

Inż. Elektryk ROMAN TRECHCIŃSKI.

## OBWODY NIESTACJONARNE.

Dowolną sieć, złożoną z elementów, zawierających tylko oporność, będziemy nazywali obwodem stacjonarnym.

Dowolną sieć, złożoną z elementów, zawierających tylko oporność i indukcyjność albo tylko oporność i pojemność, będziemy nazywali obwodem quasistacjonarnym.

Dowolną sieć, złożoną z elementów, zawierających oporność, indukcyjność i pojemność, będziemy nazywali obwodem niestacjonarnym.

Linja elektryczna z równomiernie rozłożonymi własnościami będzie szczególnym wypadkiem obwodów niestacjonarnych.

Obwody elektryczne, stacjonarne, quasistacjonarne i niestacjonarne, mogą być w stanie ustalonym lub nieustalonym, w zależności od dodatkowych warunków w rozpatrywanej chwili.

Dla linii nieskończenie długiej z równomiernie rozłożonymi, niezmiennymi w czasie i przestrzeni, własnościami elektrycznymi, i aparatu nadawczego o stacjonarnym napięciu o przebiegu prostokątnym, można określić fale napięć i prądów w dowolnym czasie i w dowolnym punkcie na linii zapomocą wzorów, podanych przez K. W. Wagner'a.

Oznaczmy:

$C$  — pojemność w  $F$  na km.

$G$  — upływność w  $S$  na km.

$L$  — indukcyjność w  $H$  na km.

$R$  — oporność w  $\Omega$  na km.

$$\beta = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \gamma = 0,5 \cdot \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right); \quad \delta = 0,5 \cdot \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right).$$

Do momentu  $t = 0$  wartość napięcia na początku linii była równą zeru; w momencie  $t = 0$  nastąpiło raptowne podniesienie do wartości  $V_0 = \text{const}$ ; dla  $t > 0$  wartość napięcia jest stałą i równą  $V_0$ .

W powyższym założeniu wartość fali prądu dla dowolnego momentu  $t$  i punktu, odległego o  $x$  km. od początku linii, może być obliczona na zasadzie wzoru:

$$i_{x,t} = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot e^{-\gamma t} \cdot B_0(j\delta \cdot \sqrt{t^2 - x^2 LC}) +$$

$$+ \frac{V_0 \cdot G}{\delta \cdot \sqrt{LC}} \cdot e^{-\beta x} \cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(2m)!}{m!} \cdot \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{m+1} \cdot \left(\frac{1}{2\beta x}\right)^m \cdot B_m(\delta x \sqrt{LC}) \cdot \sum_{n=0}^{n=2m} \frac{(\beta x)^n}{n!} +$$

$$+ \frac{V_0 \cdot G}{\delta \cdot \sqrt{LC}} \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(2m)!}{m!} \cdot \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{m+1} \cdot \left(\frac{1}{2\beta x}\right)^m \cdot B_m(\delta x \sqrt{LC}) \cdot \sum_{n=0}^{n=2m} \frac{(\gamma t)^n}{n!};$$

$B_0(u)$  oznacza funkcję Bessel'a rodzaju pierwszego i rzędu zerowego;

$B_m(u)$  tą samą funkcję rodzaju pierwszego i rzędu  $m$ .

Dla linii z doskonałą izolacją, kiedy  $G = 0$ , pozostaje tylko pierwszy wyraz wzoru; drugi i trzeci są równe zeru.

Dla linii zrównoważonej, kiedy współczynnik deformacji w czasie  $\delta = 0$ , pozostaje również tylko pierwszy wyraz,  $B_0(0) = 1$ , więc wzór upraszcza się i przyjmuje postać:

$$\left[ i_{x,t} \right]_{\delta=0} = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot e^{-\gamma t}.$$

Dla obliczeń technicznych wzory z funkcjami Bessel'a mogą stworzyć manipulacyjne trudności; niżej przytoczone przybliżone wzory, skombinowane na podstawie prawa przejścia, analogicznie do wzorów w obwodach quasistacjonarnych w stanie nieustalonym, pozwalają z dokładnością techniczną określić w dowolnym czasie i miejscu wartość fali napięć, fali prądów i chwilowej oporności falowej.

W wyżej wspomnianej pracy \*) K. W. Wagner wykazał, że strome czoło fali, biegnąc wzdłuż linii ze stałą szybkością  $v_{\sim} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  km. s<sup>-1</sup> zachowuje swą względną formę, to jest raptowny podskok, z tem, że wartość tego podskoku maleje w czasie według wzoru  $e^{-\gamma t}$  lub w przestrzeni według wzoru  $e^{-\beta x}$ ; dla czoła fali oba powyższe wzory są identyczne, ponieważ czas, potrzebny dla przebiegu czoła do punktu obserwacji  $x$  równa się  $x\sqrt{LC}$ , skąd mamy:

$$\gamma t = 0,5 \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \cdot x\sqrt{LC} = 0,5 \cdot \left( R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}} \right) \cdot x = \beta \cdot x \quad \dots \quad 1.$$

\*) K. W. Wagner E. T. Z. 1911. S. 283.

Na podstawie powyższego dla stromego czoła fali mamy:

$$[v_{x,t}]_{t=x\sqrt{LC}} = V_0 \cdot e^{-\gamma t} = V_0 \cdot e^{-\beta x} \dots \dots \dots 2.$$

$$[i_{x,t}]_{t=x\sqrt{LC}} = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot e^{-\gamma t} = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot e^{-\beta x} \dots \dots \dots 3.$$

$$[z_{x,t}]_{t=x\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \dots \dots \dots 4.$$

Wzór 4-ty wskazuje, że chwilowa wartość oporności falowej dla stromego czoła fali jest stałą.

Założymy linię zrównoważoną i zastąpimy ją obwodem stacjonarnym o tych samych wartościach oporności i upływności na km.

Momentalną pozorną oporność falową stromego czoła fali zastępujemy opornością rzeczywistą o wartości  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  i przypuścimy, że oporność ta z szybkością  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$  km s<sup>-1</sup> biegnie wzdłuż zamienionej stacjonarnej linii. W tych warunkach dla czasu  $t \geq x\sqrt{LC}$  i dowolnego punktu  $x$  momentalne wartości napięć i prądów obwodu stacjonarnego będą identyczne do wartości fal napięć i prądów linii zrównoważonej. Abstrahując fizyczną możliwość takiej zamiany, widzimy, że proces falowy można wyobrazić, jako odtworzony przez ruchomą oporność.

Jeżeli w pewnym momencie ta ruchoma oporność, którą możemy traktować jako aparat odbiorczy  $A_z$ , zatrzymała się, to wartość napięć i prądów można obliczyć według wzorów dla procesu ustalonego:

$$v_x = V_0 \cdot e^{-x\sqrt{RG}} ; \quad i_x = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{R}{G}}} \cdot e^{-x\sqrt{RG}} .$$

Dla danego obiektu, jak wiadomo, napięcia i prądy pierwszej bieżącej fali będą równe napięciom i prądom ustalonym.

Założymy linię z doskonałą izolacją, to jest  $G = 0$ .

Abstrahując od zmian energii elektrostatycznej i elektromagnetycznej, zachodzących w linii podczas przebiegu fali, zamienimy strome czoło bieżącej fali aparatem odbiorczym o oporności  $R_s = \sqrt{\frac{L}{C}}$ ; gdyby w pewnym momencie ten fikcyjny aparat  $A_z$  zatrzymał się w punkcie  $l$ , to wartości ustalonych napięć i prądów mogą być otrzymane ze wzorów:

$$v_x = V_0 \frac{V_0}{lR' + \sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot R \cdot x \dots \dots \dots 5.$$

$$i_x = \frac{V_0}{lR + \sqrt{\frac{L}{C}}} \dots \dots \dots 6.$$

Czas  $\theta$ , w przeciągu którego fale elektryczne dobiegną do punktu odległego o  $l$  km od początku linii równa się:

$$\theta = l \cdot \sqrt{LC}; \quad l = \frac{\theta}{\sqrt{LC}}.$$

$$v_x = V_0 \cdot \left[ 1 - \frac{R_x}{\frac{R \cdot \theta}{\sqrt{LC}} + \sqrt{\frac{L}{C}}} \right] \dots \dots \dots 7.$$

$$i_x = \frac{V_0}{\frac{R \cdot \theta}{\sqrt{LC}} + \sqrt{\frac{L}{C}}} \dots \dots \dots 8.$$

W punkcie obserwacji, oddalonym o  $x$  km od początku linii dla interwału czasu od 0 do  $t = x \sqrt{LC}$  nie mamy wcale zjawisk elektrycznych.

W momencie  $t = x \cdot \sqrt{LC}$  fale napięć i prądów zjawiają w postaci stromego czoła o wartości:

$$[v_{x,t}]_{t=x\sqrt{LC}} = V_0 \cdot e^{-\gamma t} = V_0 \cdot e^{-\gamma x \sqrt{LC}} \dots \dots \dots 9.$$

$$[i_{x,t}]_{t=x\sqrt{LC}} = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot e^{-\gamma t} = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot e^{-\gamma \cdot x \sqrt{LC}} \dots \dots \dots 10.$$

Dla czasu  $t > x \sqrt{LC}$  strome czoło fali napięć i prądów będzie się oddalało od początku linii w dalszym ciągu i w punkcie obserwacji pozostanie ogon fali.

Dla określenia chwilowych wartości za pomocą prawa przejścia przypuścimy, że realna wartość ogona fali w miejscu  $x$  równa się sumie dwóch składowych, z których pierwsza równa się wartości stromego czoła, zanikającego w dalszym ciągu według prawa  $e^{-\gamma t}$ ; druga składowa ma wartość napięcia, względnie prądu ustalonego w danym miejscu w przypuszczeniu, że fikcyjny aparat odbiorczy znajduje się w miejscu  $\frac{l}{\sqrt{LC}}$ , przyczem składowa druga powstaje według prawa:  $[1 - e^{-(\gamma t - \beta x)}]$ .

Na zasadzie powyższego otrzymamy wzory:

$$v_{x,t} = V_0 \cdot e^{-\gamma t} + V_0 \cdot \left[ 1 - \frac{R_x}{\frac{R t}{\sqrt{LC}} + \sqrt{\frac{L}{C}}} \right] \cdot \left[ 1 - e^{-\gamma t + \beta x} \right] \dots \dots \dots 11.$$

$$i_{x,t} = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot e^{-\gamma t} + \frac{V_0}{\frac{Rt}{\sqrt{LC}} + \sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot \left[ 1 - e^{-\gamma t + \beta x} \right] \dots \dots \dots 12.$$

$$z_{x,t} = \frac{v_{x,t}}{i_{x,t}} \dots \dots \dots 13.$$

Wzory te są aktualne z warunkiem:  $\gamma t > \beta x$  i pozwalają zapomocą prostych manipulacji określić chwilowe wartości napięć prądów i oporności.

Zakładając dla liczbowego przykładu:  $V_0 = 10 V$ .

$$C = 0,01 \mu \cdot F \cdot km^{-1}; \quad G = 0 \mu \cdot S \cdot km^{-1}; \quad L = 0,01 H \cdot km^{-1}; \quad R = 10 \Omega \cdot km^{-1};$$

mamy:

$$\beta = 0,005; \quad \gamma = 500; \quad \delta = 500; \quad v_{\sim} = 100000 km \cdot s^{-1}.$$

$$\theta = \frac{1}{\gamma} = 0,002 s.$$

Dwie niżej przytoczone tablice dają chwilowe wartości bieżącej fali prądu, przy-  
czem pierwsza jest obliczona na podstawie wzoru:

$$i_{x,t} = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot e^{-\gamma t} \cdot B_0(j \cdot \delta \cdot \sqrt{t^2 - x^2 LC});$$

a druga według wzoru 12.

	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0 = $\beta x$
$i_0$	10,00	—	—	—	—	—
$i_{\theta}$	4,66	3,68	—	—	—	—
$i_{2\theta}$	3,08	2,58	1,35	—	—	—
$i_{3\theta}$	2,43	2,15	1,35	0,50	—	—
$i_{4\theta}$	2,07	1,87	1,31	0,66	0,18	—
$i_{5\theta}$	1,84	1,69	1,25	0,76	0,34	0,07.
$i_0$	10,00	—	—	—	—	—
$i_{\theta}$	5,80	3,68	—	—	—	—
$i_{2\theta}$	3,07	2,62	1,35	—	—	—
$i_{3\theta}$	1,86	1,73	1,40	0,50	—	—
$i_{4\theta}$	1,29	1,23	1,14	0,88	0,18	—
$i_{5\theta}$	0,98	0,96	0,93	0,85	0,64	0,07.

Analogiczną metodą, jak i dla linii z doskonałą izolacją, możemy skombinować wzory na podstawie prawa przejścia i dla linii z upływnością.

Dla punktu obserwacji, oddalonego o  $x$  km od początku linii i w momencie  $t$ , kiedy fikcyjny aparat odbiorczy będzie odległy o  $l$  km, wartości ustalonych napięć i prądów określimy według wzorów:

$$v_x = \frac{i_l}{2} \cdot \left[ (Z_s + Z) \cdot e^{\rho(l-x)} + (Z_s - Z) \cdot Z \cdot e^{-\rho(l-x)} \right] \dots \dots \dots 14.$$

$$i_x = \frac{i_l}{2 \cdot Z} \cdot \left[ (Z_s + Z) \cdot e^{\rho(l-x)} - (Z_s - Z) \cdot Z \cdot e^{-\rho(l-x)} \right] \dots \dots \dots 15.$$

$$i_l = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot e^{-\gamma t} \dots \dots \dots 16.$$

$$Z_s = \sqrt{\frac{L}{C}} \dots \dots \dots 17.$$

$$Z = \sqrt{\frac{R}{G}} \dots \dots \dots 18.$$

$$\rho = \sqrt{R \cdot G} \dots \dots \dots 19.$$

$$l = \frac{t}{\sqrt{LC}} \dots \dots \dots 20.$$

Stosując prawo przejścia, otrzymujemy:

$$v_{x,t} = V_0 \cdot e^{-\gamma t} + v_x \cdot (1 - e^{-\gamma t + \beta x}) \dots \dots \dots 21.$$

$$i_{x,t} = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot e^{-\gamma t} + i_x \cdot (1 - e^{-\gamma t + \beta x}) \dots \dots \dots 22.$$

$$z_{x,t} = \frac{v_{x,t}}{i_{x,t}} \dots \dots \dots 23.$$

Zakładając dla liczbowego przykładu:  $V_0 = 10 \text{ V}$ .

$C = 0,01 \mu \text{ F km}^{-1}$ ;  $G = 1 \mu \text{ S km}^{-1}$ ;  $L = 0,01 \text{ H km}^{-1}$ ;  $R = 10 \Omega \text{ km}^{-1}$ .

mamy:

$$\beta = 0,0055; \quad \gamma = 550; \quad \delta = 450; \quad v_{\sim} = 100000 \text{ km s}^{-1};$$

$$\theta = 0,00182 \text{ s}; \quad Z_s = 1000 \Omega; \quad Z = 3160 \Omega; \quad \rho = 0,00316.$$

Niżej przytoczona tablica daje chwilowe wartości prądów, napięć i oporności falowych.

	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0 = $\beta x$ .
$i_c$	10,00	—	—	—	—	—
$i_{e0}$	6,45	3,68	—	—	—	—
$i_{2e0}$	4,38	2,59	1,35	—	—	—
$i_{3e0}$	3,58	2,10	1,15	0,50	—	—
$i_{4e0}$	3,30	1,89	1,07	0,54	0,18	—
$i_{5e0}$	3,21	1,82	1,02	0,56	0,27	0,07
$v_0$	10,00	—	—	—	—	—
$v_{e0}$	10,00	3,68	—	—	—	—
$v_{2e0}$	10,00	4,90	1,35	—	—	—
$v_{3e0}$	10,00	5,35	2,50	0,50	—	—
$v_{4e0}$	10,00	5,51	2,91	1,30	0,18	—
$v_{5e0}$	10,00	5,57	3,07	1,60	0,70	0,07
$z_0$	1000	—	—	—	—	—
$z_{e0}$	1550	1000	—	—	—	—
$z_{2e0}$	2280	1890	1000	—	—	—
$z_{3e0}$	2780	2530	2170	1000	—	—
$z_{4e0}$	3030	2930	2720	2420	1000	—
$z_{5e0}$	3100	3060	3000	2860	2600	1000

Mając napięcia i prądy dla linii nieskończenie długiej, możemy, stosując prawo lustrzanych odbić, określić napięcia dla linii o określonej długości z dowolnym aparatem odbiorczym na końcu.

Założymy stacjonarne napięcie aparatu nadawczego, jako funkcję czasu o stałych zmianach według wzoru:  $v_{0,t} = K t$ .

Traktując powyższe napięcie jako sumę nieskończenie wielkiej ilości nieskończenie małych podskoków, możemy na podstawie wyżej przytoczonych wzorów znaleźć chwilowe wartości napięć i prądów w dowolnym punkcie.

Przypuścimy linię z doskonałą izolacją:  $G = 0 \mu S km^{-1}$ .

Dla  $x = 0$  wzory 11 i 12 przybierają postać:

$$v_{0,t} = K \cdot t \dots \dots \dots 24.$$

$$i_{0,t} = \frac{K \cdot t}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot e^{-\gamma t} + \frac{K \cdot t}{\frac{R t}{\sqrt{LC}} + \sqrt{\frac{L}{C}}} (1 - e^{-\gamma t}) \dots \dots \dots 25.$$

$$\lim \left[ \frac{K \cdot t}{\frac{R t}{\sqrt{LC}} + \sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot (1 - e^{-\gamma t}) \right]_{t=\infty} = \frac{K \cdot \sqrt{LC}}{R}$$

Wartość prądu naturalnego dla procesu nieskończenie długiego:

$$\left[ i_{0,t} \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} = \frac{K \cdot \sqrt{LC}}{R} = \frac{\sqrt{LC}}{R} \cdot \frac{dv_{0,t}}{dt} \dots \dots \dots 26.$$

Prąd naturalny będzie posiadał stałą wartość dla dowolnego momentu i dowolnego punktu na linii:

$$\left[ i_{x,t} \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} = \frac{\sqrt{LC}}{R} \cdot \frac{dv_{0,t}}{dt} \dots \dots \dots 27.$$

$$\left[ v_{x,t} \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} = v_{0,t} - x \cdot \sqrt{LC} \cdot \frac{dv_{0,t}}{dt} \dots \dots \dots 28.$$

Zakładając dla liczbowego przykładu:  $v_{0,t} = 5000 t V$ .

$C = 0,01 \mu F km^{-1}$ ;  $G = 0 \mu S km^{-1}$ ;  $L = 0,01 H km^{-1}$ ;  $R = 10 \Omega km^{-1}$ .

mamy prąd naturalny:

$$\left[ i_{x,t} \right]_{t=+\infty}^{t=+\infty} = 5 m A.$$

Stosując prawo przejścia, znajdziemy chwilową wartość prądu przejściowego między dwiema wartościami naturalnymi:

$$i_{0,t} = \frac{\sqrt{LC}}{R} \cdot \left[ K_1 \cdot e^{-\delta \cdot (t-\theta_1)} + K_2 \cdot (1 - e^{-\delta t + \delta \theta_1}) \right]_{t > \theta_1} \dots \dots \dots 29.$$

Jeżeli do momentu  $t = 0$  napięcie aparatu nadawczego  $v_{0,t} = 0$  i po momencie  $t = 0$  równa się  $v_{0,t} = Kt$ , to prąd początkowy może być określony według wzoru:

$$i_{0,t} = \frac{K \cdot \sqrt{LC}}{R} \cdot (1 - e^{-\delta t}) \dots \dots \dots 30.$$

Dla punktu  $x$ :

$$i_{x,t} = \frac{\sqrt{LC}}{R} \cdot \left[ K_1 \cdot e^{-\delta t + \delta \theta_1 + \beta x} + K_2 \cdot (1 - e^{-\delta t + \delta \theta_1 + \beta x}) \right] \dots \dots \dots 31.$$

Dla linii zrównoważonej wartość prądów naturalnych będzie:

$$\left[ i_{0,t} \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} = \frac{K \cdot t}{\sqrt{\frac{R}{G}}} \dots \dots \dots 32.$$

$$\left[ i_{x,t} \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} = \frac{K \cdot (t - x \sqrt{LC})}{\sqrt{\frac{R}{G}}} \cdot e^{-\beta x} \dots \dots \dots 33.$$



Dla linii z dowolnym stosunkiem stałych:

$$\left[ i_{0,t} \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} = \frac{K \cdot \sqrt{LC}}{R} \cdot \frac{\delta}{\gamma} + \frac{K \cdot t}{\sqrt{\frac{R}{G}}} \cdot \frac{\gamma - \delta}{\gamma} \dots \dots \dots 34.$$

$$\left[ i_{x,t} \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} = \frac{K \cdot \sqrt{LC}}{R} \cdot \frac{\delta}{\gamma} + \frac{K \cdot (t - x\sqrt{LC})}{\sqrt{\frac{R}{G}}} \cdot \frac{\gamma - \delta}{\gamma} \cdot e^{-\beta x} \dots \dots \dots 35.$$

Stosując prawo przejścia otrzymujemy:

$$i_{x,t} = \left[ i_{1;x,t} \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} \cdot e^{-[\delta] \cdot t} + \left[ i_{2;x,t} \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} \cdot (1 - e^{-[\delta] \cdot t}) \dots \dots \dots 36.$$

[ $\delta$ ] oznacza wartość bezwzględną.

Zastosowanie wyżej przytoczonych przybliżonych wzorów dla celów technicznych daje rezultaty z dokładnością, dostateczną dla obliczeń linii telegraficznych.

### RÉSUMÉ.

La règle du passage aux circuits quasistationnaires peut être adaptée aussi pour les circuits non stationnaires. L'auteur se sert de cette méthode pour établir les formules permettant de trouver les valeurs approximatives des courants télégraphiques.

