ względem zmiennej t na przedziale $[t', t''] \subset \mathcal{T}$, jeśli dla każdego podziału normalnego przedziału $[t', t'']$ i dowolnych τ_k jest

$$\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n X_{\tau_k} (t_k - t_{k-1}) = Y.$$

Piszemy wtedy $Y = \int_{t'}^{t''} X(t, \omega) dt = \int_{t'}^{t''} \dot{X}_t dt$. O procesie X mówimy, że jest całkowalny średniokwadratowo na przedziale $[t', t'']$.

Uwaga. Średniokwadratowa ciągłość, różniczkowalność i całkowalność procesu stochastycznego X względem zmiennej czasowej t nie implikuje na ogół zwykłej ciągłości, różniczkowalności i całkowalności procesu X względem t . Natomiast można dowieść prawdziwości twierdzenia poniższego.

Twierdzenie. Jeżeli proces stochastyczny X jest średniokwadratowo:

a) ciągły, b) różniczkowalny dla $t = t_0$, to odpowiednio

$$a) \lim_{t \rightarrow t_0} E(X_t) = E(X_{t_0}) = E(\text{l.i.m. } X_t),$$

$$b) \frac{dE}{dt}(X_{t_0}) = E(\dot{X}_{t_0}).$$

Przykład. Niech $X = A(\omega) \cos \lambda t + B(\omega) \sin \lambda t$, $t \in (-\infty, +\infty)$, gdzie A i B niezależne zmienne losowe o rozkładzie normalnym $N(0; \sigma)$. Proces X opisuje stochastyczne drgania układu o jednym stopniu swobody. Sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} E\left((X_t - X_{t_0})^2\right) &= \lim_{t \rightarrow t_0} E\left([A(\cos \lambda t - \cos \lambda t_0) + B(\sin \lambda t - \sin \lambda t_0)]^2\right) = \\ &= \sigma^2 \lim_{t \rightarrow t_0} [(\cos \lambda t - \cos \lambda t_0)^2 + (\sin \lambda t - \sin \lambda t_0)^2] = 0, \end{aligned}$$

Uwaga. Korzystając z pojęcia zbieżności średniokwadratowej zmiennych losowych mamy $\text{l.i.m. } X_t = X_{t_0}$.

Następnie sprawdzamy, że

$$\dot{X}(t, \omega) = -A(\omega)\lambda \sin \lambda t + B(\omega)\lambda \cos \lambda t.$$

Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E\left(\left(\frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t} - \dot{X}_t\right)^2\right) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E\left(\left[A\left(\frac{\cos \lambda(t+\Delta t) - \cos \lambda t}{\Delta t} + \lambda \sin \lambda t\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B\left(\frac{\sin \lambda(t+\Delta t) - \sin \lambda t}{\Delta t} - \lambda \cos \lambda t\right)\right]^2\right) = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sigma^2 \left(\left[\left(\frac{\cos \lambda(t+\Delta t) - \cos \lambda t}{\Delta t} + \lambda \sin \lambda t\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\sin \lambda(t+\Delta t) - \sin \lambda t}{\Delta t} - \lambda \cos \lambda t\right)\right]^2\right), \end{aligned}$$

gdyn $\frac{d}{dt}(\cos \lambda t) = -\lambda \sin \lambda t$, $\frac{d}{dt}(\sin \lambda t) = \lambda \cos \lambda t$.

Uwaga. Korzystając z pojęć zbieżności zmiennych losowych według prawdopodobieństwa i z prawdopodobieństwem 1 (prawie wszędzie) wprowadza się także pojęcia ciągłości, różniczkowalności i całkowalności (pojęcia granicy, pochodnej

i całki) procesu stochastycznego według prawdopodobieństwa i z prawdopodobieństwem 1 względem zmiennej t .

Dalsze rozwinięcie wiadomości o procesach stochastycznych można znaleźć m. in. w podręczniku [1].

6. Elementy statystyki matematycznej

Statystyka matematyczna zajmuje się masowymi zjawiskami losowymi – badaniem określonych cech tych zjawisk i tzw. wnioskowaniem statystycznym. Po wprowadzeniu zawierającym podstawowe pojęcia i twierdzenia statystyki matematycznej, omówimy pokrótce dwa główne zagadnienia tej statystyki: estymację (czyli szacowanie) wartości parametrów cechy elementów populacji oraz weryfikację hipotez statystycznych, ilustrowane wieloma przykładami.

6.1 Podstawowe pojęcia i twierdzenia

Określoną zbiorowość (zbiór) elementów nazywamy populacją generalną. Na przykład, partia prętów stalowych wyprodukowanych w danym procesie produkcyjnym, mieszanka mineralno-asfaltowa wyprodukowana w ciągu miesiąca, pojazdy, które przejechały przez określony przekrój drogi w ciągu doby.

Interesują nas określone cechy mierzalne populacji generalnej (np. wytrzymałość stali, temperatura wyprodukowanej mieszanki przy załadunku, liczba osób w pojeździe).

Z populacji wybieramy losowo (w sposób przypadkowy) n elementów – tzw. próbkę losową – tak, że pomierzone wartości danej cechy stanowią wartości n -wymiarowej zmiennej losowej (X_1, X_2, \dots, X_n) , przy czym zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n są niezależne i o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa, takim jak mierzona (obserwowana) cecha X populacji, która jest zmienną losową o rozkładzie P_X . Dystrybuantę F (lub ozn. F_X) zmiennej X nazywać będziemy dystrybuantą teoretyczną.

Oznaczmy przez (x_1, x_2, \dots, x_n) wartości badanej cechy, pomierzone (zaobserwowane) w danej próbie losowej, czyli wartości zmiennej losowej (X_1, X_2, \dots, X_n) . Funkcję $F_n : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ określoną wzorem

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \text{Card}\{i : x_i < x; i = 1, 2, \dots, n\}$$

(Card A - licznosc / liczebność / liczba elementów zbioru A) nazywamy dystrybuantą empiryczną. Wynika z tego, że $F_n(x)$ jest frakcją tych elementów w próbce, dla których wartość badanej cechy jest mniejsza od x . Funkcja $F_n(x)$ jest

więc dystrybuantą zmiennej losowej typu skokowego o punktach skokowych x_i i o rozkładzie empirycznym $P_n(X = x_i) = (x_{i+1} - x_i)/(x_n - x_1)$. Przy rozkładzie równomiernym wartości x_i badanej cechy jest $P_n(X = x_i) = 1/n$. Parametry zmiennej losowej o dystrybuancie $F_n(x)$ nazywamy parametrami empirycznymi. Natomiast parametry zmiennej losowej X (cechy X populacji) noszą nazwę charakterystyk (parametrów) teoretycznych.

Na przykład, empiryczną wartością przeciętną (lub średnią z próbki) jest

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Wariancją empiryczną (średnim odchyleniem kwadratowym) jest

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2,$$

a momentem empirycznym (średnim odchyleniem) rzędu r jest

$$m_{r,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r, \quad (\mu_{r,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^r).$$

Powyższe parametry empiryczne jak również dystrybuanta empiryczna zależą od próbki (ich wartości zmieniają się na ogół wraz z próbką).

Wartości x_1, x_2, \dots, x_n zaobserwowane (pomierzone) cechy X populacji dla danej próbki losowej są wartościami zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n dla ustalonego zdarzenia elementarnego ω (losowania, pomiaru), tzn.

$$X_1(\omega) = x_1, \dots, X_n(\omega) = x_n.$$

W konsekwencji wartości parametrów empirycznych $\bar{x}_n, s_n^2, m_{r,n}, \mu_{r,n}$ są zaobserwowanymi (pomierzonymi) wartościami zmiennych losowych oznaczanych odpowiednio przez $\bar{X}_n, S_n^2, M_{r,n}, \mu_{r,n}$, czyli są funkcjami zmiennej losowej (wektora losowego) (X_1, X_2, \dots, X_n) . Funkcje te zwane są również statystykami próbki.

Przez medianę empiryczną $X_{1/2,n}$ rozumiemy natomiast zmienną losową, której wartość $x_{1/2,n}$ dla danej próbki spełnia nierówność

$$F_n(x_{1/2,n}) \leq \frac{1}{2} \leq F_n(x_{1/2,n}^+),$$

gdzie F_n jest dystrybuantą empiryczną ($x_{1/2,n} = X_{1/2,n}(\omega)$).

! Podstawową cechą wyróżniającą medianę spośród innych parametrów jest to, że nie wiąże się ona z wykonaniem obliczeń, a jedynie z porządkowaniem zaobserwowanych wartości z próbki i ich zliczaniem.

Uwaga. Jest naturalnym oczekiwanie, że wraz ze wzrostem liczebności próbki powinno się otrzymywać coraz lepszy obraz populacji generalnej. Istotnie prawo

wielkich liczb stwierdza, że wraz ze wzrostem n empiryczna wartość przeciętna jest zbieżna (odpowiednio) do wartości przeciętnej badanej cechy populacji generalnej. Poniższe twierdzenie rozszerza ten fakt.

Twierdzenie. Jeśli X_1, X_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach prawdopodobieństwa, mającymi skończony moment rzędu $2r$, a g jest funkcją określoną w przestrzeni \mathcal{R}^s , ciągłą w punkcie $x_1 = m_{i_1}, \dots, x_s = m_{i_s}$, gdzie $m_{i_k} = E(X_i^{i_k})$ ($i_k \leq r$ dla $k = 1, \dots, s$), to zmienne losowe

$$Y_n = g(M_{i_1, n}, \dots, M_{i_s, n}),$$

gdzie

$$M_{i_k, n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^{i_k}, \quad (k = 1, \dots, s),$$

są z prawdopodobieństwem 1 zbieżne do $g(m_{i_1}, \dots, m_{i_s})$.

! Z twierdzenia wynika (na przykład), że wariancja empiryczna jako ciągła funkcja momentów jest z prawdopodobieństwem 1 zbieżna do wariancji rozważanej (badanej) cechy populacji generalnej.

Zapisać dystrybucję empiryczną wyrażnie jako funkcję zdarzenia elementarnego ω (losowania, wyboru próbki)

$$F_n(x) = F_n(x; \omega) = \frac{1}{n} \text{Card}\{i : X_i(\omega) < x; i = 1, 2, \dots, n\},$$

co pokazuje, że F_n jest zmienną losową.

Twierdzenie. Jeżeli X_1, X_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych dystrybucjach F , a F_n jest dystrybucją empiryczną, to

$$P(\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathcal{R}} |F_n(x; \omega) - F(x)| = 0\}) = 1.$$

Podamy teraz twierdzenia rozszerzające lub uszczegółowiające centralne twierdzenia graniczne zbieżności ciągu losowego do rozkładu normalnego.

Twierdzenie. Jeśli X_1, X_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych dystrybucjach F , mającymi skończony moment rzędu $2r$, to moment empiryczny $M_{r, n}$ ma asymptotycznie rozkład normalny, tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\{ \omega : \frac{|M_{r, n}(\omega) - m_r|}{\sqrt{\frac{m_{2r} - m_r^2}{n}}} < x \right\} \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt = 2\Phi(x).$$

Twierdzenie to wynika z tw. Lindenberga-Levy'ego, jeśli dokonamy podstawienia

$$Y_i = X_i^r \quad (i = 1, \dots, n).$$

Przykład. Niech cecha X elementów populacji ma momenty m_r i m_{2r} . Ustalimy jak duża powinna być liczba obserwacji, aby z prawdopodobieństwem 0,95 różnica pomiędzy momentem empirycznym rzędu r a momentem teoretycznym rzędu r nie przekraczała 1. Innymi słowy, jak duże powinno być n , aby

$$P\left(\left\{\omega: |M_{r,n} - m_r| < 1\right\}\right) = 0,95.$$

Na podstawie twierdzenia mamy (dla dużych wartości n):

$$P\left(\left\{\omega: \frac{|M_{r,n}(\omega) - m_r|}{\sqrt{\frac{m_{2r} - m_r^2}{n}}} < \varepsilon\right\}\right) \approx 2\Phi(\varepsilon) = 0,95,$$

a z tablic dla rozkładu normalnego $N(0,1)$:

$$\varepsilon = 1,96.$$

Ponieważ

$$P\left(\left\{\omega: |M_{r,n} - m_r| < 1\right\}\right) = P\left(\left\{\omega: \frac{|M_{r,n}(\omega) - m_r|}{\sqrt{\frac{m_{2r} - m_r^2}{n}}} < \varepsilon\right\}\right) = 0,95,$$

więc

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{m_{2r} - m_r^2}{n}}} = \varepsilon = 1,96,$$

skąd

$$n = \varepsilon^2 (m_{2r} - m_r^2) = 3,842 (m_{2r} - m_r^2).$$

Twierdzenie. Jeżeli X_1, X_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych dystrybuantach F , mającymi moment rzędu $2r$, g jest funkcją klasy C^2 w punkcie, $(m_{i_1}, \dots, m_{i_s})$ gdzie $m_{i_k} = E(X_1^{i_k})$ ($i_k \leq r$ dla $k = 1, \dots, s$), to zmienna losowa

$$Y_n = g(M_{i_1, n}, \dots, M_{i_s, n})$$

ma asymptotycznie rozkład normalny $N(m, \sigma)$, przy czym

$$m = g(m_{i_1}, \dots, m_{i_s}),$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^s \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_k} \Big|_{x_1 = m_{i_1}, \dots, x_s = m_{i_s}} (m_{i_j + i_k} - m_{i_j} m_{i_k}).$$

Twierdzenie (Kolmogorowa). Jeżeli X_1, X_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych ciągłych dystrybuantach F , a F_n jest dystrybuantą empiryczną,

$$D_n = \sup_{x \in \mathcal{R}} |F_n(x) - F(x)|,$$

to dla każdego x jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega : \sqrt{n} D_n < x\}) = Q(x),$$

gdzie stabilizowane $Q(x)$ jest równe

$$Q(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 x^2), & x > 0 \end{cases}.$$

6.2 Estymacja

Zajmiemy się szacowaniem nieznannej wartości parametru θ rozkładu prawdopodobieństwa cechy X elementów populacji generalnej. Poszukiwać będziemy statystyki, której wartości na wynikach obserwacji są możliwie bliskie szacowanej wartości parametru θ , czyli tzw. estymatorą tego parametru.

Szacowanie nieznannej wartości parametru θ na podstawie próbki polega na wyznaczeniu z próbki wartości u_n estymatora U_n , którego rozkład prawdopodobieństwa zależy od estymowanego parametru. Metoda ta nosi nazwę estymacji punktowej.

Wartości estymatora powinny być skupione w bliskim otoczeniu nieznannej rzeczywistej wartości parametru θ . A przy tym estymator powinien spełniać pewne warunki.

Definicja. Estymator $U_n(\omega; \theta) = g(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega); \theta)$ parametru θ nazywamy zgodnym, jeśli jest on zbieżny według prawdopodobieństwa do parametru θ , tzn. gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega : |U_n(\omega; \theta) - \theta| < \varepsilon\}) = 1.$$

Przykład. Jeżeli cecha X elementów populacji ma wartość przeciętną $E(X)$, to empiryczna wartość przeciętna (średnia arytmetyczna) \bar{X}_n jest zgodnym estymatorem $\theta = E(X)$. Wynika to ze słabego prawa wielkich liczb.

Przykład. Jeżeli cecha X elementów populacji ma moment rzędu drugiego, to wariancja empiryczna $U_n = S_n^2$ jest zgodnym estymatorem wariancji $\theta = \sigma^2 = V(X)$. Wynika to z twierdzenia z p. 5.1., gdyż wariancja $V(X)$ jest ciągłą funkcją momentów $m_1 = E(X)$ i $m_2 = E(X^2)$: $V(X) = m_2 - m_1^2$.

Definicja. Estymator U_n parametru θ nazywamy nieobciążonym, jeśli

$$\forall n \in \mathcal{N} \quad E(U_n) = \theta.$$

Estymator U_n parametru θ nazywamy asymptotycznie nieobciążonym, jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(U_n) = \theta.$$

Przykład. Jeżeli cecha X elementów populacji ma wartość przeciętną $\theta = E(X)$, to

$U_n = \bar{X}_n$ jest nieobciążonym estymatorem parametru θ . Istotnie, bowiem

$$E(U_n) = E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} n E(X) = E(X) = \theta,$$

jeśli $E(X)$ istnieje.

Przykład. Niech cecha X elementów populacji ma wariancję $\sigma^2 = V(X)$. Zbadamy,

czy $U_n = S_n^2$ (wariancja empiryczna) jest estymatorem nieobciążonym parametru

$\theta = V(X)$. Na podstawie przyjętych określeń mamy:

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2.$$

Zatem

$$E(S_n^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) - E(\bar{X}_n^2) = \frac{1}{n} n E(X^2) - E(\bar{X}_n^2).$$

Ale

$$\begin{aligned} E(\bar{X}_n^2) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j\right) = \\ &= \frac{1}{n^2} n E(X^2) + \frac{1}{n^2} n(n-1) (E(X))^2, \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} E(S_n^2) &= E(X^2) - \frac{1}{n} E(X^2) - \frac{n-1}{n} (E(X))^2 = \\ &= \frac{n-1}{n} \left[E(X^2) - (E(X))^2 \right] = \frac{n-1}{n} \sigma^2. \end{aligned}$$

Tak więc S_n^2 nie jest nieobciążonym estymatorem σ^2 , ale jest asymptotycznie nieobciążonym wariancji cechy X . Łatwo jednak sprawdzić, że niewielka modyfikacja

$$S_{\text{nieobc}}^2 = \frac{n-1}{n} E(S_n^2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

jest już nieobciążonym estymatorem σ^2 .

Definicja. Estymatorem najefektywniejszym parametru θ nazywany ten spośród nieobciążonych estymatorów tego parametru, który ma najmniejszą wariancję.

Uwaga. Estymator U_n parametru θ zgodny i najefektywniejszy można uważać za najlepszy dla oszacowania nieznannej wartości tego parametru cechy X populacji generalnej.

Twierdzenie (nierówność Rao-Cramera). Niech $f_n(x; \theta)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$) będzie gęstością n -wymiarowej zmiennej losowej (gęstością rozkładu prawdopodobieństwa n -elementowej próbki):

$$f_n(x; \theta) = f(x_1; \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n; \theta),$$

gdzie $f(x; \theta)$ jest gęstością zmiennej losowej X (cechy populacji generalnej), przy czym zachodzi warunek

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \theta) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} f(x; \theta) dx.$$

Jeśli U_n jest nieobciążonym estymatorem parametru θ , to

$$(*) \quad V(U_n) \geq \frac{1}{n E \left(\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2} = \frac{1}{n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x; \theta) dx},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy z prawdopodobieństwem 1 jest

$$\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} = c(U_n - \theta),$$

gdzie c jest stałą (być może zależną od θ). Jeśli najefektywniejszy estymator parametru θ istnieje, to dla jego wariancji zachodzi równość w relacji (*) (dowód podano w [1]).

Uwaga. Jeżeli cecha X populacji jest zmienną typu dyskretnego i $P(X = x_k) = p(x_k; \theta)$, to nierówność Rao-Cramera ma postać:

$$(**) \quad V(U_n) \geq \frac{1}{n \sum_k \left(\frac{\partial \ln p(x_k; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 p(x_k; \theta)}.$$

Definicja. Niech U_n i W_n będą dwoma estymatorami nieobciążonymi tego samego parametru θ i niech W_n będzie estymatorem najefektywniejszym. Liczba

$$\text{eff } U_n = \frac{V(W_n)}{V(U_n)}$$

nosi nazwę efektywności estymatora U_n . Natomiast liczba

$$\text{leff } U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{eff } U_n$$

Jest nazywana asymptotyczną efektywnością estymatora U_n .

Uwaga. Niech cecha X elementów populacji generalnej ma moment rzędu pierwszego – wartość przeciętną $m = E(X)$. Przyjmijmy jako estymator parametru

$\theta = m$ empiryczną wartość przeciętną $U_n = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Wykazaliśmy

w poprzednich przykładach, że \bar{X}_n jest zgodnym i nieobciążonym estymatorem parametru m . Zbadanie czy \bar{X}_n jest estymatorem najefektywniejszym jest możliwe dla konkretnych rozkładów prawdopodobieństwa cechy X .

Przykład (rozkład dwupunktowy – zerojedynekowy). Przyjmijmy, że populacja generalna składa się z dwóch rodzajów elementów – prawidłowych i wadliwych – przy czym przy czym frakcji p elementów wadliwych nie znamy. Niech wylosowanie elementu prawidłowego oznacza liczbę zero ($X = 0$), a elementu wadliwego – liczbę jeden ($X = 1$). Za estymator nieznanej wartości parametru p przyjmujemy

$$\bar{X}_n = \frac{n_w \cdot 1 + (n - n_w) \cdot 0}{n} = \frac{n_w}{n},$$

gdzie n jest liczebnością próbki, a n_w liczebnością elementów wadliwych w próbce.

Wariancja estymatora $U_n = \bar{X}_n$ jest równa

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n} V(X) = \frac{pq}{n} \quad (q = 1 - p),$$

a minimalna wariancja obliczona z nierówności Rao-Cramera jest równa

$$V_{\min}(U_n) = \frac{1}{n \left[\left(\frac{d \ln p}{d p} \right)^2 p + \left(\frac{d \ln(1-p)}{d p} \right)^2 (1-p) \right]} = \frac{1}{n \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)} = \frac{pq}{n}.$$

Mamy więc

$$\text{eff } \bar{X}_n = 1,$$

czyli $\bar{X}_n = n_w / n$ jest estymatorem najefektywniejszym. Zatem frakcja sztuk wadliwych w próbce jest najefektywniejszym estymatorem frakcji tych elementów w populacji generalnej.

Przykład (rozkład dwumianowy). Niech cecha X elementów populacji ma rozkład dwumianowy (Bernoulli'ego):

$$p_r(k, p) = P(X = k) = \binom{r}{k} p^k (1-p)^{r-k}, \quad k = 0, 1, \dots, r,$$

gdzie parametr p ma nieznaną wartość. Jako estymator tego parametru przyjmijmy \bar{X}_n . Na podstawie nierówności (***) znajdujemy:

$$V_{\min}(U_n) = \frac{1}{n \left[\sum_{k=0}^r \left(\frac{d \ln p_r(k, p)}{d p} \right)^2 p_r(k, p) \right]} = \frac{p^2 q^2}{n} \frac{1}{pqr} = \frac{pq}{nr}.$$

Natomiast

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2 r^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2 r^2} n r p q = \frac{p q}{n r}.$$

Zatem efektywność estymatora \bar{X}_n jest równa

$$\text{eff } \bar{X}_n = \frac{p q / n r}{p q / n r} = 1.$$

Oznacza to, że średnia liczba wystąpień zdarzenia A w n niezależnych doświadczeniach, polegających na seriach r prób wystąpienia zdarzenia A lub \bar{A} , jest najefektywniejszym estymatorem prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzenia A w poszczególnym doświadczeniu.

Przykład (rozkład Poissona). Niech cecha X elementów populacji ma rozkład Poissona:

$$p(k, \lambda) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie λ jest parametrem rozkładu o nieznannej wartości. Jako estymator $\lambda = E(X)$ przyjmijmy \bar{X}_n . Z nierówności (***) znajdujemy:

$$V_{\min}(U_n) = \frac{1}{n \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{d \ln p(k, \lambda)}{d \lambda} \right)^2 p(k, \lambda) \right]} = \frac{\lambda}{n}.$$

Ponadto mamy:

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} n V(X) = \frac{\lambda}{n},$$

a więc \bar{X}_n jest najefektywniejszym estymatorem parametru λ .

Przykład (rozkład normalny). Niech cecha X elementów populacji generalnej ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, przy czym σ jest znane, a m nieznanne. Jako estymator wartości parametru $m = E(X)$ przyjmijmy \bar{X}_n . Z nierówności (*) znajdujemy:

$$\begin{aligned} V_{\min}(U_n) &= \frac{1}{n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial m} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \right]^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx} = \\ &= \frac{1}{\frac{n}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-m}{\sigma^2}\right)^2 \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx} = \frac{1}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} n V(X) = \frac{\sigma^2}{n},$$

więc \bar{X}_n jest najefektywniejszym estymatorem parametru $m = E(X)$.

Uwaga. Można wykazać (por. [2]), że mediana empiryczna jest zgodnym estymatorem nieznannej wartości przeciętnej cechy X elementów populacji. Jeżeli przy tym cecha X ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, to ponieważ dla dużych wartości n jest w przybliżeniu

$$V(X_{1/2,n}) \approx \frac{\pi\sigma^2}{2n},$$

to

$$\text{eff}(X_{1/2,n}) \approx \frac{\sigma^2}{n} / \frac{\pi\sigma^2}{2n} \approx \frac{2}{\pi} \approx 0,64.$$

Oznacza to, że mediana nie jest najefektywniejszym estymatorem ani nawet asymptotycznie najefektywniejszym parametru m .

Przykład (estymator wariancji rozkładu normalnego). Niech cecha X elementów populacji generalnej ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$ o nieznanym odchyleniu standardowym $\sigma = \sqrt{V(X)}$. Wykazano wcześniej, że

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2$$

jest zgodnym estymatorem parametru σ^2 , a przy tym obciążonym o obciążeniu $-\sigma^2/n$, a więc nieobciążonym asymptotycznie. Natomiast

$$S_{\text{nieobc}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

jest nieobciążonym estymatorem σ^2 . Obliczamy wariancje obu estymatorów. Jak wiadomo z twierdzenia, statystyka nS_n^2/σ^2 ma rozkład chi-kwadrat o $n-1$ stopniach swobody, a taka zmienna losowa ma wariancję równą podwojonej liczbie stopni swobody, czyli

$$V\left(\frac{nS_n^2}{\sigma^2}\right) = \frac{n^2}{\sigma^4} V(S_n^2) = 2(n-1),$$

skąd

$$V(S_n^2) = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4.$$

Uwzględniając, że

$$S_{\text{nieobc}}^2 = \frac{n}{n-1} S_n^2,$$

mamy

$$V(S_{\text{nieobc}}^2) = \frac{2}{n-1} \sigma^4,$$

skąd wynika, że

$$V(S_n^2) < V(S_{\text{nieobc}}^2).$$

Z nierówności (*) otrzymujemy po wykonaniu przekształceń

$$V_{\min}(U_n) = \frac{2\sigma^4}{n},$$

a więc

$$\text{eff } S_{\text{nieobc}}^2 = \frac{2\sigma^4}{n} : \frac{2\sigma^4}{n-1} = \frac{n-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Zatem S_{nieobc}^2 jest najefektywniejszym estymatorem σ^2 jedynie asymptotycznie.

Biorąc pod uwagę, że dla dużych wartości n estymatory S_n^2 i S_{nieobc}^2 mają niemal identyczne wartości, nie jest istotne, którego wartość przyjmiemy jako oszacowanie nieznaney wartości parametru σ^2 .

Jeżeli znana jest wartość przeciętna m cechy X , to jako estymator parametru σ^2 można przyjąć:

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2.$$

Estymator ten jest zgodny i nieobciążony. Ponadto jest on najefektywniejszy. Mamy bowiem:

$$E(S_0^2) = \sigma^2, \quad V(S_0^2) = \frac{2}{n} \sigma^4.$$

Jako estymator miary rozproszenia cechy X – przy założeniu, że cecha ta ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$ (o znanym m) – przyjmujemy jeszcze empiryczne odchylenie przeciętne:

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - m|.$$

Ten estymator parametru σ jest zgodny, ale obciążony. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} E(U_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(|X_i - m|) = \frac{1}{n} n E(|X - m|) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_0^{\infty} (X - m) \exp\left[-\frac{(X - m)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma. \end{aligned}$$

Natomiast „estymator poprawiony”

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - m|,$$

jest zgodny i nieobciążony. Jednak jego efektywność, jako estymatora odchylenia standardowego σ , przedstawia się następująco:

$$V_{\min}(U_n) = \frac{\sigma^2}{2n}, \quad V(\bar{S}) = \frac{\pi \sigma^2}{2n} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right), \quad \text{eff}(\bar{S}) = \frac{1}{\pi - 2}.$$

Zatem \bar{S} nie jest najefektywniejszy, ani nawet asymptotycznie najefektywniejszy.

Uwaga. W powyższych przykładach zaproponowano do zbadania pewne estymatory konkretnych parametrów cechy X populacji generalnej. Zachodzi pytanie w jaki

sposób (jaką metodą) uzyskiwać dobre estymatory wskazanych parametrów cechy X . Warto wymienić metodę momentów (metodę Pearsona) oraz metodę największej wiarygodności (metodę Fishera).

Metoda momentów polega na szacowaniu nieznanymi wartościami momentów cechy X momentami empirycznymi, a parametrów cechy X będącej funkcjami momentów – takimi funkcjami momentów empirycznych.

Przykładowo, niech cecha X ma rozkład prawdopodobieństwa gamma o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}, & x > 0, \end{cases}$$

w którym wartości parametrów a i p są nieznanymi. Oznaczmy przez U_a i U_p poszukiwane estymatory tych parametrów. Dla rozkładu gamma wyznaczamy momenty

$$m_1 = E(X) = \frac{p}{a}, \quad m_2 = V(X) + (E(X))^2 = \frac{p}{a^2} + \left(\frac{p}{a}\right)^2,$$

skąd wyznaczamy

$$a = \frac{m_1}{m_2 - m_1^2}, \quad p = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2}.$$

Estymatory U_a i U_p otrzymujemy, zastępując w powyższych wyrażeniach momenty teoretyczne momentami empirycznymi:

$$U_a = \frac{M_{1,n}}{M_{2,n} - M_{1,n}^2}, \quad U_p = \frac{M_{1,n}^2}{M_{2,n} - M_{1,n}^2}.$$

Metoda największej wiarygodności polega na następującym. Niech cecha X elementów populacji będzie zmienną losową typu ciągłego o gęstości prawdopodobieństwa f zależnej od m niezależnych parametrów $\theta_1, \dots, \theta_m$. Wartości tych parametrów chcemy oszacować na podstawie n -elementowej próbki o zaobserwowanych wartościach x_1, \dots, x_n zmiennej X . Wprowadzamy funkcję:

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m) = f(x_1; \theta_1, \dots, \theta_m) \cdot \dots \cdot f(x_n; \theta_1, \dots, \theta_m),$$

zwaną funkcją wiarygodności. Te wartości $\theta_1^e, \dots, \theta_m^e$ parametrów $\theta_1, \dots, \theta_m$, dla których

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta_1^e, \dots, \theta_m^e) = L_{\max}(x_1, \dots, x_n)$$

(funkcja wiarygodności osiąga maksimum) będziemy uważali za poszukiwane estymatory, zwane estymatorami największej wiarygodności (estymatorami NW) parametrów $\theta_1, \dots, \theta_m$. Są one funkcjami próbki, więc są statystykami.

Jeżeli cecha X jest zmienną losową typu dyskretnego, to funkcja wiarygodności jest zdefiniowana następująco:

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m) = p(x_1; \theta_1, \dots, \theta_m) \cdot \dots \cdot p(x_n; \theta_1, \dots, \theta_m).$$

Poszukiwanie maksimum funkcji wiarygodności oznacza, że poszukujemy takiego oszacowania nieznanymi wartościami parametrów, dla którego prawdopodobieństwo otrzymania zaobserwowanych wartości jest największe. Zakładając, że funkcja L jest różniczkowalna względem $\theta_1, \dots, \theta_m$ poszukiwane estymatory $\theta_1^e, \dots, \theta_m^e$ otrzymujemy z warunków (równań)

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

lub, co jest dogodnie, z warunków

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

gdyż \ln jest funkcją rosnącą, a więc $\ln L$ osiąga ekstremum w tym samym punkcie $\theta_1^e, \dots, \theta_m^e$ co funkcja L .

Niech, przykładowo, cecha X ma rozkład dwupunktowy:

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = q = 1 - p,$$

gdzie p jest parametrem o nieznanym wartości. Chcemy znaleźć estymator NW tego parametru. Jeżeli w n -elementowej próbkę k razy zaobserwowano wartość $X = 1$ i $n - k$ razy wartość $X = 0$, to L jest postaci:

$$L = p^k (1 - p)^{n-k},$$

a warunek maksimum L przyjmuje postać:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{d}{d p} [k \ln p + (n - k) \ln(1 - p)] = k \frac{1}{p} - (n - k) \frac{1}{1 - p} = 0,$$

skąd znajdujemy

$$p^e = \frac{k}{n}.$$

Tak więc estymatorem NW nieznanego wartości prawdopodobieństwa p jest częstość występowania jedynki w próbkę.

Niech teraz (również tytułem przykładu) cecha X ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, przy czym wartości m i σ są nieznanymi. Niech x_1, \dots, x_n oznaczają wartości zmiennej X zaobserwowane w próbkę. Funkcja L ma teraz postać:

$$L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x_1 - m)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x_n - m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

a po zlogarytmowaniu

$$\ln L = -n \ln \sigma - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}.$$

Warunki maksimum funkcji L prowadzą do równań na m i σ :

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m) = 0, \quad -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = 0,$$

skąd

$$m = m_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}_n, \quad \sigma^2 = \sigma_e^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 = s_n^2.$$

Zatem estymatorami NW parametrów m i σ^2 w rozkładzie normalnym cechy X są \bar{X}_n i S_n^2 .

! Można wykazać, że estymatory NW mają asymptotyczne rozkłady prawdopodobieństwa normalne i są asymptotycznie najefektywniejsze.

Podamy teraz estymatory współczynnika korelacji i współczynnika regresji dwóch cech X i Y populacji generalnej.

Uwaga (estymacja współczynnika korelacji). Załóżmy, że elementy populacji badamy ze względu na dwie cechy X i Y , które są zmiennymi losowymi i interesuje nas współczynnik korelacji pomiędzy tymi zmiennymi. Zakładamy przy tym, że zmienne X i Y mają momenty drugiego rzędu.

W celu oszacowania wartości współczynnika korelacji ρ pobieramy n -elementową próbkę i mierzymy wartości $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ zmiennej dwuwymiarowej (X, Y) . Estymatora parametru ρ poszukujemy metodą momentów, ponieważ ρ jest funkcją momentów zmiennych X i Y . Zatem jako estymator R_n parametru ρ można przyjąć

$$R_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \bar{X}_n \bar{Y}_n}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \bar{Y}_n^2 \right)}}.$$

Estymator R_n ma postać analogiczną do wyrażenia na ρ , w którym momenty teoretyczne zastąpiono momentami empirycznymi. Estymator R_n nazywa się empirycznym współczynnikiem korelacji. Można wykazać, że jeśli (X, Y) jest zmienną losową dwuwymiarową o rozkładzie normalnym prawdopodobieństwa, to zmienna losowa R_n ma rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$f_n(r) = \frac{n-2}{\pi} (1-\rho^2)^{(n-1)/2} (1-r^2)^{(n-4)/2} \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{(1-\rho r x)^{n-1} \sqrt{1-x^2}} dx,$$

gdzie ρ jest współczynnikiem korelacji X i Y , a $n > 2$.

Jeżeli $\rho = 0$ (X i Y niezależne), to

$$f_n(r) = \frac{n-2}{\pi} (1-r^2)^{(n-4)/2} \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

przy czym

$$\int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\Gamma((n-1)/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(n/2)}.$$

Stosując podstawienie

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2},$$

przekształcamy gęstość prawdopodobieństwa $f_n(r)$ w gęstość prawdopodobieństwa rozkładu t -Studenta o $n-2$ stopniach swobody.

Ponadto statystyka R_n (dla (X, Y) o rozkładzie normalnym) jest wolnoziezna do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $N(\rho, (1-\rho^2)/\sqrt{n})$.

Uwaga (estymacja współczynnika regresji). Niech (X, Y) dwuwymiarowa zmienna losowa mająca momenty rzędu drugiego. W rozdz. 3 wprowadziliśmy proste regresji Y względem X i X względem Y oraz wprowadziliśmy w związku z tym dwa współczynniki regresji:

$$\alpha_{Y,X} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \quad \alpha_{X,Y} = \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}.$$

Współczynniki te są funkcjami momentów. Podamy estymatory tych współczynników, wyznaczone metodą momentów.

Niech X i Y będą cechami elementów populacji. Na podstawie n -elementowej próbki, tzn. n par zaobserwowanych wartości $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ – uwzględniając, że

$$\alpha_{Y,X} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)}{E(X^2) - E^2(X)},$$

$$\alpha_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(Y)} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)}{E(Y^2) - E^2(Y)},$$

– możemy oszacować wartości współczynników regresji, przyjmując jako estymatory tych parametrów:

$$U_{\alpha_{Y,X};n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X}_n \bar{Y}_n}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}_n^2}, \quad U_{\alpha_{X,Y};n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X}_n \bar{Y}_n}{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n \bar{Y}_n^2}.$$

Wyrażenia te otrzymano zastępując momenty teoretyczne w $\alpha_{Y,X}$ i $\alpha_{X,Y}$ momentami empirycznymi.

Można wykazać, że jeśli (X, Y) ma rozkład normalny, to statystyka

$$t = \frac{S_{X,n}^2 \sqrt{n-2}}{S_{Y,n}^2 \sqrt{1-R_n^2}} \left(U_{\alpha_{Y,X};n} - \alpha_{Y,X} \right),$$

gdzie $S_{X,n}^2$ i $S_{Y,n}^2$ są wariancjami empirycznymi zmiennych X i Y , a R_n jest empirycznym współczynnikiem korelacji, ma rozkład t -Studenta o $n-2$ stopniach swobody.

Uwaga (przedział ufności). Rozważane metody szacowania wartości nieznanego parametru cechy X elementów populacji prowadzą do ocen punktowych, tzn. chodzi o podanie jednej liczby możliwie najmniej się różniącej od nieznanego wartości estymowanego parametru. Niech (X_1, \dots, X_n) n -elementowa próbka wartości rozpatrywanej cechy X i niech cecha ta ma rozkład prawdopodobieństwa typu ciągłego, zależny od parametru θ o nieznanego wartości. Niech dalej \underline{U}_n i \bar{U}_n będą dwiema statystykami takimi, że

$$P(\{\omega: \underline{U}_n \leq \bar{U}_n\}) = 1.$$

Jeżeli dla danego $\alpha \in (0,1)$ spełniona jest równość

$$P(\{\omega: \underline{U}_n \leq \theta \leq \bar{U}_n\}) = 1 - \alpha,$$

to przedział $[\underline{U}_n, \bar{U}_n]$ nazywamy przedziałem ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1 - \alpha$.

Przedział ufności jest losowy, zależny od próbki. Oznacza to, że dla dużej serii próbek częstość zdarzenia polegającego na tym, że przedział ufności pokrywa nieznaną wartość parametru θ jest bliska wartości $1 - \alpha$.

Przedziały ufności konstruujemy w następujący sposób. Wybieramy estymator U_n parametru θ , którego rozkład prawdopodobieństwa dokładny lub asymptotyczny znamy. Dla danego α można znaleźć liczby a i b , dla których $P(a \leq U_n \leq b) = 1 - \alpha$. Jeżeli nierówność $a \leq U_n \leq b$ da się zastąpić równoważną $f_1(U_n) \leq \theta \leq f_2(U_n)$, to podstawiając $\underline{U}_n = f_1(U_n)$ oraz $\bar{U}_n = f_2(U_n)$ otrzymujemy przedział ufności na poziomie ufności $1 - \alpha$. Wybór a i b nie jest jednoznaczny. Dlatego w praktyce dobiera się a i b tak, by

$$P(U_n < a) \leq \frac{1}{2}\alpha, \quad P(U_n > b) \leq \frac{1}{2}\alpha.$$

Niech przykładowo cecha X ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, przy czym σ jest znane, a m nieznanego. Znajdziemy przedział ufności dla wartości przeciętnej m . Niech estymatorem m będzie średnia arytmetyczna z próby \bar{X}_n . Wiadomo, że ma ona rozkład normalny $N(m, \sigma/\sqrt{n})$. Korzystając z tablic możemy znaleźć dla danego α taką liczbę ε_α , by

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < \varepsilon_\alpha\right) = 1 - \alpha.$$

Oznacza to, że

$$P\left(\bar{X}_n - \varepsilon_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{X}_n + \varepsilon_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Przedział liczbowy

$$\left(\bar{X}_n - \varepsilon_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \varepsilon_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

jest więc przedziałem ufności dla parametru m na poziomie ufności $1 - \alpha$. Długość tego przedziału jest równa $2\varepsilon_\alpha \sigma / \sqrt{n}$. Zatem wraz ze wzrostem n otrzymujemy coraz dokładniejsze oszacowanie m .

Jeśli znamy m , a nie znamy σ , to wprowadzając zmienne losowe $Y = (X - m) / \sigma$ i $Y_k = (X_k - m) / \sigma$ stwierdzamy, że zmienna losowa Y ma rozkład $N(0,1)$, a zmienna losowa

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^n Y_k^2$$

ma rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody. Korzystając z tablic, możemy dla danego α znaleźć takie liczby χ_1^2, χ_2^2 , aby

$$P\left(\chi_1^2 < \sum_{k=1}^n Y_k^2 < \chi_2^2\right) = 1 - \alpha.$$

Wykorzystując S_0^2 jako estymator σ^2 można powyższą równość zapisać następująco:

$$P\left(\frac{nS_0^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{nS_0^2}{\chi_1^2}\right) = 1 - \alpha,$$

co oznacza, że jako przedział ufności dla parametru σ^2 można przyjąć

$$\left(\frac{nS_0^2}{\chi_2^2}, \frac{nS_0^2}{\chi_1^2}\right).$$

Natomiast, gdy nieznane są wartości obu parametrów m i σ rozkładu normalnego cechy X , to przedział ufności dla parametru m znajdujemy następująco. Jako estymator parametru m przyjmujemy średnią z próby \bar{X}_n oraz do wyznaczenia przedziału ufności zmienną losową

$$t = \frac{\bar{X}_n - m}{S_n} \sqrt{n-1},$$

która ma rozkład t -Studenta o $n - 1$ stopniach swobody. Korzystając z tablic można dla danego n i α znaleźć takie t_α , że $P(|t| < t_\alpha) = 1 - \alpha$, co oznacza, że

$$P\left(\frac{|\bar{X}_n - m|}{S_n} \sqrt{n-1} < t_\alpha\right) = 1 - \alpha,$$

a po przekształceniach, że

$$P\left(\bar{X}_n - t_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{X}_n + t_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n-1}}\right) = 1 - \alpha.$$

Zatem poszukiwanym przedziałem ufności jest

$$\left(\bar{X}_n - t_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n-1}}, \bar{X}_n + t_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n-1}}\right),$$

gdzie

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Wreszcie, jeżeli cecha X elementów populacji ma nieznaną rozkład prawdopodobieństwa, ale wiadomo, że istnieją wartość przeciętna $m = E(X)$ oraz $\sigma^2 = V(X)$ (o nieznanach wartościach), to można wyznaczyć przedział ufności dla m , ale przy dużych wartościach n (liczebność próbek), aby można było skorzystać z twierdzeń granicznych. Wiadomo, że średnia arytmetyczna n niezależnych zmiennych losowych o takich samych rozkładach prawdopodobieństwa o wartości przeciętnej m i wariancji σ^2 ma rozkład asymptotycznie normalny $N(m, \sigma/\sqrt{n})$. Wtedy (na mocy twierdzenia) jako estymator parametru σ^2 można przyjąć S_n^2 . I wtedy, analogicznie jak w pierwszym przykładzie, otrzymujemy dla m następujący przedział ufności

$$\left(\bar{X}_n - \varepsilon_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \varepsilon_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right),$$

gdzie ε_α znajdujemy z tablic dla rozkładu normalnego $N(0,1)$ przy

$$Y = \frac{\bar{X}_n - m}{S_n / \sqrt{n}}, \quad P(|Y| < \varepsilon_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Niejako przeciwieństwem przedziału ufności są granice tolerancji.

Uwaga (granice tolerancji). Niech cecha X elementów populacji ma dystrybucję F , a (X_1, \dots, X_n) niech będzie n -elementową próbką z populacji (tej cechy). Każdą parę funkcji U_1, U_2 określonych na przestrzeni próbek takich, że

$$P(\{F(U_2) - F(U_1) \geq Q\}) = q,$$

gdzie $Q, q \in (0,1)$, nazywamy kolejno przedziałem tolerancji (dwustronnym) zmiennej losowej X , przy czym U_1 nazywamy dolną granicą tolerancji, U_2 górną granicą tolerancji, a q poziomem tolerancji. Przedział tolerancji $[U_1, U_2]$ jest przedziałem losowym (funkcją wektora (X_1, \dots, X_n)). Oznacza on, że z prawdopodobieństwem q co najmniej $100Q\%$ elementów populacji należy do przedziału $[U_1, U_2]$ (ze względu na cechę X). Jeżeli cecha X ma rozkład normalny (lub w przybliżeniu normalny), to przyjmuje się

$$U_1 = \bar{X}_n - K_n(q, Q) S_n, \quad U_2 = \bar{X}_n + K_n(q, Q) S_n,$$

gdzie statystyki \bar{X}_n, S_n , oznaczają średnią empiryczną i odchylenie empiryczne z próby (X_1, \dots, X_n) , a $K_n(q, Q)$ są zależnymi od n, q, Q liczbami podanymi w tablicach statystycznych (np. w [3]).

Przykładowo, z bieżącej produkcji pewnego detalu pobrano próbkę o liczebności $n = 60$. Wiadomo, że interesująca nas cecha X tego detalu ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$ przy nieznanymi wartościach parametrów m i σ . Na podstawie próbki obliczono $\bar{x}_n = 4,24$ i $s_n = 0,16$. Przyjmując 99-procentowy przedział tolerancji (czyli $Q = 0,99$) oraz poziom tolerancji $q = 0,95$ określamy przedział tolerancji. Odczytując z tablic $K_{60}(0,95; 0,99) = 3,066$ otrzymujemy $U_1 = 3,75$ i $U_2 = 4,73$.

6.3 Weryfikacja hipotez statystycznych

Omówimy pokrótce następujące zagadnienie: dysponując informacjami z danej próbki populacji generalnej dotyczących cechy (zmienna losowa) elementów tej populacji, a także informacjami spoza próbki, należy rozstrzygnąć, do której z dwu rozłącznych podklas rozkładów prawdopodobieństwa danej klasy należy wybrany rozkład badanej cechy. Informacje spoza próbki mogą pozwolić na ograniczenie rozważań do określonej rodziny rozkładów prawdopodobieństwa, np. normalnych, gamma itd. Mówimy wtedy, że znana jest postać rozkładu prawdopodobieństwa danej cechy elementów populacji. Inne informacje mogą dotyczyć znajomości wartości pewnego parametru lub niezależności pewnych zdarzeń. Mogą one pochodzić z wcześniejszych badań statystycznych lub wynikać z charakteru badanej cechy elementów populacji. Na przykład przyjmuje się, na ogół, że błędy pomiarów oraz cechy elementów pochodzących z produkcji masowej mają rozkłady normalne. Nieznane są natomiast wartości parametrów określonej postaci rozkładu prawdopodobieństwa (wszystkich lub niektórych parametrów).

Przystępując do badań statystycznych w mniejszym lub większym stopniu nie znamy rozkładu prawdopodobieństwa interesującej nas cechy X elementów populacji generalnej. Możemy jednak na ogół ustalić klasę \mathbf{P} rozkładów, które mogą być brane pod uwagę jako ewentualne rozkłady cechy X . Na przykład, może to być zbiór rozkładów normalnych o nieznannej wartości przeciętnej, zbiór rozkładów o ciągłej dystrybucji, zbiór rozkładów, których cecha X jest typu skokowego o wartościach ze skończonego zbioru \mathcal{X} , itp. Jeżeli elementy klasy \mathbf{P} są wyznaczone przez wartości parametru θ (lub zbioru parametrów), to klasę \mathbf{P} wygodnie jest zapisać w postaci

$$\mathbf{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}.$$

Zadaniem jest odpowiedź na pytanie; czy wskazany rozkład należący do klasy \mathbf{P} może być uznany czy też nie za rozkład prawdopodobieństwa cechy X .

Hipotezą statystyczną nazywamy każdy niepusty podzbiór klasy \mathcal{P} . Na przykład, hipotezą statystyczną jest wskazanie z klasy \mathcal{P} konkretnego rozkładu. Jeżeli hipoteza statystyczna polega na wskazaniu rozkładu P_θ przez podanie wartości θ_0 parametru θ , to taką hipotezę nazywamy parametryczną. Stosujemy przy tym zapis $H(\theta = \theta_0)$.

Klasa \mathcal{P} nosi nazwę zbioru możliwych (dopuszczalnych) hipotez.

Ze zbioru wszystkich możliwych (dopuszczalnych) hipotez w danym zagadnieniu wyróżniamy tę, która podlega weryfikacji. Nazywamy ją hipotezą zerową i oznaczamy przez H_0 . Na przykład, dla hipotez parametrycznych jest to $H(\theta = \theta_0)$.

Wszystkie pozostałe hipotezy nazywamy alternatywnymi i oznaczamy przez H_1 . W przypadku hipotezy parametrycznej, dotyczącej nieznannej wartości parametru θ (zbioru parametrów), zbiór możliwych hipotez jest wyznaczony przez zbiór możliwych wartości tego parametru (zbioru parametrów) – nazywamy go przestrzenią parametru (przestrzenią parametrów) i oznaczamy symbolem Θ .

Przestrzeń Θ przedstawiamy w postaci sumy dwóch niepustych i rozłącznych zbiorów: Θ_0 i $\Theta_1 = \Theta - \Theta_0$, określających hipotezę zerową H_0 i hipotezę alternatywną H_1 . Jeżeli H_0 jest zbiorem jednoelementowym ($H_0 = H(\theta = \theta_0)$, $\Theta_0 = T(\{\theta_0\})$), to mówimy, że jest hipotezą prostą, a jeżeli zbiorem wieloelementowym – hipotezą złożoną.

Przez weryfikację hipotezy zerowej rozumiemy:

- 1) wybór statystyki U , której rozkład prawdopodobieństwa (dokładny lub asymptotyczny) jest znany,
- 2) ustalenie zbioru \mathcal{W} tych wartości u statystyki U , których wystąpienie uważamy za zaprzeczenie hipotezy zerowej.

Statystykę U nazywamy testem hipotezy H_0 przeciw hipotezie alternatywnej H_1 , a zbiór \mathcal{W} – zbiorem krytycznym testu. Prawdopodobieństwo

$$P(U \text{ określa } \mathcal{W} | H_0) = \alpha,$$

tzn. prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, gdy jest ona prawdziwa, nazywamy poziomem istotności testu. Praktycznie przyjmuje się jedną z liczb: 0,05 lub 0,02 lub 0,01 lub 0,001.

Testy służące do weryfikowania hipotez parametrycznych nazywamy testami parametrycznymi, a testy służące do weryfikowania hipotez nieparametrycznych – testami zgodności.

A. Przykładowe testy parametryczne

- 1) Weryfikacja hipotezy o wartości przeciętnej w rozkładzie normalnym przy znanym σ

Niech cecha X elementów populacji ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, w którym wartość σ jest znana. Pobrano próbkę n -elementową i zaobserwowano wartości (x_1, \dots, x_n) cechy X . Przyjmując poziom istotności α , weryfikujemy hipotezę $H_0(m = m_0)$ przeciw hipotezie alternatywnej $H_1(m \neq m_0)$. Wykorzystując, że średnia arytmetyczna \bar{X}_n z n niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych prawdopodobieństwa $N(m, \sigma)$ ma rozkład normalny $N(m, \sigma / \sqrt{n})$, jako test przyjmujemy statystykę \bar{X}_n . Zbiorem krytycznym jest w tym przypadku zbiór

$$\mathcal{W} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \frac{|\bar{x}_n - m_0|}{\sigma / \sqrt{n}} > \varepsilon_\alpha \right\},$$

gdzie

$$P\left(\frac{|\bar{x}_n - m_0|}{\sigma / \sqrt{n}} > \varepsilon_\alpha\right) = \alpha.$$

Zatem hipotezę H_0 odrzucamy, gdy $|\bar{x}_n - m_0| > \sigma \varepsilon_\alpha / \sqrt{n}$ i przyjmujemy, gdy $|\bar{x}_n - m_0| \leq \sigma \varepsilon_\alpha / \sqrt{n}$.

Tytułem ilustracji, załóżmy, że rozkład prawdopodobieństwa odchyłek od wartości nominalnej cechy X pewnego detalu pochodzącego z produkcji masowej jest normalny o znanym odchyleniu standardowym $\sigma = 0,2$. Celem weryfikacji hipotezy $H_0(m = 0)$ (nie występują odchylenia systematyczne od wartości nominalnej cechy X) pobrano próbkę o liczebności $n = 9$ i otrzymano wyniki:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
x_i	-1,8	0,9	-1,0	4,5	-3,5	1,9	2,7	-0,8	-2,0	0,9

Przyjmujemy poziom istotności $\alpha = 0,05$. Z tablic rozkładu normalnego $N(0, 1)$ odczytujemy $\varepsilon_\alpha = 1,96$. Zatem $\sigma \varepsilon_\alpha / \sqrt{n} = 0,2 \cdot 1,96 / 3 = 0,13$. Uwzględniając $|\bar{x}_n - m_0| = |0,9/9 - 0| = 0,1 \leq 0,13$. Tak więc przyjmujemy hipotezę H_0 na poziomie istotności 0,05.

2) Weryfikacja hipotezy o wartości przeciętnej w rozkładzie normalnym przy nieznanym σ

Wiadomo, że cecha X elementów populacji generalnej ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, w którym m i σ są nieznanne. Na podstawie n -elementowej próbki chcemy zweryfikować, na poziomie istotności α , hipotezę $H_0(m = m_0)$ przeciw hipotezie alternatywnej $H_1(m \neq m_0)$. Korzystając z odpowiedniego twierdzenia jako test przyjmujemy statystykę

$$t = \frac{\bar{X}_n - m_0}{S_n} \sqrt{n-1},$$

o której wiemy, że ma rozkład niezależny od σ , a mianowicie rozkład t -Studenta o $n - 1$ stopniach swobody. Zbiorem krytycznym jest tu $\mathcal{W} = \{(x_1, \dots, x_n) : |t| > t_\alpha\}$, gdzie t_α jest wartością odczytaną z tablicy rozkładu t -Studenta, spełniającą warunek:

$$P((x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{W} | H_0) = P\left(\frac{|\bar{X}_n - m_0|}{S_n} \sqrt{n-1} > t_\alpha\right) = P(|t| > t_\alpha).$$

Hipotezę $H_0 (m = m_0)$ odrzucamy, gdy

$$|\bar{X}_n - m_0| > \frac{t_\alpha S_n}{\sqrt{n-1}}$$

i przyjmujemy, gdy

$$|\bar{X}_n - m_0| \leq \frac{t_\alpha S_n}{\sqrt{n-1}}.$$

Tytułem ilustracji rozważmy pomiar z przykładu poprzedniego, przy założeniu, że σ jest nieznanne. Po obliczeniu (przy $n = 9$)

$$s_9^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x}_9)^2 = \frac{26}{9}, \quad s_9 = 1,70$$

i odczytaniu z tablic $t_\alpha = 2,306$ (przy $n - 1 = 8$ i $\alpha = 0,05$) otrzymujemy

$$|\bar{x}_n - m_0| = |0,1 - 0| \leq \frac{t_\alpha S_n}{\sqrt{n-1}} = 2,306 \cdot 1,70 / \sqrt{8} = 1,38.$$

Zatem przyjmujemy hipotezę $H_0 (m = 0)$.

Warto zwrócić uwagę, porównując oba przykłady, że nieznanność σ , czyli posiadanie mniejszej ilości informacji, powoduje ostrożniejsze odrzucanie hipotezy zerowej.

3) Weryfikacja hipotezy o wariancji w rozkładzie normalnym

Niech cecha X elementów populacji generalnej ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$ o nieznanach wartościach parametrów m i σ . Na podstawie n -elementowej próbki chcemy zweryfikować, na poziomie istotności α , hipotezę $H_0 (\sigma^2 \leq \sigma_0^2)$ przeciw hipotezie alternatywnej $H_1 (\sigma^2 > \sigma_0^2)$. Wykorzystamy fakt, że statystyka ns_n^2 / σ^2 ma rozkład chi-kwadrat o $n - 1$ stopniach swobody. Przyjmujemy ją jako test do weryfikacji hipotezy H_0 . Zbiorem krytycznym, jest tu zbiór

$$\mathcal{W} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \frac{ns_n^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2 \right\},$$

przy czym

$$P\left(\frac{ns_n^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2\right) = \alpha,$$

gdzie χ_α^2 odczytujemy z tablic rozkładu chi-kwadrat o $n-1$ stopniach swobody. Hipotezę H_0 odrzucamy, gdy

$$\frac{ns_n^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2,$$

a przyjmujemy w przypadku przeciwnym.

Tytułem ilustracji rozważmy dane z 10 pomiarów testowych położenia obiektu za pomocą urządzenia GPS. Otrzymano następujące wartości błędów (w [m]).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
x_i	0,115	-0,250	0,180	-0,060	-0,120	0,010	0,050	0,075	-0,150	-0,250	-0,500

Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0,02$ weryfikujemy hipotezę $H_0 (\sigma^2 \leq 0,0125)$.

Z danych w tabeli wynika, że $\bar{x}_n = \bar{x}_{10} = -0,500/10 = -0,050$ oraz

$ns_n^2 = 10s_{10}^2 = 0,29435$. Z tablicy rozkładu chi-kwadrat dla $n-1 = 9$ stopni swobody i

$\alpha = 0,02$ odczytujemy $\chi_\alpha^2 = 19,679$. Zatem wobec

$$\frac{ns_n^2}{\sigma_0^2} = \frac{0,29435}{0,0125} = 23,548 > 19,679$$

hipotezę H_0 należy odrzucić.

4) Weryfikacja hipotezy o równości wartości przeciętnych w dwóch rozkładach normalnych o jednakowych wariancjach o nieznannej wartości w dwu populacjach

Mamy dwie populacje, dla których wspólna cecha X elementów ma odpowiednio rozkład normalny $N(m_1, \sigma)$ i $N(m_2, \sigma)$, przy czym wartości parametrów m_1, m_2, σ są nieznanne. Pobrano z obu populacji próbki o liczebnościach odpowiednio n_1, n_2 , otrzymując następujące wyniki: x_1, \dots, x_{n_1} dla próbki z pierwszej populacji oraz y_1, \dots, y_{n_2} dla próbki z drugiej populacji. Przyjmując poziom istotności α , chcemy zweryfikować hipotezę $H_0(m_1=m_2)$ przeciw hipotezie $H_1(m_1 \neq m_2)$. Do weryfikacji hipotezy H_0 zaproponowano statystykę:

$$T = \frac{\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}}{\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} (n_1 S_{n_1}^2 + n_2 S_{n_2}^2)}} \sqrt{n_1 + n_2 - 2}.$$

Jeśli hipoteza H_0 jest prawdziwa, to wobec niezależności zmiennych

$X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ i równości

$$T = \frac{(\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}) / \sqrt{\sigma^2 / n_1 + \sigma^2 / n_2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1 + n_2 - 2} (n_1 S_{n_1}^2 / \sigma^2 + n_2 S_{n_2}^2 / \sigma^2)}}$$

oraz wcześniejszych twierdzeń licznik i mianownik są zmiennymi niezależnymi, licznik ma rozkład normalny $N(0, 1)$, a nawias w mianowniku ma rozkład chi-kwadrat o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody, a więc zmienna losowa T ma rozkład t -Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody. Zbiorem krytycznym jest tu zbiór

$$\mathcal{W} = \left\{ (x_1, \dots, x_{n_1}, y_1, \dots, y_{n_2}) : \frac{|\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}|}{\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \frac{n_1 S_{n_1}^2 + n_2 S_{n_2}^2}{\sqrt{n_1 + n_2 - 2}}}} > t_\alpha \right\},$$

gdzie t_α jest liczbą odczytaną z tablicy rozkładu t -Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody, spełniającej warunek $P(|T| > t_\alpha) = \alpha$.

5) Weryfikacja hipotezy o wartości przeciętnej na podstawie próbek o dużej liczebności

W p. 1) – 4) zakładaliśmy, że znana jest postać rozkładu prawdopodobieństwa badanej cechy populacji, natomiast liczebność próbki mogła być dowolna.

Rozważmy teraz przypadek, gdy postać rozkładu prawdopodobieństwa interesującej nas cechy jest nieznaną. Aby zweryfikować hipotezę o nieznaną wartość przeciętnej interesującej nas cechy X musimy znać rozkład prawdopodobieństwa statystyki, która posłuży jako test. Tylko bowiem wtedy potrafimy zbudować zbiór krytyczny \mathcal{W} . W tym celu możemy skorzystać ze znanych twierdzeń granicznych. W szczególności, na podstawie twierdzenia Linderberga-Levy'ego, jeśli zmienne X_1, \dots, X_n są niezależne o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa i istnieją

$E(X_1) = m$, $V(X_1) = \sigma^2$, to zmienna losowa \bar{X}_n ma w przybliżeniu rozkład normalny $N(m, \sigma / \sqrt{n})$ (jeśli tylko n jest odpowiednio duże, a ponadto innego twierdzenia $\sigma^2 \approx s_n^2$). Zatem, w rozważanym przypadku, w celu zweryfikowania hipotezy $H_0(m = m_0)$ przeciw hipotezie $H_1(m \neq m_0)$ należy pobrać odpowiednio liczną próbkę, a następnie jako test przyjąć statystykę \bar{X}_n . Zbiorem krytycznym jest

$$\mathcal{W} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \frac{|\bar{x}_n - m_0|}{s_n / \sqrt{n}} > \varepsilon_\alpha \right\},$$

gdzie ε_α jest liczbą odczytaną z tablic rozkładu normalnego $N(0, 1)$, spełniającej warunek

$$P\left(\frac{|\bar{x}_n - m_0|}{s_n} \sqrt{n} > \varepsilon_\alpha\right) = \alpha.$$

Hipotezę H_0 przyjmujemy (ściślej – nie odrzucamy jej), gdy $|\bar{x}_n - m_0| \leq \varepsilon_\alpha s_n / \sqrt{n}$.

Tytułem ilustracji, założmy, że zużycie wody przez wytwórnię betonu podlega losowym badaniom w kolejnych dniach. Na podstawie obserwacji przez kolejnych 256

dni stwierdzono, że średnie zużycie wody wynosi $\bar{x}_{256} = 102$ hl, a średnie odchylenie standardowe jest równe $s_{256} = 8$ hl. Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0,05$ weryfikujemy hipotezę $H_0(m_0 = 100$ hl) przeciw hipotezie $H_1(m_0 \neq 100$ hl). Z tablicy rozkładu normalnego $N(0, 1)$ odczytujemy $\varepsilon_\alpha = 1,96$. Z danych do analizy wynika, że $|\bar{x}_n - m_0| = 2 > \varepsilon_\alpha s_n / \sqrt{n} = 1,96 \cdot 8 / \sqrt{256} = 0,98$, a więc hipotezę H_0 odrzucamy.

6) Weryfikacja hipotezy o wartości współczynnika korelacji

Założmy, że elementy populacji badamy względu na cechy X i Y takie, że zmienna losowa (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny. Na podstawie n -elementowej próbki (x_i, y_i) ($i = 1, \dots, n$) chcemy zweryfikować hipotezę $H_0(\rho = \rho_0)$ przeciw hipotezie alternatywnej $H_1(\rho \neq \rho_0)$.

Dla niedużych wartości n możemy skorzystać ze statystyki

$$U = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R_n}{1-R_n},$$

która ma rozkład normalny o parametrach

$$E(U) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)}, \quad V(U) = \frac{1}{n-3}.$$

Dla poziomu istotności α odczytujemy z tablic rozkładu normalnego $N(0, 1)$ liczbę ε_α taką, że $\Phi(\varepsilon_\alpha) = (1-\alpha)/2$. Zbiorem krytycznym jest

$$\mathcal{W} = \left\{ (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) : \left| \frac{1}{2} \ln \frac{1+r_n}{1-r_n} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} - \frac{\rho_0}{2(n-1)} \right| > \varepsilon_\alpha \frac{1}{\sqrt{n-3}} \right\},$$

gdzie przypomnijmy

$$r_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2 \right) \right]^{1/2}}.$$

7) Weryfikacja hipotezy o wartości współczynnika regresji

Niech X i Y będą dwiema badanymi cechami populacji generalnej takimi, że zmienna losowa (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny. Pobieramy n -elementową próbkę i na jej podstawie chcemy zweryfikować hipotezę $H_0(\alpha_{Y,X} = \alpha_0)$, tzn. że wartość współczynnika regresji jest równa α_0 . Jako test do weryfikacji tej hipotezy przyjmujemy następującą statystykę, która ma rozkład t -Studenta o $n-2$ stopniach swobody:

$$t = \frac{S_{nX}^2 \sqrt{n-2}}{S_{nY}^2 \sqrt{1-R_n^2}} (U_{nY,X} - \alpha_0),$$

gdzie

$$S_{nX}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2$$

$$S_{nY}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \bar{Y}_n^2,$$

$$R_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)}{\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2 \right) \right]^{1/2}},$$

$$U_{nY,X} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}.$$

Zbiorem krytycznym jest $\mathcal{W} = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) : |t| > t_\alpha\}$, gdzie t_α jest liczbą odczytaną z tablic rozkładu t -Studenta o $n - 2$ stopniach swobody, z warunku $P(|t| > t_\alpha) = \alpha$.

B. Przykładowe testy zgodności

Rozważmy populację, dla której cecha X elementów ma nieznaną rozkład prawdopodobieństwa. Pobieramy próbkę n -elementową. Zaobserwowane w próbce wartości x_1, \dots, x_n cechy X pozwalają zwykle uzyskać pewne (wstępne) informacje o postaci rozkładu tej cechy. Najprostszą metodą uzyskania tych informacji jest sporządzenie histogramu.

Schemat postępowania przy testach zgodności jest następujący:

- ustalenie zbioru możliwych hipotez (zbioru możliwych rozkładów, jakie powinny być brane pod uwagę),
- wyróżnienie z powyższego zbioru hipotezy zerowej,
- przyjęcie statystyki, która może służyć jako test do weryfikacji hipotezy zerowej.

1) Test chi-kwadrat Pearsona

Niech cecha X elementów populacji ma dystrybuantę (teoretyczną) F . Podzielmy oś rzeczywistą \mathcal{R} na przedziały za pomocą liczb

$$-\infty = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_r < \alpha_{r+1} = \infty.$$

Oznaczmy przez p_j prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X przyjmuje wartość z przedziału $I_j = [\alpha_{j-1}, \alpha_j)$, tzn. $p_j = F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1})$, $j = 1, 2, \dots, r+1$

i niech $p_j > 0$ dla każdego j . Liczba np_j jest oczekiwaną liczbą obserwacji n -elementowej próbki, które przy prawdziwości hipotezy powinny znaleźć się

w przedziale I_j . Niech n_j oznacza liczbę obserwacji z przedziału I_j . Suma kwadratów różnic $n_j - np_j$, tzn.

$$\sum_{j=1}^{r+1} (n_j - np_j)^2$$

może służyć za miarę zgodności rozkładu zaobserwowanego z rozkładem hipotetycznym. Wartości powyższej sumy zmieniają się wraz z próbką, a statystyka, której wartościami są te sumy ma bardzo złożony rozkład. Jednakże K. Pearson udowodnił, że statystyka

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{r+1} \frac{(N_j - np_j)^2}{np_j}$$

ma, gdy $n \rightarrow \infty$, rozkład chi-kwadrat o r stopniach swobody. Statystyka powyższa nosi nazwę testu χ^2 Pearsona. Nie zależy ona od tego jaka jest postać dystrybuanty. Ten sam układ prawdopodobieństw p_1, p_2, \dots, p_{r+1} może odpowiadać wielu różnym rozkładom prawdopodobieństwa – zarówno typu ciągłego jak i dyskretnego. Dlatego za hipotezę zerową będziemy uważać wszystkie rozkłady, dla których

$p_j = P(X = x_j)$. Za pomocą testu χ^2 hipotezę weryfikujemy w następujący sposób. Przyjmujemy poziom istotności testu α . Zbiorem krytycznym jest $\mathcal{W} = \{(x_1, \dots, x_n) : \chi_{\text{emp}}^2 > \chi_{\alpha}^2\}$, gdzie χ_{α}^2 odczytujemy z tablicy rozkładu chi-kwadrat o r stopniach swobody, z warunku $P(\chi^2 > \chi_{\alpha}^2) = \alpha$. Zatem hipotezę przyjmujemy, gdy $\chi_{\text{emp}}^2 \leq \chi_{\alpha}^2$.

Przedstawiona metoda weryfikacji hipotezy o postaci rozkładu prawdopodobieństwa oparta jest na granicznym rozkładzie statystyki, a więc n musi być dostatecznie duże. Przyjmuje się, że test χ^2 można stosować, gdy $np_j \geq 10$ dla $j = 2, 3, \dots, r$.

Tytułem ilustracji, rozważmy przeprowadzone obserwacje dotyczące wypadków drogowych na określonym terenie w ciągu roku spowodowanych przez nietrzeźwych kierowców. Otrzymany rozkład wypadków w poszczególnych dniach tygodnia zawiera poniższa tabela.

Pn	Wt	Śr	Czw	Pt	So	N
19	15	16	14	13	18	17

Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0,05$ zweryfikujemy hipotezę, że prawdopodobieństwo zdarzenia się wypadku spowodowanego przez nietrzeźwego kierowcę jest jednakowe dla wszystkich dni tygodnia. Mamy 7 przedziałów I_1, \dots, I_7

oraz $p_1 = \dots = p_7 = 1/7$, a liczebności n_1, \dots, n_7 podane są w tabeli. Z danych liczbowych wynika, że $n = 112$, $np_j = 112 \cdot 1/7 = 16$, a więc

$$\chi_{\text{emp}}^2 = \frac{1}{16}(3^2 + 1^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2) = \frac{14}{8} = 1,75.$$

Z tablicy rozkładu chi-kwadrat dla $7 - 1 = 6$ stopni swobody i poziomu istotności $\alpha = 0,05$ znajdujemy $\chi_{\alpha}^2 = 12,59$. Ponieważ $\chi_{\text{emp}}^2 < \chi_{0,05}^2$, więc hipotezę H_0 równości prawdopodobieństw zaistnienia wypadków w poszczególnych dniach tygodnia przyjmujemy.

2) Test λ Kołmogorowa

Założmy, że cecha X elementów populacji jest zmienną losową typu ciągłego. Na podstawie n -elementowej próbki (n – co najmniej kilkadziesiąt) chcemy zweryfikować hipotezę H_0 , że cecha X ma dystrybuantę F . Jako test do weryfikacji tej hipotezy można wykorzystać statystykę

$$\sqrt{n}D_n = \sqrt{n} \sup_{x \in \mathcal{R}} |F_n(x) - F(x)|,$$

gdzie F_n jest dystrybuantą empiryczną. Rozkład graniczny tej statystyki precyzuje tw. Kołmogorowa (p. 5.1).

Przyjmujemy poziom istotności α . Zbiorem krytycznym jest tu zbiór

$$\mathcal{W} = \{(x_1, \dots, x_n) : \sqrt{n}D_n > \lambda\},$$

gdzie λ jest liczbą spełniającą warunek $P(\sqrt{n}D_n > \lambda) = 1 - Q(\lambda) = \alpha$, przy czym $Q(\lambda)$ jest wartością dystrybuanty określonej w tw. Kołmogorowa: dla danego α

znamy $Q(\lambda) = 1 - \alpha$, a λ odczytujemy z tablicy $Q(\lambda)$:

$$Q(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \leq 0 \\ \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k \exp(-1/2 k^2 \lambda^2), & \lambda > 0 \end{cases}$$

Hipotezę H_0 przyjmujemy, gdy $\sqrt{n}D_n \leq \lambda$. Test λ Kołmogorowa wymaga, by dystrybuanta F określała hipotetyczny rozkład prawdopodobieństwa jednoznacznie.

C. Przykładowe testy niezależności

Przedstawimy poniżej przykładowe testy do badania niezależności cech elementów danej populacji.

1) Zastosowanie testu χ^2

Niech dana jest populacja, której elementy badamy ze względu na dwie cechy X i Y . Dzielimy zakres zmienności cechy X na r przedziałów, a cechy Y na s przedziałów. Przy takim podziale wynik obserwacji może się znaleźć w jednym z rs przedziałów. Niech n będzie liczbą obserwacji, a n_{ij} - liczbą obserwacji, które należą do i -tego przedziału ze względu na zmienną X oraz do j -tego przedziału ze względu na zmienną Y . Wprowadzamy oznaczenia (podobne jak dla rozkładów brzegowych prawdopodobieństwa zmiennej dwuwymiarowej (X, Y)):

$$n_{i*} = \sum_{j=1}^s n_{ij}, \quad n_{*j} = \sum_{i=1}^r n_{ij}.$$

Wtedy oczywiście jest:

$$\sum_{i=1}^r n_{i*} = \sum_{j=1}^s n_{*j} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s n_{ij}.$$

Wyniki obserwacji zapisujemy w tablicy:

zmienna		Y				Razem
		1	2	...	s	
X	1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1s}	n_{1*}
	2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2s}	n_{2*}

	r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rs}	n_{r*}
Razem		n_{*1}	n_{*2}	...	n_{*s}	n

Przyjmując poziom istotności α chcemy zweryfikować hipotezę H_0 , że cechy X i Y są niezależne. Jeżeli hipoteza ta jest prawdziwa, to rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej (X, Y) jest wyznaczony w sposób jednoznaczny przez prawdopodobieństwa w rozkładach brzegowych, tj. przez $p_{1*}, \dots, p_{r*}, p_{*1}, \dots, p_{*s}$.

Prawdopodobieństwa te związane są dwiema zależnościami: $p_{1*} + \dots + p_{r*} = 1$,

$p_{*1} + \dots + p_{*s} = 1$. Oznacza to, że do opisu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej

losowej (X, Y) potrzebna jest znajomość $r + s - 2$ parametrów. Jeśli parametry te

wyznamy metodą największej wiarygodności (p. 5.2), to na podstawie twierdzenia

do zweryfikowania hipotezy H_0 będzie można użyć testu chi-kwadrat Pearsona. Funkcja wiarygodności ma tu postać:

$$L = p_{1*}^{n_{1*}} \cdot \dots \cdot p_{r-1*}^{n_{r-1*}} \cdot (1 - p_{1*} - \dots - p_{r-1*})^{n_{r*}} \cdot p_{*1}^{n_{*1}} \cdot \dots \cdot p_{*s-1}^{n_{*s-1}} \cdot (1 - p_{*1} - \dots - p_{*s-1})^{n_{*s}}.$$

Korzystając z warunków maksimum L w postaci:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p_{i*}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r-1;$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p_{*j}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s-1,$$

przy uwzględnieniu

$$\sum_{i=1}^r p_{i*} = 1, \quad \sum_{j=1}^s p_{*j} = 1,$$

znajdujemy

$$p_{i*} = \frac{n_{i*}}{n}, \quad p_{*j} = \frac{n_{*j}}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s).$$

Potrzebną statystykę χ^2 można zapisać następująco:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(n_{ij} - np_{i*}p_{*j})^2}{np_{i*}p_{*j}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i*}n_{*j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i*}n_{*j}}{n}}.$$

Jeżeli prawdziwa jest hipoteza H_0 , że cechy X i Y są niezależne, to statystyka χ^2 ma, jeśli $n \rightarrow \infty$, rozkład chi-kwadrat o $rs - (r + s - 2) - 1 = (r-1)(s-1)$ stopniach

swobody. Zbiorem krytycznym jest $\mathcal{W} = \{(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s) : \chi_{\text{empir}}^2 > \chi_{\alpha}^2\}$, gdzie

χ_{α}^2 jest liczbą odczytaną z tablicy rozkładu chi-kwadrat, spełniającą warunek

$$\int_{\chi_{\alpha}^2}^{\infty} k_{(r-1)(s-1)}(x) dx = \alpha,$$

przy czym $k_{(r-1)(s-1)}(x)$ jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej o rozkładzie chi-kwadrat z $(r-1)(s-1)$ stopniami swobody.

Niech, dla ilustracji, próbka liczy $n = 500$ elementów a ich cechy X i Y przyjmują jedynie dwie wartości: 0 lub 1. Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0,05$, sprawdzamy czy na podstawie poniższych danych w tabeli można przyjąć hipotezę H_0 o niezależności cech X i Y .

X	0	1	Σ
Y			
0	60	45	105

1	195	200	395
Σ	255	245	500

Obliczamy wartość statystyki χ^2 :

$$\chi_{\text{empir}}^2 = \frac{\left(60 - \frac{105 \cdot 255}{500}\right)^2}{\frac{105 \cdot 255}{500}} + \frac{\left(195 - \frac{395 \cdot 255}{500}\right)^2}{\frac{395 \cdot 255}{500}} + \frac{\left(45 - \frac{105 \cdot 245}{500}\right)^2}{\frac{105 \cdot 245}{500}} + \frac{\left(200 - \frac{395 \cdot 245}{500}\right)^2}{\frac{395 \cdot 245}{500}} = 2,01.$$

Liczba stopni swobody jest równa $(2 - 1)(2 - 1) = 1$. Dla $\alpha = 0,05$ odczytujemy $\chi_{\alpha}^2 = 3,84$. Ponieważ $\chi_{\text{empir}}^2 < \chi_{\alpha}^2$, więc hipotezę H_0 przyjmujemy.

Uwaga. Do weryfikacji hipotezy H_0 wybierano pewną statystykę U jako test. Definiowano zbiór krytyczny \mathcal{W} taki, by $P(\mathcal{W} | H_0) = \alpha$ (prawdopodobieństwo tego, że wartość statystyki będzie spełniła warunek przynależności do \mathcal{W} pod warunkiem H_0 będzie równe α). Niech hipoteza H_0 i hipoteza alternatywna H_1 będą hipotezami prostymi, tzn. niech $H_0(\theta = \theta_0)$ i $H_1(\theta \neq \theta_0)$. Do weryfikacji hipotezy można użyć różne statystyki U i różnie zdefiniować zbiór \mathcal{W} . Można przy tym popełnić dwa rodzaje błędów: błąd pierwszego rodzaju polegający na odrzuceniu hipotezy H_0 , gdy jest ona prawdziwa i błąd drugiego rodzaju polegający na przyjęciu hipotezy H_0 , podczas gdy prawdziwa jest hipoteza H_1 .

Literatura pomocnicza

1. Plucińska A., Pluciński E.: Elementy probabilistyki, PWN, Warszawa 1990
2. Zubrzycki S.: Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, PWN, Warszawa 1970
3. Zieliński R., Tablice statystyczne, PWN, Warszawa 1972
4. Benjamin J.R., Cornell C.A.: Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów, WNT, Warszawa 1977
5. The R-project for statistical computing (www.r-project.org)
6. Graybill F. A., An introduction to Linear Statistical Models, vol. I, McGraw – Hill, N. York 1961
7. Hellwig Z., Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, PWN, Warszawa 1967
8. Kryszicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, Cz. 1. Rachunek prawdopodobieństwa, Cz. 2. Statystyka matematyczna, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007
9. Jasiulewicz H., Kordecki W., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2003

ZESTAWIENIE ROZKŁADÓW PRAWDOPODOBIENSTWA ZMIENNYCH LOSOWYCH

L.p.	Nazwa i oznaczenie zmiennej X	Typ zmiennej X	Rozkład prawdopodobieństwa lub gęstość prawdopodobieństwa	Wartość średnia (oczekiwana) $E(X)$	Odchylenie standardowe $V(X)$
1.	Rozkład dwupunktowy	dyskretny	$P(X=x_1) = p, P(X=x_2) = q$	$E(X) = x_1p + x_2q$	$V(X) = (x_1 - x_2)^2 pq$
2.	Rozkład dwumianowy (Bernoulliego)	dyskretny	$P_n(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k=1,2,\dots,n$	$E(X) = np$	$V(X) = npq$
3.	Rozkład Poissona	dyskretny	$P_n(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!, k=1,2,3,\dots$	$E(X) = \lambda$	
4.	Rozkład równomierny	dyskretny	$P(X = x_k) = p_k = 1/N, k=1,2,\dots,N$	$E(X) = \bar{X}_N = (1/N) \sum x_k$	$V(X) = S_N^2 = (1/N) \sum (x_k - \bar{X}_N)^2$
5.	Rozkład równomierny	ciągły	$f(x) = 1/(b-a), a \leq x \leq b; f(x) = 0, x - \text{pozostałe}$	$E(X) = 1/(a+b)/2$	$V(X) = (b-a)^2/12$
6.	Rozkład wykładniczy	ciągły	$f(x) = 0, x < 0; f(x) = a \exp(-ax), x \geq 0 (a > 0)$	$E(X) = 1/a$	$V(X) = 1/a^2$
7.	Rozkład gamma	ciągły	$f(x) = 0, x < 0; f(x) = (a^p/\Gamma(p))x^{p-1} \exp(-ax), x \geq 0 (a > 0)$	$E(X) = p/a$	$V(X) = p/a^2$
8.	Rozkład normalny $N(m, \sigma)$	ciągły	$f(x) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma) \exp[-(x-m)^2/(2\sigma^2)]$	$E(X) = m$	$V(X) = \sigma^2$
9.	Rozkład normalny 2-wymiarowy	ciągły	$f(x,y) = (1/\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_1\sigma_2) \exp[-1/2(1-\rho^2) \times ((x-m_1)^2/\sigma_1^2 - 2\rho(x-m_1)(y-m_2)/\sigma_1\sigma_2 + (y-m_2)^2/\sigma_2^2)]$		
10.	Rozkład chi-kwadrat χ_n^2	ciągły	$k_n(x) = 0, x \leq 0; k_n(x) = 1/(2^{n/2}\Gamma(n/2))x^{n/2-1}e^{-x/2}$	$E(\chi_n^2) = n$	$V(\chi_n^2) = 2n$
11.	Rozkład t -Studenta t_n	ciągły	$f_n = \Gamma((n+1)/2) / (\sqrt{n\pi} \Gamma(n/2)) \times 1/(1+t^2/n)^{(n+1)/2}$	$E(t_n) = 0$	$V(t_n) = n/(n-2), n > 2$

MMIL II

Część trzecia. PROBABILISTYKA - wprowadzenie

- 1. Prawdopodobieństwo zdarzeń**
- 2. Zmienne losowe jednowymiarowe**
- 3. Zmienne losowe dwu(wielo)wymiarowe**
- 4. Wektory losowe i ciągi losowe**
- 5. Procesy stochastyczne – wstęp**
- 6. Wprowadzenie do statystyki matematycznej**
 - 6.1 Podstawowe pojęcia i twierdzenia
 - 6.2 Estymacja
 - 6.3 Weryfikacja hipotez statystycznych

Literatura pomocnicza

Wykaz rozkładów prawdopodobieństwa

1. Prawdopodobieństwo zdarzeń

Pojęcia pierwotne :

- zdarzenie elementarne (ozn. ω),
- przestrzeń (zbiór) zdarzeń elementarnych (ozn. Ω).

Definicja. Zdarzenie losowe (krótko: zdarzenie) podzbiór zdarzeń elementarnych w przestrzeni Ω (ozn. A, B, \dots) należących do pewnej rodziny \mathcal{S} podzbiorów przestrzeni Ω .

! Jeżeli Ω co najwyżej przeliczalny, to \mathcal{S} rodzina wszystkich podzbiorów Ω

!! Jeżeli Ω – przestrzeń euklidesowa arytmetyczna \mathcal{R}^n , to $\mathcal{S} = \mathcal{B}$ – rodzina wszystkich zbiorów borelowskich w \mathcal{R}^n (patrz MR ¹)

Niech $A, B \dots$ – zdarzenia. Zdarzenia podlegają działaniom na zbiorach:

- 1) Zdarzenie niemożliwe – $A = \emptyset \subset \Omega$, zdarzenie pewne – $A = \Omega$
- 2) Zdarzenie A zawarte w zdarzeniu B , $A \subset B$
- 3) Alternatywa zdarzeń A i B , $A \cup B$
- 4) Koniunkcja zdarzeń A i B , $A \cap B$
- 5) Różnica zdarzeń A i B , $A - B$
- 6) Zdarzenia A i B wykluczające się, $A \cap B = \emptyset$
- 7) Zdarzenie przeciwne do A , $\bar{A} = \Omega - A$.

Definicja. \mathcal{S} – przestrzeń zdarzeń elementarnych, \mathcal{S} – rodzina zdarzeń (losowych).

Niech $P : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ spełnia warunki:

1° $\forall A \in \mathcal{S} \quad P(A) \geq 0$

2° $P(\Omega) = 1$,

3° $A_n \in \mathcal{S} \quad \forall n \in \mathcal{N}$ i $A_n \cap A_m = \emptyset$ dla $n \neq m$, to $P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$.

Funkcję P nazywa się rozkładem prawdopodobieństwa na \mathcal{S} (na Ω). Liczbę $P(A)$ dla $A \in \mathcal{S}$ nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A .

Podstawowe właściwości rozkładu prawdopodobieństwa:

- 1) $P(\emptyset) = 0$, 2) $P(\Omega) = 1$, 3) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,
- 4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- 5) $A \subset B$; to $P(A) \leq P(B)$,
- 6) $\forall A \in \mathcal{S} \quad P(A) \leq 1$,
- 7) A_1, \dots, A_n ciągu zdarzeń parami rozłącznych ($A_n \cap A_m = \emptyset$ dla $n \neq m$), to $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$,

¹ MR – materiał rozszerzony

Definicja. Układ (Ω, \mathcal{S}, P) nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**.

Przykłady rozkładów prawdopodobieństwa

A. Niech Ω będzie przestrzenią przeliczalną: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$. Funkcję P określamy następująco:

$$P(\{\omega_i\}) = p_i,$$

gdzie (p_i) jest danym ciągiem liczbowym – takim, że

$$p_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Układ liczb (p_1, p_2, \dots) definiuje rozkład prawdopodobieństwa. Mamy bowiem:

jeśli $A \subset \Omega$ i $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots\}$, to

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \dots) = P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + \dots = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots.$$

Jeżeli Ω jest przestrzenią skończoną:

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, to

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

W szczególności można przyjąć (rozkład równomierny)

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Wtedy, jeśli $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$ (A – k -elementowe), to $P(A) = \frac{k}{n}$.

Liczbę k nazywamy liczbą zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A .

B. Niech $\Omega = \mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$ i $\mathcal{S} = \mathcal{B}$ – rodzina zbiorów borelowskich w \mathcal{R} (patrz MR²).

Niech f jest dana funkcją nieujemną ($f \geq 0$), całkowalną na dowolnym przedziale (a, b) i taką, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1$$

Niech

$$(*) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi,$$

Rozkład prawdopodobieństwa P na \mathcal{B} definiujemy następująco: $P([a, b)) = F(b) - F(a)$ dla dowolnego $[a, b)$ ($a < b$). Wykazuje się (twierdzenie o rozszerzeniu miary), że P rozszerza się jednoznacznie na wszystkie podzbiory – elementy rodziny borelowskiej \mathcal{B} podzbiorów \mathcal{R} .

Funkcję F nazywamy dystrybuantą, a f gęstością prawdopodobieństwa na \mathcal{R} .

² MR – materiał rozszerzony

Definicja. Jeśli $P(B) > 0$, to prawdopodobieństwem (warunkowym) $P(A/B)$ zdarzenia A pod warunkiem zdarzenia B nazywamy

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

Wzór powyższy określa tzw. warunkowy rozkład prawdopodobieństwa zdarzeń z S .

Twierdzenie (o prawdopodobieństwie zupełnym). Jeżeli A_i (i przebiega przeliczalny lub skończony zbiór indeksów) tworzą układ zupełny zdarzeń, tzn.

$$\bigcup_i A_i = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j, \quad P(A_i) > 0 ,$$

to dla dowolnego zdarzenia B jest

$$P(B) = \sum_i P(B/A_i) P(A_i).$$

Twierdzenie (Bayesa). Jeżeli A_i co najwyżej przeliczalny ciąg zdarzeń tworzący układ zupełny ($\bigcup_i A_i = \Omega$ i A_i parami rozłączne) oraz $P(B) > 0$, to dla każdego zdarzenia A_j ze zbioru (A_i) jest

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_i P(A_i)P(B/A_i)} .$$

Definicja. Zdarzenia A i B są niezależne, jeżeli

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

! Jeżeli A i B są niezależne i $P(B) > 0$, to

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) ,$$

a jeśli $P(A) > 0$, to

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B) .$$

2. Zmienne losowe jednowymiarowe

Niech (Ω, \mathcal{S}, P) – przestrzeń probabilistyczna, gdzie Ω – przestrzeń zdarzeń elementarnych, \mathcal{S} – rodzina zdarzeń, P – rozkład prawdopodobieństwa na \mathcal{S} (na Ω).

Definicja. Przez zmienną losową (jednowymiarową) na Ω rozumiemy funkcję rzeczywistą X określoną na Ω ($X: \Omega \rightarrow \mathcal{R}$) taką, że dla każdej $x \in \mathcal{R}$

$$A_x = \{\omega \in \Omega; X(\omega) < x\} \in \mathcal{S},$$

(czyli A_x jest zdarzeniem dla każdej liczby rzeczywistej x).

! Jeżeli Ω jest co najwyżej przeliczalna, to każde przekształcenie zbioru Ω w zbiór liczbowy w $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$ jest zmienną losową.

Definicja. Niech X zmienna losowa na przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{S}, P) i niech \mathcal{B} rodzina borelowska³ zbiorów na $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$. Niech P_X funkcja zdefiniowana na \mathcal{B} wzorem

$$P_X(\mathcal{A}) = P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in \mathcal{A}\}), \mathcal{A} \in \mathcal{B}$$

Funkcję P_X nazywamy rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X .

Definicja. Dystrybuantą zmiennej losowej X (wyznaczoną przez rozkład P_X) nazywamy:

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) < x\}) = P_X(-\infty, x).$$

Definicja. Zmienna losowa X jest typu skokowego (jest zmienną dyskretną), jeżeli istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór wartości $\mathcal{X} \subset \mathcal{R}$ tej zmiennej losowej (tzn. $X(\Omega) = \mathcal{X}$, $P_X(\mathcal{X}) = 1$). W szczególnym przypadku X jest typu skokowego, gdy \mathcal{X} jest skończony.

Elementy x_k zbioru \mathcal{X} , czyli gdy $\mathcal{X} = (x_1, x_2, \dots)$ (zbiór przeliczalny) lub $\mathcal{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (zbiór skończony) są wartościami zmiennej losowej X .

Uwaga. Niech

$$p_k \stackrel{\text{ozn}}{=} p(x_k) = P_X(\{x_k\}) = P(\{\omega; X(\omega) = x_k\}) \stackrel{\text{ozn}}{=} P(X = x_k) \geq 0$$

i niech

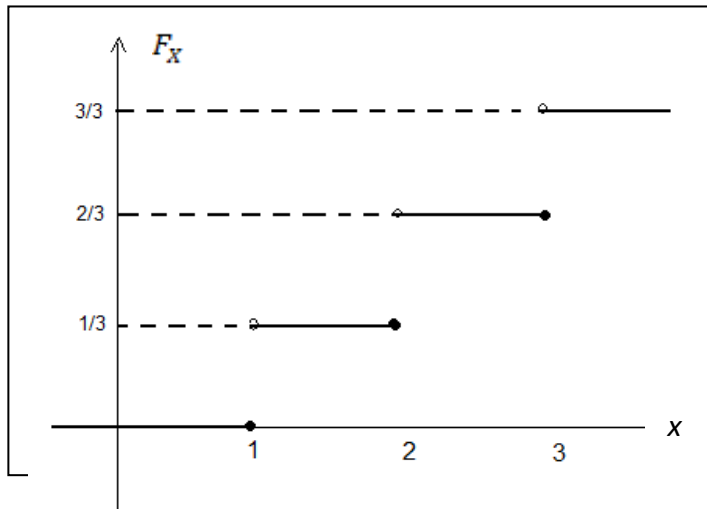
$$\sum_k p_k = 1.$$

Zbiór (p_k) liczb $p(x_k)$ wyznacza rozkład prawdopodobieństwa P_X zmiennej typu skokowego (dyskretnej) X . Dystrybuanta F_X zmiennej X jest funkcją schodkową

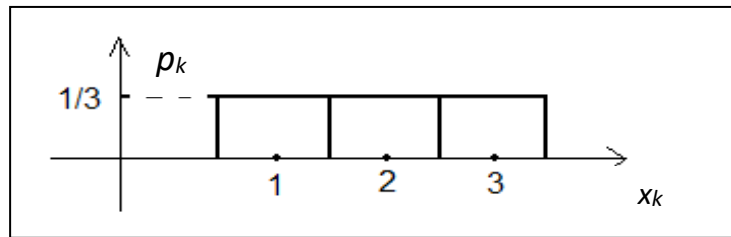
³ Rodzina borelowska \mathcal{B} (rodzina zbiorów borelowskich) – przeliczalnie addytywna rodzina zbiorów w \mathcal{R} zawierająca wszystkie zbiory otwarte (przeliczalnie addytywna rodzina zbiorów \mathcal{B} :

$$A \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{R} - A \in \mathcal{B}, \emptyset \in \mathcal{B}, \forall i \in \mathcal{N} A_i \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{B}$$

(lewostronnie ciągłą) o skokach p_k dla $x = x_k$ (por. rys. przy $n=3$, $p=1/3$). Suma skoków dystrybuanty F_X jest równa 1.



Wygodną formą prezentacji zmiennej dyskretnej X o skończonym zbiorze wartości jest histogram, czyli wykres funkcji przedziałami stały, o wartościach p_k , przy czym x_k są środkami podstaw prostokątów przedstawiających histogram. Na przykład, dla $i = 1, 2, 3$ oraz $p_i = 1/3$ – histogram ja na rys..



Założmy teraz, że zbiór \mathcal{X} jest nieprzeliczalny i niech $\mathcal{X} = \mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$.

Definicja. Zmienna losowa X o dystrybuancie F nazywamy zmienną losową typu ciągłego, jeżeli istnieje funkcja $f \geq 0$ na \mathcal{R} i taka, że $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = 1$ oraz

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du .$$

Funkcję f nazywamy gęstością prawdopodobieństwa zmiennej X .

Podstawowe właściwości dystrybuanty zmiennej losowej

1) Jeżeli X dowolna zmienna losowa, to $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, $F(x) \in [0, 1] \forall x \in \mathcal{R}$, F – lewostronnie ciągła na \mathcal{R} .

2) Jeżeli X zmienna losowa typu skokowego, to

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k) = \sum_{x_k < x} p_k \text{ – funkcja „schodkowa” .}$$

3) Jeżeli X zmienna losowa typu ciągłego, to $F(x)$ ciągła na zbiorze \mathcal{R} i $F'(x) = f(x)$ w punktach ciągłości f .

4) W przypadku zmiennej losowej typu ciągłego jest: $P((a,b)) = P([a,b]) = P([a,b)) = P(a,b] = F(b) - F(a)$ (dla dowolnych $a < b \in \mathcal{R}$).

Przykłady rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych

1) Zmienna losowa X ma rozkład jednopunktowy, jeżeli $\mathcal{X} = \{x_0\}$ i $p(x_0) = P(\{\omega: X(\omega) = x_0\}) = 1$.

2) Jeżeli $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$ i $p(x_1) = P(\{\omega: X(\omega) = x_1\}) = p$, $p(x_2) = P(\{\omega: X(\omega) = x_2\}) = q = 1-p$ ($0 < p < 1$), to zmienna X ma rozkład dwupunktowy.

3) Niech $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ i $p_i = 1/n$. Zmienna losowa typu dyskretnego ma tzw. rozkład równomierny

4) Niech $f(x) = 1/(b-a)$, $x \in [a, b]$ oraz $f(x) = 0$, $x \notin [a, b]$. Wtedy f jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej typu ciągłego, zwanego rozkładem jednostajnym lub równomiernym lub prostokątnym. Dystrybuantę dla tego rozkładu przedstawia poniższa funkcja „klamrowa”

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} .$$

5) Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład gamma, jeżeli gęstością prawdopodobieństwa tej zmiennej jest:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}, & x > 0 \end{cases} .$$

Symbol $\Gamma(p)$ oznacza tzw. funkcję gamma Eulera:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx .$$

Funkcja Γ jest uogólnieniem pojęcia „silnia”. Mianowicie, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(1) = 1$.

Dla $p = 1$ rozkład gamma nazywa się rozkładem wykładniczym.

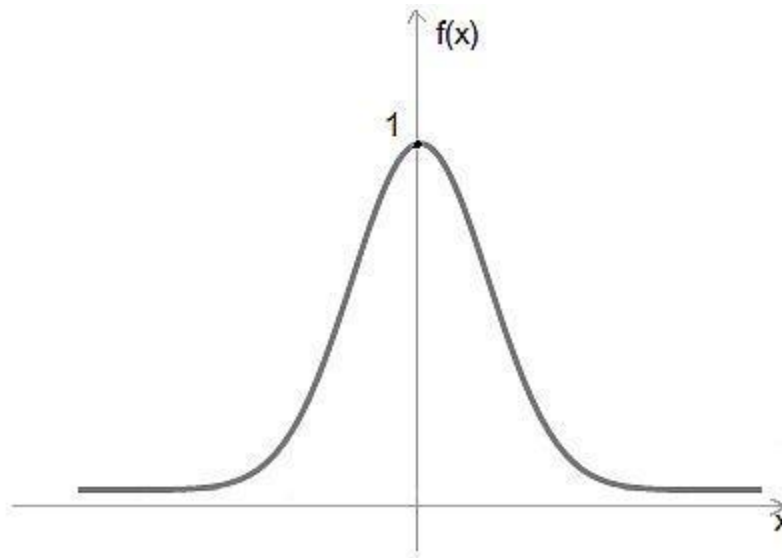
6) Niech $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(x-m)^2]$, $\sigma > 0$, m - dowolne, $x \in \mathcal{R}$. Funkcja f jest

gęstością ważnego rozkładu prawdopodobieństwa zwanego normalnym $N(m, \sigma)$ ($N(0, 1)$ jest tzw. rozkładem standardowym). Wykres funkcji f nazywa się krzywą

Gausa. Stablicowana jest funkcja $\Phi(x) = \int_0^x f(u) du$, przy $m = 0$ i $\sigma = 1$, gdyż

dystrybuanta dla rozkładu standardowego wyraża się wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0,5 + \Phi(x), & x \geq 0 \\ 0,5 - \Phi(-x), & x < 0 \end{cases}$$



Definicja. Wartością przeciętną (wartością oczekiwaną) zmiennej losowej X , oznaczaną symbolem $E(X)$, nazywamy wielkość liczbową określoną następująco (jeśli istnieje):

1) X jest zmienną losową typu skokowego (dyskretnego), to

$$E(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k x_k p(x_k);$$

2) X jest typu ciągłego o gęstości prawdopodobieństwa f , to

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Twierdzenie. Jeżeli zmienna losowa $Y = g(X)$, gdzie X jest zmienną losową, oraz istnieją $E(X)$ i $E(Y)$, to

1° w przypadku, gdy X jest typu skokowego o co najwyżej przeliczalnym zbiorze wartości $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, jest

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_k g(x_k) p(x_k);$$

2° w przypadku, gdy X jest typu ciągłego o gęstości prawdopodobieństwa f

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

Twierdzenie. Jeżeli dla zmiennej losowej X istnieje $E(X)$, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ istnieje $E(aX+b)$ i $E(aX+b) = aE(X)+b$.

Definicja. Wariancją zmiennej losowej X nazywany

$$V(X) \stackrel{\text{def}}{=} E([X - E(X)]^2)$$

(jeśli istnieje). Natomiast

$$\sigma(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{V(X)}$$

nazywamy odchyleniem standardowym zmiennej losowej X (jeśli istnieje $V(X)$).

Twierdzenie. Niech X będzie zmienną losową o wariancji $V(X)$. Wtedy

1) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$,

2) dla dowolnych $a, b \in \mathcal{R}$, $V(aX + b) = a^2V(X)$,

Uwaga. Niech $V(X) > 0$ wariancja zmiennej losowej X , a $E(X)$ jej wartość oczekiwana.

Wtedy zmienna standaryzowana $Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ ma następujące charakterystyki

$E(Y) = 0, V(Y) = 1$.

Definicja. Kwantylem rzędu p ($0 < p < 1$) zmiennej losowej X o dystrybuancie F nazywamy taką liczbę x_p , że $F(x_p) \leq p \leq F(x_p^+)$. Kwantyl rzędu $p = 1/2$ nazywamy medianą.

3. Zmienne losowe dwu(wielo)wymiarowe

Niech (Ω, \mathcal{S}, P) przestrzeń probabilistyczna. Na przykładzie zmiennej dwuwymiarowej, oznaczanej przez (X_1, X_2) przedstawimy główne pojęcia i zagadnienia do rozwiązania, właściwe dla zmiennych wielowymiarowych. Natomiast zagadnienia specyficzne tylko dla zmiennej dwuwymiarowej dotyczyć będą zmiennej oznaczanej przez (X, Y) .

Definicja. Niech (Ω, \mathcal{S}, P) przestrzeń probabilistyczna i niech

$\Omega \ni \omega \rightarrow \mathbf{X} = (X_1, X_2) \in \mathcal{R}^2$. Układ funkcji (X_1, X_2) na Ω nazywamy

dwuwymiarową zmienną losową (\mathbf{X} nazywamy wektorem losowym o dwóch składowych), jeśli

$$(*) \{ \omega \in \Omega : (X_1(\omega), X_2(\omega)) \in A \} \in \mathcal{S}$$

dla każdego zbioru A rodziny borelowskiej \mathcal{B} w \mathcal{R}^2 (najmniejsza rodzina przeliczalnie addytywna zbiorów, zawierająca zbiory otwarte w \mathcal{R}^2).

! Niech (X_1, X_2) dwuwymiarowa zmienna losowa ($\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ wektor losowy).

Wtedy X_i ($i = 1, 2$) są jednowymiarowymi zmiennymi losowymi. Na odwrót, jeśli X_1, X_2 zmienne losowe na Ω , to (X_1, X_2) dwuwymiarowa zmienna losowa, jeśli spełniony jest warunek (*).

Definicja. Niech $P_{\mathbf{X}}(A) = P(\{ \omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) \in A \})$, $A \in \mathcal{B}$ Funkcję tę nazywamy rozkładem prawdopodobieństwa wektora losowego \mathbf{X} (zmiennej losowej dwuwymiarowej (X_1, X_2)) na Ω , indukowanym przez rozkład prawdopodobieństwa P na Ω . Funkcję

$F_X(\mathbf{x}) = P_X(\{x'_1 < x_1, x'_2 < x_2\}) = P(\{\omega: X_1(\omega) < x_1, X_2(\omega) < x_2\})$, przy $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2$ nazywamy dystrybuantą wektora losowego \mathbf{X} (zmienną losową dwuwymiarową \mathbf{X}).

Uwaga. Odnośnie dwuwymiarowej zmiennej losowej stosować będziemy głównie tradycyjne oznaczenia: (X, Y) , $P_{(X, Y)}$, $F_{(X, Y)} = F_{(X, Y)}(X < x, Y < y) = P(\{\omega: X(\omega) < x, Y(\omega) < y\})$. Przy tym wzór $P_{(X, Y)}(\{(x, y): x_1 \leq x < x_2, y_1 \leq y < y_2\}) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$ określa (definiuje) rozkład prawdopodobieństwa za pomocą dystrybuanty.

! Zmienne dwuwymiarowe mogą również być, m.in. typu skokowego i ciągłego.

Definicja. Mówimy, że wektor losowy \mathbf{X} jest typu skokowego (typu dyskretnego), jeżeli $\mathbf{X}(\Omega) = \mathcal{X}$ jest co najwyżej przeliczalny oraz $P(\mathcal{X}) = 1$. Jeżeli $\mathbf{X} = (X, Y)$, to $\mathcal{X} = \{(x_i, y_j); i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots\}$.

! Jeżeli $p_{ij} > 0$, $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$, $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$, to układ liczb (p_{ij}) określa rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y) .

Definicja. Zmienna losowa (X, Y) jest typu ciągłego, jeśli istnieje funkcja $f(x, y)$

nieujemna – taka że $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv = 1$ i taka, że $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$ jest dystrybuantą zmiennej (X, Y) . Funkcję f nazywamy gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej (X, Y) .

Przykłady:

1) Funkcja $f(x, y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)}$, $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ i $f(x, y) = 0$ dla pozostałych $(x, y) \in \mathcal{R}^2$ jest gęstością rozkładu ciągłego prawdopodobieństwa zwanego rozkładem jednostajnym (równomiernym).

2) Zmienna losowa (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny o gęstości równej

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x-m_1}{\sigma_1}\frac{y-m_2}{\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$(\sigma_1, \sigma_2 > 0, \rho^2 < 1)$ (ozn. $N(m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$).

Definicja. Niech (X, Y) zmienna losowa dwuwymiarowa o dystrybuancie $F(x, y)$.

Funkcje $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$, $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$ nazywamy

dystrybuantami brzegowymi zmiennej (X, Y) , określającymi brzegowe rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych X i Y .

! Jeżeli $f(x, y)$ jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej (X, Y) , to

$f_X(x) = \int_{\mathcal{R}} f(x,y) dy$, $f_Y(y) = \int_{\mathcal{R}} f(x,y) dx$ są gęstościami brzegowych rozkładów prawdopodobieństwa o dystrybuantach F_X i F_Y .

!! Jeżeli (X,Y) jest dwuwymiarową zmienną losową typu skokowego o rozkładzie prawdopodobieństwa określonym liczbami $p(x_i, y_j) = P(X=x_i, Y=y_j)$, to $p_X(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j)$, $p_Y(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)$ wyznaczają odpowiednio brzegowe rozkłady prawdopodobieństwa.

Przykład.

x \ y	y_1	y_2	y_3	$P_X(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j)$
x_1	$p(x_1, y_1) = \frac{1}{12}$	$p(x_1, y_2) = \frac{1}{12}$	$p(x_1, y_3) = \frac{4}{12}$	$p_X(x_1) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
x_2	$p(x_2, y_1) = \frac{1}{12}$	$p(x_2, y_2) = \frac{1}{12}$	$p(x_2, y_3) = \frac{4}{12}$	$p_X(x_2) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
$P_Y(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)$	$p_Y(y_1) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$p_Y(y_2) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$p_Y(y_3) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$	1

Przykład. Zmienna losowa (X,Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny o gęstości

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x-m_1}{\sigma_1}\frac{y-m_2}{\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

($\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\rho^2 < 1$). Wtedy (po przekształceniach)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-m_1)^2\right],$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_2^2}(y-m_2)^2\right]$$

są gęstościami prawdopodobieństwa rozkładów brzegowych. Są to rozkłady jednowymiarowe normalne $N(m_1, \sigma_1)$ i $N(m_2, \sigma_2)$.

Definicja. Zmienne losowe X_1, X_2 w wektorze losowym $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ nazywamy niezależnymi, jeśli dla dowolnych zbiorów borelowskich A_1, A_2 zdarzenia

$$Z_i = \{\omega \in \Omega: X_i(\omega) \in A_i\}, \quad i = 1, 2$$

są niezależne, a w szczególności

$$P_{\mathbf{X}}(\mathbf{X} \in A) = P_{X_1}(X_1 \in A_1) \cdot P_{X_2}(X_2 \in A_2)$$

przy $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ oraz $A = A_1 \times A_2$.

! Dla niezależnych zmiennych losowych X i Y wektora losowego $\mathbf{X} = (X, Y)$ jest $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$, gdzie $F_X(x)$ i $F_Y(y)$ oznaczają dystrybuanty zmiennych X i Y a F dystrybuantę wektora losowego $\mathbf{X} = (X, Y)$. W szczególności, dla zmiennych losowych typu ciągłego jest:

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y),$$

a dla zmiennej typu skokowego:

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$

Przykład. zmienne losowe X, Y brzegowe rozkładu normalnego zmiennej dwuwymiarowej (X, Y) są niezależne dla $\rho = 0$, gdyż tylko wtedy $f_X(x)f_Y(y) = f(x, y)$, gdzie $f(x, y)$ jest gęstością dwuwymiarowego rozkładu normalnego.

Definicja. Niech (X, Y) dwuwymiarowa zmienna losowa i niech $Z = g(X, Y)$ zmienna losowa jednowymiarowa. Wartością przeciętną (wartością oczekiwaną) zmiennej $Z = g(X, Y)$ nazywamy:

1) w przypadku zmiennej typu dyskretnego

$$E(g(X, Y)) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) p(x_i, y_j)$$

2) w przypadku zmiennej typu ciągłego

$$E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy .$$

Definicja. Niech l, k dowolne liczby całkowite nieujemne. Momentem rzędu $k+l$ zmiennej losowej (X, Y) nazywamy wielkość (jeśli istnieje):

$$m(X^k, Y^l) = E(X^k Y^l) ,$$

natomiast momentem centralnym rzędu $k+l$ nazywamy

$$\mu(X^k, Y^l) = E\left((X - m_X)^k (Y - m_Y)^l\right) ,$$

gdzie

$$m_X = m(X) \stackrel{\text{def}}{=} E(X) = E(X^1 Y^0) , \quad m_Y = m(Y) \stackrel{\text{def}}{=} E(Y) = E(X^0 Y^1) .$$

Definicja. Kowariancją zmiennej losowej (X, Y) (zmiennych losowych X i Y) nazywamy moment centralny rzędu 1+1:

$$\text{cov}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(X^1, Y^1) ,$$

a współczynnikiem korelacji zmiennych losowych X i Y nazywamy

$$\rho(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} ,$$

gdzie

$$\sigma_X^2 = V(X) = \mu(X^2Y^0), \quad \sigma_Y^2 = V(Y) = \mu(X^0Y^2)$$

($E(X)$, $E(Y)$ oraz $V(X)$, $V(Y)$ to *de facto* odpowiednio wartości przeciętne oraz wariancje zmiennych losowych brzegowych zmiennej dwuwymiarowej (X, Y)).

Twierdzenie.

- 1) Jeśli istnieją $E(X)$ i $E(Y)$, to $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
- 2) Jeżeli zmienne losowe X i Y są niezależne i istnieją $E(X)$ i $E(Y)$, to $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.
- 3) Jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne i istnieją momenty rzędu 2+0, 1+1, 0+2 zmiennej (X, Y) , to $\text{cov}(X, Y) = 0$ ($\rho(X, Y) = 0$).
- 4) Jeżeli istnieją momenty rzędu 2+0, 1+1, 0+2 zmiennej losowej (X, Y) i $Z = X + Y$ jest zmienną losową, to $V(Z) = E(Z - E(Z))^2 = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$.
- 5) Jeśli $\rho_{X,Y}$ jest współczynnikiem korelacji zmiennych losowych X, Y to $|\rho_{X,Y}| \leq 1$ ($|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$).
- 6) Jeżeli X, Y zmienne losowe, to dla dowolnych a, b, c, d ($a \neq 0$ i $c \neq 0$) jest $|\rho_{X,Y}| = |\rho_{aX+b, cY+d}|$;
- 7) warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by istniały a, b ($a \neq 0$) takie, że $P(\{\omega: Y(\omega) = aX(\omega) + b\}) = 1$ jest $\rho_{X,Y}^2 = 1$.

! Jeżeli $\rho_{X,Y} = 0$ ($\text{cov}(X, Y) = 0$), to zmienne losowe X, Y nazywamy nieskorelowanymi (tw. odwrotne do p. 3) nie musi zachodzić).

Przykład. Jeżeli $X = N(m_X, \sigma_X)$, $Y = N(m_Y, \sigma_Y)$ oraz X i Y są niezależne, to $X + Y = N(m_X + m_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2})$.

Uwaga. Momenty centralne drugiego rzędu zmiennej losowej (X, Y) tworzą tzw. macierz kowariacyjną, symetryczną i dodatnio określoną $[\mu_{ij}]$ przy $i, j = X, Y$.

Definicja. Warunkowym rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X pod warunkiem zdarzenia B ($P(B) > 0$) nazywamy rozkład określony wzorem

$$P_X(A|B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} | B) = \frac{1}{P(B)} P(\{\omega : X(\omega) \in A\} \cap B), \quad A \in \mathcal{B}$$

(\mathcal{B} - rodzina borelowska zbiorów).

! Jeżeli (X, Y) dwuwymiarowa zmienna losowa typu dyskretnego

$$X: \Omega \rightarrow \{x_1, x_2, \dots\}, \quad Y: \Omega \rightarrow \{y_1, y_2, \dots\},$$

i $B_j = \{\omega: Y = y_j\}$, $A_i = \{\omega: X = x_i\}$, to mamy rozkład prawdopodobieństwa warunkowego $P_X(A_i|B_j) = p(x_i|y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$. Dla ustalonego y_j wielkości $p(x_i|y_j)$ ($i=1,2,\dots$) definiuje warunkowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X pod warunkiem $Y = y_j$. Wtedy dystrybuanta tej zmiennej jest równa $F(x|y_j) = \frac{P(X \leq x, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$.

!! Jeżeli (X, Y) dwuwymiarowa zmienna losowa typu ciągłego o gęstości f i dystrybuancie F , a f_Y gęstość zmiennej losowej Y , to dla ustalonego y definiujemy rozkład warunkowy zmiennej losowej X o gęstości $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ i dystrybuancie $F(x|y) = \int_{-\infty}^x f(u|y) du$.

Wprowadzimy teraz ważne pojęcie regresji.

Definicja. Niech (X, Y) zmienna losowa dwuwymiarowa, dla której istnieje kowariancja. Niech $E(X|y)$ oznacza wartość przeciętną zmiennej losowej X o rozkładzie warunkowym $P(X|y)$, a $E(Y|x)$ oznacza wartość przeciętną zmiennej losowej Y o rozkładzie warunkowym $P(Y|x)$. Zbiór punktów na płaszczyźnie Oxy o współrzędnych $(x, E(Y|x))$ nazywamy linią regresji (pierwszego rodzaju) zmiennej losowej Y względem zmiennej losowej X . I analogicznie, zbiór punktów na płaszczyźnie Oxy o współrzędnych $(E(X|y), y)$ nazywamy linią regresji (pierwszego rodzaju) zmiennej losowej X względem zmiennej losowej Y .

Przykład. Niech (X, Y) dwuwymiarowa zmienna losowa o rozkładzie normalnym o gęstości $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x-m_1}{\sigma_1}\frac{y-m_2}{\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$ z rozkładami brzegowymi o gęstościach

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-m_1)^2\right], f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_2^2}(y-m_2)^2\right].$$

Gęstości rozkładów warunkowych są zatem równe:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}\left(x-m_1-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)\right)^2\right],$$

a więc rozkładu normalnego $N\left(m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2), \sigma_1\sqrt{1-\rho^2}\right)$ oraz

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left(y-m_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1)\right)^2\right],$$

czyli rozkładu normalnego $N\left(m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1), \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)$. W efekcie mamy $E(X|y) = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)$, $E(Y|x) = m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1)$.

Zatem linie regresji są liniami prostymi: prosta regresji zmiennej X względem Y ma równanie $x = m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2)$, a prosta regresji Y względem X ma równanie $y = m_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - m_1)$.

! Dla przypadku dwuwymiarowej zmiennej losowej typu skokowego linie regresji są, co najwyżej przeliczalnymi zbiorami punktów płaszczyzny Oxy .

!! Jeśli zmienne losowe X, Y są niezależne, to $E(X|y) = E(X)$, $E(Y|x) = E(Y)$, czyli linie regresji są liniami prostymi równoległymi do osi Oy i Ox płaszczyzny Oxy .

Twierdzenie. Niech (X, Y) dwuwymiarowa zmienna losowa. Wtedy $E((Y - \varphi(X))^2) = \min$, gdy z prawdopodobieństwem 1 funkcja $\varphi(x) = E(Y|x)$, czyli $P(\{x: \varphi(x) = E(Y|x)\}) = 1$.

Uwaga. Twierdzenie ma znaczenie praktyczne. Jeżeli mamy zaobserwowane wartości (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) zmiennej losowej (X, Y) , dla których można przyjąć prawdopodobieństwo $\frac{1}{n} (p(x_i, y_i) = \frac{1}{n})$ i jeśli szukamy funkcji φ , która najlepiej oddaje zależność pomiędzy X i Y , czyli funkcji, w pobliżu której koncentrują się punkty (x_i, y_i) , to można przyjąć, że żądamy, by $\sum_{i=1}^n (x_i - \varphi(y_i))^2 = \min$, gdy $x = \varphi(y)$ lub $\sum_{i=1}^n (y_i - \varphi(x_i))^2 = \min$, gdy $y = \varphi(x)$.

Dla zmiennej losowej (X, Y) typu skokowego warunki powyższe są równoważne warunkowi z twierdzenia. Oznacza to, że jako φ należy przyjąć $E(Y|x)$.

Linie regresji pierwszego rodzaju są liniami prostymi tylko w szczególnych przypadkach. Z drugiej strony zależność linowa jest najprostszą. Dlatego, kosztem nawet pewnych niedokładności i większych błędów przybliżeń, poszukuje się najlepiej liniowej zależności pomiędzy zmiennymi X i Y .

Definicja. Prosta regresji (linią regresji drugiego rodzaju) zmiennej losowej Y względem zmiennej losowej X nazywamy prostą $y = \alpha x + \beta$, gdzie α i β liczby, dla których spełniona jest zależność $E((Y - \alpha x - \beta)^2) = \min$.

Twierdzenie. Prosta $y = \alpha x + \beta$ jest prostą regresji drugiego rodzaju zmiennej losowej Y względem zmiennej losowej X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\alpha = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \quad \beta = m_Y - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} m_X,$$

gdzie:

$m_X = E(X)$, $m_Y = E(Y)$ – wartości przeciętne,

$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)}$ – odchylenia standardowe X, Y ,

$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ - współczynnik korelacji X i Y .

Analogicznie prosta regresji (drugiego rodzaju) $x = \gamma y + \delta$ zmiennej X względem zmiennej Y jest przy $\gamma = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \delta = m_x - \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} m_y$.

! Współczynniki kierunkowe prostych regresji $\alpha_{Y,X} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \alpha_{X,Y} = \frac{1}{\rho} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ noszą nazwę współczynników regresji.

4. Wektory i ciągi losowe

W tym rozdziale dokonamy uogólnienia i rozszerzenia wiadomości z rozdz. 3 na dowolne układy zmiennych losowych – zmienne losowe n -wymiarowe i ciągi losowe – czyli wektory losowe o dowolnej liczbie składowych i układy przeliczalnie zmiennych losowych.

Definicja. Niech (Ω, \mathcal{S}, P) przestrzeń probabilistyczna. Układ funkcji

$\mathbf{X}: \Omega \rightarrow \mathcal{R}^n; \mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ nazywamy wektorem losowym (o n składowych) lub n -wymiarową zmienną losową, jeżeli

$$\{\omega \in \Omega: \mathbf{X}(\omega) \in A\} \in \mathcal{S}$$

dla każdego $A \in \mathcal{B}$ (\mathcal{B} - rodzina borelowska w przestrzeni \mathcal{R}^n).

Definicja. Funkcja $P_{\mathbf{X}}$ określona na rodzinie borelowskiej \mathcal{B} w przestrzeni \mathcal{R}^n

$$P_{\mathbf{X}}(A) = P(\{\omega \in \Omega: \mathbf{X}(\omega) \in A\}) \in \mathcal{S}, \quad A \in \mathcal{B}.$$

nosi nazwę rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego \mathbf{X} . Funkcja

$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \dots, x_n) = P_{\mathbf{X}}(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n), \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$ - nazywa się dystrybuantą wektora losowego \mathbf{X} .

Definicja. Niech $\mathbf{X}(\Omega) = \mathcal{X}$ co najwyżej przeliczalny i niech $P(\mathcal{X}) = 1$. Wektor losowy \mathbf{X} (zmienną losową n -wymiarową (X_1, \dots, X_n)) nazywamy typu dyskretnego (typu skokowego).

! Niech $\mathbf{X} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ i niech $p_{i_1 \dots i_n} \geq 0$ takie, że $\sum_{i_1, \dots, i_n} p_{i_1, \dots, i_n} = 1$. Przyjmując

$P_{\mathbf{X}}(\mathbf{X} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})) = p_{i_1 \dots i_n}$ określamy w ten sposób rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego \mathbf{X} typu dyskretnego.

Definicja. Niech $F(x_1, \dots, x_n)$ dystrybuanta wektora losowego $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Jeżeli

istnieje $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0, (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$ taka, że $\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$ oraz

$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$, to \mathbf{X} nazywamy wektorem losowym typu ciągłego.

Definicja. Niech $F(x_1, \dots, x_n)$ dystrybuanta wektora losowego (X_1, \dots, X_n) . Funkcje

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \dots \lim_{x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_n),$$

$$F_{X_2}(x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \dots \lim_{x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_n),$$

.....

$$F_{X_n}(x_n) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{x_{n-1} \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_n),$$

nazywamy dystrybuantami brzegowymi zmiennej n -wymiarowej (X_1, \dots, X_n) – dystrybuantami zmiennych (brzegowych) X_1, \dots, X_n .

Duże znaczenie w statystyce matematycznej mają poniżej omówione pokrótce rozkłady zmiennych losowych „generowane” przez układy zmiennych losowych niezależnych o rozkładach normalnych.

Definicja. Rozkładem chi-kwadrat o n stopniach swobody nazywamy rozkład prawdopodobieństwa sumy kwadratów n niezależnych zmiennych losowych o rozkładach $N(0,1)$.

Zmienną losową o rozkładzie chi-kwadrat o n stopniach swobody oznaczamy standardowo przez χ_n^2 , jej dystrybuantę przez K_n , a gęstość prawdopodobieństwa przez k_n

! Dla prawdopodobieństwa $P(\chi_n^2 < \chi_\alpha^2) = 1 - \alpha$ stabilizowane są χ_α^2 dla różnych n i α .

!! $E(\chi_n^2) = n, V(\chi_n^2) = 2n$

Definicja. Rozkładem t-Studenta o n stopniach swobody nazywamy rozkład prawdopodobieństwa ilorazu $t_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}}$, gdzie X i χ_n^2 są niezależnymi zmiennymi

losowymi, X ma rozkład normalny $N(0,1)$, a χ_n^2 ma rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody.

! Dla prawdopodobieństwa $P(|t_n| < t_\alpha) = 1 - \alpha$ stabilizowane są t_α dla różnych n i α .

!! $E(t_n) = 0; V(t_n) = n/(n-2), n > 2$.

Definicja. Niech (Ω, S, P) przestrzeń probabilistyczna i niech w tej przestrzeni określone są zmienne losowe X_1, X_2, \dots . Tworzą one ciąg losowy (X_n) , jeżeli (X_1, \dots, X_n) jest wektorem losowym dla każdego $n \in \mathcal{N}$.

Definicja. Zmienne losowe X_1, X_2, \dots w ciągu losowym (X_1, X_2, \dots) nazywamy niezależnymi, jeżeli zmienne X_1, \dots, X_n w wektorze losowym (X_1, \dots, X_n) są niezależne dla każdego $n \in \mathcal{N}$.

Uwaga. Ponieważ $(X_n(\omega))$ jest ciągiem liczbowym dla każdego $\omega \in \Omega$, można mówić o zbieżności punktowej ciągu losowego X_n , tzn. $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$), jeżeli $X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega)$ dla każdego $\omega \in \Omega$, czyli

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall \omega \in \Omega \exists N(\omega) \in \mathcal{N} \forall n > N(\omega) |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon.$$

Zbieżność może być też jednostajna, tj.

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N} \forall \omega \in \Omega \forall n > N |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon.$$

W probabilistyce wprowadza się jednak inne niż powyższe zbieżności ciągów losowych.

Definicja. Ciąg losowy (X_n) jest zbieżny do zmiennej losowej X według prawdopodobieństwa (stochastycznie, według miary), jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}) = 1.$$

Piszemy wtedy $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{wg prawd.}} X$.

! Powyższy warunek definicyjny jest równoważny następującemu:

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Definicja. Ciąg losowy (X_n) jest zbieżny do zmiennej losowej X z prawdopodobieństwem 1 lub inaczej prawie wszędzie, jeżeli

$$P(\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

co zapisujemy $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{z pr.1}} X$ lub $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{wg prawd.}} X$.

Twierdzenie. Jeżeli $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{z pr.1}} X$, to $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{wg prawd.}} X$.

Definicja. Niech $E(X_n^2) < \infty \forall n \in \mathcal{N}$ i $E(X^2) < \infty$. Ciąg losowy (X_n) jest zbieżny do zmiennej losowej X średniokwadratowo, jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - X)^2] = 0.$$

Piszemy wtedy $\text{l.i.m } X_n = X$.

Twierdzenie. Jeżeli $\text{l.i.m } X_n = X$, to $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{wg prawd.}} X$.

! Zauważmy, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - X)^2] = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} E|X_n - X| = 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E(X)$.

Definicja. Ciąg losowy (X_n) jest zbieżny do zmiennej losowej X według dystrybuant, jeśli ciąg dystrybuant (F_n) ciągu (X_n) jest zbieżny punktowo do dystrybuanty F zmiennej X w każdym punkcie ciągłości dystrybuanty F .

! Niech F_n będzie dystrybuantą zmiennej losowej X_n ($n = 1, 2, \dots$). Ciąg losowy (X_n) jest zbieżny do zera według prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Definicja. Niech (X_n) ciąg losowy. Jeżeli zmienna losowa Y jest granicą ciągu losowego (Y_n) , gdzie

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

(zbieżność w określonym sensie), to

$$Y = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$$

nazywamy szeregiem zmiennych losowych X_1, X_2, \dots .

Oprócz zbieżności ciągu (Y_n) sum częściowych ciągu (X_n) w probabilistyce wykorzystuje się zbieżność ciągu $(A_n Y_n)$, gdzie (A_n) jest ciągiem liczbowym zbieżnym do zera (ciąg wagowy) przy

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{lub} \quad Y_n = \sum_{i=1}^n (X_i - m_i),$$

przy czym $m_i = E(X_i)$ (jeśli $E(X_i)$ istnieją).

Definicja (prawo wielkich liczb). Niech (X_n) ciąg losowy taki, że istnieje $m_n = E(X_n)$ dla każdego n . Jeśli (przy $A_n = 1/n$)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{wg prawd.}} 0, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{z pr. 1}} 0$$

to mówimy, że dla ciągu (X_n) zachodzi odpowiednio słabe lub mocne prawo wielkich liczb.

Twierdzenie (prawo wielkich liczb Markowa). Jeżeli ciąg losowy (X_n) jest taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = 0,$$

to dla ciągu zachodzi słabe prawo wielkich liczb.

Twierdzenie (prawo wielkich liczb Kołgomorowa). Jeżeli (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wariancjach $V(X_n)$ spełniających warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(X_n)}{n^2} < \infty,$$

to dla ciągu losowego (X_n) zachodzi mocne prawo wielkich liczb.

Uwaga. Prawa wielkich liczb mówią o zbieżności sum zmiennych losowych ze współczynnikiem wygaszającym $A_n = 1/n$ do zmiennej o rozkładzie prawdopodobieństwa jednopunktowym. Współczynnik $A_n = 1/n$ jest zatem silnie wygaszający. Natomiast twierdzenia o zbieżności ciągów $(A_n Y_n)$ – tzw. centralne twierdzenia graniczne – formułują warunki zbieżności sum zmiennych losowych ze współczynnikiem mniej (słabiej) wygaszającym $A_n \sim 1/\sqrt{n}$, przy zbieżności do zmiennej o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Niech (X_n) ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach mających wartość przeciętną m i wariancję $\sigma^2 > 0$. Niech

$$U_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - m).$$

Zgodnie z wcześniejszymi wzorami jest

$$E(U_n) = 0, \quad V(U_n) = 1,$$

czyli zmienne losowe U_n są standaryzowane. Niech następnie

$$F_n(u) = P(U_n < u)$$

będzie dystrybuantą zmiennej U_n ($n = 1, 2, \dots$).

Twierdzenie (Linderberga-Levy'ego). Ciąg losowy (U_n) jest zbieżny według dystrybuant do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $N(0,1)$, czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp(-x^2/2) dx, \quad u \in \mathcal{R}.$$

! Twierdzenie to oznacza to, że praktycznie dla dużych n suma $\sum_{i=1}^n X_i$ ma w przybliżeniu rozkład $N(mn, \sigma\sqrt{n})$ lub inaczej średnia arytmetyczna $(\sum_{i=1}^n X_i)/n$ ma w przybliżeniu rozkład $N(m, \sigma/\sqrt{n})$.

5. Procesy stochastyczne – wstęp

Niech (Ω, \mathcal{S}, P) przestrzeń probabilistyczna i niech \mathcal{T} ustalony podzbiór \mathcal{R} (w szczególności cały \mathcal{R} : $\mathcal{T} = \mathcal{R}$). Niech dalej ω oznacza element zbioru Ω (zdarzenie elementarne w przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω), t (ewentualnie z indeksem: t_0, t_1, \dots) oznacza element zbioru \mathcal{T} , zwany chwilą lub zmienną czasową (także czysto umownie).

Definicja. Funkcję $X: \mathcal{T} \times \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ nazywamy funkcją losową jednowymiarową, jeśli

$$\forall t \in \mathcal{T} \quad \forall x \in \mathcal{R} \quad \{\omega: X(t, \omega) < x\} \in \mathcal{S},$$

czyli dla każdej ustalonej chwili t funkcja

$$X_t: \Omega \rightarrow \mathcal{R} \quad (X_t(\omega) = X(t, \omega), \quad \omega \in \Omega)$$

jest zmienną losową. Jeżeli \mathcal{T} jest przedziałem liczbowym (np. $\mathcal{T} = [t_0, \infty)$), to funkcję losową nazywamy procesem stochastycznym.

Uwaga. Jeżeli X jest funkcją losową, a \mathcal{T} zbiorem co najwyżej przeliczalnym to

- w przypadku, gdy $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_n\}$ (\mathcal{T} jest skończony) funkcja X jest de facto

n -wymiarową zmienną losową ($X_1 = X_{t_1}, \dots, X_n = X_{t_n}$),

- w przypadku, gdy $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \dots\}$ (\mathcal{T} jest przeliczalny) funkcja X jest ciągiem losowym ($X_1 = X_{t_1}, X_2 = X_{t_2}, \dots$).

Definicja. Niech $X = X(t, \omega), t \in \mathcal{T}, \omega \in \Omega$ będzie procesem stochastycznym. Funkcję $x = x(t) = X_\omega(t) = X(t, \omega), t \in \mathcal{T} (\omega \in \Omega - \text{ustalone})$ nazywamy realizacją procesu stochastycznego (dla zdarzenia elementarnego ω).

! Funkcja $x = x(t)$ nie ma charakteru losowego i jest odpowiednikiem wartości x zmiennej losowej X .

Przykład. Punkt materialny w chwili początkowej $t_0 = 0$ znajduje się na osi x w punkcie x_0 i następnie porusza się z prędkością stałą v_0 . Niech $x_0 = X_0(\omega)$, $v_0 = V_0(\omega)$, gdzie (X_0, V_0) jest dwuwymiarową zmienną losową. Położenie punktu na osi x w chwili t określa współrzędna $X(t, \omega) = X_0(\omega) + t V_0(\omega)$, która opisuje ruch losowy tego punktu jako proces stochastyczny. Realizacje tego procesu są funkcjami ruchu postaci $x(t) = x_0 + v_0 t, t \in \mathcal{T}$.

Definicja. Funkcję $\mathbf{X}: \mathcal{T} \times \Omega \rightarrow \mathcal{R}^k$ nazywamy funkcją losową k -wymiarową, jeśli $\mathbf{X}_t: \Omega \rightarrow \mathcal{R}^k$ ($\mathbf{X}_t(\omega) = \mathbf{X}(t, \omega), \omega \in \Omega, t - \text{ustalone}$) jest wektorem losowym (k -wymiarowym) dla każdej ustalonej chwili $t \in \mathcal{T}$. Jeżeli \mathcal{T} jest przedziałem liczbowym, to \mathbf{X} nazywamy wektorowym procesem stochastycznym (k -wymiarowym).

Przykład. Funkcja $\mathbf{X}(t, \omega) = (A(\omega) \cos \alpha t, B(\omega) \sin \alpha t), t \in \mathcal{T} = [0, \infty)$ jest procesem stochastycznym dwuwymiarowym opisującym ruch losowy punktu po płaszczyźnie (x, y) – po losowej elipsie o półosiach $A(\omega)$ i $B(\omega)$.

6. Wprowadzenie do statystyki matematycznej

Statystyka matematyczna zajmuje się masowymi zjawiskami losowymi – badaniem określonych cech tych zjawisk i tzw. wnioskowaniem statystycznym. Po wprowadzeniu zawierającym podstawowe pojęcia i twierdzenia statystyki matematycznej, omówimy pokrótce dwa główne zagadnienia tej statystyki: estymację (czyli szacowanie) wartości parametrów cechy elementów populacji oraz weryfikację hipotez statystycznych.

6.1 Podstawowe pojęcia i twierdzenia

Określoną zbiorowość (zbiór) elementów nazywamy populacją generalną. Określona cecha mierzalna populacji generalnej, to zmienna losowa X o rozkładzie prawdopodobieństwa P i dystrybuancie F . Natomiast próbka (próba) losowa pomierzonej cechy X (z wybranych losowo n elementów populacji), to zmienna losowa n -wymiarowa (X_1, X_2, \dots, X_n) , przy czym zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n są niezależne i o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa, takim jak mierzona (obserwowana) cecha X populacji.

Oznaczamy przez (x_1, x_2, \dots, x_n) wartości badanej cechy, pomierzone (zaobserwowane) w danej próbie losowej, czyli wartości zmiennej losowej (X_1, X_2, \dots, X_n) . Funkcję $F_n : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ określoną wzorem

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \text{Card}\{i : x_i < x; i = 1, 2, \dots, n\}$$

($\text{Card } A$ - licznosc / liczebność / liczba elementów zbioru A) nazywamy dystrybuantą empiryczną (dystrybuantę F cechy X nazywamy dystrybuantą teoretyczną). Zatem $F_n(x)$ jest frakcją tych elementów w próbce, dla których wartość badanej cechy jest mniejsza od x . Funkcja $F_n(x)$ jest więc dystrybuantą zmiennej losowej typu skokowego o rozkładzie prawdopodobieństwa P_n , o punktach skokowych x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Przy rozkładzie równomiernym wartości x_i badanej cechy jest $P_n(X = x_i) = 1/n$.

Parametry zmiennej losowej o dystrybuancie $F_n(x)$ nazywamy parametrami empirycznymi. Natomiast parametry zmiennej losowej X (cechy X populacji) noszą nazwę charakterystyk (parametrów) teoretycznych. Na przykład, empiryczną wartością przeciętną (lub średnią z próbki) jest

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i .$$

Wariancją empiryczną (średnim odchyleniem kwadratowym) jest

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2,$$

a momentem empirycznym (średnim odchyleniem) rzędu r jest

$$m_{r,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r, \quad (\mu_{r,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^r).$$

Wartości parametrów empirycznych $\bar{x}_n, s_n^2, m_{r,n}, \mu_{r,n}$ są funkcjami zaobserwowanych (pomierzonych) wartości x_1, x_2, \dots, x_n zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n , a więc są wartościami zmiennych losowych oznaczanych odpowiednio przez $\bar{X}_n, S_n^2, M_{r,n}, \mu_{r,n}$, które są funkcjami zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n . Funkcje te zwane są również statystykami próbki (próby).

Przez medianę empiryczną $X_{1/2,n}$ rozumiemy natomiast zmienną losową, której wartość $x_{1/2,n}$ dla danej próbki spełnia nierówność (patrz MR)

$$F_n(x_{1/2,n}) \leq \frac{1}{2} \leq F_n(x_{1/2,n}^+),$$

gdzie F_n jest dystrybuantą empiryczną.

Uwaga. Jest naturalnym oczekiwaniem, że wraz ze wzrostem liczebności próbki powinno się otrzymywać coraz lepszy obraz populacji generalnej. Istotnie, prawo wielkich liczb stwierdza, że wraz ze wzrostem n empiryczna wartość przeciętna jest zbieżna (odpowiednio) do wartości przeciętnej badanej cechy populacji generalnej. Poniższe twierdzenie rozszerza ten fakt.

Twierdzenie. Jeśli X_1, X_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach prawdopodobieństwa, mającymi skończony moment rzędu $2r$, a g jest funkcją określoną w przestrzeni \mathcal{R}^s , ciągłą w punkcie $x_1 = m_{i_1}, \dots, x_s = m_{i_s}$,

gdzie $m_{i_k} = E(X_i^{i_k})$ ($i_k \leq r$ dla $k = 1, \dots, s$), to zmienne losowe

$$Y_n = g(M_{i_1,n}, \dots, M_{i_s,n}),$$

gdzie

$$M_{i_k,n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^{i_k}, \quad (k = 1, \dots, s),$$

są z prawdopodobieństwem 1 zbieżne do $g(m_{i_1}, \dots, m_{i_s})$.

! Z twierdzenia wynika (na przykład), że wariancja empiryczna jako ciągła funkcja momentów jest z prawdopodobieństwem 1 zbieżna do wariancji rozważanej (badanej) cechy populacji generalnej.

!! Ponieważ dystrybuanta empiryczna F_n jest funkcją wyboru (losowania) próbki, więc jest zmienną losową. Prawdziwe jest przy tym twierdzenie (Kolmogorowa).

Twierdzenie. Jeżeli X_1, X_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych dystrybuantach F , a F_n jest dystrybuantą empiryczną oraz

$$D_n = \sup_{\mathcal{R}} |F_n(x; \omega) - F(x)| \quad (n \in \mathcal{N}),$$

to:

$$1) \quad P(\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0) = 1;$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} D_n < x) = Q(x), \quad \forall x \in \mathcal{R},$$

$$\text{gdzie } Q(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 x^2), & x > 0 \end{cases} \quad (Q(\xi) - \text{stabilizowana})$$

6.2 Estymacja

Estymacja to szacowanie nieznannej wartości parametru θ rozkładu prawdopodobieństwa cechy X elementów populacji generalnej. Poszukiwać będziemy statystyki, której wartości na wynikach obserwacji są możliwie bliskie szacowanej wartości parametru θ , czyli tzw. estymatora tego parametru.

Estymacja punktowa polega na wyznaczeniu z próbki wartości u_n estymatora U_n , którego rozkład prawdopodobieństwa zależy od estymowanego parametru.

Estymacja przedziałowa, to wyznaczanie na podstawie próbki takich wartości $\theta_a < \theta_b$ zależnych od wartości u_n estymatora U_n , by $P(\theta_a \leq \theta \leq \theta_b) = 1 - \alpha$.

Wartości estymatora U_n powinny być skupione w bliskim otoczeniu nieznannej rzeczywistej wartości parametru θ - przy tym estymator „najlepszy” powinien spełniać pewne warunki.

Definicja. Niech (X_1, \dots, X_n) – próbka losowa cechy X populacji generalnej. Estymator $U_n(\omega; \theta) = g(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega); \theta)$ parametru θ nazywamy:

1) zgodnym, jeśli jest on zbieżny według prawdopodobieństwa do parametru θ , tzn.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega : |U_n(\omega; \theta) - \theta| < \varepsilon\}) = 1;$$

2) nieobciążonym (asymptotycznie nieobciążonym), jeśli

$$\forall n \in \mathcal{N} \quad E(U_n) = \theta \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} E(U_n) = \theta);$$

3) najefektywniejszym, jeśli ze wszystkich estymatorów nieobciążonych ma najmniejszą wariancję.

! Estymator najefektywniejszy W_n ma wariancję, która spełnia równość $V(W_n) = V_{\min}$ w nierówności Rao – Cramera $V(U_n) \geq V_{\min}$, przy

$$a) \quad V_{\min} = \frac{1}{n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x; \theta) dx},$$

jeśli cecha X populacji jest zmienną losową typu ciągłego o gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f(x; \theta)$;

$$b) \quad V_{\min} = \frac{1}{n \sum_k \left(\frac{\partial \ln p(x_k; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 p(x_k; \theta)},$$

jeśli cecha X populacji jest zmienną losową typu dyskretnego o rozkładzie prawdopodobieństwa $P(X = x_k) = p(x_k; \theta)$.

! Empiryczną wartość przeciętną $U_n = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (średnia arytmetyczna z próby)

jest zgodnym i nieobciążonym estymatorem wartości przeciętnej $m = E(X)$ cechy X elementów populacji generalnej ($U_n = \bar{X}_n, \theta = m$). Ponadto $U_n = \bar{X}_n$ jest estymatorem najefektywniejszym parametru $m = E(X)$ dla większości znanych rozkładów prawdopodobieństwa cechy X .

!! Empiryczne odchylenie kwadratowe

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

jest zgodnym i asymptotycznie nieobciążonym estymatorem wariancji $\sigma^2 = V(X)$ cechy X populacji. Estymator zmodyfikowany

$$S_{\text{nieobc}}^2 = \frac{n}{n-1} S_n^2$$

jest już nieobciążony. Jest on asymptotycznie najefektywniejszy, ale w przypadku rozkładu normalnego cechy X . Natomiast, jeżeli znana jest wartość przeciętna m cechy X ($m = E(X)$), to jako estymator parametru σ^2 można przyjąć:

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2.$$

Estymator ten jest zgodny i nieobciążony oraz najefektywniejszy w przypadku rozkładu normalnego cechy X .

Uwaga. Praktycznymi sposobami tworzenia estymatorów są metoda momentów (metoda Pearsona) oraz metoda największej wiarygodności (metoda Fishera) –
– por. MR.

Uwaga (przedział ufności). Niech (X_1, \dots, X_n) n -elementowa próbka wartości rozpatrywanej cechy X i niech cecha ta ma rozkład prawdopodobieństwa typu

ciągłego, zależny od parametru θ o nieznannej wartości. Niech dalej \underline{U}_n i \bar{U}_n będą dwiema statystykami takimi, że

$$P(\{\omega: \underline{U}_n \leq \bar{U}_n\}) = 1.$$

Jeżeli dla danego $\alpha \in (0,1)$ spełniona jest równość

$$P(\{\omega: \underline{U}_n \leq \theta \leq \bar{U}_n\}) = 1 - \alpha,$$

to przedział $[\underline{U}_n, \bar{U}_n]$ nazywamy przedziałem ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1 - \alpha$.

Przedział ufności jest losowy, zależny od próbki. Oznacza to, że dla dużej serii próbek częstość zdarzenia polegającego na tym, że przedział ufności pokrywa nieznaną wartość parametru θ jest bliska wartości $1 - \alpha$.

Przedziały ufności konstruujemy w następujący sposób. Wybieramy estymator U_n parametru θ , którego rozkład prawdopodobieństwa dokładny lub asymptotyczny znamy. Dla danego α można znaleźć liczby a i b , dla których $P(a \leq U_n \leq b) = 1 - \alpha$. Jeżeli nierówność $a \leq U_n \leq b$ da się zastąpić równoważną $f_1(U_n) \leq \theta \leq f_2(U_n)$, to podstawiając $\underline{U}_n = f_1(U_n)$ oraz $\bar{U}_n = f_2(U_n)$ otrzymujemy przedział ufności na poziomie ufności $1 - \alpha$. Wybór a i b nie jest jednoznaczny. Dlatego w praktyce dobiera się a i b tak, by

$$P(U_n < a) \leq \frac{1}{2}\alpha, \quad P(U_n > b) \leq \frac{1}{2}\alpha.$$

Niech przykładowo cecha X ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, przy czym σ jest znane, a m nieznanne. Znajdziemy przedział ufności dla wartości przeciętnej m . Niech estymatorem m będzie średnia arytmetyczna z próby \bar{X}_n . Wiadomo, że ma ona rozkład normalny $N(m, \sigma/\sqrt{n})$. Korzystając z tablic możemy znaleźć dla danego α taką liczbę ε_α , by

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < \varepsilon_\alpha\right) = 1 - \alpha.$$

Oznacza to, że

$$P\left(\bar{X}_n - \varepsilon_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{X}_n + \varepsilon_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Przedział liczbowy

$$\left(\bar{X}_n - \varepsilon_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \varepsilon_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

jest więc przedziałem ufności dla parametru m na poziomie ufności $1 - \alpha$. Długość tego przedziału jest równa $2\varepsilon_\alpha \sigma / \sqrt{n}$. Zatem wraz ze wzrostem n otrzymujemy coraz dokładniejsze oszacowanie m .

Jeśli znamy m , a nie znamy σ , to wprowadzając zmienne losowe $Y = (X - m)/\sigma$ i $Y_k = (X_k - m)/\sigma$ stwierdzamy, że zmienna losowa Y ma rozkład $N(0,1)$, a zmienna losowa

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^n Y_k^2$$

ma rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody. Korzystając z tablic, możemy dla danego α znaleźć takie liczby χ_1^2, χ_2^2 , aby

$$P\left(\chi_1^2 < \sum_{k=1}^n Y_k^2 < \chi_2^2\right) = 1 - \alpha.$$

Wykorzystując S_0^2 jako estymator σ^2 można powyższą równość zapisać następująco:

$$P\left(\frac{nS_0^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{nS_0^2}{\chi_1^2}\right) = 1 - \alpha,$$

co oznacza, że jako przedział ufności dla parametru σ^2 można przyjąć

$$\left(\frac{nS_0^2}{\chi_2^2}, \frac{nS_0^2}{\chi_1^2}\right).$$

Natomiast, gdy nieznane są wartości obu parametrów m i σ rozkładu normalnego cechy X , to przedział ufności dla parametru m znajdujemy następująco. Jako estymator parametru m przyjmujemy średnią z próby \bar{X}_n oraz do wyznaczenia przedziału ufności zmienną losową

$$t = \frac{\bar{X}_n - m}{S_n} \sqrt{n-1},$$

która ma rozkład t -Studenta o $n - 1$ stopniach swobody. Korzystając z tablic można dla danego n i α znaleźć takie t_α , że $P(|t| < t_\alpha) = 1 - \alpha$, co oznacza, że

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}_n - m}{S_n} \sqrt{n-1}\right| < t_\alpha\right) = 1 - \alpha,$$

a po przekształceniach, że

$$P\left(\bar{X}_n - t_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{X}_n + t_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n-1}}\right) = 1 - \alpha.$$

Zatem poszukiwanym przedziałem ufności jest

$$\left(\bar{X}_n - t_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n-1}}, \bar{X}_n + t_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n-1}}\right),$$

gdzie

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Wreszcie, jeżeli cecha X elementów populacji ma nieznaną rozkład prawdopodobieństwa, ale wiadomo, że istnieją wartości przeciętne $m = E(X)$ oraz $\sigma^2 = V(X)$ (o nieznanach wartościach), to można wyznaczyć przedział ufności dla m , ale przy dużych wartościach n (liczebność próbki), aby można było skorzystać z twierdzeń granicznych. Wiadomo, że średnia arytmetyczna n niezależnych zmiennych losowych o takich samych rozkładach prawdopodobieństwa o wartości przeciętnej m i wariancji σ^2 ma rozkład asymptotycznie normalny $N(m, \sigma / \sqrt{n})$. Wtedy (na mocy twierdzenia) jako estymator parametru σ^2 można przyjąć S_n^2 . I wtedy, analogicznie jak w pierwszym przykładzie otrzymujemy dla m następujący przedział ufności

$$\left(\bar{X}_n - \varepsilon_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \varepsilon_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right),$$

gdzie ε_α znajdujemy z tablic dla rozkładu normalnego $N(0,1)$ przy

$$Y = \frac{\bar{X}_n - m}{S_n / \sqrt{n}}, \quad P(|Y| < \varepsilon_\alpha) = 1 - \alpha \bullet$$

6.3 Weryfikacja hipotez statystycznych

Omówimy pokrótce następujące zagadnienie: na podstawie dostępnych informacji o rozkładzie prawdopodobieństwa cechy X populacji generalnej (X – zmienna losowa) oraz na podstawie danych z próbki elementów tej populacji, należy rozstrzygnąć, do której z dwu rozłącznych podklas rozkładów prawdopodobieństwa danej klasy \mathbf{P} należy wybrany z tej klasy rozkład prawdopodobieństwa cechy X .

Jeżeli rozkłady klasy \mathbf{P} są wyznaczone przez podanie wartości parametru θ (lub wektora parametrów), mówimy wtedy, że znana jest postać rozkładu prawdopodobieństwa danej cechy elementów populacji. Klasę \mathbf{P} można zapisać w postaci

$$\mathbf{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$$

(Θ - przestrzeń parametrów), np. $P_\theta = N(0, \sigma)$ przy $\theta = \sigma$.

Przez hipotezę statystyczną rozumiemy każdy niepusty podzbiór klasy \mathbf{P} . Hipoteza parametryczna, to wskazanie rozkładu P_θ przez liczbowe podanie wartości θ_0 parametru θ ($H(\theta = \theta_0)$). Klasa \mathbf{P} jest zatem zbiorem hipotez możliwych (dopuszczalnych).

Przez hipotezę zerową (ozn. H_0) rozumiemy wskazaną hipotezę podlegającą weryfikacji; pozostałe, to hipotezy alternatywne (ozn. H_1). Na przykład, w przypadku hipotez parametrycznych: $H_0 = H(\theta = \theta_0)$, $H_1 = \Theta - H_0$. Jeżeli H_0 jest

jednoelementowa ($\theta = \theta_0$ – jedna konkretna wartość), to hipoteza zerowa jest prosta, jeżeli H_0 jest wieloelementowa, to hipoteza zerowa jest złożona.

Weryfikacja hipotezy zerowej:

- 1) wybór statystyki U , której rozkład prawdopodobieństwa (dokładny lub asymptotyczny) jest znany,
- 2) ustalenie zbioru \mathcal{W} tych wartości u statystyki U , których wystąpienie uważamy za zaprzeczenie hipotezy zerowej.

Statystykę U nazywamy testem hipotezy H_0 przeciw hipotezie alternatywnej H_1 , a zbiór \mathcal{W} – zbiorem krytycznym testu. Prawdopodobieństwo

$$P(U \text{ określa } \mathcal{W} | H_0) = \alpha,$$

tzn. prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, gdy jest ona prawdziwa, nazywamy poziomem istotności testu.

Testy służące do weryfikowania hipotez parametrycznych nazywamy testami parametrycznymi, a testy służące do weryfikowania hipotez nieparametrycznych – testami zgodności.

Przykład. Niech cecha X elementów populacji ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, w którym wartość σ jest znana. Pobrano próbkę n -elementową i zaobserwowano wartości (x_1, \dots, x_n) cechy X . Przyjmując poziom istotności α , weryfikujemy hipotezę $H_0(m = m_0)$ przeciw hipotezie alternatywnej $H_1(m \neq m_0)$. Wykorzystując, że średnia arytmetyczna \bar{X}_n z n niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych prawdopodobieństwa $N(m, \sigma)$ ma rozkład normalny $N(m, \sigma / \sqrt{n})$, jako test przyjmujemy statystykę \bar{X}_n . Zbiorem krytycznym jest w tym przypadku zbiór

$$\mathcal{W} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \frac{|\bar{x}_n - m_0|}{\sigma / \sqrt{n}} > \varepsilon_\alpha \right\},$$

gdzie

$$P\left(\frac{|\bar{x}_n - m_0|}{\sigma / \sqrt{n}} > \varepsilon_\alpha\right) = \alpha.$$

Zatem hipotezę H_0 odrzucamy, gdy $|\bar{x}_n - m_0| > \sigma \varepsilon_\alpha / \sqrt{n}$ i przyjmujemy, gdy

$$|\bar{x}_n - m_0| \leq \sigma \varepsilon_\alpha / \sqrt{n}.$$

Tytułem ilustracji zweryfikujemy hipotezę $H_0(m = 0)$ ($m_0 = 0$) przy $\sigma = 0,2$ i $\alpha = 0,05$ (z tablic rozkładu normalnego $N(0, 1)$ odczytujemy $\varepsilon_\alpha = 1,96$). Z pomiarów, przy $n = 9$, mamy $\bar{x}_n = 0,1$. Zatem $|\bar{x}_n - m_0| = |0,9/9 - 0| = 0,1 \leq \sigma \varepsilon_\alpha / \sqrt{n} = 0,13$.

Hipotezę H_0 na poziomie istotności 0,05 przyjmujemy.

Literatura pomocnicza

1. Plucińska A., Pluciński E.: Elementy probabilistyki, PWN, Warszawa 1990
2. Zubrzycki S.: Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, PWN, Warszawa 1970
3. Zieliński R., Tablice statystyczne, PWN, Warszawa 1972
4. Benjamin J.R., Cornell C.A.: Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów, WNT, Warszawa 1977
5. The R-project for statistical computing (www.r-project.org)
6. Graybill F. a., An introduction to Linear Statistical Models, vol. I, McGraw – Hill, York 1961
7. Hellwig Z., Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, PWN, Warszawa 1967
8. Kryszicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, Cz. 1. Rachunek prawdopodobieństwa, Cz. 2. Statystyka matematyczna, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007
9. Jasiulewicz H., Kordecki W., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2003

MR – materiał rozszerzony: Roman Nagórski, MMIL II, cz. III. Probabilistyka, Warszawa 2023

ZESTAWIENIE PRZYKŁADOWYCH ROZKŁADÓW ZMIENNYCH LOSOWYCH

L.p.	Nazwa i oznaczenie zmiennej X	Typ zmiennej X	Rozkład prawdopodobieństwa lub gęstość prawdopodobieństwa	Wartość średnia (oczekiwana) $E(X)$	Odchylenie standardowe $V(X)$
1.	Rozkład dwupunktowy	skokowy	$P(X=x_1) = p, P(X=x_2) = q$	$E(X) = x_1p + x_2q$	$V(X) = (x_1 - x_2)^2 pq$
2.	Rozkład dwumianowy (Bernoulliego)	skokowy	$P_n(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k=1,2,\dots,n$	$E(X) = np$	$V(X) = npq$
3.	Rozkład Poissona	skokowy	$P_n(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!, k=1,2,3,\dots$	$E(X) = \lambda$	
4.	Rozkład równomierny	skokowy	$P(X = x_k) = p_k = 1/N, k=1,2,\dots, N$	$E(X) = \bar{X}_N = (1/N) \sum x_k$	$V(X) = S_N^2 = (1/N) \sum (x_k - \bar{X}_N)^2$
5.	Rozkład równomierny	ciągły	$f(x) = 1/(b-a), a \leq x \leq b; f(x) = 0, x - \text{pozostała}$	$E(X) = 1/(a+b)/2$	$V(X) = (b-a)^2/12$
6.	Rozkład wykładniczy	ciągły	$f(x) = 0, x < 0; f(x) = a \exp(-ax), x \geq 0 (a > 0)$	$E(X) = 1/a$	$V(X) = 1/a^2$
7.	Rozkład gamma	ciągły	$f(x) = 0, x < 0; f(x) = (a^p / \Gamma(p)) x^{p-1} \exp(-ax), x \geq 0 (a > 0)$	$E(X) = p/a$	$V(X) = p/a^2$
8.	Rozkład normalny $N(m, \sigma)$	ciągły	$f(x) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma) \exp[-(x-m)^2 / (2\sigma^2)]$	$E(X) = m$	$V(X) = \sigma^2$
9.	Rozkład normalny 2-wymiarowy	ciągły	$f(x,y) = (1/\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_1\sigma_2) \exp[-1/2(1-\rho^2) \times ((x-m_1)^2/\sigma_1^2 - 2\rho(x-m_1)(y-m_2)/\sigma_1\sigma_2 + (y-m_2)^2/\sigma_2^2)]$		
10.	Rozkład chi-kwadrat χ_n^2	ciągły	$k_n(x) = 0, x \leq 0; k_n(x) = 1/(2^{n/2}\Gamma(n/2)) x^{n/2-1} e^{-x/2}$	$E(\chi_n^2) = n$	$V(\chi_n^2) = 2n$
11.	Rozkład t-Studenta t_n	ciągły	$f_n = \Gamma((n+1)/2) / (\sqrt{n\pi} \Gamma(n/2)) \times 1/(1+t^2/n)^{(n+1)/2}$	$E(t_n) = 0$	$V(t_n) = n/(n-2), n > 2$