



J. 756

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
S. GELEJI, L. GILLEMOT, I. RÁZSÓ

REDIGIT
GY. HEVESI

TOMUS VIII

FASCICULI 1—2



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1954

ACTA TECH. HUNG.

BEITRAG ZUR THEORIE DER ORTHOTROPEN PLATTEN*

Prof. Dr. ING. WITOLD NOWACKI, WARSZAWA

[Eingegangen am 22. Juli 1953.]

Zum Beginn dieses Jahrhunderts nahm die Theorie der isotropen Platten nach einer fast hundertjährigen Unterbrechung (die Arbeiten von *Germain*, *Lagrange*, *Navier*, *Kirchoff*, *Clebsch*) einen neuen Aufschwung. Sie erweckte das rege Interesse sowohl der Mathematiker (*Lauricella*, *Ritz*, *Hapfel* u. a.) als auch der theoretisch vorgebildeten Ingenieure (*Levy*, *Hager*, *Henky*, *Timoschenko*, *Nádai*, *Galerkin*).

Dieses lebhafte Interesse war ein Ergebnis der praktischen Bedürfnisse auf dem Gebiete der Theorie von Tragkonstruktionen.

Die in dieser Zeit gebildete Theorie der Platten berücksichtigte leider nicht den anisotropen Charakter vieler plattenartiger Konstruktionselemente. Dieser Zustand veranlasste den führenden polnischen Gelehrten auf dem Gebiete der technischen Mechanik, Prof. *M. T. Huber*, sich der Ausarbeitung der Theorie von Platten zuzuwenden, die durch eine orthogonal-anisotrope Struktur (Orthotropie) gekennzeichnet sind. Er hatte den Gedanken, den tatsächlichen Spannungszustand in den kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten, in den Sperrholzplatten und in den Wellblechplatten sowie in den engmaschigen Trägerrosten genauer zu erfassen, als es auf Grund der Theorie der isotropen Platten möglich war.

Huber behandelte die Theorie der orthotropen Platten in einer Reihe von Arbeiten, die sowohl in polnischer als auch in fremden Sprachen veröffentlicht wurden. Die grundlegende Arbeit bleibt hierbei seine ausführliche Monographie »Theorie der orthogonal-anisotropen Platten«, die im Jahre 1921 in polnischer Sprache erschien.

Die Differentialgleichung der Biegelinie einer orthotropen Platte in rechteckigen Koordinaten lautet nach *Huber*

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + p(x, y) \quad (1)$$

* Vorgetragen an dem zwischen 16. und 18. Oktober 1952 in Budapest unter Führung der Klasse für Technische Wissenschaften der Ungarischen Akademie der Wissenschaften veranstalteten Bautechnischen Kongress.

darin bedeutet

$w(x, y)$ die Biegefläche,

$p(x, y)$ die Belastung,

B_x, B_y die Biegesteifheit der Platte in der Richtung x, y . Weiters ist $2H = B_x m_y + B_y m_x + 4C$, wobei m_x und m_y die Materialkonstanten sind (entsprechend der Poissonschen Zahl für das isotrope Material).

Prof. *Huber* wies in seiner Arbeit auf die entscheidende Bedeutung der sogenannten Biegecharakteristik der orthotropen Platte $\varrho = \frac{H}{\sqrt{B_x \cdot B_y}}$ für die Lösung der Differentialgleichung hin. Er zeigte ferner die Verwandtschaft zwischen den Biegeflächen einer orthotropen und einer isotropen Platte bei gewissen Werten von ϱ . Bemerkenswert ist die Ermittlung des Unterschiedes im Verhalten einer rechteckigen Platte bei $\varrho > 1$ und $\varrho < 1$ unter der Einzellast. Es wurde festgestellt, dass das Theorem *Mesnagers* über die gleichartig gezeichnete Durchbiegung aller Punkte einer frei aufliegenden rechteckigen Platte für orthotropen Platten der Charakteristik $\varrho < 1$ nicht zutrifft. In diesem Fall erhält man nämlich einen wellenartigen Charakter der Durchbiegung mit Vorzeichenwechsel.

In seiner Arbeit gab *Huber* ebenfalls eine Reihe von Lösungen der technisch wichtigen Belastungsfälle des frei aufliegenden Plattenstreifens, die damals für isotrope Platten nicht bekannt waren.

Eine Reihe von Belastungsfällen der frei aufliegenden oder fest eingespannten Platten löste *Huber* mit Hilfe einer geistreichen, eigenartigen Methode. Das Wesen dieser Methode besteht aus einer Superposition äusserst einfacher Lösungen des Problems eines unendlich langen Plattenstreifens.

Für andere Fälle fand *Huber* Näherungslösungen, wie z. B. für die über die Stützlinie überhängende Platte, für die am Umfang fest eingespannte Platte usw.

Schliesslich befasste sich *Huber* in seiner Arbeit erstmalig mit der theoretischen Behandlung des Problems des Mitwirkens der Eisenbetonplatte mit der Rippe. Dieses technisch äusserst wichtige Problem stiess bekanntlich auf grosse Schwierigkeiten, als man versuchte, eine strenge Lösung zu finden. Bei der Biegung der Rippe und Platte ist der ebene Spannungszustand in der Platte zu berücksichtigen, der durch die bekannte *Airysche* Funktion gekennzeichnet ist. *Huber* gab eine Verallgemeinerung der Spannungsfunktion für orthotrope Scheiben sowie eine angenäherte, jedoch sehr allgemein gehaltene Lösung des Mitwirkens des Systems Platte-Rippe.

In den folgenden Veröffentlichungen, wie »Biegeprobleme eines durch Querrippen versteiften orthotropen Plattenstreifens«, Zürich 1927 und »Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten«, Warszawa 1929, entwickelte und ergänzte *Huber* seine Ergebnisse aus dem Jahre 1921.

Die Arbeit von *Huber* über die T-Träger (Warszawa 1923), welche die Stabilität des Steges eines T-Balkens behandelt, schliesst sich an die Theorie

der orthotropen Platten an. Hier wird auch eine Reihe von Lösungen des Beulens von rechteckigen orthotropen Platten angeführt.

Hubers bahnbrechende Arbeiten auf dem Gebiete der Plattentheorie brachten ihm volle Anerkennung in der ganzen Welt. Das Wesen seiner Theorie der orthotropen Platten wurde in die bekannten Monographien der Plattentheorie eingeführt (*Nádai* — Elastische Platten 1925; *Timoschenko* — Theory of plates and shells — 1940; *Lechnitzki* — Anisotropnyje plastinki 1947; *Girkman* — Flächentragwerke 1948). Sie bildeten ausserdem den Ausgangspunkt für viele in- und ausländische Forschungsarbeiten (*Lechnitzki*, *Lurje*, *Begman*, *Iguchi*, *Massonet*, *Cornelius*, *Seydel*, *Sokolnikoff* usw.).

Die Theorie der orthotropen Platten bildet heute die Basis der Lösung von Problemen enggerippter Brückenfahrbahnen, Trägerroste der Schiffskonstruktionen, Elemente des Flugzeugbaues usw.

Auch in Polen, insbesondere nach dem letzten Weltkriege, wurden die Probleme der Theorie der orthotropen Platten in zahlreichen Arbeiten polnischer Forscher aufgenommen (*Nowacki*, *Olszak*, *Nowiński*, *Turski*, *Rydlowski*, *Kazimierzczak*).

Diese Arbeiten beziehen sich sowohl auf die Statik wie auch auf die Dynamik und Stabilität dieser Platten. *Hubers* Arbeiten regten auch den Verfasser der vorliegenden Arbeit an, sich mit den orthotroper Platten zu befassen, wobei eine Reihe von neuen Lösungen gefunden wurde, die von praktischer Bedeutung sind. Es werden hier in kurzer Zusammenfassung die Ergebnisse zweier Untersuchungen mitgeteilt.

A

Die erste von ihnen betrifft einen orthotropen Streifen, welcher der Wirkung einer Einzellast ausgesetzt ist. Die Lösung dieses Problems spielt in der Theorie der Einflussflächen eine grosse Rolle und gestattet die Konstruktion von Einflussflächen für Rechteckplatten, deren zwei Ränder frei aufliegen, während die übrigen beliebig unterstützt sind.

Wir wollen einen unendlich langen orthotropen Plattenstreifen betrachten, der längs seiner Ränder $x = 0$ und $x = a$ frei aufliegt. Auf diesen Streifen wirkt längs der Achse x die Einzellast P in einer Entfernung ξ von der Achse y .

Die Lösung dieses grundlegenden Falles wurde von *Huber* gegeben, und zwar mit Hilfe einfacher trigonometrischer Reihen. Diese Reihen konvergieren jedoch in der Umgebung des Angriffspunktes der Kraft P sehr langsam, insbesondere im Falle von statischen Grössen. Es wird gezeigt, dass diese Grössen in geschlossener Form dargestellt werden können. Diese Form findet man durch Lösung eines aus zwei partiellen Differentialgleichungen bestehenden Systems, was eine Analogie zur zweischrittigen Lösungsart für isotrope Platten nach *Marcus* darstellt.

Mit den Bezeichnungen $\varepsilon^4 = \frac{D_x}{D_y}$ und $\varrho = \frac{H}{\sqrt{D_x \cdot D_y}}$ nimmt die Gleichung (1) folgende Form an :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\varrho\varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cdot \varepsilon^4 = 0 \quad \varepsilon, \varrho > 0. \quad (2)$$

Der Wert ϱ spielt bei der Lösung der Gleichung (2) eine grosse Rolle ; wir erhalten drei Lösungen, je nachdem ob $\varrho > 1$, $\varrho = 1$, $\varrho < 1$ ist.

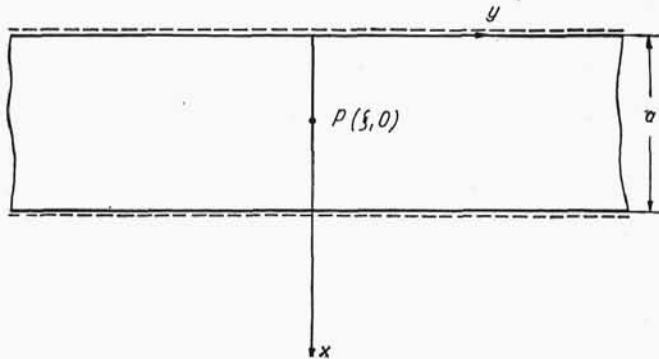


Abb. 1

Wir führen die Funktion $\varphi(x, y)$ ein, welche die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \beta = \text{const.} \quad (3a)$$

erfüllt.

Diese Funktion sei mit der Biegefunktion $w(x, y)$ durch die Differentialgleichung

$$\varphi = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \lambda = \text{const.} \quad (3b)$$

verbunden.

Setzt man φ in die Gleichung (3a), so erhält man :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w = 0. \quad (4)$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Differentialgleichung (2), wenn :

$$\lambda^2 + \beta^2 = 2\varrho\varepsilon^2, \quad \varepsilon^4 = \lambda^2 \beta^2. \quad (5)$$

Also

$$\begin{aligned}\beta_{1,2} &= \pm \varepsilon \sqrt{\varrho + \sqrt{\varrho^2 - 1}} & \lambda_{1,2} &= \pm \varepsilon \sqrt{\varrho - \sqrt{\varrho^2 - 1}} & \text{für } \varrho > 1 \\ \beta_{1,2} &= \pm \varepsilon \left[\sqrt{\frac{1+\varrho}{2}} + i \sqrt{\frac{1-\varrho}{2}} \right], & \lambda_{1,2} &= \pm \varepsilon \left[\sqrt{\frac{1+\varrho}{2}} - i \sqrt{\frac{1-\varrho}{2}} \right] \\ & & & \text{für } \varrho < 1 \\ \beta_{1,2} &= \pm \varepsilon, & \lambda_{1,2} &= \pm \varepsilon. & \text{für } \varrho = 1.\end{aligned}$$

Wir wollen den Fall $\varrho > 1$ erwägen und die Funktion φ aus der Gleichung (3a) bestimmen. Die Randbedingungen für die Funktion φ sind folgende: auf den frei aufliegenden Rändern sind $x = 0$ und $x = a$; die Durchbiegungen w und $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ sind gleich Null, also $\varphi = 0$. Für $y \rightarrow \infty$ verschwindet die Durchbiegung, und somit ist auch $\varphi = 0$.

Die Lösung der Gleichung (3a), welche die angegebenen Randbedingungen erfüllt, lautet:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n \beta y} \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \quad (6)$$

Die Konstante A_n finden wir aus der Gleichgewichtsbedingung der Schubkräfte und der Einzellast P im Querschnitt $y = 0$.

Wir erhalten endlich:

$$\varphi(x, y) = -\frac{P}{D_y \pi \beta} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n \beta y}}{n} \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x. \quad (7)$$

Aus der Gleichung (3b) bestimmen wir die Funktion

$$w(x, y) = \frac{Pa^2}{D_y \pi^3 \beta \lambda (\beta^2 - \lambda^2)} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{1}{n} (\beta e^{-\lambda \alpha_n y} - \lambda e^{-\beta \alpha_n y}) \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x. \quad (8)$$

Wir führen eine zweite Hilfsfunktion $\psi(x, y)$ ein.

Diese ist durch folgende Differentialgleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \psi = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (9)$$

Die Funktion ψ ermitteln wir auf ähnlichem Wege wie bei der Funktion

$$\psi(x, y) = -\frac{P}{D_y \pi \lambda} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n \lambda y}}{n} \sin \alpha_n \xi \cdot \sin \alpha_n x. \quad (9a)$$

Aus der Bestimmung der Funktionen φ und ψ erhält man :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\psi - \varphi}{\beta^2 - \lambda^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\beta^2 \varphi - \lambda^2 \psi}{\beta^2 - \lambda^2}, \quad (10)$$

Die Funktionen φ und ψ können in geschlossener Form ausgedrückt werden. Diese Form wird zur Ermittlung der Biegemomente und der Schubkräfte im Plattenstreifen benutzt.

Durch Ersetzen der trigonometrischen Funktionen in den Formeln (7) und (9a) mit Exponentialfunktionen und mit Hilfe der bekannten Beziehung

$$\ln(1 - z) = - \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad |z| < 1$$

erhält man

$$\varphi = \frac{P}{4\pi D_y \beta} \ln \frac{\cosh \frac{\pi}{a} \beta y - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{\cosh \frac{\pi}{a} \beta y - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)},$$

$$\psi = \frac{P}{4\pi D_y \beta} \ln \frac{\cosh \frac{\pi}{a} \lambda y - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{\cosh \frac{\pi}{a} \lambda y - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)}.$$
(11)

für

$$\begin{matrix} > \\ \geq \\ < \end{matrix} 0, \quad \varrho > 1.$$

Es ist leicht zu beweisen, dass die Funktionen φ und ψ alle Randbedingungen erfüllen. Für $y = 0$ und $x = \xi$ werden die Funktionen φ und ψ unstetig, ähnlich dem Logarithmus.

Für $\varrho = 1$ erhalten wir bei dem Übergang zu den Grenzwerten

$$\psi \rightarrow \varphi = \Phi = \frac{P}{4\pi D_y \varepsilon} \ln \frac{\cosh \frac{\pi \varepsilon y}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{\cosh \frac{\pi \varepsilon y}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)}, \quad (12)$$

Wier erhalten hier

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{1}{2} \left(\Phi - y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \left(\Phi + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right),\end{aligned}\quad (13)$$

das bekannte Ergebnis von Nádai* für isotrope Plattenstreifen. Schliesslich werden für den Fall $\varrho < 1$ die Funktionen φ und ψ zueinander konjugiert

$$\varphi = \Phi + i\psi \quad \psi = \Phi - i\Psi = \bar{\varphi}.$$

Die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ nehmen folgende Form an

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{P}{2D_y \pi \varepsilon^2} \left(\frac{I_1}{v_2} + \frac{I_2}{v_1} \right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{P}{2D_y \pi \varepsilon^2} \left(\frac{I_1}{v_2} + \frac{I_2}{v_1} \right),\end{aligned}\quad v_{1,2} = \sqrt{\frac{1 \pm \varrho}{2}}$$

worin

$$I_1 = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n\pi v, y}{a}}}{n} \sin a_n v_2 y \sin a_n \xi \sin a_n x,$$

$$I_2 = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-n\pi v, y}}{n} \cos a_n v_2 y \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

I_1 und I_2 lassen sich ebenfalls in geschlossener Form ausdrücken

$$I_1 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=4} \operatorname{asc} \operatorname{tg} \frac{e^{-a v, y} \sin a \eta_i}{1 - e^{-a v, y} \sin a \eta_i} \quad (16)$$

$$\text{wo: } \eta_1 = -v_2 y + \xi - x, \quad \eta_2 = v_2 y - \xi - x,$$

$$\eta_3 = -v_2 y - \xi + x, \quad \eta_4 = v_2 y + \xi + x, \quad a = \frac{\pi}{a} \quad (17)$$

$$I_2 = -\frac{1}{8} \ln \frac{(\cosh a v, y - \cos a \eta_1)(\cosh a v, y - \cos a \eta_3)}{(\cosh a v, y - \cos a \eta_2)(\cosh a v, y - \cos a \eta_4)}.$$

* A. Nádai: Elastische Platten. 1925.

Diese Ergebnisse ermöglichen, die Biegemomente sowie die Schubkräfte aus folgenden Formeln zu bestimmen

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m_y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\
 M_y &= -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m_x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\
 T_{xz} &= -D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \left(2C + \frac{D_x}{m_y} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}, \\
 T_{yz} &= -D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \left(2C + \frac{D_y}{m_x} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Es kann auch leicht bewiesen werden, dass der im Drillungsmomentensatz

$$M_x = -2c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{19}$$

enthaltene Ausdruck $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

sich ebenfalls in geschlossener Form darstellen lässt.

Für $\varrho > 1$ ist :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{P}{2\pi D_y (\beta^2 - \lambda^2)} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{e^{-\alpha \lambda y} \sin \alpha (\xi - x)}{1 - e^{-\alpha \lambda y} \sin \alpha (\xi + x)} + \right. \\
 &+ \operatorname{arctg} \frac{e^{-\alpha \lambda y} \sin \alpha (\xi - x)}{1 - e^{-\alpha \lambda y} \sin \alpha (\xi - y)} - \operatorname{arctg} \frac{e^{-\alpha \beta y} \sin \alpha (\xi + x)}{1 - e^{-\alpha \beta y} \sin \alpha (\xi + x)} - \\
 &\left. - \operatorname{arctg} \frac{e^{-\alpha \beta y} \sin \alpha (\xi - x)}{1 - e^{-\alpha \beta y} \sin \alpha (\xi - x)} \right\}, \quad \alpha = \frac{\pi}{a}. \tag{20a}
 \end{aligned}$$

Für $\varrho = 1$ ist :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} y \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{20b}$$

Endlich ist für $\varrho < 1$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{P}{16\pi v_1 v_2 D_y} \cdot \ln \frac{[\cosh \alpha v_1 y - \cos \alpha (v_2 y - \xi - x)] [\cosh \alpha v_1 y - \cos \alpha (v_2 y - \xi + x)]}{[\cosh \alpha v_1 y - \cos \alpha (v_2 y + \xi + x)] [\cosh \alpha v_1 y - \cos \alpha (v_2 y + \xi - x)]}.
 \end{aligned}$$

Für die Belastung $P = 1$ im Punkte (ξ, η) können nach dem *Maxwell-Bettischen* Satz über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen die Momentenfläche M_x, M_y, M_{xy} sowie die Schubkräfteflächen T_{xz}, T_{yz} als Einflussflächen für die sich in dem Raume der Platte bewegendes Kraft $P = 1$ betrachtet werden. Wir bezeichnen mit $K(x, y; \xi, \eta)$ die Einflussfläche der beliebigen statischen Grösse K .

Bei der gegebenen Belastung $p(\xi, \eta)$, die stetig auf der Fläche D der Platte verteilt ist, erhalten wir den Wert dieser statischen Grösse aus der Formel

$$K(x, y) = \int_D K(x, y; \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (21)$$

Die Ermittlung der Einflussflächen für einen unendlich langen Streifen gestattet das Auffinden von Einflussflächen für rechteckige Platten, die auf den Rändern $x = 0$ und $x = a$ frei aufliegen, sonst aber beliebig unterstützt sind.

In diesen Fällen setzt man die Einflussfläche aus zwei Teilen zusammen: aus einem ersten Teil, der dem unendlich langen Streifen entspricht, und aus dem zweiten, der die zusätzlichen Randbedingungen der rechteckigen Platte erfüllt.

Für die Biege- und Drillungsmomente sowie für die Querkräfte enthält der erste Teil eine Singularität, wogegen der zweite Teil eine reguläre Funktion ist.

B

Das zweite Problem bezieht sich auf die rechteckigen Platten mit gemischten Randbedingungen.

Wir wollen einen besonders einfachen Fall der an den drei Rändern frei aufliegenden Platte $x = 0$, $x = a$ und $y = b$ betrachten. Diese Platte ist längs der Geraden $y = 0$ im Abschnitt c_1 fest eingespannt und im Abschnitt c_2 frei aufliegend.

Im Abschnitt c_1 haben wir:

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = 0$$

und im Abschnitt c_2 :

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2} = 0.$$

Längs des Abschnittes c_1 werden die Biegemomente $M_y = -D_y \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2}$ als die unbekannte Funktion der Veränderlichen x hervorgerufen.

Auf Grund des Superpositionsprinzips können wir die Durchbiegung der Platte in folgender Integralgleichungsform darstellen

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \int_0^{c_1} M_y(\xi) G(x, y; \xi, 0) d\xi. \quad (22)$$

Dabei bedeutet $w_0(x, y)$ die durch die Belastung $p(x, y)$ hervorgerufene Durchbiegung der ringsherum frei aufliegenden Platte. Die Bestimmung dieser Funk-

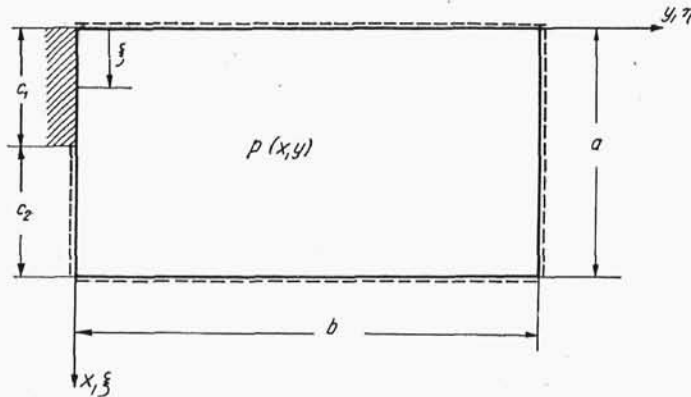


Abb. 2

tion stellt im allgemeinen keine grösseren Schwierigkeiten dar. Sie wird durch bekannte Methoden mit Hilfe einfacher oder doppelter trigonometrischer Reihen erhalten.

$G(x, y; \xi, 0)$ ist die Greensche Funktion für den Zustand $M = 1$; das heisst $G(x, y; \xi, 0)$ ist die Biegefläche der ringsherum frei aufliegenden Platte mit dem im Punkte $(\xi, 0)$ angreifenden Einzelmoment $M_y = 1$.

Die unbekannte Funktion $M_y(\xi)$ werden wir aus der Bedingung des Nullwertes der Neigung der die Biegefläche berührenden Tangente erhalten.

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} + \int_0^{c_1} M_y(\xi) \frac{\partial G(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0. \quad (23)$$

$$0 \leq \xi \leq c_1$$

Nach der Bestimmung von $M(\xi)$ aus dieser Fredholmschen Integralgleichung (I. Art) können wir $w(x, y)$ ohne Schwierigkeiten aus der Gleichung (22) finden.

Damit ist das Problem nunmehr gelöst.

Man kann die Lösung auch auf einem anderen Wege erhalten. Es sei als die unbekannte Funktion die Funktion $\frac{\partial w(x,0)}{\partial y} = \varphi(x)$ der Neigung der Tangenten im Abschnitte c_2 angenommen.

Als Grundsystem nehmen wir eine längs der Geraden $y=0$ fest eingespannte, an anderen Rändern frei aufliegende Platte an.

Es sei die mit der Belastung $p(x, y)$ hervorgerufene Durchbiegung der Platte mit $\bar{w}_0(x, y)$ und die Greensche Funktion für den Zustand $\varphi=1$ im angenommenen Grundsystem mit $L(x, y; \xi, 0)$ bezeichnet. Wir erhalten dann:

$$w(x, y) = \bar{w}_0(x, y) + \int_{c_2} \varphi(\xi) \cdot L(x, y; \xi, 0) d\xi. \quad (24)$$

Die unbekannte Funktion $\varphi(\xi)$ wird aus der im Abschnitt c_2 gültigen Bedingung $\frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y} = 0$ ermittelt.

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial y^2} + \int_{c_2} \varphi(\xi) \frac{\partial^2 L(x, 0; \xi, 0)}{\partial y^2} d\xi = 0 \quad (25)$$

Man kann die erste bzw. die zweite Methode benutzen. Günstiger ist diejenige Methode, die eine einfachere Form des Integralgleichungskernes gibt.

Diese Überlegungen lassen sich auch auf gemischte Randbedingungen, die an zwei, drei bzw. vier Plattenrändern auftreten, anwenden. In diesem Fall erhalten wir ein Integralgleichungssystem.

Nehmen wir an, dass am Rande $y=0$ einer rechteckigen Platte in den Abschnitten c_1 , und c_2 zwei Paare verschiedener Randbedingungen eintreten.

Es sei im Abschnitt c_1 gegeben:

$$l_1 w(x, 0) = 0, \quad l_2 w(x, 0) = 0. \quad (a)$$

und im Abschnitt c_2 :

$$g_1 w(x, 0) = 0, \quad g_2 w(x, 0) = 0. \quad (b)$$

Dabei bezeichnen l_1, l_2, g_1, g_2 beliebige lineare Differentialoperatoren.

Die Operatoren $g_1 w(x, 0)$ und $g_2 w(x, 0)$ sind natürlich längs des Abschnittes c_2 ungleich Null und stellen die Funktionen der Veränderlichen x dar. Dies ist der Fall mit den Operatoren $l_1 w(x, 0)$ und $l_2 w(x, 0)$ im Abschnitte c_2 .

Wollen wir zunächst das Grundsystem nehmen. Dieses bestehe aus einer Platte, für die längs der Geraden $y=0$ (im Abschnitt c_1 und c_2) die Randbedingungen $g_1 w(x, 0) = 0$ und $g_2 w(x, 0) = 0$ gelten.

Mit $w_0(x, y)$ bezeichnen wir die durch die Belastung $p(x, y)$ hervorgerufene Biegefläche; mit $G_1(x, y; \xi, 0)$, und $G_2(x, y; \xi, 0)$ die Greenschen Funktionen für die im oben angegebenen Grundsystem bezeichneten Zustände $g_1 w = 1$, $g_2 w = 1$.

Dann ist:

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \int_{c_1} g_1 w(\xi) \cdot G_1(x, y; \xi, 0) d\xi + \int_{c_1} g_2 w(\xi) \cdot G_2(x, y; \xi, 0) d\xi. \quad (26)$$

Die unbekannten Funktionen $g_1 w(\xi)$ und $g_2 w(\xi)$ können aus den Randbedingungen (a) ermittelt werden

$$\begin{aligned} l_1 w(x, 0) &= l_1 w_0(x, 0) + \int_{c_1} g_1 w(\xi) \cdot l_1 G_1(x, 0; \xi, 0) d\xi + \\ &\quad + \int_{c_2} g_2 w(\xi) \cdot l_1 G_2(x, 0; \xi, 0) d\xi \\ l_2 w(x, 0) &= l_2 w_0(x, 0) + \int_{c_1} g_1 w(\xi) \cdot l_2 G_1(x, 0; \xi, 0) d\xi + \\ &\quad + \int_{c_2} g_2 w(\xi) \cdot l_2 G_2(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$0 \leq \xi \leq c_1$$

In diesen Gleichungen gilt nach dem Bettischen Satz:

$$l_1 G_2(x, 0; \xi, 0) = l_2 G_1(x, 0; \xi, 0) \quad (28)$$

Aus dem Integralgleichungssystem (27) berechnen wir die unbekannten Funktionen $g_1 w(\xi)$ und $g_2 w(\xi)$, und aus der Gleichung (26) die Biegefläche der Platte. Nimmt man als Grundsystem ein System an, in dem längs des Randes die Randbedingungen (a) erfüllt sind, so erhalten wir ähnlich der Gleichung (26) eine Integralgleichung mit den unbekannten Funktionen $l_1 w(\xi)$ und $l_2 w(\xi)$.

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \int_{c_1} l_1 w(\xi) \cdot L_1(x, y; \xi, 0) d\xi + \int_{c_2} l_2 w(\xi) \cdot L_2(x, y; \xi, 0) d\xi, \quad (29)$$

$$c_1 \leq \xi \leq a.$$

Diese Funktionen werden aus dem System von zwei Integralgleichungen ermittelt, welche durch die Anwendung der Operatoren $g_1 w(x, 0)$ und $g_2(x, 0; \xi, 0)$ aus der Gleichung (29) erhalten werden,

Die oben angeführten Gleichungen wollen wir auf die rechteckige Platte mit gemischten Randbedingungen gemäss Abb. 3. übertragen.

Der Rand der Platte $y = 0$ ist im Abschnitt c_1 fest eingespannt, im Abschnitt c_2 frei aufliegend. Im Abschnitt c_1 gilt daher

$$\begin{aligned} l_1 w(x, 0) &= w(x, 0) = 0 \\ l_2 w(x, 0) &= \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

Als Unbekannte nehmen wir in diesem Abschnitt das Einspannungsmoment $M_y(x) = g_1 w(x)$ und den Stützendruck $T_{yz}(x) = g_2 w(x)$.

Bezeichnen wir mit $G_1(x, y; \xi, 0)$ und $G_2(x, y; \xi, 0)$ die Biegefläche für den Zustand $M_y = 1$ und $T_{yz} = 1$, so nimmt die Gleichung (27) folgende Form an :

$$w(x, y) = w_0(x, y) \int_{c_1} M_y(\xi) \cdot G_1(x, y; \xi, 0) d\xi + \int_{c_1} T_{yz}(\xi) \cdot G_2(x, y; \xi, 0) d\xi. \quad (29a)$$

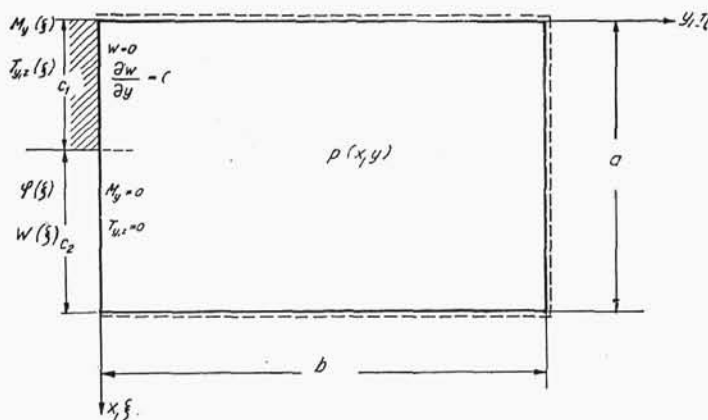


Abb. 3

Aus den Randbedingungen (c) erhalten wir :

$$w_0(x, 0) + \int_{c_1} M_y(\xi) \cdot G_1(x, 0; \xi, 0) d\xi + \int_{c_1} T_{yz}(\xi) \cdot G_2(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0$$

$$\frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} + \int_{c_1} M_y(\xi) \cdot \frac{\partial G_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi + \int_{c_1} T_{yz}(\xi) \cdot \frac{\partial G_2(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0$$

Hier ist

$$\frac{\partial G_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = G_2(x, 0; \xi, 0)$$

Die Ermittlung der Funktionen $M_y(\xi)$ und $T_{yz}(\xi)$ aus diesen Gleichungen ermöglicht die Bestimmung der Biegefläche aus der Gleichung (29a).

Im Sonderfalle des auf dem Abschnitt c_1 frei aufliegenden Randes gilt also $M_y = 0$ und für die Bestimmung der Reaktion $T_{yz}(\xi)$ genügt die Gleichung :

$$w_0(w, 0) + \int_{c_1} T_{yz} \cdot G_2(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0 \quad (31)$$

Die obigen Erwägungen können auf Fälle erweitert werden, wo die gemischten Randbedingungen nicht nur in zwei, sondern auch in mehreren Abschnitten des Plattenumrisses vorkommen.

Die dargestellte Methode wollen wir nun mit einigen möglichst einfachen Beispielen für den Sonderfall der isotropen Platte ($\rho = \varepsilon = 1$) erläutern.

1) Der gegebene Plattenhalbstreifen von einer Breite a ist gleichmässig belastet. Plattenrand $y = 0$ ist im Abschnitt c fest eingespannt und auf dem übrigen Teil frei aufliegend. Das unbekannte Einspannungsmoment $M(\xi)$ bestimmen wir aus der Integralgleichung (23)

$$\frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} \int_0^c M(\xi) \frac{\partial G(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0$$

$$0 \leq \xi \leq c. \quad (32)$$

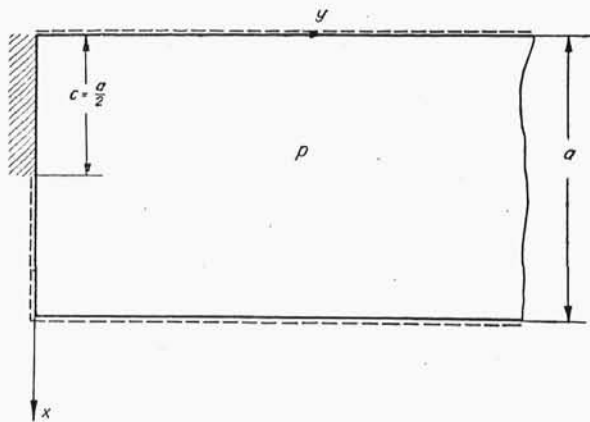


Abb. 4

Für das Grundsystem der auf dem ganzen Umriss frei aufliegenden Platte gilt:

$$w_0(x, y) = \frac{4pa^4}{N\pi^5} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left[1 - \left(1 + \frac{a_n y}{2} \right) e^{-a_n y} \right] \sin a_n x.$$

Die Funktion $G(x, y; \xi, 0)$ soll die Differentialgleichung der Durchbiegung der Platte erfüllen:

$$\nabla^2 \nabla^2 G = 0$$

und ebenfalls die Randbedingungen

$$G = 0, \nabla^2 G = 0$$

auf den Rändern

$$x = 0, x = a, y = \infty$$

Für $y = 0$ soll $G = 0$ sein und

$$-N \frac{\partial^2 G(x, 0; \xi, 0)}{\partial y^2} = \frac{2}{a} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x.$$

Somit erhalten wir

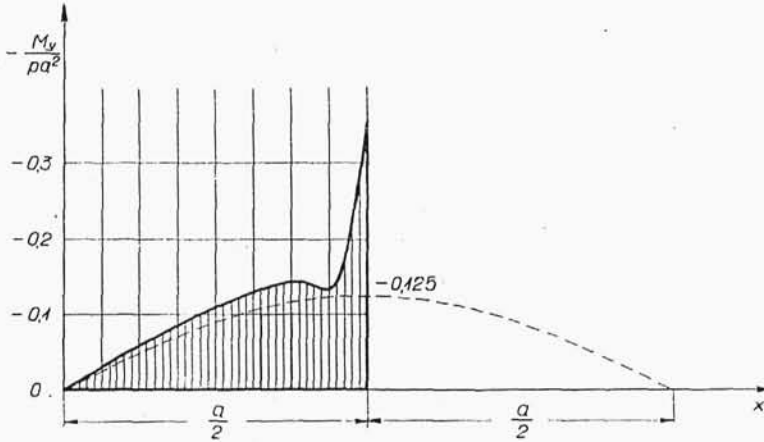


Abb. 5

$$G(x, y; \xi, 0) = \frac{4}{N\pi} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n y}}{n} \sin \alpha_n \xi \cdot \sin \alpha_n x, \quad (33)$$

bzw.

$$G(x, y; \xi, 0) = -\frac{4}{4N\pi} \ln \frac{\cosh \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{\cosh \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)}. \quad (34)$$

Die Gleichung (32) nimmt jetzt folgende Form an :

$$\int_0^c M(\xi) \cdot \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2a} (x - \xi)}{\sin \frac{\pi}{2a} (x + \xi)} \right| d\xi = \frac{8pa^3}{\pi^3} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \alpha_n x. \quad (35)$$

In Abb. 5 ist das Diagramm der Funktion $M(\xi)$ auf Grund der angenäherten Lösung der Gleichung (35) dargestellt. Zum Vergleich wurden die Einspannungsmomente der Platte längs des ganzen Randes $y = 0$ eingezeichnet. Bemerkenswert ist das starke Anwachsen des Einspannungsmomentes in der Nähe des Punktes $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. Das ergibt sich aus der Unstetigkeit des Differentialquotienten

$\frac{\partial w}{\partial y}(y = 0)$ Es ist zu erwarten, dass bei strenger Lösung der Integralgleichung in diesem Punkte der unendlich grosse Wert des Einspannungsmomentes erreicht wird.

Im Sonderfall $c = a$ kann man mit Hilfe der Formel (33) die Gleichung (32) in folgender Gestalt schreiben :

$$\int_0^a M(\xi) \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi \xi}{a} d\xi = -\frac{2pa^3}{N\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Aus dem Vergleich der beiden Reihen geht hervor, dass für die ungeraden Zahlen

$$\int_0^a M(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{a} d\xi = -\frac{2pa^3}{\pi^3 n^3}, \quad (36)$$

gilt und dass für die geraden Zahlen dieser Ausdruck verschwindet.

Die Gleichung (36) kann als Koeffizient der *Fourierschen* Reihe der Funktion $M(\xi)$ behandelt werden, so dass :

$$M(\xi) = -\frac{4pa^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi \xi}{a} = -\frac{p\xi}{2}(a - \xi) \quad (37)$$

2) Der Plattenhalbstreifen ist mit der Einzellast P im Abstand $y = a/2$ von der Achse x belastet (Abb. 6). Der Plattenrand ist von der Achse y symmetrisch im Abschnitt c fest eingespannt.

Die Einspannungsmomente wurden aus der Integralgleichung für die Verhältnisse

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{4} ; \frac{3}{8} ; \frac{1}{2} ; 1$$

ermittelt.

Aus den Diagrammen der Einspannungsmomente geht hervor, dass bei Verkürzung des Abschnittes c die Momente zunehmen ; beim Anwachsen des Abschnittes c hingegen nähert sich das Momentendiagramm dem Diagramm, das entsteht, wenn der Rand a in seiner ganzen Länge befestigt ist.

3) Rechteckige Platte nach Abb. 7. Wir erhalten hier die Integralgleichung:

$$\begin{aligned} & \int_0^{a/2} M_1(\tau) \left\{ \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\operatorname{ctgh} \varrho_n - \frac{\varrho_n}{\sin h^2 \varrho_n} \right) \sin \alpha_n \tau + \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \tau}{mn \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \right)^2} \sin \alpha_n x \right\} d\tau = \\ & = - \frac{2pa^3}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left(\operatorname{tgh} \frac{\varrho_n}{2} - \frac{\varrho_{n/2}}{\cosh^2 \frac{\varrho_n}{2}} \right) \sin \alpha_n x, \end{aligned}$$

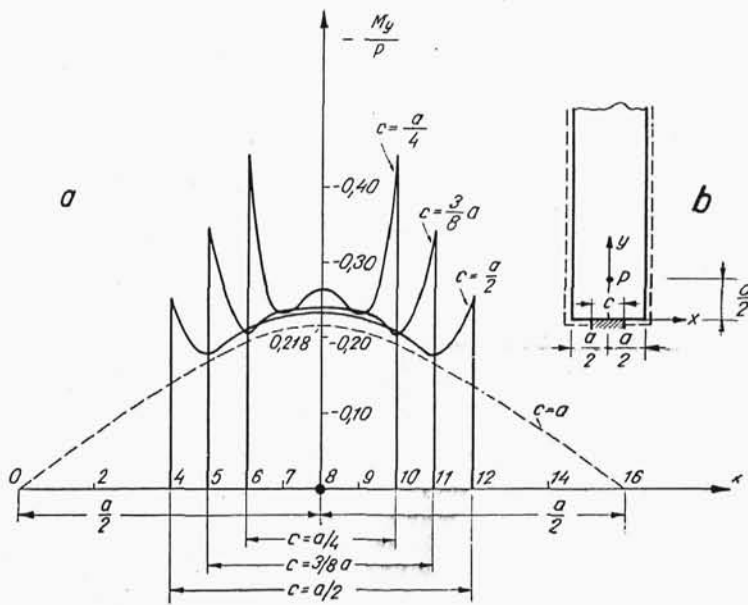


Abb. 6

$$\varrho_n = n\pi, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a}.$$

4) Plattenhalbstreifen nach Abb. 3. Dieser Fall kann als Belastung des unendlich langen Plattenstreifens mit dem Ausschnitt längs der Achse x betrachtet werden. Die Belastung für $x > 0$ ist $+p$ und für $x < 0$ gleich $-p$. Die

unbekannte Funktion des Auflagerdruckes $R(\xi)$ finden wir aus folgender Integralgleichung:

$$\int_0^C R(\xi) \left(\sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \alpha_n x \sin \alpha_n \xi \right) d\xi = -\frac{pa^2(3-\mu)}{\pi^2} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \alpha_n x,$$

$$0 \leq \xi \leq C.$$

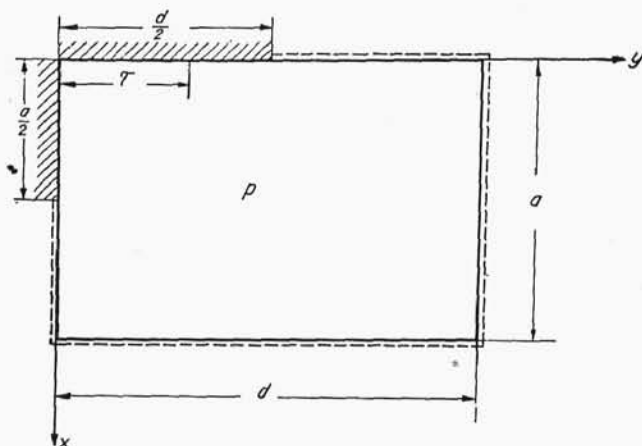


Abb. 7

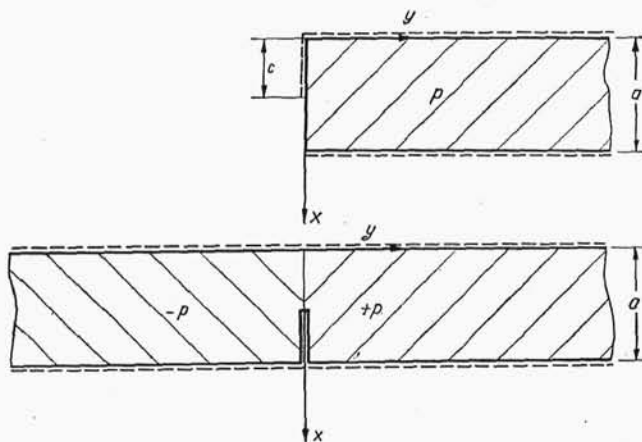


Abb. 8

5) Der unendlich lange Plattenstreifen mit dem Ausschnitt längs der Achse x ist auf der ganzen Fläche gleichmässig belastet. Da die Schubkräfte längs der x -Achse gleich Null sind, bleibt uns aus dem System der Gleichungen (30) die zweite Gleichung.

Wir erhalten hier die Integralgleichung

$$\int_0^c M(\xi) \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2a}(x-\xi)}{\sin \frac{\pi}{2a}(x+\xi)} \right| d\xi = -\frac{2pa^2\mu}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \alpha_n x.$$

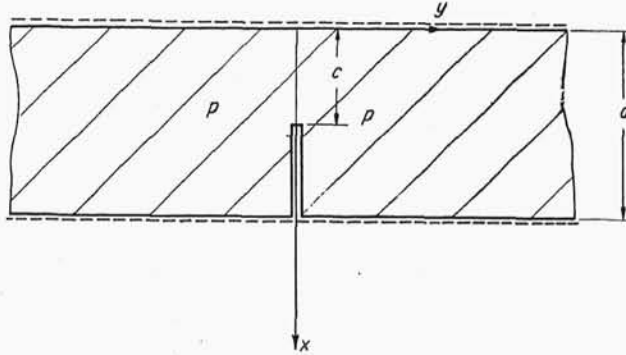


Abb. 9

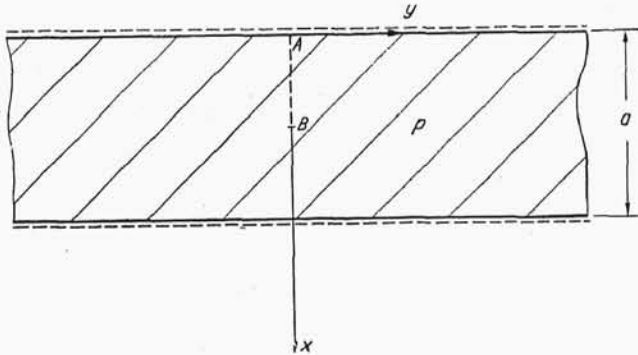


Abb. 10

6) Gleichmässig belasteter Plattenstreifen, auf den Rändern $x = 0$ und $x = a$ und längs der Linie der Auflage AB frei aufliegend. Aus der Nullwertbedingung der Durchbiegung auf dem Abschnitt AB erhalten wir eine Integralgleichung, welche die unbekannte Funktion der Auflagerkraft $R(\xi)$ längs des Abschnittes AB enthält.

$$\int_{AB} R(\xi) \left[\sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m \xi \sin \alpha_m x}{m^3} \right] d\xi = -\frac{8pa^2}{N\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x}{n^5}.$$

Derartige Beispiele können in grosser Zahl vorgeführt werden. Die grösste

Schwierigkeit in der gezeigten Methoden bildet nicht die Formulierung der Integralgleichung oder ihres Systems, sondern ihre strenge Lösung. Diese Lösung ist für bestimmte Formen des Kernes $G(x, \xi)$, $L(x, \xi)$ möglich. Stösst die strenge Lösung auf Schwierigkeiten, so lassen sich zahlreiche bekannte Methoden zur angenäherten Lösung der Integralgleichungen dieser Art anwenden.

Die hier besprochene Methode kann ausserdem für weitere komplizierte Plattenformen entwickelt werden. Sie kann für Probleme sowohl der Platten, die aus Rechtecken bestehen, als auch für Probleme der kontinuierlichen Platten Verwendung finden. Sie kann aber auch auf die Probleme des ebenen Spannungszustandes übertragen werden, wo bekanntlich die *Airysche* Spannungsfunktion die biharmonische Gleichung erfüllt, sowie auch auf die Probleme der Stabtorsion und der Membranbiegung, wo die *Poisson-* und *Laplace-Differentialgleichungen* gelten.

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird zuerst ein Überblick über die Entwicklung der Theorie der orthotropen Platten gegeben. Es wird dann die *Greensche* Funktion (d. h. der Einflusswert für die Durchbiegung) im Falle eines unendlich langen orthotropen Plattenstreifens abgeleitet, wo anstatt einer unendlichen Reihe die geschlossene Form verwendet wird. Zum Schluss werden mehrere Randwertaufgaben der rechteckigen Platte gelöst.

К ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛИТ

д-р техн. наук, проф. В. Новацкий (Варшава)

Резюме

В данной статье в первую очередь дается обзор развития теории ортотропных плит. Затем дается вывод функции Грина для случая бесконечной полосы ортотропной плиты. Для этого вместо бесконечного ряда используется замкнутая форма. Наконец, приводится решение нескольких задач краевых величин прямоугольной плиты.

A CONTRIBUTION TO THE THEORY OF ORTHOTROPIC PLATES

By

PROF. W. NOWACKI, D. OF ENG. SC. WARSHAW

SUMMARY

A survey of the development of the theory of orthotropic plates is given first. Thereupon the Greenian Function (i. e. the influence value for the bending through) is derived for the case of an orthotropic strip of plate of infinite length, where the close form is used instead of an infinite series. Finally, several limit value problems of the orthotropic plate are solved.

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES PLAQUES ORTHOTROPES

PROF. W. NOWACKI, Doct. DES SCIENC. TECHN., VARSOVIE

RÉSUMÉ

L'auteur donne tout d'abord un aperçu de l'évolution de la théorie des plaques orthotropes. Ensuite, il déduit la fonction de Green (c.-à.-d. la valeur d'influence pour le flèche pour une bande infinie d'une plaque orthotrope. A cette fin on emploie l'expression fermée au lieu d'une série infinie. Enfin, plusieurs problèmes de valeurs aux limites de la plaques rectangulaire sont résolus.