АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Том III, в. 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКОВА ДУМКА»
КИЕВ — 1967

1967 ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА Том III, в. 1
ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КИБЕРНЕТИКИ АН УССР

МОМЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТЕРМОУПРУГОСТИ

В. Новацкий

(Варшава)

Цель настоящей работы состоит в некоторых обобщениях теорем сопряженной термоупругости на случай среды, описываемой двумя независимыми векторами: вектором перемещений $\vec{u}$ и вектором вращений $\vec{\omega}$. На основе термодинамики необратимых процессов выведены определяющие уравнения и расширенное уравнение теплопроводности для изотропной среды. Получена основная система дифференциальных уравнений сопряженной термоупругости. Обсуждены вопросы распространения термоупругих волн в неограниченной среде. Приведен обобщенный принцип виртуальной работы для динамических задач сопряженной термоупругости. Установлена теорема о взаимности и обсуждены некоторые следствия, вытекающие из этой теоремы.

§ 1. **Введение**. Несимметричную теорию упругости предложил впервые W. Voigt [17] и затем развили E. Cosserat и F. Cosserat [7]. В этой теории предполагается, что взаимодействие материального объема с окружающей средой полностью описывается векторными полями напряжений и моментных напряжений на ограничивающей поверхности.

В настоящее время несимметричная теория упругости получила дальнейшее развитие. В частности, она оказалась полезной при выяснении некоторых закономерностей распространения коротких акустических волн в кристаллах, в поликристаллических структурах, а также в высокомолекулярных полимерах.

Упомянем в этой связи работы C. Truesdell, R. Toupin [16] и Э. Л. Аэро, Е. В. Кувшинского [1]. G. Grioli [10] и R. Toupin [14] преуспели в обобщении теории среды Коссера на случай конечных деформаций. Наконец, R. Mindlin, H. Tiersten [13] представили исчерпывающий анализ линейной теории для однородной, изотропной, центросимметрической среды.

В последующие годы Е. В. Кувшинский, Э. Л. Аэро [2], В. А. Пальмов [4] и A. Eringen, E. Suhubi [8] развили теорию несимметричной упругости, свободную от предположения о связи $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{u}$ между векторными полями смещений $\vec{u}$ и вращений $\vec{\omega}$, которое лежит в основе теории среды Коссера.

В настоящей работе рассмотрены, с точки зрения основ теории несимметричной упругости, взаимодействия между полями смещений $\vec{u}$, вращений $\vec{\omega}$ и температуры θ. На основе термодинамики необратимых процессов выведены определяющие уравнения для упругой однородной изотропной среды с центральной симметрией свойств. Дана полная система уравнений несимметричной термоупругости, уравнения движения и расширенное уравнение теплопроводности. В заключение приведена вариационная теорема, теорема о взаимности и некоторые их следствия.

§ 2. **Уравнения движения. Уравнение энергии и баланс энтропии.** Система уравнений движения, описывающая изменение импульса и изменение момента импульса, имеет вид [1, 13]

$$\sigma_{ji,j} + X_i - \varrho \ddot{u}_i = 0; \qquad e_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i - I\ddot{\omega}_i = 0, \qquad (i, j, k = 1, 2, 3), \tag{2.1}$$

где σ_{ji} — несимметричный тензор силовых напряжений; μ_{ji} — несимметричный тензор моментных напряжений; X_i, Y_i — соответственно объемная плотность массовых сил и массовых моментов; e_{ijk} — известный альтернирующий тензор; u_i и ω_i — составляющие векторов смещений и вращений.

Принцип сохранения энергии в произвольном объеме V, ограниченном поверхностью A, описывается в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \left[\frac{1}{2}(\varrho v_i v_i + I w_i w_i) + U\right] dV = \int\limits_V (X_i v_i + Y_i w_i)\, dV + \int\limits_A (p_i v_i + m_i w_i)\, dA - \int\limits_A q_i n_i dA. \tag{2.2}$$

Здесь $v_i = \dot{u}_i$, $w_i = \dot{\omega}_i$, U — внутренняя энергия; q_i — составляющие вектора теплового потока; величины p_i и m_i связаны с тензорами σ_{ji}, μ_{ji} следующим образом:

$$p_i = \sigma_{ji} n_j; \qquad m_i = \mu_{ji} n_j, \tag{2.3}$$

где n_i — составляющие вектора нормали на A.

Члены по левой стороне уравнения (2.2) представляют скорость возрастания кинетической и внутренней энергии рассматриваемого объема. Первый член по правой стороне представляет скорость работы объемных сил и объемных моментов, второй член — скорость работы поверхностных усилий и моментов. Наконец, последний интеграл по правой стороне (2.2) обозначает энергию, получаемую объемом посредством теплопроводности. Учитывая уравнения (2.1), (2.3) и используя теорему о дивергенции, получаем

$$\int\limits_V \{\dot{U} - [\sigma_{ji}(v_{i,j} - e_{kji}\omega_k) + \mu_{ji} w_{i,j}] + q_{i,i}\}\, dV = 0. \tag{2.4}$$

Это равенство справедливо для любого объема V. Если подынтегральное выражение непрерывно, то отсюда следует локальный закон

$$\dot{U} = \sigma_{ji}\dot{\gamma}_{ji} + \mu_{ji}\dot{\varkappa}_{ji} - q_{i,i}, \tag{2.5}$$

где $\gamma_{ji} = u_{i,j} - e_{kji}\omega_k$; $\varkappa_{ji} = \omega_{i,j}$ т. е. γ_{ji} — несимметричный тензор деформации; $\varkappa_{ji}$ — тензор кручения.

Уравнение баланса энтропии может быть записано в виде [9]

$$\int\limits_V \dot{S} dV = -\int\limits_A \frac{q_i n_i}{T} dA + \int\limits_V \Theta dV. \tag{2.6}$$

Левая сторона этого уравнения представляет скорость возрастания энтропии. Первый член по правой стороне является скоростью, с которой объем получает энтропию через поверхность; второй член — скоростью производства энтропии, вызванного теплопроводностью.

Используя теорему о дивергенции, имеем

$$\int_V \left[\dot{S} - \Theta - \left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i}\right] dV = 0. \tag{2.7}$$

Поскольку выбор объема произволен, получаем следующее уравнение, которое должно выполняться в каждой точке тела:

$$\dot{S} = \Theta - \frac{q_{i,i}}{T} + \frac{q_i T_{,i}}{T^2}. \tag{2.8}$$

В соответствии с постулатом термодинамики необратимых процессов имеем $\Theta \geqslant 0$.

Исключая $q_{i,i}$ из (2.5) и (2.8) и вводя выражение $F \equiv U - ST$ [свободную энергию Гельмгольца), находим

$$\dot{F} = \sigma_{ji}\dot{\gamma}_{ji} + \mu_{ji}\dot{\varkappa}_{ji} - \dot{T}S - T\left(\Theta + \frac{q_i T_{,i}}{T^2}\right). \tag{2.9}$$

Поскольку свободная энергия является функцией независимых переменных γ_{ji}, $\varkappa_{ji}$, T, то

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ji}}\dot{\gamma}_{ji} + \frac{\partial F}{\partial \varkappa_{ji}}\dot{\varkappa}_{ji} + \frac{\partial F}{\partial T}\dot{T}. \tag{2.10}$$

Предполагая, что функции Θ, $q_i, \ldots \sigma_{ji}$, μ_{ji} не зависят явным образом от производных по времени функций γ_{ji}, $\varkappa_{ji}$, T, определяя энтропию при помощи соотношения $S \equiv -\frac{\partial F}{\partial T}$ и сравнивая выражение (2.9) с (2.10), получаем

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ji}}; \quad \mu_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \varkappa_{ji}}; \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}; \quad \Theta + \frac{q_i T_{,i}}{T^2} = 0. \tag{2.11}$$

Второй закон термодинамики будет выполнен для $\Theta \geqslant 0$ или для $-\frac{T_{,i} q_i}{T^2} \geqslant 0$.

Согласно закону теплопроводности Фурье, имеем

$$-q_i = k_{ij} T_{,j} \text{ или } -q_i = k_{ij}\theta_{,j}, \quad T \equiv T_0 + \theta.$$

Здесь T_0 — температура тела в его естественном состоянии, в котором напряжения и деформации равны нулю (т. е. для $\gamma_{ji} = \mu_{ji} = 0$, $T = T_0$); коэффициенты теплопроводности k_{ij} являются компонентами симметричного тензора.

Из уравнения (2.8), учитывая последнее из соотношений (2.11), определяем

$$T\dot{S} = -q_{i,i} = k_{ij}\theta_{,ij}. \tag{2.12}$$

Для однородного и изотропного тела имеем

$$T\dot{S} = k\theta_{,jj}, \tag{2.13}$$

где k является константой.

§ 3. **Определяющие уравнения**. Разлагая выражение для свободной энергии $F(\gamma_{ji}, \varkappa_{ji}, T)$ в ряд Тейлора в окрестности естественного состояния

$\gamma_{ji} = \varkappa_{ji} = 0$, $T = T_0$ и опуская члены порядка выше второго, для центросимметричной среды получаем

$$F = \frac{\mu+\alpha}{2}\gamma_{ji}\gamma_{ji} + \frac{\mu-\alpha}{2}\gamma_{ji}\gamma_{ij} + \frac{\lambda}{2}\gamma_{kk}\gamma_{nn} +$$

$$+ \frac{\gamma+\varepsilon}{2}\varkappa_{ji}\varkappa_{ji} + \frac{\gamma-\varepsilon}{2}\varkappa_{ji}\varkappa_{ij} + \frac{\beta}{2}\varkappa_{kk}\varkappa_{nn} - \nu\gamma_{kk}\theta - \chi\varkappa_{kk}\theta - \frac{m}{2}\theta^2. \quad (3.1)$$

Этот результат вытекает из следующих соображений. Поскольку свободная энергия является скаляром, то любой член по правой стороне выражения (3.1) должен быть скаляром. Из компонентов несимметричного тензора γ_{ji} можно образовать три независимых квадратичных инварианта, а именно $\gamma_{ji}\gamma_{ji}$, $\gamma_{ji}\gamma_{ij}$ и $\gamma_{kk}\gamma_{nn}$. Аналогичное замечание относится к тензору $\varkappa_{ji}$. Члены $\gamma_{ji}\varkappa_{ji}$, $\gamma_{ji}\varkappa_{ij}$ и $\gamma_{kk}\varkappa_{nn}$ отсутствуют в выражении (3.1), так как в противном случае это противоречило бы предположению о центросимметричной изотропии. В седьмом и восьмом членах (3.1) имеются инварианты γ_{kk}, $\varkappa_{kk}$. Это следует из того обстоятельства, что тензоры имеют лишь по одному линейному инварианту, а именно γ_{kk} и $\varkappa_{kk}$.

Используя соотношения (2.11), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} &= (\mu+\alpha)\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\gamma_{ij} + (\lambda\gamma_{kk} - \nu\theta)\delta_{ij}; \\ \mu_{ji} &= (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ji} + (\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ij} + (\beta\varkappa_{kk} - \chi\theta)\delta_{ij}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$S = \nu\gamma_{kk} + \chi\varkappa_{kk} + m\theta. \quad (3.3)$$

Соотношения (3.2) могут быть записаны в другом, эквивалентном виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu\gamma_{(ij)} + 2\alpha\gamma_{\langle ij\rangle} + (\lambda\gamma_{kk} - \nu\theta)\delta_{ij}; \\ \mu_{ij} &= 2\gamma\varkappa_{(ij)} + 2\varepsilon\varkappa_{\langle ij\rangle} + (\beta\varkappa_{kk} - \chi\theta)\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь μ, λ — константы Ламе; α, γ, ε, β — новые упругие константы, отнесенные к изотермическому состоянию (константы ν, χ зависят как от механических, так и термических свойств тела); скобки ( ), $<\ >$ обозначают симметричную и антисимметричную части тензора.

Решая уравнения (3.4) относительно γ_{ij} и χ_{ij}, находим

$$\gamma_{ij} = \alpha_t\delta_{ij}\theta + 2\mu'\sigma_{(ij)} + 2\alpha'\sigma_{\langle ij\rangle} + \lambda'\delta_{ij}\sigma_{kk}; \quad (3.5)$$

$$\varkappa_{ij} = \beta_t\delta_{ij}\theta + 2\gamma'\mu_{(ij)} + 2\varepsilon'\mu_{\langle ij\rangle} + \beta'\delta_{ij}\mu_{kk}, \quad (3.6)$$

где $\mu' \equiv \frac{1}{4\mu}$; $\alpha' \equiv \frac{1}{4\alpha}$; $\gamma' \equiv \frac{1}{4\gamma}$; $\varepsilon' \equiv \frac{1}{4\varepsilon}$; $\lambda' \equiv -\frac{\lambda}{6\mu K}$; $\beta' \equiv -\frac{\beta}{6\gamma\Omega}$; $\alpha_t \equiv \frac{\nu}{3K}$; $\beta_t \equiv \frac{\chi}{3\Omega}$; $K \equiv \frac{2}{3}\mu + \lambda$; $\Omega \equiv \frac{2}{3}\gamma + \beta$, причем величина α_t является коэффициентом теплового расширения.

При увеличении объема элемента, свободного от силовых и моментных напряжений, за счет только изменения температуры имеем

$$\gamma^0_{ij} = \alpha_t\delta_{ij}\theta; \quad \varkappa^0_{ij} = 0.$$

Коэффициент β_t и, следовательно, величина χ должны быть равны нулю. Это утверждение обосновывается также следующими соображениями. Рассмотрим задачу классической эластокинетики, в которой предполагается адиабатичность процесса ($\dot{S}=0$). Для адиабатического процесса температура определяется формулой

$$\theta = -\frac{1}{m}(\nu\gamma_{kk} + \chi\varkappa_{kk}). \tag{3.7}$$

Используя (3.7) в соотношениях (3.4), получаем *

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu\gamma_{(ij)} + 2\alpha\gamma_{\langle ij\rangle} + (\lambda^*\gamma_{kk} + \tau^*\varkappa_{kk})\,\delta_{ij}; \\ \mu_{ij} &= 2\mu\varkappa_{(ij)} + 2\varepsilon\varkappa_{\langle ij\rangle} + (\beta^*\varkappa_{kk} + \delta^*\gamma_{kk})\,\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\lambda^* \equiv \lambda + \frac{\nu^2}{m}$; $\beta^* \equiv \beta + \frac{\chi^2}{m}$; $\tau^* \equiv \delta^* \equiv \frac{\nu\chi}{m}$.

Как видно, соотношения (3.8) противоречат формулам для изотропного центросимметричного тела, для которого силовые напряжения σ_{ij} не зависят от $\varkappa_{ij}$, а моментные напряжения не зависят от γ_{ij}[2, 13]. Следовательно, величина χ должна равняться нулю и в выражении для свободной энергии (3.1), можно положить $\chi = 0$.

Таким образом, окончательный вид соотношений (3.2), (3.3) будет следующим:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu\gamma_{(ij)} + 2\alpha\gamma_{\langle ij\rangle} + (\lambda\gamma_{kk} - \nu\theta)\,\delta_{ij}; \\ \mu_{ij} &= 2\mu\varkappa_{(ij)} + 2\varepsilon\varkappa_{\langle ij\rangle} + \beta\varkappa_{kk}\delta_{ij}; \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$S = \nu\gamma_{kk} + m\theta. \tag{3.10}$$

В соотношении (3.10) имеется величина m, которая будет определена далее.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dU = \sigma_{ji}d\gamma_{ji} + \mu_{ji}d\varkappa_{ji} + TdS. \tag{3.11}$$

Используя формулу

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial\gamma_{ji}}\right)_{\varkappa,T} d\gamma_{ji} + \left(\frac{\partial S}{\partial\varkappa_{ji}}\right)_{\gamma,T} d\varkappa_{ji} + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\varkappa,\gamma} dT \tag{3.12}$$

и учитывая, что dU является полным дифференциалом, находим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial\varkappa_{ji}}\right)_{\varkappa,T} - \nu\delta_{ij} = 0; \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial\varkappa_{ji}}\right)_{\gamma,T} = 0. \tag{3.13}$$

Подставляя эти формулы в (3.11) и (3.12) и принимая во внимание, что $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\gamma,\varkappa} = \frac{c_\varepsilon}{T}$, где c_ε является удельной теплоемкостью при постоянных деформациях, получаем

$$dU = \sigma_{ji}d\gamma_{ji} + \mu_{ji}d\varkappa_{ji} + T\nu d\gamma_{kk} + c_\varepsilon dT; \qquad dS = \nu d\gamma_{kk} + c_\varepsilon\frac{dT}{T}. \tag{3.14}$$

Интегрируя второе выражение (3.14) в предположении, что для естественного состояния $S = 0$, выводим

$$S = \nu\gamma_{kk} + c_\varepsilon \log\frac{T}{T_0}. \tag{3.15}$$

---

* Заметим, что для среды Коссера, т. е. для $2\omega_i = e_{ijk}u_{k,j}$ имеем $\varkappa_{kk} = 0$.

Предположив, что $\left|\frac{\theta}{T_0}\right| \ll 1$, разложим логарифм в степенной ряд. Сохраняя лишь первый член этого ряда, определяем

$$S = \gamma_{kk}\nu + c_\varepsilon \frac{\theta}{T_0}. \tag{3.16}$$

Из сравнения соотношений (3.10) и (3.16) следует равенство $m = \frac{c_\varepsilon}{T_0}$.

§ 4. Дифференциальные уравнения термоупругости. Определяющие уравнения (3.9) дают возможность получить уравнения движения (2.1), в виде, содержащем вектор смещения $\vec{u}$, вектор вращения $\vec{\omega}$ и температуру θ

$$\begin{gathered}(\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - (\mu + \alpha)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} + 2\alpha\operatorname{rot}\vec{\omega} + \vec{X} = \rho\ddot{\vec{u}} + \nu\operatorname{grad}\theta;\\ (\beta + 2\gamma)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\omega} - (\gamma + \varepsilon)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\omega} + 2\alpha\operatorname{rot}\vec{u} - 4\alpha\vec{\omega} + \vec{Y} = I\ddot{\vec{\omega}}.\end{gathered} \tag{4.1}$$

К дифференциальным уравнениям (4.1) нужно добавить уравнение теплопроводности. Для этого рассмотрим соотношение (2.13) и выражение (3.15), преобразовав его к виду

$$T\dot{S} = \nu T\dot{\gamma}_{kk} + c_\varepsilon \dot{T}. \tag{4.2}$$

Из сравнения этих соотношений следует

$$\theta_{,jj} - \frac{1}{\varkappa}\dot{\theta} - \eta_0\left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right)\operatorname{div}\dot{\vec{u}} = 0, \qquad \left(\varkappa \equiv \frac{k}{c_\varepsilon};\ \eta_0 \equiv \frac{\nu T_0}{k}\right). \tag{4.3}$$

Для линеаризации уравнения (4.3) предполагаем, что $\left|\frac{\theta}{T_0}\right| \ll 1$. Кроме этого, учитывая тепловые источники внутри тела и обозначая их интенсивность в единице объема за единицу времени через W, получаем расширенное уравнение теплопроводности

$$\theta_{,jj} - \frac{1}{\varkappa}\dot{\theta} - \eta_0\operatorname{div}\dot{\vec{u}} = -\frac{Q}{\varkappa}, \qquad \left(Q \equiv \frac{W}{k}\right). \tag{4.4}$$

Следует отметить, что в формуле (4.4) участвует только первый инвариант деформации γ_{kk}, связанный с изменением объема.

Соотношения (4.1) и (4.4) составляют систему уравнений линейной сопряженной несимметричной термоупругости, к которой необходимо добавить формулы, выражающие краевые и начальные условия. Если на поверхности A, ограничивающей тело объемом V, заданы силовые и моментные напряжения p_i, m_i и температура θ, то краевые условия могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered}p_i(\vec{x}, t) = \sigma_{ji}(\vec{x}, t)\, n_j(\vec{x}); \qquad m_i(\vec{x}, t) = \mu_{ji}(\vec{x}, t)\, n_j(\vec{x});\\ \theta(\vec{x}, t) = h(\vec{x}, t), \qquad (\vec{x} \in A,\ t > 0).\end{gathered} \tag{4.5}$$

Начальные условия будут выражены формулами

$$\begin{gathered}u_i(\vec{x}, 0) = f_i(\vec{x}); \quad \dot{u}_i(\vec{x}, 0) = g_i(\vec{x}); \quad \omega_i(\vec{x}, 0) = l_i(\vec{x});\\ \dot{\omega}_i(\vec{x}, 0) = k_i(\vec{x}); \quad \theta(\vec{x}, 0) = r(\vec{x}), \quad (x \in V,\ t = 0).\end{gathered} \tag{4.6}$$

Динамические уравнения термоупругости (4.1), могут быть расчленены посредством разложения векторных полей $\vec{u}$, $\vec{\omega}$ на потенциальные и селеноидальные части

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\vec{\Psi}; \quad \vec{\omega} = \operatorname{grad}\zeta + \vec{\Phi}; \quad \operatorname{div}\vec{\Psi} = 0; \quad \operatorname{div}\vec{\Phi} = 0. \tag{4.7}$$

Производя аналогичное разложение объемных сил и моментов

$$\vec{X} = \operatorname{grad}\vartheta + \operatorname{rot}\vec{\chi}; \qquad \vec{Y} = \operatorname{grad}\sigma + \vec{\Omega}, \tag{4.8}$$

приходим к следующей системе уравнений:

$$\Box_1^2\varphi = n\theta - \frac{1}{c_1^2}\vartheta \quad (4.9); \qquad \Box_3^2\zeta - s\zeta = -\frac{\sigma}{c_3^2}; \tag{4.10}$$

$$\Box_2^2\vec{\Psi} - r\vec{\Phi} = -\frac{1}{c_2^2}\vec{\chi} \quad (4.11); \qquad \Box_4^2\vec{\Phi} - p\nabla^2\vec{\Psi} - 2p\vec{\Phi} = -\frac{\vec{\Omega}}{c_4^2}. \tag{4.12}$$

Здесь $\Box_\alpha^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c_\alpha^2}\partial_t^2$, $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$; $c_1 \equiv \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}\right)^{1/2}$; $c_2 \equiv \left(\frac{\mu + \alpha}{\varrho}\right)^{1/2}$; $c_3 \equiv \left(\frac{\beta + 2\gamma}{I}\right)^{1/2}$; $c_4 \equiv \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{I}\right)^{1/2}$; $r \equiv \frac{2\alpha}{\varrho c_2^2}$; $s \equiv \frac{4\alpha}{Ic_3^2}$; $p \equiv \frac{2\alpha}{Ic_4^2}$.

К формулам (4.9) — (4.12) следует добавить уравнение теплопроводности

$$D\theta - \eta_0\nabla^2\dot{\varphi} = -\frac{Q}{\varkappa}; \qquad D \equiv \nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t. \tag{4.13}$$

Рассмотрим распространение термоупругих волн в бесконечном пространстве. Исключив из сопряженных уравнений (4.9) и (4.13) температуру, получим уравнение распространения продольных волн

$$(\Box_1^2 D - \eta_0\partial_t\nabla^2)\,\varphi = -\frac{nQ}{\varkappa} - \frac{1}{c_1^2}D\vartheta\,, \quad \left(\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}\right). \tag{4.14}$$

В случае, когда величины $\vec{\chi}$, $\vec{\Omega}$, σ равны нулю, а начальные условия для ζ, $\vec{\Psi}$, $\vec{\Phi}$ однородны, в неограниченной среде распространяются только волны расширения. Описывающее эти волны выражение (4.14) идентично соответствующему уравнению для классической упругой среды (без моментных напряжений). Как известно, эти волны подчиняются затуханию и дисперсии. Поскольку $u_i = \varphi_{,i}$; $\omega_i = 0$; $\gamma_{ji} = \varphi_{,ij}$; $\varkappa_{ji} = 0$, получаем

$$\sigma_{(ij)} = 2\mu\,(\varphi_{,ij} - \delta_{ij}\varphi_{,kk}) + \varrho\,(\ddot{\varphi} - \vartheta)\,\delta_{ij}, \qquad (\sigma_{\langle ij\rangle} = 0,\ \mu_{ij} = 0). \tag{4.15}$$

Если величины Q, ϑ, $\vec{\chi}$, Ω равны нулю, а начальные условия для θ, φ, $\overleftarrow{\Psi}$, $\vec{\Phi}$ однородны, то в неограниченной среде распространяются только волны вращения, описываемые уравнением (4.10). При этом $u_i = 0$; $\omega_i = \zeta_{,i}$; $\varkappa_{ji} = \omega_{i,j} = \zeta_{,ij}$; $\gamma_{ji} = 0$;

$$\mu_{(ij)} = 2\gamma\zeta_{,ij} + \beta\delta_{ij}\nabla^2\zeta; \qquad \mu_{\langle ij\rangle} = \sigma_{ji} = 0. \tag{4.16}$$

Распространению этих волн не сопутствует поле температуры.

В случае, когда величины Q, ϑ, σ равны нулю, а начальные условия для φ, ζ, θ однородны, в бесконечной среде распространяются только волны искажения, описываемые системой (4.11) и (4.12). Исключая из этих уравнений $\vec{\Psi}$ и затем $\vec{\Phi}$, получаем

$$\begin{aligned} &[(\square_4^2 - 2p)\,\square_2^2 - pr\nabla^2]\,\vec{\Phi} = -\frac{p}{c_2^2}\,\nabla^2\vec{\chi} - \frac{1}{c_4^2}\,\square_2^2\vec{\Omega}; \\ &[(\square_4^2 - 2p)\,\square_2^2 - pr\nabla^2]\,\vec{\Psi} = -\frac{r}{c_4^2}\,\vec{\Omega} - \frac{1}{c_2^2}\,(\square_4^2 - 2p)\,\vec{\chi}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Поле температуры не сопутствует также распространению волн искажения. Они не вызывают никаких изменений объема тела, поскольку $\operatorname{div}\vec{u} = 0$. Тензор силовых напряжений σ_{ji} и тензор моментных напряжений μ_{ji} являются симметричными.

В ограниченном теле будут распространяться все три указанных вида волн. Уравнения (4.9) — (4.13) в этом случае сопряжены посредством краевых условий.

§ 5. Принцип виртуальной работы. Легко показать справедливость следующего выражения:

$$\int_V [(X_i - \varrho\ddot{u}_i)\,\delta u_i + (Y_i - I\ddot{\omega}_i)\,\delta\omega_i]\,dV + \int_A (p_i\delta u_i + m_i\delta\omega_i)\,dA = \int_V (\sigma_{ji}\delta\gamma_{ji} + \mu_{ji}\delta\varkappa_{ji})\,dV. \tag{5.1}$$

Левая сторона этого уравнения представляет вариацию работы внешних усилий, а правая — внутренних напряжений. Символы δu_i, $\delta\omega_i$ обозначают виртуальные изменения компонентов векторов смещения u_i и вращения ω_i. Используя в правой части уравнения (5.1) соотношения (3.9), приведем это уравнение к виду

$$\int_V [(X_i - \varrho\ddot{u}_i)\,\delta u_i + (Y_i - I\ddot{\omega}_i)\,\delta\omega_i]\,dV + \int_A (p_i\delta u_i + m_i\delta\omega_i)\,dA = \delta W - \nu\int_V \theta\delta\gamma_{kk}dV, \tag{5.2}$$

где

$$\delta W = \int_V (2\mu\gamma_{(ij)}\,\delta\gamma_{(ij)} + 2\alpha\gamma_{\langle ij\rangle}\delta\gamma_{\langle ij\rangle} + 2\gamma\varkappa_{(ij)}\delta\varkappa_{(ij)} + 2\varepsilon\varkappa_{\langle ij\rangle}\delta\varkappa_{\langle ij\rangle} + \lambda\gamma_{kk}\delta\gamma_{kk} + \beta\varkappa_{kk}\delta\varkappa_{kk})\,dV.$$

К уравнению (5.2) нужно добавить другие соотношения, так как в нем участвуют в явном виде лишь четыре причины, а именно X_i, Y_i, p_i, m_i. Присоединим зависимость, выведенную из уравнения теплопроводности M. A. Biot [5]

$$-\nu\int_V \theta\delta\gamma_{kk}dV = \int_A \theta n_i\delta H_i dA + \frac{c_\varepsilon}{T_0}\int_V \theta\delta\theta dV + \frac{T_0}{k}\int_V \dot{H}_i\delta H_i dV. \tag{5.3}$$

Вектор $\vec{H}$ связан с вектором теплового потока $\vec{q}$ и энтропией S следующим образом:

$$\vec{q} = T_0 \dot{\vec{H}}; \qquad S = -\operatorname{div}(\vec{H}). \tag{5.4}$$

Исходя из выражений (5.2) и (5.3), получаем

$$\delta(W + P + D) = \int_V [(X_i - \varrho \ddot{u}_i)\,\delta u_i + (Y_i - I\ddot{\omega}_i)\delta\omega_i] dV +$$

$$+ \int_A (p_i \delta u_i + m_i \delta\omega_i)\, dA - \int_A \theta n_i \delta H_i dA. \tag{5.5}$$

Здесь использован тепловой потенциал $P \equiv \frac{c_\varepsilon}{2T_0} \int_V \theta^2 dV$ и диссипативная функция D, причем $\delta D \equiv \frac{T_0}{k} \int_V \dot{H}_i \delta H_i dV$. В случае, когда $Y_i = m_i = \varkappa_{ji} = = \alpha = \gamma = \varepsilon = \beta = 0$, формула (5.5) сводится к вариационному уравнению сопряженной термоупругости без моментных напряжений.

Вариационный принцип, выраженный уравнением (5.5), может быть использован для установления энергетической теоремы. Для этого следует сравнить значения функций u_i, ω_i, θ в точке $\vec{x}$ в момент t с их значениями в этой же точке после истечения времени dt. Итак, используя в (5.5) величины $\delta u_i = v_i dt$; $\delta\omega_i = w_i dt$; $\delta\theta = \dot{\theta} dt$; $\delta H = \dot{H}_i dt = -\frac{k}{T_0}\theta_i dt$ и другие, им аналогичные обозначения, получаем следующую формулу:

$$\frac{d}{dt}(K + W + P) + \chi_0 = \int_V (X_i v_i + Y_i w_i)\, dV + \int_A (p_i v_i +$$

$$+ m_i w_i)\, dA + \frac{k}{T_0} \int_A \theta n_i \theta_{,i} dA. \tag{5.6}$$

Здесь

$$K = \frac{\varrho}{2} \int_V v_i v_i dV + \frac{I}{2} \int_V w_i w_i dV; \qquad \chi_\theta = \frac{dD}{dt} = \frac{k}{T_0} \int_V \theta_{,i} \theta_{,i} dV > 0,$$

причем K — кинетическая энергия, а величина χ_θ пропорциональна интенсивности производства энтропии и поэтому всегда положительна.

Энергетическую теорему (5.6) можно использовать при доказательстве теоремы единственности для односвязного тела. Способ проведения этого доказательства не будет отличаться от указанного в работах [12, 18].

§ 6. **Теорема о взаимности.** Рассмотрим две системы причин в упругом теле V, ограниченном поверхностью A. К причинам причислим: объемные силы X_i и моменты Y_i, тепловые источники Q, поверхностные нагрузки p_i, m_i и нагрев поверхности (заданную на поверхности A температуру или тепловой поток). Следствиями являются: составляющие вектора смещения u_i, вектора вращения ω_i и температура θ. Вторую систему причин и следствий будем отличать от первой, используя символы со штрихом. В дальнейшем предполагаем, что начальные условия однородны.

Применив к определяющим уравнениям одностороннее преобразование Лапласа, получим соотношения:

$$\bar{\sigma}_{ji} = (\mu + \alpha)\,\bar{\gamma}_{ji} + (\mu - \alpha)\,\bar{\gamma}_{ij} + (\lambda \bar{\gamma}_{kk} - \bar{\nu}\theta)\,\delta_{ij}; \tag{6.1}$$

$$\bar{\mu}_{ji} = (\gamma + \varepsilon)\bar{\varkappa}_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\bar{\varkappa}_{ij} + \beta\bar{\varkappa}_{kk}\delta_{ij}, \tag{6.1}$$

где

$$\bar{\sigma}_{ji} = (\vec{x}, p) \equiv L[\sigma_{ji}(\vec{x}, t)] \equiv \int_0^\infty \sigma_{ji}(\vec{x}, t)\, e^{-pt}\, dt;$$

аналогичные соотношения можно записать для $\bar{\sigma}'_{ji}$ и $\bar{\mu}'_{ji}$.

Следовательно, справедливо следующее тождество:

$$\bar{\sigma}_{ji}\bar{\gamma}'_{ji} + \bar{\mu}_{ji}\bar{\varkappa}'_{ji} - \bar{\sigma}'_{ji}\bar{\gamma}_{ji} - \bar{\mu}'_{ji}\bar{\varkappa}_{ji} = \nu(\bar{\theta}'\bar{\gamma}_{kk} - \bar{\theta}\bar{\gamma}'_{kk}). \tag{6.2}$$

Интегрируя (6.2) по объему V, находим

$$\int_V (\bar{\sigma}_{ji}\bar{\gamma}'_{ji} - \bar{\sigma}'_{ji}\bar{\gamma}_{ji} + \bar{\mu}_{ji}\bar{\varkappa}'_{ji} - \bar{\mu}'_{ji}\bar{\varkappa}_{ji})\, dV = \nu \int_V (\bar{\theta}'\bar{\gamma}_{kk} - \bar{\theta}\bar{\gamma}'_{kk})\, dV. \tag{6.3}$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнениям движения, получаем

$$\bar{\sigma}_{ji,j} + \bar{X}_i = p^2\varrho\bar{u}_i; \qquad e_{ijk}\bar{\sigma}_{jk} + \bar{\mu}_{ji,j} + \bar{Y}_i = p^2 I\bar{\omega}_i, \tag{6.4}$$

а также аналогичные уравнения для штрихованных величин. Воспользовавшись соотношениями (6.4), выражение (6.3) приведем к виду

$$\int_V (\bar{X}_i\bar{u}'_i + \bar{Y}_i\bar{\omega}'_i)\, dV + \int_A (\bar{p}_i\bar{u}'_i + \bar{m}_i\bar{\omega}'_i)\, dA = \int_V (\bar{X}'_i\bar{u}_i + \bar{Y}'_i\bar{\omega}_i)\, dV +$$

$$+ \int_A (\bar{p}'_i\bar{u}_i + \bar{m}'_i\bar{\omega}_i)\, dA + \nu \int_V (\bar{\theta}'\bar{\gamma}_{kk} - \bar{\theta}\bar{\gamma}'_{kk})\, dV. \tag{6.5}$$

Таким образом, установлена первая часть теоремы о взаимности. Вторая часть этой теоремы будет получена с использованием уравнений теплопроводности для обеих систем.

Применив к уравнению теплопроводности преобразование Лапласа и используя предположение об однородности начальных условий, определяем

$$\bar{\theta}_{,jj} - \frac{p}{\varkappa}\bar{\theta} - \eta_0 p\bar{\gamma}_{kk} = -\frac{\bar{Q}}{\varkappa}; \qquad \bar{\theta}'_{,jj} - \frac{p}{\varkappa}\bar{\theta}' - \eta_0 p\bar{\gamma}'_{kk} = -\frac{\bar{Q}'}{\varkappa}. \tag{6.6}$$

Прибавляя ко второму уравнению (6.6), умноженному на $\bar{\theta}$, первое, умноженное на $-\bar{\theta}'$, интегрируя результат по объему V и используя теорему Грина, находим

$$p\eta_0 \int_V (\bar{\gamma}_{kk}\bar{\theta}' - \bar{\gamma}'_{kk}\bar{\theta})\, dV + \frac{1}{\varkappa}\int_V (\bar{Q}\bar{\theta}' - \bar{Q}'\bar{\theta})\, dV - \int_A (\bar{\theta}'\bar{\theta}_{,n} - \bar{\theta}'_{,n}\bar{\theta})\, dA = 0. \tag{6.7}$$

Исключив из (6.5) и (6.7) общий член, запишем теорему о взаимности в окончательном виде

$$\frac{\eta_0\varkappa p}{\nu}\left[\int_V (\bar{X}_i\bar{u}'_i - \bar{X}'_i\bar{u}_i + \bar{Y}_i\bar{\omega}'_i - \bar{Y}'_i\bar{\omega}_i)\, dV + \int_A (\bar{p}_i\bar{u}'_i - \bar{p}'_i\bar{u}_i + \bar{m}_i\bar{\omega}'_i - \bar{m}'_i\bar{\omega}_i)\right] dA +$$

$$+ \varkappa \int_A (\bar{\theta}\bar{\theta}'_{,n} - \bar{\theta}'\bar{\theta}_{,n})\, dA + \int_V (\bar{Q}'\bar{\theta} - \bar{Q}\bar{\theta}')\, dV = 0. \tag{6.8}$$

Это уравнение содержит все причины и следствия. Применяя к (6.8) обратное преобразование Лапласа, получаем

$$\frac{\eta_0 \varkappa}{\nu}\left\{\int\limits_V dV(x)\int\limits_0^t\left[X_i(x,\tau)\frac{\partial u_i'(x,t-\tau)}{\partial\tau}-X_i'(x,t-\tau)\frac{\partial u_i(x,\tau)}{\partial\tau}+\right.\right.$$

$$+Y_i(x,\tau)\frac{\partial\omega_i'(x,t-\tau)}{\partial\tau}-Y_i'(x,t-\tau)\frac{\partial\omega_i(x,\tau)}{\partial\tau}\Big]d\tau+$$

$$+\int\limits_A dA(x)\int\limits_0^t\Big[p_i(x,\tau)\frac{\partial u_i'(x,t-\tau)}{\partial\tau}-p_i'(x,t-\tau)\frac{\partial u_i(x,\tau)}{\partial\tau}+$$

$$\left.\left.+m_i(x,\tau)\frac{\partial\omega_i'(x,t-\tau)}{\partial\tau}-m_i'(x,t-\tau)\frac{\partial\omega_i(x,\tau)}{\partial\tau}\right]d\tau\right\}+$$

$$+\varkappa\int\limits_A dA(x)\int\limits_0^t[\theta(x,\tau)\theta_{,n}'(x,t-\tau)-\theta'(x,t-\tau)\theta_{,n}(x,\tau)]\,d\tau+$$

$$+\int\limits_V dV(x)\int\limits_0^t[\theta(x,\tau)Q'(x,t-\tau)-\theta'(x,t-\tau)Q(x,\tau)]\,d\tau=0. \tag{6.9}$$

Для $Y=Y_i'=m_i=m_i'=0$ теорема о взаимности (6.9) переходит в теорему о взаимности для упругой среды без моментных напряжений, которую установила V. Jonescu-Cazimir [11].

Для статической нагрузки и стационарного теплового потока имеем систему уравнений

$$\begin{gathered}\int\limits_V(X_iu_i'-X_i'u_i+Y_i\omega_i'-Y_i'\omega_i)\,dV+\int\limits_A(p_iu_i'-p_i'u_i+\\+m_i\omega_i'-m_i'\omega_i)\,dA+\nu\int\limits_V(\theta\gamma_{kk}'-\theta'\gamma_{kk})\,dV=0;\\ \int\limits_V(Q'\theta-Q\theta')\,dV+\varkappa\int\limits_A(\theta\theta_{,n}'-\theta'\theta_{,n})\,dA=0.\end{gathered} \tag{6.10}$$

В теореме о взаимности (6.10) распределения температур θ, θ' считаются известными функциями, являющимися решениями уравнений теплопроводности, а именно $\theta_{,jj}=-Q/\varkappa$; $\theta'_{,jj}=-Q'/\varkappa$. Второе уравнение (6.10) может рассматриваться как теорема о взаимности для теплопроводности.

§ 7. **Следствия теоремы о взаимности.** Рассмотрим сначала бесконечное тело. Пусть в точке ξ приложена сосредоточенная мгновенная сила $X_i=\delta(x-\xi)\delta(t)\,\delta_{ik}$, направленная по оси x_k. Обозначим через $U_i^{(k)}(x,\xi,t)$ перемещения, вызванные действием этой силы. Далее, пусть в точке η приложена сосредоточенная мгновенная сила $X_i'=\delta(x-\eta)\,\delta(t)\,\delta_{ij}$, направленная по оси x_j. Перемещения, вызванные этой силой, обозначим через

$U_i^{(j)}$ (x, η, t). Из теоремы о взаимности (6.9), сформулированной для неограниченного тела, следует

$$\int\limits_V dV(x) \int\limits_0^t d\tau \left[\delta(x-\xi)\,\delta(\tau)\,\delta_{ik} \frac{\partial U_i^{(j)}(x, \eta, t-\tau)}{\partial \tau} - \right.$$

$$\left. - \delta(x-\eta)\,\delta(t-\tau)\,\delta_{ij} \frac{\partial U_i^{(k)}(x, \xi, \tau)}{\partial \tau} \right] = 0, \qquad (7.1)$$

т. е. имеет место равенство

$$\dot{U}_k^{(j)}(\xi, \eta, t) = \dot{U}_j^{(k)}(\eta, \xi, t).$$

Следовательно,

$$U_k^{(j)}(\xi, \eta, t) = U_j^{(k)}(\eta, \xi, t). \qquad (7.2)$$

Пусть в точке ξ бесконечного тела приложена сосредоточенная мгновенная сила $X_i = \delta(x-\xi)\,\delta(t)\,\delta_{ik}$, а в точке η — сосредоточенный мгновенный тепловой источник $Q' = \delta(x-\eta)\,\delta(t)$. Обозначим через $\Theta^{(k)}(x, \xi, t)$ температуру, вызванную действием силы X_i, а через $U_i(x, \eta, t)$ — перемещения, вызванные действием источника Q'.

Из уравнения (6.9) вытекает следующее соотношение:

$$\int\limits_V dV(x) \int\limits_0^t \left[\delta(x-\eta)\,\delta(t-\tau) \frac{\partial \Theta(x, \xi, t)}{\partial \tau} + \right.$$

$$\left. + \frac{\eta_0 \varkappa}{\nu} \delta(x-\xi)\,\delta(\tau)\,\delta_{ik} \frac{\partial U_i(x, \eta, t-\tau)}{\partial \tau} \right] d\tau = 0, \qquad (7.3)$$

откуда получаем

$$\Theta^{(k)}(\eta, \xi, t) = -\frac{\eta_0 \varkappa}{\nu} \cdot \frac{\partial U_k(\xi, \eta, t)}{\partial t}. \qquad (7.4)$$

Пусть в точке ξ бесконечного тела приложена сосредоточенная мгновенная сила $X_i = \delta(x-\xi)\,\delta(t)\,\delta_{ik}$, а в точке η сосредоточенный мгновенный объемный момент $Y_i' = \delta(x-\eta)\,\delta(t)\,\delta_{ij}$. Введем обозначения: $\Omega^{(k)}(x, \xi, t)$ — составляющие вектора вращения, вызванного действием силы X_i; $V_i^{(j)}(x, \eta, t)$ — перемещения, вызванные действием объемного момента Y_i'. Из уравнения (6.9) следует

$$V_k^{(j)}(\xi, \eta, t) = \Omega^{(k)}(\eta, \xi, t). \qquad (7.5)$$

Наконец, пусть объемный момент $Y_i = \delta(x-\xi)\delta(t)\,\delta_{ik}$ приложен в точке ξ, а тепловой источник $Q' = \delta(x-\eta)\,\delta(t)$ — в точке η. Обозначим через $\vartheta^{(k)}(x, \xi, t)$ температуру, вызванную действием объемного момента, а через $\Omega_i(x, \eta, t)$ — вектор вращения, вызванного действием источника Q. Используя теорему о взаимности (6.9), получаем

$$\vartheta^{(k)}(\eta, \xi, t) = -\frac{\eta_0 \varkappa}{\nu} \cdot \frac{\partial \Omega_k(\xi, \eta, t)}{\partial t}. \qquad (7.6)$$

Можно показать, что соотношения (7.2), (7.4) — (7.6) справедливы для конечного тела при однородных краевых условиях.

Рассмотрим конечное тело V и предположим, что причины возникновения движения определены краевыми условиями. Выразим составляющие векторов перемещения u_i и вращения ω_i, а также температуру θ в некоторой внутренней точке $x \in V$ при помощи интегралов по поверхности A, ограничивающей тело. Указанные искомые функции должны удовлетворять уравнениям движения, расширенному уравнению теплопроводности и краевым условиям.

При выведении формул для функций $u_i(x, t)$, $\omega_i(x, t)$, $\theta(x, t)$ воспользуемся теоремой о взаимности (6.9). Предположим, что штрихованные величины $u_i' = U_i^{(k)}(x, \xi, t)$; $\omega_i' = \Omega_i^{(k)}(x, \xi, t)$; $\theta' = \Theta^{(k)}(x, \xi, t)$ вызваны действием на бесконечное тело сосредоточенной мгновенной силы $X_i' = \delta(x - \xi)\,\delta(t)\,\delta_{ik}$, приложенной в точке ξ и направленной по оси x_k. Далее положим, что объемные силы, объемные моменты и тепловые источники отсутствуют ($X_i = Y_i = Y_i' = Q = Q' = 0$). На основе теоремы (6.9) получаем теперь следующее выражение:

$$\dot{u}_k(x, t) = \int_A dA(\xi) \int_0^t d\tau \Big\{ p_i(\xi, \tau) \frac{\partial U_i^{(k)}(\xi, x, t-\tau)}{\partial \tau} -$$

$$- p_i^{(k)}(\xi, x, t-\tau) \frac{\partial u_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} + m_i(\xi, \tau) \frac{\partial \Omega_i^{(k)}(\xi, x, t-\tau)}{\partial \tau} -$$

$$- m_i^{(k)}(\xi, x, t-\tau) \frac{\partial \omega_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\nu}{\eta_0} [\theta(\xi, \tau)\, \Theta_{,n}^{(k)}(\xi, x, t-\tau) -$$

$$- \Theta^{(k)}(\xi, x, t-\tau)\, \theta_{,n}(\xi, \tau)] \Big\}; \quad x \in V; \quad \xi \in V. \tag{7.7}$$

Здесь

$$p_i^{(k)}(x, \xi, t) = \sigma_{ji}^{(k)}(x, \xi, t)\, n_j(x); \qquad m_i^{(k)}(x, \xi, t) = \mu_{ji}^{(k)}(x, \xi, t)\, n_j(x),$$

причем под $\sigma_{ji}^{(k)}$ понимаем напряжения, а под $\mu_{ji}^{(k)}$ — моментные напряжения, вызванные воздействием сосредоточенной силы $X_i' = \delta(x - \xi)\,\delta(t)\,\delta_{ik}$.

Формула (7.7) дает искомую связь функции $\dot{u}_k(x, t)$, $x \in V$, $t > 0$ с функциями u_i, p_i, ω_i, m_i, θ, $\theta_{,n}$, определенными на поверхности A.

Предположим теперь, что в штрихованной системе действует вектор сосредоточенного мгновенного объемного момента $Y_i' = \delta(x - \xi)\,\delta(t)\,\delta_{ik}$, направленный по оси x_k. Этот момент вызывает возникновение в бесконечном теле перемещений $u_i' = V_i^{(k)}(x, \xi, t)$, вращений $\omega_i' = \Lambda^{(k)}(x, \xi, t)$ и температуры $\theta' = \vartheta^{(k)}(x, \xi, t)$.

Используя теорему о взаимности (6.9) и положив $X_i = X_i' = Y_i = Q = Q' = 0$, находим

$$\dot{\omega}_k(x, t) = \int_A dA(\xi) \int_0^t d\tau \Big\{ p_i(\xi, \tau) \frac{\partial V_i(\xi, x, t-\tau)}{\partial \tau} -$$

$$- \hat{p}_i^{(k)}(\xi, x, t-\tau) \frac{\partial u_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} + m_i(\xi, \tau) \frac{\partial \Lambda_i^{(k)}(\xi, x, t-\tau)}{\partial \tau} -$$

$$- \hat{m}_i^{(k)}(\xi, x, t-\tau) \frac{\partial \omega_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\nu}{\eta_0} [\theta(\xi, \tau)\, \vartheta_{,n}^{(k)}(\xi, x, t-\tau) -$$

$$- \vartheta^{(k)}(\xi, x, t-\tau)\, \theta_{,n}(\xi, \tau)] \Big\}; \quad x \in V; \quad \xi \in A, \tag{7.8}$$

где

$$\hat{p}_i^{(k)}(x, \xi, t) = \hat{\sigma}_{ji}^{(k)}(x, \xi, t)\,\eta_j(x); \quad \hat{m}_i^{(k)}(x, \xi, t) = \hat{\mu}_{ji}^{(k)}(x, \xi, t)\,\eta_j(x);$$

$\hat{\sigma}_{ji}^{(k)}$ и $\hat{\mu}_{ji}^{(k)}$ — соответственно тензоры силовых и моментных напряжений.

Таким образом, и в этом случае функция $\dot{\omega}_k(x, t)$; $x \in V$; $t > 0$ выражена через заданные на поверхности величины u_i, p_i, ω_i, m_i, θ, $\theta_{,n}$.

Рассмотрим теперь случай, когда штрихованная система причин состоит из одного сосредоточенного мгновенного теплового источника $Q' = \delta \times \times (x-\xi)\delta(t)$, вызывающего перемещения $u_i' = U_i(x, \xi, t)$, вращения $\omega_i' = \Omega_i(x, \xi, t)$ и температуру $\theta' = \Theta(x, \xi, t)$. Из теоремы (6.9) при $X_i = X_i' = Y_i = Y_i' = Q = 0$ следует формула для температуры

$$\theta(x, t) = \varkappa \int_A dA(\xi) \int_0^t d\tau \Big\{\theta_{,n}(\xi, \tau)\,\Theta(\xi, x, t-\tau) -$$

$$-\theta(\xi, \tau)\,\Theta_{,n}(\xi, x, t-\tau) - \frac{\eta_0}{\nu}\Big[p_i(\xi, \tau)\frac{\partial U_i(\xi, x, t-\tau)}{\partial \tau} -$$

$$-p_i^*(\xi, x, t-\tau)\frac{\partial u_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} + m_i(\xi, \tau)\frac{\partial \Omega_i(\xi, x, t-\tau)}{\partial \tau} -$$

$$-m_i^*(\xi, x, t-\tau)\frac{\partial \omega_i(\xi, \tau)}{\partial t}\Big]\Big\}; \quad x \in V; \quad \xi \in A. \tag{7.9}$$

Здесь

$$p_i^*(x, \xi, t) = \sigma_{ji}^*(x, \xi, t)\,n_j(x); \quad m_i^*(x, \xi, t) = \mu_{ji}^*(x, \xi, t)\,n_j(x);$$

σ_{ji}^*, μ_{ji}^* — соответственно тензоры силовых и моментных напряжений, вызванных действием Q'.

Формулы (7.7) — (7.9) могут рассматриваться как расширение формул Сомильяна, приведенных в работе [15], на задачи термоупругсти. Используя соотношения взаимности (7.4) — (7,6), можно произвести некоторые упрощения в выражениях (7.7) — (7.9).

Выбирая функции Грина $U_i^{(k)}$, $\Omega_i^{(k)}$, $\Theta^{(k)}$ и им аналогичные так, чтобы на поверхности A удовлетворялись однородные краевые условия для смещений, вращений и температуры, получаем по формулам (7.7) — (7.9) решение первой краевой задачи, т. е. задачи с заданными на границе функциями u_i, ω_i, θ.

Выбирая указанные функции Грина так, чтобы граница была свободна от нагрузок и температуры, по формулам (7.7) — (7.9) найдем решение второй краевой задачи с заданными на поверхности A нагрузками p_i, m_i и температурой θ.

Рассмотрим стационарные задачи. Пусть тело V, ограниченное поверхностью A подвержено действию нагрева. Пусть на части A_u поверхности A заданы компоненты u_i и ω_i, а на части поверхности A_σ приложены нагрузки p_i, m_i. Кроме того, положим $X_i = 0$. Для определения перемещений $u_i(x)$, $x \in V$ рассмотрим тело одинаковой формы при таких же нагрузках, в котором $\theta' = 0$ и в точке ξ котсрого приложена сосредоточенная сила $X_i' = \delta(x-\xi)\,\delta_{ik}$, направленная по оси x_k. Эта сила вызывает перемещения $U_i^{(k)}(x, \xi)$, которые выберем так, чтобы выполнялись однородные краевые условия на A_σ, A_u. Используя первую формулу (6.10), получаем

$$u_k(x) = \nu \int\limits_V \theta(\xi)\, U_{i.i}^{(k)}(\xi, x)\, dV(x); \quad x \in V, \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{7.10}$$

Здесь величина $U_{i.i}^{(k)}(\xi, x)$ должна рассматриваться, как изменение объема в точке ξ, вызванное сосредоточенной силой X_i, приложенной в точке x.

Формула (7.10) является обобщением известной формулы В. М. Майзеля [3] на задачи термоупругости с моментными напряжениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В., Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц, Физика твердого тела, т. 2, № 7, 1960.
2. Кувшинский Е. В., Аэро Э. Л., Континуальная теория асимметрической упругости. Учет внутреннего вращения, Физика твердого тела, т. 5, № 9, 1963.
3. Майзель В. М., Температурная задача теории упругости, К., Изд-во АН УССР, 1951.
4. Пальмов В. А., Основные уравнения теории несимметричной упругости, ПММ, т. 28, в. 3, 1964.
5. Biot M. A., Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, J. Appl. Phys., 27, 1956.
6. Chadwick P., Thermoelasticity. The Dynamical Theory. «Progress in Solid Mechanics», vol. 1, Amsterdam, 1960.
7. Cosserat E. et Cosserat F., Theorie des corps deformables, A. Hermann et Fils, Paris, 1909.
8. Eringen A. C., Suhubi E. S., Nonlinear theory of simple micro-elastic solids, Int. J. Eng. Sci., 2, 1964.
9. Green A. E., Adkins I. E., Large Elastic Deformations, Oxford, 1960.
10. Grioli G., Elasticita assimmetrica, Ann. di Mat. pura ed. appl., ser. IV, 50, 1960.
11. Ionescu-Cazimir V., Problem of Linear Coupled Thermoelasticity, Bull. Acad. Polon. Sci. Techn., vol 12, № 9, 1964.
12. Ionescu-Cazimir V., Problem of Linear Coupled Thermoelasticity IV. Uniqueness Theorems, Bull. Acad. Polon. Sci. Techn., vol. 12, № 12, 1964.
13. Mindlin R. D., Tiersten H. F., Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity, Arch. Rat. Mech. Anal. 11, 1962.
14. Toupin R. A., Elastic materials with couple stresses, Arch. Rat. Mech. Anal., 11, 1962.
15. Trefftz E., Mathematische Elastizitätstheorie, Handb. der Physik, vol. VI, Berlin, 1926.
16. Truesdell C., Toupin R. A., The Classical Field Theories, Encyclopedia of Physics, vol.III/1, Secs. 200, 203, 205, Spinger. Berlin, 1960.
17. Voigt W., Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle, Abh. Ges. Wiss., Gottingen, 34, 1887.
18. Weiner T. H., A Uniqueness theorem for the coupled thermoelastic problem, J. Appl. Math. 15, 1958.

Поступила
26.VIII 1966 г.

Польская
Академия наук