REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES



SÉRIE DE

# MÉCANIQUE APPLIQUÉE

TOME 11 Nº 5 1966

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE

# QUELQUES THÉORÈMES DE LA THERMOÉLASTICITÉ *)

par W. NOWACKI **

539.3

Le but de ce travail est de présenter quelques théorèmes de thermoélasticité pour les vibrations harmoniques du milieu continu. L'article traite de la propagation des ondes sphériques dans un milieu thermoélastique infini.
On donne une généralisation du théorème de Helmholtz. Dans ce théorème le potentiel de déplacements $\Phi$ et la température $\theta$ dans un point $x$ appartenant au milieu $B$ sont exprimés par les fonctions $\theta$, $\Phi$, $\frac{\partial\theta}{\partial n}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ sur la frontière $S$ du domaine $B$.
Dans le cas particulier d'un problème thermoélastique non couplé on obtient le théorème de Green pour l'équation classique de la conductibilité de la chaleur et le théorème de Helmholtz pour la théorie des tensions thermiques. Dans le cas d'un processus adiabatique on obtient le théorème de Helmholtz pour l'élastodynamique classique.

## 1. INTRODUCTION

Dans le travail présent on va démontrer quelques théorèmes concernant la propagation des ondes longitudinales thermoélastiques dans un milieu illimité. Nous mettrons en évidence que l'intégration d'une équation du potentiel de déplacement thermoélastique conduit à une solution présentée sous la forme des intégrales de surface. Dans le cas d'absence de couplage entre le champ thermique et le champ de déformation on obtient le théorème connu de Helmholtz pour l'élastocinétique et le théorème de Green pour l'équation classique de la conductibilité thermique.

Considérons un corps homogène, isotrope et parfaitement élastique, qui occupe un domaine $B$, limité par une surface $S$. Dans ce milieu les équations linéarisées de la thermoélasticité sont

*) Communication présentée à la Conférence de Mécanique, Bucarest, septembre 1965.

**) L'Académie des Sciences de la R. P. Polonaise, Varsovie.

justes [1], [2]:

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + X_i = \rho_0 \ddot{u}_i + \gamma \theta_{,i}, \tag{1.1}$$

$$\theta_{,kk} - \frac{1}{\varkappa}\dot{\theta} - \eta \dot{u}_{k,k} = -\frac{Q}{\varkappa}, \quad i, k = 1,2,3. \tag{1.2}$$

La première relation représente une équation du mouvement, la seconde est une équation généralisée de la conductibilité thermique. Dans ces équations $\theta = T - T_0$ est un accroissement de la température par rapport à un état naturel $T_0$, où les contraintes et les déformations sont égales à zéro ; $u_i$ sont les composantes du vecteur de déplacement ; $X_i$ sont les composantes du vecteur des forces de masse ; $Q$ est une fonction qui représente l'intensité des sources de chaleur. Les valeurs $\mu$, $\lambda$ sont des constantes de Lamé, rapportées à l'état isothermique.

Ensuite $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, où $\alpha_t$ est un coefficient de la dilatation thermique linéaire ; $\rho_0$ est la densité ; $\varkappa = \dfrac{\lambda_0}{\rho_0 c_\varepsilon}$ est un coefficient, où $\lambda_0$ est une constante de la conductibilité thermique et $c_\varepsilon$ est la chaleur spécifique dans le cas d'une déformation constante. Enfin $Q = \dfrac{W}{\rho_0 c_\varepsilon}$, où $W$ désigne une quantité de chaleur, produite dans l'unité de temps et de volume et $\eta = \dfrac{\gamma T_0}{\lambda_0}$. Les fonctions $u_i$, $\theta$, $X_i$, $Q$ sont des fonctions des coordonnées et du temps. Un point au-dessus d'une fonction désigne une dérivée par rapport au temps.

Il est nécessaire de compléter les équations (1.1) et (1.2) par des équations de Duhamel-Neumann

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - \gamma\theta)\,\delta_{ij}, \tag{1.3}$$

et par les relations entre les déformations et les déplacements

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{1.4}$$

En décomposant le vecteur de déplacement et le vecteur des forces de masse en une partie potentielle et une partie solénoïdale

$$u_i = \Phi_{,i} + \varepsilon_{ijk}\psi_{k,j}, \quad X_i = \rho_0(\beta_{,i} + \varepsilon_{ijk}\,\chi_{k,j}), \tag{1.5}$$

nous ramenons le système des équations (1.1) et (1.2) à la forme

$$\Box_1^2\,\Phi = m\theta - \frac{1}{c_1^2}\,\beta, \tag{1.6}$$

$$\Box_2^2\,\psi_i = -\frac{1}{c_2^2}\,\chi_i, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1.7}$$

$$\mathrm{D}\theta - \eta\partial_t\,\nabla^2\dot{\Phi} = -\frac{Q}{\varkappa}. \tag{1.8}$$

Nous avons introduit ici les symboles suivants

$$\Box_1^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\,\partial_t^2, \quad \Box_2^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_2^2}\,\partial_t^2, \quad \mathrm{D} = \nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\,\partial_t, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \; \partial_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}\right)^{1/2}, \quad c_2 = \left(\frac{\mu}{\rho_0}\right)^{1/2}, \quad m = \frac{\gamma}{c_1^2 \rho_0}.$$

L'équation (1.6) représente une onde longitudinale, tandis que l'équation (1.7) — une onde transversale ; l'équation (1.8) caractérise la conductibilité thermique.

Dans les considérations ultérieures il sera commode d'introduire les variables nouvelles

$$\xi_i = \frac{c_1}{\varkappa}\,x_i, \quad \tau = \frac{c_1^2}{\varkappa}\,t.$$

En employant ces variables dans les équations (1.6) ÷ (1.8) on obtient le système suivant d'équations

$$(1.9) \qquad (\nabla^2 - \partial_\tau^2)\,\Phi(\xi, \tau) = m_0\,\theta(\xi, \tau) - \frac{1}{c_0^2}\,\beta(\xi, \tau),$$

$$(1.10) \qquad \left(\nabla^2 - \frac{c_1^2}{c_2^2}\,\partial_\tau^2\right)\psi_i(\xi, \tau) = -\frac{1}{c^2}\,\chi_i(\xi, \tau),$$

$$(1.11) \qquad (\nabla^2 - \partial_\tau)\,\theta(\xi, \tau) - \eta_0\,\partial_\tau \nabla^2\,\Phi(\xi, \tau) = -\frac{1}{\varkappa_0}\,Q(\xi, \tau),$$

où

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\,\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \; m_0 = \frac{m\varkappa^2}{c_1^2}, \; \eta_0 = \eta\,\frac{c_1^2}{\varkappa}, \; \varkappa_0 = \frac{c_1^2}{\varkappa}, \; c_0 = \frac{c_1^2}{\varkappa}, \; c = \frac{c_1\,c_2}{\varkappa}.$$

Si on élimine la température des équations (1.9) et (1.11) on trouve une équation de l'onde pour le potentiel $\Phi$ :

$$(1.12) \qquad [(\nabla^2 - \partial_\tau^2)(\nabla^2 - \partial_\tau) - \varepsilon\,\partial_\tau \nabla^2]\,\Phi(\xi, \tau) = -\frac{m_0}{\varkappa_0}\,Q(\xi, \tau) -$$

$$-\frac{1}{c_0^2}\,(\nabla^2 - \partial_\tau)\,\beta(\xi, \tau), \quad \varepsilon = \eta\, m\,\varkappa.$$

Dans les considérations suivantes nous nous limiterons à des équations homogènes et nous supposerons les vibrations variables dans le temps d'une façon harmonique.

## 2. PROPAGATION DES ONDES LONGITUDINALES DANS UN MILIEU ILLIMITÉ

Considérons un système d'équations homogènes des ondes (1.9) et (1.11)

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &(\nabla^2 - \partial_\tau^2)\,\Phi(\xi, \tau) - m_0\,\theta(\xi, \tau) = 0,\\ &(\nabla^2 - \partial_\tau)\,\theta(\xi, \tau) - \eta_0\,\partial_\tau \nabla^2\,\Phi(\xi, \tau) = 0, \end{aligned}$$

qui représentent la propagation des ondes longitudinales thermoélastiques. En supposant que les causes qui produisent le mouvement des ondes varient d'une façon harmonique dans le temps avec une fréquence $\omega$

$$(2.2)\qquad \Phi(\xi, \tau) = \varphi(\xi)\,e^{-i\chi\tau}, \quad \theta(\xi, \tau) = \vartheta(\xi)\,e^{-i\chi\tau}, \; \chi = \frac{\omega}{c_1^2}\,\varkappa,$$

en portant l'équation (2.2) dans l'équation (2.1) et en résolvant ces équations par rapport à des fonctions $\varphi$ et $\vartheta$, on obtient

$$(2.3)\qquad (\nabla^2 + k_1^2)(\nabla^2 + k_2^2)(\varphi, \vartheta) = 0.$$

Ici $k_1$ et $k_2$ sont des racines de l'équation

$$(2.4)\qquad k^4 - k^2\,[\chi^2 + i\,\chi(1 + \varepsilon)] + i\chi^3 = 0.$$

Une discussion des racines de cette équation montre que ces racines sont complexes [3]. Parmi les quatre racines de l'équation (2.4) nous choisissons celles, pour lesquelles

$$k_\alpha = a_\alpha + i\,b_\alpha, \quad a_\alpha > 0, \quad b_\alpha \geqq 0, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Dans les considérations ultérieures un rôle prépondérant joueront ces solutions des équations (2.3), qui montrent une singularité dans le point $\eta$ et qui dépendent du rayon $\rho$, de liaison entre les points $\eta$ et $\xi$

$$\rho = [(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2]^{1/2}.$$

Examinons l'équation (2.3) pour le potentiel $\varphi(\xi, \tau)$. D'après le théorème de T. Boggio la solution de l'équation (2.3) peut être présentée sous la forme des solutions partielles

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

où $\varphi_\alpha (\alpha = 1, 2)$ satisfont une équation différentielle de deuxième ordre

$$(2.5)\qquad (\nabla^2 + k_1^2)\,\varphi_1(\xi) = 0, \quad (\nabla^2 + k_2^2)\,\varphi_2(\xi) = 0.$$

Parmi les solutions singulières des équations (2.5) pour une région illimitée seulement les fonctions $\frac{e^{ik_1\rho}}{\rho}$, $\frac{e^{ik_2\rho}}{\rho}$ sont légitimes, car elles représentent les ondes divergentes qui avancent d'un point de perturbation à l'infini. Nous avons donc

$$(2.6)\qquad \mathrm{Re}\left[e^{-i\chi\tau}\,\frac{e^{ik_\alpha\rho}}{\rho}\right] = \frac{1}{\rho}\,e^{-b_\alpha\rho}\cos\chi\left(\tau - \frac{\rho}{v_\alpha}\right), \quad \alpha = 1, 2.$$

La relation (2.6) représente une onde longitudinale qui avance dans la direction des accroissements de $\rho$. Cette onde subit un amortissement, car $b_\alpha \geqslant 0$; l'onde démontre une dispersion, car la vitesse de phase $v_\alpha = \dfrac{\chi}{\operatorname{Re}(k_\alpha)} = \dfrac{\chi}{a_\alpha}$ dépend de la fréquence $\omega$. Examinons une expression limite

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{e^{ik_\alpha\rho}}{\rho}\right) - ik_\alpha\left(\frac{e^{ik_\alpha\rho}}{\rho}\right)\right] = -\lim_{\rho\to\infty}\frac{e^{ik_\alpha\rho}}{\rho} =$$
$$= -\lim_{\rho\to\infty}\left(\frac{e^{ia_\alpha\rho}}{\rho}\, e^{-b_\alpha\rho}\right), \qquad b_\alpha \geqq 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{2.7}$$

Cette limite tend vers zéro pour $\rho \to \infty$. L'expression limite (2.7), qui peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{e^{ik_\alpha\rho}}{\rho}\right) - ik_\alpha\left(\frac{e^{ik_\alpha\rho}}{\rho}\right) = e^{ik_\alpha\rho}\, O(\rho^{-2}), \qquad b_\alpha \geqq 0, \quad \alpha = 1, 2, \tag{2.8}$$

nous fournit l'information sur le comportement d'une solution singulière dans le voisinage d'un point infiniment éloigné. Le symbole $O(\rho^s)$ désigne ici une telle valeur de $y$ pour que le rapport $\dfrac{y}{\rho^s}$ reste limité quand $\rho \to \infty$. L'expression (2.8) présente la condition de « radation » de Sommerfeld, généralisée au problème de la thermoélasticité. La condition (2.8) doit être complétée par une condition à la limite

$$\varphi = O(1) \quad \text{pour} \quad \rho \to \infty. \tag{2.9}$$

Ici $O(1)$ désigne une valeur arbitrairement petite.

Dans les considérations ultérieures nous examinerons une classe de fonctions $\varphi$, $\vartheta$, qui se comportent à l'infini comme la solution singulière montrée ci-dessus.

Considérons maintenant deux systèmes d'équations homogènes de la thermoélasticité qui donnent la propagation des ondes longitudinales

$$\begin{aligned} &(\nabla^2 + \chi^2)\,\varphi - m_0\,\vartheta = 0, \\ &(\nabla^2 + i\chi)\,\vartheta + i\chi\eta_0\nabla^2\varphi = 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} &(\nabla^2 + \chi^2)\,\overline{\varphi} - m_0\,\overline{\vartheta} = 0, \\ &(\nabla^2 + i\chi)\,\overline{\vartheta} + i\chi\eta_0\nabla^2\overline{\varphi} = -\frac{1}{\varkappa_0}\,\delta(\xi - \eta). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Nous supposons que les dérivées première et seconde des dérivées sont continues dans le domaine limité $B_i$ et sur la surface $S$ qui entoure le domaine $B_i$. Les fonctions suivantes présentent une solution des équations (2.11) dans un domaine illimité

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} &= \frac{m_0}{4\pi\varkappa_0(k_2^2 - k_1^2)\rho}\left(e^{ik_1\rho} - e^{ik_2\rho}\right), \\ \overline{\vartheta} &= \frac{1}{4\pi\varkappa_0(k_2^2 - k_1^2)\rho}\left(n_2 e^{ik_2\rho} - n_1 e^{ik_1\rho}\right), \qquad n_\alpha = k_\alpha^2 - \chi^2, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Il est évident que $\bar{\varphi}$ est une fonction régulière au point $\xi = \eta$, tandis que la fonction $\bar{\vartheta}$ démontre une singularité au point $\xi = \eta$. Après avoir combiné convenablement les équations (2.10) et (2.11) nous pouvons les intégrer dans le domaine limité $B_i$ en utilisant la transformation de Green et nous obtenons les relations suivantes

$$
\begin{aligned}
I(\xi) &= \varkappa_0 \int_S \left[\bar{\vartheta}(\eta, \xi) \frac{\partial \vartheta(\eta)}{\partial n} - \vartheta(\eta) \frac{\partial \bar{\vartheta}(\eta, \xi)}{\partial n}\right] \mathrm{d}S(\eta) + \\
&+ k\varepsilon \int_S \left[\bar{\varphi}(\eta, \xi) \frac{\partial \varphi(\eta)}{\partial n} - \varphi(\eta) \frac{\partial \bar{\varphi}(\eta, \xi)}{\partial n}\right] \mathrm{d}S(\eta), \quad k = \frac{i\chi^3 \varkappa_0}{m_0^2},
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

où

$$I(\xi) = \vartheta(\xi) \quad \text{pour} \quad \xi \in B_i,$$

$$I(\xi) = 0 \quad \text{pour} \quad \xi \in B_\infty - B_i, \text{ où } B_\infty \text{ est tout l'espace.}$$

La formule obtenue peut être traitée comme une généralisation du théorème de Green dans la théorie classique de la conductibilité thermique pour le problème de la thermoélasticité. Elle permet de déterminer la température au point $\xi$ par les intégrales de surface avec l'argument des fonctions $\vartheta$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial n}$, $\varphi$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ sur la surface $S$ entourant le domaine $B_i$. Supposons comme précédemment que les fonctions $\varphi$ et $\vartheta$ ont les dérivées premières et secondes dans le domaine $B_a$ et sur la surface $S$. Examinons maintenant une sphère avec le centre au point $\eta \in B_a$ et d'un rayon $\rho$, choisi de manière à ce que le domaine $B_i$ se trouve à l'intérieur de cette sphère. Pour un domaine $B'$, contenu entre la surface $\Sigma$ de la sphère et la surface $S$, l'équation (2.13) est légitime. Nous avons ici

$$
\begin{aligned}
\vartheta(\xi) &= -\varkappa_0 \int_S \left(\bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial n} - \vartheta \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial n}\right) \mathrm{d}S(\eta) - \varepsilon k \int_S \left(\bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n}\right) \mathrm{d}S(\eta) + \\
&+ \varkappa_0 \int_\Sigma \left(\bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial n} - \vartheta \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial n}\right) \mathrm{d}\Sigma + \varepsilon k \int_\Sigma \left(\bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n}\right) \mathrm{d}\Sigma, \xi_i \in B'.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Un signe négatif de deux intégrales premières est dû à la différenciation par rapport à une normale $n \in S$ dirigée vers l'intérieur du domaine $B_a$.

En substituant la fonction $\bar{\vartheta}$ de la formule (2.12) dans la première des intégrales de surface sur la surface $\Sigma$, nous obtenons l'expression

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi(k_2^2 - k_1^2)} \int_\Sigma \left[\frac{n_2 e^{ik_2\rho}}{\rho}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} - ik_2 \vartheta\right) - \frac{n_1 e^{ik_1\rho}}{\rho}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} - ik_1 \vartheta\right) + \right. \\
&\left. + \frac{\vartheta}{\rho^2}(n_2 e^{ik_2\rho} - n_1 e^{ik_1\rho})\right] \rho^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Si le rayon $\rho$ augmente à l'infini il faut tenir compte des conditions de radation et de limite (2.8) et (2.9)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} - ik_\alpha \vartheta = e^{ik_\alpha \rho} O(\rho^{-2}), \quad \vartheta = O(1), \; b_\alpha \geqq 0, \quad \alpha = 1{,}2.$$

Il est èvident que lorsque $\rho \to \infty$, l'intégrale de surface (2.15) tend vers zéro d'une façon monotone. Pour un domaine extérieur $B_a$ nous avons donc la formule

$$\begin{aligned} I(\xi) = \varkappa_0 \int_S \left[ \vartheta(\eta) \frac{\partial \bar{\vartheta}(\eta, \xi)}{\partial n} - \bar{\vartheta}(\eta, \xi) \frac{\partial \vartheta(\eta)}{\partial n} \right] dS(\eta) + \\ + k\varepsilon \int_S \left[ \varphi(\eta) \frac{\partial \bar{\varphi}(\eta, \xi)}{\partial n} - \bar{\varphi}(\eta, \xi) \frac{\partial \varphi(\eta)}{\partial n} \right] dS(\eta), \end{aligned} \tag{2.15'}$$

où

$$I(\xi) = \vartheta(\xi) \text{ pour } \xi \in B_a,$$
$$I(\xi) = 0 \qquad \text{pour } \xi \in B_i.$$

Cette formule nous permet de déterminer la température $\vartheta$ au point $\xi$ du domaine $B_a$ en connaissant les fonctions $\varphi, \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$ ainsi que $\vartheta, \dfrac{\partial \vartheta}{\partial n}$ sur la surface $S$.

Examinons un cas particulier de la thermoélasticité, où on néglige le couplage entre le champ thermique et le champ de déformation. On sait que dans ce cas il faut admettre $\varepsilon = 0$, donc $k_1 = \chi$, $k_2 = \sqrt{i\chi}$. Dans la relation (2.15′) il ne reste que le terme premier :

$$\vartheta(\xi) = \varkappa_0 \int_S \left[ \vartheta(\eta) \left( \frac{\partial \bar{\vartheta}(\eta, \xi)}{\partial n} \right)_{\varepsilon=0} - \left( \bar{\vartheta}(\eta, \xi) \right)_{\varepsilon=0} \frac{\partial \vartheta(\eta)}{\partial n} \right] dS(\eta). \tag{2.16}$$

Vu que pour $\varepsilon = 0$ on a

$$\bar{\varphi} = \frac{m_0}{4\pi \varkappa_0 \rho} \; \frac{e^{i\chi\rho} - e^{i\rho\sqrt{i\chi}}}{i\chi(1 + i\chi)}, \quad \bar{\vartheta} = \frac{e^{i\rho\sqrt{i\chi}}}{4\pi \varkappa_0 \rho}, \tag{2.17}$$

la température $\vartheta$ au point $\xi$ peut être exprimée par la formule

$$\vartheta(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \vartheta(\eta) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{i\rho\sqrt{i\chi}}}{\rho} \right) - \frac{e^{i\rho\sqrt{i\chi}}}{\rho} \frac{\partial \vartheta(\eta)}{\partial n} \right] dS(\eta), \quad \xi \in B_i. \tag{2.18}$$

C'est un théorème connu de Green dans la théorie classique de la conductibilité thermique.

Revenons au problème couplé de la thermoélasticité et exprimons la fonction $\varphi$ au point $\xi \in B_i$ par les intégrales de surface, qui contiennent les fonctions $\varphi, \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$, $\vartheta, \dfrac{\partial \vartheta}{\partial n}$ sur $S$.

Multiplions la seconde équation du groupe (2.10) par $\bar{\varphi}$, la seconde équation du groupe (2.11) par $\varphi$ ; soustrayons l'une de l'autre et effectuons l'intégration dans le domaine $B_i$, en admettant que $\xi \in B_i$. Nous obtiendrons l'équation suivante

$$\begin{aligned}(2.19)\qquad & \int_{B_i} (\bar{\varphi}\nabla^2\vartheta - \varphi\nabla^2\bar{\vartheta})\,\mathrm{d}V + i\chi\int_{B_i}(\vartheta\bar{\varphi} - \bar{\vartheta}\varphi)\,\mathrm{d}V + \\ & + \eta_0 i\chi\int_{B_i}(\bar{\varphi}\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\bar{\varphi})\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varkappa_0}\varphi(\xi).\end{aligned}$$

Multiplions maintenant la première équation du groupe (2.10) par $\bar{\varphi}$, la première équation du groupe (2.11) par $\varphi$, soustrayons l'une de l'autre et effectuons l'intégration dans le domaine $B_i$. On a alors

$$(2.20)\qquad \int_{B_i}(\bar{\varphi}\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\bar{\varphi})\,\mathrm{d}V - m_0\int_{B_i}(\vartheta\bar{\varphi} - \bar{\vartheta}\varphi)\,\mathrm{d}V = 0.$$

Multiplions enfin la première équation du groupe (2.10) par $\vartheta$, la première équation du groupe (2.11) par $\bar{\vartheta}$, soustrayons l'une de l'autre et effectuons l'intégration dans le domaine $B_i$ :

$$(2.21)\qquad \int_{B_i}(\bar{\vartheta}\nabla^2\varphi - \vartheta\nabla^2\bar{\varphi})\,\mathrm{d}V + \chi^2\int_{B_i}(\varphi\bar{\vartheta} - \bar{\varphi}\vartheta)\,\mathrm{d}V = 0.$$

Après les modifications différentes et après avoir éliminé certaines intégrales, nous obtenons enfin les formules suivantes en utilisant aussi la transformation de Green

$$\begin{aligned}(2.22)\quad J(\xi) = {} & \frac{\varkappa_0\, i\chi}{m_0}(1 + i\chi + \varepsilon)\int_S\left[\bar{\varphi}(\eta,\xi)\,\frac{\partial\varphi(\eta)}{\partial n} - \varphi(\eta)\frac{\partial\bar{\varphi}(\eta,\xi)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S(\eta) + \\ & + \varkappa_0\int_S\left[\bar{\varphi}(\eta,\xi)\,\frac{\partial\vartheta(\eta)}{\partial n} - \vartheta(\eta)\frac{\partial\bar{\varphi}(\eta,\xi)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S(\eta) + \\ & + \varkappa_0\int_S\left[\varphi(\eta)\frac{\partial\bar{\vartheta}(\eta,\xi)}{\partial n} - \bar{\vartheta}(\eta,\xi)\frac{\partial\varphi(\eta)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S(\eta),\end{aligned}$$

où

$$J(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{pour} \quad \xi \in B_i,$$
$$J(\xi) = 0 \qquad \text{pour} \quad \xi \in B_a.$$

Cette formule représente une généralisation du théorème de Helmholtz pour les problèmes de la thermoélasticité.

Examinons un cas particulier d'un problème non couplé, où $\varepsilon = 0$ et $k_1 = \chi$, $k_2 = \sqrt{i\chi}$. En portant $\varepsilon = 0$ ainsi que $\bar{\varphi}$ et $\bar{\vartheta}$ de l'équation (2.17) dans la relation (2.22), nous obtenons après des modifications simples l'expression suivante

$$(2.23)\quad J(\xi) = \frac{1}{4\pi}\int_S \left[\frac{e^{i\chi\rho}}{\rho}\,\frac{\partial\varphi(\eta)}{\partial n} - \varphi(\eta)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{i\chi\rho}}{\rho}\right)\right] dS(\eta) +$$

$$+\frac{m_0}{4\pi i\chi(1+i\chi)}\int_S \left[\vartheta(\eta)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{i\chi\rho}-e^{i\rho\sqrt{i\chi}}}{\rho}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{e^{i\chi\rho}-e^{i\rho\sqrt{i\chi}}}{\rho}\right)\frac{\partial\vartheta(\eta)}{\partial n}\right] dS(\eta),$$

où

$$J(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{pour} \quad \xi\in B_i,$$
$$J(\xi) = 0 \qquad \text{pour} \quad \xi\in B_a.$$

Un autre cas particulier est le milieu hypothétique, caractérisé par $\alpha_t = 0$. Dans ce milieu les ondes thermiques et élastiques sont indépendantes entre elles. Puisque pour $\varepsilon = 0$ on a $m_0 = 0$, nous obtiendrons pour ce milieu l'expression

$$(2.24)\qquad J(\xi) = \frac{1}{4\pi}\int_S \left[\frac{e^{i\chi\rho}}{\rho}\,\frac{\partial\varphi(\eta)}{\partial n} - \varphi(\eta)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{i\chi\rho}}{\rho}\right)\right] dS(\eta),$$

où

$$J(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{pour} \quad \xi\in B_i,$$
$$J(\xi) = 0 \qquad \text{pour} \quad \xi\in B_a.$$

Cette formule a une forme analogue à la formule de Helmholtz dans l'élastocinétique classique [4]. Une seule différence existe dans le coefficient $\chi = \dfrac{\omega\varkappa}{c_1^2}$ où la valeur $c_1^2 = \dfrac{\lambda+2\mu}{\rho_0}$ concerne des constantes isothermiques de Lamé.

On peut encore donner une autre forme pour la fonction $\varphi(\xi), \xi\in B_i$, en considérant une forme différente de la singularité. Examinons le système des équations (2.10) et le système suivant

$$(2.25)\qquad \begin{aligned} &(\nabla^2+\chi^2)\,\overline{\overline{\varphi}} - m_0\,\overline{\overline{\vartheta}} = -\frac{1}{c_0^2}\,\delta(\xi-\eta),\\ &(\nabla^2+i\chi)\,\overline{\overline{\vartheta}} + i\chi\eta_0\nabla^2\,\overline{\overline{\varphi}} = 0\,. \end{aligned}$$

Les singularités $\overline{\overline{\varphi}}$ et $\overline{\overline{\vartheta}}$ ont la forme suivante

$$(2.26)\qquad \begin{aligned} &\overline{\overline{\varphi}} = \frac{1}{4\pi\, c_0^2\,(k_2^2-k_1^2)\,\rho}\,(m_1\,e^{ik_1\rho}-m_2\,e^{ik_2\rho}),\\ &\overline{\overline{\vartheta}} = \frac{\eta_0\, i\,\chi}{4\pi\, c_0^2\,(k_2^2-k_1^2)\,\rho}\,(k_1^2\,e^{ik_1\rho}-k_2^2\,e^{ik_2\rho}),\\ &m_\alpha = i\chi - k_\alpha^2,\quad \alpha = 1,2. \end{aligned}$$

On voit d'après le système des équations (2.25) que ces singularités correspondent à l'action d'un centre de compression.

Multiplions la première des équations (2.10) par $\bar{\bar{\varphi}}$, la première équation du groupe (2.25) par $\varphi$, soustrayons l'une de l'autre et effectuons l'intégration dans le domaine $B_i$. Nous obtiendrons ainsi l'expression suivante

$$\varphi(\xi) = c_0^2 \int_{B_i} (\bar{\bar{\varphi}} \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \bar{\bar{\varphi}}) \,\mathrm{d}V - m_0 c_0^2 \int_{B_i} (\vartheta \bar{\bar{\varphi}} - \bar{\bar{\vartheta}} \varphi) \,\mathrm{d}V, \quad \xi \in B_i, \tag{2.27}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = {} & c_0^2 \int_S \left( \bar{\bar{\varphi}}(\eta, \xi) \frac{\partial \varphi(\eta)}{\partial n} - \varphi(\eta) \frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}(\eta, \xi)}{\partial n} \right) \mathrm{d}S(\eta) - \\ & - m_0 c_0^2 \int_{B_i} [\vartheta(\eta) \bar{\bar{\varphi}}(\eta, \xi) - \bar{\bar{\vartheta}}(\eta, \xi)\, \varphi(\eta)] \,\mathrm{d}V(\eta). \end{aligned} \tag{2.28}$$

La fonction est exprimée par une intégrale de surface et par une intégrale de volume, dans lesquelles se trouvent les fonctions $\vartheta$ et $\varphi$. La relation (2.28) n'étant pas utile pour la détermination de la fonction $\varphi(\xi)$ dans un problème couplé de la thermoélasticité, nous l'emploierons pour déduire le théorème de Helmholtz dans l'élastocinétique classique. Dans ce cas particulier nous avons à examiner un processus adiabatique, où l'on a

$$\vartheta = -\eta_0 \nabla^2 \varphi, \quad \bar{\bar{\vartheta}} = -\eta_0 \nabla^2 \bar{\bar{\varphi}}. \tag{2.29}$$

En portant les relations (2.29) dans (2.27) et en effectuant la transformation de Green, nous obtenons

$$\varphi(\xi) = c_0^2 (1 + \varepsilon) \int_S \left( \bar{\bar{\varphi}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}}{\partial n} \right) \mathrm{d}S(\eta), \quad \xi \in B_i, \quad \varepsilon = \eta m \varkappa. \tag{2.30}$$

La fonction $\bar{\bar{\varphi}}$ qui apparaît dans l'équation (2.30) se rapporte à la première des équations (2.25), où il faut substituer

$$\bar{\bar{\vartheta}} = -\eta_0 \nabla^2 \bar{\bar{\varphi}}.$$

Ainsi nous obtenons l'équation des ondes

$$(\nabla^2 + \sigma^2) \bar{\bar{\varphi}} = -\frac{1}{c_0^2 (1 + \varepsilon)} \delta(\xi - \eta), \qquad \sigma^2 = \frac{\chi^2}{1 + \varepsilon}$$

avec la solution singulière suivante

$$\bar{\bar{\varphi}} = \frac{1}{4\pi c_0^2 (1 + \varepsilon)} \frac{e^{i\sigma\rho}}{\rho}. \tag{2.31}$$

En portant la fonction (2.31) dans la relation (2.30), nous obtiendrons la relation

$$J(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{e^{i\sigma\rho}}{\rho} \frac{\partial \varphi(\eta)}{\partial n} - \varphi(\eta) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{i\sigma\rho}}{\rho} \right) \right] \mathrm{d}S(\eta), \tag{2.32}$$

où

$$J(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{pour} \quad \xi \in B_i\,,$$
$$J(\xi) = 0 \qquad \text{pour} \quad \xi \in B_a\,.$$

Cette relation revêt la forme suivante avec les variables $x$

$$J(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left[\frac{e^{i\sigma_1 r}}{r}\,\frac{\partial\varphi(y)}{\partial n_1} - \varphi(y)\,\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{e^{i\sigma_1 r}}{r}\right)\right] \mathrm{d}S(y) \tag{2.33}$$

où

$$J(x) = \varphi(x) \quad \text{pour} \quad x \in B_i\,,$$
$$J(x) = 0 \qquad \text{pour} \quad x \in B_a$$

et

$$\sigma_1 = \frac{\omega}{c_1(1+\varepsilon)^{1/2}} = \frac{\omega}{(c_1)_s}, \quad r = [(x_i - y_i)(x_i - y_i)]^{1/2}.$$

Ici $(c_1)_s$ désigne la vitesse de propagation d'une onde longitudinale dans les conditions adiabatiques.

La relation (2.33) est une formule connue de Helmholtz dans l'élastocinétique classique.

## BIBLIOGRAPHIE

1. M. A. Biot, *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*. J. Appl. Phys., **27**, 1956.
2. P. Chadwick, *Thermoelasticity. The dynamical theory*. Progress in Solid Mechanics, I, Amsterdam, 1960.
3. P. Chadwick, I. N. Sneddon, *Plane waves in an elastic solid conducting heat*. J. Mech. Phys. of Solids, **6**, 1958.
4. B. B. Baker, E. T. Copson, *The mathematical theory of Huygens' principle*. Oxford, 1953.