

# Linje wpływowe.

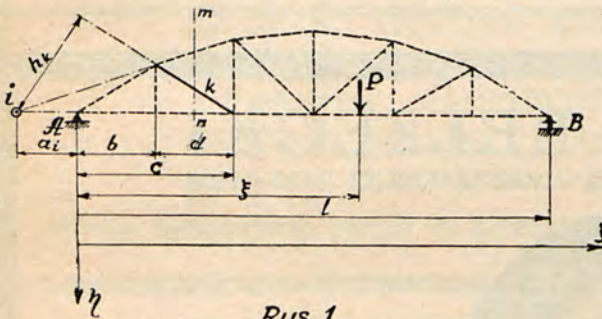
Dr. inż. Profesor Stanisław Betzecki, Warszawa.

(Artykuł nadesłany przez inż. Władysława Wachniewskiego, Chorzów).

Dla dowolnego pręta płaskiej kratownicy (rys. 1).

$$T_k h_k \pm M_i = 0 \dots (1)$$

W tem równaniu oznaczają:  $T_k$  — siła w pręcie  $k$ ,  $h_k$  — odległość punktu  $i$  od osi pręta  $k$ ,  $i$  — biegun, względem którego bierzemy momenty,  $M_i$  — moment sił, przyłożonych z prawej lub z lewej strony od pręta  $k$ , względem bieguna  $i$ . Przy sile ruchomej moment  $M_i$  zmienia się ze zmianą położenia siły ruchomej.



Rys. 1

Oznaczmy odciętą punktu  $i$  przez  $a_i$ , odciętą punktu przyłożenia ruchomej siły  $P$  przez  $\xi$ , odciętą lewego końca przedziału, w którym znajduje się pręt  $k$ , przez  $b$ , prawego końca — przez  $c$ .

W najogólniejszym wypadku możemy mieć nie jedną siłę  $P$ , lecz układ sił  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  połączonych niezmiennie, jak np. pociąg, wóz, walec drogowy itp. Ponieważ suma momentów sił składowych równa jest momentowi siły wypadkowej, przeto, w niczem nie zmniejszając ogólności zagadnienia, możemy rozpatrywać jedną tylko siłę równą wypadkowej i odległość jej od lewej podpory oznaczać będziemy przez  $\xi$ . W praktyce kierunek ruchomych sił składowych połączonych niezmiennie jest prawie zawsze wspólny (kierunek pionu), więc wypadkowa tych sił będzie sumą algebraiczną  $\Sigma P$  sił składowych.

Obieramy układ współrzędnych  $\xi$  i  $\eta$ . Od osi  $\xi$  odmierzać będziemy rzędne  $\eta$  funkcji, którą określimy w sposób następujący: Z równania (1) mamy:

$$T_k = \frac{M_i}{h_k}$$

W najogólniejszym wypadku, gdy mamy układ sił połączonych niezmiennie,  $M_i = \Sigma P f(\xi)$ ,

gdzie  $\Sigma P$  jest sumą algebraiczną (wypadkową) układu sił, a  $f(\xi)$  — jest pewną funkcją charakteryzującą położenie wypadkowej względem bieguna  $i$ . Po podstawieniu otrzymamy:

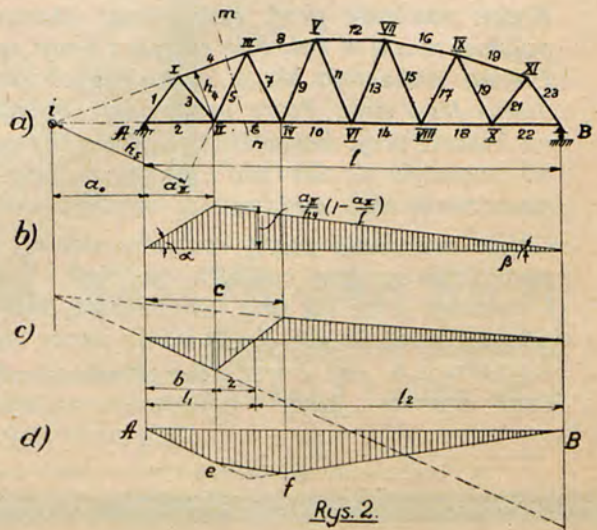
$$T_k = \frac{\Sigma P \cdot f(\xi)}{h_k}$$

Przyjmując oznaczenie:

$$\frac{f(\xi)}{h_k} = \eta_k, \text{ otrzymamy: } T_k = \Sigma P \cdot \eta_k$$

Z tej ostatniej równości widzimy, że funkcja  $\eta_k$  daje wielkość  $T_k$  przy  $\Sigma P = 1$ . Skąd wynika, że jeżeli obliczymy szereg kolejnych wartości  $\eta_k$  dla rozmaitych położeni siły  $\Sigma P = 1$ , to dla otrzymania rzeczywistej siły  $T_k$  w pręcie  $k$ , przy określonym położeniu układu sił, należy rzędną  $\eta_k$ , odpowiadającą położeniu wypadkowej układu pomnożyć przez wielkość wypadkowej  $\Sigma P$ . Funkcje  $\eta_k$  noszą nazwę funkcji wpływowych, wykresy tych funkcji — linii wpływowych. W najogólniejszy sposób możemy zaznaczyć, że  $\eta_k$  jest funkcją  $\xi, a_i, b, c$  tj.  $\eta_k = f(\xi, a_i, b, c)$ .

Rozpatrzmy teraz płaską kratownicę mostową na podporach A i B (rys. 2 a). Podpora A stała, podpora B ruchoma. Ponieważ kratownica znajduje się w równowadze, więc i każda jej część wydzielona dowolnie pomyslanym przekrojem znajduje się w równowadze pod działaniem sił do niej przyłożonych. Siły te będą się składały z sił zewnętrznych i sił zastępczych, tj. takich, które trzeba przyłożyć do osi przeciętych prętów, aby nimi zastąpić działanie prawej odciętej części kratownicy na lewą i odwrotnie.



Rys. 2.

Zajmiemy się określeniem siły osiowej w pręcie czwartym. Prowadzimy przekrój mn. Obieramy biegun w węźle II. Z warunków równowagi lewej części kratownicy, napiszemy równanie momentów:

$$T_4 h_4 + M_{II} + \mu = 0$$

W równaniu tem  $\mu$  jest to suma momentów belek podłużnych i szyn jezdni. Belki podłużne i szyny są to belki ciągle wieloprzęsłowe i przy  $\xi = a_{II}$ ,  $\mu \neq 0$ . Jak wiadomo z teorii belek ciągłych  $\mu$  jest funkcją trzeciego stopnia względem  $\xi$ , więc celem uproszczenia wzorów wprowadzamy założenie, że  $\mu_a = 0$  tj., że szyny i belki podłużne składają się z szeregu belek wolnopodpartych w węzłach A-II-IV-VI-VIII-X-B. Przy takim założeniu momenty będą funkcjami linjowymi odciętej  $\xi$ , czyli najprostszymi ze wszystkich funkcji wpływowych.

Kilka uwag wystarczy, aby określić te funkcje dla dowolnego pręta dowolnej płaskiej kratownicy. Powróćmy do określenia siły osiowej w pręcie czwartym. Zadanie zawsze możemy sprowadzić do takiego przypadku, że w równanie momentów wejdzie moment jednej tylko siły zewnętrznej, a mianowicie, moment reakcji prawej lub lewej podpory. Rzeczywiście, jak już zaznaczyliśmy, układ sił połączonych niezmiennie sprowadzić możemy do jednej siły wypadkowej, jeżeli siła ta jest z lewej strony przekroju mn, to napiszemy równanie momentów dla prawej części kratownicy, na którą działają siły zastępcze w przeciętych prętach i reakcja prawej podpory. Ponieważ biegun obraliśmy w węźle II, w którym przecinają się kierunki dwóch zastępczych sił w prętach  $\mathfrak{F}$  i  $\mathfrak{G}$ , przeto w równanie wejdą momenty tylko dwóch sił, z których jedna jest niewiadomą siłą zastępczą w pręcie 4, a druga reakcją prawej podpory.

$$- T_4 h_4 - R_p (l - a_{II}) = 0$$

Reakcja  $R_p$  jest funkcją zależną od położenia  $P$ . Biorąc sumę momentów dla całej kratownicy względem lewej podpory A, otrzymamy:

$$R_p l - P \xi = 0$$

skąd  $R_p = \frac{P \xi}{l}$  po podstawieniu

$$T_4 = - \frac{P \xi}{h_k} \left( 1 - \frac{a_{II}}{l} \right)$$

Zakładając  $P = l$

$$\eta_4 = - \frac{\xi}{h_4} \left( 1 - \frac{a_{II}}{l} \right) \dots \dots (2)$$

Jeżeli siła jest z prawej strony przekroju mn, to napiszemy równanie momentów dla lewej części kratownicy:

$$T_4 h_4 + R_l a_{II} = 0$$

Z równania momentów dla całej kratownicy względem podpory B:

$$- R_l l + P (l - \xi) = 0; R_l = P \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right)$$

Po podstawieniu

$$T_4 = - \frac{P a_{II}}{h_4} \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right)$$

Zakładając  $P = l$

$$\eta_4 = - \frac{a_{II}}{h_4} \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right) \dots \dots (3)$$

Wzór 2 przy  $\xi = 0$  i wzór 3 przy  $\xi = l$  dają dla  $\eta_4$  wartość  $\eta_4 = 0$ . Przy  $\xi = a_{II}$  oba równania dają dla  $\eta_4$  jedną i tę samą wartość:

$$\eta_4 = - \frac{a_{II}}{h_4} \left( 1 - \frac{a_{II}}{l} \right)$$

skąd wypływa ważny wniosek, że obie gałęzie linii wpływowej przecinają się zawsze pod biegunem. Możemy więc zrobić wykres tej linii wpływowej (rys. 2 b). Z trójkątów linii wpływowej mamy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_4}{a_{II}} = - \frac{1}{h_4} \left( 1 - \frac{a_{II}}{l} \right);$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\eta_4}{l - a_{II}} = - \frac{a_{II}}{l};$$

$$\Sigma (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \frac{1}{h_4}$$

Otrzymaliśmy ostatecznie następujące wzory linii wpływowej:

dla lewej części kratownicy

$$\eta_4 = - \frac{\xi}{h_4} \left( 1 - \frac{a_{II}}{l} \right)$$

dla prawej części kratownicy

$$\eta_4 = - \frac{a_{II}}{h_4} \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right)$$

Z tych wzorów widocznem jest, że przy  $a_i > 0$  i  $a_i < l$  wartości  $\eta_4$  są zawsze ujemne, skąd wniosek, że wzór ten jest słuszny dla prętów 1, 4, 8, 12, 16, 19 i 23 pasa górnego kratownicy. Jeżeli założymy, że  $a_i < 0$ , czyli że  $a_i$  przyjmuje wartość ujemną  $-a_i$ , to z poprzednich wzorów otrzymamy:

$$\eta_k = - \frac{\xi}{h_k} \left( 1 + \frac{a_i}{l} \right)$$

dla lewej części kratownicy  $\eta_k < 0$

$$\eta_k = \frac{a_i}{h_k} \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right)$$

dla prawej części kratownicy  $\eta_k > 0$

czyli, że funkcja wpływowa zmienia znak.

Naprzykład  $\eta_k$  zmienia znak dla pręta 5. Jeżeli siła jest wlewo od przekroju, to:

$$+ T_5 h_5 - R_p (a_0 + l)$$

$$\eta_5 = \frac{\xi}{h_5} \left( 1 + \frac{a_0}{l} \right) > 0$$

Jeżeli siła jest wprawo od przekroju, to:

$$- T_5 h_5 - R_l a_0 = 0$$

$$\eta_5 = - \frac{a_0}{h_5} \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right) < 0$$

Dla dowolnego krzyżulca zero funkcji  $\eta_k$  ma odcięta, którą możemy określić z zależności geometrycznej trójkątów (rys. 2 c)

$$l_1 = b + z; \quad z = \frac{\eta_b d}{\eta_b + \eta_c}; \quad \eta_b = \frac{b (a_0 + l)}{l h_5}$$

$$\eta_c = \frac{a_0 (l - b - d)}{l h_5}; \quad z = b \frac{\left( 1 + \frac{l}{a_0} \right) d}{1 + \frac{l}{a_0} b - d}$$

$$l_1 = b \left[ 1 + \frac{\left( \frac{l}{a_0} + 1 \right) d}{l + \frac{l}{a_0} b - d} \right]$$

Dla przypadku  $a_0 = \infty$ , tj. gdy dwa pozostałe pręty w przekroju są równoległe, czyli przecinają się w punkcie niewłaściwym:

$$l_1 = b \left( 1 + \frac{d}{l - d} \right)$$

Po określeniu punktu zerowego linii wpływowej, możemy dodatnią i ujemną część linii wpływowej rozpatrywać jako dwie oddzielne linie wpływowe o przesłach  $l_1$  i  $l_2 = l - l_1$ .

Jak widzimy z powyższych rozważań, gdy  $a_i$  znajduje się w przedziale  $0 < a_i < l$ ,  $\eta_k$  zachowuje znak, gdy  $a_i$  znajduje się poza przedziałem  $0 - l$ , czyli  $a_i < 0$  lub  $a_i > l$ ,  $\eta_k$  wogóle zmienia znak. Jeżeli chcemy uniknąć prętów o zmiennym znaku, musimy nadać kratownicy taki kształt, żeby dla dowolnego pręta  $0 < a_i < l$ .

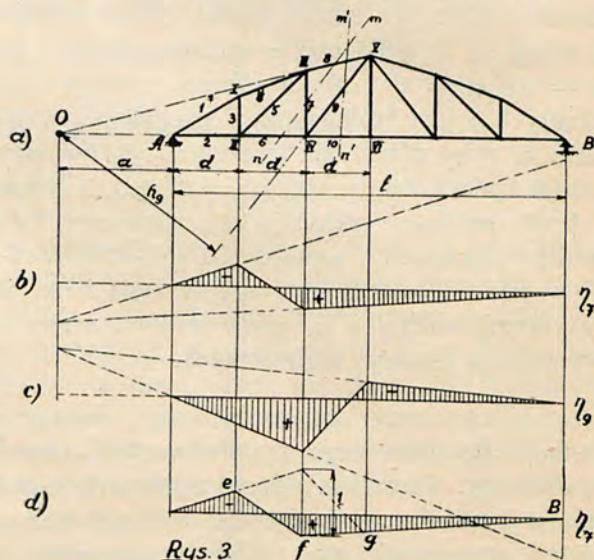
Rozpatrzmy teraz kratownicę pokazaną na rys. 3 a. Dla określenia siły osiowej w słupku, np.  $T_7$ , możemy zrobić przekrój pochyły  $mn$  i obrać za biegun  $O$ . Z równania momentów względem punktu  $O$  otrzymamy:

dla lewej części kratownicy:

$$\eta_{l_1} = - \frac{\xi}{a + 2d} \left( 1 + \frac{a}{l} \right) \dots (4)$$

dla prawej części kratownicy:

$$\eta_{l_2} = \frac{a}{a + 2d} \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right) \dots (5)$$



Wykres linii wpływowej patrz rys. 3 b. Jeżeli mamy już linię wpływową krzyżulca 9, to możemy linię wpływową słupka  $T_7$  określić również z równowagi węzła IV. Biorąc sumę rzutów na oś pionową otrzymamy:

gdy siła stoi w węzle IV

$$T_9 \sin \alpha + T_7 = 1,$$

skąd

$$T_7 = 1 - T_9 \sin \alpha,$$

więc

$$\eta_{l_1} = 1 - \eta_{l_2} \sin \alpha \dots (6)$$

gdy siła znajduje się zewnątrz przedziału II - VI

$$T_9 \sin \alpha + T_7 = 0,$$

skąd

$$T_7 = - T_9 \sin \alpha,$$

więc

$$\eta_{l_1} = - \eta_{l_2} \sin \alpha \dots (7)$$

Ponieważ dla lewej części kratownicy

$$\eta_{l_2} = \left( 1 + \frac{a}{l} \right) \frac{\xi}{h_5}$$

dla prawej

$$\eta_{l_2} = - \left( 1 + \frac{\xi}{l} \right) \frac{a}{h_5}$$

więc z wykresu linii wpływowej krzyżulca  $T_7$  (rys. 3 c), mnożąc jej rzędne zgodnie z równa-

niem (7) przez  $-\sin \alpha$ , otrzymamy wykres linii wpływowej słupka  $T_7$  (rys. 3 d), którą trzeba jeszcze skoregować w przedziale II — VI zgodnie z równaniem (6) i dodać  $I$  do rzędnej  $-\eta_0 \sin \alpha$  pod węzłem IV. Ponieważ przy przesuwaniu się siły  $= I$  od węzła II do IV lub od VI do IV siła w węzle IV wzrasta linjowo od zera do jedności, przeto prowadząc proste  $ef$  i  $fg$  otrzymamy ostateczny kształt linii wpływowej słupka  $T_7$ . Nie trudno udowodnić, że punkt  $f$  leży na przedłużeniu prostej  $Bg$ .

Proste przekształcenie wykazuje identyczność tej linii wpływowej z linią wpływową otrzymaną z równania momentów; rzeczywiście, np. dla lewej części kratownicy:

$$\eta_7 = -\eta_0 \sin \alpha = -\left(1 + \frac{a}{l}\right) \frac{\xi}{h_0} \sin \alpha,$$

ponieważ

$$\sin \alpha = \frac{h_0}{a + 2d}$$

więc

$$\eta_7 = -\left(1 + \frac{a}{l}\right) \cdot \frac{\xi}{a + 2d},$$

co jest identyczne z równaniem (4)

Powróćmy jeszcze do kratownicy pokazanej na rys. 2 a. Obierając biegun w węzle III, otrzymamy równanie momentów dla pręta  $T_6$ .

$$T_6 h_6 + M_{III} = 0,$$

z którego dla lewej części kratownicy

$$\eta_6 = \frac{\xi}{h_6} \left(1 - \frac{a_{III}}{l}\right)$$

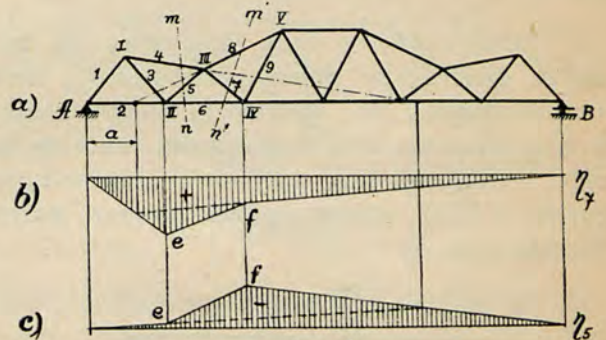
dla prawej części kratownicy

$$\eta_6 = \frac{a_{III}}{h_6} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)$$

Ponieważ siła  $= I$  nie może stanąć w węzle III (przy urządzeniu jezdni dołem), więc łącząc linią prostą rzędne odpowiadające odciętym węzłom II i IV (rys. 2 d), otrzymamy linię wpływową pręta  $T_6$  w postaci łamanej  $AefB$ . Widzimy więc, że gdy rzut bieguna  $i$  leży między węzłami jezdni, to linia wpływowa nie ma wierzchołka pod takim biegunem. Odwrotnie, gdy rzut bieguna leży w węzle jezdni, to linia wpływowa posiada wierzchołek pod biegunem, jak to mieliśmy np. dla pręta  $T_4$ , dla którego biegunem był węzeł II należący do jezdni.

W rozpatrzonych powyżej przypadkach, mianowicie w pierwszym i czwartym biegun był w granicach rzutu poziomego pręta, w drugim i trzecim biegun był poza granicami rzutu

poziomego kratownicy, należy więc jeszcze rozpatrzyć przypadek, gdy biegun jest w granicach rzutu poziomego kratownicy lecz poza granicami rzutu pręta.



Rys. 4

Dla pręta  $T_7$  kratownicy pokazanej na rys. 4 a równanie linii wpływowej będzie:

dla lewej części kratownicy

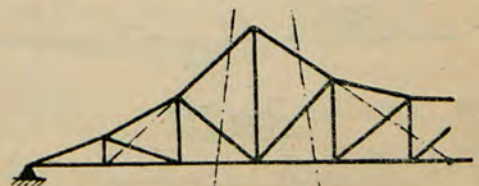
$$\eta_7 = \frac{\xi}{h_7} \left(1 - \frac{a}{l}\right);$$

dla prawej części kratownicy

$$\eta_7 = \frac{a}{h_7} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right).$$

Ponieważ pręt 6 jezdni jest przecięty, więc równanie lewej części linii wpływowej będzie słuszne w przedziale A — II, prawej — w przedziale IV — B. Łącząc punkty  $e - f$ , otrzymamy ostatecznie linię wpływową pręta  $T_7$  (rys. 4 b). Widzimy więc, że gdy biegun leży wlewo od rzutu poziomego pręta, to wierzchołek linii wpływowej leży na przecięciu lewej części linii wpływowej z pionem poprowadzonym przez lewy węzeł tego przedziału jezdni, który został przecięty odpowiednim przekrojem. Gdy biegun leży wpravo od rzutu poziomego pręta, to wierzchołek będzie na przecięciu prawej części linii wpływowej z pionem poprowadzonym przez prawy węzeł przeciętego przedziału jezdni (rys. 4 c).

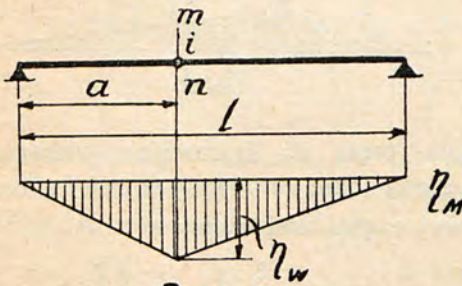
Należy jeszcze zauważyć, że bieguny dla wszystkich prętów stanowiących kontur zewnętrzny kratownicy leżą zawsze w przedziale  $l \geq a \geq 0$ , czyli w granicach rzutu poziomego kratownicy. Dla prętów kraty bieguny leżą



Rys. 5

wogóle poza granicami przedału  $o - l$ , lub nawet w nieskończoności, chociaż mogą być wypadki, że bieguny prętów kraty leżą w granicach  $l \geq a \geq o$ , jak to jest pokazane na rys. 5.

Jeżeli chodzi o linię wpływową dla momentu gnącego w dowolnym przekroju belki wolnopodpartej, to, ponieważ biegun obrany w tym przekroju leży w granicach rzutu belki, więc wierzchołek linii wpływowej leży pod biegunem i linia wpływowa ma zawsze postać trójkąta (rys. 6).



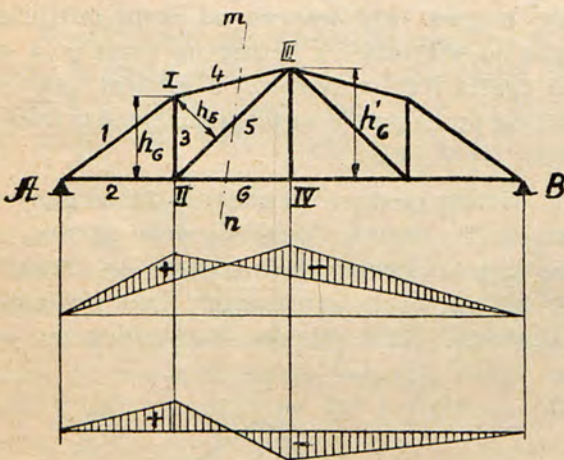
Rys. 6.

Rzędna wierzchołkowa:

$$\eta_w = a \left( 1 - \frac{a}{l} \right)$$

Gdybyśmy zmieniali  $a$  w sposób ciągły, to maximum  $\eta_w = \frac{l}{2}$  będzie przy  $a = \frac{l}{2}$ . Wierzchołki linii wpływowej dla momentu gnącego leżą na paraboli drugiego stopnia.

Gdy biegun leży poza granicami kratownicy, możemy zadanie sprowadzić do takiego przypadku, że biegun pozostanie w granicach  $l \geq a \geq o$ .



Rys. 7.

Naprzykład dla określenia  $\eta_I$  (rys. 7) obierzemy biegun w węzle I.

$$- T_6 h_6 - T_5 h_5 + M_I = 0;$$

$$T_5 = - \frac{1}{h_5} (T_6 h_6 - M_I)$$

Następnie obierzemy biegun w węzle III.

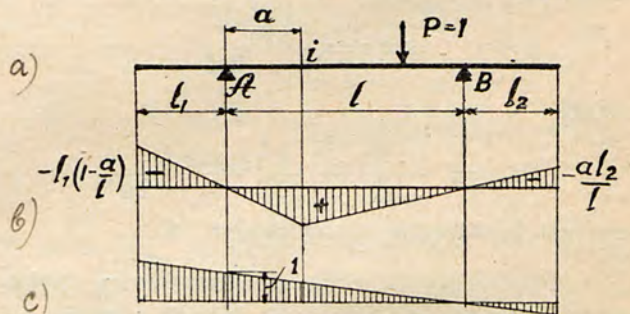
$$- T_6 h'_6 + M_{III} = 0; \quad T_6 = \frac{M_{III}}{h'_6},$$

po podstawieniu

$$T_5 = - \frac{1}{h_5} \left( M_{III} \frac{h_6}{h'_6} - M_I \right);$$

$$\eta_5 = - \frac{1}{h_5} \left( \eta_{M_{III}} \frac{h_6}{h'_6} - \eta_{M_I} \right)$$

Linję wpływową  $\eta_5$  otrzymamy jako różnicę rzędnych dwóch linii wpływowych  $\eta_{M_{III}} \frac{h_6}{h'_6}$  i  $\eta_{M_I}$  pomnożoną przez  $-\frac{1}{h_5}$ .



Rys. 8.

Rozpatrzmy jeszcze przypadek, że długość belki jest większą od odległości  $l$  pomiędzy podporami. Belki takie noszą nazwę belek wspornikowych, a części  $l_1$  i  $l_2$  — wsporników (rys. 8 a). Jeżeli  $\xi$  zmienia się w granicach  $l \geq \xi \geq o$ , to dla dowolnego pręta kratownicy funkcje  $\eta_k$  są nam wiadome. Ponieważ wsporniki stanowią jedną całość ze środkową częścią belki, a  $\eta_k$  jest liniową funkcją  $\xi$ , więc aby otrzymać linię wpływową belki wspornikowej wystarczy przedłużyć skrajne odcinki linii wpływowej do przecięcia się z liniami prostopadłymi poprowadzonymi przez końce wsporników. Jest zupełnie oczywiste, że dla otrzymania rzędnych linii wpływowej na wspornikach będziemy korzystać ze wzorów otrzymanych dla belki zwykłej o rozpiętości  $l$ . Dla przykładu rozpatrzmy linię wpływową momentu gnącego i dowolnego pręta belki dwuwspornikowej. Równanie linii wpływowej momentu gnącego  $M_i$  będzie:

wlewo od przekroju  $i$

$$\eta_{M_i} = \xi \left( 1 - \frac{a}{l} \right)$$

wprawo od przekroju  $i$

$$\eta_{iM} = a \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right)$$

przy  $\xi = -l_1$ ,  $\eta_{iM} = -l_1 \left( 1 - \frac{a}{l} \right)$ ;

przy  $\xi = l_1 + l_2$ ,  $\eta_{iM} = -\frac{a l_2}{l}$ .

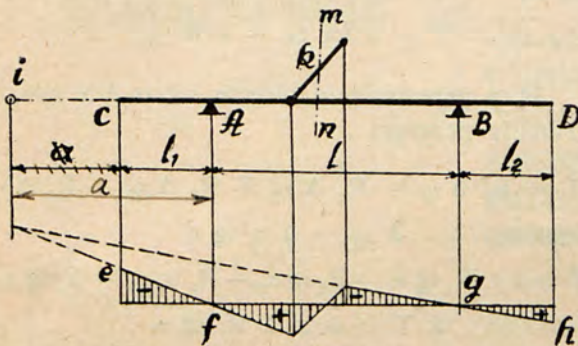
Ten sam rezultat otrzymamy obliczając moment gnący dla przekroju  $i$  w założeniu że ruchoma siła  $= l$  stoi w punkcie  $C$ , czyli przy  $\xi = -l_1$ . Rzeczywiście:

$$\eta_{iMC} = -l \cdot (l_1 + a) + R_A a;$$

$$R_A = \frac{l_1 + l}{l} = 1 + \frac{l_1}{l},$$

co zresztą odrazu jest widocznym z wykresu linii wpływowej dla reakcji  $R_A$  (rys. 8 c). Po podstawieniu, otrzymamy

$$\eta_{iMC} = -(l_1 + a) + a \left( 1 + \frac{l_1}{l} \right) = -l_1 \left( 1 - \frac{a}{l} \right).$$



Rys. 9.

Analogicznie, gdy siła  $= l$  stanie w punkcie  $D$ :

$$\eta_{iMD} = -\frac{a l_2}{l}.$$

Równanie linii wpływowej dla dowolnego pręta  $k$  w założeniu że  $a < 0$ : (Rys. 9) dla części kratownicy w lewo od przekroju  $mn$

$$\eta_{ik} = \xi \left( 1 + \frac{a}{l} \right)$$

dla części kratownicy w prawo od przekroju  $mn$

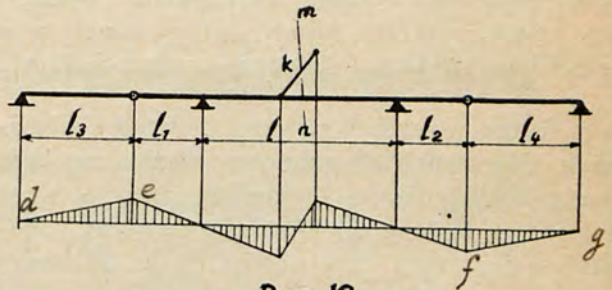
$$\eta_{ik} = -a \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right)$$

przy  $\xi = -l_1$ ,  $\eta_{ik} = -l_1 \left( 1 + \frac{a}{l} \right)$ ;

przy  $\xi = l + l_2$ ,  $\eta_{ik} = \frac{a l_2}{l}$ ,

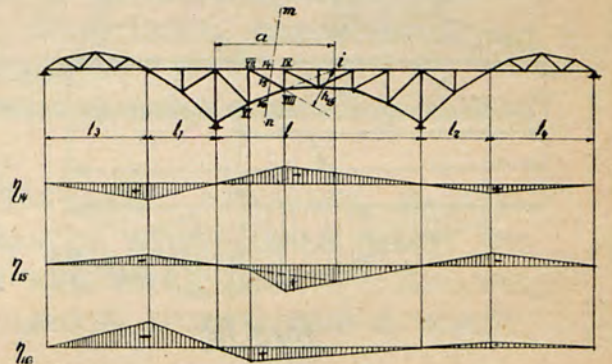
odcinki  $ef$  i  $gh$  są przedłużeniem linii wpływowej w przedziale  $AB$ .

Przy układzie złożonym z kilku belek, jak np. jednej belki dwuwspornikowej i dwóch



Rys. 10.

belek podwieszonych (rys. 10), dostatecznie połączyć punkty  $d-e$  i  $f-g$ , aby otrzymać linię wpływową dla całego układu.



Rys. 11.

Na rys. 11 pokazane są linie wpływowe trzech prętów przęsa środkowego takiego układu złożonego.

Pręt 14.

$$-T_{14} h_{14} - R_p (l - a_{VIII}) = 0$$

$$\xi < a_{VIII}; \eta_{14} = -\frac{\xi}{h_{14}} \left( 1 - \frac{a_{VIII}}{l} \right)$$

$$T_{14} h_{14} + R_l a_{VIII} = 0$$

$$\xi > a_{VIII}; \eta_{14} = -\frac{a_{VIII}}{h_{14}} \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right)$$

Pręt 15.

$$T_{15} h_{15} - R_p (l - a) = 0$$

$$\xi < a; \eta_{15} = \frac{\xi}{h_{15}} \left( 1 - \frac{a}{l} \right)$$

$$-T_{15} h_{15} + R_l a = 0$$

$$\xi > a; \eta_{15} = \frac{a}{h_{15}} \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right)$$

Pręt 16.

$$T_{16} h_{16} - R_p (l - a_{VII}) = 0$$

$$\xi < a_{VII}; \eta_{16} = \frac{\xi}{h_{16}} \left( 1 - \frac{a_{VII}}{l} \right)$$

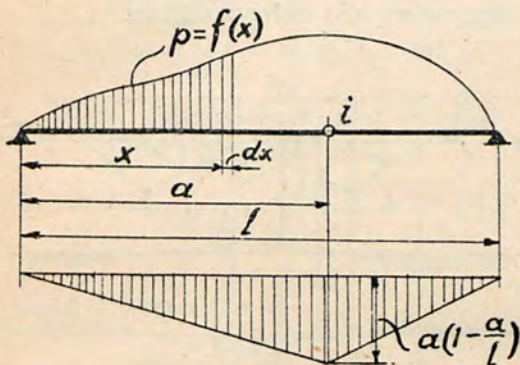
$$-T_{16} h_{16} + R_l a_{VII} = 0$$

$$\xi > a_{VII}; \eta_{16} = \frac{a_{VII}}{h_{16}} \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right)$$

Przytoczone rozważania i przykłady wyczerpują zagadnienie o liniach wpływowych najprostszyc układów statycznie wyznaczalnych.

Rozpatrywaliśmy powyżej przypadek obciążenia siłą skupioną, obecnie weźmiemy pod uwagę obciążenie ciągłe nierównomierne, które jest pewną funkcją odciętej  $x$ ,  $p = f(x)$ . Moment w przekroju  $i$  w odległości  $a$  od lewej podpory (rys. 12) będzie:

$$M_i = a R_A - \int_0^a f(x) (a - x) dx$$



Rys. 12.

Reakcję  $R_A$  określimy z równania momentów względem prawej podpory B.

$$R_A l - \int_0^l f(x) (l - x) dx = 0;$$

$$R_A = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) (l - x) dx$$

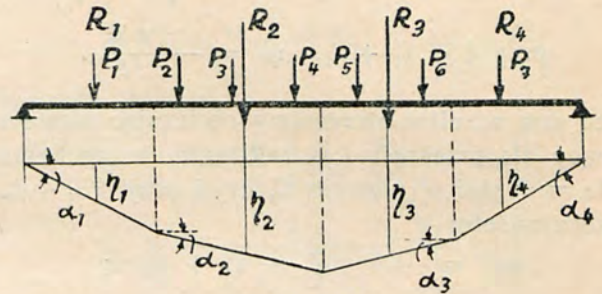
Po podstawieniu:

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{a}{l} \int_0^l f(x) (l - x) dx - \int_0^a f(x) (a - x) dx = \\ &= \frac{al}{2} \left[ f(l) - f(a) \frac{a}{l} \right] - \int_0^a f(x) (2l - x) \frac{x}{2} dx + \\ &+ \int_0^a f(x) (2a - x) \frac{x}{2} dx. \dots (8) \end{aligned}$$

Jeżeli  $p = \text{const.}$ , czyli obciążenie jest równomierne, to  $f'(x) = 0$

$$M_i = \frac{p l a}{2} \left( 1 - \frac{a}{l} \right) = p \omega,$$

gdzie  $\omega$  pole linii wpływowej. Ciężar własny kratownicy jest funkcją  $x$ , więc może być ujęty wzorem (8). W praktyce ciężar własny kratownicy przyjmują równomiernie rozłożony.



Rys. 13.

Przy określeniu sił w prętach lub momentów gnących zapomocą linii wpływowych, trzeba ruchomy układ sił ustawić w sposób najbardziej niekorzystny. Z rys. 13 widocznem jest, że

$$T = \sum P_k \eta_k = \sum R_i \eta_i$$

Przy przesunięciu układu sił o  $\Delta x$  siła  $T$  otrzymuje przyrost

$$\Delta T = R_1 \Delta \eta_1 + R_2 \Delta \eta_2 + R_3 \Delta \eta_3 + R_4 \Delta \eta_4$$

$$\Delta \eta_i = \Delta x \operatorname{tg} \alpha_i$$

$$\Delta T = \Delta x [R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 - R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 - R_4 \operatorname{tg} \alpha_4]$$

$$\Delta T = \Delta x \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i$$

kryterjum najniekorzystniejszego ustawienia jest zmiana znaku przyrostu  $\Delta T$ , co jest możliwe tylko naskutek zmian wielkości  $R_i$ .

Siły osiowe w prętach kratownicy, potrzebne do określenia przekrojów prętów, obliczamy zapomocą wzoru:

$$S = p (\omega_1 - \omega_2) + T$$

$p$  — obciążenie równomierne na jednostkę długości

$\omega_1$  — dodatnie pole linii wpływowej

$\omega_2$  — ujemne pole linii wpływowej

$T$  — siła od obciążenia ruchomym układem sił skupionych.