BIBLJOTECZKA KÓŁKA MAT.-FIZ. U. U. J. Nr 1
pod redakcją
prof. dra Witolda Wilkosza

Dr Witold Wilkosz
profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego

Arytmetyka liczb całkowitych

System aksjomatyczny

Kraków 1932

BIBLJOTECZKA KÓŁKA MAT.-FIZ. U. U. J. Nr 1
pod redakcją
prof. dra Witolda Wilkosza

Dr Witold Wilkosz
profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego

Arytmetyka liczb całkowitych

System aksjomatyczny

Kraków 1932
Nakładem Kółka Matematyczno-Fizycznego U. U. J.
Skład Główny w księgarniach Gebethnera i Wolffa
Warszawa—Kraków—Lublin—Łódź—Poznań—Wilno—Zakopane.

Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem J. Filipowskiego

§ 1. Wstęp.

1. Przedmiotem naszych rozważań mają być liczby całkowite i związki między niemi zachodzące. Przeciętny niematematyk obrałby zapewne za punkt wyjścia ciąg:

$$1, 2, 3, 4\ldots,$$

ktoś jednak lepiej obeznany z matematyką elementarną uzna za bardziej korzystne rozważanie ciągu:

$$0, 1, 2, 3,\ldots$$

Tu i my zaczniemy. Ciąg powyższy będzie dla nas »ciągiem liczb całkowitych« lub »ciągiem naturalnym«.

Wszelkie znaki w tym ciągu, o ile mamy oczywiście na myśli ciąg napisany, oznaczają pewne pojęcia. — 0, 1, 2,... są to znaki poszczególnych pojęć. Treść tych pojęć jest nam, jak sądzimy (zresztą zbyt pochopnie), dostatecznie znana z życia codziennego. Atoli głębsza analiza tej treści opierała się całe wieki wysiłkom tak matematyków jak i filozofów. Dopiero wiek 19 i 20 przyniosły realne wyniki w tym kierunku. W szczególności koniec wieku 19 zdołał wreszcie zrozumieć strukturę budowy Arytmetyki Liczb Całkowitych, dając nam trzy znamienne prace, które pokierowały dalszemi losami tej teorji. W roku 1884 ukazują się G. Fregego: »Grundlagen der Arithmetik«, w 1887 R. Dedekinda: »Was sind und was sollen die Zahlen«, a w 1889 G. Peano pisze: »Arithmetices principia nova methodo exposita«. Wobec powyższych, ważne prace Hankela, H. Grassmanna, Kroneckera, Helmholtza i wielu innych schodzą już na dalszy plan. W rozbiór tych prac nie możemy się tu wdawać, gdyż historja teorji liczb całkowitych nie jest przedmiotem obecnego dziełka. W nowszych czasach literatura naszego przedmiotu jest aż do ostatnich lat bezustannie żywa, obejmuje ona tak wiele prac i dzieł, że niestarczyłoby miejsca, aby ją, choćby w zarysie, przedstawić. Odkładamy tę sprawę i przystępujemy do tego, co jedynie obchodzić nas będzie, a mianowicie do wykładu Arytmetyki liczb całkowitych.

Chcemy badać własności liczb całkowitych w pewien określony sposób. Chcemy, wychodząc z pewnych własności danych, które im przypisujemy, uzyskać inne drogą dowodu logicznego. Również chcemy, wychodząc z pewnych pojęć teorji liczb całkowitych, tworzyć inne drogą definicji logicznej.

2. Termin »dowód« posiada bardzo wiele znaczeń u ludzi. U nas ma on mieć znaczenie »dowodu logicznego« lub »wywodu«.

Logika dostarcza nam środków do tego, aby z pewnych zdań uzyskiwać drogą przeróbki logicznej inne i to w ten sposób, że gdyby owe zdania poddane przeróbce czyli przesłanki dowodu były prawdziwe, to i zdania otrzymane przez przerobienie logiczne czyli wnioski musiałyby być prawdziwe. Dowód logiczny zapewnia nas tylko, że z pewnych zdań wynikają inne, jak się tu krócej wyrażamy. O ile przesłanki były prawdziwe, to i wnioski będą prawdziwe. Dowód prowadzimy jednak formalnie, to znaczy bez osobnego zastrzeżenia, że przesłanki są prawdziwe.

Dowód można prowadzić i z przesłanek fałszywych i tak postępujemy czasem w t. zw. dowodach »ad absurdum«. Czy dowód jest poprawny czy nie, na to fałszywość czy prawdziwość przesłanek nie wpływa.

3. Definicja czyli określenie posiada dla nas też szczególne znaczenie definicji logicznej lub konstruktywnej. Logika daje nam w ręce środki, aby z danych pojęć czyli definiensów zbudować inne pojęcia czyli definienda. Będziemy uważać definiendum za znane, gdy znamy definiensy. Definicje budujemy też formalnie, nie oglądając się na to, czy znamy definiensy.

Tak dowód jak i definicja są to jedynie środki redukcyjne. Dowód sprowadza prawdziwość wniosku do prawdziwości przesłanek. Definicja przerzuca trudność poznania definiendum na kwestję znajomości definiensów.

4. Gdybyśmy mieli możność znania wszystkich twierdzeń Arytmetyki liczb całkowitych — a więc znali ich pełny zespół (A), moglibyśmy rozpocząć badanie wzajemnych stosunków logicznych między niemi. Przypuśćmy, że badania tego rodzaju zostałyby przeprowadzone w zupełności. Wiedzielibyśmy np., że jakieś twierdzenie »p« da się udowodnić przy pomocy twierdzeń »q«, »r«, »s« i środków logicznych. To znów okazałoby się może, że »q« da się udowodnić przy pomocy »p«, »r«, »t«... i logiki. Całość przedstawiałaby sieć splątaną nici i węzłów, łączących twierdzenia zespołu (A) ze sobą. Otóż pominąwszy, że zespołu (A) nie znamy w całości, że nie wiemy z góry co doń już należy, to

i tak w fikcji naszej uzyskalibyśmy jedynie chaotyczną plątaninę bez systemu.

5. Znając (A) moglibyśmy rozpocząć jednak bardziej celową robotę. Dobralibyśmy do zespołu (A) jeszcze drugi zespół (B) złożony ze wszystkich pojęć figurujących w twierdzeniach zespołu (A), prócz pojęć czysto logicznych i postawili takie oto pytanie: Czy nie można wybrać pewnej grupy twierdzeń z (A), powiedzmy (A') i jednocześnie grupy pojęć z pośród (B) — powiedzmy (B'), tak by *drogą dowodu i definicji* otrzymać z nich wszystkie pozostałe twierdzenia zespołu (A), jak i pojęcia zespołu (B)?

(α) Gdyby nam się udało rzecz podobną wykonać, a grupy (A') i (B') nie były zbyt liczne, to wynik byłby ogromnym krokiem naprzód. Zdołalibyśmy zredukować całe (A) i (B) do niewielkich grup (A') i (B'). Wezwawszy do pomocy *logikę*, moglibyśmy Arytmetykę liczb całkowitych uważać za daną *potencjalnie* przez

(1) A', (2) B', (3) Logiki.

(β) Niezmiernie ważnym i ciekawym faktem jest tu, dająca się wykazać, możność utworzenia podobnego wyboru na *więcej* niż jeden sposób, o ile choć w *jeden* byłaby ona nam dana. Wrócimy do tego ważnego problemu później.

(γ) Całego (A), a tem samem całego (B) nie znamy *aktualnie*. Posiadamy tylko pewien zespół twierdzeń ($\overline{A}$) i pojęć ($\overline{B}$), przyczem uważamy, że:

(1) (A) jest to ogół wszystkich ($\overline{A}$) oraz tych zdań, które z ($\overline{A}$) dadzą się uzyskać drogą *dowodu*.

(2) (B) są to wszystkie $(\bar{B})$ oraz wszystkie te pojęcia, które z $(\bar{B})$ zbudujemy drogą definicji.

Znane nam zespoły $(\bar{A})$ i $(\bar{B})$ są jednak ogromnie obszerne. Redukcji tego co aktualnie znamy z A. l. c.[1]) do niewielkich grup zdań i pojęć dokonało kilku matematyków ostatnich kilkudziesięciu lat, uczynili to oni na kilka sposobów. Dla nas szczególne znaczenie posiada pierwszy zupełny sposób takiej redukcji podany przez włoskiego matematyka Giuseppe Peano (żyjącego obecnie prof. analizy w Turynie) w dziełku już wspomnianem: »Arithmetices principia nova methodo exposita« — Turyn 1889. System ten będzie przedstawiony w niniejszej książce.

Peano zredukował całą A. l. c. do:

I. trzech pojęć danych na początku,

II. pięciu zdań przyjętych za punkt wyjścia,

III. logiki.

Poznawszy system Peany, pójdziemy pod koniec wykładu jeszcze o krok dalej w redukcji.

6. (α) Pojęcia przyjęte za punkt wyjścia zwać będziemy »pierwotnemi« — dlatego jedynie, że my (a względnie Peano) przyjmujemy je za punkt wyjścia dla określania innych.

(β) Zdania przyjęte na początku nazwiemy »postulatami« lub »aksjomatami« i nie wiążąc z temi nazwami żadnych dalszych idej filozoficznej natury, chcemy jedynie mieć termin dla oznaczenia zdań, które my przyjmujemy za punkt wyjścia dla wyprowadzenia pozostałych.

(γ) Potrzeba posiadania systemu logiki jest tu,

---

[1]) Arytmetyki liczb całkowitych.

jak widzimy, palącą, aby wiedzieć co można zbudować z (I) i (II). — System ten — zdaje nam się — posiadamy intuicyjnie, atoli to nie wystarcza. Peano i jego uczniowie poczęli ów system budować wyraźnie. System ten również nie wystarczał i natknął się na ogromne trudności wewnętrzne. Przebudowy podjęli się A. N. Whitehead i B. Russell w dziele 3-tomowem p. t. »Principia Mathematica (Cambridge 1910—1913), atoli do dziś dnia nie można sprawy posiadania systemu logiki uważać za zamkniętą. Będziemy się posługiwali logiką intuicyjnie, wprowadzając jednak w tekście drogą uwag różne jej środki nowoczesne. Stanowisko takie należy oczywiście uważać jedynie za przejściowe, aż do chwili, gdy zdobędzie się logikę jako usystematyzowaną całość naukową.

§ 2. System A. I. c. Peany.

7. I. Przyjmiemy za »pierwotne« trzy pojęcia:

(1) »Zero«,

(2) »Następnik w ciągu naturalnym«, krótko »następnik«,

(3) »Liczba całkowita«.

II. Przyjmiemy za »postulaty« zdania:

(1) Zero jest liczbą całkowitą,

(2) Następnik jakiejkolwiek liczby całkowitej jest też liczbą całkowitą,

(3) Liczby całkowite, których następniki są te same, są sobie równe,

(4) Zero nie jest następnikiem żadnej liczby całkowitej,

(5) Każdą własność taką, że

(α) posiada ją zero,

(*β*) o ileby ją posiadała jakaś liczba całkowita, to jej następnik również by ją posiadał,

posiadać musi tem samem każda liczba całkowita.

[Jest to tak zwana zasada indukcji zupełnej lub matematycznej].

III. Przyjmiemy do pomocy przy dowowodzeniu i określaniu całą logikę dedukcyjną, obejmującą (1) metody dowodzenia i (2) określania.

8. Analiza listy I i znakowanie.

(1) »Zero« oznaczymy przez 0.

(2) Jeżeli a oznacza jakiś element, to »następnik a« oznaczymy przez: seq a, co czytamy: sequens a.

Nie zajdzie nam nigdy potrzeba stawiania słówka »seq« przed innym elementem, jak tylko przed takim, o którym wiemy lub o którym mówi założenie, że należy do liczb całkowitych — tego jednak niema potrzeby osobno zaznaczać w postulatach, gdyż są one tak skonstruowane, że same przez się do niczego innego nie dopuszczą. Zwrot »seq a« jest złożonem pojęciem, którego w tej chwili analizować logicznie nie zamierzamy. — Dowiemy się w toku rozważań tej książki czegoś więcej o tego rodzaju pojęciach.

(3) Termin »liczba całkowita« jest dla nas terminem pewnego pojęcia ogólnego (nomen generale), które posiada swój zakres »ogół liczb całkowitych«. — Oznaczymy ów zakres przez N_0.

Zdania:

(1) a jest liczbą całkowitą,

(2) a należy do N_0

są równoważne co do prawdy czy fałszu. Przyjmiemy zwyczajem nowoczesnych logików, którym lepiej jest posługiwać się zakresami niż terminami pojęć ogólnych, za pojęcie pierwotne N_0.

Zakresy pojęć zwiemy też »klasami«, »mnogościami« lub »zbiorami«. A więc N_0 jest klasą (mnogością, zbiorem) liczb całkowitych. Powtarzamy jeszcze raz:

I. Pojęcia pierwotne:

(1) 0, (2) seq, (3) N_0.

9. Analiza i znakowanie listy II.

Zapiszemy nasze postulaty w pewnej symbolice pomysłu Peany (z modyfikacjami Russella). W symbolice tej znaki mają następujące znaczenie:

(α)	$\supset$	czytaj	»pociąga« lub »jeżeli — to«
(β)	ε	»	»należy do«
(γ)	$=$	»	»jest to samo co« lub »równa się« (identyczność)
(δ)	$\sim$	»	»nie«

Zamiast $\sim (x = y)$ piszemy też $x \neq y$ {x nierówne y}.

(ε) Kropka między zdaniami (.) lub kilka kropek (:) (.:.) oznaczają »*i*«. Prócz tego oddzielamy od siebie części zdania kropkami zamiast nawiasami. Tej ostatniej zasady nie będziemy jednak przeprowadzali konsekwentnie, lecz posługiwać się będziemy, zwyczajem matematyków, również nawiasowaniem.

(ζ) Jeżeli φ jest własnością (warunkiem), to $\varphi(x)$ oznacza »x posiada własność φ« lub »x spełnia φ«

(η) (x) czytaj »dla każdego x«
(x, y) czytaj »dla każdego x i y«.

Dalsze znaki wprowadzimy jeszcze w toku książki.

Zapiszmy obecnie listę II:

(1) $$0 \,\varepsilon\, N_0$$
(2) $$(a)\{a \,\varepsilon\, N_0 \supset \mathrm{seq}\, a \,\varepsilon\, N_0\}$$
(3) $$(a, b)\{a \,\varepsilon\, N_0 \cdot b \,\varepsilon\, N_0 \cdot \mathrm{seq}\, a = \mathrm{seq}\, b : \supset : a = b\}$$
(4) $$(a)\{a \,\varepsilon\, N_0 \supset \mathrm{seq}\, a \neq 0\}$$
(5) $$(\varphi)\,[\varphi(0) : (x)\{x \,\varepsilon\, N_0 \cdot \varphi(x) : \supset : \varphi(\mathrm{seq}\, x)\} .\because. \supset .\because. (z)\{z \,\varepsilon\, N_0 \supset \varphi(z)\}].$$

Przeczytajmy słowami. Wypadnie to nieco niezgrabnie co do formy, ale zato wystąpi na jaw duży już stopień zanalizowania treści tych zdań.

(1) Zero należy do N_0.

(2) Dla każdego a, jeżeli a należy do N_0, to seq a należy do N_0.

(3) Dla każdego a i b, jeżeli a należy do N_0, b należy do N_0 i seq a równa się seq b, to a jest to samo co b.

(4) Dla każdego a, jeżeli a należy do N_0, to seq a jest różny od zera.

(5) Dla każdego φ, jeżeli:

(1) zero posiada własność φ

oraz (2) dla każdego x, należenie x do N_0 i spełnianie φ pociąga spełnianie φ przez seq x,

to, dla każdego z, jeżeli z należy do N_0, to z spełnia φ.

Najfatalniej wypadło tu słowne tłumaczenie tekstu symbolicznego postulatu (5). Czytelnik widzi w tej chwili, że postać symboliczna jest o wiele jaśniejsza Postaramy się za chwilę i tę nieco uprościć.

10. W postulatach naszych figurowały jedynie:

(1) terminy pierwotne,

(2) stałe terminy logiczne: $\supset$, ε, $\cdot$, $=$, $\neq$, (a), (x), (z), (a, b),

(3) zmienne (indeterminaty): a, b, x, z, φ.

Zmienne występują po raz pierwszy dopiero w postulacie (2). Zanalizujmy bliżej jego treść. Składa on się z wyrażenia

$$a \,\varepsilon\, N_0 \supset \operatorname{seq} a \,\varepsilon\, N_0$$

i zwrotu, który odnosi się do całego tego wyrażenia, a który został oznaczony przez (a) — »dla każdego a«.

W wyrażeniu:

$$a \,\varepsilon\, N_0 \supset \operatorname{seq} a \,\varepsilon\, N_0$$

nie oznaczyliśmy i nie mieliśmy wcale zamiaru oznaczać czem jest a. Wobec tego na zapytanie, czy powyższe wyrażenie samo przez się jest prawdą czy fałszem, musielibyśmy odpowiedzieć żądaniem podania nam szczególnej wartości dla a, zanim rozstrzygnięcie byłoby możliwem. Ową nieoznaczoność co do prawdy stwarza tu obecność zmiennej a, która w tem wyrażeniu jest zatem, jak mówimy, zmienną istotną. Przez dodanie zwrotu »dla każdego a« zmienna nie przestała istnieć w postulacie, atoli teraz możemy ze sensem powiedzieć, czy cały postulat jest czy nie jest prawdziwy. Zwrot ten, należący do grupy t. zw. kwantyfikatorów, których więcej poznamy jeszcze w dalszym ciągu, sprawił, że mimo obecności zmiennej, całość nie przedstawia nieoznaczoności co do prawdy czy fałszu. Przez ów kwantyfikator (a) zmienna a stała się pozorną.

A teraz kwestja bardzo poważna: Jak mamy rozumieć owo »dla każdego a«? Jest to jedna z największych trudności logiki nowoczesnej. Przebudowa tejże. dokonana przez B. Russella, który w miejsce dawniejszej logiki formalnej wprowadził nową t. zw. »teorję typów«, polegała właśnie na modyfikacji znaczenia słowa »każdy«[1]. Nie możemy żadną miarą zapuszczać się w te zawiłe problemy. Z postulatu naszego mamy jednak korzystać w następujący sposób: obrawszy dowolnie wartość stałą na a, mamy prawo powiedzieć, że dla o w e g o a:

prawdą jest, że: skoro $a \varepsilon N_0$ to seq $a \varepsilon N_0$. Na przykład, gdy za a p o d s t a w i m y 0, stwierdzimy:

$$0 \varepsilon N_0 \supset \text{seq } 0 \varepsilon N_0.$$

Ze zdania takiego skorzystamy w praktyce jednak tylko wtedy, gdy jego poprzednik

$$a \varepsilon N_0$$

będzie nam znany jako prawdziwy.

Atoli to mieć będzie miejsce, gdy za a obierzemy jakiś element z klasy N_0. Otóż przy jakimkolwiek ze znanych ustalań sensu słowu »każdy« wypadek powyższy będzie niem objęty.

Przyjmiemy teraz pewną umowę ułatwiającą zapisywanie symboliczne. Będziemy mianowicie opuszczali kwantyfikatory takie, jak (a), (b), (x), o ile łatwo się ich będzie domyśleć i o ile takie opuszczenie nie spowoduje nieporozumienia; będziemy, jak się to mówi, pisali często zdania zawierające zmienne w postaci »ogólnej« — bez kwantyfikatora, zamiast w »powszechnej« — z kwantyfikatorem. Zapiszemy np. postulat (2) w następujący sposób:

---

[1]) A. W. Whitehead und B. Russell: Principia Mathematica. Cambrigde 1910—1913 (3 tomy).

$$a \varepsilon N_0 \supset \text{seq}\, a \varepsilon N_0$$

domyślając się kwantyfikatora (a).

Aby się go móc spodziewać trzeba wiedzieć, że a jest zmienną, co bynajmniej nie wynika z tego, że jest to coś zanotowanego przy pomocy litery, bo np. ε nie jest, dla nas przynajmniej, symbolem zmiennej, a litera grecka π oznacza w matematyce stałą liczbę 3·141 ...

Wyraźnie lub milcząco umawiamy się jednak w danej książce, które litery będą reprezentowały zmienne i w praktyce nie sprawia taki stan rzeczy trudności. Przepiszmy jeszcze raz w postaci uproszczonej listę postulatów, pozostawiając jednak częściowo kwantyfikatory w postulacie (5), gdyż w nim jak widać, nie byłoby korzystnem zupełne ich opuszczenie.

II: 1. $0 \varepsilon N_0$
2. $a \varepsilon N_0 \supset \text{seq}\, a \varepsilon N_0$
3. $a \varepsilon N_0 \cdot b \varepsilon N_0 \cdot \text{seq}\, a = \text{seq}\, b : \supset : a = b$
4. $a \varepsilon N_0 \cdot \supset \text{seq}\, a \neq 0$
5. $\varphi(0) \cdot (x)\{x \varepsilon N_0 \cdot \varphi(x) \cdot \supset \cdot \varphi(\text{seq}\, x)\} : \supset :$ $(z)\{z \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot \varphi(z)\}$.

Kwantyfikatory typu takiego jak (a), (b), (x), (z), będziemy też, o ile to możliwe opuszczali w dalszych twierdzeniach A. l. c.

§ 3. Pierwsze określenia i twierdzenia.

11. Postanawiamy solennie nie zaliczać do twierdzeń A. l. c. żadnych innych prócz p o s t u l a t ó w i t y c h, k t ó r e p r z y i c h p o m o c y i l o g i k i z d o ł a m y u d o w o d n i ć. Równocześnie postanawiamy nie mieć innych pojęć w A. l. c. prócz: (1) terminów pierwot-

nych (2) terminów logicznych[1]) (3) terminów, które z poprzednich określimy drogą definicyj. Zmusza to do pedantycznej skrupulatności, ale jest nieodzownem, o ile redukcja A. l. c. do naszych pierwotnych danych ma być uważana za przeprowadzoną.

12. Rozpoczynamy od pewnych definicyj. Będą one miały postać:

$$\text{»definiendum«} \overset{df}{=} \text{»definiens«},$$

gdzie znak $\overset{df}{=}$ należy czytać »oznacza z definicji«. Definicje tego rodzaju zwiemy nominalnemi.

Określamy: [*Def.* 1—10]

$$\begin{cases} 1 \overset{df}{=} \operatorname{seq} 0,\ 2 \overset{df}{=} \operatorname{seq} 1,\ 3 \overset{df}{=} \operatorname{seq} 2,\ 4 \overset{df}{=} \operatorname{seq} 3,\ 5 \overset{df}{=} \operatorname{seq} 4, \\ 6 \overset{df}{=} \operatorname{seq} 5,\ 7 \overset{df}{=} \operatorname{seq} 6,\ 8 \overset{df}{=} \operatorname{seq} 7,\ 9 \overset{df}{=} \operatorname{seq} 8,\ X \overset{df}{=} \operatorname{seq} 9. \end{cases}$$

Ostatni termin X wprowadziliśmy ze względu na cele późniejsze.

Pierwsze twierdzenia: [tw. 1—10]

$$1 \varepsilon N_0,\ 2 \varepsilon N_0,\ 3 \varepsilon N_0,\ 4 \varepsilon N_0,\ 5 \varepsilon N_0,\ 6 \varepsilon N_0,\ 7 \varepsilon N_0,$$
$$8 \varepsilon N_0,\ 9 \varepsilon N_0,\ X \varepsilon N_0.$$

Zapiszemy to zbiorowo:

$$1 \varepsilon N_0 \cdot 2 \varepsilon N_0 \cdot 3 \varepsilon N_0 \cdot 4 \varepsilon N_0 \cdot 5 \varepsilon N_0 \cdot 6 \varepsilon N_0 \cdot 7 \varepsilon N_0 \cdot$$
$$\cdot 8 \varepsilon N_0 \cdot 9 \varepsilon N_0 \cdot X \varepsilon N_0$$

lub krócej (znakowanie nowel):

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X \varepsilon N_0.$$

Wprowadzamy tu skrót:

$$a, b \varepsilon \alpha \overset{df}{=} a \varepsilon \alpha \cdot b \varepsilon \alpha$$

[1]) Zmienne uważamy za terminy logiczne.

w słowach:

»a i b należą do α« $\overset{df}{=}$ »a należy do α i b należy do α«.

Dowód tw. 1:

(1)	Mamy	$0 \, \varepsilon \, N_0$	(α) [post. 1]
	»	$0 \, \varepsilon \, N_0 \supset \text{seq } 0 \, \varepsilon \, N_0$	(β) [post. 2]
	A więc:	$\text{seq } 0 \, \varepsilon \, N_0$	(γ)
	czyli	$1 \, \varepsilon \, N_0$	(δ) [def. 1].

Analiza dowodu:

Przesłankę (α) uzyskaliśmy wprost z postulatu 1.

Przesłankę (β) uzyskaliśmy z postulatu 2 przez podstawienie za zmienną a wartości szczególnej: 0.

Czynimy to wedle zasady logicznej:

podstawiając w zdaniu powszechnie ważnem za zmienne szczególne wartości z zakresu objętego znaczeniem terminu »każdy« i opuszczając kwantyfikator otrzymamy zdanie ważne w ramach danej teorji[1]).

(γ) Wniosek otrzymaliśmy dzięki podstawowemu trybowi logicznemu zwanemu »modus ponens«, który ma postać:

skoro mamy	(1) p
i	(2) $p \supset q$,
to wtedy też mamy	(3) q.

(δ) Ostatecznie za seq 0 podstawiliśmy 1 wedle następującej dyrektywy logicznej: »jeżeli w zdaniu podstawimy za definiensy ich definienda, to zdanie nie ulega zmianie co do prawdy i fałszu«.

[1]) »prawdziwe« w danej teorji.

Dalsze dowody:

(2) (α) $1 \,\varepsilon\, N_0$ [tw. (1)]
(β) $1 \,\varepsilon\, N_0 \supset \mathrm{seq}\, 1 \,\varepsilon\, N_0$ [post. 2]
(γ) $\mathrm{seq}\, 1 \,\varepsilon\, N_0$ [mod. ponens]
(δ) $2 \,\varepsilon\, N_0$ [def. (2)].

W tym dowodzie za przesłankę (α) wzięliśmy tw. (1) udowodnione co tylko i to jedynie z założeń teorji, a więc zdanie zaliczone już do twierdzeń A. l. c. czyli prawdziwe w tej teorji.

Dowody twierdzeń (3)—(10) przeprowadzimy analogicznie.

Zastosujemy jeszcze następująca zasadę logiczną: »Wolno w definicji znak $\stackrel{df}{=}$ zastąpić przez $=$ i uzyskać w ten sposób zdanie prawdziwe, o ile znak ten nie stoi między zdaniami«.

Zasada powyższa da nam twierdzenia:

$$\begin{cases} 1 = \mathrm{seq}\, 0,\ 2 = \mathrm{seq}\, 1,\ 3 = \mathrm{seq}\, 2,\ 4 = \mathrm{seq}\, 3,\ 5 = \mathrm{seq}\, 4, \\ 6 = \mathrm{seq}\, 5,\ 7 = \mathrm{seq}\, 6,\ 8 = \mathrm{seq}\, 7,\ 9 = \mathrm{seq}\, 8,\ X = \mathrm{seq}\, 9. \end{cases}$$

Dowody nasze prowadziliśmy dotąd w sposób zupełny. W dalszym ciągu nie zawsze będzie to ze względu na brak miejsca możliwem; poprzestaniemy wtedy na zrozumiałym skrócie dowodu.

§ 4. Dodawanie.

13. Wprowadźmy odrazu dwie definicje

I. Df.: $a \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot\, a +_c 0 \stackrel{df}{=} a$

II. Df.: $a, b \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot\, a +_c \mathrm{seq}\, b \stackrel{df}{=} \mathrm{seq}\,(a +_c b)$.

Definicje powyższe posiadają odmienną postać od dotychczasowych definicyj nominalnych. Zapytajmy, co objaśnić nam one potrafią.

Pierwsza z nich pozwala wszędzie zamiast a napisać $a +_c 0$, o ile tylko a należy do klasy liczb całkowitych.

Rzeczywiście: skoro wiemy, że

(α) $a \varepsilon N_0$

otrzymamy: (β) $a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a +_c 0 \overset{df}{=} a$ [Df. I]

stąd (γ) $a +_c 0 \overset{df}{=} a$ [mod. pon.]

i ewent. jeszcze (δ) $a = a +_c 0$ [logika][1]).

Druga z powyższych definicyj objaśnia nam czem jest $a +_c \operatorname{seq} b$, jeżeli a i b są liczbami całkowitemi i jeżeli już wiemy czem jest $a +_c b$.

Przykład: *α*. Wiemy już, że

$$(1) \quad 2 \varepsilon N_0, \qquad (2) \quad 1 = \operatorname{seq} 0, \qquad (3) \quad 0 \varepsilon N_0,$$

a więc:

$$2 +_c 1 = 2 +_c \operatorname{seq} 0 = \operatorname{seq} (2 +_c 0) = \operatorname{seq} 2 = 3.$$

Ostatecznie:

$$2 +_c 1 = 3.$$

β. Załóżmy, że $a \varepsilon N_0$. Zastosowanie Df. I powie nam, że

$$a +_c 0 = a.$$

Przybrawszy do pomocy Df. II snujemy dalej wątek rozumowania:

---

[1]) Będziemy w dowodach pisali [logika] dla zaznaczenia, że odnośny wniosek uzyskano dzięki jakiejś zasadzie logicznej (wysłowionej w tekście lub nie).

$$a +_c 1 = a +_c \operatorname{seq} 0 = \operatorname{seq}(a +_c 0) = \operatorname{seq} a$$
$$a +_c 2 = a +_c \operatorname{seq} 1 = \operatorname{seq}(a +_c 1) = \operatorname{seq}\operatorname{seq} a$$
i t. d.

Nasuwa nam to na myśl przypuszczenie, że skoro jeszcze $b \varepsilon N_0$, to idąc krok za krokiem dojdziemy nakoniec do zrozumienia czem jest:

$$a +_c b.$$

Obecnie udowodnimy twierdzenie, które umocni nas w powyższem przekonaniu:

Tw. 1: $a, b \varepsilon N_0 \supset a +_c b \varepsilon N_0$.

»Jeżeli a i b należą do N_0, to $a +_c b$ należy również do N_0«.

Dowód: Prowadzimy zasadniczo przy pomocy postulatu 5 [zasady indukcji zupełnej].

Założymy, że $a \varepsilon N_0$ [hipoteza].

I. Wtedy:

1. $a +_c 0 = a$ [hp. df. I, logika].
2. $a +_c 0 \varepsilon N$ [logika].

Analiza: Znak »=« jest dla nas zawsze znakiem identyczności logicznej. Zasadniczą własnością tego pojęcia jest jednak następująca: jeżeli okazano, że

(1) $a = b$

(2) $\varphi(a)$,

to tem samem $\varphi(b)$.

Zasadę powyższą zwiemy »zasadą podstawiania identycznych«.

Wypowiadano ją często już przed ukonstytuowaniem się logiki formalnej. Leibniz formułuje ją jako definicję identyczności w słowach: »Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest salva veritate«. Podobną postać spotykaną jeszcze dawniej u Św. Tomasza z Aquinu.

II. Przypuśćmy teraz, że

$$a \,\varepsilon\, N_0,\ k \,\varepsilon\, N_0 \text{ i że już } a +_c k \,\varepsilon\, N_0.$$

Wtedy:	α.	$a +_c \operatorname{seq} k = \operatorname{seq}(a +_c k)$	[df. II, logika].
Atoli	β.	$a +_c k \,\varepsilon\, N_0$	[hp.],
zatem	γ.	$\operatorname{seq}(a +_c k) \,\varepsilon\, N_0$	[post. 2].
Ostatecznie:		$a +_c \operatorname{seq} k \,\varepsilon\, N_0$	[(α) i logika].

Mamy więc:

$$a \,\varepsilon\, N_0 \cdot k \,\varepsilon\, N_0 \cdot a +_c k \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot a +_c \operatorname{seq} k \,\varepsilon\, N_0.$$

Dowód wynikania prowadziliśmy dla dowolnego k, mamy więc prawo wedle zasady »ogólnie prowadzonych dowodów« lub krótko zasady »uogólnienia« napisać:

$$(k)\,\{a \,\varepsilon\, N_0 \cdot k \,\varepsilon\, N_0 \cdot a +_c k \,\varepsilon\, N_0 \supset \cdot a +_c \operatorname{seq} k \,\varepsilon\, N_0\}.$$

III. Mamy już wszystko czego potrzeba dla stosowania zasady indukcji zupełnej.

Połóżmy:

$$\varphi(x) \overset{df}{=} a +_c x \,\varepsilon\, N_0.$$

Wtedy przy założeniu, że $a \,\varepsilon\, N_0$:

(1) $\varphi(0)$ spełnione wedle I

(2) $(k)\{k \,\varepsilon\, N_0 \cdot \varphi(k) \supset \varphi(\operatorname{seq} k)\}$ wedle II,

stąd:

(3) $(b)\,\{b \,\varepsilon\, N_0 \supset \varphi(b)\}$ [post. 5].

Reasumując:

$$a \varepsilon N_0 : \supset : (b) \{b \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a +_c b \varepsilon N_0\}.$$

Dość zawiła, ale intuicyjnie jasna czysto logiczna przeróbka da nam:

$$(a, b) \{a, b \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a +_c b \varepsilon N_0\},$$

lub krótko:

$$a, b \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a +_c b \varepsilon N_0.$$

Czytelnik spodziewa się zapewne ostatecznego twierdzenia, mniej więcej tej postaci:

$a, b \varepsilon N_0 \supset a +_c b$ jest określonym terminem A. l. c.

Przyjmijmy za warunek ψ następujący:

$\psi(a) \overset{df}{=} \{a$ jest określonym terminem A. l. c.$\}$.

Przy pomocy zasady indukcji zupełnej udałoby nam się udowodnić formalnie, że

$$a, b \varepsilon N_0 \cdot \supset \psi(a +_c b),$$

atoli dowód byłby jedynie wtedy poprawny, gdyby warunek ψ należał do kategorji warunków zdaniowych rozważanych w logice. Otóż co do tego trzeba zaznaczyć, że żadna z dotychczasowych teoryj logicznych nie obejmuje formalnych rozważań (objawiających się w postaci twierdzeń czy określeń) idej takich jak: »określony termin« »ogół terminów pewnej teorji«. Dział ten nie jest poprostu dostatecznie opracowany, a tymczasem postępowanie nieostrożne i na drodze intuicyjnej prowadzi tu do paradoksów takich jak np. paradoks Berryego, Richarda i t. p.[1]). Matematycy, nie zwracając uwagi na powyższą trudność posługują się jednak powszechnie określeniami typu takiego jak df. I, II, co w ogólnym wypadku ma postać następującą:

Chcemy określić jakieś wyrażenie, powiedzmy $W(x)$, dla wszelkich liczb całkowitych. W tym celu

I. Określamy czem ma być $W(0)$.

II. Podajemy regułę, któraby mówiła czem ma być $W(\text{seq}\, k)$, o ile $k \varepsilon N_0$ i $W(k)$ jest określone, a reguła ta ma nie zawodzić przy żadnem k całkowitem.

III. Uważamy wtedy, posługując się zasadą indukcji matematycznej, że

»$W(x)$ jest tem samem określone dla każdego x całkowitego«.

Jakżeż teraz pogodzić stanowiska matematyków i logików. — Otóż trudność tę pokonał już w r. 1879 G. Frege w dziełku p. t. »Begriffschrift«[2]) (Halle) co później przedstawił jeszcze raz w »Grundgesetze der Arithmetik« (2 tomy Jena 1893 i 1903)[3]). Dzięki pomysłom Fregego można w każdym przypadku, takim, jak powyższy podać nominalną definicję zwrotu $W(x)$ postaci:

$$W(x) \overset{df}{=} \ldots,$$

i wtedy unikamy rzeczywiście trudności logicznych. W nocie na końcu książki podamy definicję nominalną dla

$$a +_c b, \text{ i. t. p.}$$

---

[1]) p. moje Podstawy ogólnej teorji mnogości. Warszawa 1925, str. 214.

[2]) cz. III, str. 55—87.

[3]) t. I, str. 59, 66, §§ 45, 46.

co nam usunie chwilowo nie załatwiony problem niezupełności.

Definjowanie **rekurencyjne** czyli **zwrotne**, to znaczy takie, jak to, o którem obecnie mówimy, należy wobec wyników Fregego uważać za proces poprawny, a wraz z nim przyjąć słuszność zasady uznawanej w tej kwestji przez praktykę matematyczną.

14. Znaczek (c) umieszczony pod znakiem $+$ ma przypominać, że $+_c$ jest symbolem pewnego działania określonego **jedynie** dla liczb całkowitych. Będzie on nam potrzebny, gdy wprowadzimy inne jeszcze znaczenia symbolu $+$, tymczasem chcąc ułatwić składanie drukarzowi, będziemy go przeważnie opuszczali. Potoczna praktyka matematyczna upraszcza sobie stale sytuację, przez pomijanie znaków odróżniających podobne, lecz ściśle biorąc, **różne** znaczenia tego samego symbolu i pozostawia uwadze czytającego zastanawianie się nad tem, które ze znaczeń symbolu powinien w danej chwili brać pod uwagę. Używanie jedynie symboli o **jednem** znaczeniu jest bezwzględnie koniecznem, gdy w grę wchodzi badanie subtelnych podstaw; w praktyce bardziej pospiesznej dałoby się to uskutecznić jedynie z wielką trudnością. Wprowadzamy wtedy dla pokrewnych pojęć jeden i ten sam znak lecz, gdy chodzi o ostrożność, opatrujemy go różnemi znaczkami odróżniającemi.

Udowodnimy obecnie szereg twierdzeń o dodawaniu.

Tw. 2: $\quad a \varepsilon N_0 \supset 0 + a = a.$

Dowód przez indukcję zupełną.

I. Dla $a = 0$ mamy:

$$0 + 0 = 0 \quad [\text{df. I, logika}]$$

więc twierdzenie słuszne już dla $a = 0$.

II. Załóżmy, że: $k \varepsilon N_0 \cdot 0 + k = k$.

Wtedy:

$0 + \mathrm{seq}\, k = \mathrm{seq}\,(0 + k)$ [hp. df. II, logika],

$\mathrm{seq}\,(0 + k) = \mathrm{seq}\, k$ [hp. logika],

$\mathrm{seq}\, k \,\varepsilon\, N_0$ [hp. post. 2],

stąd: $\mathrm{seq}\, k = 0 + \mathrm{seq}\, k$ [df. I, logika].

Ostatecznie: $0 + \mathrm{seq}\, k = \mathrm{seq}\, k$.

III. Stosując zasadę indukcji otrzymamy:

$$(a)\,\{a \,\varepsilon\, N_0 \supset 0 + a = a\},$$

a stąd w skróconej pisowni nasze twierdzenie.

Tw. pomocnicze:

$$a, b \,\varepsilon\, N_0 \supset a + \mathrm{seq}\, b = \mathrm{seq}\, a + b.$$

Dowód: Zakładamy: $a \,\varepsilon\, N_0$.

I. *Dla* $b = 0$ *mamy:*

$a + \mathrm{seq}\, 0 = \mathrm{seq}\,(a + 0) = \mathrm{seq}\, a$ [df. I, II, logika],

$\mathrm{seq}\, a \,\varepsilon\, N_0$ [hp. post. 2],

stąd znów $\mathrm{seq}\, a = \mathrm{seq}\, a + 0$ [df. I, logika].

Więc $a + \mathrm{seq}\, 0 = \mathrm{seq}\, a + 0$.

II. Załóżmy, że jeszcze: $k \,\varepsilon\, N_0 \cdot a + \mathrm{seq}\, k = \mathrm{seq}\, a + k$.

Wtedy: $a + \mathrm{seq}\,\mathrm{seq}\, k = \mathrm{seq}\,(a + \mathrm{seq}\, k)$ [df. II, logika),

$\mathrm{seq}\,(a + \mathrm{seq}\, k) = \mathrm{seq}\,(\mathrm{seq}\, a + k)$ [hp. logika],

$\mathrm{seq}\,(\mathrm{seq}\, a + k) = \mathrm{seq}\, a + \mathrm{seq}\, k$ [df. II, logika],

więc $a + \mathrm{seq}\,\mathrm{seq}\, k = \mathrm{seq}\, a + \mathrm{seq}\, k$

i twierdzenie będzie słuszne jeszcze dla $\mathrm{seq}\, k$.

III. Według zasady indukcji zupełnej twierdzenie nasze jest słuszne ogólnie.

Uwaga: Będziemy w dalszym ciągu opuszczali w odnośnikach dowodu uwagę: »logika« poza wypadkami trudniejszych przeróbek formalnych.

Tw. 3: $a, b \varepsilon N_0 \cdot \supset a + b = b + a$.

Dowód: Zakładamy, że $a \varepsilon N_0$.

I. Dla $b = 0$ mamy:

$$a + 0 = a \qquad [\text{df. I}],$$
$$a = 0 + a \qquad [\text{tw. 2}],$$

skąd $$a + 0 = 0 + a.$$

II. Załóżmy, że; $k \varepsilon N_0 \cdot a + k = k + a$.
Wtedy:

$$a + \operatorname{seq} k = \operatorname{seq} (a + k) \qquad [\text{df. II}],$$
$$\operatorname{seq} (a + k) = \operatorname{seq} (k + a) \qquad [\text{hp.}],$$
$$\operatorname{seq} (k + a) = k + \operatorname{seq} a \qquad [\text{df. II}],$$
$$k + \operatorname{seq} a = \operatorname{seq} k + a \qquad [\text{tw. pom.}],$$

zatem: $$a + \operatorname{seq} k = \operatorname{seq} k + a.$$

III. Indukcja kończy dowód.

Tw. 4:

$$a, b, c \varepsilon N_0 \cdot a + c = b + c \cdot \supset \cdot a = b.$$

Dowód: Zakładamy, że $a, b \varepsilon N_0$.

I. Dla $c = 0$ mamy:

założenie: $a + 0 = b + 0$

prowadzi do: $a + 0 = a \quad$ [df. I],
$b + 0 = b \quad$ [df. I]

więc: $a = b$.

II. Załóżmy, że: (1) $k \varepsilon N_0$
(2) $m + k = n + k \cdot \supset m = n$

przy każdem m i n całkowitem.

Wtedy przypuszczenie, że

$$a + \text{seq}\, k = b + \text{seq}\, k$$

prowadzi do:

1.	$\text{seq}\, a + k = \text{seq}\, b + k$	[tw. pom. hp.],
2.	$\text{seq}\, a,\ \text{seq}\, b\ \varepsilon\ N_0$	[hp., post 2]
skąd: 3.	$\text{seq}\, a = \text{seq}\, b$	[hp.].
Lecz 4.	$a, b\ \varepsilon\ N_0$	[hp.],
więc	$a = b$	[(3), (4), post. 3].

III. Indukcja kończy dowód.

Tw. 6: $a, b, c\ \varepsilon\ N_0 \cdot \supset \cdot (a + b) + c = a + (b + c)$.

Dowód: Zakładamy: $a, b\ \varepsilon\ N_0$.

I. Dla $c = 0$ mamy:

$$(a + b) + 0 = a + b \qquad \text{[df. I, tw. 1]},$$
$$b = b + 0 \qquad \text{[df. I]},$$

więc: $(a + b) + 0 = a + (b + 0)$.

II. Jeżeli założymy, że:

$$k\ \varepsilon\ N_0 \cdot (a + b) + k = a + (b + k),$$

to

$$\begin{aligned}(a + b) + \text{seq}\, k &= \text{seq}\, [(a + b) + k] && \text{[df. II]}\\ &= \text{seq}\, [a + (b + k)] && \text{[hp.]},\\ &= a + \text{seq}\, (b + k) && \text{[df. II]},\\ &= a + (b + \text{seq}\, k) && \text{[df. II]},\end{aligned}$$

stąd: $(a + b) + \text{seq}\, k = a + (b + \text{seq}\, k)$

i twierdzenie słuszne jeszcze dla seq k.

III. Indukcja kończy dowód.

Tw. 7: $a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a + 1 = \text{seq}\, a$.

Dowód:

(1) $1 = \text{seq}\, 0$ [§ 3 tw. 1]

(2) $a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a + \text{seq}\, 0 = \text{seq}(a + 0)$ [df. I],

(3) $a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a + 0 = a$ [df. I],

stąd: $a \varepsilon N_0 \supset \cdot a + 1 = \text{seq}\, a$ [(1)(2)(3), logika].

Uwaga: Z twierdzenia powyższego widać, że o ile $a \varepsilon N_0$, możemy stale pisać $a + 1$ zamiast seq a, jak to czyni ostatecznie praktyka. My z tego jeszcze nie skorzystamy.

15. Wprowadzono osobne nazwy dla kilku naszych twierdzeń.

Tw. 1: $a, b \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a +_c b \varepsilon N_0$

Prawo Dodawalności Liczb Całkowitych.

Tw. 2: $a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot 0 +_c a = a$

Prawo Zerowego Dodawania.

Tw. 3: $a, b \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a +_c b = b +_c a$

Prawo Przemienności Dodawania.

Tw. 4: $a, b, c \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a +_c c = b +_c c : \supset : a = b$

Prawo Monotonii Dodawania.

Tw. 5: $a, b, c \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot (a +_c b) +_c c = a +_c (b +_c c)$

Prawo Łączności Dodawania.

Stawiamy też określenia:

$$a +_c b +_c c \overset{df}{=} (a +_c b) +_c c$$

$$a +_c b +_c c +_c d \overset{df}{=} (a +_c b +_c c) +_c d$$

i t. d.

§ 5. Mniejszość i większość.

16. Przejdziemy do określenia **mniejszości** wśród liczb całkowitych.

Niechaj a i b należą do N_0; zapytajmy czy istnieje takie s, by było:

(1) $$s \varepsilon N_0$$
(2) $$s \neq 0$$
(3) $$a +_c s = b$$

przyczem, jak już założono:

(4) $$a, b \varepsilon N_0.$$

Rozważmy zdanie:

(α) $$a, b \varepsilon N_0 \cdot s \varepsilon N_0 \cdot s \neq 0 \cdot a +_c s = b.$$

Zdanie to możemy ująć jako zdanie typu:

$$\varphi(s)$$

gdzie s jest zmienną istotną, od której wartości zależy prawda lub fałsz zdania (α).

Atoli zdanie:

(β) »Istnieje s takie, że zachodzi $\varphi(s)$«

jest prawdą lub fałszem (przy ustalonem a i b) bez **względu na wartość** s — tem samem w (β) zmienna s jest **pozorną**.

Ustalimy znakowanie. Zwrot:

»Istnieje, s takie że zachodzi $\varphi(s)$«

zapiszemy:

(γ) $$(\exists s)\, \varphi(s).$$

Właściwość charakterystyczna tego, że s jest tu zmienną pozorną zaznacza się tem, iż zdania

$$(\exists x)\, \varphi(x), \quad (\exists z)\, \varphi(z), \quad \text{i t. p.,}$$

oznaczają dokładnie to samo co zdanie (γ). Zwrot »istnieje s«, oddany symbolem »$(\exists s)$«, jest nowym kwantyfikatorem. Wraz z poprzednio już poznanym kwantyfikatorem »dla każdego s« [w symbolach: (s)] posiadają one tę istotną własność, że postawione przed zdaniem typu

$$\varphi(s),$$

gdzie s jest zmienną istotną, a więc taką, która stwarza nieoznaczoność co do prawdy czy fałszu, powodują przejście zdania w określone wypowiedzi, prawdziwe lub fałszywe:

$$(\exists s)\, \varphi(s), \quad (s)\, \varphi(s),$$

a tem samem przejście zmiennej w pozorną. Czynność przekształcania zmiennej np. s przez postawienie przed $\varphi(s)$ kwantyfikatora (s) zwie się uogólnieniem logicznem (generalizacją), a przez postawienie kwantyfikatora $(\exists s)$ uszczególnieniem (partykularyzacją) warunku φ.

Wracamy do naszego pierwotnego zagadnienia. Stawiamy definicję.

Definicja Mniejszości Całkowitej:

$$a <_c b \overset{df}{=} (\exists s)\, \{a, b \in N_0 \cdot s \in N_0 \cdot s \neq 0\ a +_c s = b\}$$

»a jest (całkowicie) mniejsze od b oznacza, że istnieje takie s, iż a i b i s należą do N_0, s jest różne od zera i $a +_c s$ równa się b«.

P r z y k ł a d:

$$2 <_c 3, \ (\alpha),$$

bo: (1) $2, 3 \,\varepsilon\, N_0$ (2) $1 \,\varepsilon\, N_0$
(3) $1 \neq 0$ i (4) $2 +_c 1 = 3$.

(α) uzyskano drogą następującą:

Dzięki (1) (2) (3) (4) można napisać:

$$2, 3 \,\varepsilon\, N_0 \cdot 1 \,\varepsilon\, N_0 \cdot 1 \neq 0 \cdot 2 +_c 1 = 3$$

skąd wnioskujemy:

$$(\exists s)\{2, 3 \,\varepsilon\, N_0 \cdot s \,\varepsilon\, N_0 \cdot s \neq 0 \cdot 2 +_c s = 3\}$$

»bo takiem jest choćby 1«.

Jest to tak zwany »d o w ó d i s t n i e n i a p r z e z p r z y k ł a d« typu:

(1) skoro zachodzi $\varphi(a)$,
to widocznie (2) $(\exists s)\, \varphi(s)$.

D e f i n i c j a W i ę k s z o ś c i Całkowitej:
Określamy:

$$a >_c b \overset{df}{=} b <_c a.$$

T w. 1: $a <_c b \cdot \supset \cdot a, b \,\varepsilon\, N_0$.

D o w ó d: Z założenia, że $a <_c b$ wynika:

(α) $(\exists s)\{a, b \,\varepsilon\, N_0 \cdot s \,\varepsilon\, N_0 \cdot s \neq 0\, a +_c s = b\}$.

Aby teraz wydostać z pod kwantyfikatora $(\exists s)$ część $a, b \,\varepsilon\, N_0$, w której zmienna s nie występuje postąpimy zwyczajem matematyków tak:

Skoro zachodzi (α), »to wybierzmy« choć jedno takie s np. s_0 — będzie wtedy:

$(\beta)\qquad a, b\ \varepsilon\ N_0 \cdot s_0\ \varepsilon\ N_0 \cdot s_0 \neq 0 \cdot a +_c s_0 = b.$

Teraz już wedle zasady logicznej typu:

(1) skoro zachodzi $p \cdot q$,
to (2) zachodzi też p,
otrzymamy: $a, b\ \varepsilon\ N_0$.

Postępowanie codzienne matematyków streszczające się krótko w słowach »skoro istnieje, to możemy wybrać« usunięto w logice nowoczesnej przy pomocy bardziej skomplikowanych zasad, które tu pomijamy.

Tw. 2: $a >_c b \cdot \supset \cdot a, b\ \varepsilon\ N_0$.

Dowód:

(1) $a >_c b \cdot \supset \cdot b <_c a$ [df. większości]
(2) $b <_c a \cdot \supset \cdot b, a\ \varepsilon\ N_0$ [tw. 1]
stąd: (3) $a >_c b \cdot \supset \cdot b, a\ \varepsilon\ N_0$
i jeszcze: (4) $a >_c b \cdot \supset \cdot a, b\ \varepsilon\ N_0$.

Analiza:

Przejście od (1) i (2) do (3) dał nam tryb:

Jeżeli: (1) $p \supset q$
(2) $q \supset r$
to (3) $p \supset r$,

zwany w nowej logice zdań »sylogizmem«[1].

W wyniku otrzymaliśmy wniosek, że

$$a >_c b \cdot \supset \cdot b, a\ \varepsilon\ N_0,$$

[1]) Oczywiście przez analogję do sylogizmu klasycznego (a właściwie trybu »Barbara«).

w następniku twierdzenia zaznaczono jednak: $a, b \varepsilon N_0$. Wprawdzie różnica mogłaby dla wielu być nieznaczącą, atoli, aby uzyskać (4) winniśmy zastosować pewne prawo logiczne, a mianowicie:

Jeżeli: (1) $p \cdot q$ zachodzi,
to (2) $q \cdot p$ również zachodzi.

Jest to tak zwane prawo przemienności dla terminu »*i*« zwane też »prawem przemienności mnożenia logicznego«.

Mamy teraz:

$$\begin{array}{lll} & (1) & a >_c b \cdot \supset \cdot b, a \varepsilon N_0 \\ & (2) & b, a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a, b \varepsilon N_0, \\ \hline \text{stąd} & (3) & a >_c b \cdot \supset \cdot a, b \varepsilon N_0 \end{array}$$

i dopiero teraz twierdzenie jest udowodnione w zupełności.

Tw. 1 i 2 wskazują nam na to, że związki $<_c$ i $>_c$ zachodzić mogą jedynie między liczbami całkowitemi.

Uwaga: Kroki dowodu tak drobne, jak poprzedni będziemy w przyszłości niejednokrotnie opuszczali, pozostawiając ich uzupełnienie czytelnikowi. Są one jednakże niezbędne w pełnym dowodzie.

Tw. 3α: $a \varepsilon N_0 \cdot a \neq 0 \cdot \supset \cdot 0 <_c a$.

Dowód: Zbieramy dane:

(1) $a \varepsilon N_0$, (2) $0 \varepsilon N_0$, (3) $a \neq 0$, (4) $0 + a = a$

a więc:

$$(\exists s)\{a, 0 \,\varepsilon\, N_0 \cdot s \,\varepsilon\, N_0 \cdot s \neq 0 \cdot 0 + s = a\},$$

bo takiem s jest choćby a [dowód przez przykład].

Zatem: $0 <_c a$

wedle definicji.

T w. 3β: $a \,\varepsilon\, N_0 \cdot a \neq 0 \cdot \supset \cdot a >_c 0$.

D o w ó d:

(1) $a \,\varepsilon\, N_0 \cdot a \neq 0 \cdot \supset \cdot 0 < a$ [tw. $3\,\alpha$]

(2) $0 < a \cdot \supset \cdot a > 0$ [df. i logika],

więc (3) $a \,\varepsilon\, N_0 \cdot a \neq 0 \cdot \supset \cdot a > 0$.

T w. 4: $a, b \,\varepsilon\, N_0 \cdot a \neq 0 \cdot \supset \cdot a + b >_c 0$.

D o w ó d przez indukcję:

I. Dla $b = 0$ mamy:

$a + 0 = a > 0$ z założenia i tw. 3β.

II. Gdyby już zachodziło:

$k \,\varepsilon\, N_0$ i było $a + k > 0$,

to $a + \operatorname{seq} k = \operatorname{seq}(a + k)$ [df. II § 4],

Lecz $a + k \,\varepsilon\, N_0$ dzięki założeniom.

więc $\operatorname{seq}(a + k) \neq 0$ [post. 4],

a zatem $\operatorname{seq}(a + k) > 0$ i $a + \operatorname{seq} k > 0$ [tw. 3β].

III. Indukcja kończy dowód.

T w. 5α: $a = b \cdot b <_c c \cdot \supset \cdot a <_c c$.

D o w ó d: Mamy:

(1) $b < c$

(2) $a = b$

podstawiając w (1) za b element a dzięki (2) i zasadzie »podstawiania identycznych« otrzymujemy:

(3) $$a < c.$$

Tw. 5β: $a <_c b \cdot b = c \cdot \supset \cdot a <_c c.$
Tw. 5γ: $a = b \cdot b >_c c \cdot \supset \cdot a >_c c.$
Tw. 5δ: $a >_c b \cdot b = c \cdot \supset \cdot a >_c c.$

Dowody jak dla tw. 5α.

Tw. 5ε: $a <_c b \cdot b <_c c \cdot \supset \cdot a <_c c.$

Dowód: (1) Założenie: $a < b$ da nam: $a, b \,\varepsilon\, N_0$
» $b < c$ » » $b, c \,\varepsilon\, N_0$,

a więc: $$a, c \,\varepsilon\, N_0.$$

(2) Założenie: $a <_c b$ da nam choć jedno s takie, że:

$$s \,\varepsilon\, N_0 \cdot s \neq 0 \cdot a + s = b.$$

Niechaj takiem będzie np. s_0, wtedy

$$s_0 \,\varepsilon\, N_0 \cdot s_0 \neq 0 \cdot a + s_0 = b.$$

(3) Założenie: $b <_c c$ da nam choć jedno takie t żeby:

$$t \,\varepsilon\, N_0 \cdot t \neq 0 \cdot b + t = c.$$

Niechaj takiem będzie np. t_0, a więc:

$$t_0 \,\varepsilon\, N_0 \cdot b + t_0 = c.$$

Wtedy:

(1) $s_0, t_0 \,\varepsilon\, N_0 \cdot s_0 \neq 0$ więc $s_0 + t_0 \neq 0$ [tw. 4]

(2) $s_0, t_0 \varepsilon N_0$, więc $s_0 + t_0 \varepsilon N_0$
(3) $(a + s_0) + t_0 = b + t_0 = c$
stąd (4) $a + (s_0 + t_0) = c$ [prawo łączności].

Jednocześnie więc mamy:

$$a, c \varepsilon N_0 \cdot s_0 + t_0 \varepsilon N_0 \cdot s_0 + t_0 \neq 0 \cdot a + (s_0 + t_0) = c.$$

zatem wedle definicji:

$$a < c.$$

Tw. 5ζ: $a >_c b \cdot b >_c c \cdot \supset \cdot a >_c c.$
Dowód:

1.	$a > b$	da nam	$b < a$
2.	$b > c$	» »	$c < b$
ale:	$c < b \cdot b < a$	da nam	$c < a$ z tw. 5ε,

skąd wedle definicji $a < c$.

Uwaga: W logice mówimy, że symbole takie, jak $<_c, >_c$ są to znaki pewnych relacyj. Twierdzenia 1—5 wyrażają ich własności; w szczególności tw. 5ε i 5ζ mówią, że nasze relacje są przechodnie (tranzytywne).

Tw. 6α: $a <_c b \cdot \supset \cdot \sim(a = b)$.

Dowód: Możemy położyć:

$$a + s_0 = b, \text{ gdzie } s_0 \varepsilon N_0 \cdot s_0 \neq 0.$$

Gdyby: $a = b$, to byłoby:

$$a + s_0 = a = a + 0,$$

skąd według prawa monotonji [§ 4 tw. 4]

$$s_0 = 0$$

wbrew założeniu.

Tw. 6β: $a >_c b \cdot \supset \cdot \sim (a = b)$.

Dowód:

1. $a > b \cdot \supset \cdot b < a$
2. $b < a \cdot \supset \cdot \sim (b = a)$,

stąd: 3. $a > b \cdot \supset \cdot \sim (b = a)$. [sylogizm]

4. $a = b \cdot \supset \cdot b = a$, [logika]

stąd: 5. $\sim (b = a) \cdot \supset \cdot \sim (a = b)$.

Ostatecznie:

$a > b \cdot \supset \cdot \sim (a = b)$ [3, 5, sylogizm].

Analiza: Przesłankę (4) wzięliśmy z logiki, jest to tak zwane prawo symetrji dla identyczności. Przesłanka (5) została uzyskana dzięki niezmiernie ważnemu trybowi logicznemu zwanemu »contrapositio«. Ma on następującą postać:

skoro: (1) $p \supset q$,
to również: (2) $\sim q \supset \sim p$

Tw. 6γ: $a = b \cdot \supset \cdot \sim (a <_c b)$.

Dowód: Zaprzeczając temu twierdzeniu otrzymamy:

(1) $a = b \cdot \sim [\sim (a < b)]$,
Lecz (2) $\sim [\sim (a < b)]$ da nam: $a < b$.
Byłoby zatem: (3) $a = b \cdot a < b$.
Lecz: (4) $a < b \cdot \supset \cdot \sim (a = b)$

co się sprzeciwia założeniu, że $a = b$.

Analiza: 1. Tu i w twierdzeniu 6α przeprowadziliśmy powszechnie matematykom znany dowód przez »reductio ad absurdum«. Chwila refleksji pozwoli nam przyjść do przekonania, że polega on na następującym trybie logicznym:

Jeżeli: 1. $\sim(p \supset q) : \supset : \sim p$,
to 2. $p \supset q$.

»Jeżeli zaprzeczenie pociągania sprowadziłoby zaprzeczenie poprzednika owego pociągania, to pociąganie jest słuszne«.

2. W naszym wypadku należało więc na chwilę zaprzeczyć twierdzeniu. Miało ono postać:

$$p \supset q.$$

Otóż logika uczy, że zaprzeczeniem takiego zdania jest:

$$p \cdot \sim q.$$

Stąd otrzymaliśmy u nas

$$a = b \cdot \sim [\sim (a <_c b)].$$

3. Posłużyliśmy się następnie trybem t. zw. »podwójnego przeczenia«, który pozwala w zdaniu zastąpić $\sim(\sim p)$ przez p bez zmiany prawdy czy fałszu.

Tw. 6 δ: $a >_c b \cdot \supset \cdot \sim (a = b)$.
Dowód analogiczny.

Tw. 6 ε: $a <_c b \cdot \supset \cdot \sim (a >_c b)$.

Dowód: Gdyby tak nie było, to zachodziłoby:

(1) $a < b \cdot \sim(\sim(a > b))$
(2) $a < b \cdot a > b$,
a więc: (3) $a < b \cdot b < a$,
skąd wedle (5 ε):

(4) $a < a$.

Lecz: $a = a$, więc to wykluczone wedle 6 α.

Tw. 6 ζ: $a >_c b \cdot \supset \cdot \sim (a <_c b)$.
Dowód analogiczny.

Tw. 7 α: $a \varepsilon N_0 \cdot b <_c c \cdot \supset \cdot a + b <_c a + c$.
Dowód: znajdziemy takie szczególne s_0, że

$$s_0 \varepsilon N_0 \cdot s_0 \neq 0 \cdot b + s_0 = c;$$

prócz tego z założenia wnioskujemy (tw. 2), że

$$b, c \varepsilon N_0.$$

Wtedy: $a + (b + s_0) = a + c$,
skąd: $(a + b) + s_0 = a + c$.
Lecz: $a + b \varepsilon N_0 \cdot a + c \varepsilon N_0 \cdot s \varepsilon N_0 \cdot s_0 \neq 0$
$(a + b) + s_0 = a + c$
skąd: $a + b < a + c$.

Tw. 7 β: $a \varepsilon N_0 \cdot b >_c c \cdot \supset \cdot a + b >_c a + c$.
Dowód:
Założenie da nam: (1) $c < b \cdot a \varepsilon N_0$.
Stąd (tw, 7 α) (2) $a + c < a + b$.
Lecz (2) pociągnie, że (3) $a + b > a + c$,
co zakończy dowód.

Tw. 7 γ: $a <_c b \cdot c <_c d \supset \cdot a + c <_c b + d$.
Dowód: (1) Założenie da nam: $a \varepsilon N_0 \cdot c < d$,
a stąd: $a + c < a + d$ (α)
(2) $a < b$ da nam:
$d + a < d + b$.
Lecz:
(3) $a + d = d + a \cdot d + a < d + b$;
stąd: $a + d < d + b$.
Następnie: (4) $a + d < d + b \cdot d + b = b + d$,
skąd ostatecznie: $a + d < b + d$. (β)

Przesłanki (α) i (β) dadzą nam: [tw. 5ε]

$$a + c < b + d.$$

Tw. 7δ: $a >_c b \cdot c >_c d \cdot \supset \cdot a + c >_c b + d.$

Dowód analogiczny.

Tw 7ε: $a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a <_c \text{seq}\, a.$

Dowód: $1 = \text{seq}\, 0$, [df.]

więc $1 \neq 0$. [post. 4]

skąd $0 < 1$ [tw. 3α].

Wtedy jednak:

$$a + 0 < a + 1,$$

czyli $a < a + 1$;

lecz jak wiemy: $a + 1 = \text{seq}\, a$, skoro $a \varepsilon N_0$. Reszta widoczna.

Uwaga: twierdzenie nasze możemy też zapisać w postaci:

$$a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a <_c a + 1.$$

Tw. 7ζ: $a, b \varepsilon N_0 \cdot b \neq 0 \cdot \supset \cdot a <_c a + b.$

Dowód: $b \varepsilon N_0 \cdot b \neq 0 \cdot \supset \cdot 0 < b$ [tw. 3α]

stąd: $a + 0 < a + b$, [tw. 7α]

a więc $a < a + b$.

Uwaga: 1. Dzięki tw. $7\varepsilon, \zeta$ mamy np.:

$$0 <_c 1,\ 1 <_c 2,\ 2 <_c 3 \ldots,$$

a także $0 <_c 1,\ 1 <_c 3$ i t. d.

2. W toku dowodów poprzednich twierdzeń pomijaliśmy znaczek ($_c$) pod znakami $<$ i $>$, zachowując go jedynie w wypowiedzi twierdzeń.

Wprowadzimy dla wygody następującą definicję:

$$a =_c b \cdot \overset{df.}{=} \cdot a, b \varepsilon N_0 \cdot a = b.$$

»a jest całkowicie równe b« $\cdot \stackrel{df}{=} \cdot$ a i b są całkowitemi i $a = b$.

Oczywistym wnioskiem uzyskanym przy pomocy tej definicji będzie:

Lemmat: $a =_c b \cdot \supset \cdot a, b \varepsilon N_0$.

Zapoznamy się z jednym jeszcze znakiem z logiki zdań. Łącznik »*lub*« między zdaniami pisać będziemy przy pomocy pierwszej litery słówka łacińskiego »*vel*« w postaci »$\vee$«. Jeżeli p i q są zdaniami orzekającemi (sądami), to $p \vee q$ czytamy »p lub q« i uważamy zawsze za zdanie:

(1) prawdziwe, o ile choć jedno ze zdań p czy q było prawdziwe

(2) fałszywe, jeżeli oba zdania p i q były fałszywe.

W A. l. c. używać będziemy znaków »$\leqq_c$« i »$\geqq_c$« czytanych »mniejsze lub równe«, względnie »większe lub równe«, co do których umawiamy się, że

$$a \leqq_c b : \stackrel{df}{=} : a <_c b \cdot \vee \cdot a =_c b.$$
$$a \geqq_c b : \stackrel{df}{=} : a >_c b \cdot \vee \cdot a =_c b.$$

W każdym razie:

1. $a \leqq_c b \cdot \supset \cdot a, b \varepsilon N_0$
2. $a \geqq_c b \cdot \supset \cdot a, b \varepsilon N_0$.

Przykłady:

(1) $2 \leqq_c 3$, $3 \geqq_c 2$, $2 \leqq_c 2$, $2 \geqq_c 2$

gdyż oznacza to:

$2 <_c 3 \vee 2 =_c 3$, $3 >_c 2 \vee 3 =_c 2$, $2 <_c 2 \vee 2 =_c 2$
$2 >_c 2 \vee 2 =_c 2$,

a wtedy zawsze jeden składnik będzie zdaniem prawdziwem.

Zdanie $p \vee q$ zwiemy sumą logiczną zdań p i q, podobnie $p \cdot q$ zwiemy iloczynem logicznym zdań p i q. Milcząco przyjęliśmy już w poprzednich dowodach zasadę, że $p \cdot q$ uważamy wtedy i jedynie wtedy za zdanie prawdziwe, gdy oba zdania p i q są prawdziwe.

Tw. 8α: $a, b \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \leqq_c a + b$.

Dowód:

(1)	$b = 0 \vee b \neq 0$	[logika]
(2)	$a, b \varepsilon N_0 \cdot b = 0 \cdot \supset \cdot a = a + b$	[§ 4. df. I, logika]
(3)	$a, b \varepsilon N_0 \cdot a = a + b \cdot \supset \cdot a \leqq a + b$	[logika]
(4)	$a, b \varepsilon N_0 \cdot b \neq 0 \cdot \supset \cdot a < a + b$	[tw. 7ζ]
(5)	$a, b \varepsilon N_0 \cdot a < a + b \cdot \supset \cdot a \leqq a + b$.	[logika]
Stąd: (6)	$a, b \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \leqq a + b$	[logika].

Analiza: Wniosek (6) zebrano z wniosków częściowych (3) i (5) i z przesłanki (1) przy pomocy pewnego trybu logicznego, nieco bardziej złożonego, którym jednak intuicyjnie posługujemy się często w życiu; ma on postać: Jeżeli zachodzą fakty:

(1)	$p \vee q$
(2)	$r \cdot p : \supset : s$
(3)	$r \cdot q : \supset : s,$
to	$r \supset s$

Tw. 8β: $a, b \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot b \leqq_c a + b$.

Dowód: Wystarcza w tw. 8α zastosować jeszcze prawo przemienności dodawania.

17. Tw. pomocnicze.

$$s \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot s = 0 \vee s = 1 \vee s >_c 1.$$

Uwaga: $p \vee q \vee r$ ma u nas znaczenie $(p \vee q) \vee r$.

I. Dla $s = 0$ twierdzenie słuszne, bo $s = 0$.

II. Gdyby: $k \varepsilon N_0$ i $k = 0 \vee k = 1 \vee k > 1$, wtedy:
jeżeli: $k = 0$, to $\mathrm{seq}\, k = 1$
» $k = 1$, to $\mathrm{seq}\, k > 1$, [tw. 7ε]
» $k > 1$, to $\mathrm{seq}\, k > k > 1$, [tw. 7ε]
więc $\mathrm{seq}\, k > 1$,
Prócz tego: $\mathrm{seq}\, k \varepsilon N_0$,
a zatem twierdzenie zachodziłoby i dla $\mathrm{seq}\, k$.

III. Indukcja kończy dowód.

Tw. 9. $a, b \varepsilon N_0 \cdot a <_c b \vee a =_c b \vee a >_c b$.

»Jeżeli a i b należą do N_0, to choć jedno z trojga: $a < b$, $a = b$, $a > b$ musi zachodzić«.

Dowód: indukcyjny.

I. Dla $b = 0$ mamy $a >_c 0$ lub $a =_c 0$ wedle tw. 3β i faktu, że $a =_c 0 \vee a \neq 0$, więc twierdzenie słuszne.

II. Załóżmy, że $k \varepsilon N_0$ i że dla każdego a, o ile $a \varepsilon N_0$, mamy:

$$a < k \vee a = k \vee a > k.$$

Wtedy: (1) jeżeli $a < k$, to $k < \mathrm{seq}\, k$, więc $a < \mathrm{seq}\, k$
(2) » $a = k$, to $k < \mathrm{seq}\, k$, więc $a < \mathrm{seq}\, k$
(3) » $a > k$, to $a = k + s_0$ gdzie

$$s_0 \varepsilon N_0 \cdot s_0 \neq 0;$$

wedle tw. pomocniczego $1 = s_0$ lub $1 < s_0$.
O ile: $1 = s_0$, to $a = k + 1 = \mathrm{seq}\, k$
» $1 < s_0$, to $\mathrm{seq}\, k = 1 + k < k + s_0 = a$
więc $\mathrm{seq}\, k < a$.
W każdym z wypadków (1) (2) (3) tw. byłoby słuszne i dla $\mathrm{seq}\, k$.

III. Indukcja kończy dowód.

Załóżmy, że: $a, b \varepsilon N_0$;
twierdzenie 9 powiada nam, że jedno z trojga zachodzi:

$$a <_c b,\ a =_c b,\ a >_c b;$$

twierdzenia 6α—6ζ wykazują, że każda z tych okoliczności wyklucza obie pozostałe. Łącznie wypowiemy 6α—6ζ i 9 w słowach:

Zasada Trichotomji:

Jeżeli $ab \varepsilon N_0$, to jedno i tylko jedno z trojga zachodzi:

$$a <_c b, a =_c b, a >_c b.$$

Inaczej: Wypadki: $a <_c b$, $a =_c b$, $a >_c b$ tworzą dla całkowitych a i b trójpodział zupełny (trichotomję).

Uwaga I. Twierdzenie 6ε i 6ζ można też zapisać tak:

1. $a <_c b \cdot \supset \cdot \sim (b <_c a)$
2. $a >_c b \cdot \supset \cdot \sim (b >_c a)$

W tej postaci mówią one, że relacje »$<_c$« i »$>_c$« są asymetryczne.

Uwaga II. Twierdzenie o trichotomji da nam w szczególności:

1. $a, b \varepsilon N_0 \cdot a \neq b \cdot \supset \cdot a <_c b \vee b <_c a$
2. $a, b \varepsilon N_0 \cdot a \neq b \cdot \supset \cdot a >_c b \vee b >_c a$

W tej postaci twierdzenia powyższe mówią nam, że relacje »$<_c$« i »$>_c$« są spójne »w polu N_0« (w klasie N_0).

Uwaga III. Twierdzenia 1 i 2 naszego § mówią że relacje »$<_c$« i »$>_c$« mają za pole N_0.

Zbieramy powyższe własności, oraz 5ε i 5ζ razem:

Relacja

$<_c$;		$>_c$;
	jest	
1. spójna w N_0		1. spójna w N_0 ·
2. asymetryczna		2. asymetryczna
3. przechodnia		3. przechodnia
4. o polu N_0		4. o polu N_0.

Wyrażamy te fakty mówiąc krótko:

(1) Relacja »$<_c$« porządkuje klasę N_0

(2) » »$>_c$« » » N_0.

Określiliśmy zwroty $a <_c b$ czy $a >_c b$, ale nie-określiliśmy samych relacyj »$<_c$« czy »$>_c$«. Otóż możemy powiedzieć zwyczajem nowoczesnych logików:

(α) $<_c \overset{df}{=}$ relacja, której zachodzenie między u i v wyraża, że $u <_c v$

[lub, że $(\exists s)\{u,v \varepsilon N_0 \cdot s \varepsilon N_0 \cdot s \neq 0 \cdot u +_c s = v\}$

(β) $>_c \overset{df}{=}$ relacja, której zachodzenie między u i v wyraża, że $v <_c u$.

Piszemy to symbolicznie:

(α)
$$<_c \overset{df}{=} (\widehat{uv})\{u <_c v\}$$
$$>_c \overset{df}{=} (\widehat{uv})\{v <_c u\}.$$

Są to sposoby określania relacyj przez wyrażenia kształtu:

$$(\widehat{uv})\varphi(u,v), \qquad (*)$$

gdzie $\varphi(u,v)$ jest warunkiem (zdaniowym) nałożonym na zmienne rzeczywiste u i v. W wyrażeniu (*) u i v są już zmiennemi pozornemi.

Mogliśmy odrazu postawić definicje mniejszości i większości w powyższej postaci. — Uniknęlibyśmy przez to określenia z d a ń, definiując r e l a c j e.

Zapamiętajmy zasadę:
Jeżeli określono relację R jako

$$\widehat{(uv)}\varphi(u,v),$$

to mamy natychmiast słuszne zdanie:

$$(uv)\{uRv \equiv \varphi(u,v)\}$$

»dla każdego u i v zdanie uRv jest równoważne zdaniu $\varphi(u,v)$«

Znak »$\equiv$« postawiony między zdaniami np. $p \equiv q$ oznacza, że p i q są j e d n o c z e ś n i e p r a w d z i w e lub j e d n o c z e ś n i e f a ł s z y w e. Zapamiętajmy też, że

$$p \equiv q \cdot \supset \cdot p \supset q$$
$$p \equiv q \cdot \supset \cdot q \supset p.$$

a nawet więcej:

$$p \equiv q : \equiv : p \supset q \cdot q \supset p.$$

Czytamy »$\equiv$«: »(jest) r ó w n o w a ż n e«

§ 6. Odejmowanie.

18. Poznamy teraz inny jeszcze typ określeń. Określimy r ó ż n i c ę c a ł k o w i t ą elementów a i b, którą zapiszemy jako:

$$a -_c b$$

w sposób następujący:

$a -_c b \overset{df}{=}$ »j e d y n a l i c z b a c a ł k o w i t a, k t ó r a d o d a n a d o c a ł k o w i t e g o b, d a n a m c a ł k o w i t e a«.

Rozważymy następujący warunek zdaniowy:

$$\varphi(x) \overset{df}{=} x \varepsilon N_0 \cdot a,\ b \varepsilon N_0 . b +_c x = a$$

Określeniu różnicy nadamy teraz postać symboliczną

$$a -_c b \overset{df}{=} (\imath x)\, \varphi(x),$$

co czytamy: jedyne x takie, że zachodzi $\varphi(x)$« i gdzie znak »$\imath$« jest odwróconem greckiem jota, początkową literą słowa »izos« (równy).

Zwrot: »jedyne x takie, że $\varphi(x)$« ma oznaczać w ogólnym wypadku dowolnego warunku φ pewien element logiczny, ale w a r u n k o w o.

Żądamy mianowicie, aby:

1. Istniało coś co spełnia φ, a więc: by $(\exists x)\, \varphi(x)$ miało miejsce, następnie,

2, by r ó ż n e elementy nie mogły spełniać warunku φ, a więc by zachodziło:

$$(x, y)\, \{\varphi(x) \cdot \varphi(y) \cdot \supset \cdot x = y\}.$$

Wtedy dopiero ów element, który spełni φ oznaczamy przez $(\imath x)\, \varphi(x)$.

Warunki (1) i (2) wyrazimy krótko mówiąc: »ma sens jedyne x takie, że $\varphi(x)$« lub symbolicznie:

$$\mathrm{E!}\, (\imath x)\, \varphi(x).$$

W symbolach $(\imath x)\, \varphi(x)$ jak i $\mathrm{E!}\, (\imath x)\, \varphi(x)$ zmienna x jest p o z o r n ą, a więc można ją zastąpić każdą inną, bez jakiejkolwiek zmiany sensu czy prawdy. Opisując bliżej element warunkowo określony

$$(\imath x)\, \varphi(x)$$

będziemy się też wyrażali, że jest to:

»element spełniający warunek φ, o ile taki istnieje i tylko jeden«.

Wyrażenie $(\imath x)\,\varphi(x)$ zwiemy w logice opisem jednostkowym lub »deskryptem« (Russell).

19. Tw. 1: $a \geqq_c b \cdot \supset \cdot E!\, a -_c b$

»Jeżeli a jest większe lub równe całkowicie b, to ma sens różnica całkowita $a -_c b$«.

Dowód:

(1) Założenie mówi nam po pierwsze, że: $a, b \,\varepsilon\, N_0$ [§ 5 tw. 2 i df. $\leqq_c$],

(2) o ile $a > b$, to istnieje takie x, że
$a, b \,\varepsilon\, N_0 \cdot x \,\varepsilon\, N_0 \cdot b +_c x = a$ [df. większości],

(3) o ile $a =_c b$, to

$$a, b \,\varepsilon\, N_0 \cdot 0 \,\varepsilon\, N_0 \cdot b +_c 0 = a$$

— a więc w obu wypadkach:

$$(\exists x)\{a, b \,\varepsilon\, N_0 \cdot x \,\varepsilon\, N_0 \cdot b +_c x = a\}.$$

4. Przypuśćmy, że

$$a, b \,\varepsilon\, N_0 \cdot x, y \,\varepsilon\, N_0 \cdot b +_c x = a \cdot b +_c y = a$$

Wtedy: (1) $b + x = b + y$
(2) $b, x, y \,\varepsilon\, N_0$,

więc prawo monotonji dodawania [§ 4, tw. 4) da nam:

$$x = y.$$

Widzimy ostatecznie, że przy naszych założeniach:

$$E!\, a -_c b.$$

Tw. 2: $E!\, a -_c b \cdot \supset \cdot a, b \,\varepsilon\, N_0 \,.\, a \geqq_c b.$

»Jeżeli ma sens $a -_c b$, to $a, b \varepsilon N_0$ i $a \geqq_c b$«.

Dowód: (1) Założenie powiada:

$$(\exists x)(a, b \varepsilon N_0 \cdot x \varepsilon N_0 . b + x = a),$$

co w szczególności mówi, że $a, b \varepsilon N_0$.

(2) Niechaj z_0 będzie takiem, że

$$z_0 \varepsilon N_0 \cdot b + z_0 = a,$$

wtedy wedle poprzednich twierdzeń [§ 5]

$$a \geqq b.$$

Uwaga: Twierdzenia 1 i 2 mówią razem, że

$$E! a -_c b :\equiv: a, b \varepsilon N_0 \cdot a \geqq_c b.$$

Twierdzenie z logiki I: Jeżeli ma sens $(\imath x)\varphi(x)$, to $(\imath x)\varphi(x)$ spełnia warunek φ — w przeciwnym wypadku nie spełnia.

(1) $\quad E!(\imath x)\varphi(x) \cdot \supset \cdot \quad \varphi\{(\imath x)\varphi(x)\}$

(2) $\quad \sim E!(\imath x)\varphi(x) \cdot \supset \cdot \sim \varphi\{(\imath x)\varphi(x)\}$.

Uwaga: zdanie (2) nie jest bynajmniej kontrapozycją zdania (1)!!

Uzyskamy tą drogą:

Tw. 3: $\quad a \geqq_c b . \supset \cdot a -_c b \varepsilon N_0$.

Tw. 4: $\quad a \geqq_c b \cdot \supset \cdot b +_c (a -_c b) = a$.

Tw. 4$^{\text{bis}}$: $a \geqq_c b \cdot \supset \cdot (a -_c b) +_c b = a$

{gdyż wtedy już $a -_c b \varepsilon N_0$ i można stosować twierdzenie o przemienności dodawania}.

Przykład:

Prawdą jest, że

1. $\quad 2 +_c (3 -_c 2) = 3$, bo ma sens $3 -_c 2$.

N i e p r a w d ą jest, że

2. $3 +_c (2 -_c 3) = 2$, bo n i e m a s e n s u $2 -_c 3$!

U w a g a 1. Pisać będziemy w dalszym ciągu krótko $a - b$ zamiast $a -_c b$, o ile nie zajdzie z tego powodu żadne nieporozumienie.

U w a g a 2. Często dla wygody będziemy chcieli oznaczyć wyrażenie kształtu $(\iota x)\, \varphi(x)$ jedną literą jako symbolem pewnego elementu logicznego; otóż czynić to będziemy jedynie wtedy, gdy upewnimy się poprzednio lub przypuścimy, że $(\iota x)\, \varphi(x)$ m a s e n s.

T w i e r d z e n i e z l o g i k i II:

1. Zdanie:

$$(\iota x)\, \varphi(x) = a$$

oznacza, że

$$(\alpha) \quad E!\, (\iota x)\, \varphi(x)$$

i

$$(\beta) \quad \varphi(a)$$

2. Orzeczenie, że $(\iota x)\, \varphi(x)$ spełnia warunek Φ zawsze pociąga za sobą, że m a s e n s $(\iota x)\, \varphi(x)$.

U w a g a: Ponieważ symbol kształtu $(\iota x)\, \varphi(x)$ n i e z a w s z e oznacza jakiś element logiczny, więc operowanie nim jako symbolem elementu musi wymagać pewnej ostrożności. Przedewszystkiem $(\iota x)\, \varphi(x)$ nie mogłoby spełniać ż a d n e g o warunku, o ileby nie zachodziło »$E!\, (\iota x)\, \varphi(x)$«!

Niezmiernie subtelne pojęcie deskryptu i jego teorja, której fragmenty poznajemy obecnie, pochodzą od Bertranda Russella.

20. Udowodnimy teraz szereg twierdzeń z dziedziny odejmowania.

Tw. 5 $a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a - a = 0$

Dowód: (1) Mamy $a \varepsilon N_0 \cdot a \geqq a$, więc ma sens $a - a$, lecz dalej

(2) $a, a \varepsilon N_0 \cdot 0 \varepsilon N_0 \cdot a + 0 = a$

więc warunek, na tle którego powstało pojęcie różnicy, jest dla 0 spełniony:

(3) Stąd wedle tw. log. II wniosek

$$a - a = 0$$

Tw. 6. $a \varepsilon N_0 \cdot \supset a - 0 = a$

Dowód: (1) $a \varepsilon N_0$ z założenia, $0 \varepsilon N_0$ z postulatu i $a \geqq 0$ z tw. 3 β § 5 po łatwej przeróbce, zatem $E!(a - 0)$

(2) $a, 0 \varepsilon N_0 \cdot a \varepsilon N_0 \cdot 0 + a = a$,

więc warunek tworzący pojęcie różnicy jest spełniony przez a.

(3) Stąd wniosek: $a - 0 = a$.

Tw. 7. $a, b, c \varepsilon N_0 \cdot b + c = a \cdot \supset \cdot a - b = c$

Dowód:

(1) Skoro $b + c = a$, to $a \geqq b$ więc $E!(a - b)$

(2) $a, b \varepsilon N_0 \cdot c \varepsilon N_0 \cdot b + c = a$

(1) i (2) dają nam wedle tw. log. II wniosek żądany.

Tw. 8. $a - b = c \cdot \supset \cdot a = b + c \cdot a, b, c \varepsilon N_0$.

Dowód:

(1) $a - b$ musi mieć sens, więc $a, b \varepsilon N_0$.

(2) c musi spełnić warunek tworzący różnicę, więc $c \varepsilon N_0$ i $a = b + c$.

Tw. 9. $a - b = c \cdot \supset \cdot a - c = b$

Dowód:

(1) $a - b = c \cdot \supset \cdot a = b + c \cdot a, b, c \,\varepsilon\, N_0$ [tw. 8]

(2) $a, b, c \varepsilon N_0 \cdot b + c = a \cdot \supset \cdot a, b, c \,\varepsilon\, N_0 \cdot c + b = a$

(3) $a, b, c \varepsilon N_0 \cdot c + b = a \cdot \supset \cdot a - c = b$ [tw. 7]

Tw. 10. $c - a = c - b \cdot \supset \cdot a = b.$

Dowód:

(1) Z założenia wynika: $E!(c - a) \cdot E!(c - b)$.

(2) Stąd: $c - a \,\varepsilon\, N_0 \cdot c - b \,\varepsilon\, N_0 \cdot a, b, c \,\varepsilon\, N_0$.

(3) Następnie:

$$c = a + (c - a) \quad (\alpha)$$

$$c = b + (c - b) \quad (\beta),$$

skąd:

$$a + (c - a) = b + (c - b) \quad (\gamma),$$

a że z założenia $c - a = c - b$, więc:

$$a + (c - a) = b + (c - a).$$

Ostatecznie wedle prawa monotonji:

$$a = b.$$

Tw. 11. $a\, b \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot (a + b) - b = a$

Dowód:

(1) Założenie daje nam:

$$a, a + b, b \,\varepsilon\, N_0 \cdot a + b \geqq b,$$

stąd:

$$E!\{(a + b) - b\}$$

(2) $a + b, b \,\varepsilon\, N_0 \cdot a \,\varepsilon\, N_0 \cdot b + a = a + b,$

więc warunek tworzący różnicę jest spełniony przez a,

a zatem:

$$(a + b) - b = a$$

Tw. 12: $a \geqq_c b \cdot \supset \cdot a - (a - b) = b.$

Dowód:

1. Założenie pociąga: $E!(a - b)$

Oznaczmy $a - b \overset{df}{=} c$, wtedy:

$$a = b + c = c + b, c \varepsilon N_0$$

2. Tw. 7 pozwoli nam napisać:

$$a - c = b \text{ czyli } a - (a - b) = b.$$

Określenia upraszczające pisanie:

$$a + b - c \overset{df}{=} (a + b) - c$$
$$a - b + c \overset{df}{=} (a - b) + c$$
$$a - b - c \overset{df}{=} (a - b) - c.$$

Tw. 13. $a \varepsilon N_0 \cdot b \geqq c \cdot \supset \cdot (a + b) - (a + c) = b - c$

Dowód:

1. Dzięki założeniu: $E!(b - c)$, $b - c \varepsilon N_0$
2. $(a + c) + (b - c) = a + [c + (b - c)] = a + b$,
3. stąd zaś $(a + b) - (a + c) = b - c$.

Tw. 14. $a \varepsilon N_0 \cdot b \geqq c : \supset : a + (b - c) = a + b - c$.

Dowód:

1. $E!(b - c)$, $b - c \varepsilon N_0$,
2. $a + (b - c) + c = a + [(b - c) + c] = a + b$,
3. stąd już $a + (b - c) = a + b - c$.

Tw. 15: $b \varepsilon N_0 \cdot a \geqq c \cdot \supset \cdot a + b - c = a - c + b$.

Dowód:

1. Dzięki założeniu $E!(a - c)$, $a - c \varepsilon N_0$,
2. $(a - c + b) + c = (a - c) + (b + c) = (a - c) + (c + b) = [(a - c) + c] + b = a + b$.
3. Stąd już $a - c + b = a + b - c$.

Tw. 16:

$$a \geqq_c c \cdot b \geqq_c c \cdot \supset \cdot a + (b - c) = a - c + b.$$

Dowód:

1. $E!(b - c) \cdot b - c \, \varepsilon \, N_0$ wedle założenia,
2. $a - c + b = a + b - c$ dzięki założeniom i tw. 15,
3. $a + (b - c) + c = a + [(b - c) + c] = a + b$,

skąd: $a + (b - c) = a + b - c = a - c + b.$

Tw. 17:

$$a \geqq_c b \cdot b \geqq_c c : \supset : a - b + c = a - (b - c).$$

Dowód:

1. $E!(b - c) \cdot E!(a - b)$,
2. $(a - b) + c + (b - c) = (a - b) + {}$ $+ [c + (b - c)] = (a - b) + b = a$,
3. stąd już $(a - b) + c = a - (b - c)$.

Tw. 18:

$$b \geqq_c c \cdot a \geqq_c b - c \cdot \supset \cdot a - (b - c) = a + c - b.$$

Dowód:

1. $E!(b - c) \cdot E![a - (b - c)]$,
2. $[a - (b - c)] + b = a + [b - (b - c)] = a + c$ wedle twierdzenia 16, gdyż i tu:

$$(\alpha) \quad a \geqq b - c$$

$$(\beta) \quad (b - c) + c = b \text{ więc } b \geqq b - c,$$

3. stąd już wynika:

$$a - (b - c) = a + c - b.$$

Tw. 19:

$$b \cdot c \, \varepsilon \, N_0 \cdot a \geqq_c b + c \cdot \supset \cdot a - (b + c) = a - b - c.$$

Dowód:

1. $E! a - (b + c)$; oznaczmy $a - (b + c) = s$,

wtedy: $a = s + (b + c) = s + (c + b) = (s + c) + b$
stąd: $a - b = s + c$, a stąd: $a - b - c = s$
$= a - (b + c)$.

Tw. 20:

$$b, c \varepsilon N_0 \cdot a \geqq_c b + c \cdot \supset \cdot a - b - c = a - c - b.$$

Dowód: Z tw. 19 wynika:

$$a - b - c = a - (b + c) = a - (c + b) = a - c - b.$$

20. A teraz jeszcze kilka twierdzeń o nierównościach.

Tw. 21. $a >_c b \cdot \supset \cdot a - b >_c 0$.

Dowód:

1. $\qquad E!(a - b) \cdot (a - b) \varepsilon N_0$.
$\qquad a - b + b = a$,

2. gdyby $a - b = 0$, to byłoby $a = b$ co wykluczyłoby: $a >_c b$ wedle trichotomji.

Tw. 22: $a >_c b \cdot b \neq 0 \cdot a >_c a - b$.

Dowód: $E!(a - b) \cdot (a - b) + b = a \cdot b \neq 0$, więc wedle definicji większości

$$a > a - b.$$

Tw. 23:

$$a \geqq b \cdot b >_c c \cdot \supset \cdot a - b < a - c.$$

Dowód:

1. $\qquad a, b, a - c, a - b \varepsilon N_0$.

2. Mamy trzy możliwości:

$$a - b > a - c \vee a - b = a - c \vee a - b < a - c.$$

3. Pierwsza z nich pociągnęłaby:

$$\begin{array}{c} a - b > a - c \\ b > c \\ \hline a > a \end{array} \qquad \text{co wykluczone.}$$

4. Druga dałaby:

$$a - b = a - c, \quad \text{więc} \quad b = c \quad [\text{tw. } 10],$$

co znów sprzeczne z założeniem wedle trichotomji.

5. Pozostaje jedynie trzecia ewentualność.

Pomijamy wiele drobnych twierdzeń z dziedziny odejmowania, które czytelnik zdoła sam z łatwością udowodnić.

§ 7. Mnożenie.

22. Mnożenie (całkowite) liczb całkowitych wprowadzimy zupełnie podobnie jak dodawanie drogą definicji zwrotnej — przyczem uwagi o wartości tej definicji wypowiedziane w poprzednim wypadku stosują się oczywiście i w obecnym.

Stawiamy dwie definicje.

Df. I. $a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \times_c 0 = 0$

Df. II. $a, b \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \times_c \text{seq}\, b = (a \times_c b) +_c a$

Dodatkowo umawiamy się, że

$$a \times b \pm c \stackrel{df}{=} (a \times b) \pm c,$$
$$a \pm b \times c \stackrel{df}{=} a \pm (b \times c),$$
$$a \times b \pm c \times d \stackrel{df}{=} (a \times b) \pm (c \times d),$$

a to celem uproszczenia w pisaniu i podobnie opuścimy jak poprzednio znaczek ($_c$) przy znaku $\times$ o ile nie wyniknie stąd żadne nieporozumienie.

Tw. 1. $a, b \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \times b \varepsilon N_0$

Dowód indukcyjny

1. Dla $b = 0$ mamy

$a \times 0 = a$, więc z założenia $a \times 0 \varepsilon N_0$.

2. Gdyby $k \varepsilon N_0$ i $a \times k \varepsilon N_0$, to

$$a \times \operatorname{seq} k = a \times k + a,$$

lecz $a \times k$, $a \,\varepsilon\, N_0$ z założenia i naszego przypuszczenia, więc twierdzenie o sumie powiada wtedy, że

$$a \times k + a \,\varepsilon\, N_0,$$

a tem samem

$$a \times \operatorname{seq} k \,\varepsilon\, N_0.$$

3. Indukcja zupełna kończy dowód.

Tak w obecnym, jak i w następnych dowodach pominiemy szczegółowe odnośniki do twierdzeń poprzednich.

Tw. 2. $\quad a \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot\, 0 \times a = 0.$

Dowód przez indukcję:

1. Dla $a = 0$ mamy $0 \times 0 = 0 \,\varepsilon\, N_0$ z definicji i postulatu.

2. Gdyby $k \,\varepsilon\, N_0$ i $0 \times k = 0$, to

$$0 \times \operatorname{seq} k = 0 \times k + 0 = 0 + 0 = 0 \,\varepsilon\, N_0.$$

3. Ind. k. d.[1]).

Tw. 3. $\quad a \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot\, 1 \times a = a.$

Dowód indukcyjny:

1. Dla $a = 0$ mamy $1 \times 0 = 0 = a$,

2. gdyby $k \,\varepsilon\, N_0$ i $1 \times k = k$, to

$$1 \times \operatorname{seq} k = 1 \times k + 1 = k + 1 = \operatorname{seq} k.$$

3. Ind. k. d.

Tw. 4:

$$a, b, c \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot\, (a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

Dowód ind.[2])

1. Dla $c = 0$ mamy: $(a + b) \times 0 = 0 = 0 + 0 =$
$= a \times 0 + b \times 0.$

---

[1]) Indukcja (zupełna) kończy dowód.

[2]) Indukcyjny.

2. Gdyby $k \varepsilon N_0$ i $(a+b) \times k = a \times k + b \times k$, to
$(a+b) \times \operatorname{seq} k = (a+b) \times k + (a+b) =$
$= (a \times k + b \times k) + (a+b) =$
$= (a \times k + a) + (b \times k + b) =$
$= a \times \operatorname{seq} k + b \times \operatorname{seq} k.$

3. Ind. k. d.

Tw. 5. $a, b \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \times b = b \times a.$

Dowód ind.:

1. Dla $b = 0$ mamy $a \times 0 = 0$ i $0 \times a = 0$ wedle tw. 2 i def. I.

2. Gdyby $k \varepsilon N_0$ i $a \times k = k \times a$, to
$a \times \operatorname{seq} k = a \times k + a = k \times a + 1 \times a =$
$= (k+1) \times a = \operatorname{seq} k \times a.$

3. Ind. k. d.

Ad. tw. 5:

$$a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \times 1 = a.$$

Dowód:

$$a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \times 1 = 1 \times a$$
$$a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot 1 \times a = a$$
$$a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \times 1 = a.$$

Tw. 6. $a, b, c\, N_0 \cdot \supset \cdot c \times (a+b) = c \times a + c \times b.$

Dowód:

Z tw. poprzednich: $c \times (a+b) = (a+b) \times c =$
$= a \times c + b \times c = c \times a + c \times b.$

Tw. 7. $a, b, c \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot (a \times b) \times c = a \times (b \times c).$

Dowód ind.

1. Dla $c = 0$ mamy:
$(a \times b) \times 0 = 0 = a \times 0 = a \times (b \times 0).$

2. Gdyby $k \varepsilon N_0$ i $(a \times b) \times k = a \times (b \times k)$, to
$(a \times b) \times \operatorname{seq} k = (a \times b) \times k + a \times b =$
$= a \times (b \times k) + a \times b =$

$$= a \times (b \times k + b) =$$
$$= a \times (b \times \mathrm{seq}\, k)$$

3. Ind. k. d.

Definicje: $a \times b \times c \overset{df}{=} (a \times b) \times c$
$a \times b \times c \times d \overset{df}{=} (a \times b \times c) \times d$
i t. d.

Tw. 8. $a, b, c, d \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot (a + b) \times (c + d) =$
$= a \times c + b \times c + a \times d + b \times d.$

Dowód:

$$(a + b) \times (c + d) = (a + b) \times c + (a + b) \times d$$
$$= (a \times c + b \times c) + (a \times d + b \times d)$$
$$= a \times c + b \times c + a \times d + b \times d.$$

Tw. 9:
$$a, d \,\varepsilon\, N_0 \cdot b \geqq_c c \cdot \supset \cdot a \times (b - c) = a \times b - a \times c.$$

Dowód:

1. Wedle założenia:
$E!\, b - c,\ b - c \,\varepsilon\, N_0, (b - c) + c = b.$
2. Zatem: $a \times [(b - c) + c] = a \times (b - c) + a \times c$
$a \times [(b - c) + c] = a \times b.$
3. Stąd: $a \times b - a \times c = a \times (b - c).$

23. Tw. 10 [1]: $a <_c 1 \cdot \supset \cdot a = 0.$

Dowód:

1. Mieliśmy twierdzenie: [nr 17 tw. pom.]
$a \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot a = 0 \vee a = 1 \vee a > 1,$
2. lecz $a \,\varepsilon\, N_0 \cdot a < 1 \cdot \supset \cdot \sim (a = 1)$
$a \,\varepsilon\, N_0 \cdot a < 1 \cdot \supset \cdot \sim (a > 1),$
3. pozostaje zatem: $a = 0.$

Lemmat: $a >_c 0 \cdot \supset \cdot a \geqq_c 1.$

Dowód:

1. Z założenia wynika, że $a \,\varepsilon\, N_0,$

[1]) pomocnicze.

więc: $a < 1 \vee a = 1 \vee a > 1.$

2. Lecz $a < 1$ dałoby $a = 0$, co wyklucza $a > 0$.

3. Zatem pozostaje $a = 1 \vee a > 1$, co łącznie z $a \varepsilon N_0$ da nam: $a \geqq 1$.

Uwaga: Gdy $a >_c 1$, to zawsze można napisać $a = 1 +_c s$, gdzie $s \neq 0 \cdot s \varepsilon N_0$, gdyż wtedy:

$$E!(a-1) \cdot a - 1 \varepsilon N_0 \cdot 1 + (a-1) = a \cdot a - 1 > 0.$$

Ogólniej, gdy $a \geqq 1$, to kładąc $s = a - 1$
mamy: $a = 1 +_c s$,
gdzie: $s \varepsilon N_0$.

Tw. 11: $a >_c 0 \cdot b >_c 0 \cdot \supset \cdot a \times b >_c 0$.

Dowód:

1. Z założenia otrzymamy: $a, b \varepsilon N_0$ a więc
$a \times_c b \varepsilon N_0$.
2. Połóżmy: $a = 1 + s$,
$b = 1 + t$, gdzie $s, t \varepsilon N_0$.
3. Wtedy: $a \times b = (1 + s)(1 + t)) =$
$= 1 + \{s + t + s \times t\} \geqq 1 > 0.$

Tw. 12:

$$a, b \varepsilon N_0 \cdot a \times b = 0 \cdot \supset \cdot a = 0 \vee b = 0.$$

Dowód: Zapamiętajmy najpierw następujące reguły z logiki zdań:

α. $\sim (p \cdot q) \cdot \equiv \cdot \sim p \vee \sim q$

β. $\sim (p \vee q) \cdot \equiv \cdot \sim p \cdot \sim q$;

słownie: α. *nie* zachodzi p *i* q jest równoważne
nie zachodzi p *lub nie* zachodzi q.

β. *nie* zachodzi p *lub* q jest równoważne
nie zachodzi p *i nie* zachodzi q.

Są to tak zwane prawa De Morgana, które nam pozwalają tworzyć zaprzeczenie wyrażeń postaci $p \cdot q$ jak też $p \vee q$. Widzimy tu, że przy *przeczeniu* łącznik *i* przechodzi w *lub* i odwrotnie.

Wracamy do dowodu: Przy założeniu, że $a, b \,\varepsilon\, N_0$ zaprzeczmy wnioskowi tw. 11:

$$\sim (a \times b > 0);$$

wynikałoby z tego:

$$\sim (a > 0 \cdot b > 0) \quad \text{[kontrapozycja]}.$$

Lecz: $\sim (a > 0 \cdot b > 0) \equiv \sim (a > 0) \vee \sim (b > 0)$,

czyli: $$a = 0 \vee b = 0,$$

co prowadzi właśnie do tw. 12.

Twierdzenie powyższe uczy nas, że:

»Jeżeli iloczyn dwóch liczb całkowitych jest zerem, to choć jeden z czynników jest zerem«.

Rola tego twierdzenia w teorji liczb jest szczególnie ważna!

Tw. 13:

$$c \,\varepsilon\, N_0 \cdot c \neq 0 \cdot a >_c b \cdot \supset \cdot a \times c >_c b \times c.$$

Dowód:

1. El $a \div b$; połóżmy $a - b = s$, będzie wtedy: $a = b + s, \quad s \,\varepsilon\, N_0, \quad s \neq 0.$
2. $s \neq 0 \cdot c \neq 0$ dadzą nam: $s \times c > 0$.
3. $a \times c = (b + s) \times c = b \times c + s \times c,$
4. stąd: $a \times c > b \times c$.

Ad tw. 13:

$$c \,\varepsilon\, N_0 \cdot a <_c b \cdot c \neq 0 \cdot \supset \cdot a \times c <_c b \times c.$$

Dowód przez odwrócenie nierówności i tw. 13.

Tw. 14: $a >_c b \cdot c >_c d \cdot \supset \cdot a \times c >_c b \times d.$

D o w ó d :

1. Z założenia $a, b, c \varepsilon N_0 \cdot c > d \geqq 0$, a więc $c > 0$, a tem samem $c \neq 0$.

2. Wobec tego:

$$a \times c > b \times c.$$

3. Lecz $b \geqq 0 \cdot c > d$, skąd $b \times c \geqq b \times d$.

Razem: $$a \times c > b \times d.$$

A d t w. 14:

$$a <_c b \cdot c <_c d \cdot \supset \cdot a \times c <_c b \times d.$$

T w. 15: $a >_c 0 \cdot b >_c 1 \cdot \supset \cdot a \times b >_c a.$

D o w ó d : Wtedy $b = 1 + s$, gdzie $s \varepsilon N_0 \cdot s > 0$, skąd: $a \times b = a \times (1 + s) = a \times 1 + a \times s$

$$= a + a \times s,$$

lecz: $a > 0$, $s > 0$, więc $a \times s > 0$.

Ostatecznie $$a \times b > a.$$

T w. 16:

$$a, b, c \varepsilon N_0 \cdot a \times c >_c b \times c \cdot c \neq 0 \cdot \supset \cdot a >_c b.$$

D o w ó d : Gdyby było $a \leqq b$, to wedle tw. 13 z natychmiastowem uzupełnieniem byłoby: $a \times c \leqq b \times c$

A d t w. 16:

$$a, b, c \varepsilon N_0 \cdot a \times c <_c b \times c \cdot c \neq 0 \cdot \supset \cdot a <_c b.$$

T w. 17:

$$a, b, c \varepsilon N_0 \cdot a \times c = b \times c \cdot c \neq 0 \cdot \supset \cdot a = b.$$

D o w ó d : gdyby $a > b$, to byłoby $a \times c > b \times c$

» $a < b$, » » $a \times c < b \times c$.

Pozostaje zatem jedynie: $a = b$.

24. Udowodnimy jeszcze kilka twierdzeń o rozdzielności mnożenia.

Tw. 18:

$$c, d \,\varepsilon\, N_0 \cdot a \geqq_r b :\supset: (a - b) \times (c + d) =$$
$$= a \times c + a \times d - b \times c - b \times d.$$

Dowód:

1. Wedle założenia $E!(a-b) \cdot a - b \,\varepsilon\, N_0$,

2. $a - b + b = a$,

a więc: $a \times (c + d) = [(a - b) + b] \times (c + d) =$
$= (a - b) \times (c + d) + b \times (c + d)$,

3. wedle tw. 6:

$$a \times c + a \times d = (a - b) \times (c + d) + (b \times c + b \times d),$$

4. wedle tw. 7 § 6:

$$(a - b) \times (c + d) = (a \times c + a \times d) - (b \times c + b \times d),$$

5. przekształcamy wedle tw. 19 § 6:

$$(a - b) \times (c + d) = a \times c + a \times d - b \times c - b \times d,$$

bo widocznie musiało być

$$a \times c + a \times d \geqq b \times c + b \times d$$

skoro różnica miała sens.

Ad tw. 18:

Zważywszy, że dzięki założeniu:

$$a \times c \geqq_r b \times c \quad \text{i} \quad a \times d \geqq_r b \times d$$

[tw. 13 i łatwe uzupełnienie]

moglibyśmy dzięki tw. 14 przekształcać wyrażenie tak:

$$(a - b) \times (c + d) = [a \times c - b \times c + a \times d] - b \times d$$
$$= a \times c - b \times c + a \times d - b \times d$$

lub:

$$(a-b)\times(c+d)=(a\times c-b\times c)+(a\times d-b\times d)$$

ale np. niekoniecznie musiałaby mieć miejsce równość:

$$(a-b)\times(c+d)=a\times c-b\times c-b\times d+a\times d!!$$

Tw. 19:

$$a, b\,\varepsilon\,N_0\cdot c\geqq_\varepsilon d\cdot\supset\cdot(a+b)\times(c-d)$$
$$=a\times c+b\times c-a\times d-b\times d.$$

Dowód:

1. Wedle założenia $c-d\,\varepsilon\,N_0$.

2. Stosujemy tw. 18 i korzystamy z przemienności mnożenia:

$$(a+b)\times(c-d)=(c-d)\times(a+b)=c\times a+c\times b-d\times a-d\times b$$
$$=a\times c+b\times c-a\times d-b\times d.$$

Tw. 20:

$$a\geqq_\varepsilon b\cdot c\geqq_\varepsilon d\cdot\supset\cdot(a-b)\times(c-d)=$$
$$=a\times c-a\times d+b\times d-b\times c$$

Dowód:

1. $$a=a-b+b$$

stąd: $a\times(c-d)=(a-b)\times(c-d)+b\times(c-d)$,

2. stosujemy tw. 9:

$$a\times c-a\times d=(a-b)\times(c-d)+(b\times c-b\times d),$$

3. wedle tw. 7 § 6:

$$(a-b)\times(c-d)=(a\times c-a\times d)-(b\times c-b\times d).$$

4. Wiedząc dzięki założeniu, że

$$b\times c\geqq b\times d$$

otrzymamy dalej:

$$(a-b)\times(c-d)=(a\times c-a\times d)+b\times d-b\times c$$
$$=a\times c-a\times d+b\times d-b\times c.$$

Ad tw. 20: Czytelnik udowodni jeszcze po chwili namysłu, że przy naszych założeniach

$$\begin{aligned}(a-b)\times(c-d) &= a\times c - b\times c + b\times d - a\times d \\ &= a\times c - b\times c - a\times d + b\times d \\ &= a\times c + b\times d - b\times c - a\times d\end{aligned}$$

i t. p.

Zbierzemy razem najważniejsze prawa mnożenia:

I. $$a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \times_c 0 = 0$$

prawo zerowego mnożenia,

II. $$a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \times_c 1 = a$$

prawo jednostkowego mnożenia,

III. $$a, b \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \times_c b = b \times_c a$$

prawo przemienności mnożenia,

IV. $$a, b, c \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot (a \times_c b) \times_c c = a \times_c (b \times_c c)$$

prawo łączności mnożenia,

V. $$a, b, c \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \times_c (b +_c c) = a \times_c b +_c a \times_c c$$

prawo rozdzielności mnożenia,

VI. $$a, b, c \varepsilon N_0 \cdot c \neq 0 \cdot a \times_c c = b \times_c c \cdot \supset \cdot a = b$$

prawo monotonji mnożenia,

VII. $$a, b \varepsilon N_0 \cdot a \times_c b = 0 \cdot \supset \cdot a = 0 \vee b = 0$$

prawo zerowego iloczynu,

§ 8. Określenie klas.

24. Nauczymy się nowej odmiany definicji. Niechaj φ będzie warunkiem dla jednej zmiennej, po-

wiedzmy x. A więc niechaj $\varphi(x)$ oznacza, że x spełnia φ. Logika pozwala nam rozważać ideę następującą:

»ogół x-ów takich, że zachodzi $\varphi(x)$«,

co oznaczymy symbolicznie przez:

$$(\hat{x})\,\varphi(x).$$

I. Twór tego typu co $(\hat{x})\,\varphi(x)$ zwiemy klasą lub zakresem warunku φ.

II. W symbolu $(\hat{x})\varphi(x)$ zmienna x jest już pozorną, a więc symbole

$$(\hat{x})\,\varphi(x),\quad (\hat{y})\,\varphi(\hat{y}),\quad \text{i t. p.}$$

oznaczają to samo.

III. Logika ostatnich czasów prowadzi głębokie badania nad zagadnieniem, kiedy dane wyrażenie zawierające x jest warunkiem (zdaniowym), ale tych rozważań my pod uwagę brać tu nie możemy. Troską autora będzie podawanie w celu tworzenia klas, jedynie takich wyrażeń zawierających zmienną, które logika nowoczesna bez wątpienia uznaje za warunki zdaniowe.

IV. Zdanie: $\varphi(a)$ — »φ zachodzi dla a« uważamy za równoważne zdaniu

$$a\,\varepsilon\,(\hat{x})\,\varphi(x)$$

»a należy do klasy warunku φ«.

V. Oznaczamy zwykle klasy jedną literą — np.:

$$\alpha \overset{df}{=} (\hat{x})\,\varphi(x),\quad \beta \overset{df}{=} (\hat{x})\,\psi(x) \text{ i t. p.}$$

VI. Jeżeli $k\,\varepsilon\,\alpha$, gdzie α jest symbolem klasy, to mówimy, że k jest elementem klasy α.

VII. Każda dana klasa α powstała z jakiegoś warunku np. φ takiego, że było:

$$\alpha \overset{df}{=} (\hat{x})\, \varphi(x).$$

W pojęciach pierwotnych figuruje klasa N_0, więc i ona powstała z pewnego warunku, lecz warunek ten nie został nam wymieniony w A. l. c.

VIII. Klasy α i β zwiemy identycznemi, jeżeli dla każdego x zdania:

$$x\,\varepsilon\,\alpha \quad \text{i} \quad x\,\varepsilon\,\beta$$

są równoważne: $(x)\{x\,\varepsilon\,\alpha \equiv x\,\varepsilon\,\beta\}$. Orzeczenie to można zastąpić dwoma łącznemi:

$$\left.\begin{array}{lll} & (1) & x\,\varepsilon\,\alpha \cdot \supset \cdot x\,\varepsilon\,\beta \\ \text{i} & (2) & x\,\varepsilon\,\beta \cdot \supset \cdot x\,\varepsilon\,\alpha \end{array}\right\} \text{ dla każdego } x.$$

A zatem:

Df. I: $\alpha = \beta \cdot \overset{df}{=} \cdot (x)\{x\,\varepsilon\,\alpha \cdot \equiv \cdot x\,\varepsilon\,\beta\}$.

IX. Df. II. Niechaj α i β będą klasami. Powiemy, że α zawiera się w β, jeżeli każdy element klasy α należy też do klasy β. Zapiszemy:

$$\alpha \subset \beta \cdot \overset{df}{=} \cdot (x)\{x\,\varepsilon\,\alpha \cdot \supset \cdot x\,\varepsilon\,\beta\}.$$

Przyjrzenie się bliższe tej definicji pozwala nam zauważyć, że $\alpha \subset \beta$ wcale nie wyklucza, by $\alpha = \beta$. Mamy nawet stale:

$$\alpha \subset \alpha.$$

Gdyby $\alpha \subset \beta \cdot \beta \subset \alpha$, to jak łatwo zauważyć $\alpha = \beta$.

25. Dzięki powyższym rozważaniom możemy teraz wprowadzić szereg nowych definicyj z zakresu A. l. c,

Df. I. $N_1 \overset{df}{=} (\hat{x})\{0 <_c x\}$

»ogół x-ów całkowicie większych od zera« — bardzo często nazywany ten zbiór ogółem liczb naturalnych.

Wiemy jednak, że

$$(x)\{0 <_c x = 1 \leqq_c x\}, \tag{1}$$

zatem możemy również podłożyć:

$$N_1 = (\hat{x})\{1 \leqq_c x\}$$

Zdania: $a \varepsilon N_0 \cdot a \neq 0$ (1)

i $a \varepsilon N_1$ (2)

są też równoważne dla każdego a.

Niech będzie $k \varepsilon N_0$; chcemy utworzyć ogół liczb całkowitych x takich, by $x \leqq k$; stawiamy definicję;

$$N_k \overset{df}{=} (x)\{k \leqq_c x\}$$

Zdania:

$$a \varepsilon N_k \quad \text{i} \quad k \leqq_c a$$

są stale równoważne.

Zastanówmy się co byłoby, gdyby k nie należało do liczb całkowitych? Warunek $k \leqq_c x$ wymaga da swego spełnienia, by $k \varepsilon N_0$; zdanie $k \leqq_c a$ nie może być prawdą w innym wypadku, zatem albo jest fałszem lub wogóle nie ma sensu.

Uwaga: Z definicji II nr 24 (zawieranie się klas) wynika z łatwością:

$$N_1 \subset N_0, \quad N_2 \subset N_1, \quad N_2 \subset N_0$$

ale też: $N_0 \subset N_0, \quad N_1 \subset N_1,$ i t. p.

Niechaj będzie $\alpha \subset N_0$. O każdej klasie α, która czyni zadość powyższemu warunkowi będziemy mówili, że jest to klasa całoliczbowa i zapiszemy: $\alpha \varepsilon Cls\, N_0$. Stąd:

Df. III. $\alpha \varepsilon Cls\, N_0 \overset{df}{=} \alpha \subset N_0$.

Niechaj będzie teraz: $\alpha \varepsilon Cls\, N_0$ i $k \varepsilon N_0$.

Utworzymy ogół takich elementów, które powstaną przez dodanie do k dowolnej liczby należącej do N_0. Klasę taką oznaczymy przez $k +_c \alpha$ lub $\alpha +_c k$.

Przykład: $N_1 = N_0 + 1$, $N_2 = N_0 + 2$ i t. d.

Podamy definicję formalną tego pojęcia. Zbadajmy treść zdania: $x \varepsilon k +_c \alpha$.

Mówi ono, że x powstało z jakiejś liczby klasy α, powiedzmy y, przez dodanie jej do k — stwierdza zatem pewne istnienie, a mianowicie, że:

$$(\exists y)\{y \varepsilon \alpha \cdot x = k +_c y\}$$

»istnieje takie y, że $y \varepsilon \alpha$ i $x = k +_c y$«.

Włączymy jeszcze w formalną definicję klasy $k + \alpha$ zastrzeżenie, że k ma być liczbą całkowitą, a α klasą całoliczbową.

A zatem:

Df. IV: $\alpha +_c k \overset{df}{=} (x)\{(\exists y)(y \varepsilon \alpha \cdot x = k +_c y) \cdot$
$\cdot k \varepsilon N_0 \cdot \alpha \varepsilon Cls\, N_0\}$.

W zdaniu objaśniającem w mowie potocznej znaczenie zwrotu: $x \varepsilon k + \alpha$ nie było widocznem na pierwszy rzut oka, że mowa tu o »istnieniu«. Było ono ukryte w słówku »jakieś«. Należy przyzwyczaić się do odszukiwania takich ukrytych stwierdzeń istnienia, co początkującemu sprawia niejednokrotnie dość znaczną trudność.

Dodatkowo położymy jeszcze:

$$k +_c \alpha \stackrel{df}{=} \alpha +_c k.$$

Należy z naciskiem zauważyć, że znak $+_c$ stoi w $k +_c \alpha$ i $\alpha +_c k$ między liczbą całkowitą, a klasą całoliczbową.

Nie jest to nasze dawne dodawanie!

Niech będzie $k \varepsilon N_0 \cdot \alpha \varepsilon Cls\, N_0$; każdy element klasy α pomnożymy przez liczbę k, tak uzyskane elementy utworzą klasę, którą oznaczymy przez $k \times_c \alpha$ lub $\alpha \times_c k$ ewent. $k\alpha$.

Przykład:

$1\,N_0 = N_0$, $2\,N_0 =$ klasa liczb parzystych

$2\,N_0 + 1 =$ »klasa nieparzystych«

$2\,N_1 =$ »klasa parzystych większych od zera« i t. p.

Określenie formalne:

Df. V.

$$k \times_c \alpha \stackrel{df}{=}$$
$$(\hat{x}) \{(\exists y)(y \varepsilon \alpha \cdot x = k \times_c y) \cdot k \varepsilon N_0 \cdot \alpha \varepsilon Cls\, N_0\}$$

Dodatkowo: (1) $\alpha \times_c k \stackrel{df}{=} k \times_c \alpha$

(2) $k\alpha \stackrel{df}{=} k \times_c \alpha$.

Mamy tu znowu »ukryte« stwierdzenie istnienia w definicji $k \times \alpha$.

Df. V^{bis}: Klasę $a\,N_0$ zwiemy klasę wielokrotności liczby a.

Zdanie: »b jest wielokrotną liczbą a« ma zatem oznaczać:

$$b \varepsilon a\,N_0,$$

a więc:

$$(\exists z)(z \varepsilon N_0 \cdot b \times_c z = a) \cdot b \varepsilon N_0.$$

§ 9. Wielokrotności.

26. Wprowadziliśmy już definicję wielokrotności liczby całkowitej, zapamiętajmy jednak, że zdania:

$$a\,\varepsilon\,k \dotplus_c \alpha \quad \text{czy} \quad a\,\varepsilon\,k \times_c \alpha$$

pociągają za sobą stale, że

$$a, k\,\varepsilon\,N_0 \cdot \alpha\,\varepsilon\,Cls\,N_0.$$

Stąd otrzymamy najpierw twierdzenie:

Tw. 1. $a\,\varepsilon\,b\,N_0 \cdot \supset \cdot a, b\,\varepsilon\,N_0.$

Udowodnimy obecnie kilka twierdzeń klasycznych o wielokrotnościach.

Tw. 2. $a\,\varepsilon\,k\,N_0 \cdot b\,\varepsilon\,k\,N_0 \cdot \supset \cdot a \dotplus_c b\,\varepsilon\,k\,N_0$

»Suma wielokrotności liczby k jest też wielokrotnością tej liczby«

Dowód:

(1). Założenie $a\,\varepsilon\,k\,N_0$ powiada, że

$$(\exists y)\{y\,\varepsilon\,N_0 \cdot a = k \times y\} \cdot k\,\varepsilon\,N_0.$$

Niechaj takiem y będzie nprz. y_0,
możemy zatem położyć:

$$a = k \times y_0, \quad \text{przyczem} \quad y_0\,\varepsilon\,N_0 \cdot k\,\varepsilon\,N_0.$$

2. Analogicznie $b\,\varepsilon\,k\,N_0$ pozwoli nam obrać z_0 tak, by

$$b = k \times z_0, \quad z_0\,\varepsilon\,N_0.$$

3. Stąd: $a + b = k \times (y_0 + z_0)$, $y_0 + z_0\,\varepsilon\,N_0$,
a więc $a + b\,\varepsilon\,k\,N_0$.

Tw. 3: $a\,\varepsilon\,k\,N_0 \cdot b\,\varepsilon\,k\,N_0 \cdot \mathrm{E!}(a - b) \cdot \supset$
$\supset \cdot (a - b)\,\varepsilon\,k\,N_0.$

»Różnica wielokrotności liczby k należy, o ile ma sens, do wielokrotności tejże liczby«

Dowód:

1. Założenia pozwalają położyć:

$$a = k \times y_0, \quad y_0 \varepsilon N_0 \cdot k \varepsilon N_0 .$$
$$b = k \times z_0, \quad z_0 \varepsilon N_0 .$$

2. Prócz tego $\mathrm{El}(a - b)$, więc:

$$\mathrm{El}(k \times y_0 - k \times z_0).$$

3. Jeżeli teraz $k = 0$, to

$$a = b = 0, \quad a - b = 0 = 0 \times 0,$$

więc $$a - b \varepsilon k N_0$$

4. Jeżeli $k \neq 0$, to nierówność:

$$a \geqq b, \quad \text{czyli} \quad k \times y_0 \geqq k \times z_0$$

pociągnie za sobą, że

$$y_0 \geqq z_0 ,$$

więc $$\mathrm{El}(y_0 - z_0).$$

Wobec tego:

$$a - b = k \times (y_0 - z_0), \quad y_0 - z_0 \varepsilon N_0$$

i ostatecznie:

$$a - b \varepsilon k N_0 .$$

Tw. 4: $b \varepsilon N_0 \cdot a \varepsilon k N_0 \cdot \supset \cdot a \times b \varepsilon k N_0 .$

»Wielokrotność wielokrotności liczby k jest dalej wielokrotnością tejże liczby«.

Dowód: 1. Położymy:

$$a = k \times y_0 , \quad \text{przyczem} \quad y_0 \varepsilon N_0 , \quad k \varepsilon N_0 .$$

2. Stąd:

$$a \times b = k \times y_0 \times b = k \times (y_0 \times b) \quad \text{i} \quad y_0 \times b \,\varepsilon\, N_0,$$

więc: $$a \times b \,\varepsilon\, k N_0 .$$

Tw. 5: $$k \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot 0 \,\varepsilon\, k N_0 .$$

»Zero jest wielokrotnością każdej liczby całkowitej«

Dowód:

$$0 = k \times 0, \quad 0 \,\varepsilon\, N_0, \text{ więc } 0 \,\varepsilon\, k N_0,$$

Tw. 6: $$k \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot k \,\varepsilon\, 1 N_0 .$$

»Każda liczba całkowita jest wielokrotnością jedynki«

Dowód:

$$k = 1 \times k, \quad k \,\varepsilon\, N_0, \text{ więc } k \,\varepsilon\, 1 N_0 .$$

Tw. 7: $$k \,\varepsilon\, 0 \times_c N_0 \cdot \supset \cdot k = 0 .$$

»Każda wielokrotność zera jest zerem«

Dowód: Musi być:

$$k = 0 \times y_0, \quad \text{gdzie} \quad y_0 \,\varepsilon\, N_0,$$

więc $$k = 0 .$$

§ 10. Dzielenie.

27. Określimy iloraz liczb całkowitych, zupełnie podobnie jak różnicę, przy pomocy deskryptu (opisu) jednostkowego.

Df. $$a/_c b \overset{df}{=} (\imath x)\{a, b \,\varepsilon\, N_0 \cdot x \,\varepsilon\, N_0 \cdot b \times_c x = a\} .$$

»$a/_c b$ oznacza liczbę całkowitą x, która pomnożona przez całkowite b daje całkowite a, o ile taka istnieje i tylko jedna«.

U w a g a : Piszemy również $a :_c b$ lub $\frac{a}{b}{}_c$ zamiast $a /_c b$, a wreszcie opuszczamy znaczek (c) o ile nie zachodzi możliwość nieporozumienia.

T w. 1: $b \neq 0 \cdot a \varepsilon b N_0 \cdot \supset \cdot \mathrm{E}! a / b$,

a więc warunkami, z k t ó r y c h w y n i k a sens $a /_c b$, czyli jak mówią matematycy, warunkami d o s t a t e c z n e m i dla sensu będą:

$$a, b \varepsilon N_0 \cdot b \neq 0 \cdot a \varepsilon b N_0 .$$

D o w ó d:

1. $a \varepsilon b N_0$ pozwala nam stwierdzić, że

$a, b \varepsilon N_0$ i że $(\exists x) \{x \varepsilon N_0 \cdot a = b \times_c x\}$,

zatem będzie też formalnie:

$$(\exists x) \{a, b \varepsilon N_0 \cdot x \varepsilon N_0 \cdot b \times_c x = a\}$$

czyli, że i s t n i e n i e jest już stwierdzone.

2. Przypuśćmy, że

$$a = b \times y_0 , \quad \text{gdzie} \quad y_0 \varepsilon N_0$$
$$a = b \times z_0 , \quad \text{gdzie} \quad z_0 \varepsilon N_0,$$

wtedy dzięki założeniu, że $b \neq 0$ wyniknie:

$$y_0 = z_0 .$$

Udowodniliśmy zatem i j e d n o t l i w o ś ć.

1. i 2. powiadają, że

$$\mathrm{E}! a /_c b .$$

Prowadzimy badanie dalej.

T w. 2: $\mathrm{E}! a / b : \supset : a, b \varepsilon N_0 \cdot a \varepsilon b N_0 .$

D o w ó d:

Skoro $\mathrm{E}! a/b$, to a/b spełnia swój w a r u n e k t w orzący, stąd prawdą jest, że

$$a, b \varepsilon N_0 \cdot a/b \varepsilon N_0 \cdot b \times (a/b) = a,$$

skąd jeszcze $\qquad a \varepsilon b N_0$.

Przypuszczamy teraz, że $a, b \varepsilon N_0$, lecz $b = 0$, mamy tu bardzo ważne twierdzenie:

Tw. 3: $\quad a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot \sim \mathrm{E!}\, a/0$

Jeżeli $a \varepsilon N_0$, to symbol $a/_c 0$ nie posiada sensu!

Dowód:

(1) Jeżeli $a \neq 0$, to ponieważ dla każdego x całkowitego mamy:

$$0 \times x = 0,$$

więc nigdy nie może być: $0 \times x = a$.

Brak nam faktu istnienia.

(2) Jeżeli $\quad a = 0$, to naprz.

$$a = 0 = 0 \times 1$$

$$a = 0 = 0 \times 2$$

i mamy choćby dwie różne liczby: 1 i 2 takie, że warunek tworzący iloraz jest formalnie spełniony. Brak nam faktu jednotliwości.

W każdym z tych wypadków otrzymujemy wniosek, że nie ma sensu a/b.

Tw. 4: $\quad \mathrm{E!}\, a/b : \supset : a/b \varepsilon N_0 \cdot b \times a/b = a$

Dowód: Założenie pociąga, że a/b spełnia swój warunek tworzący, a stąd wynika wniosek.

Tw. 5: $\quad a \varepsilon N_1 \cdot \supset \cdot a/a = 1$

Dowód:

1. Założenie da nam:

$$a \varepsilon N_0 \cdot a \neq 0 \cdot a \varepsilon 1 N_1, \quad (bo\ 1 N_1 = N_1)$$

stąd [tw. 1]: $\quad E! \, a/a$

2. Podstawmy w warunku tworzącym iloraz a/a za zmienną wartość 1. Otrzymamy:

$a, a \varepsilon N_0 \cdot 1 \varepsilon N_0 \cdot a \times 1 = a$, co jak widzimy u nas zachodzi.

Stąd wniosek. [p. § 6 nr 19 tw. z logiki II]

$$a/a = 1$$

Tw: 6: $\quad a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a/1 = a$

Dowód:

(1) Dzięki założeniu otrzymamy:

$$a \varepsilon N_0 \cdot 1 \neq 0 \cdot a \varepsilon 1 N_0,$$

więc $\quad E! \, a/1$

(2) Podstawiamy za zmienną w warunku tworzącym iloraz $a/1$ wartość a.

Otrzymamy zdanie prawdziwe:

$$a, 1 \varepsilon N_0 \cdot a \varepsilon N_0 \cdot a \times 1 = a,$$

co daje nam żądany wynik.

Tw. 7: $\quad a \varepsilon N_1 \cdot \supset \cdot 0/a = 0.$

Dowód:

(1) $\quad 0 \varepsilon N_0 \cdot a \varepsilon N_0 \cdot a \neq 0 \cdot 0 \varepsilon a N_0,$

więc $\quad E! \, 0/a.$

(2) $0, a \varepsilon N_0 \cdot 0 \varepsilon N_0 \cdot a \times 0 = 0$ zachodzi (podst. w warunku tworzącym), więc razem (1) i (2) dają $0/a = 0$.

U w a g a: Tw. 7 w y m a g a założenia, że $a \neq 0$!

T w. 8: $a \varepsilon N_0 \cdot b \varepsilon N_1 \cdot b \times c = a \cdot \supset \cdot a/b = c$.

D o w ó d:

1. Założenie pociąga, że

$$\mathrm{E}!\, a/b \qquad \text{(tw. 1)}.$$

2. $a, b \varepsilon N_0 \cdot c \varepsilon N_0 \cdot b \times c = a$ [podst. w war. tworz.] zgodne z założeniem, więc

$$a/b = c.$$

T w. 9: $\mathrm{E}!\, a/c \cdot \mathrm{E}!\, b/c \cdot a/c = b/c \cdot \supset \cdot a = b$.

D o w ó d: Wtedy:

$$c \times b/c = b$$
$$c \times a/c = a$$
$$c \times b/c = c \times a/c,$$

więc
$$a = b.$$

T w. 10: $\mathrm{E}!\, a/c \cdot \mathrm{E}!\, b/c \cdot a/c <_c b/c \cdot \supset \cdot a <_c b$.

D o w ó d: Wtedy:

$$c \times a/c = a \quad \text{i} \quad c \neq 0.$$
$$c \times b/c = b,$$

ale
$$a/c < b/c \quad \text{i} \quad c \neq 0,$$

więc: $c \times a/c < c \times b/c$, czyli $a < b$.

T w. 11:

$$\mathrm{E}!\, a/c \cdot \mathrm{E}!\, b/c : \supset : \mathrm{E}!\, (a + b)/c \cdot (a + b)/c = a/c + b/c$$

D o w ó d: Wtedy:

$$c \times a/c = a \qquad a/c \varepsilon N_0$$
$$\underline{c \times b/c = b} \qquad b/c \varepsilon N_0,$$

więc:
$$c \times (a/c + b/c) = a + b, \quad a/c + b/c \varepsilon N_0.$$

Formalnie zatem:

$$a + b \varepsilon N_0 \cdot c \varepsilon N_1 \cdot a/c + b/c \varepsilon N_0 \cdot c \times (a/c + b/c) = \\ = a + b.$$

Stąd już wynika twierdzenie.

Tw. 12:

$$\mathrm{E}!\, a/c \cdot \mathrm{E}\, b/c \cdot a \geqq_c b : \supset : \mathrm{E}!\, (a-b)/c \cdot (a-b)/c = a/c - b/c.$$

Dowód:

1. Wtedy:

$$a \varepsilon c N_0 \cdot b \varepsilon c N_0 \cdot a, b, c \varepsilon N_0 \cdot c \neq 0 \cdot a \geqq b,$$

więc: $\mathrm{E}!\, (a - b)/c$ [p. tw. 3 nr 26.]

2. Wedle tw. 11 otrzymamy:

$$(a - b)/c + b/c = a/c,$$

zatem: $a/c - b/c = (a - b)/c.$

Tw. 13:

$$\mathrm{E}!\, a/b \cdot \mathrm{E}!\, a/c \cdot b <_c c \cdot a \neq 0 \cdot \supset \cdot a/b >_c a/c.$$

Dowód: Wtedy $a/b \cdot a/c \varepsilon N_0$.

(α) Gdyby: $a/b < a/c$,

to skoro: $b < c$,

byłoby: $b \times a/b < c \times a/c$, czyli $a < a$.

(β) Gdyby: $a/b = a/c$,

byłoby: $a = b \times a/b$

$a = c \times a/c = c \times a/b$; $a \neq 0$, więc $a/b \neq 0$;

a zatem byłoby: $b \times a/b = c \times a/b \cdot a/b \neq 0$

skąd: $b = c$ wbrew założeniu.

Pozostaje jedyna możliwość:

$$a/b > a/c.$$

Dalsze twierdzenia pomijamy.

§ 11. Potęgowanie.

28. Wprowadzamy teraz drogą definicji zwrotnej działanie potęgowania.

Połóżymy:

Def. $$a \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot a \wedge_c 0 \stackrel{df}{=} 1$$
$$a, k \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot a \wedge_c \mathrm{seq}k \stackrel{df}{=} (a \wedge_c k) \times_c a.$$

Uwaga: Zwykle piszemy w matematyce a^k, a nie $a \wedge k$, lecz przy tym sposobie pisania trudno umieścić znaczek (c) przypominający, że mamy do czynienia z potęgowaniem całkowitem i dlatego, za przykładem Peany, wprowadzimy znak $\wedge$ (odwrócenie pierwiastkowania!), którym posługiwać się będziemy przejściowo. O ile pozwolimy sobie na opuszczenie znaku (c), to pisać będziemy już a^k.

Tw. 1: $$a \,\varepsilon\, N_0 \cdot m \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot a \wedge_c m \,\varepsilon\, N_0 .$$

Dowód:

I. Dla $m = 0$ mamy $a \wedge_c 0 = 1$ i $1 \,\varepsilon\, N_0$.

II. Jeśliby $k \,\varepsilon\, N_0$ i $a \wedge_c k \,\varepsilon\, N_0$, to $a \wedge_c \mathrm{seq}k = (a \wedge_c k) \times a$, lecz skoro $a \wedge_c k \,\varepsilon\, N_0$ i $a \,\varepsilon\, N_0$, to iloczyn, a tem samem $a \wedge_c \mathrm{seq}k$, będzie liczbą całkowitą.

III. Ind. k. d.

Definicje {upraszczające pisanie}!

1. $a^m + b \stackrel{df}{=} (a^m) + b \stackrel{df}{=} a \wedge m + b$
2. $a^m - b \stackrel{df}{=} (a^m) - b \stackrel{df}{=} a \wedge m - b$
3. $a^m \times b \stackrel{df}{=} (a^m) \times b \stackrel{df}{=} a \wedge m \times b$
4. $a^m \,/\, b \stackrel{df}{=} (a^m) \,/\, b \stackrel{df}{=} a \wedge m \,/\, b$
5. $a^m + b^m \stackrel{df}{=} (a^m) + (b^m) \stackrel{df}{=} a \wedge m + b \wedge m$
6. $a^m - b^m \stackrel{df}{=} (a^m) - (b^m) \stackrel{df}{=} a \wedge m - b \wedge m$

7. $a^m \times b^m \overset{df}{=} (a^m) \times (b^m) \overset{df}{=} a \wedge m \times b \wedge m$

8. $a^m / b^m \overset{df}{=} (a^m)/(b^m) \overset{df}{=} a \wedge m / b \wedge m$

Tw. 2: $m \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot 1^m = 1$

Dowód ind.:

I. Dla $m = 0$ mamy $1^0 \overset{df}{=} 1 = 1$;

II. gdyby $k \varepsilon N_0$ i $1^k = 1$, to

$1 \wedge \operatorname{seq} k = 1 \wedge k \times 1 = 1 \times 1 = 1,$

III. Ind. k. d.

Tw. 3: $m \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot 0^{m+1} = 0$

Dowód: $0^{m+1} = 0^{\operatorname{seq} m} = 0^m \times 0,$

lecz $0^m \varepsilon N_0$, gdy $m \varepsilon N_0$,

a więc $0^{m+1} = 0.$

Tw. 3^{bis}: $m \varepsilon N_1 \cdot \supset \cdot 0^m = 0.$

Dowód: Gdy $m \varepsilon N_1$, to $\operatorname{El}(m - 1)$ i możemy położyć: $m = (m - 1) + 1 = n + 1$

$n = m - 1, \quad n \varepsilon N_0.$

Stąd: $0^m = 0^{n+1} = 0$ wedle tw. 3.

Uwaga: Widzimy, że twierdzenie $0^m = 0$ stosuje się jedynie do liczb naturalnych $m > 0$, gdyż dla $m = 0$ mamy z definicji $0^0 = 1$.

Niektórzy autorzy nie obejmują definicją

$$a \wedge 0 \overset{df}{=} 1$$

wypadku, gdy $a = 0$ [nprz. prof. Zaremba w Arytmetyce teoretycznej, Kraków 1910], my jednak idziemy za przykładem Formulario Matematico (Peano) i uważamy przecież za korzystne przyjąć $0^0 = 1$.

Tw. 4: $a \varepsilon N_0 \cdot m, n \varepsilon N_0 \cdot \supset a^{m+n} = a^m \times a^n$

D o w ó d ind.:

I. Dla $n=0$ mamy:

$$a^{m+0}=a^m=a^m\times 1=a^m\times a^0;$$

II. gdyby $k\varepsilon N_0$ i $a^{s+k}=a^s\times a^k$ dla każdego s całkowitego, to

$$a^{m+\mathrm{seq}\,k}=a^{(m+1)+k}=a^{m+1}\times a^k=a^m\times a\times a^k=$$
$$=a^m\times a^{\mathrm{seq}\,k}.$$

III. Ind. k. d.

T w. 5:

$$a,b\,\varepsilon\, N_0\cdot m\,\varepsilon\, N_0\cdot\supset\cdot(a\times b)^m=a^m\times b^m$$

D o w ó d ind.:

I. Dla $m=0$ mamy:

$$(a\times b)^0=1=1\times 1=a^0\times b^0;$$

II. gdy $k\,\varepsilon\, N_0$ i $(a\times b)^k=a^k\times b^k$, to

$$(a\times b)^{\mathrm{seq}\,k}=(a\times b)^k\times(a\times b)=a^k\times b^k\times a\times b=$$
$$=(a^k\times a)\times(b^k\times b)=a^{\mathrm{seq}\,k}\times b^{\mathrm{seq}\,k}.$$

III. Ind. k. d.

T w. 6: $a,m,n\,\varepsilon\, N_0\cdot\supset\cdot(a^m)^n=a^{m\times n}$

D o w ó d ind.:

I. dla $n=0$ mamy $(a^m)^0=1=a^0=a^{m\times 0}$;

II. gdyby $k\,\varepsilon\, N_0$ i $(a^m)^k=a^{m\times k}$, to

$$(a^m)^{\mathrm{seq}\,k}=(a^m)^k\times a^m=a^{m\times k}\times a^m=a^{m\times k+m}=$$
$$=a^{m\times\mathrm{seq}\,k}.$$

III. Ind. k. d.

T w. 7: $a>_c 0\cdot m\,\varepsilon\, N_0\cdot\supset\cdot a^m>_c 0.$

D o w ó d ind:

I. Dla $m=0$ mamy $a^0=1>0$;

II. gdyby $k \varepsilon N_0$ i $a^k > 0$, to
$a^{\mathrm{seq}\,k} = a^k \times a > 0$, (gdyż $a^m > 0$ i $a > 0$).
III. Ind. k. d.

Tw. 8: $a >_\varepsilon 0 \cdot m \geqq_\varepsilon n \cdot \supset \cdot a^{m-n} = a^m/a^n$

Dowód:

(1) $E!(m-n) \cdot m-n \, \varepsilon N_0 \cdot a \, \varepsilon N_0 \cdot a^{m-n} \varepsilon N_0$

(2) $a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n} = a^m$ [tw. 4.]

(3) $a^m > 0$ dzięki tw. 7, więc (2) (3) dają nam
$$a^{m-n} = a^m/a^n \qquad [\S\ 10 \text{ tw. } 8.]$$

Tw. 9:

$b >_\varepsilon 0 \cdot a \, \varepsilon \, b \, N_0 \cdot m \, \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot (a/b)^m = a^m/b^m$

Dowód:

1. $(a/b)^m \varepsilon N_0$,

gdyż $E! \, a/b \cdot a/b \, \varepsilon N_0 \cdot m \, \varepsilon N_0$.

2. $(a/b)^m \times b^m = [a/b \times b]^m = a^m$. [tw. 5.]

3. Stąd już łącznie z faktem, że $b^m > 0$ otrzymamy:
$$(a/b)^m = a^m/b^m$$

Tw. 10: $a <_\varepsilon b \cdot m >_\varepsilon 0 \cdot \supset \cdot a^m < b^m$

1. Gdy $m >_\varepsilon 0$, to $E!(m-1) \cdot m-1 \, \varepsilon N_0$.

2. Twierdzenie nasze pociąga za sobą inne, a mianowicie:
$$a <_\varepsilon b \cdot p \, \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a^{p+1} < b^{p+1} \qquad (\alpha)$$

Odwrotnie: Twierdzenie (α) pociąga za sobą, o ile $a < b \cdot m > 0$, a więc $a < b \cdot m - 1 \, \varepsilon N_0$, że $a^{m-1+1} < b^{m-1+1}$, czyli $a^m < b^m$

Twierdzenie (10) i (α) są równoważne, wystarczy udowodnić (α).

Dowód ind. tw. (α):

I. Dla $p = 0$ mamy $a^{0+1} = a < b = b^{0+1}$,

II. gdyby $k \varepsilon N_0 \cdot a^k < b^k$, to

$$a^{\mathrm{seq}\,k} = a^k \times a, \quad b^{\mathrm{seq}\,k} = b^k \times b,$$

lecz $a^k < b^k$ [hp.]

$a < b$, [zał.]

stąd: $a^{\mathrm{seq}\,k} < b^{\mathrm{seq}\,k}$

III. Ind. k. d.

Tw. 11:

$$a, b \varepsilon N_0 \cdot m >_c 0 \cdot a^m = b^m \cdot \supset \cdot a = b.$$

Dowód:

(1) Gdyby $a < b$, to byłoby $a^m < b^m$. [tw. 10]

(2) Gdyby $a > b$, to byłoby $b^m < a^m$.

(3) Pozostaje konieczność: $a = b$, dzięki trichotomji.

Tw. 12: $a >_c 1 \cdot m >_c 1 \cdot \supset \cdot a^m >_c a$.

Dowód: Dzięki tw. 10 mamy tu:

$$1^{m-1} < a^{m-1},$$

stąd: $1 < a^{m-1}$,

lecz $a = a > 0$,

stąd znów: $a \times 1 < a \times a^{m-1}$,

czyli $a < a^m$.

Najważniejsze twierdzenia o potęgowaniu.

I $\quad m \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot 1^m = 1$

»prawo potęgi jednostki«.

II $m \varepsilon N_1 \cdot \supset \cdot 0^m = 0$

»prawo potęgi zera«.

III $a, m, n \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a^{m+n} = a^m \times a^n$

»prawo rozdzielności«.

IV $a, b, m \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot (a \times b)^m = a^m \times b^m$

»prawo potęgowania iloczynu«.

V $a, m, n \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot (a^m)^n = a^{m \times n}$

»prawo potęgi potęg«.

VI $a, b \varepsilon N_0 \cdot m >_c 0 \cdot a^m = b^m \cdot \supset \cdot a = b$

»prawo monotonji potęgowania«.

§ 12. Zasada Minimum.

29. Określimy dla klasy α następujące pojęcie jednostkowe:

Df. I. $\text{min.}_c \alpha \stackrel{df}{=} (\imath z) \{z \varepsilon \alpha \cdot x \varepsilon \alpha \supset_x z \leqq_c x\}$,

słownie:

»*Minimum* (całkowite) α« lub »najmniejsza liczba klasy α« jest to »jedyne z takie, że z należy do α i dla każdego x, skoro tylko x należy do α mamy już $z \leqq_c x$«.

— W znakowaniu wprowadziliśmy tu następujący skrót:

$$\varphi(x) \supset_x \psi(x) \stackrel{df}{=} (x) \{\varphi(x) \supset \psi(x)\}.$$

Analogicznie ustalimy pojęcie:

»*maximum* (całkowite) α« lub »największa liczba klasy α«.

Df. II. $\max{}_c \alpha \stackrel{df}{=} (\imath z) \{z \varepsilon \alpha \cdot x \varepsilon \alpha \supset_x z \geqq_c x\}$.

W dalszym ciągu piszemy już $\min \alpha$ i $\max \alpha$.

Oba powyższe pojęcia są **deskryptami** {p. § 6 str. 45}, mamy więc prawo pytać się, czy:

»ma sens min α« E! min α ?
»ma sens max α« E! max α?

Badanie »sensu« polega, jak zawsze, na dwu krokach: badamy mianowicie, (1) czy **istnieją** elementy spełniające warunek tworzący deskrypt, (2) czy elementy te muszą być między sobą identyczne.

W naszym wypadku udowodnimy twierdzenie:

Tw. 1: Jeżeli elementy u i v spełniają warunek najmniejszości dla klasy α, to są identyczne.

Dowód:

$$u \,\varepsilon\, \alpha \cdot x \,\varepsilon\, \alpha \supset_x u \leqq_c x$$
$$v \,\varepsilon\, \alpha \cdot x \,\varepsilon\, \alpha \supset_x v \leqq_c x.$$

Stąd: $u \leqq_c v$ i $v \leqq_c u$ więc $u = v$.

Analogicznie udowodnimy:

Tw. 2: Jeżeli u i v spełniają warunek największości dla klasy α, to są identyczne.

Przy badaniu sensu max α czy min α odpada nam zatem drugi etap, a mianowicie badanie **jednotliwości**, pozostaje jedynie kwestja **istnienia**.

Tw. 3: Klasa N_0 nie posiada największej liczby.

$$\sim \text{E! max}\, N_0.$$

Dowód: Wystarczy udowodnić, że

$$\sim (\exists z) \{z \,\varepsilon\, N_0 \cdot x \,\varepsilon\, N_0 \supset_x z \geqq_c x\}.$$

Gdyby z_0 spełniało warunek największości dla N_0, to byłoby

$$z_0 \,\varepsilon\, N_0 \cdot x \,\varepsilon\, N_0 \supset_x z_0 \geqq x,$$

ale $$z_0 \,\varepsilon\, N_0 \supset \text{seq}\, z_0 \,\varepsilon\, N_0 \cdot z_0 < \text{seq}\, z_0\,!$$

Nie każda zatem klasa całoliczbowa posiada największy element. Co do istnienia minimum w klasie całoliczbowej, to sprawę rozstrzygnie fondamentalne twierdzenie, będące właściwą treścią obecnego paragrafu, które to twierdzenie poznamy za chwilę. Zastanowimy się tymczasem jeszcze nad zdaniami postaci:

$$\min \alpha = a.$$
$$\max \alpha = b.$$

Wedle zasady logicznej, wyrażonej na str. 47, zdanie

$$\min \alpha = a$$

oznacza, że:

$$(1)\quad E!\min \alpha \quad \text{i} \quad (2)\quad \varphi(a),$$

jeżeli przez $\varphi(x)$ oznaczymy: $z \varepsilon \alpha \cdot x \varepsilon \alpha \supset_x z \leqq_c x$.

Stąd dalej: (1) $(\exists z)\varphi(z)$

(2) $\varphi(u) \cdot \varphi(v) \cdot \supset_{u,v} \cdot u = v$

(3) $\varphi(a)$.

Otóż (3) pociąga już za sobą (»przez przykład«) (1), (2) jest spełnione wedle tw. 1, pozostaje zatem jedynie (3).

Oczywiście (1) (2) (3) razem pociągają też (3). Uzyskaliśmy zatem twierdzenie:

Tw. 4: $\min \alpha = a : \equiv : a \varepsilon \alpha \cdot x \varepsilon \alpha \supset_x a \leqq_c x.$

Analogicznie:

Tw. 5: $\max \alpha = b : \equiv : b \varepsilon \alpha \cdot x \varepsilon \alpha \supset_x b \geqq_c x.$

Są to kryterja dla min. i max.

Tw. 6: $E! \min {}_c\alpha \cdot \supset \cdot \alpha \varepsilon \mathrm{Cls}\, N_0$.

»Minimum całkowite może posiadać jedynie klasa całoliczbowa«.

Dowód: Nb. $a = \min {}_c\alpha$, wtedy

$$a \varepsilon \alpha \cdot \supset_x \cdot a \leqq_c x,$$

skąd: $x \varepsilon \alpha \supset_x x \varepsilon N_0$,

a więc [str. 64 df. II]

$$\alpha \subset N_0.$$

Analogicznie:

Tw. 7: $\quad E! \max_c \alpha \cdot \supset \cdot \alpha \subset N_0$.

30. Przypomnijmy sobie określenie klasy jako zakresu warunku zdaniowego. Łatwo podać przykład takiego warunku, który przez żaden element nie może być spełniony. Niech będzie n. p.:

$$\Phi(x) \overset{df}{=} x >_c 1 \cdot x <_c 1.$$

Wiemy z trichotomji, że żadne x powyższego warunku spełnić nie może, atoli możemy utworzyć mimo to klasę:

$$(x)\,\Phi(x).$$

Oznaczmy ją przez α. Otóż, do α nie będzie żaden element należał; warunek Φ będzie miał zakres pusty; zdanie $x \varepsilon \alpha$ będzie zawsze fałszywe.

Klasę α tego rodzaju, że $\sim (\exists x)(x \varepsilon \alpha)$ nazwiemy pustą.

Zaczerpniemy z logiki następujące twierdzenie:

Tw. z logiki: Jeżeli (1) $\alpha \subset \gamma$
(2) $\beta \subset \gamma$
(3) α i β są puste,
to $\alpha = \beta$

Zastosowaniem natychmiastowem tego faktu będzie u nas twierdzenie następujące:

Tw.: Jeżeli (1) $\alpha, \beta \varepsilon \mathrm{Cls}\, N_0$
(2) α i β są puste,
to $\alpha = \beta$.

Widzimy więc, że może istnieć najwyżej jedna klasa całoliczbowa pusta.

Skądinąd uczy nas logika, że w każdej klasie zawiera się jakaś klasa pusta, a więc istnieje też i klasa całoliczbowa pusta.

Tem samem ma sens pojęcie jednostkowe »pusta klasa całoliczbowa«.

Oznaczmy ją przez Λ_c lub krótko w dalszym ciągu przez Λ. Aby teraz zaznaczyć, że klasa całoliczbowa jest pusta wystarczy napisać:

$$\alpha = \Lambda_c \qquad (\alpha = \Lambda),$$

z czego będziemy korzystali w dalszym ciągu.

Możemy obecnie przystąpić do zbadania kwestji istnienia minimum dla klas całoliczbowych. Rozstrzyga ją fundamentalne twierdzenie następujące:

Zasada Minimum

Każda klasa całoliczbowa nie pusta posiada minimum.

$$\alpha \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}\, N_0 \cdot \alpha \neq \Lambda \cdot \supset \cdot \mathrm{E!} \min \alpha.$$

Dowód: Uzasadnimy najpierw słuszność lemmatu:

Jeżeli $\alpha \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}\, N_0$, $\alpha \neq \Lambda$, $m \,\varepsilon\, N_0$ i do α należy choć jeden element x taki, że $x \leqq_c m$, to α posiada minimum;

$$— \alpha \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}\, N_0 \cdot \alpha \neq \Lambda \cdot m \,\varepsilon\, N_0 \cdot (\exists x)\{x \,\varepsilon\, \alpha \cdot x \leqq_c m\} :\supset: \mathrm{E!} \min \alpha. —$$

Dowód lemmatu przez indukcję:

I. Dla $m = 0$ mamy

$$\alpha \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}\, N_0 \cdot \alpha \neq \Lambda \cdot (\exists x)\{x \,\varepsilon\, \alpha \cdot x \leqq 0\}$$

wtedy: $\qquad 0 \,\varepsilon\, \alpha;$

twierdzę, że $\qquad 0 = \min \alpha.$

Rzeczywiście:

$$O \varepsilon \alpha \cdot x \varepsilon \alpha \supset_x O \leqq x,$$

a więc wedle tw. 4:

$$O = \min \alpha.$$

II. Przypuśćmy, że $k \varepsilon N_0$ i że dla $m = k$ lemmat nasz już zachodzi. Załóżmy, że

$$\alpha \varepsilon \mathrm{Cls}\, N_0 \cdot \alpha \neq \Lambda \cdot (\exists x)\{x \varepsilon \alpha \cdot x \leqq k + 1\},$$

a wiemy już, że $\qquad k + 1 \varepsilon N_0$.

Wtedy jedno z dwojga: (1) albo

$$(\exists x)\{x \varepsilon \alpha \cdot x \leqq k\}$$

i wedle przypuszczenia ma sens $\min \alpha$ dzięki ważności lemmatu dla $m = k$, lub

(2) $$\sim (\exists x)\{x \varepsilon \alpha \cdot x \leqq k\},$$

w tym jednak wypadku

$$(\exists x)\{x \varepsilon \alpha \cdot x \leqq k + 1\} \cdot x \varepsilon \alpha \supset_x k <_c x,$$

a więc:

(α) $$k + 1 \varepsilon \alpha$$

(β) $$x \varepsilon \alpha \supset_x k + 1 \leqq x,$$

skąd: $$\min \alpha = k + 1 \cdot \mathrm{E!} \min \alpha.$$

III. Ind. k. d.

Wracamy do zasady minimum; załóżmy zatem:

$$\alpha \varepsilon \mathrm{Cls}\, N_0 \cdot \alpha \neq \Lambda,$$

a więc:

$$(\exists m)\{m \varepsilon \alpha \cdot m \varepsilon N_0\}.$$

Niechaj takiem będzie n. p. m_0, wtedy:

(1) $$m_0 \varepsilon N_0$$

(2) $$(\exists x)\{x \varepsilon \alpha \cdot x \leqq m_0\} \qquad \text{(n. p. } m_0\text{)}$$

(3) $$\alpha \varepsilon \mathrm{Cls}\, N_0$$

(4) $$\alpha \neq \Lambda,$$

Z lemmatu wynika już:

$$\mathrm{E!}\min \alpha.$$

Zanotujemy jeszcze kilka twierdzeń wynikających z faktu, że, gdy $\mathrm{E!}(\imath x)\Phi(x)$, to $(\imath x)\Phi(x)$ spełnia warunek Φ.

Tw. 8: $\mathrm{E!}\min\alpha \cdot \supset \cdot \min\alpha\,\varepsilon\,\alpha$

Tw. 9: $\mathrm{E!}\max\alpha \cdot \supset \cdot \max\alpha\,\varepsilon\,\alpha$.

Tw. 10: $x <_c \min\alpha \cdot \supset \cdot x \sim \varepsilon\,\alpha$ [1]).

Tw. 11: $x >_c \max\alpha \cdot \supset \cdot x \sim \varepsilon\,\alpha$.

§ 13. Zastosowanie zasady minimum.

31. Całkowita część ilorazu.

Jak wiemy z praktyki, iloraz dwu liczb całkowitych ma sens dość wyjątkowo, pominąwszy bowiem zastrzeżenie, że dzielnik ma być różny od zera, trzeba jeszcze zbiegu okoliczności, aby dzielna była wielokrotną dzielnika Dlatego też w A. l. c. wprowadzimy inne jeszcze działanie zwane dzieleniem przybliżonem, o wyniku noszącym nazwę »całkowita część ilorazu«. Oto jak się ta sprawa przedstawia w świetle ścisłych określeń. Stawiamy definicję:

Df. I: $E(a/_c b) \overset{df}{=} (\imath x)\{x\,\varepsilon\,N_0 \cdot a, b\,\varepsilon\,N_0 \cdot x \times$
$\times\, b \leqq_c a <_c (x+1) \times b\}$.

»Całkowita część ilorazu a/b«, co czytamy często: »entier a/b«, jest to jedyne x całkowite, takie, że dla a i b całkowitych mamy:

$$x \times b \leqq a \leqq (x+1) \times b.$$

Zapytajmy o »sens« tego deskryptu.

Tw. 1: $a, b\,\varepsilon\,N_0 \cdot b \neq 0 : \supset : \mathrm{E!}\,E(a/b) \cdot E(a/b)\,\varepsilon\,N_0$.

»Jeżeli tylko a i b są całkowite i $b \neq 0$, to już ma sens $E(a/b)$ i jest liczbą całkowitą«.

---

[1]) $x \sim \varepsilon\,\alpha \cdot \overset{df}{=} \sim (x\,\varepsilon\,\alpha)$.

Dowód: I. Istnienie. Rozważmy klasę wszelkich całkowitych z takich, że $a < z \times b$

$$\alpha \overset{df}{=} \hat{(z)}\{a <_c z \times b \cdot z \, \varepsilon \, N_0\}.$$

Otóż: 1) klasa α jest Cls N_0, gdyż należenie z do klasy α pociąga $z \, \varepsilon \, N_0$.

2) α nie jest klasą pustą, gdyż n. prz.:

$$a < (a+1) \times b$$

skoro z założenia $b \geqq_c 1$.

Stosujemy zasadę minimum:

Ma sens min α. Oznaczmy min $\alpha = s$. Wtedy:

$$a < s \times b \cdot s \, \varepsilon \, N_0;$$

lecz $s \neq 0$, gdyż inaczej byłoby $a < 0$, więc ma sens $s - 1$. Oznaczmy $s - 1 \overset{df}{=} k$. Otóż: nie może już być $a < k \times b$, bo $k <$ min α, więc $k \sim \varepsilon \, \alpha$, skąd:

$$k \times b \leqq a < (k+1) \times b.$$

II. Jednotliwość. Przypuśćmy, że

(1) $s, t \, \varepsilon \, N_0$, (2) $s \times b \leqq a < (s+1) \times b$
(3) $t \times b \leqq a < (t+1) \times b$.

Wtedy: 1. $s \times b < (t+1) \times b$, $b \neq 0$, więc

$$s < t+1, \quad s \leqq t.$$

2. $t \times b < (s+1) \times b$, $b \neq 0$, więc

$$t < s+1, \quad t \leqq s.$$

Ostatecznie $t = s$.

A zatem: E! $E(a/b)$, stąd jeszcze $E(a/b) \, \varepsilon \, N_0$.

Uwaga I. Pierwsza część dowodu wykazuje, że

$$a, b \, \varepsilon \, N_0 \cdot b \neq 0 \cdot \supset \cdot (\exists z)\{z \, \varepsilon \, N_0 \cdot a < (z+1) \times b\}$$

stąd taki oto wniosek:

wśród wielokrotności liczby naturalnej b:

$$0 \times b, \quad 1 \times b, \quad 2 \times b, \ldots$$

znajdzie się zawsze taka, która przewyższy daną liczbę całkowitą a.

Jest to t. zw. zasada Archimedesa dla liczb całkowitych.

Uwaga II. Dowód »jednotliwości« udał się bez względu na »istnienie«, a zatem:

Tw. 2:

$$a, b \,\varepsilon\, N_0 \cdot b \neq 0 \cdot k \,\varepsilon\, N_0 \cdot k \times b \leqq_c a <_c (k+1) \times b \cdot \supset \cdot E(a/b) = k.$$

Postawimy jeszcze:

Df. II: $R(a/_c b) \stackrel{df}{=} a - E(a/_c b) \times b.$

Resztą z dzielenia a przez b nazwiemy różnicę $a - E(a/b) \times b$.

Tw. 3:

$$a, b \,\varepsilon\, N_0 \cdot b \neq 0 \cdot \supset \cdot \mathrm{E!}\, R(a/b) \cdot R(a/b) \,\varepsilon\, N_0 .$$

Dowód: Dzięki założeniom wiemy, że

$$\mathrm{E!}\, E(a/b) \quad \text{i} \quad E(a/b) \times b \leqq a.$$

Stąd:

$$\mathrm{E!}\, \{a - E(a/b) \times b\}, \text{ czyli}$$
$$\mathrm{E!}\, R(a/b) \quad \text{i jeszcze} \quad R(a/b) \,\varepsilon\, N_0 .$$

Lemmat: Przy tych samych założeniach mamy też:

$$a = E(a/b) \times b + R(a/b) \qquad (*)$$

wprost z definicji $R(a/b)$ i z twierdzenia poprzedniego, zapewniającego sens wyrażeniu $R(a/b)$.

Formuła (*) stanowi tak zwany »rozkład Archimedesowski liczby a przy pomocy b« lub »formułę algorytmu Euklidesa«.

Przykłady: (1) $E(5/2) = 2 \quad R(5/2) = 1$

$5 = 2 \times 2 + 1$

(2) $E(7/3) = 2 \quad R(7/3) = 1$

$7 = 2 \times 3 + 1.$

Tw. 4: {kryterjum rozpoznawcze dla $E(a/b)$ i $R(a/b)$}.

Jeżeli: (1) $a, b \varepsilon N_0 \cdot b \neq 0 \cdot m, r \varepsilon N_0$ i

(2) $a = m \times b + r$

oraz (3) $r < b$,

to $m = E(a/b)$, $r = R(a/b)$.

$$a, b, m, r \varepsilon N_0 \cdot b \neq 0 \cdot a = m \times b + r \cdot r <_c b : \supset : m = E(a/b) \cdot r = R(a/b).$$

Dowód: Mamy najpierw:

$a = m \times b + r < m \times b + b = (m+1) \times b$ wedle (2),

$m \times b \leqq a$ wedle (1),

stąd: $m \times b \leqq a < (m+1) \times b$.

Stosując tw. 2 otrzymamy:

$$m = E(a/b),$$

a więc: $a = E(a/b) \times b + r$

$$r = a - E(a/b) = R(a/b).$$

32. Rząd a względem b.

Df Rzędem liczby całkowitej a względem b całkowitego zwiemy jedyne x takie, że

(1) $x \varepsilon N_0$

(2) $b^x \leqq_c a <_c b^{x+1}$.

Formalnie zapiszemy:

$$\exp_b a \overset{df}{=} (\imath x)\{a, b, x \varepsilon N_0 \cdot b^x \leqq_c a <_c b^{x+1}\}$$

»exponens« = »wykładnik«.

Zauważmy odrazu, że żadna liczba całkowita nie posiada rzędu względem zera, ani względem jedynki, gdyż:

$$0^0 = 1, \quad 0^1 = 0, \qquad 0^k = 0 = 0^{k+1} \text{ dla } k >_c 0.$$

$$1^k = 1^{k+1} = 1 \text{ dla } k \varepsilon N_0,$$

tu zaś musi być: $b^x < b^{x+1}$.

Jednakże posiadamy twierdzenie:

Tw. 1: $a \varepsilon N_1 \cdot b \varepsilon N_2 \cdot \supset \cdot \mathrm{E!}\, exp_b a.$

Dowód: I. Istnienie. Utwórzmy klasę β wszelkich z takich, że $a < b^z$

$$\beta \overset{df}{=} (\hat{z})\{a < b^z\}.$$

Otóż, (1) jeśli $a \geqq_c 1$, $b \geqq_c 2$, to $a < b^a$, co możemy też napisać:

$$p \varepsilon N_0 \cdot b \geqq_c 2 : \supset : 1 + p <_c b^{1+p}.$$

Rzeczywiście:

(I) dla $p = 0$ mamy $1 + 0 = 1 < b = b^{1+0}$,

(II) jeśliby dla całkowitego k było:

$$1 + k < b^{1+k},$$

to

$$1 + \operatorname{seq} k = 2 + k$$

$$b^{1+\operatorname{seq} k} = b \times b^{1+k} > b \times (1 + k) \geqq 2 \times (1 + k) = 2 + \\ + 2 \times k,$$

więc: $1 + \operatorname{seq} k = 2 + k \leqq 2 + 2 \times k < b^{1+\operatorname{seq} k}$

(III) Ind. k. d.

Tem samem widzimy, że β nie jest puste,

(2) z definicji $\beta \varepsilon \mathrm{Cls}\, N_0$,

(3) zatem β posiada minimum, n. prz. $\min \beta = s$,

(4) $a < b^s$, ale $1 = b^0 \leqq a$, więc $b^0 < b^s$, skąd dzięki $b \geqq 2$ musi być $s > 0$.

Wobec tego $\mathrm{E!}(s - 1)$. Połóżmy $k = s - 1$. Wtedy już:

$$b^k \leqq a < b^{k+1} \cdot k \varepsilon N_0.$$

II. Jednotliwość.

Załóżmy, że

(1) $k, l \varepsilon N_0$

(2) $b^k \leqq a < b^{k+1}$

(3) $b^l \leqq a < b^{l+1}$,

wtedy: $b^k < b^{l+1}$, $b > 1$, więc $k < l + 1$
$b^l < b^{k+1}$ „ $l < k + 1$,

a zatem $k \leqq l$, $l \leqq k$, stąd $k = l$.

Ostatecznie: E! $\exp_b a$.

Tw. 2: [Kryterjum rozpoznawcze].

$$a \geqq_c 1 \cdot b \geqq_c 2 \cdot m \,\varepsilon\, N_0 \cdot b^m \leqq_c a <_c b^{m+1} \cdot \supset \cdot m = \\ = \exp_b a.$$

Dowód: W naszych warunkach: E! $\exp_b a$.

Połóżmy: $\exp_b a = l$, to:

$$b^l \leqq a < b^{l+1} \quad \text{i} \quad b^m \leqq a < b^{m+1}$$

skąd wedle tw. 1 (część II dowodu):

$$m = \exp_b a.$$

Załóżmy, że $a \geqq_c 1$ i $b \geqq_c 2$ i oznaczmy $k \stackrel{df}{=} \exp_b a$.

Mamy to: $0 < b^k \leqq a < b^{k+1}$, więc możemy tworzyć $E(a/b^k)$. Oznaczmy:

$$m = E(a/b^k), \quad r = R(a/b^k).$$

Wtedy:

$$a = mb^k + r, \qquad \text{przyczem:}$$

$$b^k \leqq mb^k + r < b^{k+1}$$

$$r < b^k$$

skąd już widać, że $0 < m < b$.

Otrzymaliśmy rozkład:

$$a = mb^k + r,$$

gdzie: $0 < m < b$, $b^k \leqq a \leqq b^{k+1}$, $r < b^k$.

Jeżeli teraz $r \neq 0$, to możemy tworzyć dalej $\exp_b r$, lecz skoro tak, to

$$b^{\exp_b r} \leq r < b^k,$$

więc $$\exp_b r < k = \exp_b a.$$

Przy powyższym rozkładzie r posiada rząd względem b niższy niż a lub jest zerem.

§ 14. Operatory i Ciągi.

33. Na str. 33, a potem 42 omawialiśmy przez chwilę niezmiernie ważne pojęcie relacji. Wracamy obecnie jeszcze raz do tego tematu. Niechaj daną będzie jakaś relacja R, której zachodzenie między x a y wyraża zatem, wedle umowy (str. 42), zdanie:

$$xRy.$$

Określmy następujące pojęcie:

Df. I: R-owy obraz elementu $a \overset{df}{=}$

$= R'a \overset{df}{=} (\imath z)\{zRa\}$.

$=$ »jedyne z takie, że zachodzi zRa«.

Aby $R'a$ miało sens potrzeba i wystarcza, by:

1. istniały z takie, że zRa,

2. aby nie było różnych z tego rodzaju;

a więc: 1. $(\exists z)\{zRa\}$

2. $z'Ra \cdot z''Ra \supset_{z', z''} z' = z''$.

Df. II. Ogół elementów a takich, dla których istnieją z, takie by zachodziło zRa zwiemy przeciwdziedziną relacji R i oznaczamy przez $\mathfrak{a}'R$:

$$\mathfrak{a}'R \overset{df}{=} (\hat{a})\{(\exists z)(zRa)\}.$$

Przykłady: (1) $R \overset{df}{=} <_c$

$\mathfrak{a}'R = N_1$ {nie N_0, bo nigdy $z <_c 0$}.

(2) $R \overset{df}{=} >_c$

$\text{Q}'R = N_0$, (bo dla każdego a całkowitego n. prz. $a <_c \text{seq}\, a$).

(3) $R \stackrel{df}{=}$ »jest ojcem«
$\text{Q}'R =$ wszystkie dzieci.

Widzimy teraz, że aby obraz $R'a$ mógł mieć sens, potrzeba, by $a \,\varepsilon\, \text{Q}'R$; lecz to nie wystarcza, n. prz. $5 \,\varepsilon\, \text{Q}' <_c$, atoli $2 <_c 5$, $3 <_c 5$ i $2 \neq 3$, więc brak jednotliwości i $\sim E!(<_c{}'5)$;

natomiast: $E!\,(<_c{}'1)$.

Określimy jeszcze:

Df. III. Dziedzina relacji R:

$$D'R \stackrel{df}{=} (\hat{b})\,\{(\exists z)(bRz)\}.$$

Przykład: 1. $R \stackrel{df}{=} <_c$
$D'R = N_0$.

2. $R \stackrel{df}{=} >_c$
$D'R = N_1$.

3. $R \stackrel{df}{=}$ »jest ojcem«
$D'R =$ »wszyscy ojcowie«.

Niechaj R oznacza relację między u i v taką, by

$$uRv \stackrel{df}{=} \{u = v +_c 1 \cdot v \,\varepsilon\, N_0\}.$$

Otóż widocznie:

$$\text{Q}'R = N_0.$$

Niechaj $a \,\varepsilon\, N_0$, a więc $a \,\varepsilon\, \text{Q}'R$, wtedy

(1) $(\exists z)\{zRa\}$, bo $(\text{seq}\, a)\, Ra$,

(2) gdyby było:

$$uRa \cdot u'Ra,$$

to byłoby: $u = a + 1$, $u' = a + 1$ i $u = u'$

a więc razem;

$$a \varepsilon N_0 \cdot \equiv \cdot R'a = \text{seq}\, a.$$

Widzimy, że relacja

$$R \overset{\text{df}}{=} \widehat{(uv)}\{u = v +_c 1 \cdot v \varepsilon N_0\}$$

zastępuje nam w zupełności termin seq i prócz tego dowiedzieliśmy się, jaka jest struktura logiczna terminu złożonego seq a.

Mieliśmy tu wypadek, że każdy element przeciwdziedziny relacji R posiadał swój obraz. Otóż:

Df. IV. Relację tego rodzaju, że każdy element jej przeciwdziedziny posiada obraz, zwiemy operatorem, operatorem funkcyjnym lub funkcją.

Jeżeli R jest operatorem, to:

I. $G'R$ zwiemy polem operatora R

II. $D'R$ zwiemy zapasem operatora R i piszemy też odpowiednio:

$$P(R), \quad Z(R).$$

Df. V. Jeżeli 1. R jest operatorem

2. $P(R) = \alpha$

3. $Z(R) \subset \beta$, (niekoniecznie $= \beta$!),

to powiadamy wraz z Peaną,

że R należy do grupy $\beta|\alpha$

$$R \varepsilon \beta|\alpha.$$

W tym wypadku:

$$yRx : \supset : y \varepsilon \beta \cdot x \varepsilon \alpha$$
$$y = R'x : \supset : y \varepsilon \beta \cdot x \varepsilon \alpha.$$

Uwaga I. Można interpretować operatory jako czynności, które zastosowane do elementów swego pola przekształcają je w odpowiednie elementy zapasu lub też jako przepisy pozwalające elementom pola przypisywać określone elementy zapasu.

Uwaga II. Aby określić operator R możemy postąpić tak:

I. podajemy klasę α, która ma być jego polem;

II. podajemy wzór dla obliczenia obrazu:

$$R'a \text{ przy danem } a;$$

III. sprawdzamy, że wzór ów ma sens dla każdego elementu klasy α.

N. p. I. Polem R nb. $\alpha = N_0$,

II. niechaj $R'x \overset{df}{=} x^2$,

III. otóż, gdy $x \varepsilon N_0$ to x^2 jest określoną liczbą całkowitą.

A zatem R jest operatorem grupy $N_0|N_0$, przyczem $P(R) = N_0$, $Z(R) \subset N_0$, lecz $Z(R) \neq N_0$, bo n. p. 5 nie jest kwadratem żadnej liczby całkowitej.

Uwaga III. Z ogólnych zasad logicznych wynika, że operatory R i S są wtedy i tylko wtedy identyczne, gdy

$$(1) \qquad P(R) = P(S)$$
$$(2) \qquad x \varepsilon P(R) \cdot \supset_x \cdot R'x = S'x.$$

34. Ze względów praktycznych wprowadzamy jeszcze pojęcie odcinka całoliczbowego.

Df. I. $\quad [a, b]_c \overset{df}{=} (\hat{a})\{a \leqq_c x \leqq_c b\}$.

— Odcinek całoliczbowy $[a, b]_c$, (krótko: $[a, b]$, jest to ogół elementów x, takich, że

$$a \leqq_c x \leqq_c b.$$

N. p.: $[2, 4] = \{2, 3, 4\}$; $[0, 8] = \{0, 1, 2 \ldots 8\}$
$[3, 3] = \{3\}$.

Zapiszemy kilka twierdzeń, których niezmiernie łatwy dowód pozostawiamy czytelnikowi;

Tw. 1. $a, b \varepsilon N_0 \supset [a, b] \varepsilon \mathrm{Cls}\, N_0$.
Tw. 2. $a \leqq_c b \cdot \supset \cdot [a, b] \neq \Lambda$.
Tw. 3. $a >_c b \cdot \supset \cdot [a, b] = \Lambda$.

34. Przystępujemy już do pojęcia ciągu.

Df. I. Ciągiem nieskończonym (krótko: ciągiem) nazwiemy operator, którego polem jest N_0.

Ciągi należą zatem do grupy typu ogólnego: $\beta|N_0$. Dla ciągu wchodzą w rachubę jedynie obrazy:

$$R'0, R'1, R'2, \ldots$$

W teorji ciągów tradycja ustaliła pewne sposoby pisania i czytania symboli, które tu zaznaczamy:

(1) Zamiast $R, S, T \ldots$ używamy dla ciągów przeważnie (nie zawsze!) liter:

$$u, v, w, a, b, \ldots$$

(2) Zamiast $R'n$ piszemy R_n — czytając: »R — — n-te« lub »R z indeksem (wskaźnikiem) n«.

(3) Cały ciąg u zaznaczamy symbolicznie:

$$u: \qquad u_0, u_1, u_2, \ldots \text{in inf.}^{1)}.$$

(4) u_n zwiemy »n-tym wyrazem ciągu u«.

Df. II. Ciąg R jest całoliczbowym, jeżeli zapas $Z(R)$ jest $\mathrm{Cls}\, N_0$, a zatem ciąg grupy $N_0|N_0$.

Przykłady:

1. u: $\quad 0, 1, 4, 9, 16, \ldots$ in inf.
$$P(u) = N_0, \; Z(u) \dot{\subset} N_0$$
$$n \varepsilon N_0 \cdot \supset_n \cdot u_n = n^2$$

2. v: $\quad 1, 2, 5, 10, 17, 26, \ldots$ in inf.

---

1) in inf. = in infinitum.

$$P(v) = N_0,\ Z(v) \subset N_0,$$
$$n \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset_n \cdot v_n = n^2 + 1$$

3. w: $1, 1, 1, \ldots$ in inf.

$$P(w) = N_0,\ Z(w) \subset N_0,$$
$$w_n = 1 \text{ dla } n|0, 1, 2, 3, 4 \ldots \qquad (\alpha)$$

[Zwyczajem matematyków zdanie (α) wyraża:

$$n \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset_n \cdot w_n = 1].$$

Operator u grupy $\beta | N_k$, gdzie $k \,\varepsilon\, N_0$, redukujemy do ciągów grupy $\beta | N_0$, kładąc:

$$n \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot v_n \stackrel{df}{=} u_{n-k}$$

i rozważając zamiast u ciąg v: $v_0, v_1, \ldots$ in inf.

Df. III. Operatory grupy typu $\beta | [a, b]_c$, gdzie a i b są liczbami całkowitemi, a więc gdzie $[a, b]$ jest odcinkiem całoliczbowym, zwiemy ciągami skończonemi.

Jeżeli jeszcze $\beta \subset N_0$, to mamy »skończony ciąg całoliczbowy«.

Przykłady:

1. $u \,\varepsilon\, N_0 | [0, 5]$
   u: $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$.
2. v: $0, 1, 3, 6, 10, 20$
   $P(v) = [0, 5], v \,\varepsilon\, N_0 | [0, 5]$.
3. w: $15, 7, 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1$.
   $P(w) = [0, 11]$
   $w_n = \mathrm{E}\{15/(n+1)\}$ dla $n | 0, 1, 2, \ldots 11$.

Umawiamy się jeszcze co do znaczenia pewnych wyrażeń.

Niechaj (1) $u, v, w \ldots$ będą ciągami całoliczbowemi,

(2) $k, l, m \ldots$ liczbami całkowitemi.

I. $u_n + v_n$ możemy zawsze uważać za n-ty wyraz takiego ciągu w, że

$$w_n = u_n + v_n \quad n \,|\, 0, 1, 2 \ldots,$$

II. ku_n — za n-ty wyraz takiego ciągu w, że

$$w_n = ku_n \quad n \,|\, 0, 1, 2 \ldots,$$

III. ogólniej: $lu_n \pm kv_n$ — za n-ty wyraz takiego ciągu w, że

$$w_n = lu_n \pm kv_n \quad n \,|\, 0, 1, 2 \ldots$$

Czytelnik domyśli się z łatwością jeszcze większej ilości podobnych umów.

Jeżeli dano nam ciąg, wskazując wzór na jego n-ty wyraz dla $n \,|\, 0, 1, 2 \ldots$, tworzymy za przykładem Russella symbol tego ciągu, dając nad zmienną bieżącą (tu nad owem »n«) znak »$\wedge$«.

Symbolem ciągu, którego n-tym wyrazem jest n. p.:

(1)	u_n	będzie	$u_{\hat{n}}$
(2)	$u_n + v_n$	«	$u_{\hat{n}} + v_{\hat{n}}$
(3)	$ku_n + lv_n$	«	$ku_{\hat{n}} + lv_{\hat{n}}$
(4)	$n^2 + 1$	«	$\hat{n}^2 + 1$

Jest to tak zwane »gaszenie zmiennej« w ciągu [1]). U niektórych autorów »gaszenie« zastępuje ujęcie w nawias szczególnego kształtu n. p.:

$$\{u_n\}, \{u_n + v_n\}, \{ku_n + lv_n\}, \{n^2 + 1\},$$

zresztą spotykamy różne spososoby pisania.

35. Rozważmy jakiś ciąg u skończony lub nieskończony:

$$u: \qquad u_0, u_1, u_2 \ldots \text{in inf.}$$

Pisząc n. p.:

$$u_2 + u_3 + \ldots + u_{10},$$

[1]) Stosujemy je również w wypadku dowolnego operatora.

mamy na myśli sumę wszystkich kolejnych wyrazów ciągu począwszy od u_2, a skończywszy na u_{16}. Tego rodzaju symbolika, aczkolwiek będąca w powszechnem użyciu, jest mało ogólna i bardzo niedoskonała. Wprowadzimy inną, drogą definicji zwrotnej.

$$\text{Df. I.}\qquad u\,\varepsilon\,\text{Ciąg.}\cdot a\,\varepsilon\,P(u)\cdot\supset\cdot\sum_{n|a}^{a}u_n \overset{df}{=} u_a. \qquad [1]$$

Df. II.

$$u\,\varepsilon\,\text{Ciąg}\cdot b\,\varepsilon\,N_0\cdot a,\ \text{seq}\,b\,\varepsilon\,P(u)\cdot\supset\cdot\sum_{n|a}^{\text{seq}\,b}u_n \overset{df}{=} \sum_{n|a}^{b}u_n + u_{b+1}.$$

N. p.: gdy

$$u\,\varepsilon\,\text{Ciąg.}\ 0,5\,\varepsilon\,P(u)\cdot\supset\cdot\sum_{n|0}^{5}u_n = \sum_{n|0}^{4}u_n + u_5 = \sum_{n|0}^{3}u_n + u_4 + u_5 = \sum_{n|0}^{2}u_n + u_3 + u_4 + u_5 = \sum_{n|0}^{1}u_n + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \sum_{n|0}^{0}u_n + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 \underset{(df\ I)}{=} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5.$$

Czytamy: $\sum\limits_{n|a}^{b}u_n$: »s i g m a u_n od $n=a$ do $n=b$« lub »s u m a u_n od $n=a$ do $n=b$«.

Przez indukcję udowodnimy natychmiast:

---

[1]) »Ciąg« oznacza ciąg nieskończony lub skończony.

Tw. 1: $u \varepsilon N_0 | N_0 \cdot a \leqq_c b \cdot \supset \cdot \sum_{n|a}^{b} u_n \varepsilon N_0$

i Tw. 2:

$$u \varepsilon N_0 | \{l, k\} \cdot a \leqq_c b \cdot a, b \varepsilon P(u) \cdot \supset \cdot \sum_{n|a}^{b} u_n \varepsilon N_0$$

Uwaga. $\sum_{n|a}^{a} u_n$ nie jest sumą w zwyczajnem tego słowa znaczeniu.

Podajemy bez dowodu kilka twierdzeń o »sigmach«. Dowody przeprowadzi czytelnik z największą łatwością, posługując się bezustannie zasadą indukcji matematycznej.

Tw. 3:

$$u \varepsilon \text{Ciąg} \cdot a \leqq_c b \cdot a, b \varepsilon P(u) \cdot \supset \cdot \sum_{n|a}^{b} u_n = \sum_{p|a}^{b} u_p$$

$$= \sum_{z|a}^{b} u_z = \ldots$$

[»pozorność zmiennej bieżącej«].

Tw. 4: $u \varepsilon \text{Ciąg} \cdot a \leqq_c b \cdot k \varepsilon N_0 \cdot$

$$a, b, \varepsilon P(u) : \supset : \sum_{n|a}^{b} u_n = \sum_{n|a+k}^{b+k} u_{n-k}$$

[»podwyższanie zmiennej bieżącej«].

Tw. 5:

$$u \varepsilon \text{Ciąg} \cdot a \leqq_c b \cdot k \varepsilon N_0 \cdot a, b, \varepsilon P(u) \cdot k \leqq_c a : \supset :$$

$$\sum_{n|a}^{b} u_n = \sum_{n|a-k}^{b-k} u_{n+k}$$

[»obniżanie zmiennej bieżącej«].

Tw. 6: $u \,\varepsilon\, \text{Ciąg} \cdot a \leqq_c b \cdot b \,\varepsilon\, P(u) :\supset:$

$$\sum_{n|a}^{b} u_n = \sum_{n|a}^{b} u_{a+b-n}$$

[»odwracanie zmiennej bieżącej«].

Tw. 7:

$u, v \,\varepsilon\, \text{Ciąg} \cdot a \leqq_c b \cdot a, b \,\varepsilon\, P(u), a, b \,\varepsilon\, P(v) :\supset:$

$$\sum_{n|a}^{b} (u_n + v_n) = \sum_{n|a}^{b} u_n + \sum_{n|a}^{b} v_n .$$

Tw. 8:

$u \,\varepsilon\, \text{Ciąg} \cdot a \leqq_c b \cdot a, b \,\varepsilon\, P(u), k \,\varepsilon\, N_0 :\supset:$

$$\sum_{n|a}^{b} (k \times u_n) = k \times \sum_{n|a}^{b} u_n .$$

Tw. 9:

$u \,\varepsilon\, \text{Ciąg} \cdot a \leqq_c k <_c b \cdot a, b \,\varepsilon\, P(u) :\supset:$

$$\sum_{n|a}^{b} u_n = \sum_{n|a}^{k} u_n + \sum_{n|k+1}^{b} u_n .$$

Tw. 10:

$u \,\varepsilon\, \text{Ciąg} \cdot a < k \leqq_c b \cdot a, b \,\varepsilon\, P(u) :\supset:$

$$\sum_{n|a}^{b} u_n = \sum_{n|a}^{k-1} u_n + \sum_{n|k}^{b} u_n .$$

§ 15. System dziesiętny.

36. Ze szkół elementarnych wynosimy sztukę pisania liczb w systemie dziesiętnym. Wiemy n. p., że symbol 263 oznacza

$$2 \cdot X^2 + 6 \cdot X^1 + 3 \cdot X^0\ ^{1)}, \quad (X = 10)$$

przytem łatwo zauważymy, że 263 możnaby napisać cyframi dziesiętnemi jeszcze inaczej, n. p. jako:

$$000263 = 0 \cdot X^5 + 0 \cdot X^4 + 0 \cdot X^3 + 2 \cdot X^2 +$$
$$+ 6 \cdot X^1 + 3 \cdot X^0$$

i taki sposób pisania bywa często z korzyścią używany n. prz. na biletach bankowych.

Otóż sztuka wyrażania liczb całkowitych w systemie dziesiętnym polega na tem, że do każdej liczby całkowitej A możemy dobrać ciąg skończony: $a_0, a_1, a_2, \ldots a_k$ jej »cyfr«, będących liczbami całkowitemi, należącemi do odcinka całoliczbowego $[0, 9]$ i liczbę A przedstawić jako:

$$A = \sum_{s|0}^{n} a_s \cdot X^s = \sum_{s|0}^{n} a_{n-s} \cdot X^{n-s} =$$
$$= a_n \cdot X^n + \ldots + a_0 \cdot X^0 \quad (X = 10).$$

Odnośne twierdzenia, udowadniające powyższą możliwość, będą przedmiotem obecnego paragrafu.

Tw. 1: Jeżeli A jest liczbą całkowitą, p liczbą całkowitą, która, o ile $A > 0$ ma jednak spełniać związek $p \geqq_c \exp_X A$, to istnieje ciąg a o własnościach:

---

[1]) Dla krótkości posługujemy się znakiem (.) zamiast ($\times$) dla oznaczenia mnożenia, co — jak wiemy — jest w powszechnem użyciu.

(1) a jest ciągiem całoliczbowym o polu

$$P(a) = [0, p].$$

(2) Zapas $Z(a)$ zawiera się w $[0, 9]$, czyli:

$$n \varepsilon [0, p] \cdot \supset_n \cdot 0 \leqq a_n \leqq 9.$$

(3) $$\sum_{s|0}^{p} a_s \cdot X^s = A.$$

D o w ó d ind:

I. Aż do $A = 0$ włącznie twierdzenie jest słuszne, gdyż wystarczy położyć

$$n \varepsilon [0, p] \cdot \supset_n \cdot a_n \overset{df}{=} 0.$$

II. Gdyby twierdzenie było słusznem dla wszelkich całkowitych A, takich, że

$$A \leqq_c K, \quad (K \varepsilon N_0)$$

to udowodnimy je jeszcze dla $K + 1$.

Otóż $K + 1 > 0$, więc ma sens $\exp_X (K + 1)$. Niechaj $\exp_X (K + 1) \overset{df}{=} t$ i najpierw niechaj $p = t$.

Wtedy: $$K + 1 = m \cdot X^t + r, \qquad \{\text{p. } 92\}$$

gdzie: $$0 \leqq m < X,$$

$r = 0$ lub $\exp_X r < t$, (w każdym razie $r < K + 1$).

(α) Jeżeli $r = 0$, $K + 1 > 9$, to $t > 0$; położymy wtedy:

$$a_n \overset{df}{=} 0 \quad \text{dla} \quad n | 0, 1, 2, \ldots, t - 1$$
$$a_t \overset{df}{=} m$$

otrzymamy:

(1) $P(a) = [0, t]$

(2) $Z(a) \subset [0, 9]$

$$(3) \quad \sum_{s|0}^{t} a_s \cdot X^s = \sum_{s|0}^{t-1} a_s \cdot X^s +$$

$$+ a_t \cdot X^t = 0 + m \cdot X^t = m \cdot X^t + r = K + 1.$$

(β) Dla $r = 0$ i $K + 1 \leqq 9$ mamy $t = 0$; wtedy kładziemy:

$$P(a) = [0, 0] = [0, t]$$
$$a_0 \overset{df}{=} m$$

i znów:

$$\sum_{s|0}^{t} a_s \cdot X^s = a_0 \cdot X^0 = m \cdot X^0 + r = K + 1.$$

(γ) Dla $r > 0$ mamy $l \overset{df}{=} \exp_X r < t$.

Wedle przypuszczenia, że twierdzenie zachodzi dla wszelkich $A \leqq K$, otrzymamy ciąg b taki, że

$$(1) \quad P(b) = [0, t-1] \quad (t - 1 \geqq l)$$
$$(2) \quad Z(b) \subset [0, 9]$$
$$(3) \quad r = \sum_{s|0}^{t-1} b_s \cdot X^s.$$

Położymy: 1. $P(a) = [0, t]$

2. $a_n = b_n$ dla $n | 0, 1, 2 \ldots, t-1$

3. $a_t = m$.

Wtedy: (1) $P(a) = [0, t]$

(2) $Z(a) \subset [0, 9]$

$$(3) \quad \sum_{s|0}^{t} a_s \cdot X^s =$$

$$= \sum_{s|0}^{t-1} a_s \cdot X^s + a_t \cdot X^t = m \cdot X^t + r = K + 1.$$

(δ) Jeżeli teraz $p >_c t$, to odszukamy ciąg b taki, by:

(1) $P(b) = [0, t]$

(2) $Z(b) \subset [0, 9]$

(3) $K + 1 = \sum_{s|0}^{t} b_s \cdot X^s$

i położymy:

1. $P(a) = [0, p]$
2. $a_n \overset{df}{=\!=} b_n$ dla $n|0, 1, \ldots, t$
3. $a_n \overset{df}{=\!=} 0$ dla $n|t+1, \ldots, p$.

Będzie wtedy:

(1) $P(a) = [0, p]$

(2) $Z(b) \subset [0, 9]$

(3) $$\sum_{s|0}^{p} a_s \cdot X^s = \sum_{s|0}^{t} a_s \cdot X^s + {}$$
$$+ \sum_{s|t+1}^{p} a_s \cdot X^s = \sum_{s|0}^{t} b_s \cdot X^s + 0 = K + 1.$$

III. Indukcja kończy dowód.

Tw. 2: (pomocnicze). Jeżeli:

(1) $A = \sum_{s|0}^{n} a_s \cdot X^s \quad (n \,\varepsilon\, N_0)$

(2) $0 \leqq_c a_s \leqq_c 9$ dla $s|0, 1, \ldots, n$

(3) $a_n >_c 0$,

to $\exp_X A \geqq_c n$.

Dowód: (α) $n = 0$.

Wtedy:

$$A = \sum_{s|0}^{0} a_s \cdot X^s = a_0 \cdot X^0 = a_0 \geqq 1 = X^0 > 0.$$

skąd: $\exp_X A = 0 = n$

(β) $n >_c 0$.

Wtedy:

$$A = \sum_{s|0}^{n} a_s \cdot X^s = \sum_{s|0}^{n-1} a_s \cdot X^s + a_n \cdot X^n \geqq a_n \cdot X^n \geqq$$
$$\geqq X^n.$$

Zatem: $\exp_X A \geqq n$.

Tw. 3 (pomocnicze). Jeżeli:

(1) $A = \sum_{s|0}^{n} a_s \cdot X^s \quad (n \varepsilon N_0)$.

(2) $0 \leqq_c a_s \leqq_c 9$ dla $s|0, 1, 2 \ldots n$,

to $$A <_c X^{n+1}$$

Dowód ind.:

I. Dla $n = 0$ mamy:

$$A = a_0 \cdot X^0 = a_0 < X = X^{n+1}.$$

II. Gdy $k \varepsilon N_0$ i twierdzenie słuszne dla $n = k$, to:

$$A = \sum_{s|0}^{k+1} a_s \cdot X^s = \sum_{s|0}^{k} a_s \cdot X^s + a_{k+1} \cdot X^{k+1} <$$
$$< X^{k+1} + a_{k+1} \cdot X^{k+1} \leqq X^{k+1} + 9 \cdot X^{k+1} = X^{k+2} =$$
$$= X^{\operatorname{seq} k+1}.$$

III. Ind. k. d.

Wniosek z tw. 2 i 3:

Jeżeli: (1) $A = \sum_{s|0}^{n} a_s \cdot X^s \quad (n \varepsilon N_0)$

(2) $0 \leqq_c a_s \leqq 9$ dla $s|0, 1, \ldots, n$

(3) $a_n >_c 0$,

to $\exp_X A = n$, [p. str. 92 tw. 2].

Tw. 4 (pomocnicze).

Jeżeli: (1) $A = \sum_{s|0}^{n} a_s \cdot X^s \quad (n \varepsilon N_0)$

(2) $0 \leqq_c a_s \leqq_c 9$ dla $s|0, \ldots, n$,

to:

$$a_n \cdot X^n \leqq_c A <_c (a_n + 1) \cdot X^n.$$

Dowód: I. Dla $n = 0$ mamy:

$$A = a_0 \cdot X^0 = a_0 .$$

$$a_0 \cdot X^0 = a_0 \leqq A = a_0 < X^1 \leqq (a_0 + 1) \cdot X.$$

II. Dla $n > 0$ mamy:

$$A = \sum_{s|0}^{n-1} a_s \cdot X^s + a_n \cdot X^n \geqq a_n \cdot X^n;$$

lecz $$\sum_{s|0}^{n-1} a_s \cdot X^s < X^n \quad \text{(tw. 3)},$$

stąd: $$A < a_n \cdot X^n + X^n = (a_n + 1) \cdot X^n.$$

Tw. 5 (pomocnicze).

Jeżeli: 1. $A = \sum_{s|0}^{p} a_s \cdot X^s \quad (p \,\varepsilon\, N_0)$

2. $0 \leqq_c a_s \leqq_c 9$ dla $s|0, 1, \ldots, p$

to: (α) gdy $A = 0$ wtedy

$$a_s = 0 \quad \text{dla} \quad s|0, 1, \ldots, p,$$

(β) gdy $A > 0$, to wtedy

$$p \geqq_c \exp_X(A) \overset{df}{=} k, \tag{1}$$

$$a_s = 0 \quad \text{dla} \quad s|k+1, \ldots, p, \tag{2}$$

$$a_k = E(A/X^k). \tag{3}$$

Dowód: I. $A = 0$.

Gdyby jakieś $a_s > 0$, to $A \geqq a_s \cdot X_s > 0$.

II $A > 0$.

(1) Gdyby $p < k$, to $A < X^{p+1} \leqq X^k$, tymczasem $X^k \leqq A < X^{k+1}$, gdyż $k = \exp_X A$.

(2) Gdyby jakieś a_t, przy $t > k$, było > 0, to:

$$A \geqq \sum_{s|0}^{t} a_s \cdot X^s \geqq a_t \cdot X^t \geqq X^t,$$

zatem byłby też $\exp_X A \geqq t > k$.

(3) Wiemy już, że

$$A = \sum_{s|0}^{k} a_s \cdot X^s,$$

stąd:

$$a_k \cdot X^k \leqq A < (a_k + 1) \cdot X^k,$$

a więc:

$$a_k = E(A/X^k).$$

Tw. 6: Jeżeli

(1) $A = \sum_{s|0}^{p} a_s \cdot X^s = \sum_{s|0}^{p} b_s \cdot X^s$

(2) $0 \leqq_c a_s \leqq_c 9, \quad 0 \leqq_c b_s \leqq 9$ dla $s|0, 1, \ldots, p$,

to $a_s = b_s$ dla $s|0, 1, \ldots, p$.

Dowód: (α) $A = 0$.

Wtedy: $a_s = b_s = 0$ dla $s|0, 1, \ldots, p$ [tw. 5].

(β) $A > 0$.

Wtedy: $a_s = b_s$ dla $s > k$, gdzie $k = \exp_X A$.

$$A = \sum_{s|0}^{k} a_s \cdot X^s = \sum_{s|0}^{k} b_s \cdot X^s,$$

przyczem

$$a_k = b_k = E(A/X^k).$$

Oznaczmy przez l najmniejsze s takie, że

$$a_s = b_s \quad \text{dla } s > l$$
$$a_l \neq b_l \quad \text{i n. prz.} \quad a_l < b_l.$$

Wtedy: $$A = \sum_{s|0}^{l} a_s \cdot X^s + \sum_{s|2+1}^{k} a_s \cdot X_s =$$
$$= \sum_{s|0}^{l} b_s \cdot X^s + \sum_{s|l+1}^{k} b_s \cdot X^s,$$

stąd: $$A' \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{s|0}^{l} a_s \cdot X^s = \sum_{s|0}^{l} b_s \cdot X^s.$$

Skoro $a_l < b_l$, to $b_2 > 0$ i $\exp_X(A') = l$ [tw. 2, 3].

Stąd dalej:

$$a_l = b_l = E(A'/X^2) \quad \text{[tw. 5]},$$

wbrew przypuszczeniu, że $a_l < b_l$.

Analogicznie dla $a_t > b_t$.

Wniosek główny.

Jeżeli $A \varepsilon N_0$, $p \varepsilon N_0$, i o ile $A >_{\varepsilon} 0$, to

$$p \geqq_{\varepsilon} \exp_X A,$$

wówczas istnieje jeden jedyny ciąg a, spełniający warunki twierdzenia 1.

Df. I: Powyższy jedyny ciąg zwiemy ciągiem cyfr liczby A aż do rzędu p.

$$Cf(A)^{(\omega)}.$$

Df. II: Gdy $A > 0$, to ciąg cyfr dla $p = \exp_X A$ zwiemy ciągiem cyfr istotnych:

$$Cf(A).$$

Dla $A = 0$ niema ciągu cyfr istotnych!

Df. III: Gdy $A \varepsilon N_0$, to związek:

$$A = \sum_{s|0}^{k} a_s \cdot X^s, \quad \text{gdzie} \quad a_s = Cf(A)_s^p \quad s|0, 1 \ldots k$$

i o ile $A > 0$, to

$$p \geqq_{\varepsilon} \exp_X (A)$$

zapisujemy, krótko

$$A = \overline{a_p, a_{k-1} \ldots a_0},$$

Gdy $a_0, a_1 \ldots a_k$ są danemi szczególnemi liczbami, opuszczamy kreskę, [n. prz.: $2637 = \overline{2637}$].

Symbol powyższy:

$$\overline{a_k, a_{k-1} \ldots a_0}$$

jest symbolem dziesiętnym liczby A.

Nazwiemy go **normalnym** o ile $A > 0$ i $p = \exp_X A$ lub, gdy dla $A = 0$ napiszemy $A = 0$.

W ten sposób dziesięciu znakami 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 wyrażamy każdą liczbę całkowitą.

Df. IV: $Cf(A)_n^p \overset{df}{=} n$ — »n-ta cyfra liczby A«

Twierdzenie uzupełniające:

I. Dla $A > 0$ i $p > \exp_X A = k$ mamy:

$$Cf(A)_s^p = Cf(A) \quad \text{dla} \quad s \leq_c k$$
$$Cf(A)_s^p = 0 \quad \text{dla} \quad s >_c k,$$

zatem $$A = \overline{0, 0 \ldots 0, a_k a_{k-1} \ldots a_0}$$

gdzie $a_0, a_1 \ldots a_k$ są cyframi istotnemi liczby A.

Przedstawienie:

$$\overline{A = a_k a_{k-1} \ldots a_0} \qquad \text{(normalne)}$$
$$\text{i} \quad \overline{A = 0, 0 \ldots a_k a_{k-1} \ldots a_0} \qquad (p >_c k)$$

posiadają jednakowe ostatnie $k + 1$ cyfr, przyczem pozostałe są zerami.

II. Liczbę $A = 0$ przedstawić możemy jedynie jako:

$$A = \overline{0} \qquad \text{(normalnie)}$$

lub:

$$A = \overline{0, 0 \ldots 0} \quad \{\text{ilość zer} = p > 0\}.$$

§ 16. Interpretacja założeń $A \cdot l \cdot C$.

Doprowadziliśmy formalną budowę Arytmetyki liczb całkowitych do miejsca, od którego począwszy łatwo już budować dalej bez większych trudności natury logicznej. Rzućmy okiem wstecz na całość jej podstaw. Dotrzymaliśmy zapowiedzianego przyrzeczenia. Ustawiliśmy trzy listy (I) pojęć pierwotnych, (II) postulatów, (III) logiki i w toku budowy trzymaliśmy się umowy pierwotnej, dotyczącej wprowadzania dalszych pojęć i zdań w obręb A. l. c.

Powstaje teraz zagadnienie. Czy w ten sposób budujemy pewną określoną Arytmetykę Liczb Całkowitych czy też tylko typ arytmetyk pewnego gatunku? Zagadnienie: co to jest liczba całkowita i jakie są jej własności zostało tylko zredukowane do bardzo małego zespołu pojęć i postulatów. Nasze pojęcia pierwotne: N_0, 0, seq były to dla nas jedynie czyste symbole pojęciowe, których znaczenie, poza tem, że spełniają postulaty, nie grało żadnej roli w budowie. Na zapytanie, czem są jednak owe N_0, 0 i seq niedawaliśmy, zresztą w zgodzie z planem pierwotnym, żadnej odpowiedzi. Zastanówmy się, czy taką teraz odpowiedź moglibyśmy uzyskać i w jakim sensie? Cóż to za pojęcia owe N_0, 0 czy seq? Na takie pytania odpowiadamy dwojako:

I. Odpowiedź idealistyczna.

Na kwestję, czem jest pojęcie A, odpowiedzieć możemy definicją, budującą A z pojęć innych niż A.

Jeżeli A należy do zespołu pojęć jakiejś teorji dedukcyjnej (M), podajemy definicję A, która w ostatniej instancji pozwoli nam zbudować czy zrozumieć znaczenie terminu A przy pomocy samych tylko pojęć pierwotnych teorji (M). Jasnem jest, że nie zechcemy zastosować tego postępowania w wypadkach, gdy A należy właśnie do pojęć pierwotnych teorji (M).

Niewiadomo do czego mogłaby się jeszcze przydać taka »tautologiczna« definicja.

Poza teorją (M) szukanie znaczenia A nie posiada dotychczas formalnego sensu. Postąpmy jednak w następujący sposób. Przypuśćmy, że dano nam teorję dedukcyjną, powiedzmy (N), która posiada: (I') pojęcia pierwotne, (II') postulaty i (III') przyjęła neutralną logikę do pomocy, tę samą co w wypadku teorji (M). Niechaj pojęciami pierwotnemi teorji (M) będą:

$$A_1, A_2, \ldots, A_k.$$

Być może, że wśród pojęć pierwotnych lub pochodnych teorji (N) można będzie wybrać grupę:

$$B_1, B_2, \ldots, B_k$$

tak, że gdybyśmy położyli przez definicję:

$$A_1 \overset{df}{=} B_1, \ldots, A_k \overset{df}{=} B_k \quad (\alpha),$$

to dzięki postulatom i twierdzeniom teorji (N), tak określone: $A_1, \ldots, A_k$ spełniałyby postulaty teorji (M)! Uczyńmy to.

Powiedzielibyśmy wtedy, że dano interpretację idealną teorji (M) w ramach teorji (N).

Wszelkie twierdzenia (postulaty i pochodne) teorji (M) stałyby się dzięki umowie (α) twierdzeniami teorji (N)

Widzimy, że nie dano odpowiedzi na pytanie: co to jest A, co nie ma więc dalej dla nas określonego sensu, lecz odpowiedziano w całości: jak rozumieć teorję (M), do której należy A, wraz z jej pojęciami i twierdzeniami i to w ramach teorji (N)!

Wyobrażamy sobie logikę zbudowaną dedukcyjnie, również przy pomocy (I) pojęć pierwotnych logicznych, (II) postulatów, lecz w miejscu listy (III) występuje zespół pewnych dyrektyw lub opisu akcyj logicznych, których znaczeniem nie mogę się tutaj zajmować. Otóż możemy myśleć o interpretacji idealnej naszej teorji (M) w ramach logiki dedukcyjnej (L). Taką interpretację nazwalibyśmy absolutną, ze względu na to, że logika (L) ma stanowić niezmienny składnik wszelkich przez nas rozważanych teoryj dedukcyjnych, innych niż (L).

Przypuśćmy, że dano interpretację idealną teorji (M) w ramach teorji (N).

Czy tylko ta jedna dana interpretacja, jest możliwa czy może ich istnieć więcej? Przynajmniej dla **A.** l. c. odpowiemy tu na korzyść drugiej z możliwości. Rozważmy w obrębie **A.** l. c. następujące pojęcia

(1) N_1 (2) 1 (3) seq′, przyczem

co do seq′ zawieramy umowę:

Jeżeli $a \varepsilon N_1$ i tylko wtedy, to niechaj $\mathrm{seq}' a = \mathrm{seq}\, a$.

Oznaczmy na chwilę $N_0' \overset{df}{=} N_1$, i $0' \overset{df}{=} 1$. Zespół:

(1) N_0' (2) $0'$ (3) seq′

spełnia następujące związki:

1. $0' \varepsilon N_0'$.
2. $a \varepsilon N_0' \supset \mathrm{seq}' a \varepsilon N_0'$.
3. $a, b \varepsilon N_0' \cdot \mathrm{seq}' a = \mathrm{seq}' b \cdot \supset \cdot a = b$.
4. $a \varepsilon N_0' \cdot \supset \mathrm{seq}' a \neq 0'$.
5. $\varphi(0') \cdot (x)\{x \varepsilon N_0' \cdot \varphi(x) \cdot \supset \cdot \varphi(\mathrm{seq}' x)\} : \supset : : (z)\{z \varepsilon N_0' \cdot \supset \cdot \varphi(z)\}$.

Z łatwością mianowicie, zdołamy, dzięki definicjom N_0', $0'$, seq′ i postulatom A. l. c. udowodnić, że własności 1—5 mają rzeczywiście miejsce.

Np.: 1. $0' \varepsilon N'_0$, gdyż to oznacza, że

$$1 \varepsilon N_1,$$

2. $a \varepsilon N'_0 \supset \text{seq}' a \varepsilon N'_0$, gdyż to znów powiada, że

$$a \varepsilon N_1 \supset \text{seq}\, a \varepsilon N_1$$

i t. d.

Otrzymaliśmy interpretację A. l. c. w ramach A. l. c. i to nietautologiczną, gdyż

(1) $0' \neq 0$, gdyż $1 \neq 0$.

(2) $N'_0 \neq N_0$, gdyż $N_1 \neq N_0$.

(3) $\text{seq}' a \neq \text{seq}$, gdyż polem seq jest N_0, a seq′ klasa N_1.

Przypuśćmy teraz że w ramach teorji jakiejś teorji (N) dano interpretację A. l. c. wybierając trzy pojęcia, powiedzmy

$$\overline{N_0}, \quad \overline{0}, \quad \overline{\text{seq}},$$

które czynią zadość, dzięki teorji (N), postulatom A. l. c.

Określmy:

$$\overline{N'_0} \overset{df}{=} \overline{N_1}, \quad \overline{0'} \overset{df}{=} \overline{1}, \quad \overline{\text{seq}'}\, x \overset{df}{=} \overline{\text{seq}}\, x, \quad \text{o ile} \quad x \varepsilon N_1.$$

Jasnem jest, że:

$$\overline{N'_0}, \quad \overline{0}, \quad \overline{\text{seq}'}$$

posiadają już znaczenie w ramach (N) i że zespół ten stanowi drugą z kolei interpretację dla A. l. c. w ramach teorji (N). —

W podobny sposób moglibyśmy tworzyć dowolnie wiele interpretacyj! Ten sam fakt wielokrotności interpretacyj w ramach danej teorji spotykamy w każdym ze znanych nam wypadków teoryj dedukcyjnych, o ile jedna interpretacja została uzyskana.

Zastanówmy się obecnie nad celem dawania takich interpretacyj idealnych teorji, powiedzmy (M), w ramach teorji, dajmy na to (N). Nie byłoby tu miejsca na wymienienie wszystkich znanych nam z praktyki korzyści, które stąd płyną, zatem podkreślimy tylko jedną, ale zato kapitalną!

Każda teorja dedukcyjna (M) musi sobie zadać pytanie, czy przypadkiem nie jest sprzeczną w sobie. Oznacza to, że chcemy wiedzieć, czy czasem wśród twierdzeń tej teorji nie znajdzie się twierdzenie p, które udowodniono w ramach (M), ale, którego zaprzeczenie $\sim p$ również zostało udowodnione w teorji (M)! Znakomity logik, profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego Jan Śleszyński, zmarły w roku 1931, okazał w swej pracy pt.: *Sur le raisonement dans les sciences déductives*, zamieszczonej w Roczniku Pol. Tow. Mat. (Kraków 1921, t. I, str. 102), że w powyższym wypadku każde twierdzenie teorji (M) figurowałoby w zespole jej twierdzeń wraz ze swem zaprzeczeniem, a nawet więcej że każde zdanie sformułowane w terminach teorji (M) i terminach logicznych byłoby twierdzeniem prawdziwem (wraz ze swem zaprzeczeniem) teorji (M). Świadczyłoby to oczywiście o zupełnej nieprzydatności teorji do jakichkolwiek celów!

Jakże upewnić się, że dana nam teorja nie jest sprzeczną w sobie? Jedynym dostępnym nam sposobem, który połowicznie tę sprawę załatwia, jest następujący: przypuśćmy, że daną nam teorję (M) zinterpretowano idealnie w ramach (N). Jak już wiemy, twierdzenia i pojęcia teorji (M) stają się wtedy twierdzeniami i pojęciami (N).

Otóż każda sprzeczność w (M) odbiłaby się też w postaci sprzeczności w teorji (N)! Jeżeli jeszcze podamy **absolutną** interpretację teorji w ramach logiki (L), to pozostanie nam tylko kwestja niesprzeczności (L)!

Na tę ostatnią kwestję niepotrafimy dziś jeszcze wskazać zadowalającej odpowiedzi, mimo, że o tę trudność rozbijają się wysiłki najdzielniejszych głów logicznych naszych czasów.

II. Odpowiedź realistyczna.

Możemy szukać innej jeszcze odpowiedzi na postawione uprzednio pytanie o znaczeniu danego pojęcia. Pojęcia logiczne pojmujemy jako pewne wyidealizowane obrazy konkretnych realjów (konkretnych przedmiotów, stosunków, warunków i t. d.). Celem pojęć jest, w ujęciu realisty, imitowanie konkretu, tak jak celem sądów jest wyrażenie stosunków konkretnych wśród realjów.

Możemy zarządać na nasze pytanie odpowiedzi, którąby wskazywała na te **konkretne przedmioty i związki**, które postanowiono imitować pojęciami N_0, 0, seq i postulatami A. l. c.

Interpretacja konkretna nie należy jednak do matematyki i logiki.

Problem tej interpretacji nasuwa mnóstwo kwestyj natury filozoficznej, w które nie moglibyśmy tu wchodzić.

W kilku miejscach dotychczasowego tekstu mówiliśmy już o **klasach** czy **relacjach**. Wprowadziliśmy odnośne pojęcia **niezależnie** od A. l. c. i postulatów układu Peany. Wiadomości w ten sposób zdobyte, posłużą nam obecnie do skonstruowania jednej z najgłębszych w swem znaczeniu interpretacyj A. l. c., którą często nazywają »logizacją« Arytmetyki, wychodząc ze stanowiska, że teorja zbiorów i relacyj stanowi część teorji dedukcyjnej logiki. Za taką należy ją uważać, a więc za »absolutną« w naszej nomenklaturze, jeżeli za punkt wyjścia weźmiemy n. prz. kodeks logiczny jaki przedstawiają *Principia Mathematica* Whiteheada i Russella, dzieło, o którem wspominaliśmy już na początku książki.

Kilka uwag wstępnych będzie nam tu niezbędnych.

1. Przypuśćmy, że dano nam pewną relację R. Określmy relację R^* w następujący sposób:

$$R^* = \widehat{(uv)}\,\{vRu\}. \qquad \text{[p. str. 42]}$$

Tak określone R^* zwie się odwrotnością relacji R.

Przykłady:

$$\leqq_c \text{ i } \geqq_c; \quad <_c \text{ i } >_c; \quad =_c \text{ i } =_c.$$

2. Przypuśćmy, że relacja R jest operatorem [p. str. 93], a więc, że każdy element x należący do przeciwdziedziny $Q'R$ posiada określony obraz $R'x$. Przypuśćmy jeszcze, że nietylko R ale i odwrotność R^* jest operatorem, tak, że jak łatwo widzieć mamy związki:

$$xRy \cdot xRy' \cdot \supset \cdot y = y' \qquad (1)$$

$$xRy \cdot x'Ry \cdot \supset \cdot x = x' \qquad (2)$$

Relację R nazwalibyśmy wtedy: odpowiedniością doskonałą między $D'R$, a $Q'R$. Przypisuje ona każdemu elementowi x należącemu do $Q'R$ jeden jedyny element y taki, że zachodzi xRy, ale również każdemu z należącemu do $D'R$ jedno jedyne w takie, że zachodzi wRz. Układa ona, że tak powiemy elementy $D'R$ i $Q'R$ w oddzielne pary.

3. Niechaj obecnie będą nam dane klasy α i β.

Przypuśćmy, że istnieje relacja R spełniająca warunki:

(1) R jest odpowiedniością doskonałą.

(2) $D'R = \alpha$.

(3) $\text{Œ}'R = \beta$.

Powiemy wtedy, że klasy α i β są równoliczne i zaznaczymy to przez $\alpha rl \beta$. Powyższa definicja równoliczności, pochodząca od J. Cantora [1]), jest widocznie uogólnieniem i ujęciem formalnem procesu powszechnie znanego wśród prymitywnych nawet ludów, polegającego a na wykazywaniu równoliczności gromad konkonkretnych przedmiotów drogą wymiany »sztuka za sztukę«. Ze stanowiska filozoficznego jest ona przez to niezwykle ciekawa, że wprowadza równoliczność bez uprzedniego pojęcia ilości.

4. Rozważmy obecnie jakąś klasę α i niechaj klasa β zawiera się w α:

$$\beta \subset \alpha.$$

Powiemy o niej, że jest ona częścią właściwą klasy α jeśli jeszcze $\beta \neq \alpha$. Rozważając wszelkie części właściwe klasy α albo:

(*) znajdziemy taką, która będzie równoliczna całości α.

$$(\exists \beta)\{\beta \subset \alpha \cdot \beta \neq \alpha \cdot \beta rl \alpha\},$$

lub (**) żadna część właściwa klasy α nie będzie równoliczna z klasą α.

$$\sim (\exists \beta)\{\beta \subset \alpha \cdot \beta \neq \alpha \cdot \beta rl \alpha\}.$$

Że klasy pierwszego rodzaju mogą istnieć, przeko-

---

[1]) Jerzy Cantor, twórca teorji zbiorów (mnogości) ur. 1845 zmarł w 1918 r.

namy się łatwo na przykładzie z A. *l.* c. Niechaj będzie:

$$\alpha \overset{df}{=} N_0, \quad \beta \overset{df}{=} N_1 \quad \text{i} \quad xRy : \overset{df}{=} ; y \varepsilon N_0 \cdot x = \operatorname{seq} y.$$

Z łatwością udowodnimy, że

$$N_1 \neq N_0, \; N_1 \subset N_0, \; \mathrm{D}^{\iota}R = N_1, \; \mathrm{Q}^{\iota}R = N_0$$

i że R jest odpowiedniością doskonałą. Zatem N_0 należy do klas pierwszego rodzaju.

Klasy pierwszego rodzaju zwiemy wedle Dedekinda[1]) nieskończonemi lub nieskończenie licznemi, drugiego rodzaju skończonemi.

Są to niezmiernie ciekawe definicje skończoności czy nieskończoności klas, o których wiele ma do powiedzenia Teorja Mnogości [p. W. Sierpiński: Zarys Teorji Mnogości 1923; W. Wilkosz: Podstawy ogólnej Teorji Mnogości 1925].

Zauważmy, że wedle tych definicyj klasa N_0 jest klasą nieskończenie liczną.

5. Rozważmy dla danej klasy α ogół wszystkich klas ξ równolicznych z α i nazwijmy symbolicznie przez $NC^{\prime}\alpha$ {»numerus cardinalis α«} lub słownie »moc klasy α« klasę:

$$NC^{\prime}\alpha \overset{df}{=} (\hat{\xi}) [\xi r l \alpha].$$

W teorji Russella powinniśmy wprowadzić odpowiednie dla zasad »teorji typów« ograniczenia co do tego, jak rozumieć ów »ogół« klas ξ równolicznych z klasą α, ale o tem tu mówić dłużej nie możemy[2]).

6. Przy odpowiednich założeniach logiki dedukcyjnej, mamy tamże twierdzenie następujące:

---

[1]) R. Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen wspomniane na początku książki.

[2]) p. moje Podstawy Ogólnej Teorji Mnogości.

Dla każdej klasy α można znaleść element a taki, że a nie należy do α. Jeżeli klasy β i γ różnią się tylko tem od klasy α, że brak im po jednym tylko elemencie w stosunku do klasy α, a więc, że

$$E!(\imath x)\{x \varepsilon \beta \cdot x \sim \varepsilon \alpha\}$$
$$E!(\imath x)\{x \varepsilon \gamma \cdot x \sim \varepsilon \alpha\},$$

to β i γ są równoliczne.

Stąd już widoczne, że $NC'\beta = NC'\gamma$ i że wszystkie klasy tego rodzaju należą do jednej i tej samej NC, którą nazwiemy następnikiem $NC'\alpha$

$$\text{nast}'NC'\alpha.$$

Klasa pusta może być równoliczna jedynie z klasą pustą. Klasy puste (jeśli istnieją różne) tworzą jedną NC, oznaczoną tymczasem przez Θ.

Wprowadźmy teraz następującą interpretację pojęć pierwotnych A. l. c.:

I. 0 niechaj oznacza Θ.

II. N_0 niechaj oznacza ogół $NC'\alpha$, gdzie α jest klasą skończoną.

III. »seq« niechaj oznacza w obrębie obecnego N_0 operator »nast'«.

Teorja Mnogości, opierając się na swych postulatach i twierdzeniach, udowadnia, że przy takiej interpretacji wszystkie postulaty Peany będą spełnione.

Powyższa niezwykle ważna interpretacja pochodzi w zasadzie od G. Fregego. Z wielu względów należy ją przecież uważać za interpretację »naturalną«, stojącą treściowo najbliżej może tego, co mamy na myśli zastanawiając się nad sensem 0, N_0 i seq, aczkolwiek została ona sprecyzowana i ujęta w ścisłe ramy formalnej logiki.

Aby wniknąć głęboko w jej znaczenie filozoficzne należałoby koniecznie przestudjować Fregego »Grundlagen der Arithmetik« (1884 Wrocław) lub Russella Principles of Mathematics (1903 Cambridge).

Nota I.

O Definicji Zwrotnej.

Zapowiedzieliśmy na str. 20 omówienie trudności związanej z pojęciem definicji zwrotnej czyli rekurencyjnej i obecnie przystępujemy do zrealizowania naszego przyrzeczenia. Odrazu zaznaczyć muszę, że powołam się tu na pewne fundamentalne twierdzenie, będące osią całej tej sprawy, atoli udowodnienie jego wymagałoby dość znacznych przygotować z dziedziny ogólnej teorji mnogości i dlatego co do bliższych szczegółów odesłać będę musiał do cytowanych na str. 20 dzieł Fregego czy Russella lub do mych Podstaw Ogólnej Teorji Mnogości.

Przedewszystkiem znowu przypominam, że szereg pojęć z dziedziny teorji klas czy relacyj, które poznaliśmy w toku naszej książki, uzyskano na drodze najzupełniej niezależnej od Arytmetyki Liczb Całkowitych.

Pojęcie ciągu, a więc operatora, którego polem jest N_0, o tyle jedynie wiąże się z A. l. c., że mowa tu o klasie N_0, lecz niczem to nie przesądza jakie mają być własności tej klasy.

Przystępujemy już do właściwej sprawy.

Przypuśćmy, że dano nam:

(1) element a,

(2) operator f.

O danych a i f założono, że przy zachowaniu pewnych warunków, wyrażonych powiedzmy w zdaniu p, mamy:

I. $$p \cdot \supset \cdot a \varepsilon P(f)$$

»spełnienie p pociąga, że a należy do pola operatora f«.

II. $$p : \supset : x \varepsilon P(f) \cdot \supset_x \cdot f'x \varepsilon P(f)$$

»spełnienie p pociąga, że o ile x należy do pola f, to obraz $f'x$ również należy do pola f«.

Powiemy w tym wypadku, że: »pod warunkiem, że zachodzi p, operator f jest dziedzicznym względem przedmiotu a«.

Otóż opierając się na dziełach Fregego czy rozważaniach B. Russella (Principia Mathematica t. I i II) można udowodnić następujące fundamentalne twierdzenie [1]).

Tw. Jeżeli p pociąga, że operator f jest dziedziczny względem a, to istnieje jedyny ciąg φ o następujących własnościach:

1. $\varphi'0 = a$,
2. $k \varepsilon N_0 \cdot \supset_k \cdot \varphi' \operatorname{seq} k = f'\varphi'k$.

Twierdzenia tego, jak już wspomniałem, nie moglibyśmy tu udowodnić bez większych wiadomości z zakresu teorji mnogości i logiki. Intuicyjnie rzecz biorąc, jest to ciąg:

$$a, \quad f'a, \quad f'f'a, \quad f'f'f'a, \ldots$$

Niezależnie od tego czy warunki twierdzenia fundamentalnego są spełnione, możemy postawić definicję

[1]) p. moje Podstawy Ogólnej Teorji Mnogości str. 214, gdzie jednak forma ujęcia jest nieco inna, lecz w zasadzie równoważna obecnej.

n o m i n a l n ą:

$$f^{(a)} \overset{df}{=} (\imath z)\{z \,\varepsilon\, \text{Ciąg Niesk} : f_0^{(a)} = a : k \,\varepsilon\, N_0 \supset_k f_{\text{seq}\,k}^{(a)} = f^{\prime}f_k^{(a)}\}.$$

Tak określony ciąg $f^{(a)}$ nazwijmy: c i ą g i e m i n d u k o w a n y m p r z e z f z e l e m e n t u a.

Twierdzenie fundamentalne wypowiemy wtedy w całej pełni w następujący sposób:

Tw. Gdy (1) f jest operatorem,

(2) $p \cdot \supset \cdot b \,\varepsilon\, P(f)$,

(3) $p : \supset : x \,\varepsilon\, P(f) \cdot \supset_x f^{\prime}x \,\varepsilon\, P(f)$,

to

$$p \cdot \supset \cdot \text{E!} f^{(a)}.$$

Zastosujemy nasze twierdzenie w kilku przypadkach.

I. D o d a w a n i e.

Określmy relację f n o m i n a l n i e w następujący sposób:

$$f \overset{df}{=} \widehat{(uv)}\{v \,\varepsilon\, N_0 \cdot u = \text{seq}\, v\}.$$

Z łatwością dowiedziemy, że

(1) $f \,\varepsilon\, \text{Operator}$.

(2) $P(f) = N_0$.

Niechaj teraz będzie:

$$a \,\varepsilon\, N_0.$$

Wtedy:

(1) $a \,\varepsilon\, N_0 \cdot \supset \cdot a \,\varepsilon\, P(f)$.

(2) $x \,\varepsilon\, P(f) \cdot \supset_x \cdot f^{\prime}x \,\varepsilon\, P(f)$.

Warunek (2) wynika z postulatu A. l. c. mówiącego, że $x \, \varepsilon \, N_0 \supset \operatorname{seq} x \, \varepsilon \, N_0$. Tem samem zachodzi:

$$(2^{\text{bis}}) \quad a \, \varepsilon \, N_0 : \supset : x \, \varepsilon \, P(f) \cdot \supset \cdot f^{\text{`}} x \, \varepsilon \, P(f).$$

Mamy zatem prawo twierdzić:

$$a \, \varepsilon \, N_0 \cdot \supset \cdot \mathrm{E}! \, f^{(a)}.$$

Nazwijmy nominalnie:

$$a +_c b \overset{df}{=} f_b^{(a)} \quad \{b\text{-ty wyraz ciągu } f^{(a)}\}$$

Będzie wtedy:

1. $a, b \, \varepsilon \, N_0 \cdot \supset_{a,b} \mathrm{E}!(a +_c b).$

Prócz tego z definicji $f^{(a)}$

2. $a \, \varepsilon \, N_0 \cdot \supset \cdot a +_c 0 = a,$
3. $a \, \varepsilon \, N_0 : \supset : b \, \varepsilon \, N_0 \cdot \supset a +_c \operatorname{seq} b = \operatorname{seq}(a +_c b),$

czyli

3^{bis} $a, b \, \varepsilon \, N_0 \cdot \supset \cdot a +_c \operatorname{seq} b = \operatorname{seq}(a +_c b).$

Oto uzyskaliśmy definicję nominalną sumy liczb całkowitych!

II. Mnożenie.

Określmy operator f:

$$f \overset{df}{=} \widehat{(uv)} \{u = a +_c v \cdot v \, \varepsilon \, N_0\}$$

[mamy już określone nominalnie $a +_c b$!].

Udowodnimy z łatwością, że

1. $a \, \varepsilon \, N_0 \cdot \supset \cdot f \, \varepsilon \, \text{Operator},$
2. $a \, \varepsilon \, N_0 \cdot \supset \cdot P(f) \subset N_0.$

Prócz tego:

3. $a \, \varepsilon \, N_0 \cdot \supset \cdot 0 \, \varepsilon \, P(f),$
4. $a \, \varepsilon \, N_0 : \supset : x \, \varepsilon \, P(f) \cdot \cdot f^{\text{`}} x \, \varepsilon \, P(f).$

A więc:

$$E!f^{(0)}.$$

Nazwijmy:

$$f^{(0)}_b \overset{df}{=} a \times_c b,$$

wtedy

(1) $a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \times_c 0 = 0,$

(2) $a, b \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a \times_c \mathrm{seq}\, a = a \times_c b +_c a.$

W ten sposób otrzymujemy definicję nominalną mnożenia.

Czytelnik z łatwością zbuduje jeszcze inne definicje nominalne pojęć, które w naszej książce zostały uzyskane drogą definicji zwrotnej.

Nota II.

Inny system założeń A. l. c.

Wprowadzimy obecnie odmienny od Peanowskiego system założeń dla A. l. c.

W tym celu ustawimy trzy listy.

I. Pojęcia pierwotne.

(1) klasa K.

(2) relacja $<$.

Uwagi: (1) Elementy klasy K będziemy zwali liczbami całkowitemi (w nowym sensie).

(2) relację $<$ czytać będziemy »jest mniejsze«.

II. Zdania pierwotne (postulaty):

1. $(\exists x)\{x \varepsilon K\}.$
2. $x, y \varepsilon K \cdot x \neq y : \supset : x < y \vee y < x.$
3. $x < y \cdot \supset \cdot \sim y < x.$

4. $x < y \cdot y < z \cdot \supset \cdot x < z$.
5. $x < y \cdot \supset \cdot x, y \varepsilon K$.
6. $\alpha \subset K . (\exists x)(x \varepsilon \alpha) : \supset : (\exists z) \{ z \varepsilon \alpha : x \varepsilon \alpha \cdot x \neq z \cdot \supset_x \cdot z < x \}$.
7. $\alpha \subset K \cdot (\exists x)(x \varepsilon \alpha) \cdot (\exists y)(x \varepsilon \alpha \supset_x x < y) : \supset : (\exists z) \{ z \varepsilon \alpha : x \varepsilon \alpha \cdot x \neq z \cdot \supset_x \cdot x < z \}$.
8. $\sim (\exists z) \{ z \varepsilon K : x \varepsilon K \cdot x \neq z \cdot \supset_x x < z \}$.

Objaśnienia i uwagi:

II (1) mówi, że klasa K nie jest pusta.

II (2) wypowiemy krótko: relacja $<$ jest spójna w klasie K.

II (3) mówi, że $<$ jest relacją asymetryczną (nieodwracalną).

II (4) mówi, że $<$ jest relacją przechodnią.

II (5) wysłowimy, mówiac, że »$<$ ma za pole K«.

II (6) stwierdza istnienie w każdej klasie α niepustej, zawartej w K, istnienie elementów »minimalnych«.

II (7) stwierdza w każdej klasie α niepustej, zawartej w α i »ograniczonej«, istnienie elementów »maksymalnych«.

II (8) stwierdza nieistnienie elementów maksymalnych dla całego K.

III. Logika.

Kilka twierdzeń i określeń.

1. Tw: $x < y \cdot \supset \cdot x \neq y$.

Dowód: gdyby $x = y$, to wedle zasady »podstawienia identycznych«:

$$x < y \cdot \supset \cdot y < x,$$

co wykluczone wobec II (3).

2. $\alpha \subset K \cdot (\exists x)(x \,\varepsilon\, \alpha) : \supset :$
$E!(\imath z)\{z \,\varepsilon\, \alpha : x \,\varepsilon\, \alpha \cdot x \neq z \cdot \supset_x \cdot z < x\}$.

Dowód: (1) Istnienie zapewnia nam postulat II (6).

(2) Jednotliwość.

Przypuśćmy, że

$$z \,\varepsilon\, \alpha : x \,\varepsilon\, \alpha \cdot x \neq z \cdot \supset_x \cdot z < x \quad (1)$$
$$y \,\varepsilon\, \alpha : x \,\varepsilon\, \alpha \cdot x \neq y \cdot \supset_x \cdot y < x \quad (2)$$
$$\alpha \subset K \quad (3)$$
$$(\exists x)(x \,\varepsilon\, \alpha) \quad (4)$$

O ileby $y \neq z$, to wedle (1)

$$y \,\varepsilon\, \alpha \cdot y \neq z, \text{ więc } z < y$$

wedle (2)

$$z \,\varepsilon\, \alpha \cdot z \neq y, \text{ więc } y < z;$$

stąd jednak:

$$z < y \text{ i } y < z$$

więc wedle II (5)

$$z < z,$$

co wykluczone wobec tw. 1.

Definicja: Nazwiemy:

$$\min_< \alpha \overset{df}{=} (\imath z)\{z \,\varepsilon\, \alpha : x \,\varepsilon\, \alpha \cdot x \neq z \cdot \supset_x \cdot z < x\}$$

i mamy twierdzenie:

Tw.: $\alpha \subset K \cdot (\exists x)(x \,\varepsilon\, \alpha) : \supset : E! \min_< \alpha$.

3. Ponieważ

$$(1) \quad K \subset K; \qquad (2) \quad (\exists x)(x \,\varepsilon\, K) \qquad \{\mathrm{II}\ (1)\}$$

więc: $\quad \mathrm{E!}\,\min_{<} K.$

Definicja: Nazwiemy:

$\theta \stackrel{df}{=} \min_{<} K \qquad \theta$ czytamy: zero (w nowym sensie).

Mamy natychmiast:

4. Tw.: $\quad \theta \,\varepsilon\, K.$

5. Tw.:

$$\alpha \subset K \cdot (\exists x)(x \,\varepsilon\, \alpha) \cdot (\exists y)(x \,\varepsilon\, \alpha \cdot \supset_x \cdot x < y) : \supset : \\ \mathrm{E!}\,(\imath z)\{z \,\varepsilon\, \alpha \cdot x \,\varepsilon\, \alpha \cdot x \neq z \cdot \supset_x \cdot x < z\}.$$

Dowód: 1. Istnienie zapewnia postulat II (7).

2. Jednotliwość: przypuśćmy, że

$$z \,\varepsilon\, \alpha : x \,\varepsilon\, \alpha \cdot x \neq z \cdot \supset_x \cdot x < z \qquad (1)$$
$$y \,\varepsilon\, \alpha : x \,\varepsilon\, \alpha \cdot x \neq y \cdot \supset_x \cdot x < y \qquad (2)$$
$$\alpha \subset K \qquad (3)$$
$$(\exists x)(x \,\varepsilon\, \alpha) \qquad (4)$$
$$(\exists w)\{x \,\varepsilon\, \alpha \cdot \supset_x \cdot x < w\} \qquad (5)$$

Jeśliby $y \neq z$, to wedle (1) $y < z$

wedle (2) $z < y$,

co znów niemożliwe.

Definicja:

$$\max_{<} \alpha \stackrel{df}{=} (\imath z)\{z \,\varepsilon\, \alpha : x \,\varepsilon\, \alpha \cdot x \neq z \cdot \supset_x \cdot x < z\}$$

i twierdzenie:

Tw.: $\quad \alpha \subset K \cdot (\exists x)(x \,\varepsilon\, \alpha) \cdot (\exists y)\{x \,\varepsilon\, \alpha \cdot \supset_x \cdot x < y\} :$
$: \supset : \mathrm{E!}\,\max_{<} \alpha.$

6. Ostatni postulat II (7) zapewnia nas, że

$$\sim \mathrm{E!}\,\max_{<} K,$$

ponieważ stwierdza brak istnienia.

7. Niechaj x należy do K. Ponieważ ma zachodzić II (7), więc:

$$(\exists z)\{x < z \cdot z \,\varepsilon\, K\}.$$

Utworzymy klasę:

$$\alpha \overset{df}{=} (\hat{z})\{x < z\}.$$

Widocznem jest, że

$$(1) \quad \alpha \subset K \qquad \{\text{II (5) i zał.}\}$$

$$(2) \quad (\exists x)(x \,\varepsilon\, \alpha),$$

a więc

$$E!\,\min_{<} \alpha.$$

Definicja:

$$\mathrm{seq}_{<} x \overset{df}{=} \min_{<} (\hat{z})\{x < z\},$$

wtedy mamy twierdzenie:

$$x \,\varepsilon\, K : \supset : E!\,\mathrm{seq}_{<} x \cdot \mathrm{seq}_{<} x \,\varepsilon\, K.$$

8. Jeżeli $x \,\varepsilon\, K$, to oczywiście $x < \mathrm{seq}_{<} x$, lecz θ jest $\min_{<} K$, a więc:

Tw.: $\qquad x \,\varepsilon\, K \cdot \supset \cdot \mathrm{seq}\, x \neq \theta.$

9. Przypuśćmy, że (1) $\quad x, y \,\varepsilon\, K \quad$ i że

$$(2) \quad \mathrm{seq}_{<} x = \mathrm{seq}_{<} y.$$

Przypuśćmy, że $\quad x \neq y, \quad$ a więc

$$x < y$$

$$\text{lub} \quad y < x \quad \text{wedle II (2).}$$

Gdyby $\quad x < y, \quad$ to ponieważ

$$\mathrm{seq}_{<} x = \min (\hat{z})\{x < z\},$$

więc $\quad y \,\varepsilon\, (\hat{z})\{x < z\}, \quad$ a stąd:

$$y = \mathrm{seq}_{<} x \quad \text{lub} \quad \mathrm{seq}_{<} x < y.$$

Jednakże, $y < \mathrm{seq}_< y$, więc byłoby:

$$y < \mathrm{seq}_< y \cdot \mathrm{seq}_< y = \mathrm{seq}_< x,$$

co daje nam $y < \mathrm{seq}_< x$, a to wyklucza i $\mathrm{seq}_< x < y$ i $\mathrm{seq}_< x = y$.
Analogicznie, gdyby $y < x$.
Pozostaje zatem wedle postulatu II (2) jedynie, że

$$x = y.$$

10. Przypuśćmy, że o φ wiemy, iż

(1) $\varphi(\theta)$ zachodzi
(2) $x \varepsilon K \cdot \varphi(x) : \supset_x : \varphi(\mathrm{seq}_< x)$.

Twierdzę, że

$$z \varepsilon K \cdot \supset_z \cdot \varphi(z).$$

Dowód: Gdyby tak nie było, to klasa

$$\alpha \overset{df}{=} (\bar{z})\{z \varepsilon K \cdot \sim \varphi(z)\}$$

byłaby: (1) niepusta,
(2) zawarta w K,

a zatem zachodziłoby:

$$\mathrm{E!}\, \mathrm{min}_< \alpha.$$

Oznaczmy:

$$l \overset{df}{=} \mathrm{min}_< \alpha.$$

Otóż $l \neq \theta$, gdyż $l \varepsilon \alpha$ i tem samem $\sim \varphi(l)$, a tymczasem zachodzi $\varphi(\theta)$.

Zatem $l \neq \mathrm{min}_< K$, a wtedy klasa:

$$\beta \overset{df}{=} (\bar{y})\{y \varepsilon K \cdot y < l\}$$

będzie:

(1) niepusta,
(2) zawarta w K.

(3) $(\exists z)\{y \varepsilon \beta \supset_y y < z\}$ n. prz. takim elementem będzie l.

Wobec tego:

$$\text{E!} \max_< \beta.$$

Oznaczmy: $k \overset{df.}{=} \max_< \beta.$

Będziemy mieli:

(1) $k \sim \varepsilon \beta$,

więc (2) zachodzi $\varphi(k)$.

(3) $\text{seq}_< k = l$ [łatwy dowód],

a więc

(4) zachodzi wedle założenia

$$\varphi(\text{seq}\, k) \text{ czyli } \varphi(l),$$

co znów wykluczone.

A więc klasa α jest pusta, to znaczy:

$$z \varepsilon K \cdot \supset_z \cdot \varphi(z).$$

Równoważność obu arytmetyk liczb całkowitych.

Połóżmy dla interpretacji:

I. $0 \overset{df}{=} \theta.$

II. $N_0 \overset{df}{=} K.$

III. $\text{seq} \overset{df}{=} \text{seq}_<.$

Twierdzenia $\{4, 7, 9, 8, 10\}$, co tylko wypowiedziane powiadają, że przy takiem interpretowaniu symboli $0, N_0, \text{seq}$ w obrębie nowego układu założeń, postulaty Peany są spełnione jako twierdzenie nowej A. l. c. Połóżmy odwrotnie:

I. $K \stackrel{df}{=} N_0$.

II. $< \stackrel{df}{=} <_c$.

Teraz twierdzenia udowodnione o naszej krytyce dla systemu Peany, dadzą nam prawdziwość w tej interpretacji, postulatów nowej teorji A. l. c. i to przedewszystkiem postulatów:

II (1), dzięki postulatowi II_1 Peany,
II (2), II (3), II (4), II (5) wedle § 5,
II (6), dzięki »zasadzie minimum«
II (8), wedle tw. 2 str. 82.

Brak nam jeszcze II (7). Udowodnimy odnośne twierdzenie natychmiast. Załóżmy, że

(1) $\alpha \subset N_0$.

(2) $\alpha \neq \Lambda$.

(3) $(\hat{z})\{x \varepsilon \alpha \cdot \supset_x \cdot x <_c z\} \neq \Lambda$.

Oznaczmy:

$$\beta \stackrel{df}{=} (\hat{z})\{x \varepsilon \alpha \cdot \supset_x \cdot x <_c z\}.$$

Wtedy: (1) $\beta \subset N_0$, (2) $\beta \neq \Lambda$,

a więc: $E! \min \beta$.

Oznaczmy: $k \stackrel{df}{=} \min \beta$.

Otóż: (1) $x \varepsilon \alpha \cdot \supset_x \cdot x <_c k$,
(2) $\alpha \neq \Lambda$,

zatem: $(\exists x)\{x \varepsilon \alpha \cdot x < k\}$. Niechaj takiem będzie n. prz. x_0 — Wtedy:

$$0 \leqq x_0 < k, \quad 0 < k,$$

więc ma sens $k - 1$. Oznaczmy $l \stackrel{df}{=} k - 1$. Twierdzę, że: $l \varepsilon \alpha$, inaczej bowiem wszelkie liczby x klasy α dałyby $x < l$, a więc $l \varepsilon \beta$, co niemożliwe, bo $l < \min \beta$.

Niechaj będzie: $x \varepsilon \alpha \cdot x \neq l$, wtedy

$$x < k, \quad \text{więc} \quad x \leq l, \quad \text{a zatem } x < l.$$

Stąd:

$$(\exists z)\{x \varepsilon \alpha \cdot x \neq z \cdot \supset_x \cdot x < z\}.$$

bo takiem jest n. prz. l.

Dowód nasz twierdzenia interpretacyjnego dla II (7) jest więc ukończony.

Dzięki powyższej wzajemnej interpretacji systemów Peany i nowego, okazaliśmy możność zbudowania dedukcyjnego A. l. c. na więcej niż jeden sposób, o czem już wspomniano na początku książki.

Systemy założeń takie jak Peanowski czy obecny, złożone zawsze z trzech list:

I. pojęć pierwotnych, II. postulatów, III. logiki,

nazywamy systemami hipotetyczno-dedukcyjnemi pewnej nauki dedukcyjnej (u nas A. l. c.). Metoda budowania teorji dedukcyjnej w powyższy sposób zwie się metodą aksjomatyczną.

Metoda aksjomatyczna nastręcza mnóstwo zagadnień metodologicznej natury, w których rozważanie tu jednak wchodzić nie możemy, odsyłając tę sprawę do innej sposobności.

SPIS RZECZY.

	str.
§ 1. Wstęp	1
§ 2. System A. l. c. Peany	6
§ 3. Pierwsze twierdzenia i określenia	12
§ 4. Dodawanie	15
§ 5. Mniejszość i Większość	26
§ 6. Odejmowanie	43
§ 7. Mnożenie	53
§ 8. Określenie klas	62
§ 9. Wielokrotności	68
§ 10. Dzielenie	70
§ 11. Potęgowanie	76
§ 12. Zasada Minimum	81
§ 13. Zastosowanie zasady minimum	87
§ 14. Operatory i Ciągi	93
§ 15. System Dziesiętny	103
§ 16. Interpretacja założeń A. l. c.	112
Nota I. O Definicji Zwrotnej	123
Nota II. Inny system założeń A. l. c.	127