

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

UNTER MITWIRKUNG VON E. BECKER · H. BECKERT · L. BERG · L. BITTNER · L. COLLATZ
W. FISZDON · H. GÖRTLER · J. HEINHOLD · K. MARGUERRE · P. H. MÜLLER · H. NEUBER
W. OLSZAK · K. OSWATITSCH · A. SAWCZUK · L. SCHMETTERER · K. SCHRÖDER
H. SCHUBERT · H. UNGER · C. WEBER UND F. WEIDENHAMMER
HERAUSGEGEBEN VON H. HEINRICH, DRESDEN

BAND 51

1971

SONDERHEFT

INHALT:

Vorträge der Wissenschaftlichen Jahrestagung
der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und
Mechanik vom 6. bis 9. April 1970 in Delft, Holland



A K A D E M I E · V E R L A G G M B H · B E R L I N

HAUPTVORTRÄGE

Dynamische Probleme der mikropolaren Elastizitätstheorie*)

Von W. NOWACKI



1. Einführung

Die klassische Elastizitätstheorie bietet uns eine gute Beschreibung des Verhaltens von Werkstoffen (verschiedener Stahlsorten, Aluminium, Beton) bei Spannungen, die die Elastizitätsgrenze nicht überschreiten, aber auch überall dort, wo wir es mit keinen Spannungskonzentrationen zu tun haben.

Eine Diskrepanz zwischen den Ergebnissen der Elastizitätstheorie zum einen und der Versuche zum anderen tritt immer dort auf, wo die Mikrostruktureigenschaften des Körpers zu Worte kommen, also in der Nähe von Anschnitten und Kerben, wo wir mit beträchtlichen Spannungsgradienten zu rechnen haben. Diese Diskrepanzen treten auch in granulierten Körpern, solchen wie Polymeren usw., auf.

Der Einfluß der Mikrostruktur des Körpers offenbart sich nachdrücklich im Fall elastischer Schwingungen von großen Frequenzen und kleinen Wellenlängen.

Diese Mängel der klassischen Elastizitätstheorie versuchte W. VOIGT [1] zu beheben, indem er voraussetzte, daß die Transmission zweier Körperteile aufeinander durch das Flächenelement dA nicht nur mittels des Kraftvektors $\mathbf{p} dA$, sondern auch des Momentenvektors $\mathbf{m} dA$ erfolgt.

Auf diese Weise wurden neben den Kräftespannungen σ_{ji} auch die Momentenspannungen μ_{ji} definiert.

Eine durchaus konsequente Theorie der unsymmetrischen Elastizität wurde bereits von den Gebrüdern FRANÇOIS und EUGÈNE COSSERAT erarbeitet und in ihrem Werk „Théorie des corps déformables“ [2] im Jahre 1909 veröffentlicht.

Sie setzten voraus, daß sich ein Körper aus dem Kontinuum der miteinander verbundenen Partikel in Form kleiner starrer Körper zusammensetzt. Bei einer Deformation erfährt jedes Teilchen eine Verschiebung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, und eine Drehung $\varphi(\mathbf{x}, t)$, wo \mathbf{u} , φ Funktionen der Lage \mathbf{x} und der Zeit t sind.

Auf diese Weise wurde ein elastisches Kontinuum beschrieben, dessen Punkte eine Orientierung erhielten (polares Kontinuum), so daß von einer Drehung des Punktes gesprochen werden kann. Die Vektoren \mathbf{u} und φ sind voneinander unabhängig und beschreiben vollkommen die Deformation des Körpers. Die Einführung der Vektoren \mathbf{u} und φ sowie die Voraussetzung, daß die Kräfteübertragung durch das Flächenelement dA mittels des Kraftvektors $\mathbf{p} dA$ und des Momentenvektors $\mathbf{m} dA$ erfolgt, führen konsequent zu den unsymmetrischen Spannungstensoren σ_{ji} und μ_{ji} .

Die Theorie der Gebrüder COSSERAT blieb jedoch bei ihren Lebzeiten unbeachtet und unausgewertet. Die Ursache dieses Sachverhalts lag in der Darstellung dieser Theorie (als einer nichtlinearen Theorie, die große Deformationen berücksichtigt), aber auch der Umstand kann hier angeführt werden, daß ihr Werk den Rahmen der Elastizitätstheorie überragte. Die COSSERATSche Theorie bildete den Versuch zur Schaffung einer einheitlichen Feldtheorie, die die Mechanik, Optik und Elektrodynamik umfaßte und mit dem allgemeinen Grundsatz der geringsten Wirkung (action euclidienne) im Zusammenhang stand.

Die in den letzten 15 Jahren auf dem Gebiet der allgemeinen elastischen und unelastischen Medien geführten Untersuchungen haben die Aufmerksamkeit der Forscher auf das Werk der COSSERATS gelenkt. Bei der Suche nach neuen Modellen, die das Verhalten reeller elastischer Körper besser beschreiben, stieß man auf Modelle, die dem Modell des mikropolaren Mediums angenähert oder mit ihm identisch sind (C. TRUESDELL, R. A. TOUPIN [3], [4]).

Das Interesse der Forscher galt anfangs der vereinfachten COSSERAT-Theorie, einer Theorie des sogenannten COSSERATSchen Pseudo-Kontinuums. Eine Reihe von Forschern (G. GRIOLI [5], W. T. KOITER [6], R. D. MINDLIN und H. F. TIERSTEN [7]) haben eine neue Herleitung dieser Theorie dargestellt, die derzeit unter dem Namen „Theorie of couple-stresses with constrained rotations“ bekannt ist. In dieser Theorie ist die Drehung kein unabhängiger Vektor, was folgerichtig eine Bezeichnung des unsymmetrischen Teiles der Spannung σ_{ji} und des unsymmetrischen Teiles der Momentenspannung μ_{ji} unmöglich macht. Andere Forscher haben direkt an die allgemeine COSSERAT-Theorie angeknüpft (W. GÜNTHER [8], H. SCHAEFER [9], H. NEUBER [10], E. KUVSHINSKII und A. L. AERO [11], N. A. PALMOW [12], N. SANDRU [13]).

Bemerkenswert sind die Versuche zur Schaffung einer allgemeineren Theorie des Kontinuums, als sich dies aus der COSSERATSchen Theorie ergibt, indem diese Versuche die inneren Bewegungen der im Makrovolumen ΔV enthaltenen Mikroelemente zu berücksichtigen hätten (C. A. ERINGEN und E. SUHUBI [14], J. A. KUNIN [15]).

*) Auf der GAMM-Tagung, April 1970, in Delft (Holland) auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag.

Zur Zeit ist die lineare Theorie des mikropolaren COSSERAT-Mediums ein gut entwickelter Zweig der Mechanik über deformierbare Körper. Es wurden aus ihr grundlegende Beziehungen und Differentialgleichungen hergeleitet und eine Reihe spezifischer Probleme, vorwiegend im Rahmen der Elastostatik, gelöst. Den Gegenstand dieses Vortrags bilden dynamische Probleme der linearen Elastokinetik. Es werden die wichtigsten Ergebnisse dargestellt, die bis jetzt auf diesem Gebiet erzielt wurden, hauptsächlich in bezug auf die Fortpflanzung elastischer Wellen in einem unendlichen mikropolaren Medium.

2. Formulierung des elastokinetischen Problems

Betrachten wir einen Raumbereich $V + A$ mit dem Rand A . Der Bereich umfaßt ein homogenes elastisches mikropolares Medium, charakterisiert durch die Dichte ρ und Drehträgheit I . Das Medium sei isotrop und zentralsymmetrisch. Unter der Außenbelastung erfährt der Körper eine Deformation, die durch ein Verschiebungsfeld $u(x, t)$ und ein Drehfeld $\varphi(x, t)$ gekennzeichnet ist.

Im Körper entstehen die Kräftespannungen $\sigma_{ji}(x, t)$ und Momentenspannungen $\mu_{ji}(x, t)$, die durch das Elastizitätsgesetz mit den Komponenten des Deformationstensors $\gamma_{ji}(x, t)$ und des Krümmungstensors $\kappa_{ji}(x, t)$ verbunden sind.

Die elastokinetische Aufgabe für den isotropen homogenen und zentralsymmetrischen Körper besteht in der Ermittlung der Funktionen $\sigma_{ji}(x, t)$, $\mu_{ji}(x, t)$ und $\gamma_{ji}(x, t)$, $\kappa_{ji}(x, t)$ der Klasse $C^{(1)}$ und der Funktionen $u(x, t)$, $\varphi(x, t)$ der Klasse $C^{(2)}$ für $x \in V + A$.

Die obigen Funktionen haben folgende Gleichungen zu erfüllen:

a) die Bewegungsgleichungen

$$\sigma_{ji,j} = \rho \ddot{u}_i - X_i(x, t), \quad (1)$$

$$E_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} = I \ddot{\varphi}_i - Y_i(x, t), \quad x \in V, \quad t > 0, \quad (2)$$

b) die linearen Beziehungen zwischen dem Spannungs- und Deformationszustand

$$\sigma_{ji} = (\mu + \alpha) \gamma_{ji} + (\mu - \alpha) \gamma_{ij} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{ji}, \quad (3)$$

$$\mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon) \kappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ij} + \beta \kappa_{kk} \delta_{ji}, \quad (4)$$

wo die Größen γ_{ji} , κ_{ji} als

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - E_{kji} \varphi_k, \quad \kappa_{ji} = \varphi_{i,j} \quad (5), (6)$$

definiert sind,

c) die Randbedingungen

$$\sigma_{ji} n_j = p_i(x, t), \quad \mu_{ji} n_j = m_i(x, t), \quad x \in A_\sigma, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$u_i = f_i(x, t), \quad \varphi_i = g_i(x, t), \quad x \in A_u, \quad t > 0, \quad A = A_\sigma + A_u, \quad (8)$$

d) die Anfangsbedingungen

$$u_i(x, 0) = k_i(x), \quad \dot{u}_i(x, 0) = h_i(x), \quad (9)$$

$$\varphi_i(x, 0) = l_i(x), \quad \dot{\varphi}_i(x, 0) = s_i(x), \quad x \in V, \quad t = 0. \quad (10)$$

Hier bedeuten μ, λ die Konstanten von LAMÉ, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ die weiteren Elastizitätskonstanten. Alle Elastizitätskonstanten beziehen sich hier auf den adiabatischen Prozeß.

Die Funktionen $X_i(x, t)$ bedeuten die Komponenten der Massenkkräfte, $Y_i(x, t)$ sind die Komponenten des Massenmomentenvektors. Die Größen p_i und m_i sind die auf A_σ gegebenen Funktionen, wobei p_i die Komponente des Belastungsvektors, m_i — des Momentenvektors ist. Mit f_i werden die auf A_u gegebenen Komponenten des Verschiebungsvektors, mit g_i des Drehungsvektors bezeichnet. Die Größen k_i, h_i, l_i, s_i sind die im Anfangszeitpunkt $t = 0$ gegebenen Funktionen. E_{ijk} ist der bekannte alternierende Tensor von LEVI-CIVITA. Alle Größen sind auf das cartesische Koordinatensystem bezogen.

Die Beziehungen zwischen den Komponenten des Spannungs- und Verzerrungszustandes werden aus den Formeln

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{ji}}, \quad \mu_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \kappa_{ji}} \quad (11)$$

gewonnen, wo U die innere Energie bedeutet, die als

$$U = \frac{\mu + \alpha}{2} \gamma_{ji} \gamma_{ji} + \frac{\mu - \alpha}{2} \gamma_{ji} \gamma_{ij} + \frac{\lambda}{2} \gamma_{kk} \gamma_{nn} + \frac{\gamma + \varepsilon}{2} \kappa_{ji} \kappa_{ji} + \frac{\gamma - \varepsilon}{2} \kappa_{ji} \kappa_{ij} + \frac{\beta}{2} \kappa_{kk} \kappa_{nn} \quad (12)$$

ausgedrückt werden kann.

Die Elastizitätskonstanten sollen folgenden Ungleichungen genügen:

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad 3\beta + 2\gamma > 0, \quad \gamma + \varepsilon > 0, \quad \mu > 0, \quad \alpha > 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (13)$$

Die grundlegenden elastokinetischen Differentialgleichungen für Verschiebungen und Verdrehungen können wir aus den Bewegungsgleichungen durch Eliminierung der Spannungen σ_{ji} , μ_{ji} erhalten, wobei das Elastizitätsgesetz (3), (4) berücksichtigt werden muß.

Werden die Verzerrungen γ_{ji} , \varkappa_{ji} mit Hilfe der Verschiebungen u_i und Verdrehungen φ_i laut Definitionen (5), (6) ausgedrückt, so erhalten wir ein System von sechs Differentialgleichungen. Sie können zusammengefaßt als Vektorgleichungen geschrieben werden

$$\square_2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu - \alpha) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{X} = 0, \quad (14)$$

$$\square_4 \boldsymbol{\varphi} + (\beta + \gamma - \varepsilon) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} + 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{Y} = 0. \quad (15)$$

Hier sind die Differentialoperatoren

$$\square_2 = (\mu + \alpha) \nabla^2 - \varrho \partial_t^2, \quad \square_4 = (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 - 4\alpha - I \partial_t^2,$$

eingeführt.

Die Gleichungen (14) und (15) stellen ein System von gekoppelten hyperbolischen Differentialgleichungen dar.

Wird in den Gleichungen (14) und (15) $\alpha = 0$ angenommen, so ergeben sich zwei voneinander unabhängige Gleichungssysteme

$$\square_2^0 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{X} = 0, \quad (16)$$

$$\square_4^0 \boldsymbol{\varphi} + (\beta + \gamma - \varepsilon) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{Y} = 0, \quad (17)$$

mit

$$\square_2^0 = \mu \nabla^2 - \varrho \partial_t^2, \quad \square_4^0 = (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 - I \partial_t^2.$$

Die zusätzlichen Bedingungen $\beta = \gamma = \varepsilon = 0$ führen zum Fall der klassischen Elastokinetik, in dem ein symmetrischer Spannungstensor auftritt. In diesem Fall erkennen wir in (16) die Verschiebungsgleichung der klassischen Elastizitätstheorie. Bei $\mu = \lambda = \alpha = 0$ bezieht sich (17) auf ein hypothetisches elastisches Medium, in dem nur die Verdrehungen der materiellen Elemente zulässig sind.

In den Gleichungen (14) und (15) sind die Eigenschaften beider obiger Medien gekoppelt, jede materielle Partikel erfährt eine Verschiebung u_i und Verdrehung φ_i , wobei diese Größen voneinander unabhängige Funktionen sind.

Wenden wir auf (14) und (15) die Divergenz-Operation an, erhalten wir zwei Wellengleichungen

$$\square_1 \gamma_{kk} + \operatorname{div} \mathbf{X} = 0, \quad (18)$$

$$\square_3 \varkappa_{kk} + \operatorname{div} \mathbf{Y} = 0. \quad (19)$$

Hierbei ist

$$\gamma_{kk} = \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \varkappa_{kk} = \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi},$$

$$\square_1 = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 - \varrho \partial_t^2, \quad \square_3 = (\beta + 2\gamma) \nabla^2 - 4\alpha - I \partial_t^2.$$

Gleichung (18) beschreibt die Fortpflanzung der Dilatationswelle, sie ist in ihrer Form mit der Wellengleichung für die Dilatation in der klassischen Elastizitätstheorie identisch. Diese Welle pflanzt sich mit konstanter Geschwindigkeit $c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\varrho]^{1/2}$ fort.

Der Gleichung (19) entspricht keine Gleichung der klassischen Elastizitätstheorie. In der Theorie des mikropolaren Mediums beschreibt sie die Fortpflanzung der Größe $\varkappa_{kk} = \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}$. Wir werden sie die Gleichung der Mikrorotationswelle nennen. Eine Gleichung vom Typ der Gl. (19) tritt in der Quanten-Elektrodynamik auf, wo sie als KLEIN-GORDONSche Gleichung bezeichnet wird. Gleichung (19) stellt eine ungedämpfte Welle dar, die aber der Dispersion unterliegt. Die Phasengeschwindigkeit der monochromatischen Welle hängt hier von der Schwingungsfrequenz ω ab.

Wenden wir auf die Gleichungen (14) und (15) die Rotation an, erhalten wir ein gekoppeltes Gleichungssystem

$$\square_2 \boldsymbol{\Omega} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{X}, \quad (20)$$

$$\square_4 \boldsymbol{\Pi} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{Y}, \quad (21)$$

mit

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}.$$

Durch Elimination erhalten wir die folgende Gleichungen

$$(\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\Omega} = \alpha \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Y} - \frac{1}{2} \square_4 \operatorname{rot} \mathbf{X}, \quad (22)$$

$$(\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\Pi} = \alpha \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{X} - \frac{1}{2} \square_2 \operatorname{rot} \mathbf{Y}. \quad (23)$$

Wird in Gleichung (20) $\alpha = 0$ angenommen, so erhalten wir

$$\square_2 \Omega = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} X, \quad (24)$$

$$\square_1 H = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} Y. \quad (25)$$

Gleichung (24) stellt unter Berücksichtigung der zusätzlichen Bedingungen $\beta = \gamma = \varepsilon = 0$ die aus der klassischen Elastokinetik bekannte Wellengleichung dar, die die Fortpflanzung der Größe $\frac{1}{2} \operatorname{rot} u$ beschreibt.

Kommen wir nun auf das System der Differentialgleichungen (14) und (15) zurück. Um dieses Differentialgleichungssystem auf ein System einfacher Wellengleichungen zu bringen, schlagen wir den Weg ein, der uns in der klassischen Elastizitätstheorie von LAMÉ gewiesen wurde (N. A. PALMOV [12]).

Das Verfahren beruht auf einer Spaltung des Vektors u und φ in einen potentiellen und solenoidalen Teil. Wenn wir also annehmen, daß

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \Psi, & \operatorname{div} \Psi &= 0, \\ \varphi &= \operatorname{grad} \Gamma + \operatorname{rot} H, & \operatorname{div} H &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

und in gleicher Weise mit den Massenkräften und Massenmomenten verfahren

$$\begin{aligned} X &= \varrho (\operatorname{grad} \vartheta + \operatorname{rot} \chi), & \operatorname{div} \chi &= 0, \\ Y &= I (\operatorname{grad} \sigma + \operatorname{rot} \eta), & \operatorname{div} \eta &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

sowie die Gleichungen (26) und (27) in das Gleichungssystem (14), (15) einsetzen, erhalten wir folgende Wellengleichungen

$$\square_1 \Phi + \varrho \vartheta = 0, \quad (28)$$

$$\square_3 \Gamma + I \sigma = 0, \quad (29)$$

$$\square_2 \Psi + 2\alpha \operatorname{rot} H + \varrho \chi = 0, \quad (30)$$

$$\square_4 H + 2\alpha \operatorname{rot} \Psi + I \eta = 0. \quad (31)$$

Hierbei ist vor allem zu bemerken, daß die Wellengleichungen (28) und (29) für die skalaren Potentiale Φ, Γ nicht gekoppelt, die Gleichungen (30) und (31) für die Vektorpotentiale Ψ, H dagegen miteinander gekoppelt sind. Alle Wellen sind ungedämpft, aber die Wellen Γ, Ψ, H unterliegen einer Dispersion. Wird aus (30) und (31) einmal die Funktion H , ein anderes Mal die Funktion Ψ eliminiert, so erhalten wir die Gleichungen

$$(\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \Psi = 2\alpha I \operatorname{rot} \eta - \varrho \square_4 \chi, \quad (33)$$

$$(\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) H = 2\alpha \varrho \operatorname{rot} \chi - I \square_2 \eta. \quad (34)$$

Es gibt auch ein anderes Verfahren zur Entkopplung des Gleichungssystems (14), (15). Dieses Verfahren ist mit jenem analog, dessen sich B. G. GALERKIN [16] in der klassischen Elastostatik und M. IACOVACHE [17] in der klassischen Elastokinetik bedienen.

Eine Veranschaulichung dieses Verfahrenstyps für das lineare mikropolare Medium hat N. SANDRU [13] angegeben, wobei die Verschiebungs- und Drehungsvektoren u, φ durch zwei vektorielle Spannungsfunktionen F, G ausgedrückt wurden:

$$u = \square_1 \square_4 F - \operatorname{grad} \operatorname{div} A F - 2\alpha \operatorname{rot} \square_3 G, \quad (35)$$

$$\varphi = \square_2 \square_3 G - \operatorname{grad} \operatorname{div} \Theta G - 2\alpha \operatorname{rot} \square_1 F, \quad (36)$$

wo

$$A = (\lambda + \mu - \alpha) \square_4 - 4\alpha^2, \quad \Theta = (\beta + \gamma - \varepsilon) \square_2 - 4\alpha^2$$

ist.

Die Spannungsfunktionen haben folgende Differentialgleichungen sechster Ordnung zu erfüllen:

$$\square_1 (\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) F + X = 0, \quad (37)$$

$$\square_3 (\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) G + Y = 0. \quad (38)$$

Diese Gleichungen sind zur Ermittlung singulärer Lösungen im unendlichen elastischen Raum besonders geeignet. Fehlen die Massenkräfte ($X = 0$) ganz, so ist $F = 0$, fehlen aber die Massenmomente ($Y = 0$), so ergibt sich $G = 0$.

3. Fortpflanzungen der Wellen im unendlichen mikropolaren Kontinuum

Die Fortpflanzung der elastischen ebenen Wellen in einem mikropolaren Kontinuum (mit freien Drehungen) wurde von V. A. PALMOV [12], V. R. PARFITT und A. C. ERINGEN [18] untersucht, die Fortpflanzung der Mikro-rotationswellen ist von W. NOWACKI [19] untersucht worden.

Nachstehend führen wir einige Bemerkungen an über die Fortpflanzung dieser Wellen.

Betrachten wir die homogenen Wellengleichungen

$$\square_1 \Phi = 0, \quad \square_3 \Gamma = 0, \quad (1), (2)$$

$$\square_2 \Psi + 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \square_4 \mathbf{H} + 2\alpha \operatorname{rot} \Psi = 0. \quad (3), (4)$$

Unter der Voraussetzung, daß wir es mit einer ebenen Welle zu tun haben, die sich in Richtung des Einheitsvektors der Normalen \mathbf{n} fortpflanzt, setzen wir in die Wellengleichungen (1) bis (4) die Beziehungen

$$(\Phi, \Gamma, \Psi, \mathbf{H}) = (\Phi_0, \Gamma_0, \Psi_0, \mathbf{H}_0) \exp [i k (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - v t)], \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3), \quad (5)$$

ein. Die Funktionen Φ, Γ sind mit der Verschiebung \mathbf{u}' und Verdrehung φ' in folgender Weise verbunden

$$\mathbf{u}' = \operatorname{grad} \Phi = i k_1 \Phi_0 \mathbf{n} \exp [i k_1 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - v_1 t)], \quad (6)$$

$$\varphi' = \operatorname{grad} \Gamma = i k_3 \Gamma_0 \mathbf{n} \exp [i k_3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - v_3 t)]. \quad (7)$$

Hierbei wurden die Bezeichnungen eingeführt

$$k_r = \frac{\omega}{v_r}, \quad v = 1, 3, \quad v_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad v_3 = \left(\frac{2\gamma + \beta}{I} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{4\alpha}{I\omega^2} \right)^{-1/2}.$$

Der Verschiebungsvektor \mathbf{u}' und Drehungsvektor φ' zeigen in Richtung des Fortpflanzungsvektors \mathbf{n} . Wir haben es hier mit den Longitudinalwellen zu tun. Die Welle \mathbf{u}' wird longitudinale Verschiebungswelle, die Welle φ' longitudinale Mikrorotationswelle genannt.

Die erste pflanzt sich mit einer stetigen Geschwindigkeit v_1 fort, die andere dagegen mit der Geschwindigkeit v_3 , die von der Frequenz ω abhängt.

Die Welle φ' kann nur dann auftreten, wenn $\omega > \frac{4\alpha}{I}$ ist. Sie unterliegt der Dispersion, da v_3 von der

Frequenz ω abhängt. Die vektoriellen Funktionen Ψ, \mathbf{H} sind mit der Verschiebung \mathbf{u}'' und Verdrehung φ'' verbunden:

$$\mathbf{u}'' = \operatorname{rot} \Psi'' = \mathbf{n} \times \Psi_0 \exp [i k (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - v t)], \quad (8)$$

$$\varphi'' = \operatorname{rot} \mathbf{H}'' = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_0 \exp [i k (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - v t)]. \quad (9)$$

Wird (5) in die Gleichungen (3) und (4) eingesetzt, so erhalten wir

$$\Psi_0 = a \mathbf{n} \times \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{H}_0 = b \mathbf{n} \times \Psi_0, \quad (10)$$

wo a, b konstante Größen bedeuten.

Unter Beachtung, daß $\operatorname{div} \Psi = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ ist, ergibt sich

$$\mathbf{n} \cdot \Psi_0 = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_0 = 0. \quad (11)$$

Aus den Gleichungen (10) ist ersichtlich, daß sich die Vektoren $\mathbf{n}, \mathbf{H}_0, \Psi_0$ zueinander senkrecht verhalten. Aus (8) und (9) ersehen wir dagegen, daß die Vektoren \mathbf{u}'' und φ'' zu der Fortpflanzungsrichtung \mathbf{n} senkrecht sind. Die Welle \mathbf{u}'' , die mit dem Vektor Ψ gekoppelt ist, wird transversale Verschiebungswelle genannt, die mit dem Vektor φ'' verbundene Welle \mathbf{H} wird als transversale Mikrorotationswelle bezeichnet. Die beiden Wellen sind miteinander gekoppelt; eine kann ohne die andere nicht auftreten (Bild 1).

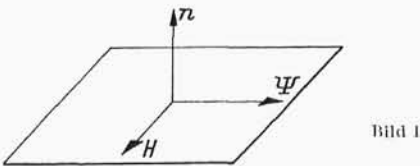


Bild 1

Eine Diskussion der Gleichungen (3) und (4) ergibt, daß jeder Wellenart zwei Geschwindigkeiten, v_2 und v_4 , entsprechen. Wenn $\omega < \frac{4\alpha}{I}$ ist, tritt nur eine Geschwindigkeit auf. Da sowohl v_2 als auch v_4 von ω abhängen, unterliegen beide Wellen der Dispersion.

Das Verhalten der Longitudinalwelle Φ , die die Wellengleichung (1) erfüllt, ist sehr wohl bekannt, da es seiner Form nach mit einem mikropolaren Medium und einem HOOKESchen Medium identisch ist.

Die Fortpflanzung der Welle ist somit durch das retardierte Potential, mit Hilfe der POISSONSchen Integrale, der Sätze von HELMHOLTZ, KIRCHHOFF, VOLTERRA und RIESS beschrieben.

Es sei noch hinzuzufügen, daß eine durch die Quelle $\vartheta(\mathbf{x}, t)$ erzeugte Longitudinalwelle zu einem symmetrischen Deformationstensor γ_{ji} und einem ebenfalls symmetrischen Spannungstensor σ_{ji} führt.

Wir haben hier

$$u_i = \Phi_{,i}, \quad \gamma_{ji} = \Phi_{,ij}, \quad \sigma_{ji} = 2\mu \Phi_{,ji} + \lambda \delta_{ji} \nabla^2 \Phi, \quad \mu_{ji} = 0. \quad (12)$$

Wir gehen nun zur Wellengleichung

$$\square_3 \Gamma + I \sigma = 0 \quad (13)$$

über und bemerken, daß wir es auch hier mit dem symmetrischen Tensor κ_{ij} und μ_{ij} zu tun haben.

Da

$$\varphi_i = \Gamma_{,i}, \quad \kappa_{ij} = \Gamma_{,ij}$$

ist, gilt

$$\mu_{ij} = 2\gamma \Gamma_{,ij} + \beta \delta_{ij} \nabla^2 \Gamma, \quad \sigma_{ji} = 0. \quad (14)$$

Wir führen nachstehend einige Lösungen an, die sich auf die Gleichung von KLEIN-GORDON beziehen [2]. Wir geben nur jene Ergebnisse für dreidimensionale Probleme an, die neu zu sein scheinen (W. NOWACKI [19]).

Betrachten wir zunächst die inhomogene Gleichung (13) unter der Voraussetzung homogener Anfangsbedingungen. Ihre Lösung lautet

$$\Gamma(\xi, t) = \frac{1}{4\pi c_3^2} \left\{ \int_V \frac{\sigma\left(x, t - \frac{R}{c_3}\right)}{R(x, \xi)} dV(x) + \int_V \frac{dV(x)}{R(x, \xi)} \int_0^t \sigma(x, t-\tau) G(x, \xi, \tau) d\tau \right\}, \quad R \leq c_3 t \quad (15)$$

wo

$$G(x, \xi, t) = -\frac{R}{c_3} \frac{J_1\left(\nu \sqrt{t^2 - \frac{R^2}{c_3^2}}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{R^2}{c_3^2}}} H\left(t - \frac{R}{c_3}\right), \quad c_3 = \left(\frac{\beta + 2\gamma}{I}\right)^{1/2}.$$

ist.

Hierbei sind $H(z)$ die HEAVISIDESche Funktion und R die Entfernung zwischen den Punkten x und ξ . Schließlich ist $J_1(z)$ die BESSELSche Funktion erster Art und erster Ordnung. Die Lösung (15) setzt sich aus zwei Teilen zusammen, wobei ein Teil das retardierte Potential gleicher Struktur ist, wie sie bei der klassischen Wellengleichung wäre; den zweiten Teil bildet ein Integral mit Faltungsteil.

Betrachten wir die homogene ($\sigma = 0$) Wellengleichung (13) unter Voraussetzung der Anfangsbedingungen

$$\Gamma(x, 0) = g(x), \quad \dot{\Gamma}(x, 0) = h(x). \quad (16)$$

Die Lösung hat in diesem Fall die Form

$$\Gamma(x, t) = t M_{ct}\{h(x, t)\} + \frac{\partial}{\partial t} [t M_{ct}\{h(x, t)\}] + \frac{1}{4\pi c_3^2} \int_V \left(h(\xi) + g(\xi) \frac{\partial}{\partial t} \right) G(\xi, x, t) dV(\xi). \quad (17)$$

Hierbei stellt

$$M_{ct}\{h(x, t)\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi h(x_i + n_i c_3 t) \sin \theta d\theta$$

einen arithmetischen Mittelwert der Funktion h auf der Oberfläche der Kugel mit dem Mittelpunkt x und dem Radius $c_3 t$ dar.

Die Größen n_i , die im letzten Integral auftreten, sind die Richtungskosinus des Kugelradius, die in sphärischen Koordinaten angegeben sind:

$$n_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad n_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad n_3 = \cos \theta, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Gleichung (17) ist eine Verallgemeinerung des Integralsatzes von POISSON, der aus der Theorie der klassischen Wellengleichung bekannt ist. Für $\nu = 0$ bleiben in (17) nur zwei erste Integrale, die Integrale von POISSON, erhalten.

Wir führen noch einen Satz an, der eine Erweiterung des bekannten Satzes von KIRCHHOFF auf die Gleichung der longitudinalen Mikrorotationswelle ist

$$\Gamma(\xi, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_A \left\{ [\Gamma] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{c_3} \frac{\partial R}{\partial t} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right] - \frac{1}{R} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right] \right\} dA(x) + \\ -\frac{1}{4\pi} \int_A dA(x) \int_0^t \left\{ \left[G(R, \tau) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial R} \right] \Gamma(x, t-\tau) - \frac{1}{R} G(R, \tau) \frac{\partial \Gamma(x, t-\tau)}{\partial n} \right\} d\tau, \quad \xi \in V, \\ \Gamma(\xi, t) = 0, \quad \text{für} \quad \xi \in C - V. \quad (18)$$

Diese Formel gibt den Wert der Funktion Γ im Punkt ξ des Bereiches V an. Der Wert ist mit Hilfe der Flächenintegrale ausgedrückt, in denen die Funktion Γ sowie ihre Ableitung nach der Normalen und nach der Zeit auf der Fläche A auftreten, die den Bereich V begrenzt. Bei Herleitung dieser Formel wird vorausgesetzt, daß die Funktion Γ samt ihren ersten und zweiten Ableitungen im Bereich V und auf der Fläche A stetig ist. Für $\alpha = 0$ geht (18) in den klassischen Satz von KIRCHHOFF über.

Für die monochromatischen Schwingungen erhalten wir eine Erweiterung des Satzes von HELMHOLTZ auf die Gleichung der longitudinalen Mikrorotationswelle

$$\Gamma^*(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_A \left[\frac{\partial \Gamma^*}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} - \Gamma^* \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] dA(x), \quad \xi \in V, \quad (19)$$

$$\Gamma^*(\xi) = 0 \quad \text{für} \quad \xi \in C - V.$$

Hierbei ist

$$\Gamma^*(\xi) e^{-i\omega t} = \Gamma(\xi, t), \quad k = \frac{\omega}{c_3} \left(1 - \frac{v^2}{\omega^2} \right)^{1/2}, \quad v^2 = \frac{4\alpha}{I}.$$

Gleichung (19) hat nur dann einen Sinn, wenn $\omega^2 > \frac{4\alpha}{I}$ ist, weil die Phasengeschwindigkeit nur in diesem Fall reell ist.

Die Gleichungen (3) und (4) für Transversalwellen sind bisher am wenigsten untersucht worden. Es wurden nur eindimensionale Wellengleichungen sowie das, was wir in einem weiteren Abschnitt unseres Vortrages noch erörtern werden, die Grundlösungen dieser Gleichungen, diskutiert.

4. Grundlösungen der elastokinetischen Gleichungen

Als Grundlösungen bezeichnen wir die singulären Lösungen von Differentialgleichungen, die von der Entfernung R der Punkte x und ξ im unendlichen elastischen Raum abhängig sind. Wir geben nun die allgemeinen Formeln zur Ermittlung von Verschiebungen und Verdrehungen im Punkt x des unendlichen Raumes an, die durch Massenkräfte und Massenmomente erzeugt werden (W. NOWACKI [20]). Die Formeln wurden durch die vierfache FOURIER-Integraltransformationen der Wellengleichungen gewonnen. Durch die Verbindung der elastischen Potentiale Φ , Γ , Ψ , Π mit den Verschiebungen u und Verdrehungen φ ergeben sich die Formeln

$$u_j(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{W_1} \left\{ \frac{\xi_j \xi_k \tilde{X}_k}{\varrho c_1^2 \xi^2 (\xi^2 - \tau_1^2)} - \frac{1}{A} \left[\frac{\xi^2 + v^2 - \tau_1^2}{c_2^2 \varrho \xi^2} (\xi_j \xi_k \tilde{X}_k - \xi^2 \tilde{Y}_j) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i s}{I c_4^2} E_{jkl} \tilde{Y}_l \right] \right\} \exp[-i(\xi_k x_k + \eta t)] dW, \quad (1)$$

$$\varphi_j(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{W_1} \left\{ \frac{\xi_j \xi_k \tilde{Y}_k}{I c_3^2 \xi^2 (\xi^2 + \tau^2 - \tau_3^2)} - \frac{1}{A} \left[\frac{\xi^2 - \tau_2^2}{I c_4^2 \xi^2} (\xi_j \xi_k \tilde{Y}_k - \xi^2 \tilde{Y}_j) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i p}{\varrho c_2^2} E_{jkl} \xi_k \tilde{X}_l \right] \right\} \exp[-i(\xi_k x_k + \eta t)] dW. \quad (2)$$

Hierbei ist $dW = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\eta$ und W_1 das Innere des Raumes $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta$. Es wurden Bezeichnungen eingeführt

$$\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \quad A = (\xi^2 - \lambda_1^2)(\xi^2 - \lambda_2^2), \quad s = \frac{2\alpha}{\mu + \alpha}, \quad p = \frac{2\alpha}{\gamma + \varepsilon}, \\ \tau_j = \eta/c_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad \lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} [\tau_2^2 + \tau_4^2 + \eta_0^2 - v_0^2 \pm \sqrt{(\tau_4^2 - \tau_2^2 + \eta_0^2 - v_0^2)^2 + 4ps\tau_2^2}], \\ \eta_0^2 = \frac{4\alpha^2}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}, \quad v_0^2 = \frac{4\alpha}{I c_4^2}, \quad c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} \right)^{1/2}, \quad c_2 = \left(\frac{\mu + \alpha}{\varrho} \right)^{1/2}, \\ c_3 = \left(\frac{\beta + 2\gamma}{I} \right)^{1/2}, \quad c_4 = \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{I} \right)^{1/2}.$$

Obwohl die obigen Formeln kompliziert sind und mehrmals über einen unendlichen Bereich integriert werden müssen, erhält man ohne größere Mühe Ausdrücke für Verschiebungen und Verdrehungen, die durch die sich in der Zeit harmonisch verändernden Einzelkräfte und Einzelmomente hervorgerufen werden (W. NOWACKI [21]).

Setzen wir voraus, daß die Einzelkraft $X_j = \delta(x - \xi) \delta_{jl} e^{-i\omega t}$ zu Punkt ξ angelegt und parallel in Richtung zur x_l -Achse wirksam ist. Dann werden die Verschiebungen $u_j = U_j^{(0)}(x, \xi, t)$ und Verdrehungen $\varphi_j = \Phi_j^{(1)}(x, \xi, t)$ durch folgende Formeln ausgedrückt:

$$U_j^{(0)}(x, \xi, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\varrho\omega^2} (F \delta_{jk} + \partial_j \partial_k K), \quad (3)$$

$$\Phi_j^{(1)}(x, \xi, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\varrho c_2^2 (k_1^2 - k_2^2)} E_{ljk} \partial_k \left(\frac{e^{ik_1 R} - e^{ik_2 R}}{R} \right), \quad j, l, k = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Hierbei ist

$$F = A_1 k_1^2 \frac{e^{i k_1 R}}{R} + A_2 k_2^2 \frac{e^{i k_2 R}}{R},$$

$$K = A_1 \frac{e^{i k_1 R}}{R} + A_2 \frac{e^{i k_2 R}}{R} + A_3 \frac{e^{i \sigma_1 R}}{R},$$

$$A_1 = \frac{\sigma_2^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2}, \quad A_2 = \frac{\sigma_2^2 - k_1^2}{k_2^2 - k_1^2}, \quad A_3 = -1,$$

sowie

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (\sigma_2^2 + \sigma_4^2 + \eta_0^2 - \nu_0^2 \pm \sqrt{(\sigma_4^2 - \sigma_2^2 + \eta_0^2 - \nu_0^2)^2 + 4 p s \sigma_2^2}).$$

Wirkt im Punkt ξ das Einzelmoment $Y_j = \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta_{jl} e^{-i \omega t}$ zur x_l -Achse parallel und werden die Verschiebungen mit $\hat{U}_j^{(l)}$ und Verdrehungen mit $\hat{\Phi}_j^{(l)}$ bezeichnet, so erhalten wir

$$\hat{U}_j^{(l)} = \frac{e^{-i \omega t} s}{4 \pi I c_4^2 (k_1^2 - k_2^2)} E_{ljk} \partial_k \left(\frac{e^{i k_1 R} - e^{i k_2 R}}{R} \right), \quad (5)$$

$$\hat{\Phi}_j^{(l)} = \frac{e^{-i \omega t}}{4 \pi I c_4^2} [L \delta_{jk} + \partial_j \partial_k M], \quad j, k, l = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Hierbei sind folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$L = C_1 k_1^2 \frac{e^{i k_1 R}}{R} + C_2 k_2^2 \frac{e^{i k_2 R}}{R}, \quad M = C_1 \frac{e^{i k_1 R}}{R} + C_2 \frac{e^{i k_2 R}}{R} + C_3 \frac{e^{i k_3 R}}{R}, \quad C_1 = \frac{k_1^2 - \sigma_2^2}{k_1^2 (k_1^2 - k_2^2)},$$

$$C_2 = \frac{k_2^2 - \sigma_2^2}{k_1^2 (k_2^2 - k_1^2)}, \quad C_3 = -\frac{\sigma_2^2}{k_1^2 k_2^2}, \quad k_3 = \frac{\omega}{c_3} \left(1 - \frac{\nu_0^2}{\omega^2} \right)^{1/2}, \quad \nu_0^2 = \frac{4 \alpha}{I}.$$

Betrachten wir den Sonderfall $\alpha = 0$. Wir erhalten hierdurch die bekannten Ausdrücke für die Grundlösungen der klassischen Elastokinetik

$$\hat{U}_j^{(l)} = \frac{e^{-i \omega t}}{4 \pi \rho} \left\{ \frac{1}{c_2^2} \frac{e^{i \beta_0 R}}{R} \delta_{jl} - \frac{1}{\omega^2} \partial_j \partial_l \left(\frac{e^{i \sigma_1 R} - e^{i \beta_0 R}}{R} \right) \right\}, \quad (7)$$

$$\hat{\Phi}_j^{(l)} = 0. \quad (8)$$

Hierbei ist $\beta_0 = \frac{\omega}{\bar{c}_2}$, $\sigma_1 = \frac{\omega}{c_1}$, wo $\bar{c}_2 = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwelle im Hooke'schen Medium ist.

Kommen wir noch auf die Grundgleichung (3) bis (6) zurück. Wenn die Einzelkraft zur x_l -Achse parallel gerichtet ist, dann folgt aus (4), daß $\Phi_j^{(l)} = 0$ ist. Die Größen κ_{li} ($l = 1, 2, 3$) sind also gleich Null.

Ist das Einzelmoment parallel zur x_l -Achse gerichtet, so ist $U_j^{(l)} = 0$. Die Größe γ_{li} (nach l wird nicht summiert!) ist hier gleich Null.

Für jeden Wert l erhalten wir bei Einwirkung einer Einzelkraft einen Verschiebungsvektor $\mathbf{U}^{(l)}$ und einen Drehungsvektor $\Phi^{(l)}$. Setzen wir der Reihe nach $l = 1, 2, 3$ ein, so erhalten wir 9 Komponenten des Verschiebungstensors $U_j^{(l)}$ und 9 Komponenten des Drehungstensors $\Phi_j^{(l)}$. Auf gleiche Art erhalten wir den Verschiebungstensor $\hat{U}_j^{(l)}$ und den Drehungstensor $\hat{\Phi}_j^{(l)}$ für das Einzelmoment.

Es ist eine wesentliche Erweiterung im Vergleich zur klassischen Elastokinetik, wo es nur den Verschiebungstensor $\hat{U}_j^{(l)}$ gibt, der durch (7) gegeben ist.

Für die oben beschriebenen Verschiebungstensoren gelten folgende Beziehungen:

$$U_j^{(l)}(\xi, \mathbf{x}, t) = U_l^{(j)}(\mathbf{x}, \xi, t), \quad \Phi_j^{(l)}(\xi, \mathbf{x}, t) = \Phi_l^{(j)}(\mathbf{x}, \xi, t), \quad \hat{U}_j^{(l)}(\xi, \mathbf{x}, t) = \Phi_l^{(j)}(\mathbf{x}, \xi, t), \quad (9)$$

die sich aus dem Aufbau der Formeln (3) bis (6) und aus dem Reziprozitätssatz der Arbeit ergeben.

Wenn die Grundlösungen für Einzelkraft und Einzelmoment schon bekannt sind, dann können wir die Singularitäten höherer Ordnung ermitteln. Ist die Lösung für die Einzelkraft bekannt, so können wir für die Doppelkraft ohne das Moment, sowie für die Doppelkraft mit einem Moment und für das Druckzentrum eine Lösung aufbauen.

Ähnlich können wir aus den Lösungen für das Einzelmoment Lösungen für das Doppelmoment oder das Mikrorotationszentrum bilden. Wir werden hier einige Ergebnisse anführen. So erhalten wir für das Druckzentrum

$$u_l = \frac{P}{4 \pi \rho c_1^2} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{e^{-i \omega \left(t - \frac{R}{c_1} \right)}}{R} \right), \quad \varphi_l = 0. \quad (10)$$

Diese Lösung ist mit jener der klassischen Elastokinetik identisch. Wenn ein Rotationszentrum im Koordinatenanfangspunkt wirkt, gilt

$$u_j = 0,$$

wo

$$\varphi_j = \frac{M}{4\pi c_3^2 I} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{e^{-i\omega(t-\frac{R}{v_3})}}{R} \right), \quad v_3 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}}, \quad v^2 = \frac{4\alpha}{I}. \quad (11)$$

Hieraus ist zu ersehen, daß wir es im Wirkungsfall eines Rotationszentrums mit einer Welle zu tun haben, die der Dispersion unterliegt.

Die für den unendlichen Raum ermittelten Grundlösungen dienen zum Aufbau von Lösungen für begrenzte Bereiche. Unter Anwendung der Formeln, die zu jenen von SOMIGLIANA in der klassischen Elastokinetik analog sind, kann man das Randwertproblem auf ein System singularer Integralgleichungen bringen. Hierbei wird ein Verfahren angewendet, das jenem von V. D. KUPRADZE [22] in der klassischen Elastokinetik angewandten Verfahren ähnlich ist.

5. Fortpflanzung der Wellen in begrenzten Körpern

Über das Thema der Wellenfortpflanzung in begrenzten mikropolaren Körpern gibt es nur wenige Publikationen. Sie behandeln die Fortpflanzung von Wellen im elastischen Halbraum, in einer Schicht, einem unendlichen Kreiszylinder, einer Kugel, also in Körpern einfacher Gestaltung.

Obwohl ein Teil der bis jetzt erzielten Resultate formalen Charakters ist und nicht abschließend diskutiert werden konnte, weil die nötigen Elastizitätskonstanten der Werkstoffe unbekannt sind, so können diese Ergebnisse trotzdem qualitativ und vom Standpunkt der Erkenntnis als wertvoll bezeichnet werden.

Die Übersicht der erhaltenen Ergebnisse beginnen wir mit dem Problem der Fortpflanzung von Oberflächenwellen. Möge sich eine monochromatische Welle im elastischen Halbraum $x_1 \geq 0$ in Richtung der x_2 -Achse mit konstanter Geschwindigkeit $c = \omega/k$ fortpflanzen.

Unter der Voraussetzung, daß alle Ursachen und Folgen von x_1, x_2, t abhängen, stellen wir fest, daß das System von sechs Differentialgleichungen für Verschiebungen und Drehungen in diesem zweidimensionalen elastokinetischen Problem in zwei voneinander abhängige Systeme zerfällt, die je drei Gleichungen enthalten.

Das erste System gestaltet sich folgendermaßen

$$\begin{aligned} [(\mu + \alpha) \nabla_1^2 - \rho \partial_t^2] u_1 + (\lambda + \mu - \alpha) \partial_1 e + 2\alpha \partial_2 \varphi_3 &= 0, \\ [(\mu + \alpha) \nabla_1^2 - \rho \partial_t^2] u_2 + (\lambda + \mu - \alpha) \partial_2 e - 2\alpha \partial_1 \varphi_3 &= 0, \\ [(\gamma + \varepsilon) \nabla_1^2 - 4\alpha - I \partial_t^2] \varphi_3 + 2\alpha (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

mit

$$\nabla_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad e = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2.$$

Mit den hier auftretenden Verschiebungsvektoren $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, 0)$ und Drehungsvektoren $\boldsymbol{\varphi} \equiv (0, 0, \varphi_3)$ sind die Spannungen μ_{ij} und σ_{ij} verbunden.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Das zweite, von (1) unabhängige System, hat folgende Gestalt

$$\begin{aligned} [(\gamma + \varepsilon) \nabla_1^2 - 4\alpha - I \partial_t^2] \varphi_1 + (\beta + \gamma - \varepsilon) \partial_1 \kappa + 2\alpha \partial_2 u_3 &= 0, \\ [(\gamma + \varepsilon) \nabla_1^2 - 4\alpha - I \partial_t^2] \varphi_2 + (\beta + \gamma - \varepsilon) \partial_2 \kappa - 2\alpha \partial_1 u_3 &= 0, \\ [(\mu + \alpha) \nabla_1^2 - \rho \partial_t^2] u_3 + 2\alpha (\partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

wobei

$$\kappa = \partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2.$$

Hierbei sind mit den Vektoren $\mathbf{u} \equiv (0, 0, u_3)$, $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2, 0)$ folgende Spannungen verbunden:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Die Möglichkeit einer Spaltung in zwei voneinander unabhängige Gleichungssysteme läßt vermuten, daß hier die Oberflächenwellen zweier separater Typen auftreten. Eine Analyse der Gleichungen (1) und (2) weist darauf hin, daß das Gleichungssystem (1) zu den verallgemeinerten Oberflächenwellen von RAYLEIGH führt, während das Gleichungssystem (2) zur Verallgemeinerung der LOVESCHEN Wellen beiträgt [23].

Verweilen wir beim ersten Gleichungssystem, das von einigen Forschern (A. C. ERINGEN und E. S. SUHUBI [14], S. KALISKI, J. KAPELEWSKI, C. RYMARZ [24]) untersucht worden ist. Durch Einführung der elastischen Potentiale Φ, Ψ , die mit den Verschiebungen u_1, u_2 verbunden sind:

$$u_1 = \partial_1 \Phi - \partial_2 \Psi, \quad u_2 = \partial_2 \Phi + \partial_1 \Psi, \quad \varphi_3 = \varphi, \quad (5)$$

wird das Gleichungssystem (1) auf drei Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c_1^2} \partial_t^2 \right) \Phi &= 0, \\ \left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c_2^2} \partial_t^2 \right) \Psi - s \varphi &= 0, \\ \left(\nabla^2 - \frac{v^2}{c_4^2} - \frac{1}{c_4^2} \partial_t^2 \right) \varphi + p \nabla_1^2 \Psi &= 0, \quad v^2 = \frac{4\alpha}{I}, \end{aligned} \quad (6)$$

gebracht.

Werden diese Gleichungen unter Voraussetzung, daß

$$(\Phi, \Psi, \varphi) = (\Phi^*(x_1), \Psi^*(x_1), \varphi^*(x_1)) e^{i(kx_2 - \omega t)} \quad (7)$$

und die Ebene $x_1 = 0$ belastungsfrei, also

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \mu_{13} = 0 \quad (8)$$

ist, so führt das zur Dispersionsgleichung

$$\frac{4\mu k^2 \lambda_1 \delta}{(2\mu + \lambda) \delta^2 - k^2 \lambda} = \left(1 - \frac{\lambda_1 a_2 \kappa_1}{\lambda_2 a_1 \kappa_2} \right) \frac{\kappa_2 a_1}{\kappa_2 - \kappa_1}, \quad (9)$$

mit

$$a_i = \mu (k^2 + \lambda_i^2) + \alpha (\lambda_i^2 - k^2) + 2\alpha \kappa_i, \quad i = 1, 2$$

$$\kappa_i = \frac{1}{s} (\sigma_i^2 - k^2 - \lambda_i^2), \quad \delta = (k^2 - \sigma_1^2)^{1/2},$$

$$\lambda_{1,2}^2 = k^2 - \frac{1}{2} [\sigma_2^2 + \sigma_4^2 + \eta_0^2 - v_0^2 \mp \sqrt{(\sigma_2^2 + \sigma_4^2 + \eta_0^2 - v_0^2)^2 + 4\sigma_2^2 (v_0^2 - \sigma_4^2)}].$$

Aus Gleichung (9) wird die Phasengeschwindigkeit der verallgemeinerten Oberflächenwelle von RAYLEIGH bestimmt. Da die Phasengeschwindigkeit von der Schwingungsfrequenz ω abhängt, unterliegen die Wellen u_1, u_2, φ_3 einer Dispersion (in der klassischen Elastokinetik zeigen die RAYLEIGH-Wellen keine Dispersion).

In der Veröffentlichung [24] wurden die Existenzbereiche der Lösungen auf der Dispersionsebene (ω, k) für verschiedene Verhältnisse der Elastizitätskonstanten diskutiert.

Sehr interessant ist das Gleichungssystem (3), in dem die Verschiebung u_3 und die Verdrehungen φ_1, φ_2 auftreten.

Die Wellen

$$(u_3, \varphi_1, \varphi_2) = (u_3^*(x_1), \varphi_1^*(x_1), \varphi_2^*(x_1)) e^{i(kx_2 - \omega t)}, \quad (10)$$

die sich mit der konstanten Phasengeschwindigkeit $c = \omega/k$ in Richtung der x_2 -Achse fortpflanzen, stellen ein Novum im Vergleich zur klassischen Elastokinetik dar.

Bekanntlich können sich die Wellen $u_3^*(x_1) e^{i(kx_2 - \omega t)}$ in einem geschichteten Halbraum von HOOKE nur dann fortpflanzen, wenn $\mu_2/\mu_1 > \varrho_2/\varrho_1$ ist. Hierbei ist μ_1, ϱ_1 der Schubmodul und die Dichte der oberen Schicht. Die Größen μ_2, ϱ_2 beziehen sich auf den Halbraum $x_1 \geq 0$. Solche Wellen sind als LOVEsche Wellen bekannt [23] (Bild 2).

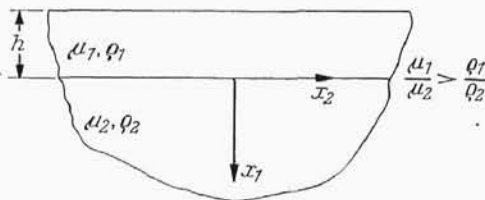


Bild 2

In einem homogenen elastischen mikropolaren Halbraum können Wellen dieses Typs entstehen. Die Verschiebung u_3 wird jedoch von den Verdrehungen φ_1 und φ_2 begleitet. In der Arbeit [24] wurde die Phasengeschwindigkeit der Welle dieses Typs für verschiedene Verhältnisse der Elastizitätskonstanten untersucht und die Existenzfrage der Lösungen in der Dispersionsebene (ω, k) erörtert. Es wurde nachgewiesen, daß die Welle für $\alpha \rightarrow 0$ verschwindet.

Die Fortpflanzung der monochromatischen Wellen in einer elastischen Schicht bildet den Gegenstand einiger Arbeiten (W. NOWACKI und W. K. NOWACKI [25]), J. D. ACHENBACH [26]). Auch hier hat man Wellen zweier Typen erhalten, die im Grenzfall, wenn die Wellenlänge im Verhältnis zur Schichtdicke sehr klein ist, in die verallgemeinerten Oberflächenwellen von RAYLEIGH und LOVE übergehen.

Einen interessanten Weg zur Lösung dieses Problems hat J. D. ACHENBACH gewiesen, der ein asymptotisches Verfahren anwandte. Mit dem Thema der Reflexion ebener Wellen an der freien Oberfläche haben sich V. R. PARFITT und A. C. ERINGEN [18] befaßt.

Bei diesem zweidimensionalen Problem ist namentlich die Tatsache interessant, daß die longitudinale Verschiebungswelle im Prinzip drei reflektierte Wellen (im Gegensatz zu den in der klassischen Elastokinetik

vorkommenden zwei Wellen) hervorruft. Die erste dieser Wellen ist eine longitudinale Verschiebungswelle, wobei der Einfall- und Reflexionswinkel gleich sind. Die beiden weiteren Wellen sind gekoppelte Transversalwellen, wobei sich die eine von ihnen mit der Geschwindigkeit v_2 und die andere mit v_4 fortpflanzt (Bild 3).

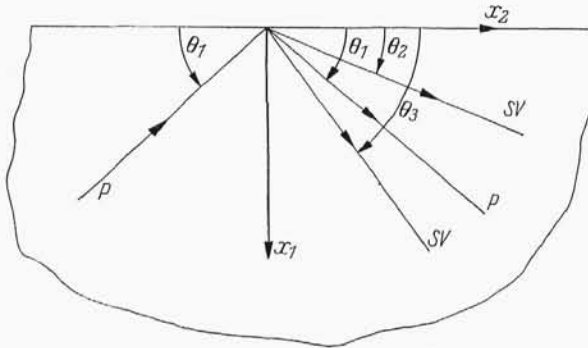


Bild 3

Die obengenannten Verfasser befaßten sich schließlich auch mit der Reflexion der Transversalwellen (Verschiebungs- und Mikrorotationswellen) und der longitudinalen Mikrorotationswellen an der freien Oberfläche. Unter anderen Lösungen, obwohl formalen, bliebe noch eine Lösung des zweidimensionalen und axial-symmetrischen Problems von H. LAMB zu erwähnen.

Es geht hier um die Wirkung der in der Zeit veränderlichen Belastungen, die senkrecht auf die Ebene einwirken, die den elastischen Halbraum begrenzt (W. NOWACKI und W. K. NOWACKI [27], [28]).

Ist das Problem durch die Symmetrie der Deformation zur Koordinatenachse gekennzeichnet, so zerfällt das Grundsystem der Differentialgleichungen in zwei voneinander unabhängige Gleichungssysteme.

In einem dieser Systeme treten die Vektoren

$$\mathbf{u} \equiv (u_r, 0, u_z), \quad \mathbf{q} \equiv (0, q_\theta, 0) \quad (11)$$

(in zylindrischen Koordinaten (r, θ, z)) auf, die mit dem Spannungszustand im Zusammenhang stehen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{vmatrix} 0 & \mu_{r\theta} & 0 \\ \mu_{\theta r} & 0 & \mu_{\theta z} \\ 0 & \mu_{z\theta} & 0 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Im zweiten der beiden Gleichungssysteme treten die Vektoren

$$\mathbf{u} \equiv (0, u_\theta, 0), \quad \mathbf{q} \equiv (q_r, 0, q_z) \quad (13)$$

auf, die mit den Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{\theta r} & 0 & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{z\theta} & 0 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_{rr} & 0 & \mu_{rz} \\ 0 & \mu_{\theta\theta} & 0 \\ \mu_{\theta r} & 0 & \mu_{zz} \end{vmatrix} \quad (14)$$

verbunden sind.

Das erste Gleichungssystem dient zur Ermittlung von Längsschwingungen in einem unendlichen Stab mit Kreisquerschnitt, in dem die monochromatische Welle sich längs der Zylinderachse fortpflanzt. Die Lösung dieses Problems (W. NOWACKI und W. K. NOWACKI [29]) führt zur Verallgemeinerung der Lösungen von L. POCHHAMMER [30] und C. CHREE [31] auf mikropolare Medien.

Das zweite System der Differentialgleichungen, in dem die Größen u_θ, q_r, q_z auftreten, beschreibt die Fortpflanzung der monochromatischen Torsionswelle, die sich in Richtung der Zylinderachse bewegt [29].

Im vorliegenden Vortrag haben wir einige einfachste Probleme der Fortpflanzung monochromatischer Wellen im COSSERAT-Medium dargestellt. Auf eine durchaus analoge Weise lassen sich mit Hilfe von Wellengleichungen [28] bis [31] aus Abschnitt 2 weit kompliziertere Probleme lösen, wie beispielsweise die Fortpflanzung der durch bewegliche Belastungen hervorgerufenen Wellen, monochromatischen Wellen in geschichteten Medien usw.

Eine bedeutende Aufgabe besteht in der Erzielung von Grundlösungen zur Ermittlung aperiodischer Schwingungen. Bis jetzt sind nur wenige Lösungen dieses Typs bekannt, beispielsweise können die oben dargestellten allgemeinen Lösungen der Wellengleichung für eine longitudinale Mikrorotationswelle genannt werden. Bei der Erörterung des Grundproblems, wie es die Ermittlung singulärer Lösungen des dynamischen Problems für momentane Einzelkräfte und -momente ist, hat man bis heute nur Ergebnisse für sehr kleine Zeiten erzielen können.

Es gibt also eine umfangreiche Klasse von Problemen und singulären Aufgaben, die noch zu lösen sind. Aber das Entwicklungstempo der Forschungen auf diesem Gebiet weist darauf hin, daß in wenigen Jahren eine vollkommene Elastokinetik des COSSERAT-Kontinuums erreicht werden kann, die einen Überbau der klassischen Elastokinetik bilden wird.

Literatur

- 1 W. VOIGT, Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle, Abh. Ges. Wiss. Göttingen, **34** (1887).
- 2 E. und F. COSSERAT, Théorie des corps déformables, Paris 1909, A. Hermann.
- 3 C. TRUESDELL und R. A. TOUPIN, The classical field theories, Encyclopedia of Physics, **3**, No 1, (1960).
- 4 R. A. TOUPIN, Theories of elasticity with couple-stresses, Arch. Mech. Analysis, **17**, p. 85 (1964).
- 5 G. GRIOLI, Elasticità asimetrica, Ann. di Mat. pura ed appl. Ser. IV **50** (1960).
- 6 W. T. KOITER, Couple-stresses in the theory of elasticity. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch, Series B, **67**, p. 415 (1962).
- 7 R. D. MINDLIN und H. F. TIERSTEN, Effects of couple-stresses in linear elasticity, Arch. Mech. Analysis, **11**, p. 385 (1962).
- 8 W. GÜNTHER, Zur Statik und Kinetik des Cosseratschen Kontinuum, Abh. Braunschweig, Wiss. Ges. **10**, p. 85 (1958).
- 9 H. SCHAEFER, Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen Cosserat-Kontinuum, Misz. Angew. Math., Festschrift Tollmien, Berlin 1962, Akademie Verlag.
- 10 H. NEUBER, On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat-continuum. 11th Int. Congr. of Appl. Mech., München, 1964.
- 11 E. KUVSHINSKII und A. L. AERO, Kontinuumtheorie der nichtsymmetrischen Elastizität (in Russischer Sprache), Fiz. Tverdogo Tela, **5**, S. 2592 (1963).
- 12 V. A. PALMOV, Fundamentale Gleichungen der nichtsymmetrischen Elastizität (in Russischer Sprache), Prikl. Math. Mech. **28**, S. 401 (1964).
- 13 N. SANDRU, On some problems of the linear theory of the symmetric elasticity, Int. J. Engng. Sci. **4**, **1**, p. 81 (1966).
- 14 A. C. ERINGEN und E. S. SUHUBI, Non linear theory of micropolar elastic solids, Int. J. Engng. Sci. **2**, p. 189, 389 (1964).
- 15 I. A. KUNIN, The theory of elastic media with microstructure and theory of dislocations. IUTAM-Symposium, 1967, Freudenstadt-Stuttgart, Mechanics of generalized continua, (1968) 330.
- 16 B. G. GALERKIN, Contribution à la solution générale du problème d'élasticité dans le cas de trois dimensions. C. R. Acad. Sci. Paris, **190**, p. 1047 (1930).
- 17 M. IACOVACHE, O extindere a metodei lui Galerkin pentru sistemul ecuațiilor elasticității, Bul. știint. Acad. Rep. Pop. Române, Ser. A **1**, 341 (1949).
- 18 V. R. PARETT und A. C. ERINGEN, Reflection of plane waves from the flat boundary of a micropolar elastic halfspace. Report No 8—3. General Technology Corporation (1966).
- 19 W. NOWACKI, Propagation of rotation waves in asymmetric elasticity, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Techn. **16**, **10**, p. 493 (1968).
- 20 W. NOWACKI, Green functions for micropolar elasticity, Proc. Vibr. Probl. **10**, **1**, p. 3 (1969).
- 21 W. NOWACKI und W. K. NOWACKI, The generation of waves in an infinite micropolar elastic body. Proc. Vibr. Probl. **10**, **2** p. 97 (1969).
- 22 V. D. KUPRADZE, Dynamical problems in elasticity, Progress in Solid Mechanics, **3**, Amsterdam 1963.
- 23 A. E. H. LOVE Some problems of geodynamics. Cambridge University Press. London, (1911), 1926.
- 24 S. KALISKI, J. KAPELEWSKI und C. RYMARZ, Surface waves on an optical branch in a continuum with rotational degrees of freedom. Proc. Vibr. Probl., **9**, **2**, 108 (1968).
- 25 W. NOWACKI und W. K. NOWACKI, Propagation of monochromatic waves in an infinite micropolar elastic plate. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn. **17**, **1**, p. 29 (1969).
- 26 J. D. ACHENBACH, Free vibration of a layer of micropolar continuum. Int. J. Engng. Sci. **7**, **10**, p. 1025 (1969).
- 27 W. NOWACKI und K. W. NOWACKI, The plane Lamb problem in a semi-infinite micropolar elastic body. Arch. Mech. Stos. **21**, **3**, p. 241 (1969).
- 28 W. NOWACKI und K. W. NOWACKI, The axially symmetrical Lamb's problem in a semi-infinite micropolar elastic solid. Proc. Vibr. Probl. **10**, **2**, p. 97 (1969).
- 29 W. NOWACKI und W. K. NOWACKI, Propagation of elastic waves in a micropolar cylinder. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Techn. I — **17**, **1**, p. 39 (1969), II — **17**, **1**, p. 49 (1969).
- 30 L. POCHHAMMER, Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszylinder. J. reine angew. Math. **81**, p. 324 (1876).
- 31 C. CHREE, The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates. Their solutions and application. Trans. Cambridge, Phil. Soc. **14**, p. 250 (1889).

Anschrift: Prof. Dr. WITOLD NOWACKI, Warszawa, ul. Wiejska 18 m. 8 (VR Polen)

Außer dem vorstehend abgedruckten wurden folgende Hauptvorträge gehalten:

- W. HAHN, Graz, Über den Gegenstand der sogenannten angewandten Mathematik.
 F. BAUER, München, Programmierungssprachen unter erzieherischen und praktischen Aspekten.
 W. HAHN, Graz, Stabilität bei nichtlinearen Systemen.
 L. VAN WIJNGAARDEN, Enschede, The mechanical behaviour of gasbubbles in liquids and its effects on the dynamics of liquidbubble mixtures.
 J. W. COHEN, Delft, On queuing system.
 E. STIEFEL, Zürich, Über die numerische Integration oszillierender Erscheinungen.