ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

TOM V GRUDZIEŃ 1953 ZESZYT 4

WARSZAWA

O WYZNACZANIU NAPRĘŻEŃ I ODKSZTAŁCEŃ W CIELE SPRĘŻYSTYM O IZOTROPII POPRZECZNEJ

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

Praca przedstawiona na zebraniu naukowym Wydziału IV PAN
w dniu 1 czerwca 1953 r.

Jak wiadomo, składowe stanu naprężenia i stanu odkształcenia nie są funkcjami dowolnymi; związane są one dodatkowymi warunkami nierozdzielności. W pewnych szczególnych przypadkach równowagi ciała izotropowego dają się one wyrazić za pomocą tylko jednej funkcji naprężeń (funkcje Airy'ego, Love'a, Galerkina i inne). Dla ciał sprężystych o izotropii poprzecznej funkcję naprężeń dla zagadnień osiowo symetrycznych podał S. G. Lechnicki, [1]. Stanowi ona uogólnienie funkcji Love'a, [2], dla ciał izotropowych.

W niniejszej pracy podamy nową funkcję naprężeń dla ciał sprężystych o izotropii poprzecznej. Nie jest ona zacieśniona do zagadnień osiowo symetrycznych. Funkcja ta w szczególnym przypadku izotropii pokrywa się z funkcją naprężeń B. G. Galerkina, [3].

1. Rozważmy przestrzeń sprężystą o strukturze izotropowej ortogonalnej. Przyjmijmy układ współrzędnych prostokątnych tak, aby trzy płaszczyzny tego układu pokrywały się z płaszczyznami symetrii sprężystej.

Składowe stanu naprężenia $(\sigma_x, \sigma_y, ..., \tau_{xy})$ związane są ze składowymi przemieszczenia (u, v, w) następującymi związkami:

$$
(1.1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sigma_x &= A_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial v}{\partial y} + A_{13}\frac{\partial w}{\partial z}, &\qquad \tau_{yz} &= A_{44}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\\
\sigma_y &= A_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial v}{\partial y} + A_{23}\frac{\partial w}{\partial z}, &\qquad \tau_{xz} &= A_{55}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
\sigma_z &= A_{31}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{32}\frac{\partial v}{\partial y} + A_{33}\frac{\partial w}{\partial z}, &\qquad \tau_{xy} &= A_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

W przypadku ciała sprężystego o izotropii poprzecznej uzyskujemy znaczne uproszczenia. Mianowicie jest wówczas

$$A_{11} = A_{22}, \quad A_{13} = A_{23}, \quad A_{55} = A_{44}, \quad A_{66} = \tfrac{1}{2}(A_{11} - A_{12}). \tag{1.2}$$

Nadto, ponieważ energia sprężysta jest funkcją jednorodną i kwadratową, mamy

$$A_{12} = A_{21}, \quad A_{13} = A_{31}, \quad A_{23} = A_{32}. \tag{1.3}$$

Oznaczając przez E i ν odpowiednio moduł sprężystości i liczbę Poissona dla kierunku x lub y oraz przez $\overline{E}$ i $\overline{\nu}$ te same wielkości dla kierunku z znajdujemy, że

$$\left\{\begin{aligned} & A_{11} = A_{22} = E\frac{1-\overline{\nu}^2}{(1-\nu-2\overline{\nu}^2)(1+\nu)}, \quad A_{33} = \overline{E}\,\frac{1-\nu}{1-\nu-2\overline{\nu}^2}, \\ & A_{12} = A_{21} = E\frac{\nu+\overline{\nu}^2}{(1-\nu-2\overline{\nu}^2)(1+\nu)}, \quad A_{44} = A_{55} = \overline{G} = \frac{\overline{E}}{2(1+\overline{\nu})}, \\ & A_{13} = A_{31} = A_{23} = A_{32} = E\frac{\overline{\nu}}{1-\nu-2\overline{\nu}^2}. \end{aligned}\right. \tag{1.4}$$

Ponadto jest

$$E\overline{\nu} = \overline{E}\nu. \tag{1.5}$$

Równania przemieszczeniowe teorii sprężystości ciała o izotropii poprzecznej przyjmują postać [1])

$$\left\{\begin{aligned} & A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(A_{12}+A_{66})\frac{\partial v}{\partial y} + \right. \\ & \qquad\qquad \left. + (A_{13}+A_{44})\frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0, \\ & A_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(A_{12}+A_{66})\frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ & \qquad\qquad \left. + (A_{13}+A_{44})\frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0, \\ & A_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left[(A_{13}+A_{44})\frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ & \qquad\qquad \left. + (A_{23}+A_{44})\frac{\partial v}{\partial z}\right] = 0. \end{aligned}\right. \tag{1.6}$$

[1]) Patrz [1], str. 64.

Przyjmijmy funkcję naprężeń $\varphi(x, y, z)$ tak, aby

$$(1.7) \quad u = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, \quad v = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \quad w = a\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + b\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

gdzie

$$a = \frac{A_{11}}{A_{13} + A_{44}}, \qquad b = \frac{A_{44}}{A_{13} + A_{44}}.$$

Bez trudu sprawdzimy, że przemieszczenia u, v, w wyrażone za pomocą funkcji φ wzorami (1.7) spełniają tożsamościowo dwa pierwsze równania układu równań (1.6).

Wstawiając przemieszczenia do ostatniego równania układu (1.6) otrzymamy po prostych przekształceniach i wykorzystaniu związku $A_{66} = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12})$ następujące równanie różniczkowe dla funkcji φ:

$$(1.8) \quad A_{11}\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right) + A_{33}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + 2A_{11}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + 2H\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2}\right) = 0,$$

gdzie

$$2H = \frac{A_{11}A_{33} - A_{13}^2 - 2A_{13}A_{44}}{A_{44}}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\varrho = \frac{H}{\sqrt{A_{11}A_{33}}}, \qquad \varepsilon^4 = \frac{A_{11}}{A_{33}},$$

doprowadzamy równanie (1.8) do postaci [2])

$$(1.9) \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + \varepsilon^4\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right) + \\ + 2\varrho\varepsilon^2\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^2 \partial z^2}\right) = 0$$

albo do postaci

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 \varphi(x, y, z) = 0,$$

gdzie

$$\nabla_{1,2}^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu_{1,2}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Tutaj jest

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = 2\varrho\varepsilon^2 \qquad \text{oraz} \qquad \mu_1^2\mu_2^2 = \varepsilon^4.$$

---

[2]) Do identycznego rozwiązania dochodzi Hu Hai-chang w pracy [4]. *Dopisek autora przy korekcie.*

Tak więc

$$\mu_{1,2}=\begin{cases}\varepsilon\sqrt{\varrho\pm\sqrt{\varrho^2-1}} & \text{dla } \varrho>1,\\ \varepsilon & \text{dla } \varrho=1,\\ \varepsilon\left(\sqrt{\frac{1+\varrho}{2}}\pm i\sqrt{\frac{1-\varrho}{2}}\right) & \text{dla } \varrho<1.\end{cases}$$

Jak widzimy, przy rozwiązywaniu równania różniczkowego (1.9) decydującą rolę gra parametr ϱ. W zależności od tego, czy ϱ jest większe, równe lub mniejsze od jedności, otrzymujemy inny typ rozwiązania równania (1.9).

Łatwo zauważymy, że dla ciała izotropowego funkcja φ spełnia równanie biharmoniczne; pokrywa się ona w tym przypadku z funkcją naprężeń Galerkina.

W przypadku szczególnym $\varrho=1$, $\varepsilon\neq 1$ doprowadzić można równanie (1.9), dzięki transformacji liniowej

$$x=\xi,\quad y=\eta,\quad z=\zeta\sqrt[4]{\frac{A_{33}}{A_{11}}}, \tag{1.10}$$

do równania biharmonicznego

$$\nabla^2\nabla^2\varphi(\xi,\eta,\zeta)=0. \tag{1.11}$$

Zauważyć należy jeszcze, że funkcja $\varphi(x,y,z)$ spełnia wszystkie związki nierozdzielności anizotropowego ciała sprężystego. Funkcję φ dobieramy tak, aby spełniała równanie (1.9) oraz warunki brzegowe zagadnienia. Znajomość jej pozwoli na określenie składowych stanu naprężenia za pomocą następujących wzorów:

$$\begin{cases}\sigma_x=-\dfrac{\partial}{\partial z}\left\{A_{11}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+A_{12}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-A_{13}\left[a\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+b\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]\right\},\\[2ex] \sigma_y=-\dfrac{\partial}{\partial z}\left\{A_{12}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+A_{11}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-A_{13}\left[a\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+b\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]\right\},\\[2ex] \sigma_z=-\dfrac{\partial}{\partial z}\left\{A_{13}\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)-A_{33}\left[a\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+b\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]\right\},\\[2ex] \tau_{xy}=-(A_{11}-A_{12})\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y\,\partial z},\\[2ex] \tau_{xz}=A_{44}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(b-1)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+a\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\right],\\[2ex] \tau_{yz}=A_{44}\dfrac{\partial}{\partial y}\left[(b-1)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+a\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\right].\end{cases} \tag{1.12}$$

Zastosowanie funkcji naprężeń do wyznaczania składowych stanu naprężenia i odkształcenia objaśnimy na trzech przykładach.

2. Zajmijmy się wyznaczeniem stanu naprężenia w półprzestrzeni sprężystej o izotropii poprzecznej, wywołanego działaniem pionowego obciążenia $p(x, y)$, rozłożonego w sposób ciągły na płaszczyźnie ograniczającej tę półprzestrzeń. Zakładamy, że obciążenie jest symetryczne względem osi x i y.

Funkcję naprężeń przyjmujemy w postaci symetrycznej całki Fouriera

$$\varphi = \int_0^\infty \int_0^\infty Z(z, \alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta. \tag{2.1}$$

Funkcja ta sprowadza równanie różniczkowe cząstkowe (1.9) do równania różniczkowego zwyczajnego liniowego czwartego rzędu

$$Z^{IV} - 2\varrho \varepsilon^2 (\alpha^2 + \beta^2) Z'' + \varepsilon^4 (\alpha^2 + \beta^2)^2 Z = 0. \tag{2.2}$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$Z = \sum_{i=1}^{i=4} C_i e^{\gamma \mu_i z}, \tag{2.3}$$

gdzie

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad \mu_{1,2,3,4} = \pm \varepsilon \sqrt{\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - 1}}.$$

Ponieważ dla $z \to \infty$ znikają naprężenia, zatem winno być $[\varphi]_{z=\infty} = 0$. Tak więc należy przyjąć

$$Z = A e^{-\gamma \mu_1 z} + B e^{-\gamma \mu_2 z}, \tag{2.4}$$

gdzie

$$\mu_{1,2} = \varepsilon \sqrt{\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - 1}}.$$

Tutaj A i B są funkcjami parametrów α i β.

Warunki brzegowe zagadnienia kształtują się w sposób następujący:

(1) dla $z = 0$, a więc na płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń sprężystą, powinno być $\sigma_z(x, y, 0) = -p(x, y)$,

(2) dla $z = 0$ naprężenia styczne τ_{xz} i τ_{yz} są równe zeru.

Pierwszy warunek brzegowy prowadzi do związku

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[(A_{33} a - A_{13}) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + A_{33} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \right\}_{z=0} = -p(x, y). \tag{2.5}$$

Dwa dalsze warunki dają

$$\left[(b-1)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}+a\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)\right]_{z=0}=0. \tag{2.6}$$

Wstawiając do związków (2 5) i (2.6) funkcje φ oraz wyrażając obciążenie $p(x,y)$ za pomocą całki Fouriera

$$p(x,y)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty p(\alpha,\beta)\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta,$$

co jest możliwe, gdy całka

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

jest ograniczona, otrzymamy układ równań

$$\left\{\begin{aligned} &-(a A_{33}-A_{13})\gamma^2 Z'(0)+A_{33}\, b\, Z'''(0)=-\frac{4\,p(\alpha,\beta)}{\pi^2},\\ &-a\gamma^2 Z(0)+(b-1)Z''(0)=0. \end{aligned}\right. \tag{2.7}$$

Z rozwiązania układu tych równań otrzymamy po prostych rachunkach

$$\left\{\begin{aligned} A&=\frac{4\sqrt{A_{11}A_{33}}\,(\mu_2^2\eta+1)}{\pi^2\gamma^3(\mu_1-\mu_2)(A_{11}A_{33}-A_{13}^2)},\\ B&=-A\frac{\mu_1^2\eta+1}{\mu_2^2\eta+1}, \end{aligned}\right. \tag{2.8}$$

gdzie $\eta=A_{13}/A_{11}$. Tak więc funkcja φ przyjmuje postać

$$\varphi=\frac{4}{\pi^2}\,\frac{\sqrt{A_{11}A_{33}}}{(A_{11}A_{33}-A_{13}^2)(\mu_1-\mu_2)}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{p(\alpha,\beta)}{\gamma^3}\left[(\mu_2^2\eta+1)e^{-\gamma\mu_1 z}-\right.$$
$$\left.-(\mu_1^2\eta+1)e^{-\gamma\mu_2 z}\right]\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta. \tag{2.9}$$

Tym samym zagadnienie jest rozwiązane, gdyż znajomość funkcji φ pozwala ze związków (1.7) i (1.12) wyznaczyć wszystkie składowe stanu naprężenia i przemieszczenia.

I tak ze związku

$$w=a\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+b\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

znajdujemy po prostych przekształceniach

$$w(x,y,z)=\frac{4\sqrt{A_{11}A_{33}}}{\pi^2(A_{11}A_{33}-A_{13}^2)(\mu_1-\mu_2)}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{p(\alpha,\beta)}{\gamma}[(\mu_2^2\eta+1)\times \tag{2.10}$$

$$\times(b\mu_1^2-a)e^{-\gamma\mu_1 z}-(\mu_1^2\eta+1)(b\mu_2^2-a)e^{-\gamma\mu_2 z}]\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta.$$

Dla $z=0$ otrzymamy

$$w(x,y,0)=C\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{p(\alpha,\beta)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta, \tag{2.11}$$

gdzie

$$C=\frac{4}{\pi^2}\,\frac{\sqrt{A_{11}A_{33}}(\mu_1+\mu_2)}{A_{11}A_{33}-A_{13}^2},$$

lub też

$$C=\frac{2(\mu_1+\mu_2)}{\pi^2A_{44}(2\varrho+\xi)},$$

gdzie $\xi=A_{13}/\sqrt{A_{11}A_{33}}$.

Rozważyć należy trzy przypadki szczególne, w zależności od tego, czy $\varrho>1$, czy $\varrho<1$, czy też $\varrho=1$.

Tak więc

$$\begin{cases} C=\dfrac{2\varepsilon\left(\sqrt{\varrho+\sqrt{\varrho^2-1}}-\sqrt{\varrho-\sqrt{\varrho^2-1}}\right)}{\pi^4A_{44}(\varrho+\xi)} & \text{dla } \varrho>1,\\[2ex] C=\dfrac{4\varepsilon}{\pi^2A_{44}(\varrho+\xi)} & \text{dla } \varrho=1,\\[2ex] C=\dfrac{4\varepsilon\sqrt{\dfrac{1+\varrho}{2}}}{\pi^2A_{44}(\varrho+\xi)} & \text{dla } \varrho<1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Dla szczególnego przypadku ciała izotropowego ($\varrho=1$, $\varepsilon=1$) otrzymamy, zważywszy że

$$A_{44}=G=\frac{E}{2(1+\nu)},\qquad \xi=\frac{A_{13}}{\sqrt{A_{11}A_{33}}}=\frac{\nu}{1-\nu},$$

następującą wartość dla stałej C:

$$C=\frac{8(1-\nu^2)}{E\pi^2}.$$

Dla szczególnego przypadku siły skupionej P działającej w początku układu współrzędnych, a zwróconej w kierunku osi z, mamy $p(\alpha, \beta) = P/4$.

Wtedy, zważywszy że

$$\int_0^\infty \frac{\cos \beta y \, d\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = K_0(\alpha y),$$

gdzie $K_0(\alpha y)$ jest funkcją Bessela trzeciego rodzaju, oraz dalej, że

$$\int_0^\infty K_0(\alpha y) \cos \alpha x \, d\alpha = \frac{\pi}{2\sqrt{x^2 + y^2}},$$

otrzymamy rozwiązanie całki (2.11) w postaci

$$w(x, y, 0) = \frac{C P \pi}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{2.13}$$

Porównując otrzymane rozwiązanie (2.13) ze znanym rozwiązaniem Boussinesqa dla półprzestrzeni sprężystej izotropowej widzimy, że różnica tkwi jedynie we współczynniku C, charakteryzującym odmienność sprężystych własności ośrodka o izotropii poprzecznej.

Uogólnienie rozwiązania Boussinesqa na ośrodek o izotropii poprzecznej pozwoli na rozwiązanie dwu dalszych zagadnień, mianowicie zagadnienia *płyty nieograniczonej* oraz *belki nieskończenie długiej*, spoczywających na *półprzestrzeni*.

Niech na półprzestrzeni sprężystej o izotropii poprzecznej spoczywa cienka płyta izotropowa. Niech ta płyta rozciąga się nieograniczenie. Założymy, że między płytą i jej podłożem nie występuje tarcie. Dalej założymy, że plyta nie może się oderwać od podłoża.

Równanie różniczkowe ugięcia płyty przyjmuje w danym razie postać

$$N \nabla^2 \nabla^2 \overline{w}(x, y) = q(x, y) - p(x, y). \tag{2.14}$$

Tutaj $\overline{w}(x, y)$ oznacza rzędną ugięcia płyty, N sztywność zginania płyty, $q(x, y)$ obciążenie płyty, a $p(x, y)$ odpór sprężysty podłoża.

Oczywiście jest

$$\overline{w}(x, y) = w(x, y, 0). \tag{2.15}$$

Wstawiając do równania (2.14) ugięcia $w(x, y, 0)$ ze wzoru (2.11) oraz wyrażając $q(x, y) - p(x, y)$ za pomocą całki Fouriera (w założeniu, że funkcja $q(x, y)$ jest symetryczna względem osi x i y) uzyskujemy następujący związek:

$$NC\gamma^3 p(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2}[q(\alpha, \beta) - p(\alpha, \beta)]. \tag{2.16}$$

Otrzymaliśmy tu związek pomiędzy obciążeniem płyty i odporem półprzestrzeni sprężystej. Wobec tego w związku (2.11) wyrazić można nieznaną funkcję $p(\alpha, \beta)$ przez funkcję $q(\alpha, \beta)$. Zatem

$$\overline{w}(x, y) = w(x, y, 0) = C \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{q(\alpha, \beta)}{\gamma + \frac{NC\gamma^4 \pi^2}{4}} \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta. \tag{2.17}$$

Tym samym postawione zagadnienie jest rozwiązane, gdyż znając powierzchnię ugięcia płyty wyznaczyć można dowolną wielkość statyczną (moment zginający i skręcający oraz siłę tnącą) w przekrojach płyty.

Dla siły skupionej działającej w początku układu współrzędnych otrzymamy

$$w(x, y, 0) = \frac{CP}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \cos \beta y}{\gamma + \frac{NC\gamma^4 \pi^2}{4}} \, d\alpha \, d\beta. \tag{2.18}$$

Niech na półprzestrzeni sprężystej spoczywa belka nieskończenie długa o szerokości $2b$ i sztywności na zginanie $N = E_1 I_1$. Oznaczmy obciążenie tej belki przez $q(x)$, a odpór podłoża przez $p(x)$. Niech obciążenie będzie symetryczne względem osi y. Przyjmijmy ponadto, że zarówno obciążenie $q(x)$, jak i odpór $p(x)$ są rozłożone w sposób jednostajny na szerokości b.

Równanie różniczkowe ugięcia belki ma postać

$$N \frac{d^4 \overline{w}}{dx^4} = 2b[q(x) - p(x)]. \tag{2.19}$$

Ale jest

$$\overline{w}(x, y, 0) = C \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{p(\alpha, \beta)}{\gamma} \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta. \tag{2.20}$$

Wobec tego, że p nie zależy od zmiennej y, to

$$p(\alpha, \beta) = p(\alpha) \frac{\sin \beta b}{\beta}.$$

Wstawiając (2.20) do (2.19) i zważywszy, że

$$q(x)-p(x)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty [q(\alpha)-p(\alpha)]\frac{\sin\beta b}{\beta}\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta,$$

otrzymamy następujący związek:

$$GN\alpha^4\frac{p(\alpha)}{\gamma}=\frac{8b}{\pi^2}[q(\alpha)-p(\alpha)]. \tag{2.21}$$

Tak więc ugięcie $\overline{w}(x)$ belki spoczywającej na półprzestrzeni sprężystej wyrazimy wzorem

$$\overline{w}(x)=C\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{q(\alpha)\dfrac{\sin\beta b}{\beta}}{\gamma+\dfrac{NC\pi^2\alpha^4}{8b}}\cos\alpha x\,d\alpha\,d\beta. \tag{2.22}$$

Podaną tu funkcję naprężeń wykorzystać można również w zagadnieniach płyt grubych prostokątnych lub trójkątnych. Zauważmy jednak, że zastosowanie funkcji φ napotyka na poważne ograniczenia. Funkcja ta staje się nieprzydatną przy rozwiązywaniu zagadnień, w których na obwodzie występują trzy warunki brzegowe. Tak na przykład w przypadku płyty grubej, na górnej i dolnej jej powierzchni dysponujemy trzema warunkami brzegowymi. Rozwiązanie równania różniczkowego (1.9) dopuszcza jednak tylko cztery stałe całkowania. Funkcję naprężeń φ można więc tu stosować jedynie przy obciążeniu pionowym płyty. W tym przypadku cztery warunki brzegowe ($\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ na dolnej i górnej powierzchni płyty) sprowadzają się, jak łatwo spostrzec, do dwu warunków typu (2.6).

Literatura cytowana w tekście

[1] S. G. Lechnicki, *Tieorja uprugosti anizotropnowo tieła*, 1950.

[2] A. E. H. Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*, 1939.

[3] B. G. Galerkin, *K woprosu ob issledowanji napriażenja i dieformacji w uprugom izotropnom tiele*, Dokł. Akad. Nauk SSSR, 1930.

[4] Hu Hai-chang, *On the Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity of a Transversely Isotropic Body*, Acta Scientia Sinica, t. II, 2 (1953).

Резюмэ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В УПРУГОМ ТЕЛЕ С ПОПЕРЕЧНОЙ ИЗОТРОПИЕЙ

В работе представлена функция напряжений для трехмерных задач теории упругих тел с поперечной изотропией.

Представляя перемещения u, v и w при помощи частных производных этой функции, согласно формулам (1.7), удовлетворяем не только двум первым уравнениям «в перемещениях» (1.6), но и условиям неразрывности упругого тела.

Подставляя перемещения в третье уравнение системы (1.6), получаем дифференциальное уравнение (1.9) для функции напряжений φ.

В этом уравнении выступают два параметра, ϱ и ε, характеризующие свойства анизотропии тела.

Для решения дифференциального уравнения (1.9) самым важным является параметр ϱ, так как, в зависимости от того является ли $\varrho > 1$, $\varrho = 1$, $\varrho < 1$, получаем различные типы решений. Для $\varrho = 1$ и $\varepsilon = 1$, т. е. для случая изотропии, функция напряжений тождественна функции Галеркина, [3], и удовлетворяет бигармоническому уравнению.

Для $\varrho = 1$ и $\varepsilon \neq 1$ можно привести уравнение (1.9), благодаря линейной трансформации (1.11), к бигармоническому уравнению.

Решение дифференциального уравнения (1.9), при данных граничных условиях, позволяет уже определить компоненты деформации и напряжения на основании формул (1.7) и (1.12).

Во второй части работы приведено решение проблемы Буссинеска для упругого полупространства с поперечной изотропией.

Это решение использовано так для определения поверхности прогиба бесконечной пластинки, как и для линии прогиба бесконечно длинной балки, лежащих на упругом полупространстве с поперечной изотропией.

Summary

THE DETERMINING OF STRESSES AND DEFORMATIONS IN TRANSVERSALLY ISOTROPIC ELASTIC BODIES

A stress function is given for three-dimensional problems concerning elastic bodies, characterized by the transversal isotropy.

Expressing the displacements u, v and w in terms of partial de-

rivatives of that function, according to Eqs. (1.7), we satisfy the first two equations of displacement (1.6) and the conditions of compatibility of elastic bodies.

Substituting the displacements in the third equation of the system (1.6), we obtain the differential equation (1.9) for the stress function φ. There are in it two parameters, ϱ and ε, characterizing the anisotropic properties of the body. The parameter ϱ is of decisive meaning for solving the differential equation (1.9), the type of solution being different for $\varrho > 1$, $\varrho = 1$ and $\varrho < 1$. For $\varrho = 1$, $\varepsilon = 1$, in other words in the case of isotropy, the stress function is identical with that of Galerkin, [3], and satisfies the biharmonic equation. For $\varrho = 1$, $\varepsilon \neq 1$, Eq. (1.9) can be reduced to the biharmonic equation by means of the linear transformation (1.11).

The solution of the differential equation (1.9) permits, for given boundary conditions, to determine the strain and stress components, according to Eqs. (1.7) and (1.12).

In the second part of the paper the solution of the Boussinesq problem is given for a semiinfinite, transversally isotropic body.

This solution is used to determine the deflection surface of an infinite plate and the deflection curve of an infinite beam resting on a semiinfinite, transversally isotropic body.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK