WINCENTY BARCZEWSKI

O WYRÓWNANIU
ZDJĘĆ I POŁĄCZEŃ LINIOWYCH

Odbitka z „Czasopisma Technicznego".

LWÓW.
NAKŁADEM TOWARZYSTWA POLITECHNICZNEGO.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI H. ALTENBERGA.
1899.

Wiadomo, że kataster austryacki jest sporządzony graficznie i że z tego powodu nie może podawać dokładnych rezultatów w obliczeniu powierzchni pojedynczych parcel.

Wspomniana niedogodność daje się przedewszystkiem uczuwać w większych miastach, gdzie z powodu wysokiej ceny gruntów budowlanych każdy centymetr ziemi bywa pilnie strzeżony, a wypis powierzchni z katastralnego protokołu parcelowego zadowala tylko notaryusza, ale nie zadawalnia stron przy kontrakcie kupna i sprzedaży lub zaciąganiu pożyczek hipotecznych. A ponieważ przy projektowaniu i wykonaniu budowli w miastach, tak samo nikt nie opiera się na figurze i obrazkowych wymiarach mapy katastralnej, lecz wykonywa przedtem dokładne zdjęcie parceli dla uniknięcia kolizyi nieprzyjemnej i kosztownej, przeto podnosząc tutaj potrzebę zastosowania rachunku wyrównawczego nawet przy zdjęciach szczegółowych, podajemy rozwiązanie kilku przykładów, powtarzających się najczęściej w praktyce.

W przykładach tych będzie oznaczać:

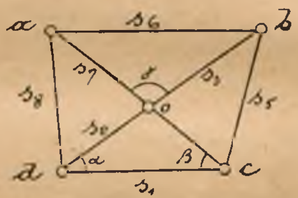
$$\left.\begin{array}{l} S = \text{prawdziwą} \\ s = \text{obserwowaną} \\ s + ds = \text{najprawdopodobniejszą} \end{array}\right\} \text{wartość danych ilości}$$

p = wagę obserwacyi.

Przykład 1.

W czworoboku *abcd* mierzono tak boki, jakoteż obie przekątnie obustronnie od punktu 0 i otrzymano:

$$
\begin{array}{lll}
s_1 = \ \ 86,80\,m & \text{z wagą} & p_1 = 1,15 \\
s_2 = \ \ 56,88 \ \text{,,} & \text{,,} & p_2 = 1,76 \\
s_3 = \ \ 77,30 \ \text{,,} & \text{,,} & p_3 = 1,29 \\
s_4 = \ \ 54,20 \ \text{,,} & \text{,,} & p_4 = 1,85 \\
s_5 = \ \ 84,37 \ \text{,,} & \text{,,} & p_5 = 1,18 \\
s_6 = 113,0 \ \ \text{,,} & \text{,,} & p_6 = 0,88 \\
s_7 = \ \ 66,95 \ \text{,,} & \text{,,} & p_7 = 1,49 \\
s_8 = \ \ 77,73 \ \text{,,} & \text{,,} & p_8 = 1,29.
\end{array}
$$



W zadaniu tem mamy trzy nadliczbowe obserwacye, są zatem potrzebne trzy warunkowe równania.

Metoda 1.

Rzeczone trzy równania możemy napisać tak:

$$
\left.
\begin{array}{l}
\cos\alpha = \dfrac{S_1^{\ 2}+S_2^{\ 2}-S_4^{\ 2}}{2\,S_1S_2} = \dfrac{S_1^{\ 2}+(S_2+S_3)^2-S_5^{\ 2}}{2\,S_1\,(S_2+S_3)} \\[2ex]
\cos\beta = \dfrac{S_1^{\ 2}+S_4^{\ 2}-S_2^{\ 2}}{2\,S_1S_4} = \dfrac{S_1^{\ 2}+(S_4+S_7)^2-S_8^{\ 2}}{2\,S_1\,(S_4+S_7)} \\[2ex]
\cos\gamma = \dfrac{S_3^{\ 2}+S_7^{\ 2}-S_6^{\ 2}}{2\,S_3S_7} = \dfrac{S_2^{\ 2}+S_4^{\ 2}-S_1^{\ 2}}{2\,S_2S_4}
\end{array}
\right| \quad 1)
$$

Jeżeli jednak w równaniach powyższych na miejsce wartości prawdziwych S podstawimy wartości s, pochodzące z obserwacyi, wtedy równania te nie będą zadowolone, lecz dadzą różnicę δ, czyli otrzymamy, jeżeli jeszcze dla uniknięcia form ułamkowych, pomnożymy te równania wzajemnie przez mianowniki:

$$
\left.
\begin{array}{r}
s_2(s_5^{\ 2}-s_3^{\ 2}-s_4^{\ 2}) + \quad s_3(s_1^{\ 2}-s_2^{\ 2}-s_4^{\ 2}) = \delta_1 \\
s_7(s_1^{\ 2}-s_2^{\ 2}-s_4^{\ 2}) + \quad s_4(s_8^{\ 2}-s_2^{\ 2}-s_7^{\ 2}) = \delta_2 \\
s_3s_7(s_2^{\ 2}+s_4^{\ 2}-s_1^{\ 2}) - s_2s_4(s_7^{\ 2}+s_3^{\ 2}-s_6^{\ 2}) = \delta_3
\end{array}
\right\} \quad 2)
$$

Równania pod 2) zostaną jednak zadowolone, to znaczy dadzą zero po stronie prawej, jeżeli do obserwacyj dodamy poprawki ds, przez co otrzymujemy równania poprawione:

$$\left.\begin{aligned}
&s_2(s_5{}^2-s_3{}^2-s_4{}^2)+s_3(s_1{}^2-s_2{}^2-s_4{}^2)\\
&\quad+2s_1s_3ds_1\\
&\quad+(s_5{}^2-s_3{}^2-s_4{}^2-2s_2s_3)\,ds_2\\
&\quad+(s_1{}^2-s_2{}^2-s_4{}^2-2s_2s_3)\,ds_3\\
&\quad-2s_4(s_2+s_3)\,ds_4\\
&\quad-2s_2s_5ds_5\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad=0\\
&s_7(s_1{}^2-s_2{}^2-s_4{}^2)+(s_8{}^2-s_2{}^2-s_7{}^2)\\
&\quad+2s_1s_7ds_1\\
&\quad-2s_2(s_4+s_7)\,ds_2\\
&\quad+(s_8{}^2-s_2{}^2-s_7{}^2-2s_4s_7)\,ds_4\\
&\quad+(s_1{}^2-s_2{}^2-s_4{}^2-2s_4s_7)\,ds_7\\
&\quad+2s_4s_8ds_8\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad=0\\
&s_3s_7(s_2{}^2+s_4{}^2-s_1{}^2)-s_2s_4(s_7{}^2+s_3{}^2-s_6{}^2)\\
&\quad-2s_1s_3s_7ds_1\\
&\quad+[2s_2s_3s_7-s_4(s_7{}^2+s_3{}^2-s_6{}^2)]\,ds_2\\
&\quad+[s_7(s_2{}^2+s_4{}^2-s_1{}^2)-2s_2s_3s_4]\,ds_3\\
&\quad+[2s_3s_4s_7-s_2(s_7{}^2+s_3{}^2-s_6{}^2)]\,ds_4\\
&\quad+2s_2s_4s_6ds_6\\
&\quad+[s_3(s_2{}^2+s_4{}^2-s_1{}^2)-2s_2s_4s_7]\,ds_7\quad=0
\end{aligned}\right|\quad 3)$$

Odciągnijmy teraz od równań pod 3) równania pod 2), wtedy otrzymamy żądane trzy równania błędów, które dla skrócenia piszemy tak:

$$\left.\begin{aligned}
&+M_1ds_1+M_2ds_2+M_3ds_3-M_4ds_4+M_5ds_5+\delta_1=0\\
&+M_6ds_1-M_7ds_2+M_8ds_4+M_9ds_7+M_{10}ds_8+\delta_2=0\\
&-M_{11}ds_1+M_{12}ds_2+M_{13}ds_3+M_{14}ds_4+M_{15}ds_6+\\
&\qquad\qquad+M_{16}ds_7+\delta_3\quad.\ .\ .\ .\quad=0
\end{aligned}\right|\quad 4)$$

przyczem oznacza:

$M_1=2s_1s_3$ . . . . $=+13419.28$

$M_2=s_5{}^2-s_3{}^2-s_4{}^2-2s_2s_3$ . . . $=-10588.18$

$M_3=s_1{}^2-s_2{}^2-s_4{}^2-2s_2s_3$ . . . $=-\ 7432.38$

$M_4=2s_4(s_2+s_3)$ . . . . $=+14545.11$

$M_5=2s_2s_5$ . . . . $=+\ 9597.93$

$M_6=2s_1s_7$ . . . . $=+11622.52$

$M_7=2s_2(s_7+s_4)$ . . . . $=+13782.02$

$M_8=s_8{}^2-s_2{}^2-s_7{}^2-2s_4s_7$ . . . $=-\ 8933.06$

$$
\begin{aligned}
M_9 &= s_1{}^2 - s_2{}^2 - s_4{}^2 - 2\,s_4\,s_7 \quad . \quad . = -\quad 5896.11 \\
M_{10} &= 2\,s_4 s_8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . = +\quad 8425.93 \\
M_{11} &= 2\,s_1 s_3 s_7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . = +898420.80 \\
M_{12} &= 2\,s_2 s_3 s_7 - s_4(s_7{}^2 + s_3{}^2 - s_6{}^2) \; . = +714013.02 \\
M_{13} &= s_7(s_2{}^2 + s_4{}^2 - s_1{}^2) - 2\,s_2 s_3 s_4 \; . = -567752.46 \\
M_{14} &= 2\,s_4 s_3 s_7 - s_2(s_7{}^2 + s_3{}^2 - s_6{}^2) \; . - +692468.33 \\
M_{15} &= 2\,s_2 s_4 s_6 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . = +696734.50 \\
M_{16} &= s_3(s_2{}^2 + s_4{}^2 - s_1{}^2) - 2\,s_2 s_4 s_7 \; . = -518025.61.
\end{aligned}
$$

Poprawki *ds*, przedstawiające zarazem najprawdopodobniejsze błędy obserwacyi, mają być tak wyznaczone, aby ich kwadraty, pomnożone przez odnośne wartości wag, dawały sumę możebnie najmniejszą. Oznaczmy tę sumę przez *Sq*, wtedy ma być

$$
\begin{aligned}
pds^2] = p_1 ds_1{}^2 + p_2 ds_2{}^2 + p_3 ds_3{}^2 + p_4 ds_4{}^2 + p_5 ds_5{}^2 + \\
+ p_6 ds_6{}^2 + p_7 ds_7{}^2 + p_8 ds_8{}^2 = Sq = \text{Minimum}.
\end{aligned}
$$

W celu obliczenia tych poprawek pomnożymy najpierw równania pod 3) przez współczynniki nieoznaczone $-k$ i tak pomnożone równania dodamy do równania warunkowego co do sumy poprawek, przez co otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
Sq = p_1 ds_1{}^2 &+ (-k_1 M_1 - k_2 M_6 + k_3 M_{11})\, ds_1 - k_1 \delta_1 \\
+ p_2 ds_2{}^2 &+ (-k_1 M_2 + k_2 M_7 - k_3 M_{12})\, ds_2 - k_2 \delta_2 \\
+ p_3 ds_3{}^2 &+ (-k_1 M_3 - k_2 M_5 - k_3 M_{13})\, ds_3 - k_3 \delta_3 \\
+ p_4 ds_4{}^2 &+ (+k_1 M_4 - k_2 M_8 - k_3 M_{14})\, ds_4 \\
+ p_5 ds_5{}^2 &+ (-k_1 M_5)\, ds_5 \\
+ p_6 ds_6{}^2 &+ (-k_3 M_{15})\, ds_6 \\
+ p_7 ds_7{}^2 &+ (-k_2 M_9 - k_3 M_{16})\, ds_7 \\
+ p_8 ds_8{}^2 &+ (-k_2 M_{10})\, ds_8
\end{aligned}
$$

poczem, aby suma *Sq* była najmniejszą możebną, sumę tę co do każdej zmiennej *ds* różniczkować, a otrzymany iloraz różniczkowy zeru zrównać należy.

Żądane ilorazy są:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d\,Sq}{d\,ds_1} &= 2\,p_1 ds_1 - k_1 M_1 - k_2 M_6 + k_3 M_{11} \\
\frac{d\,Sq}{d\,ds_2} &= 2\,p_2 ds_2 - k_1 M_2 - k_2 M_7 - k_3 M_{12}
\end{aligned}
\right| \quad . \; 5\,a)
$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\,Sq}{d\,ds_3} &= 2\,p_3\,ds_3 - k_1 M_3 - k_2 M_8 - k_3 M_{13} \\
\frac{d\,Sq}{d\,ds_4} &= 2\,p_4\,ds_4 + k_1 M_4 - k_2 M_8 - k_3 M_{14} \\
\frac{d\,Sq}{d\,ds_5} &= 2\,p_5\,ds_5 - k_1 M_5 \\
\frac{d\,Sq}{d\,ds_6} &= 2\,p_6\,ds_6 - k_3 M_{15} \\
\frac{d\,Sq}{d\,ds_7} &= 2\,p_7\,ds_7 - k_2 M_9 - k_3 M_{16} \\
\frac{d\,Sq}{d\,ds_8} &= 2\,p_8\,ds_8 - k_2 M_{10}
\end{aligned}\right| \quad .\; 5\,b)$$

Ilorazy te, podzielone przez 2 i zrównane zeru, dają nam wartości dla wszystkich ds. Do obliczenia tych ostatnich potrzeba jednak posiadać pierwej wartości dla k, a otrzymamy takowe w ten sposób, jeżeli wyrazy dla ds z równań pod 5) podstawimy w równania 4), przez co otrzymujemy następujące równania normalne, uporządkowane tutaj podług k:

$$k_1\left(\frac{M_1{}^2}{p_1}+\frac{M_2{}^2}{p_2}+\frac{M_3{}^2}{p_3}+\frac{M_4{}^2}{p_4}+\frac{M_5{}^2}{p_5}\right)+$$
$$+k_2\left(\frac{M_1 M_6}{p_1}-\frac{M_2 M_7}{p_2}-\frac{M_4 M_8}{p_4}\right)+$$
$$+k_3\left(-\frac{M_1 M_{11}}{p_1}+\frac{M_2 M_{12}}{p_2}+\frac{M_3 M_{13}}{p_3}-\frac{M_4 M_{14}}{p_4}\right)+2\,\delta_1=0$$

$$k_1\left(\frac{M_1 M_6}{p_1}-\frac{M_2 M_7}{p_2}-\frac{M_4 M_8}{p_4}\right)+$$
$$+k_2\left(\frac{M_6{}^2}{p_1}+\frac{M_7{}^2}{p_2}+\frac{M_8{}^2}{p_4}+\frac{M_9{}^2}{p_7}+\frac{M_{10}{}^2}{p_8}\right)+$$
$$+k_3\left(-\frac{M_6 M_{11}}{p_1}-\frac{M_7 M_{12}}{p_2}+\frac{M_8 M_{14}}{p_4}+\frac{M_9 M_{16}}{p_7}\right)+2\,\delta_2=0$$

$$k_1\left(-\frac{M_1 M_{11}}{p_1}+\frac{M_2 M_{12}}{p_2}+\frac{M_3 M_{13}}{p_3}-\frac{M_4 M_{14}}{p_4}\right)+$$
$$+k_2\left(-\frac{M_6 M_{11}}{p_1}-\frac{M_7 M_{12}}{p_2}+\frac{M_8 M_{14}}{p_4}+\frac{M_9 M_{16}}{p_7}\right)+$$

$$+k_3\left(\frac{M_{11}{}^2}{p_1}+\frac{M_{12}{}^2}{p_2}+\frac{M_{13}{}^2}{p_3}+\frac{M_{14}{}^2}{p_4}+\right.$$
$$\left.+\frac{M_{15}{}^2}{p_6}+\frac{M_{16}{}^2}{p_7}\right)+2\delta_3=0$$

lub w skróceniu:

$$k_1 A+k_2 B+k_3 C+2\delta_1=0$$
$$k_1 B+k_2 D+k_3 E+2\delta_2=0$$
$$k_1 C+k_2 E+k_3 F+2\delta_3=0.$$

Potrzebne nam są jeszcze wartości dla δ, jakoteż dla każdych M^2 i MM. Wartości pierwsze otrzymujemy skoro:

$$s_2(s_5{}^2-s_3{}^2-s_4{}^2)=-\ 102073.0427$$
$$s_3(s_1{}^2-s_2{}^2-s_4{}^2)=+\ 105225.8309$$
$$s_7(s_1{}^2-s_2{}^2-s_4{}^2)=+\ 91336.7319$$
$$s_4(s_8{}^2-s_2{}^2-s_7{}^2)=-\ 90822.0728$$
$$s_3 s_7(s_2{}^2+s_4{}^2-s_1{}^2)=-7044869.3744$$
$$s_2 s_4(s_7{}^2+s_3{}^2-s_6{}^2)=-7125828.9361$$

skąd

$$\delta_1=+\ 3152.7881$$
$$\delta_2=+\ 314.6591$$
$$\delta_3=+80959.5587.$$

Następnie mamy:

$$\frac{M_1{}^2}{p_1}=+156588761.49$$
$$\frac{M_2{}^2}{p_2}=+\ 63698624.43$$
$$\frac{M_3{}^2}{p_3}=+\ 42821944.27$$
$$\frac{M_4{}^2}{p_4}=+114356909.77$$
$$\frac{M_5{}^2}{p_5}=+\ 78068036.71$$
$$\frac{M_6{}^2}{p_1}=+117463453.17$$

$$\frac{M_7{}^2}{p_2} = + \quad 107922832.69$$

$$\frac{M_8{}^2}{p_4} = + \quad 43134936.44$$

$$\frac{M_9{}^2}{p_7} = + \quad 23331654.37$$

$$\frac{M_{10}{}^2}{p_8} = + \quad 55035914.77$$

$$\frac{M_{11}{}^2}{p_1} = + 701878197117.62$$

$$\frac{M_{12}{}^2}{p_2} = + 289667378262.60$$

$$\frac{M_{13}{}^2}{p_3} = + 249878177097.31$$

$$\frac{M_{14}{}^2}{p_4} = + 259195887380.44$$

$$\frac{M_{15}{}^2}{p_6} = + 551635179450.80$$

$$\frac{M_{16}{}^2}{p_7} = + 180101025267.70$$

$$\frac{M_1 M_6}{p_1} = + \quad 135622478.42$$

$$\frac{M_2 M_7}{p_2} = - \quad 82912821.61$$

$$\frac{M_4 M_8}{p_4} = - \quad 70233198.04$$

$$\frac{M_1 M_{11}}{p_1} = + \quad 10483617582.04$$

$$\frac{M_2 M_{12}}{p_2} = - \quad 4295510858.88$$

$$\frac{M_3 M_{13}}{p_3} = + \quad 3271126622.44$$

$$\frac{M_4 M_{14}}{p_4} = + \quad 5444340245.47$$

$$\frac{M_6 M_{11}}{p_1} = +9089924930.37$$
$$\frac{M_7 M_{12}}{p_2} = +5591218471.82$$
$$\frac{M_8 M_{14}}{p_4} = -3343710234.22$$
$$\frac{M_9 M_{16}}{p_7} = +2049891429.72.$$

Za pomocą tych wartości otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A &= + \quad 455534276.67 \\ B &= + \quad 288768498.07 \\ C &= - \quad 16952342063.95 \\ D &= + \quad 346888791.44 \\ E &= - \quad 15974962206.62 \\ F &= + 2232355844576.47 \end{aligned}$$

i ostatecznie równania normalne. Podzielmy z tych jednak pierwsze przez A, drugie przez B, trzecie przez C, tedy będzie:

$$\begin{aligned} &+k_1 + 0.633911\,k_2 - 37.214196\,k_3 + 0.000013842 = 0 \\ &+k_1 + 1.201269\,k_2 - 55.321000\,k_3 + 0.000002179 = 0 \\ &-k_1 - 0.942345\,k_2 + 131.684214\,k_3 + 0.000009551 = 0. \end{aligned}$$

Przez dalsze rugowanie i redukcyą będzie:

$$\begin{aligned} &+k_2 - 31.914223\,k_3 - 0.000020556 = 0 \\ &-k_2 + 306.289875\,k_3 + 0.000075845 = 0 \end{aligned}$$

tak samo

$$+272.37565\,k_3 + 0.000055289 = 0$$

a ztąd żądane wartości dla k:

$$\begin{aligned} k_1 &= -0.000030319 \\ k_2 &= +0.000014078 \\ k_3 &= -0.0000002029. \end{aligned}$$

Poprawki zaś będą według równań 5)

$$ds_1 = \frac{k_1 M_1 + k_2 M_2 - k_3 M_{11}}{2\,p_1} = -0.0264$$

$$ds_2 = \frac{k_1 M_2 - k_2 M_7 + k_3 M_{12}}{2\,p_2} = -0.0050$$

$$ds_3 = \frac{k_1 M_3 + k_3 M_{13}}{2 p_3} \quad . \quad . \quad = +0\ 1319$$

$$ds_4 = \frac{k_2 M_8 - k_1 M_4 + k_3 M_{14}}{2 p_4} = +0.0472$$

$$ds_5 = \frac{k_1 M_5}{2 p_5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -0.1233$$

$$ds_6 = \frac{k_3 M_{15}}{2 p_6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -0.0803$$

$$ds_7 = \frac{k_2 M_9 + k_3 M_{16}}{2 p_7} \quad . \quad . \quad = +0.0074$$

$$ds_8 = \frac{k_2 M_{10}}{2 p_8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = +0.0459$$

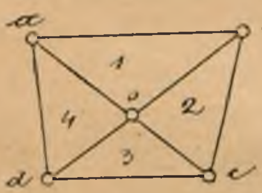
a w końcu obserwacye wyrównane:

$$\begin{aligned} s_1 + ds_1 &= 86.773 \\ s_2 + ds_2 &= 56.875 \\ s_3 + ds_3 &= 77.432 \\ s_4 + ds_4 &= 54.247 \\ s_5 + ds_5 &= 84.247 \\ s_6 + ds_6 &= 112.920 \\ s_7 + ds_7 &= 66.957 \\ s_8 + ds_8 &= 77.776. \end{aligned}$$

Ponieważ przykład powyższy wyrównuje także prof. Koll w dziele swojem „*Ausgleichungsrechnung*“, a rezultaty tutaj otrzymane zgadzają się z rezultatami prof. Koll'a, przeto pomijamy zupełnie potrzebny przy tego rodzaju operacyach rachunek kontrolujący, a ograniczymy się tylko na wykazanie wpływu, jakie na obliczenie powierzchni wywiera zaokrąglenie lub niepewność ostatnich miejsc dziesiętnych. Jedynie tylko co do sposobu wyrównania wymienić należy, że metoda powyższa i metoda prof. Koll'a zupełnie się różnią. Prof. Koll bowiem liczy najpierw współrzędne przybliżone dla pięciu punktów danej figury i z tych dopiero przechodzi na sformułowanie równań błędów; podczas gdy według metody tutaj użytej obserwacye wchodzą bezpośrednio w równania. Przyznać należy, że prof.

Koll operuje czynnikami znacznie krótszymi, podczas gdy metoda tu przedstawiona jest tak niepospolicie nużąca, że się do zachęcenia w operacyach wyrównawczych zalecać nie może. Jednakowoż ta ujemna okoliczność staje się prawie znikomą, jeżeli maszynę do rachowania mamy do dyspozycyi.

Obliczenie powierzchni. Obliczmy najpierw według Koll'a, którego obserwacye wyrównane są:



$$s_1+ds_1= 86.775$$
$$s_2+ds_2= 56.874$$
$$s_3+ds_3= 77.433$$
$$s_4+ds_4= 54.247$$
$$s_5+ds_5= 84.245$$
$$s_6+ds_6=112.920$$
$$s_7+ds_7= 66.957$$
$$s_8+ds_8= 77.777$$

powierzchnię według znanego wzoru

$$F=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

trzykrotnie a mianowicie:

1) z czterech trójkątów $1+2+3+4$
2) z trójkątów $abd+bcd$
3) „ $acd+abc$

przyczem otrzymujemy

dla 1) $= 7941.194\ m^2$
„ 2) $= 7941.508$ „
„ 3) $= 7940.874$ „

czyli według średniej arytmetycznej

$$F=7941.222\pm0.164\ m^2.$$

Zaś według rezultatów naszych:

dla 1) $= 7940.910\ m^2$
„ 2) $= 7941.402$ „
„ 3) $= 7941.398$ „

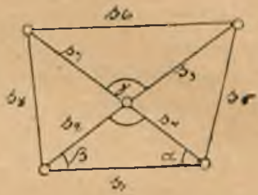
z średnią arytmetyczną:

$$F=7941.255\pm0.163\ m^2$$

Metoda 2.

Mamy obserwacye jak poprzednio, jeno dla uproszczenia rachunku z opuszczeniem wag:

$s_1 = 86.80$
$s_2 = 56.88$
$s_3 = 77.30$
$s_4 = 54.20$
$s_5 = 84.37$
$s_6 = 113.00$
$s_7 = 66.95$
$s_8 = 77.73.$



Winno być:

$$\cos {}^1/_2\, \alpha^2 = \frac{S_1\,(S_1 - s_2)}{s_1 s_4} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

$$\cos {}^1/_2\, \alpha^2 = \frac{S_1\,(S_2 - s_8)}{s_1\,(s_4 + s_7)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

$$\cos {}^1/_2\, \beta^2 = \frac{S_1\,(S_1 - s_4)}{s_1 s_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 3)$$

$$\cos {}^1/_2\, \beta^2 = \frac{S_1\,(S_3 - s_5)}{s_1\,(s_2 + s_3)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 4)$$

$$\cos {}^1/_2\, \gamma^2 = \frac{S_4\,(S_4 - s_6)}{s_3 s_7} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$

$$\cos {}^1/_2\, \gamma^2 = \frac{S_1\,(S_1 - s_1)}{s_2 s_4} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 6)$$

przyczem, jak wiadomo,

$$S_1 = {}^1/_2\,(s_1 + s_2 + s_4) \qquad = 98.94$$
$$S_2 = {}^1/_2\,(s_1 + s_8 + s_4 + s_7) = 142.84$$
$$S_3 = {}^1/_2\,(s_1 + s_2 + s_3 + s_5) = 152.675$$
$$S_4 = {}^1/_2\,(s_3 + s_6 + s_7) \qquad = 128.625.$$

Podzielmy 1) przez 2), 3) przez 4) zaś 5) przez 6), tedy otrzymamy:

$$\frac{S_1(S_1 - s_2)(s_4 + s_7)}{s_4\, S_2(S_2 - s_8)} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{I}$$

$$\frac{S_1(S_1-s_4)(s_2+s_3)}{s_2\,S_3\,(S_3-s_5)}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{II}$$

$$\frac{S_4(S_4-s_6)\,s_2\,s_4}{s_3\,s_7\,S_1(S_1-s_1)}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{III}$$

Przedstawiając te trzy równania logarytmicznie, nie otrzymamy po prawej stronie zera, lecz różnicę δ, a chcąc te równania zadowolnić, należy dla powyższych wyrazów, względnie ich logarytmów, dołączyć poprawki dla jednego metra z odnośnych rubryk tabel logarytmicznych. Tak więc będzie dla równania I:

$$\begin{aligned}
\log S_1 &= 1.99537.1+\ 439\,d\sigma_1\\
\log(S_1-s_2) &= 1.62386.9+1031\,(d\sigma_1-ds_2)\\
\log(s_4+s_7) &= 2.08332.3+\ 358\,(ds_4+ds_7)\\
\hline
N_1 &= 5.70256.3+1470\,d\sigma_1-1031\,ds_2+\\
&\quad +358\,ds_4+358\,ds_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log s_4 &= 1.73399.9+800\,ds_4\\
\log S_2 &= 2.15484.9+304\,d\sigma_2\\
\log(S_2-s_8) &= 1.81364.7+667\,(d\sigma_2-ds_8)\\
\hline
Z_1 &= 5.70249.5+971\,d\sigma_2+800\,ds_4-667\,ds_8
\end{aligned}$$

$$N_1-Z_1=+6.8+1470\,d\sigma_1-971\,d\sigma_2-1031\,ds_2-442\,ds_4$$
$$+358\,ds_7+667\,ds_8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad =0$$

Ponieważ jednak ogólnie w każdym trójkącie

$$S=\tfrac{1}{2}(s_1+s_2+s_3)$$

zatem także

$$d\sigma=\tfrac{1}{2}(ds_1+ds_2+ds_3).$$

Możemy zatem do powyższego równania błędów dodać wyrazy:

$$-1470\,d\sigma_1+735\,ds_2+735\,ds_4+735\,ds_1 \quad . \quad . \quad . \quad =0$$
$$+\ 971\,d\sigma_2-485\,ds_1-485\,ds_4-485\,ds_7-485\,ds_8 \quad =0$$

a wtedy otrzymamy ostateczne równanie błędów:

$$+6.8+250\,ds_1-296\,ds_2-192\,ds_4-127\,ds_7+$$
$$+182\,ds_8 \quad =0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I}$$

z którego $d\sigma_1$ i $d\sigma_2$ wyrugowane zostały.

W ten sam sposób przedstawimy drugie równanie:

$$\log S_1 = 1.99537.1 + 439\, d\sigma_1$$
$$\log (S_1 - s_4) = 1.65069.6 + 969\,(d\sigma_1 - ds_4)$$
$$\log (s_2 + s_3) = 2.12768.7 + 324\,(ds_2 + ds_3)$$
$$N_2 = 5.77375.4 + 1408\, d\sigma_1 + 324\, ds_2 + + 324\, ds_3 - 969\, ds_4$$
$$\log s_2 = 1.75495.9 + 763\, ds_2$$
$$\log S_3 = 2.18376.8 + 284\, d\sigma_3$$
$$\log (S_3 - s_5) = 1.83445.2 + 635\,(d\sigma_3 - ds_5)$$
$$Z_2 = 5.77317.9 + 919\, d\sigma_3 + 763\, ds_2 - 635\, ds_5$$
$$N_2 - Z_2 = +57.5 + 1408\, d\sigma_1 - 919\, d\sigma_3 + 324\, ds_2 + + 324\, ds_3 - 969\, ds_4 + 635\, ds_5 \;\ldots\; = 0$$

Do tego dodać:

$$-1408\, d\sigma_1 + 704\, ds_1 + 704\, ds_2 + 704\, ds_4 \;\ldots\; = 0$$
$$+ 919\, d\sigma_3 - 459\, ds_2 - 459\, ds_3 - 459\, ds_1 - 459\, ds_5 \; = 0$$

będzie drugie równanie błędów

$$+57.5 + 245\, ds_1 - 194\, ds_2 - 135\, ds_3 - 265\, ds_4 + + 176\, ds_5 = 0 \;\ldots\ldots\; \mathrm{II}$$

Tak samo wyprowadzamy i trzecie równanie, którego w całości przedstawiać już nie potrzeba, lecz napiszemy celem podjęcia dalszych operacyi wszystkie trzy równania kolejno po sobie

$$+6.8 + 250\, ds_1 - 296\, ds_2 - 192\, ds_4 - 127\, ds_7 + + 182\, ds_8 = 0 \;\ldots\ldots\; \mathrm{I}$$

$$+57.5 + 245\, ds_1 - 194\, ds_2 - 135\, ds_3 - 265\, ds_4 + + 176\, ds_5 = 0 \;\ldots\ldots\; \mathrm{II}$$

$$-141.5 + 1562\, ds_1 - 1238\, ds_2 + 992\, ds_3 - 1201\, ds_4 - - 1216\, ds_6 + 906\, ds_7 = 0 \;\ldots\; \mathrm{III}$$

Dalszą operacyę rachunkową przeprowadzimy według znanych szematów G a u s s a. Mamy więc ilorazy różniczkowe jakoteż wartości $[aa]$, $[ab]$ w następującej tabeli:

N	a	b	c	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[bb]$	$[bc]$	$[cc]$
1	+ 250	+ 245	+ 1562	62500	+ 61250	+ 390500	60025	+ 382690	2439844
2	− 296	− 194	− 1238	87616	+ 57424	+ 366448	37636	+ 240172	1532644
3		− 135	+ 992				18225	− 133920	984064
4	− 192	− 265	− 1201	36864	+ 50880	+ 230592	70225	+ 318265	1442401
5		+ 176					30976		
6			− 1216						1478656
7	− 127		+ 906	16129		− 115062			820836
8	+ 182			33124					
		$S =$		+ 236233	+ 169554	+ 872478	+ 217087	+ 807207	+ 8698445

Za pomocą wartości w poziomej rubryce S mamy równania normalne:

$$+236233\,k_1+169554\,k_2+\ \ 872478\,k_3+\ \ 6.8\ .\ \ .=0$$
$$+169554\,k_1+217087\,k_2+\ \ 807207\,k_3+\ 57.5\ .\ \ .=0$$
$$+872478\,k_1+807207\,k_2+8698445\,k_3-141.5\ .\ \ .=0$$

a ztąd wartości dla k:

$$k_1=+0.0002460$$
$$k_2=-0.0006500$$
$$k_3=+0.0000519.$$

Poprawki otrzymamy teraz, mnożąc ilorazy różniczkowe powyższej tabeli przez odnośne k, naprzykład:

$$ds_1=+250\,k_1+245\,k_2+1562\,k_3$$
$$ds_3=-135\,k_2+992\,k_3 \qquad \text{i t. d.}$$

Będzie zatem

$ds_1=-0.0166$	$[s_1]=\ 86.783$
$ds_2=-0.0109$	$[s_2]=\ 56.869$
$ds_3=+0.1392$	$[s_3]=\ 77.439$
$ds_4=+0.0626$	$[s_4]=\ 54.262$
$ds_5=-0.1144$	$[s_5]=\ 84.255$
$ds_6=-0.0631$	$[s_6]=112.937$
$ds_7=+0.0157$	$[s_7]=\ 66.965$
$ds_8=+0.0447$	$[s_8]=\ 77.774.$

Winniśmy teraz otrzymać zgodne wartości dla $\cos {}^1/_2\,\alpha^2$, $\cos {}^1/_2\,\beta^2$ i $\cos {}^1/_2\,\gamma^2$. W istocie będzie dla $\cos {}^1/_2\,\alpha^2$:

$\log\,[S_1]=1.99544.8$	$\log\,[s_1]=1.93843.6$
$\log\,[S_1-s_2]=1.62416.3$	$\log\,[s_4]=1.73450.1$
$3.61961.1$	$3.67293.7$
$-3.67293.7$	
$\log\cos {}^1/_2\,\alpha^2=9.94667.4$	
$\log\,[S_2]=2.15501.1$	$\log\,[s_1]=1.93843.6$
$\log\,[S_2-s_8]=1.81370.5$	$\log\,[s_4+s_7]=2.08360.3$
$3.96871.6$	$4.02203.9$
$-4.02203.9$	
$\log\cos {}^1/_2\,\alpha^2=9.94667.7$	

dla $\cos {}^1/_2\, \beta^2$:

$\log [S_1] = 1.99544.8$	$\log [s_1] = 1.93843.6$
$\log [S_1 - s_4] = 1.65025.7$	$\log [s_2] = 1.75487.5$
$3.64570.5$	$3.69331.1$
$-3.69331.1$	
$\log \cos {}^1/_2\, \beta^2 = 9.95239.4$	
$\log [S_3] = 2.18376.4$	$\log [s_1] = 1.93843.6$
$\log [S_3 - s_5] = 1.83517.0$	$\log [s_2 + s_3] = 2.12810.2$
$4.01893.4$	$4.06653.8$
$-4.06653.8$	
$\log \cos {}^1/_2\, \beta^2 = 9.95239.6$	

dla $\cos {}^1/_2\, \gamma^2$:

$\log [S_4] = 2.10948.0$	$\log [s_3] = 1.88896.0$
$\log [S_4 - s_6] = 1.19683.9$	$\log [s_7] = 1.82585.3$
$3.30631.9$	$3.71481.3$
$-3.71481.3$	
$\log \cos {}^1/_2\, \gamma^2 = 9.59150.6$	
$\log [S_1] = 1.99544.8$	$\log [s_2] = 1.75487.5$
$\log [S_1 - s_1] = 1.08543.6$	$\log [s_4] = 1.73450.1$
$3.08088.4$	$3.48937.6$
$-3.48937.6$	
$\log \cos {}^1/_2\, \gamma^2 = 9.59150.8.$	

Przykład 2.

Wyrównanie figury poprzedniej przybiera formę nieco odmienną, jeżeli mierzono obie przekątnie na całej długości nie uwzględniając punktu 0, w którym się takowe przecinają. Przykład takowy zachodzi zbyt często w praktyce pomiarowej i dlatego rozwiązanie podajemy w całej obszerności.

Mamy więc obserwacye:

$s_1 = 113.00$

$s_2 = \ \ 84.37$

$$s_3 = 86.80$$
$$s_4 = 77.73$$
$$s_5 = 121.15$$
$$s_6 = 134.18$$

przyczem s_5, s_6 oznaczają wartości całych przekątni, podczas gdy m, n odnoszą się do boków w trójkącie III, a które otrzymujemy z obliczenia:

$m = 56.928$, $\quad n = 54.492$, następnie:

$s_6 - m = 77.252$, $\quad s_5 - n = 66.658$.

Oznaczmy kąty w punkcie przecięcia przekątni przez α_1, α_2, α_3, α_4, tedy winno być:

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \sin\alpha_3 = \sin\alpha_4$$

lub także

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = 1 \qquad \frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_4} = 1$$

a w końcu

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_3}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_4} = 1.$$

Zaś wstawiając w równanie ostatnie obserwacye otrzymamy

$$\frac{S_1(S_1-s_1)(S_1-s_6+m)(S_1-s_5+n)S_3(S_3-s_3)(S_3-n)(S_3-m)}{S_2(S_2-s_6+m)(S_2-n)(S_2-s_2)S_4(S_4-s_4)(S_4-m)(S_4-s_5+n)} = \delta$$

Wykazana różnica δ zejdzie do zera, jeżeli do logarytmów dla $S_1 \ldots S_4$, tudzież wyrazów nawiasem objętych, dołączymy poprawki co do jednego metra z odnośnych rubryk tabel logarytmicznych. Rachunek ten przeprowadzimy szczegółowo, przechodząc równocześnie do postawienia równania błędów.

W trójkącie I mamy:

$$s_1 = 113{\cdot}00$$
$$s_6 - m = 77.252$$
$$s_5 - n = 66.658$$

zatem

$$S_1 = 128.455$$
$$S_1 - s_1 = 15.455$$
$$S_1 - s_6 + m = 51.203$$
$$S_1 - s_5 + n = 61.797$$

$$
\begin{array}{ll}
\log\ S_1 & =2.10875.1+336.7\,d\sigma_1 \\
\text{,,}\ (S_1-s_1) & =1.18806.9+2822.8\,(d\sigma_1-ds_1) \\
\text{,,}\ (S_1-s_6+m) & =1.70929.5+\ 840.0\,(d\sigma_1-ds_6+dm) \\
\text{,,}\ (S_1-s_5+n) & =1.79096.7+\ 697.0\,(d\sigma_1-ds_5+dn) \\
\hline
\end{array}
$$

$$
A=6.79708.2+4696.5\,d\sigma_1-2822.8\,ds_1-697.0\,ds_5-
$$
$$
-840.0\,ds_6+840.0\,dm+697.0\,dn.
$$

W trójkącie II:

$$s_2=84.37$$
$$s_6-m=77.252$$
$$n=54.492$$

zatem

$$S_2=108.057$$
$$S_2-s_2=\ 23.687$$
$$S_2-s_6+m=\ 30.805$$
$$S_2-n=\ 53.565$$

$$
\begin{array}{ll}
\log\ S_2 & =2.03364.4+400.1\,d\sigma_2 \\
\text{,,}\ (S_2-s_2) & =1.37451.0+1795.8\,(d\sigma_2-ds_2) \\
\text{,,}\ (S_2-s_6+m) & =1.48862.1+1387.4\,(d\sigma_2-ds_6+dm) \\
\text{,,}\ (S_2-n) & =1.72888.1+\ 803.3\,(d\sigma_2-dn) \\
\hline
\end{array}
$$

$$
B=6.62565.6+4386.6\,d\sigma_2-1795.8\,ds_2-1387.4\,ds_6+
$$
$$
+1387.4\,dm-803.3\,dn.
$$

W trójkącie III:

$$s_3=86.80$$
$$n=54.492$$
$$m=56.928$$

zatem

$$S_3=99.110$$
$$S_3-s_3=12.310$$
$$S_3-n=44.619$$
$$S_3-m=42.182$$

$$
\begin{array}{ll}
\log\ S_3 & =1.99611.7+\ 436.0\,d\sigma_3 \\
\text{,,}\ (S_2-s_3) & =1.09025.8+3392.0\,(d\sigma_3-ds_3) \\
\text{,,}\ (S_3-n) & =1.64951.9+\ 962.6\,(d\sigma_3-dn) \\
\text{,,}\ (S_3-m) & =1.62512.7+1017.5\,(d\sigma_3-dm) \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C=6.36102.1+5808.1\,d\sigma_3-3392.0\,ds_3-962.6\,dn-
$$
$$
-1017.0\,dm.
$$

W trójkącie IV:

$$s_4 = 77.73$$
$$m = 56.928$$
$$s_5 - n = 66.658$$

więc:

$$S_4 = 100.658$$
$$S_4 - m = 43.730$$
$$S_4 - s_4 = 22.928$$
$$S_4 - s_5 + n = 34.000$$

$$\begin{aligned}
\log S_4 &= 2.00283.5 + 429.3\, d\sigma_4 \\
\text{,,}\ (S_4 - m) &= 1.64077.9 + 981.9\, (d\sigma_4 - dm) \\
\text{,,}\ (S_4 - s_4) &= 1.36036.6 + 1854.0\, (d\sigma_4 - ds_4) \\
\text{,,}\ (S_4 - s_5 + n) &= 1.53147.8 + 1259.0\, (d\sigma_4 - ds_5 + dn)
\end{aligned}$$

$$D = 6.53545.8 + 4524.2\, d\sigma_4 - 1854.0\, ds_4 - 1259.0\, ds_5 -$$
$$- 981.9\, dm + 1259.0\, dn.$$

Odciągając teraz od sumy $A + C$ sumę $B + D$ otrzymamy:

$$\begin{aligned}
-301.1 &+ 4696.5\, d\sigma_1 - 4386.0\, d\sigma_2 + 5808.1\, d\sigma_3 \\
&- 4524.0\, d\sigma_4 - 2822.8\, ds_1 + 1795.8\, ds_2 - 3392.0\, ds_3 \\
&+ 1854.0\, ds_4 + 562.0\, ds_5 + 547.0\, ds_6 - 582.5\, dm \\
&- 720.7\, dn = 0.
\end{aligned}$$

Z równania tego należy jednak wyrugować $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, $d\sigma_4$, dm, dn.

Otóż wiemy, że:

$$-4696\, d\sigma_1 + 2348\, ds_1 + 2348\, ds_6 + 2348\, ds_5 -$$
$$- 2348\, dm - 2348\, dn = 0$$
$$+4386\, d\sigma_2 - 2193\, ds_2 - 2193\, ds_6 + 2193\, dm - 2193\, dn = 0$$
$$-5808\, d\sigma_3 + 2904\, ds_3 - 2904\, dm + 2904\, dn = 0$$
$$+4524\, d\sigma_4 - 2262\, ds_4 - 2262\, ds_5 - 2262\, dm + 2262\, dn = 0$$

Zatem dodając te cztery wyrazy do równania

$$(A + C) - (B + D) = 0$$

pozostanie:

$$\begin{aligned}
-301.1 &- 474\, ds_1 - 397\, ds_2 - 488\, ds_3 - 408\, ds_4 \\
&+ 648\, ds_5 + 702\, ds_6 - 95\, dm - 96\, dn = 0
\end{aligned}$$

Możemy następnie z dokładnością wystarczającą przyjąć:

$$dm = ds_2 \frac{\sin(4)}{\sin \alpha_3}, \quad dn = ds_3 \frac{\sin(5)}{\sin \alpha_3}$$

czyli

$$95\,dm - 62\,ds_3 = 0$$
$$96\,dn - 60\,ds_3 = 0$$

przeto dodając jeszcze te dwa wyrazy do równania powyższego, otrzymamy ostateczne równanie błędów, zawierające tylko pożądane poprawki ds:

$$-301.1 - 474\,ds_1 - 397\,ds_2 - 610\,ds_3 - 408\,ds_4 + 648\,ds_5 + 702\,ds_6 = 0.$$

Zaś równanie korelatowe otrzymamy, podnosząc współczynniki dla ds do kwadratu i sumując takowe. Kwadraty te są:

$$474^2 = 224676 \qquad 408^2 = 166464$$
$$397^2 = 157609 \qquad 648^2 = 419904$$
$$610^2 = 372100 \qquad 702^2 = 492804.$$

Suma tych kwadratów wynosi 1833557, zatem

$$-301.1 + 1833557\,k = 0$$

zkąd $k = +0.000164$

a żądane poprawki:

$$ds_1 = -474\,k = -0.0778$$
$$ds_2 = -397\,k = -0.0651$$
$$ds_3 = -610\,k = -0.1001$$
$$ds_4 = -408\,k = -0.0669$$
$$ds_5 = +648\,k = +0.1064$$
$$ds_6 = +702\,k = +0.1152$$

zaś wartości wyrównane:

$$s_1 + ds_1 = 112.922, \qquad s_2 + ds_2 = 84.305$$
$$s_3 + ds_3 = 86.700, \qquad s_4 + ds_4 = 77.661$$
$$s_5 + ds_5 = 121.256, \qquad s_6 + ds_6 = 134.295.$$

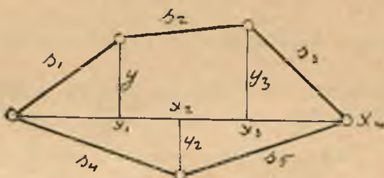
Kontrolę rachunku wykonywa się przez podwójne obliczenie powierzchni, zważając, że powierzchnia trójkątów $s_1 s_2 s_5 + s_3 s_4 s_5$ równą być musi powierzchni trójkątów $s_1 s_4 s_6 + s_2 s_3 s_6$; jakoteż mamy:

trójkąt	$s_1 s_2 s_5$	$=4582.0\ m^2$
„	$s_3 s_4 s_5$	$=3354.0$ „
		$7936.0\ m^2$
trójkąt	$s_1 s_4 s_6$	$=4381.8\ m^2$
„	$s_2 s_3 s_6$	$=3553.7$ „
		$7935.5\ m^2$

Rezultat ten zgadza się wystarczająco.

Przykład 3.

Przystępujemy teraz do przykładu innego, który w praktyce geometrycznej jest na porządku dziennym.



W pięcioboku $s_1 \ldots s_5$ mierzono nietylko wszystkie rzędne i odcięte x, y, lecz dla kontroli i wszystkie boki $s_1 \ldots s_5$ i otrzymano:

$x_1 = 42.50$	z wagą:	$p_1 = 2.2$
$x_2 = 63.65$	„	$p_2 = 3.6$
$x_3 = 87.60$	„	$p_3 = 1.8$
$x_4 = 124.36$	„	$p_4 = 3.6$
$y_1 = 30.15$	„	$p_5 = 2.5$
$y_2 = 18.20$	„	$p_6 = 2.0$
$y_3 = 34.83$	„	$p_7 = 1.5$
$s_1 = 52.03$	„	$p_8 = 2.0$
$s_2 = 45.43$	„	$p_9 = 3.5$
$s_3 = 50.69$	„	$p_{10} = 1.6$
$s_4 = 66.25$	„	$p_{11} = 0.8$
$s_5 = 63.44$	„	$p_{12} = 1.0.$

W zdjęciu tem mamy pięć nadliczbowych obserwacyj, zatem potrzebujemy pięć równań warunkowych o formie ogólnej:

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - \mathrm{s}^2 = 0$$

które jednak nie dadzą zera, lecz δ, jeżeli podstawimy kolejno odpowiednie wartości obserwowane x, y, s.

Postępując podobnie, jak przy zadaniu 1 metoda 1, otrzymujemy następujące pięć równań błędów:

$$x_1 dx_1 + y_1 dy_1 - s_1 ds_1 + \frac{\delta_1}{2} = 0 \quad . \quad . \quad . \qquad \mathrm{I}$$

$$\left.\begin{array}{l}(x_3 - x_1)\, dx_3 + (x_1 - x_3)\, dx_1 + (y_3 - y_1)\, dy_3 + \\ \qquad + (y_1 - y_3)\, dy_1 - s_2 ds_2 + \frac{\delta_2}{2} = 0\end{array}\right\} \quad . \qquad \mathrm{II}$$

$$(x_4 - x_3)\, dx_4 + (x_3 - x_4)\, dx_3 + y_3 dy_3 - s_3 ds_3 + \frac{\delta_3}{2} = 0 \qquad \mathrm{III}$$

$$x_2 dx_2 + y_2 dy_2 - s_4 ds_4 + \frac{\delta_4}{2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \mathrm{IV}$$

$$(x_4 - x_2)\, dx_4 + (x_2 - x_4)\, dx_2 + y_2 dy_2 - s_5 ds_5 + \frac{\delta_5}{2} = 0 \quad . \qquad \mathrm{V}$$

jakoteż w dalszym ciągu równanie warunkowe dla minimum, uporządkowane tutaj według k:

$$\begin{aligned}[p\,Sq] = {} & p_1 dx_1{}^2 + p_2 dx_2{}^2 + p_3 dx_3{}^2 + p_4 dx_4{}^2 \\ & + p_5 dy_1{}^2 + p_6 dy_2{}^2 + p_7 dy_3{}^2 \\ & + p_8 ds_1{}^2 + p_9 ds_2{}^2 + p_{10} ds_3{}^2 + p_{11} ds_4{}^2 + p_{12} ds_5{}^2\end{aligned}$$

$$+ k_1 \left| \begin{array}{l} -4\, x_1 dx_1 \\ -4\, y_1 dy_1 \\ +4\, s_1 ds_1 \\ -2\, \delta_1 \end{array} \right| + k_2 \left| \begin{array}{l} -4\, x_3 dx_1 \\ -4\, x_1 dx_1 \\ +4\, x_1 dx_3 \\ -4\, x_3 dx_3 \\ -4\, y_1 dy_1 \\ +4\, y_3 dy_1 \\ +4\, y_1 dy_3 \\ -4\, y_3 dy_3 \\ +4\, s_2 ds_2 \\ -2\, \delta_2 \end{array} \right| + k_3 \left| \begin{array}{l} +4\, x_4 dx_3 \\ -4\, x_3 dx_3 \\ +4\, x_3 dx_4 \\ -4\, x_4 dx_4 \\ -4\, y_3 dy_3 \\ +4\, s_3 ds_3 \\ -2\, \delta_3 \end{array} \right|$$

$$+ k_4 \left| \begin{array}{l} -4\, x_2 dx_2 \\ -4\, y_2 dy_2 \\ +4\, s_4 ds_4 \\ -2\, \delta_4 \end{array} \right| + k_5 \left| \begin{array}{l} +4\, x_4 dx_2 \\ -4\, x_2 dx_2 \\ +4\, x_2 dx_4 \\ -4\, x_4 dx_4 \\ -4\, y_2 dy_2 \\ +4\, s_5 ds_5 \\ -2\, \delta_5 \end{array} \right| = \text{Minimum}$$

Przez różniczkowanie otrzymamy żądane wyrazy dla dx, dy, ds mianowicie:

$$dx_1 = 2\left(k_1 \frac{y_1}{p_1} + k_2 \frac{x_1 - x_3}{p_1}\right)$$

$$dx_2 = 2\left(k_4 \frac{x_2}{p_2} + k_5 \frac{x_2 - x_4}{p_2}\right)$$

$$dx_3 = 2\left(k_2 \frac{x_3 - x_1}{p_3} + k_3 \frac{x_3 - x_4}{p_3}\right)$$

$$dx_4 = 2\left(k_3 \frac{x_4 - x_3}{p_4} + k_5 \frac{x_4 - x_2}{p_4}\right)$$

$$dy_1 = 2\left(k_1 \frac{y_1}{p_5} + k_2 \frac{y_1 - y_3}{p_5}\right)$$

$$dy_2 = 2\left(k_4 + k_5\right) \frac{y_2}{p_6}$$

$$dy_3 = 2\, k_2 \frac{y_3 - y_1}{p_7}$$

$$ds_1 = -2\, k_1 \frac{s_1}{p_8}$$

$$ds_2 = -2\, k_2 \frac{s_2}{p_9}$$

$$ds_3 = -2\, k_3 \frac{s_3}{p_{10}}$$

$$ds_4 = -2\, k_4 \frac{s_4}{p_{11}}$$

$$ds_5 = -2\, k_5 \frac{s_5}{p_{12}} \,.$$

Podstawmy te wyrazy dla dx, dy, ds w równania błędów, otrzymamy następujące równania normalne:

$$+2538.1936\, k_1 - 927.6908\, k_2 + 2.0379 = 0 \quad . \; . \; . \qquad \text{I}$$

$$-927.6908\, k_1 + 2673.4093\, k_2 - 921.0422\, k_3 - -1.9931 = 0 \quad . \; . \; . \qquad \text{II}$$

$$-812.3793\, k_2 + 2732.0038\, k_3 + 619.6387\, k_5 - -1.2626 = 0 \quad . \; . \; . \qquad \text{III}$$

$$+6942.9353\, k_4 - 742.1465\, k_5 - 1.6250 = 0 \quad . \; . \; . \qquad \text{IV}$$

$$+619.6387\, k_3 - 742.1465\, k_4 + 6403.4856\, k_5 - -1.9224 = 0 \quad . \; . \; . \qquad \text{V}$$

z których wartości dla k:

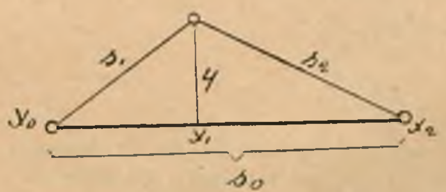
$$k_1 = -0.000537$$
$$k_2 = +0{\cdot}000781$$
$$k_3 = +0.000634$$
$$k_4 = +0.000262$$
$$k_5 = +0.000268$$

a w końcu poprawki, jakoteż wyrównane wartości dla x, y, s:

$dx_1 = -0.053$	$[x_1] = 42.447$
$dx_2 = +0.000$	$[x_2] = 63.650$
$dx_3 = -0.004$	$[x_3] = 87.596$
$dx_4 = +0.014$	$[x_4] = 124.374$
$dy_1 = -0.016$	$[y_1] = 30.134$
$dy_2 = +0.009$	$[y_2] = 18.209$
$dy_3 = +0.005$	$[y_3] = 34.835$
$ds_1 = +0.028$	$[s_1] = 52.058$
$ds_2 = -0.020$	$[s_2] = 45.410$
$ds_3 = -0.040$	$[s_3] = 50.650$
$ds_4 = -0.043$	$[s_4] = 66.207$
$ds_5 = -0.034$	$[s_5] = 63.406.$

Przykład 4.

Jeżeli przy zdjęciu figury $s_0 s_1 s_2$ punkta x_0, x_2 należą do sieci trygonometrycznej poprzednio już ustalonej, zaś przy zdjęciu otrzymano obserwacye: x_1, s_1, y,



s_2 jakoteż x_2 zamiast s_0, tedy oprócz warunków:

$$x_1{}^2 + y^2 - s_1{}^2 = 0$$
$$(x_2 - x_1)^2 + y^2 - s_2{}^2 = 0$$

należy jeszcze postawić równanie

$$x_2 - s_0 = 0$$

z tą jednak uwagą, że w równaniach błędów s_0 nie może otrzymać żadnej poprawki.

Jeżeli więc w zadaniu tem mamy obserwacye:

$$x_1 = 63.65$$
$$y = 18.20$$
$$s_1 = 66.25$$
$$s_2 = 63.44$$
$$x_2 = 124.36$$

zaś s_0 jest stałą $= 124.30$, która zmianie uledz nie może, tedy mamy najpierw:

$$x_1{}^2 + y^2 - s_1{}^2 + 6.5000 = 0$$
$$(x_2 - x_1)^2 + y^2 - s_2{}^2 + 7.6895 = 0$$
$$x_2 - s_0 + 0.0400 = 0$$

a postępując zupełnie tak samo, jak w przykładzie 3, otrzymujemy równania błędów:

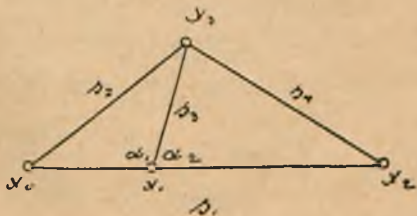
$$x_1\,dx_1 + y\,dy - s_1\,ds_1 - 3.2500 = 0$$
$$(x_2 - x_1)\,dx_2 + (x_1 - x_2)\,dx_1 + y\,dy - s_2\,ds_2 - 3.8447 = 0$$
$$dx_2 - 0.0400 = 0.$$

Pomijając szczegółowe przeprowadzanie całego rachunku, podajemy tylko poprawki:

$$dx_1 = \frac{k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2)}{2} = +0.009$$
$$dx_2 = \frac{k_2(x_2 - x_1) + k_3}{2} = +0.040$$
$$dy_2 = \frac{(k_1 + k_2)}{2}\,y = +0.017$$
$$ds_1 = -k_1\,\frac{s_1}{2} = -0.035$$
$$ds_2 = -k_2\,\frac{s_2}{2} = -0\ 026.$$

Przykład 5.

Jeżeli trzy punkty x_0, x_2, x_3 należą do sieci trygonometrycznej, a chodzi tylko o ustalenie punktu x_1, leżącego ściśle na prostej s_1, tedy należy postawić warunki:



$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 = 0$$
$$x_2 - s_1 = 0$$

lub także, jeżeli wyrównanie chcemy przeprowadzić logarytmicznie:

$$\frac{\cos {}^1/_2\, \alpha_1}{\sin {}^1/_2\, \alpha_2} = 1$$

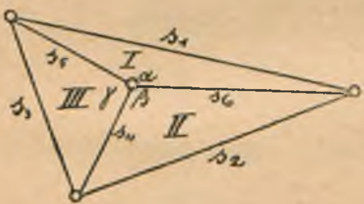
$$\frac{x_2}{s_1} = 1$$

W równaniach błędów jednak podobnie, jak w zadaniu poprzedniem, linie s_1, s_2, s_4 nie mogą otrzymać żadnych poprawek.

Przykład 6

zachodzi tak często w miejskiej praktyce pomiarowej, że rozwiązanie tegoż w szczegółach podać tutaj wypada.

Dane są obserwacye:



$s_1 = 419.04$
$s_2 = 367.02$
$s_3 = 210.60$
$s_4 = 134.74$
$s_5 = 87.56$
$s_6 = 353.98.$

Z figury widzimy, że suma kątów $\alpha + \beta + \gamma$ winna dać 360^0, a warunek ten nie spełnia się, jeżeli te kąty obliczamy z danych obserwowanych. Otrzymujemy bowiem

$$\sin {}^1/_2\, \alpha = \sqrt{\frac{(S_1 - s_5)(S_1 - s_6)}{s_5 s_6}}$$

zatem ${}^1/_2\, \alpha = 66^0\ 43'\ 18''$

$$\sin {}^1/_2\, \beta = \sqrt{\frac{(S_2 - s_4)(S_2 - s_6)}{s_4 s_6}}$$

${}^1/_2\, \beta = 42^0\ 22'\ 3''$

$$\sin {}^1/_2\, \gamma = \sqrt{\frac{(S_3 - s_4)(S_3 - s_5)}{s_4 s_5}}$$

${}^1/_2\, (\alpha + \beta + \gamma) - 180^0 = -125''$

Suma tych kątów, to jest $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$, uzupełni się do 180^0, jeżeli w powyższych równaniach dołączymy poprawki do wszystkich czynników pochodzących z obserwacyi. Przechodząc do metody logarytmicznej, równania te przeprowadzimy tak:

$$\log(S_1-s_5)=2.5349521+12653\,(d\sigma_1-ds_5)$$
$$\text{,,}\ (S_1-s_6)=1.8825815+56542\,(d\sigma_1-ds_6)$$
$$L_1=4.4175336+69195\,d\sigma_1-12653\,ds_5-56542\,ds_6$$
$$\log s_5=1.9423058+49318\,ds_5$$
$$\text{,,}\ s_6=2.5489787+12252\,ds_6$$
$$M_1=4.4912845+49318\,ds_5+12252\,ds_6$$
$$\tfrac{1}{2}(L_1-M_1)=9.9631245+34597\,d\sigma_1-30985\,ds_5-$$
$$-34397\,ds_6$$

$$\log(S_2-s_4)=2.4670603+14790\,(d\sigma_2-ds_4)$$
$$\text{,,}\ (S_2-s_6)=1.8685857+58381\,(d\sigma_2-ds_6)$$
$$L_2=4.3356460+73171\,d\sigma_2-14790\,ds_4-58381\,ds_6$$
$$\log s_4=2.1294965+32113\,ds_4$$
$$\text{,,}\ s_6=2.5489787+12252\,ds_6$$
$$M_2=9.6571708+32113\,ds_4+12252\,ds_6$$
$$\tfrac{1}{2}(L_2-M_2)=9.8285854+36585\,d\sigma_2-23451\,ds_4-$$
$$-35316\,ds_6$$

$$\log(S_3-s_4)=1.9122752+52828\,(d\sigma_3-ds_4)$$
$$\text{,,}\ (S_3-s_5)=2{,}1102192+33565\,(d\sigma_3-ds_5)$$
$$L_3=4.0224944+86393\,d\sigma_3-52828\,ds_4-33565\,ds_5$$
$$\log s_4=2.1294965+32113\,ds_4$$
$$\text{,,}\ s_5=1.9423058+49318\,ds_5$$
$$M_3=4.0718023+32113\,ds_4+49318\,ds_5$$
$$\tfrac{1}{2}(L_3-M_3)=9.9753460+43196\,d\sigma_3-42770\,ds_4-$$
$$-41441\,ds_5.$$

Powiedziano wyżej, że:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)-180^0=\delta=-125''.$$

Dodajmy teraz do każdego z tych trzech kątów $\frac{\delta}{3}$ otrzymując tym sposobem

$$\tfrac{1}{2}\alpha+\frac{\delta}{3}=\tfrac{1}{2}\alpha_1$$

$$^1/_2\,\beta+\frac{\delta}{3}={}^1/_2\,\beta_1$$

$$^1/_2\,\gamma+\frac{\delta}{3}={}^1/_2\,\gamma_1$$

natenczas okazuje się, że suma $^1/_2\,(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)$ daje wprawdzie 180^0; jednakowoż tak uzupełnionych wartości nie możemy wcale uważać za wartości ostateczne, lecz trzeba będzie dołączyć do nich poprawki $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, których suma równać się musi zeru, skoro suma $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$ już odpowiada warunkowi teoretycznemu.

Obliczmy teraz log sin $(^1/_2\,\alpha_1+d\alpha)$, log sin $(^1/_2\,\beta_1+d\beta)$, log sin $(^1/_2\,\gamma_1+d\gamma)$, a to w sposób, że do log $^1/_2\,\alpha_1$ dołączymy poprawkę logarytmiczną z tabel dla jednej minuty, tak samo dla $^1/_2\,\beta_1$, $^1/_2\,\gamma_1$ otrzymując

$$\begin{aligned}
\log\sin\,(^1/_2\,\alpha_1+d\alpha)&=9.9631616+\ \,543\,d\alpha=A_1\\
\text{„}\quad\text{„}\quad(^1/_2\,\beta_1+d\beta)&=9.8286817+1374\,d\beta=A_2\\
\text{„}\quad\text{„}\quad(^1/_2\,\gamma_1+d\gamma)&=9.9753762+\ \,480\,d\gamma=A_3
\end{aligned}$$

natenczas, skoro wyrazy L_1-M_1 i A_1, następnie L_2-M_2 i A_2, a w końcu L_3-M_3 i A_3 odpowiadają takim kątom $^1/_2\,\alpha$, $^1/_2\,\beta$, $^1/_2\,\gamma$, których suma da po wyrównaniu 180^0, możemy napisać

$$\begin{aligned}
L_1-M_1&=A_1\\
L_2-M_2&=A_2\\
L_3-M_3&=A_3
\end{aligned}$$

czyli według powyższych zestawień logarytmicznych

$$\begin{aligned}
-371+34597\,d\sigma_1-30985\,ds_5-34397\,ds_6&=\ \,543\,d\alpha \quad 1)\\
-963+36585\,d\sigma_2-23451\,ds_4-35316\,ds_6&=1374\,d\beta \quad 2)\\
-302+43196\,d\sigma_3-42470\,ds_4-41441\,ds_5&=\ \,480\,d\gamma \quad 3)
\end{aligned}$$

Podzielmy teraz równanie pierwsze przez 543 i dodajmy do niego $-6371\,d\sigma_1+3185\,ds_5+3185\,ds_6+$
$+3185\,ds_1=0$

tedy będzie

$$-0.68+31.85\,ds_1-25.21\,ds_5-31.49\,ds_6=d\alpha \quad . \quad \mathrm{I}$$

Podzielmy drugie przez 1374 i dodajmy

$$-26.62\,d\sigma_2+13.31\,ds_4+13.31\,ds_6+13.31\,ds_2=0$$

otrzymamy

$$-0.70-3.75\,ds_4-12.39\,ds_6+13.31\,ds_2=d\beta \quad . \quad \text{II}$$

Zaś dzieląc równanie trzecie przez 480 i dodając do niego

$$-89.99\,d\sigma_3+45.00\,ds_3+45.00\,ds_5+45.00\,ds_4=0$$

będzie:

$$-063-43.47\,ds_4-41.33\,ds_5+45.00\,ds_3=d\gamma \quad . \quad \text{III}$$

a ponieważ $d\alpha+d\beta+d\gamma=0$

przeto sumując równania I, II, III otrzymujemy ostateczne równanie błędów, w którym tylko żądane poprawki $ds_1 \ldots ds_6$ się znajdują:

$$-2.01+31.85\,ds_1+13.31\,ds_2+45.00\,ds_3$$
$$-47.22\,ds_4-66.54\,ds_5-43.88\,ds_6=0.$$

Potrzebne do oznaczenia wartości ds równanie korelatowe otrzymamy, podnosząc współczynniki tych poprawek do kwadratu i sumując takowe.

Mamy więc:

$$\begin{aligned}
31.85^2 &= 1014.4225\\
13.31^2 &= 177.1561\\
45.00^2 &= 2025.0000\\
47.22^2 &= 2229.7284\\
66.54^2 &= 4427.5716\\
43.88^2 &= 1925.4544\\
\hline
S &= 11799.3330
\end{aligned}$$

zatem

$$-2.01+11799.333\,k=0$$

zkąd

$$k=+0.0001703.$$

Poprawki i obserwacye wyrównane będą:

$$\begin{aligned}
ds_1 &= +31.85\,k=+0.0054 & [s_1]&=419.045\\
ds_2 &= +13.31\,k=+0.0023 & [s_2]&=367.022\\
ds_3 &= +45.00\,k=+0.0076 & [s_3]&=210.608\\
ds_4 &= -47.22\,k=-0.0080 & [s_4]&=134.732\\
ds_5 &= -66.54\,k=-0.0113 & [s_5]&=87.549\\
ds_6 &= -43.88\,k=-0.0075 & [s_6]&=353.972.
\end{aligned}$$

Kontrolę rachunku najkorzystniej jest wykonać przez obliczenie powierzchni, przyczem suma powierzchni trójkątów I, II, III równać się musi powierzchni trójkąta $s_1 s_2 s_3$.

Obliczmy te powierzchnie szczegółowo.

W trójkącie I mamy:

$$\begin{aligned} [s_1] &= 419.045 \\ [s_5] &= 87.549 \\ [s_6] &= 353.566 \\ \hline & \ 860.566 \end{aligned}$$

$[S_1]$	$= 430.283$	log	2.6337542
$[S_1]-[s_1]$	$= 11.238$	„	1.0506890
$[S_1]-[s_5]$	$= 342.734$	„	2.5349571
$[S_1]-[s_6]$	$= 76.311$	„	1.8825871
			8.1019874

$$\log F_I = 4.0509937 = 11245.8$$

W trójkącie II:

$$\begin{aligned} [s_2] &= 367.022 \\ [s_4] &= 134.732 \\ [s_6] &= 353.972 \\ \hline & \ 855.726 \end{aligned}$$

$[S_2]$	$= 427.863$	log	2.6313047
$[S_2]-[s_2]$	$= 60.841$	„	1.7841963
$[S_2]-[s_4]$	$= 293.131$	„	2.4670617
$[S_2]-[s_6]$	$= 73.891$	„	1.8685915
			8.7511542

$$\log F_{II} = 4.3755771 = 23745.2$$

W trójkącie III:

$$\begin{aligned} [s_3] &= 210.608 \\ [s_4] &= 134.732 \\ [s_5] &= 87.549 \\ \hline & \ 432.889 \end{aligned}$$

$[S_3]$	$= 216.444$	log	2.3353455
$[S_3]-[s_3]$	$= 5.836$	„	0.7661153
$[S_3]-[s_4]$	$= 81.712$	„	1.9122858
$[S_3]-[s_5]$	$= 128.895$	„	2.1102360

$$\log F_{III} = 3.5619913 = 3647.4$$

W końcu w trójkącie $s_1 s_2 s_3$:

$$
\begin{array}{lrll}
 & [s_1]=419.045 & & \\
 & [s_2]=367.022 & & \\
 & [s_3]=210.608 & & \\
\hline
 & 996.675 & & \\
[S_0] & =498.337 & \log & 2.6975230 \\
[S_0]-[s_1] & = 79.292 & " & 1.8992294 \\
[S_0]-[s_2] & =131.315 & " & 2.1183143 \\
[S_0]-[s_3] & =287.729 & " & 2.4589836 \\
\hline
 & & & 9.1740503
\end{array}
$$

$$\log F_0 = 4{,}5870251 = 38638.9$$

zaś sumując $F_I + F_{II} + F_{III}$

$$
\begin{array}{rr}
F_I & =11245.8 \\
F_{II} & =23745.2 \\
F_{III} & = 3647.4 \\
\hline
 & 38638.4
\end{array}
$$

Przykład powyższy opracowany jest według wskazówek Gaussa u tegoż *Trig. u. polyg. Rechnungen in der Feldmesskunst.*

Przykład 7.

Dane są punkty P_1, P_2, P_3, P_4 sieci trygonometrycznej wyrównanej, których współrzędne x, y nie mogą uledz zmianie. W celu ustalenia punktu P_0 mierzono linie s_1, s_2, s_3, s_4.

Mamy tutaj dwie nadliczbowe obserwacye, są zatem potrzebne dwa równania warunkowe. Możemy zatem postawić, aby

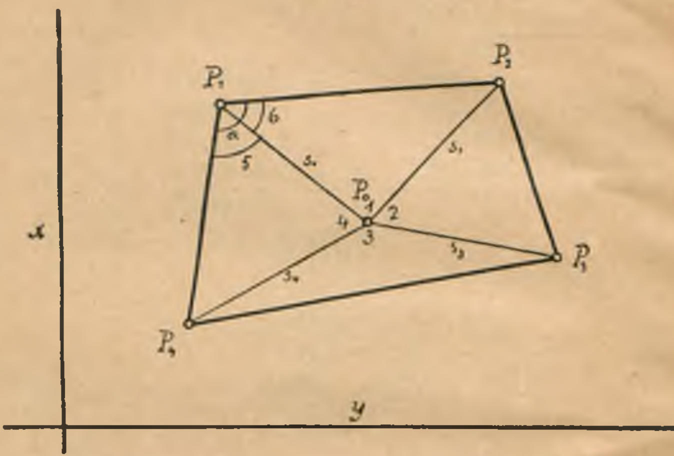
$$(1)+(2)+(3)+(4)-360^0=0 \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

jakoteż aby

$$(5)+(6)-\alpha=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

przyczem α jest kątem stałym, obliczalnym tylko z współrzędnych x, y.

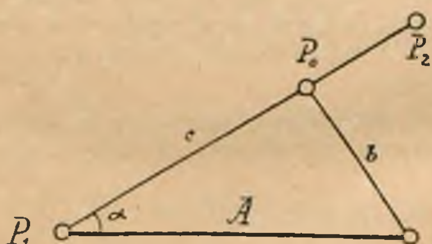
Ten drugi warunek może być tak samo zastąpiony warunkiem co do kątów przy którymkolwiek z innych trzech punktów P_2, P_3, P_4.



Zresztą cała operacya wyrównawcza podobną będzie do operacyi w przykładzie 6.

Przykład 8.

Dla ustalenia punktu P_0 który leży na linii $P_1 P_2$, należącej do sieci trygonometrycznej, mierzono linie b, c. Ilościami stałemi zatem są tutaj linia A jakoteż kąt α, mamy więc jedną obserwacyę nadliczbową.



Winno być

$$A^2 + C^2 - B^2 - 2\,AC\cos\alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Jednakowoż w równanie to wstawiając obserwacye, otrzymujemy

$$A^2 + c^2 - b^2 - 2\,Ac\cos\alpha = \delta \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Do ostatniego równania jednak dodając poprawki db, dc będzie

$$A^2+c^2-b^2-2cdc-2bdb-2Ac\cos\alpha-2A\cos\beta\,dc=0 \quad 3)$$

Odciągając od równania 3) równanie 2) pozostaje równanie błędów:

$$2(c-A\cos\alpha)\,dc-2bdb+\delta=0 \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Dodajmy do równania 4) przez $-k$ pomnożonego równanie warunkowe, aby:

$$db^2+dc^2=S=\text{Minimum}$$

i różniczkując takowe co do każdej zmiennej, będzie:

$$\frac{dS}{d\,db}=db+kb$$

$$\frac{dS}{d\,dc}=dc-kc+kA\cos\alpha$$

Dwa ostatnie wyrazy zrównane zeru dają poprawki

$$db=-kb$$
$$dc=+k(c-A\cos\alpha)$$

które wstawione w równanie błędów dają równanie korelatowe:

$$k(c^2-2Ac\cos\alpha+A^2\cos^2\alpha+b^2)+\frac{\delta}{2}=0$$

Jeżeli zatem mamy

$$A=419.04$$
$$b=\ \ 87.20$$
$$c=354.20$$
$$\alpha=8^0\,43'\,20''$$

nateneczas $k=-0.00148$

zaś poprawki

$db=+\ 0.129$	$dc=+\ 0.089$
$[b]=\ \ 87.329$	$[c]=\ \ 354.289$

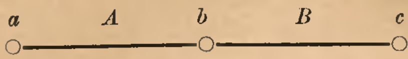
Dla kontroli:

$$\operatorname{tang}{}^1/_2\,\alpha=\sqrt{\frac{(S-c)(S-A)}{S(S-b)}}$$

$\log\operatorname{tang}{}^1/_2\,\alpha=8.8823015 \qquad \alpha=8^0\,43'\,18''$

który rezultat zgadza się wystarczająco.

Przykład 9.



Prostą *ac* mierzono w ten sposób, że od każdego z trzech punktów mierzono ku dwom innym. Mamy tutaj sześć obserwacyi, które powinny dać:

$$0_1 = A, \quad 0_2 = A + B, \quad 0_3 = A,$$
$$0_4 = B, \quad 0_5 = B, \quad 0_6 = A + B.$$

W istocie jednak mamy

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= -0_1 + A \\
\delta_2 &= -0_2 + A + B \\
\delta_3 &= -0_3 + A \\
\delta_4 &= -0_4 + B \\
\delta_5 &= -0_5 + B \\
\delta_6 &= -0_6 + A + B
\end{aligned}$$

Równania te, podniesione do kwadratu, dają:

$$\begin{aligned}
\delta_1^2 &= 0_1^2 - 2\,0_1 A + A^2 \\
\delta_2^2 &= 0_2^2 - 2\,0_2 A - 2 0_2 B + 2AB + A^2 + B^2 \\
\delta_3^2 &= 0_3^2 - 2\,0_3 A + A^2 \\
\delta_4^2 &= 0_4^2 - 2\,0_4 B + B^2 \\
\delta_5^2 &= 0_5^2 - 2\,0_5 B + B^2 \\
\delta_6^2 &= 0_6^2 - 2\,0_6 A - 2 0_6 B + 2AB + A^2 + B^2 \\
\hline
[\delta\delta] &= -2AM_1 + 4A^2 + 4B^2 - 2BM_2 + 4AB
\end{aligned}$$

w czem

$$M_1 = 0_1 + 0_2 + 0_3 + 0_6$$
$$M_2 = 0_2 + 0_4 + 0_5 + 0_6$$

Różniczkując teraz sumę $[\delta\delta]$ będzie

$$\frac{d[\delta\delta]}{dA} = -2M_1 + 8A + 4B$$

$$\frac{d[\delta\delta]}{dB} = -2M_2 + 8B + 4A$$

skąd oblicza się wartości dla A i B.

Obserwacye nasze są:

$$
\begin{aligned}
M_1 = \quad 0_1 &= 9.378976 \\
+0_2 &= 18.125097 \\
+0_3 &= 9.379902 \\
+0_6 &= 18.125676 \\
\hline
&\ 55.009651 \\
M_2 = \quad 0_2 &= 18.125097 \\
+0_4 &= 8.746738 \\
+0_5 &= 8.746164 \\
+0_6 &= 18.125676 \\
\hline
&\ 53.743675
\end{aligned}
$$

Podstawmy te wartości dla M_1, M_2 w ilorazy różniczkowe, zrównane zeru, tedy ostatecznie:

$$4A + 2B = 55.009651$$
$$2A + 4B = 53.743675$$

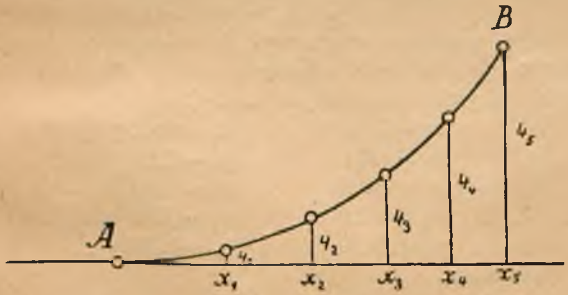
skąd szukane wartości:

$$A = 9.379271; \qquad B = 8.746283$$

Przykład ten wzięty jest z Gerling'a, przerobiony jednak nieco odmiennie.

Przykład 10.

Wyrównanie łuku. Zniszczony i opuszczony tor kolejowy stanowi od początku łuku A aż do punktu B granicę między gminami M i N. Zrobiono wprawdzie



zdjęcie kilku punktów zapomocą rzędnych xy; jednakowoż uzyskane obserwacye y nie odpowiadają równaniu dla łuku kołowego. A ponieważ z aktów kolejowych wiadomo, że łuk ten istotnie był łukiem kołowym, przeto skoro dane są styczne i początek łuku, przeto potrzeba tylko obliczyć najprawdopodobniejszą wartość dla promienia R.

Równanie dla koła mamy

$$R-\sqrt{R^2-x^2}-Y=0,$$

lub także

$$x^2-2RY+Y^2=0$$

a przechodząc do uzyskanych obserwacyi otrzymujemy wprost równania błędów:

$$\delta_1=x_1{}^2-2Ry_1+y_1{}^2$$
$$\delta_2=x_2{}^2-2Ry_2+y_2{}^2$$
$$\delta_3=x_3{}^2-2Ry_3+y_3{}^2$$
$$\delta_4=x_4{}^2-2Ry_4+y_4{}^2$$
$$\delta_5=x_5{}^2-2Ry_5+y_5{}^2$$

Te wartości dla δ podniesione do kwadratu i zsumowane, a suma $[\delta\delta]$ różniczkowana co do zmiennej R daje

$$\frac{d[\delta\delta]}{dR}=-4y_1x_1{}^2+4Ry_1{}^2-4y_1{}^3$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$-4y_5x_5{}^2+4Ry_5{}^2-4y_5{}^3$$

a wkońcu, aby $[\delta\delta]$ było najmniejszą możebną

$$2R(y^2]-[y^3]-[yx^2]=0$$

z którego równania najpierw R, a następnie żądane poprawki dy dla y się obliczy.

W przykładzie naszym mamy:

$x_1=10.0$	$y_1=0.05$
$x_2=20.0$	$y_2=0.21$
$x_3=30.0$	$y_3=0.44$
$x_4=40.0$	$y_4=0.83$
$x_5=50.0$	$y_5=1.23$

Następnie:

$y_1{}^2=0.0025$	$y_1{}^3=0.000125$	$y_1x_1{}^2=$ 5.0
$y_2{}^2=0.0441$	$y_2{}^3=0.009261$	$y_2x_2{}^2=$ 84.0
$y_3{}^2=0.1936$	$y_3{}^3=0.085184$	$y_3x_3{}^2=$ 396.0
$y_4{}^2=0.6889$	$y_4{}^3=0.571787$	$y_4x_4{}^2=1328.0$
$y_5{}^2=1.5129$	$y_5{}^3=1.860867$	$y_5x_5{}^2=3075.0$

Za pomocą tych wartości otrzymujemy żądane równanie dla R:

$$R = \frac{4890.527224}{4.884}$$

zkąd $R = 1001.3$
zaś wyrównane wartości dla y:

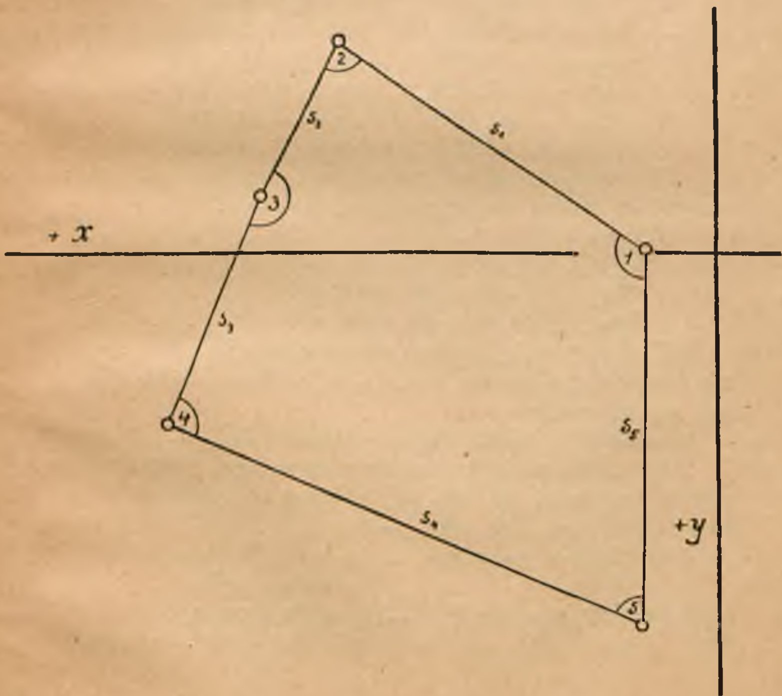
$$y_1 = 0.05 \qquad y_2 = 0.20 \qquad y_3 = 0.45$$
$$y_4 = 0.81 \qquad y_5 = 1.25$$

za pomocą których łuk wytyczyć się daje.

Na zakończenie podajemy jeszcze wyrównanie wieloboku według metody łukowej, zastosowanej przy zdjęciu obszaru pod szkołę kadetów we Lwowie w r. 1898.

Otrzymano przy zdjęciu:

$$\beta_1 = 124^0\ 39'\ 23.7''$$
$$\beta_2 = \ 80^0\ 37'\ 38.1''$$



$$\beta_3 = 178^0\ 40'\ 40.0''$$
$$\beta_4 = 87^0\ 33'\ 29.5''$$
$$\beta_5 = 68^0\ 27'\ 24.7''$$
$$s_1 = 243.22$$
$$s_2 = 118.96$$
$$s_3 = 166.21$$
$$s_4 = 342.37$$
$$s_5 = 246.81$$

Przyjmując pierwszy azymut α_1 dla s_1 na $124^0\ 39'\ 23.7''$ będą następne

$$\alpha_2 = 25^0\ 17'\ 1.8''$$
$$\alpha_3 = 23^0\ 57'\ 41.8''$$
$$\alpha_4 = 291^0\ 31'\ 11\ 3''$$
$$\alpha_5 = 179^0\ 58'\ 46.3''$$

zaś różnice w współrzędnych na obu osiach

$dx = s \sin \alpha$;	$dy = s \cos \alpha$
$dx_1 = +200.066$	$dy_1 = -138.308$
$dx_2 = +\ 50.808$	$dy_2 = +107.564$
$dx_3 = +\ 67.505$	$dy_3 = +151.893$
$dx_4 = -318.503$	$dy_4 = +125.589$
$dx_5 = +\ 0.087$	$dy_5 = -246.810$

W zadaniu naszem mamy trzy nadliczbowe obserwacye, są zatem potrzebne trzy równania.

Winno być

$$arc\,(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5) - arc\,540^0 = 0\ .\ \ .\ 1)$$
$$dx_1 + dx_2 + dx_3 + dx_4 + dx_5 = 0\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ 2)$$
$$dy_1 + dy_2 + dy_3 + dy_4 + dy_5 = 0\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ 3)$$

Z obserwacyi β, s nie otrzymujemy jednak w tych równaniach po prawej stronie zero, lecz różnice w_1, w_2, w_3 mianowicie

$$w_1 = -0.00035729;\quad w_2 = -0.037;\quad w_3 = -0.072$$

Równania te będą jednak zadowolone, jeżeli dołączymy poprawki $d\beta$, ds, $d\alpha$, poczem otrzymamy

$$arc\,(\beta_1 + d\beta_1 + \dots \beta_5 + d\beta_5) = 0\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ 4)$$
$$(s_1 + ds_1)[\sin(\alpha_1 + d\alpha_1)] + \dots (s_5 + ds_5)[\sin(\alpha_5 + d\alpha_5)] = 0\ .\ \ .\ \ .\ 5)$$
$$(s_1 + ds_1)[\cos(\alpha_1 + d\alpha_1)] + \dots (s_5 + ds_5)[\cos(\alpha_5 + d\alpha_5)] = 0\ .\ \ .\ \ .\ 6)$$

Rozwińmy te równania i zważmy, że można napisać

$$\sin d\alpha = d\alpha\,; \quad \cos d\alpha = 1.0$$

i odciągnijmy od nich równania 1), 2), 3) tedy otrzymamy równania błędów:

$$d\beta_1 + d\beta_2 + d\beta_3 + d\beta_4 + d\beta_5 - 0.00035729 = 0 \quad . \quad 7)$$

$$dy_1 d\alpha_1 + dy_2 d\alpha_2 + dy_3 d\alpha_3 + dy_4 d\alpha_4 + dy_5 d\alpha_5 +$$
$$+ \sin \alpha_1 ds_1 + \sin \alpha_2 ds_2 + \sin \alpha_3 ds_3 + \sin \alpha_4 ds_4 +$$
$$+ \sin \alpha_5 ds_5 - 0.037 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8)$$

$$-dx_1 d\alpha_1 - dx_2 d\alpha_2 - dx_3 d\alpha_3 - dx_4 d\alpha_4 - dx_5 d\alpha_5 +$$
$$+ \cos \alpha_1 ds_1 + \cos \alpha_2 ds_2 + \cos \alpha_3 ds_3 + \cos \alpha_4 ds_4 +$$
$$+ \cos \alpha_5 ds_5 - 0.072 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 9)$$

Skoro jednak pod $d\beta$ rozumiemy poprawki dla kątów, tedy wiedząc, że

$$\alpha_1 = \beta_1$$
$$\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 + 180 \quad \text{i t. d.}$$

zatem także

$$d\alpha_1 = d\beta_1$$
$$d\alpha_2 = d\beta_1 + d\beta_2$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$d\alpha_n = d\beta_1 + \ldots d\beta_n$$

W ten sposób można w równaniach 8) i 9) wyrugować $d\alpha$, poczem otrzymamy:

$$\begin{aligned}
&(dy_1 + dy_2 + dy_3 + dy_4 + dy_5)\, d\beta_1 + \sin \alpha_1 ds_1 \\
+\; &(dy_2 + dy_3 + dy_4 + dy_5)\, d\beta_2 + \sin \alpha_2 ds_2 \\
+\; &(dy_3 + dy_4 + dy_5)\, d\beta_3 + \sin \alpha_3 ds_3 \\
+\; &(dy_4 + dy_5)\, d\beta_4 + \sin \alpha_4 ds_4 \\
+\; &dy_5 d\beta_5 + \sin \alpha_5 ds_5 \\
&-0.037 = 0 \quad . \quad 8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-(dx_1 + dx_2 + dx_3 + dx_4 + dx_5)\, d\beta_1 + \cos \alpha_1 ds_1 \\
-\; &(dx_2 + dx_3 + dx_4 + dx_5)\, d\beta_2 + \cos \alpha_2 ds_2 \\
-\; &(dx_3 + dx_4 + dx_5)\, d\beta_3 + \cos \alpha_3 ds_3 \\
-\; &(dx_4 + dx_5)\, d\beta_4 + \cos \alpha_4 ds_4 \\
-\; &dx_5 d\beta_5 + \cos \alpha_5 ds_5 \\
&-0.072 = 0 \quad . \quad 9)
\end{aligned}$$

Do zupełnego sformułowania równań błędów potrzebujemy jeszcze obliczyć wartości dla $\sin \alpha$, $\cos \alpha$:

$$\sin\alpha_1 = +0.824 \qquad \cos\alpha_1 = -0.568$$
$$\sin\alpha_2 = +0.427 \qquad \cos\alpha_2 = +0.904$$
$$\sin\alpha_3 = +0.406 \qquad \cos\alpha_3 = +0.913$$
$$\sin\alpha_4 = -0.930 \qquad \cos\alpha_4 = +0.366$$
$$\sin\alpha_5 = -0.0005 \qquad \cos\alpha_5 = +1.000$$

poczem otrzymujemy ostateczne równania błędów:

$$+d\beta_1 + d\beta_2 + d\beta_3 + d\beta_4 + d\beta_5 - 0.00035729 = 0 \quad . \quad \mathrm{I}$$

$$\begin{aligned} &-0.072\, d\beta_1 + 138.236\, d\beta_2 + 30.672\, d\beta_3 - \\ &-121.221\, d\beta_4 - 246.810\, d\beta_5 + 0.824\, ds_1 + \\ &+0.427\, ds_2 + 0.406\, ds_3 - 0.930\, ds_4 + \\ &+0.0005\, ds_5 - 0.037 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{II} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+0.037\, d\beta_1 + 200.103\, d\beta_2 + 250.911\, d\beta_3 + \\ &+318.416\, d\beta_4 - 0.087\, d\beta_5 - 0.568\, ds_1 + \\ &+0.904\, ds_2 + 0.916\, ds_3 + 0.366\, ds_4 - \\ &-1.00\, ds_5 - 0.072 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{III} \end{aligned}$$

Potrzebne do równań korelatowych ilorazy różniczkowe jakoteż sumy tychże daje następująca tabela:

l	a	b	c	aa	ab	ac	bb	bc	cc
$d\beta_1$	+ 1.0	− 0.072	+ 0.037	+ 1.0	− 0.072	+ 0.037	+ 0.005	− 0.003	+ 0.001
$d\beta_2$	+ 1.0	+ 138.236	+ 200.103	+ 1.0	+ 138.236	+ 200.103	+ 19109.192	+ 27661.438	+ 40041.211
$d\beta_3$	+ 1.0	+ 30.672	+ 250.911	+ 1.0	+ 30.672	+ 250.911	+ 940.771	+ 7695.942	+ 62956.330
$d\beta_4$	+ 1.0	− 121.221	+ 318.416	+ 1.0	− 121.221	+ 318.416	+ 14694.531	− 38598.706	+ 101388.749
$d\beta_5$	+ 1.0	− 246.810	− 0.087	+ 1.0	− 246.810	− 0.087	+ 60905.176	+ 21.472	+ 0.007
ds_1		+ 0.824	− 0.568				+ 0.679	− 0.468	+ 0.322
ds_2		+ 0.427	+ 0.904				+ 0.182	+ 0.386	+ 0.817
ds_3		+ 0.406	+ 0.913				+ 0.164	+ 0.370	+ 0.833
ds_4		− 0.930	+ 0.366				+ 0.865	− 0.340	+ 0.134
ds_5		+ 0.0005	− 1.000				+ 0.000	− 0.000	+ 1.000
			S	+ 5.000	− 199.195	+ 769.380	+ 95651.565	− 3219.909	+ 204389.404

Za pomocą tej tabeli otrzymujemy równani normalne:

$$+5.0\,k_1 - 199.19\,k_2 + 769.38\,k_3 - 0.00035729 = 0$$
$$-199.19\,k_1 + 95651.56\,k_2 - 3219.91\,k_3 - 0.037 = 0$$
$$+769.38\,k_1 - 3219.91\,k_2 + 204389.40\,k_3 - 0.072 = 0$$

a z tych wartości dla k:

$$k_1 = +0.0000926172$$
$$k_2 = +0.0000005792$$
$$k_3 = +0.0000000123$$

z których zaraz widzimy, że poprawki dla $s_1 \ldots s_5$ wypadną tak małe, iż się nad nimi zastanawiać ni warto. Jedynie tylko kąty otrzymają poprawki

$$d\beta_1 = k_1 - 0.072\,k_2 + 0.037\,k_3 = +0.0000926 = +19.1''$$
$$d\beta_2 = k_1 + 138.236\,k_2 + 200.103\,k_3 = +0.0001751 = +36.1''$$
$$d\beta_3 = k_1 + 30.672\,k_2 + 250.911\,k_3 = +0.0001134 = +23{\cdot}3''$$
$$d\beta_4 = k_1 - 121.221\,k_2 + 318.416\,k_3 = +0.0000263 = +5.3''$$
$$d\beta_5 = k_1 - 246.810\,k_2 - 0.087\,k_3 = +0.0000503 = -10.3''$$

Ostateczne wartości dla β, α:

$[\beta_1] = 124^0\,39'\,42.8''$	$[\alpha_1] = 124^0\,39'\,42.8''$
$[\beta_2] = 80^0\,38'\,14.2''$	$[\alpha_2] = 25^0\,17\,\,57.0''$
$[\beta_3] = 178^0\,41'\,\,3.3''$	$[\alpha_3] = 23^0\,59'\,\,0.3''$
$[\beta_4] = 87^0\,33'\,34.9''$	$[\alpha_4] = 291^0\,32'\,35.2''$
$[\beta_5] = 68^0\,27'\,24.7''$	$[\alpha_5] = 359^0\,59'\,59.9''$
$S = 539^0\,59'\,59.9''$	

Ostateczne różnice współrzędnych:

$dx_1 = +200.054$	$dy_1 = -138.327$
$dx_2 = +\ 50.836$	$dy_2 = +107.540$
$dx_3 = +\ 67.563$	$dy_3 = +151.868$
$dx_4 = -318.451$	$dy_4 = +125.728$
$dx_5 = \ 0.000$	$dy_5 = -246.810$
$S_x = +\ 0.002$	$S_y = -\ 0.001$
ma być $=\ 0.000$	ma być $=\ 0.000.$