Przedruk wzbroniony.

Nr. 35. Warszawa, dnia 3 września 1930 r. Tom LXIX.

PRZEGLĄD TECHNICZNY

TYGODNIK POŚWIĘCONY SPRAWOM TECHNIKI I PRZEMYSŁU.

TREŚĆ:

SOMMAIRE:

Kilka uwag, dotyczących teorji prętów i ich układów.

Napisał Stanisław Bełzecki.

O granicach stosowalności wzorów:

$$N_3 = \frac{M_x \cdot y}{I_x} \quad \text{i} \quad E I_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + M_x = 0.$$

Powyższe wzory mogą być stosowane do tak zwanych prętów (tige, beam). Ibetson tak określa pręt: „The Central Axis of a Beam is a straight line, and — unless the contrary be expressly stated — the beam is to be supposed cylindrical or prismatic in form, the generators of the lateral surface being parallel to the Axis, and the plane ends of the beam being perpendicular to it and of dimensions comparable with its length".

Określenie to jest dość ogólne, lecz ponieważ termin „comparable with its length" może być dowolnie tłomaczony, więc wzory wyżej przytoczone mogą być stosowane w granicach nieodpowiednich.

Termin pręt (tige, beam) będę stosować do takiego ciała pryzmatycznego lub cylindrycznego, zgodnie z określeniem Ibetsona, do którego ściśle można stosować wzory St. Venant'a.

Wzór $\frac{EI}{\rho} + M = 0$ jest ścisły nietylko dla prętów, lecz i dla drutów (wire).

Przy takich stosunkach wymiarów poprzecznych pręta do jego długości, przy których mogą być ściśle stosowane wzory St. Venant'a, rzuty krzywizny odkształconego włókna na osie mogą być wyrażone zapomocą wzorów $E I_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + M_x = 0$ lub $E I_y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + M_y = 0$.

Zatem pręt będzie dobrze określony, jeśli ustalimy takie stosunki jego wymiarów poprzecznych do długości, przy których ogólne wzory są zgodne ze wzorami St. Venant'a.

Zamiast metody całkowania, podanej w zesz. 2 t. II A. N. T., podaję inną metodę, znacznie prostszą i zupełnie decydującą w rozważanem zagadnieniu.

Równania równowagi ciała izotropowego nieważkiego są, jak wiadomo, następujące:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (a)$$

W równaniach tych λ i μ są to spółczynniki Lamé'go[1]), θ — rozszerzalność przestrzenna, u, v, w — przesunięcia w kierunku osi x, y, z.

Biorąc pochodne tych równań, pierwszego względem x, drugiego względem y i trzeciego względem z, otrzymamy równania (b):

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu \Delta \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \mu \Delta \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \mu \Delta \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (b)$$

---

[1]) $\lambda = \frac{\eta E}{(1+\eta)(1-2\eta)}$; $\mu = \frac{E}{2(1+\eta)}$; $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} = 2\eta$; η — liczba Poisson'a; E — moduł Young'a.

Symbolem Δ oznaczamy operację:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Symbolem zaś $\Delta\Delta$ — operację:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}+\frac{\partial^4}{\partial z^4}+2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^4}{\partial x^2 . \partial z^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2}\right).$$

Jeżeli pewna funkcja F jest skończoną i ciągłą wraz z jej pochodnemi i czyni zadość równaniu

$$\Delta F = 0 \qquad \text{(Laplace'a)},$$

to nazywa się ją funkcją harmoniczną. Jeśli funkcja jest skończoną i ciągłą wraz ze swemi pochodnemi i czyni zadość równaniu

$$\Delta\Delta F = 0,$$

to nazywa się funkcją biharmoniczną [2]).

Normalne naprężenia wyrażają się, jak wiadomo, zapomocą wzorów:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ N_2 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ N_3 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (b_1)$$

w ciele zaś izotropowem

$$\Delta\theta = 0.$$

Wykonywając operacje Δ względem każdego z równań (b_1) i podstawiając do otrzymanych tą drogą wzorów, zamiast $\mu\,\Delta\frac{\partial u}{\partial x}$, $\mu\,\Delta\frac{\partial v}{\partial y}$ i $\mu\,\Delta\frac{\partial w}{\partial z}$ ich wartości ze wzorów (b), otrzymamy równania:

$$\left.\begin{aligned} \Delta N_1 &= -2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \\ \Delta N_2 &= -2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \\ \Delta N_3 &= -2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (b_2)$$

Z równań tych, mając na względzie, że $\Delta\theta = 0$, dochodzimy do równania:

$$\Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_3 = 0.$$

Biorąc pochodne drugiego równania grupy (a) względem z, trzeciego zaś względem y, po dodaniu wyników i uwzględnieniu, że $T_1 = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)$, $T_2 = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$, $T_3 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$, otrzymamy równanie:

$$\Delta T_1 = -2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial y . \partial z}.$$

[2]) W teorji potencjału wymagania ciągłości pochodnych są ograniczone, lecz w naszym przypadku ograniczenia te nie są potrzebne. Patrz H. Poincaré: „La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet". Acta Math., 1895.

W sposób analogiczny otrzymamy:

$$\Delta T_2 = -2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x . \partial z},$$

$$\Delta T_3 = -2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x . \partial y}.$$

Z równań (a) mamy bezpośrednio:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} \\ \Delta v &= -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} \\ \Delta w &= -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (c)$$

Ostatnie wzory zastosujemy do rozwiązania zadadania St. Venant'a.

St. Venant zakłada: $N_1 = N_2 = T_3 = 0$, przeto z równań (b_2) mamy, że

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0, \text{ a ponieważ } \Delta\theta = 0,$$

$$\text{to i } \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0;\ \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} = 0, \text{ a zatem}$$

$$\theta = k\,[A_0 + A_1x + A_2y + (B_0 + B_1x + B_2y)z],$$

$k = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ i, mając na względzie (b_1), otrzymujemy

$$\lambda\theta = -2\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\lambda\theta = -2\mu\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Skąd:

$$\lambda\theta = -\mu\left(\theta - \frac{\partial w}{\partial z}\right);\quad \theta = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{\partial w}{\partial z}.$$

$$2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}-1\right) =$$

$$= -\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = -\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\eta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\eta\cdot\frac{\partial w}{\partial z} \quad (\eta \text{ — liczba Poisson'a}).$$

$$w = (A_0 + A_1x + A_2y)\,z +$$
$$+ (B_0 + B_1x + B_2y)\frac{z^2}{2} + f(x, y).$$

Ze wzorów (c)

$$\Delta w = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z} = -(B_0 + B_1x + B_2y),$$

$$w = (A_0 + A_1x + A_2y)\,z + (B_0 + B_1x +$$
$$+ B_2y)\frac{z^2}{2} - \frac{B_0}{2}(x^2+y^2) - B_1xy^2 - B_2yx^2 +$$
$$+ \Omega(x, y),$$

$$\Delta_{xy}\,\Omega(x,y) = 0.$$

Równanie $\Delta w = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z}$ posłużyło nam do określenia dowolnej funkcji $f(x,y)$, która w danym przypadku jest równa

$$f(x,y) = -\frac{B_0}{2}(x^2+y^2) - B_1 x y^2 - B_2 y x^2 + \\ + \Omega(x,y),$$

a w czyni zadość równaniu

$$\Delta w = 0.$$

Ponieważ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\eta \frac{\partial w}{\partial z}$, to przesunięcia czynią zadość równaniom $\Delta u = \Delta w = 0$, a zatem $\Delta N_3 = \Delta T_1 = \Delta T_2 = 0$.

W ogólnym przypadku u, v, w, N_i i T_i $(i=1,2,3)$ czynią zadość równaniom $\Delta\Delta u = \Delta\Delta v = \Delta\Delta w = \Delta\Delta N_i = \Delta\Delta T_i = 0$.

Zadanie St. Venant'a, wskutek założenia, że $N_1 = N_2 = T_3 = 0$, zniżyło rzędy równań, określających wielkości u, v, w, kosztem takiego stosunku między wymiarami ciała, przy którym to stosunku ciało określone jest jako pręt (tige, beam).

Metoda całkowania.

Funkcja

$$\theta = \sum\sum\left(A \cdot e^{y\sqrt{m^2+n^2}} + Be^{-y\sqrt{m^2+n^2}}\right)\cos(m x)\cos(n z) = \\ = \sum\sum(Y)\cos(m x)\cdot\cos(n z)$$

czyni zadość równaniu

$$\Delta\theta = 0.$$

Ta lub inna postać funkcji (szeregu) zależy od warunków granicznych (warunków zamocowania końców) i od warunków na powierzchni (obciążenia).

W danym szczególnym przypadku θ obrane jest jako funkcja parzysta x i z.

Przy tak obranej funkcji θ, na mocy równań (c), powinno być:

$$(d)\begin{cases} \Delta u = \sum\sum m\frac{\lambda+\mu}{\mu}(Y)\sin(m x)\cdot\cos(n z) \\ \Delta v = \sum\sum -\sqrt{m^2+n^2}\cdot\frac{\lambda+\mu}{\mu}\left(A\cdot e^{y\sqrt{m^2+n^2}} - B\cdot e^{-y\sqrt{m^2+n^2}}\right)\sin(m x)\cos(n z) \\ \Delta w = \sum\sum m\cdot\frac{\lambda+\mu}{\mu}(Y)\cos(m x)\sin(n z), \end{cases}$$

a ponieważ funkcje u, v, w są biharmoniczne, to

$$u = \sum\sum\left[(C_1 + D_1 y)e^{y\sqrt{m^2+n^2}} + (C_2 + D_2 y)e^{-y\sqrt{m^2+n^2}}\right]\sin(m x)\cos(n z),$$

$$v = \sum\sum\left[(C_3 + D_3 y)e^{y\sqrt{m^2+n^2}} + (C_4 + D_4 y)e^{-y\sqrt{m^2+n^2}}\right]\cos(m x)\cos(nz),$$

$$w = \sum\sum\left[(C_5 + D_5 y)e^{y\sqrt{m^2+n^2}} + (C_6 + D_6 y)e^{-y\sqrt{m^2+n^2}}\right]\cos(m x)\sin(n x).$$

Przesunięcia u, v, w winny czynić zadość warunkom (d), przeto otrzymujemy, że

$$D_1 = \frac{m(\lambda+\mu)}{2\mu\sqrt{m^2+n^2}}\cdot A; \qquad D_3 = -\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\cdot A;$$

$$D_5 = \frac{n(\lambda+\mu)}{2\mu\sqrt{m^2+n^2}}\cdot A$$

$$D_2 = -\frac{m(\lambda+\mu)}{2\mu\sqrt{m^2+n^2}}\cdot B; \qquad D_4 = -\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\cdot B;$$

$$D_6 = -\frac{n(\lambda+\mu)}{2\mu\sqrt{m^2+n^2}}\cdot B$$

i, po wstawieniu wielkości $D_1, \ldots D_6$ do powyższych wzorów, mamy:

$$u = \sum\sum\left[C_1 e^{y\sqrt{m^2+n^2}} + C_2 e^{-y\sqrt{m^2+n^2}} + \frac{m(\lambda+\mu)}{2\mu\sqrt{m^2+n^2}}\left(A e^{y\sqrt{m^2+n^2}} - B e^{-y\sqrt{m^2+n^2}}\right)\right]\sin(m x)\cos(n z) + \Omega_{yz},$$

$$v = \sum\sum\left[C_3 e^{y\sqrt{m^2+n^2}} + C_4 e^{-y\sqrt{m^2+n^2}} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\left(A\cdot e^{y\sqrt{m^2+n^2}} - B\cdot e^{-y\sqrt{m^2+n^2}}\right)\right]\cos(m x)\cos(n z) + \Omega_{xz},$$

$$w = \sum\sum\left[\left(C_5\cdot e^{y\sqrt{m^2+n^2}} + C_6 e^{-y\sqrt{m^2+n^2}}\right) + \frac{n(\lambda+\mu)}{2\mu\sqrt{m^2+n^2}}\left(A\cdot e^{y\sqrt{m^2+n^2}} - B\cdot e^{-y\sqrt{m^2+n^2}}\right)\right]\cos(m x)\sin(n z) + \Omega_{xy}.$$

Funkcje u, v i w powinny nadto czynić zadość równaniu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

a wobec tego niezbędnem jest, by C_i $(i=1,2,3,\ldots 6)$ czyniły zadość równaniom:

$$m C_1 + \sqrt{m^2+n^2}\cdot C_3 + n C_5 = A,$$

$$m C_2 + \sqrt{m^2+n^2}\cdot C_4 + n C_6 = B.$$

Mając u, v i w, możemy określić naprężenia i dowolne funkcje. Te operacje niczem nie będą się różniły od tych, które są wykonane w klasycznem zadaniu St. Venant'a.

Uwaga: St. Venant rozpatruje zgięcie pręta jednym końcem zamocowanego. Obierając początek spółrzędnych w środku bezwładności zamocowanego końca, zakłada, że przy $x = y = z = 0$

$$u = v = w = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

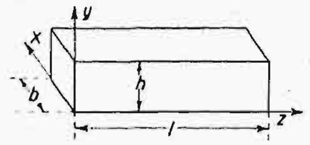
t. j. unieruchamia punkt, element linjowy $\left(\frac{\partial v}{\partial z}=0\right)$ i element powierzchniowy $\left(\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}=0\right)$. W ogólnym przypadku mogą być inne warunki zamocowania. Warunki te powinny być obrane tak, żeby pręt, jako całość, był pozbawiony sześciu stopni swobody.

Niektórzy autorzy nazywają warunki St. Venant'a warunkami koniecznemi do określoności zadania[1]). W rzeczywistości tak nie jest, ponieważ nie możemy zgóry przewidzieć, w którym z punktów są spełnione wszystkie te warunki. Inne warunki są oczywiste.

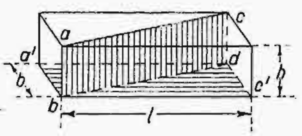
W zależności od warunków granicznych, wielkości m i n są wogóle następujące:

$$m=\frac{k\,.\,\pi}{b},\qquad n=\frac{k\,.\,\pi}{l}.$$

Naprzykład obierając osie jak na rys. 1, założymy



Rys. 1.



Rys. 2.

$$m=\frac{\pi\,.\,i}{b},\qquad n=\frac{\pi\,.\,i}{l}$$

$$\sqrt{m^2+n^2}=\pi\,.\,i\,\frac{\sqrt{b^2+l^2}}{b\,l},$$

a przy $y=h$

$$e^{\pi l\,.\,\frac{h\,.\,\sqrt{b^2+l^2}}{b\,l}}.$$

Stosunek przekroju wzdłuż przekątnej $abcd$ (rys. 2) do przekroju $a'bc'd$ powinien być taki, przy którym N_3 jest, jak u St. Venant'a, linjową funkcją spółrzędnych w każdym przekroju $z=\alpha$.

Ograniczymy się do rozpatrzenia zadania płaskiego.

Warunki równowagi będą:

$$\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial T_1}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial y}+\frac{\partial N_3}{\partial z}=0,$$

skąd

$$N_2=-\int\frac{\partial T_1}{\partial z}\,dy+f(z),$$

$$N_3=-\int\frac{\partial T_1}{\partial y}\,dz+\psi(y),$$

Suma naprężeń normalnych

$$F=N_2+N_3=-\left(\int\frac{\partial T_1}{\partial z}\,dy+\right.$$

$$\left.+\int\frac{\partial T_1}{\partial y}\,dz\right)+f(z)+\psi(y)$$

musi czynić zadość równaniu Laplace'a

$$\Delta F=0,$$

w którem symbol Δ oznacza działanie $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+$ $+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$. Bierzemy kolejne cząstkowe pochodne funkcji F względem y i względem z.

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\left(\frac{\partial T_1}{\partial z}+\int\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}\,dz\right)+\psi'(y)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial z\partial y}+\int\frac{\partial^3 T_1}{\partial y^3}\,dz\right)+\psi''(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-\left(\int\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}\,dy+\frac{\partial T_1}{\partial y}\right)+f'(z)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=-\left(\int\frac{\partial^3 T_1}{\partial z^3}\,dy+\frac{\partial^2 T_1}{\partial y\partial z}\right)+f''(z)$$

$$\Delta F=-\left(2\,\frac{\partial^2 T_1}{\partial y\partial z}+\int\frac{\partial^3 T_1}{\partial y^3}\,dz+\int\frac{\partial^3 T_1}{\partial z^3}\,dy\right)+$$

$$+f''(z)+\psi''(y)=0^0$$

Biorąc drugą pochodną $\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}$ tego równania, otrzymamy:

$$2\,\frac{\partial^4 T_1}{\partial y^2\,\partial z^2}+\frac{\partial^4 T_1}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 T_1}{\partial z^4}=0.\quad .\quad .\quad (e)$$

Całkę tego równania otrzymamy, zakładając $T_1=$ $=Y\cos(mz)$, gdzie Y — funkcja tylko y.

Znajdując odpowiednie pochodne T i podstawiając je do równania (c), otrzymamy:

$$-2\,Y''\,.\,m^2+Y\,.\,m^4+Y^{IV}=0.$$

Jest to równanie linjowe ze stałemi spółczynnikami. Całka tego równania będzie

$$Y=\left[(A+By)\,e^{my}+(C+Dy)\,e^{-my}\right].$$

Ostatecznie

$$T_1=\left[(A+By)\,e^{my}+(C+Dy)\,e^{-my}\right]\cos(mz)$$

Ponieważ ostatnia równość zachodzi dla dowolnego m, więc można napisać

$$T_1=\sum\left[(A+By)\,e^{my}+(C+Dy)\,e^{-my}\right]\cos(mz)\,.$$

Mając T_1, otrzymamy N_2 i N_3:

$$N_2=\sum\left[\left(A-\frac{B}{m}+By\right)e^{my}-\right.$$

$$\left.-\left(C+\frac{D}{m}+Dy\right)e^{-my}\right]\sin(mz),$$

$$N_3=-\sum\left[\left(A+\frac{B}{m}+By\right)e^{my}-\right.$$

$$\left.-\left(C-\frac{D}{m}+Dy\right)e^{-my}\right]\sin(mz),$$

skąd

$$N_2+N_3=-\sum\frac{2}{m}\left(Be^{my}+De^{-my}\right)\sin(mz);$$

a ponieważ

$$N_2+N_3=2\,(\lambda+\mu)\,\theta,$$

---

[1]) Jermakow, Stiekłow, Jasiński i inni.

to

$$\theta = -\sum \frac{1}{m(\lambda+\mu)}\left(Be^{my}+De^{-my}\right)\sin(mz),$$

$$v=\frac{1}{2\mu}\int(N_2-\lambda\theta)\,dy+\psi_1(z)$$

$$w=\frac{1}{2\mu}\int(N_3-\lambda\theta)\,dz+\psi_2(y),$$

$$v=\frac{1}{2\mu m}\sum\left[\left(A-\frac{2B}{m}+By\right)e^{my}+\left(C+\frac{2D}{m}+Dy\right)e^{-my}+\frac{\lambda}{m(\lambda+\mu)}\left(Be^{my}-De^{-my}\right)\right]\sin(mz),$$

$$w=\frac{1}{2\mu m}\sum\left[\left(A+\frac{B}{m}+By\right)e^{my}-\left(C-\frac{D}{m}+Dy\right)e^{-my}-\frac{\lambda}{m(\lambda+\mu)}\left(Be^{my}-De^{-my}\right)\right]\cos(mz),$$

Sprawdzenie:

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{2\mu}\sum\left[\left(A-\frac{2B}{m}+By\right)e^{my}+\left(C+\frac{2D}{m}+Dy\right)e^{-my}+\frac{\lambda}{m(\lambda+\mu)}\left(Be^{my}-De^{-my}\right)\right]\cos(mz),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{2\mu}\sum\left[\left(A+\frac{2B}{m}+By\right)e^{my}+\left(C-\frac{2D}{m}+Dy\right)e^{-my}-\frac{\lambda}{m(\lambda+\mu)}\left(Be^{my}-De^{-my}\right)\right]\cos(mz),$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{\mu}\sum\left[\left(A+By\right)e^{my}+\left(C+Dy\right)e^{-my}\right]\cos(mz).$$

Skąd

$$T_1=\sum\left[\left(A+By\right)e^{my}+\left(C+Dy\right)e^{-my}\right]\cos(mz).$$

Otrzymane wzory na v i w stanowią rozwiązanie zadania dwuwymiarowego.

Napiszemy w skróceniu:

$$T_1=\Sigma\,E(y)\cos(mz),$$
$$N_3=-\Sigma\,F(y)\sin(mz),$$
$$v=\Sigma\,\Phi(y)\sin(mz).$$

Założymy $T_1=0$ przy $y=\pm h$ i ograniczymy się do jednego wyrazu szeregów.

Równanie równowagi

$$\frac{\partial T_1}{\partial y}+\frac{\partial N_3}{\partial z}=0$$

da nam

$$\{E'(y)-m\,F(y)\}\cos(mz)=0,$$

a zatem

$$N_3=-\frac{E'(y)}{m}.\sin(mz).$$

Wektor

$$\int_{-h}^{h}N_3\,dy=-\frac{\sin(mz)}{m}\int_{-h}^{h}E'(y)\,dy=$$
$$=-\frac{\sin(mz)}{m}\left|E(y)\right|_{-h}^{h}=0.$$

Moment

$$M=\int_{-h}^{h}N_3\,y\,dy=-\frac{\sin(mz)}{m}\left\{\int_{-h}^{h}E'(y)\,y\,dy\right\}=$$
$$=-\frac{\sin(mz)}{m}\left\{\left|y.E(y)\right|_{-h}^{h}-\int_{-h}^{h}E(y)\,dy\right\}=$$
$$=+\frac{\sin(mz)}{m}\int_{-h}^{h}E(y)\,dy=\frac{\sin mz}{m}\int_{-h}^{h}\left[(A+By)\,e^{my}+(C+Dy)\,e^{-my}\right]dy.$$

$$M=\frac{2\sin(mz)}{m^2}\left[\left(A+C\right)\mathrm{sh}(mh)+\left(B-D\right)\left(\mathrm{ch}(mh)-\frac{1}{mh}\,\mathrm{sh}(mh)\right)\right].$$

Przy $y=0$, $N_3=0$, a zatem

$$A-C=-\left(\frac{B+D}{m}\right).$$

Z warunków $T_1=0$ przy $y=\pm h$, otrzymamy:

$$A=-C\,\mathrm{ch}(2mh)+Dh.\mathrm{sh}(2mh),$$
$$B=\frac{C\,\mathrm{sh}(2mh)}{h}-D\,\mathrm{ch}(2mh).$$

Z tych trzech warunków określimy A, B, C w funkcji D:

$$C=Dh.\frac{mh\,\mathrm{sh}(2mh)+1-\mathrm{ch}(2mh)}{mh\left(1+\mathrm{ch}(2mh)\right)-\mathrm{sh}(2mh)}=D.h.k,$$

$$A=Dh\left(\mathrm{sh}(2mh)-k\,\mathrm{ch}(2mh)\right)=D.h.k_1,$$

$$B=D.\left(k.\mathrm{sh}(2mh)-\mathrm{ch}(2mh)\right).$$

Po podstawieniu do (a) otrzymamy

$$\frac{Mm^2}{2}=Dh\left[\left(k+k_1\right)\mathrm{sh}(mh)+\left(k_2-1\right)\left(\mathrm{ch}(mh)-\frac{\mathrm{sh}(mh)}{mh}\right)\right]\sin(mz)=Dhqs.$$

Przez s oznaczamy $\sin(mz)$.

$$Dh=\frac{M\,m^2}{2\,q\,s},$$
$$A=\frac{M\,m^2}{2\,q\,s}.k_1$$
$$B=\frac{M\,m^2}{2\,q\,hs}.k_2,$$
$$C=\frac{M\,m^2}{2\,q\,s}.k.$$

Podstawiając te wartości do wzoru na N_3 i zakładając w tym wzorze $y = h$, otrzymamy

$$N_3 = -\frac{M m^2}{2q}\left\{\left[k_1 + k_2\left(1 + \frac{1}{mh}\right)\right] e^{mh} - \left(k + 1 - \frac{1}{mh}\right) e^{-mh}\right\} = -\frac{M m^2}{2q}.Q.$$

Do sprawdzenia wzoru

$$-\frac{My}{I}$$

mamy równanie

$$-\frac{3Mh}{2h^3} = -\frac{Mm^2}{2q}.Q$$

$$\frac{3}{m^2 h^2} = \frac{Q}{q}.$$

Zakładając, że mamy pręt wolnopodparty,

$$m = \frac{\pi}{l}$$

$$\frac{3}{\pi^2}\left(\frac{l}{h}\right)^2 = \frac{Q}{q} \quad \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

Q i q są funkcjami $mh\left(\frac{\pi h}{l}\right)$. Określimy, przy jakich stosunkach $\frac{h}{l}$ wzór (I) sprawdza się, a następnie sprawdzimy wzór

$$M + \frac{EI}{\rho} = 0.$$

Sprawdzimy ten wzór, stosując go do osi ($y = 0$). Druga pochodna v wzięta względem z, przy $y = 0$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{m}{2\mu}\left[A + C + (1-\eta)\frac{2}{m}(D - B)\right]\sin(mz) \quad .\ . \quad \text{(b)}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} = 2\eta; \quad 2\mu = \frac{E}{1+\eta}; \quad \eta \text{ — liczba Poisson'a.}$$

Mnożąc obie strony równania (b) przez $2\mu.I$, otrzymamy

$$\frac{EI}{1+\eta}.\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -M.\frac{m^3 h^3}{3q}\left[(A + C) + (1-\eta).\frac{2}{m}(D - B)\right].s$$

albo

$$EI\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = M.\frac{m^3 h^3}{3q}\left[(A + C)(1 + \eta) + (1 - \eta^2)\frac{2}{m}(D - B)\right].s$$

$$\frac{m^3 h^3}{3} = \frac{(mh)^3}{3} = \frac{\pi^3}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^3,$$

$$EI\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = M.\frac{\pi^3}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^3.\frac{q_1}{q} = M.\frac{(mh)^3}{3}.\frac{q_1}{q}.$$

Wymiar lewej części — siła razy długość, $\frac{(mh)^3}{3}$ jest liczbą, $q_1 = (k + k_1)(1 + \eta) + (1 - \eta)^2 \frac{2}{mh}(1 - k_2)$.

Wzór $EI\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + M = 0$ może być stosowany w granicach, w których

$$\frac{\pi^3}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^3.\frac{q_1}{q} = 1 \quad .\ .\ . \quad \text{(II)}$$

$$\text{albo } (mh)^3.\frac{q_1}{q} = 3.$$

W załączonej tabeli podane są dla różnych wartości stosunku $\frac{2h}{l}$ wszystkie wielkości, potrzebne do sprawdzenia wzorów (I) i (II).

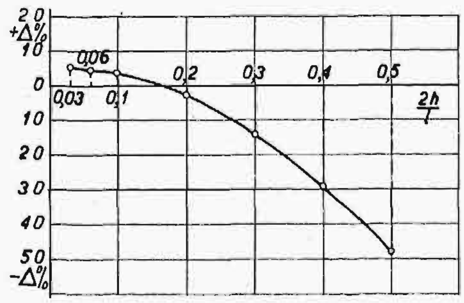
Ponieważ spółczynnik k określa się zapomocą wzoru, którego licznik i mianownik są różnicą małych liczb, więc dla stosunku $\frac{2h}{l} = 0{,}03$; $0{,}06$; $0{,}1$ wartości ch i sh zostały obliczone zapomocą szeregów; dla innych stosunków $\frac{2h}{l}$ wartości ch i sh wzięto z tablic.

TABELA I

$\frac{2h}{l}$	$\frac{h}{l}$	mh	$2\,mh$	sh $(2\,mh)$	ch $(2\,mh)$	sh (mh)	ch (mh)	e^{mh}	e^{-mh}	$\frac{1}{mh}$
0,03	0,015	0,047	0,094	0,0941385	1,00442125	0,0470173	1,0011045	1,0481	0,9541	21,2766
0,06	0,03	0,094	0,188	0,1891094	1,01772405	0,0941385	1,00442125	1,09857	0,9102	10,6383
0,1	0,05	0,157	0,314	0,3191624	1,0497030	0,1576458	1,0123498	1,1700	0,8547	6,3694
0,2	0,1	0,314	0,628	0,6701	1,2038	0,3192	1,0497	1,3689	0,7305	3,1847
0,3	0,15	0,471	0,942	1,0877	1,4775	0,4886	1,1130	1,6016	0,6244	2,1231
0,4	0,2	0,628	1,256	1,6133	1,8981	0,6701	1,2038	1,8739	0,5336	1,5924
0,5	0,25	0,785	1,570	2,2993	2,5073	0,8682	1,3243	2,1924	0,4561	1,2739

k	k_1	k_2	q	q_1	Q	Wzór I $\frac{3}{\pi^2}\left(\frac{l}{h}\right)^2$	Q/q	Δ %
0,04704	0,04689	— 1	0,0029433	79,90466	— 3,9978	1350,95	1358,2	0,54
0,09383	0,093616	— 0,99998	0,0117507	40,1275	— 3,99364	337,70	339,86	0,64
0,15354	0,15799	— 1,000699	0,032625	24,2830	— 3,98538	121,59	122,502	0,75
0,3014	0,3073	— 1,0018	0,1280	12,7143	— 3,9422	30,3964	30,7984	1,32
0,4394	0,4385	— 0,9996	0,2775	9,0574	— 3,8718	13,5095	13,9524	3,28
0,5568	0,5564	— 0,9998	0,4724	7,3624	— 3,7953	7,5991	8,0341	5,68
0,6558	0,6550	— 0,9994	0,7015	6,4142	— 3,7204	4,8634	5,3035	9,05

$\frac{2h}{l}$	Wzór II *) Prawa część wzoru	$\frac{\pi^3}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^3 \frac{q_1}{q}$	Δ %
0,03	1	0,94698	+ 5,3
0,06	1	0,95295	+ 4,7
0,1	1	0,96159	+ 3,8
0,2	1	1,0270	— 2,7
0,3	1	1,1385	— 14
0,4	1	1,2886	— 29
0,5	1	1,4766	— 48



Rys. 3.

W zadaniu St. Venant'a naprężenia zewnętrzne działają na płaszczyznach granicznych, do których oś pręta z jest prostopadła. Na bocznej powierzchni i w każdym punkcie ciała naprężenia $N_1 = N_2 = T_3 = 0$. Pręt jest nieważki. Naprężenia zewnętrzne powinny być takie, jakie wynikają z analizy St Venant'a. Przy dowolnie zadanych naprężeniach zewnętrznych, wzory St Venant'a będą miarodajne nie na całej długości l pręta, lecz na długości $\lambda < l$. (Zasada St. Venant'a, Boussinesq, Thomson). W obranym przykładzie zewnętrzne normalne do powierzchni naprężenia działają na boczną powierzchnię i wektor ich jest zrównoważony wektorem naprężeń tnących w płaszczyznach granicznych.

W technice stosuje się wzory St Venant'a we wszystkich wypadkach. Oczywiście, nie może być mowy o tożsamości wzorów w pewnym przedziale stosunków $\frac{2h}{l}$. Za stopień przybliżenia obieramy różnice, których wartość absolutna nie przekracza 5%.

Z tabeli widać, że linjowość N_3 jest dobrą hipotezą w bardzo szerokich granicach:

$$0{,}5 \geqslant \frac{2h}{l} \geqslant 0{,}03.$$

Wzór $EIy'' + M$ dla $\frac{2h}{l} > 0{,}2$ przecenia krzywiznę, a dla $\frac{2h}{l} < 0{,}1$ niedocenia jej.

Przytoczyłem wyżej określenie Ibbetsona. Mathieu jest innego zdania i mówi: „Nous supposons une tige, dont la longueur est assez grande par rapport aux dimensions des bases". Mathieu jest bliższy prawdy.

(d. n.)

*) Tablicę obliczył student Politechniki Warszawskiej, p. Wachniewski Władysław, któremu składam serdeczne podziękowanie.