

TREŚĆ: Część urzędowa. Część nieurzędowa. — Prof. St. Belzecki: Układy prętów o połączeniach sztywnych. — Inż. J. Domaśzewski: Uproszczony sposób rozwiązywania niektórych trudniejszych zagadnień przy obliczaniu połączeń torów. — Prof. E. Hauswald: Zadanie administracji przemysłowej. — Inż. M. Dolnicki: W sprawie naszych przepisów budowy mostów drogowych. — Inż. J. Nechay: Doświadczenia nad wytrzymałością betonu. — Wiadomości z literatury technicznej. — Recenzje i krytyki — Bibliografia. — Różne sprawy.

## Część urzędowa.

### Zmiany personalne.

Przeniesienia na emeryturę:

Inż. Karol Gustaw Miszke, Radca budownictwa V st. sł. w Wojewódzkiej Okręgowej Dyrekcji Robót Publicznych w Warszawie.

Inż. Jan Chodakiewicz, urzędnik VII st. sł. w Wojewódzkiej Okręgowej Dyrekcji Robót Publicznych w Białymstoku.

### Zmiany organizacyjne.

W myśl rozporządzenia Rady Ministrów z dn. 9. września 1925 r. w sprawie zmiany kompetencji Ministra Robót Publicznych i Ministra Skarbu odnośnie do spraw katastralnych w województwie poznańskim i pomorskim (Dz. Ust. R. P. Nr. 98, poz. 691) nastąpiło z dniem 1. stycznia 1926 r. przejście personelu katastralnego Wydziałów Mierniczych i Urzędów Katastralnych w województwach poznańskim i pomorskim do resortu Ministerstwa Skarbu.

### Ustawy i rozporządzenia.

W „Dzienniku Ustaw R. P.” zostały ogłoszone:

W Nr. 133 z dn. 31. grudnia 1925 r. poz. 950 — rozporządzenie Ministra Pracy i Opieki Społecznej z dn. 27. listopada 1925 r. w porozumieniu z Ministrami: Przemysłu i Handlu, Spraw Wewnętrznych, Spraw Wojskowych, Robót Publicznych, Kolei i Skarbu w sprawie sprostowania rozporządzenia Ministra Pracy i Opieki Społecznej z dn. 29. lipca 1925 w porozumieniu z Ministrami: Przemysłu i Handlu, Spraw Wewnętrznych, Spraw Wojskowych, Robót Publicznych, Kolei i Skarbu o spisie robót, wzbronionych młodocianym i kobietom;

W Nr. 1 z dn. 9. stycznia 1926 r. poz. 3 — rozporządzenie Rady Ministrów dn. 13. listopada 1925 r. w sprawie bezpłatnego odstąpienia m. st. Warszawie gruntów państwowych na cele regulacji i budowy ulic: Wawelskiej, Mochnackiego, Mianowskiego, Akademickiej, Supińskiego, Uniwersyteckiej, Głogiera, Korzeniowskiego, Hoffmanowej, Pługa, Raszyńskiej, Filtrowej i przyległych ulic dotychczas nie posiadających nazwy, oraz domków znajdujących się na tych terenach.

### Komunikaty.

Dn. 14. listopada 1925 r. odbyło się w Ministerstwie Robót Publicznych kolejne IV posiedzenie Państwowej Rady Elektrycznej. Szczegółowe sprawozdanie zostało ogłoszone w „Monitorze Polskim” Nr. 292 z dn. 17. grudnia 1925 r.

## Część nieurzędowa.

Prof. St. Belzecki.

### Układy prętów o połączeniach sztywnych.

§ 1. Zagadnienie równowagi układów o połączeniach sztywnych poruszył pierwszy St. Venant, prawie jednocześnie Clebsch, Poisson, Kirchhoff, Thomson i Tait ustalili warunki graniczne (Conditions aux limites, the terminal Conditions)<sup>1)</sup>. Te warunki razem z teorią i zasadą S. Venant'a wystarczają do określenia równowagi układów o połączeniach dowolnych. Równowaga układów jest określona jednoznacznie, o ile poprzeczne wymiary prętów nie są bardzo małe w stosunku do ich długości. Stworzyć teorię układów znaczy określić odpowiednie graniczne warunki.

Bardzo liczne prace poświęcone są tej kwestji w niemieckiej literaturze technicznej<sup>2)</sup>.

W latach 1901 i 1910 opublikowałem teorię układów o połączeniach sztywnych i zastosowałem ją do obliczenia mostów na kolei Władykaukaskiej przez rzekę Samur (układ przestrzenny) i rzekę Białą (układ płaski)<sup>3)</sup>.

Obecnie biorąc pod uwagę nieliczność odpowiednich prac w polskim języku<sup>4)</sup> mam zamiar podać tak samą teorię, jak również zastosowanie jej do układów płaskich i przestrzennych.

Zaczynam od układów płaskich, jako prostszych.

Teorie układów opierają się na zadaniu S. Venant'a.

Ponieważ potrzebne mi będą wzory w pewnej formie, poświęcam kilka stron teorii zgięcia.

§ 2. Określenia, hipotezy, ograniczenia (Układy płaskie). Węzeł teoretyczny przy układzie o prętach sztywnych jest to zespół stycznych do osi odkształconych, wychodzących z jednego punktu. O ile osi nie przecinają się w jednym punkcie, powstałe wskutek tego momenty są wiadome. Węzeł rzeczywisty winien być rozpatrywany jako oddzielne ciało, przeto odległość między teoretycznymi węzłami nie równa się długości pręta. Zakładając taką równość wprowadzamy hipotezę, która daje naprężenia większe od rzeczywistych.

Możemy się obyć bez tej hipotezy, lecz wówczas otrzymamy wzory bardzo złożone. Dla inżyniera ważne są nie rzeczywiste wartości naprężeń, lub odkształceń, lecz ich górne granice, więc wyżej wskazana hipoteza jest zupełnie uzasadniona. Teoretyczny węzeł posiada 3 stopnie swobody w układzie płaskim i 6 w układzie przestrzennym.

Układ stanowią ciała kształtu graniastosłupów lub walców (pryzmatyczne lub cylindryczne), ograniczone na końcach płaszczyznami normalnymi do powierzchni bocznej. Każde ciało układu znajduje się w warunkach zadania St. Venant'a lub w warunkach zbliżonych<sup>1)</sup>.

Stosunek poprzecznych wymiarów ciała do jego długości ulega ograniczeniom. W zależności od tych ograniczeń nazywają ich prętami lub cienkimi prętami (tiges, beams, Stäbe, стержни, тiges minces, vires, dünne Stäbe, проволоки)<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Idea funkcji normalnych powstała wcześniej (Navier, Poisson), podjęta nanowo w innej formie w 1909. *Journall Crelle Ritz*.

<sup>2)</sup> Na szczególną uwagę zasługuje praca Mohr'a.

<sup>3)</sup> Most przez rzekę Samur. Wydanie Towarzystwa kolei Władykaukaskich r 1901. *Izw. Petersb. Polit. Inst. „Teorja ferm“*, w której jako przykład przytoczono obliczenie mostu przez rz. Białą.

<sup>4)</sup> O ile mi wiadomo poświęcone są tej kwestji prace profesorów Thulliego i Hubera.

<sup>1)</sup> Ograniczenie, że pręt jest niewąski, obecnie zbyt czyste.

<sup>2)</sup> Granice różniące pręty od cienkich prętów są tak zw. granice Euler'a.

Charakterystyki prętów:

a) potencjalna energia pręta jest jednorodną funkcją drugiego stopnia; b) rzuty przesunąć  $u$ ,  $v$  i  $w$  i ich pochodne są nieskończenie małe; c) wektor siły przyłożonej do masy pręta jest tego samego rzędu co i wektor sił zewnętrznych; d) forma równo-

Normalny przekrój pręta ograniczony jest obwodem zamkniętym (closed curve)<sup>1)</sup>. Zakładamy, że obwód ma dwie osie symetrii.

Układ ma płaszczyzną symetrii, w której leżą wektory sił i płaszczyznę par (ZOY).

Naprężenia sił sprężystości w normalnym przekroju są wiadome. Normalne naprężenia (naprężenia sił normalnych) są linjowe funkcje  $y$ ; naprężenia sił stycznych zależą od formy obwodu przekroju. Moment sił sprężystości jest równy:

$$EI \text{ (sztywność zginania)}$$

$$\rho \text{ (promień krzywizny odkształconej osi)}$$

Każden pręt odnosimy do jego współrzędnych z początkiem w lewym końcu pręta. Za osie obieramy główne osie bezwładności. Oś OZ skierowana wzdłuż najwyższego wymiaru pręta. Oś OY leży w płaszczyźnie układu.

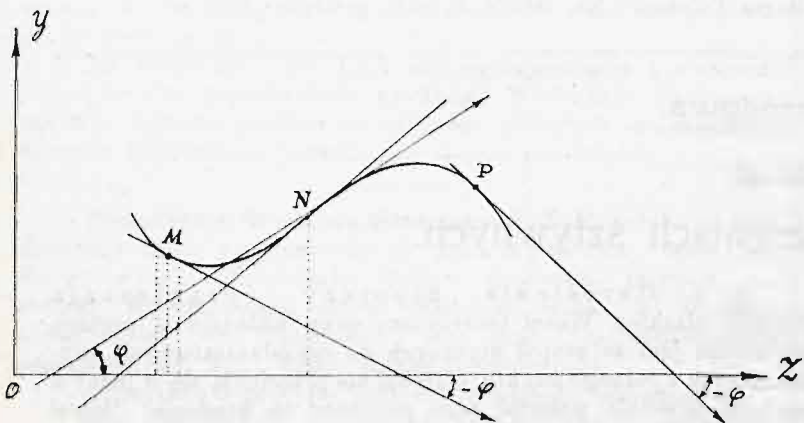
§. 3. Znakowania i oznaczenia (dla układów płaskich):

$z, y = 0$  współrzędne nieodkształconej osi  
 $z + u, v$  współrzędne osi odkształconej

$$s = \int_0^z dz \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2}$$

Długość odkształconej osi liczona od lewego końca do zmiennego punktu  $z$  ( $z > 0$ ).

Promień krzywizny  $\rho$  jest to wektor skierowany od punktu zmiennego  $M(z + u, v)$  do odpowiedniego środka krzywizny, przeto ma kierunek normalnej w punkcie  $M$  od wklęsłej strony krzywej.



Rys. 1.

Przeprowadzimy styczną w punkcie  $M$ ; o ile rzędne sąsiednich przy  $M$  punktów krzywej są większe od odpowiednich rzędnych stycznej, to wklęsłość krzywej jest zwrócona w stronę dodatniego kierunku  $Y$ . Przeprowadzimy przez punkt  $M$  równoległą do osi  $Z$ ; jeśli niezależnie od znaku  $\Delta z$  przyrost rzędnej osi  $-\Delta y$  jest większy od przyrostu rzędnej stycznej  $-dy$ , to znak różnicy:  $\Delta y - dy = \frac{1}{2} y''(z + \Theta dz) dz^2$  jest dodatni, a zatem  $y''(z) > 0$ . O położeniu wklęsłości krzywej sędzimy po znaku  $y''(z)$ . Gdy  $y''(z) = 0$  i jednocześnie  $y'''(z)$  zmienia znak, wówczas odpowiedni punkt krzywej jest punktem przegięcia (na rys. punkt  $N$ ). Gdy  $y''(z) = 0$  i  $y'''(z)$  znaku nie zmienia, to odpowiedni punkt będzie punktem spłaszczenia (point méplat).

wagi jedna i ona jest stateczna. Charakterystyki cienkich prętów: a) pot. energia nie jest jednorodną funkcją drugiego stopnia; b)  $u, v$  i  $w$  i  $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$  są częściowo skończone, częściowo n. m.; c) wektor siły przyłożonej do masy jest nieskończenie mały; d) form równowagi jest kilka, niektóre z nich stateczne, inne niestateczne. Granice Euler'a dają niższą granicę; wyższą granicą stosunku poprzecznych wymiarów do długości pręta jest około  $1/5$ . (Wyraźnej granicy niema). (Normalne naprężenia nie są linjowymi funkcjami  $y$ ).

W budownictwie ogólnym i mostowym używają zamiast terminu pręt, termin belka. Określenie belki będzie dane niżej.

<sup>1)</sup> Pręt jest to ciało jednopojne.

Kąt  $(t, z)$  jest dodatni wtedy, kiedy kąt  $(t, y)$  mniejszy od  $\frac{\pi}{2}$  i ujemny, kiedy  $(t, y) > \frac{\pi}{2}$ .

Jeżeli na odcinku krzywej  $y''(z)$  znaku nie zmienia, to kąty  $\varphi$ , które tworzą styczne w początku i końcu odcinka, mają znaki różne, jeżeli  $y''$  zmienia znak, to kąty te mają znaki jednakowe. W granicach odcinka jest punkt przegięcia. O tem, czy jest lub niema punktu przegięcia, możemy sądzić zależnie od znaku kątów  $\varphi$  w końcach odcinka.

Będziemy oznaczać przez:

- $j$  — numer węzła
- $i$  — „ „ pręta
- $\varphi^j$  — obrót węzła
- $\varphi_i$  — kąt między stycznymi do końców pręta
- $l_i$  — długość pręta
- $w_i$  — pole normalnego przekroju pręta
- $I_i$  — moment bezwładności
- $E$  — moduł Young'a
- $EI$  — sztywność zgięcia (Biegungssteifigkeit, flexural rigidity)
- $G$  — moduł poprzecznej sprężystości.  $G = \frac{E}{2(1+\eta)}$
- $\eta$  — liczba Poisson'a
- $N$  — naprężenie sił normalnych
- $T$  — „ „ stycznych

$$\mathfrak{M}_\omega — \text{moment pary sił wewnętrznych równy } \int_\omega N y d\omega$$

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial z} — \text{stosunkowe wydłużenie}$$

$$\beta = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{z} — \text{poślizg (zmiana kąta ZOY)}$$

$$\text{dla osi } \beta = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{y=0}$$

$$\mathfrak{N}_i = \int_\omega T d\omega, \quad \mathfrak{T}_i = \int_\omega T d\omega$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_1 = \frac{\mathfrak{T}_z}{\omega G} = \frac{dM}{dz} \frac{k}{\omega G}$$

$k$  — współczynnik liczbowy, zależny od formy obwodu normalnego przekroju

$$r = \sqrt{\frac{J}{w}}$$

$\delta(u)$  — nieskończenie mały przyrost  $u$

$|u|$  — absolutna wartość  $u$

$R$  — reakcja lewej podpory

$\mathfrak{M}$  — moment pary sił zewnętrznych

$M_z$  — suma momentów sił zewnętrznych, działających na lewą część belki (od lewego końca do danego przekroju)

$M_{l-z}$  — podobna suma działająca na prawą część belki

$M_0$  — moment w przekroju  $z = 0$

$M_n$  — „ „ „ „ „ „ „ „  $z = l$

$\xi$  — parametr, który określa położenie siły skupionej względem lewego końca belki

$p$  — obciążenie ciągłe, stałe, obliczone na jednostkę długości pręta

$p_z$  — obciążenie ciągłe zmienne

$g$  — przyspieszenie siły ciężkości

$\sigma$  — gęstość

$\sigma_g$  — ciężar jednostkowy.

§. 4. Zginanie. Normalnym przekrojem rozdzielimy pręt na dwie części. Każda z nich pozostaje w równowadze ulegając działaniu sił i par zewnętrznych, oraz siły i pary sił sprężystości (wewnętrznych) w normalnym przekroju pręta<sup>1)</sup>.

$$\text{Dla lewej części: } M_z = \mathfrak{M}_\omega,$$

$$\text{dla prawej: } M_{l-z} = -\mathfrak{M}_\omega,$$

$$\text{dla całej belki: } M_z = -M_{l-z} \dots \dots \dots (a)$$

<sup>1)</sup> Równania równowagi ciał fizycznych tem się różnią od równań równowagi ciał niezmiennych (mechanicznej abstrakcji), że dla pierwszych całe ciało i dowolna część jego powinna być w równowadze, dla drugich ciało jest niepodzielne i tylko jako takie powinno pozostawać w równowadze.

Dla lewej części:  $EI \frac{d\varphi}{dz} = M_z \dots (b)$

Gdyby początkowa krzywizna była różna od 0, to byłoby:

$$EI \delta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right) = M_z$$

albo:

$$EI \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = M_z \dots (b) \text{ bis}$$

$\frac{1}{\rho_0}$  początkowa krzywizna osi.

$\frac{d\varphi}{dz}$  możemy rozpatrywać jako przyrost krzywizny  $\left( \frac{1}{\rho_0} = 0 \right)$ .

W prawej części równania (b) momenty dodatnie będą te, które zwiększają (algebraicznie) krzywiznę lewej części, t. j. te, które wywołują takie zgięcie, przy którym wklęsłość osi będzie zwrócona w stronę dodatnich Y.

Całkując (1) otrzymamy:

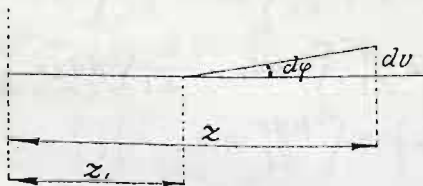
$$\varphi^z - \varphi^j = \int_0^z \frac{M dz}{EI}$$

Ponieważ zakładamy  $\omega = \text{Const}$ , to:

$$\varphi^z = \varphi^j + \frac{1}{EI} \int_0^z M dz$$

Przy  $z = -l$ :

$$\varphi^{j+1} - \varphi^j = \frac{1}{EI} \int_0^l M dz \dots (I)$$



Rys. 2.

Z rysunku 2 widać, że:

$$dv = (z - z') d\varphi - dM \frac{k}{\omega G}$$

$z$  — parametr, wskazujący punkt, którego przesunięcie rozważamy,  $z'$  odcięta zmiennego punktu.

Całkując otrzymamy:

$$v^z - v^0 = z \left( \varphi^j + \frac{1}{EI} \int_0^z M dz \right) - \frac{1}{EI} \int_0^z z M dz - M \frac{k}{\omega G}$$

przy  $z = l$ :

$$v^n - v^0 = l \left( \varphi^j + \frac{1}{EI} \int_0^l M dz \right) - \frac{1}{EI} \int_0^l z M dz - M \frac{k}{\omega G} \dots (II)$$

skąd:

$$\varphi^j = \frac{v^n - v^0}{l} + \frac{1}{EIl} \int_0^l z M dz - \frac{1}{EI} \int_0^l M dz + M \frac{k}{\omega G}$$

$$\varphi^{j+1} = \frac{v^n - v^0}{l} + \frac{1}{EIl} \int_0^l z M dz + M \frac{k}{\omega G}$$

Jeśli przy  $z = a$ ,  $\varphi^a = 0$ , to styczna równoległa do osi  $z$ :

$$v^n = v^0 - \int_0^a z M dz + M \frac{k}{\omega G}$$

$$\frac{dv}{dz} = \varphi^j + \frac{1}{EI} \int_0^a z M dz + \frac{\partial M}{\partial z} \frac{k}{\omega G}$$

równa się zeru przy:

$$\varphi^j = - \frac{1}{EI} \int_0^a M dz - \frac{\partial M}{\partial z} \frac{k}{\omega G}$$

Pierwszą całkę równania (b)-bis otrzymamy mnożąc przez  $dz$  i całkując w granicach 0 i  $z = z_0 + \delta z_0$ .

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 + \frac{1}{EI} \int_0^z M dz + \int_0^z \frac{\delta z}{\rho^0} + \delta z_0 \left( 1 + \frac{d\delta z_0}{dz_0} \right)$$

Wzór ten będzie nam potrzebny w dalszym ciągu rozważań. Wobec zrobionych założeń ( $v$  i  $w$  nieskończenie małe) wzory mogą być stosowane tylko w tym wypadku, gdy  $M$  jest funkcją tylko  $z$ .

Oznaczmy przez  $\mu$  dowolną funkcję  $z$  taką, która przy  $z=0$  i  $z=l$  jest równą zeru, wówczas ogólny wzór na  $M$  będzie taki:

$$M = M_0 + (M_n - M_0) \frac{z}{l} + \mu$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{M_n - M_0}{l} + \frac{\partial \mu}{\partial z} = \mathfrak{F}$$

$$M = M_0 + \left( \mathfrak{F} - \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) z + \mu$$

Oznaczmy przez  $z_0$  tę wartość  $z$ , przy której  $M=0$  (punkt przegięcia):

$$z_0 = \frac{M_0 + \mu}{M_0 - M_n} l$$

Żeby było:  
powinno być:

$$0 < z_0 < l, \\ \frac{M_0 + \mu}{M_0 - M_n} < 1 \\ M_n < 0.$$

Z tego faktu, że  $M$  jest tylko funkcją  $z$  bezpośrednio wynika, że  $\int_0^l M dz$  równa się algebraicznej sumie pól: a) pola ograniczonego osią  $x$  i krzywą  $u=f(z)$  i b) pola ograniczonego prostą  $M_0 + (M_n - M_0) \frac{z}{l}$ , osią  $z$  i rzędnymi  $M_0$  i  $M_n$ .  $\int_0^l z M dz$  jest moment tych pól względem  $z=0$ .

Gdyby  $w$  i  $v$  mogły mieć wartości skończone, to  $M$  byłoby funkcją  $z$  i  $\varphi$ .

Uwzględniając formę na  $M$  i zakładając  $w_0 = v_0 = 0$ , otrzymamy następujące wzory, z których będziemy korzystać:

$$\varphi^z = \varphi^j + \frac{l}{2EI} \left[ 2M_0 \left( \frac{z}{l} \right) + (M_n - M_0) \left( \frac{z}{l} \right)^2 + \frac{2}{l} \int_0^z \mu dz \right] = \varphi^j + \psi$$

$$\varphi^{j+1} = \varphi^j + \varphi_i = \varphi^j + \frac{l}{2EI} \left[ M_0 + M_n + \frac{2}{l} \int_0^l \mu dz \right] \dots (I)$$

$$v^z = z(\varphi^j + \psi) - \frac{l^2}{6EI} \left[ 3M_0 \left( \frac{z}{l} \right)^2 + 2(M_n - M_0) \left( \frac{z}{l} \right)^3 + \frac{6}{l^2} \int_0^z z \mu dz \right] - \frac{Mz k}{\omega G} = z(\psi + \varphi^j) - \eta$$

$$v^n = l \varphi^j + \frac{l^2}{6EI} \left[ 2M_0 + M_n + \frac{6}{l} \int_0^l \mu dz - \frac{6}{l^2} \int_0^l z \mu dz + 12Mlk(1 + \eta) \left( \frac{l}{l} \right)^2 \right] \dots (II)$$

Oznaczmy przez  $\eta_n$  to, czem stanie się  $v^n$ , kiedy  $\varphi^j = 0$ , wtedy:

$$v^n = l \varphi^j + \eta_n \dots (III)$$

$$\varphi^j = \frac{v^n - \eta_n}{l} \dots (IV)$$

$$\varphi^{j+1} = \frac{v^n - \eta_n}{l} + \varphi_i \dots (V)$$

$$w_n = \frac{\mathfrak{N} l}{\omega E} \dots (VI)$$

Z (I) i (II) otrzymamy:

$$M_0 = \frac{2EI}{l} \left[ \frac{3\eta_n}{l} - \varphi_i \right] + \frac{6}{l^2} \int_0^l z \mu dz - \frac{4}{l} \int_0^l \mu dz - 12 M_n k (1 + \eta) \left( \frac{r}{l} \right)^2 \quad (\text{VII})$$

$$M_n = \frac{2EI}{l} \left[ 2\varphi_i - \frac{3\eta_n}{l} \right] - \frac{6}{l^2} \int_0^l z \mu dz + \frac{2}{l} \int_0^l \mu dz + 12 M k (1 + \eta) \left( \frac{r}{l} \right)^2 \quad (\text{VIII})$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{6EI}{l} \left[ \varphi - \frac{2\eta_n}{l} \right] - \frac{12}{l^2} \int_0^l z \mu dz + \frac{6}{l} \int_0^l \mu dz + 24 M k (1 + \eta) \left( \frac{r}{l} \right)^2 \quad (\text{IX})$$

$$\eta_n - l \varphi_i = -\frac{l^2}{6EI} \left[ M_0 + 2M_n + \frac{6}{l^2} \int_0^l z \mu dz - 12 M k (1 + \eta) \left( \frac{r}{l} \right)^2 \right] \quad (\text{X})$$

$$\frac{\partial v^z}{\partial z} = \psi + \varphi^j,$$

jeśli  $\frac{\partial v^z}{\partial z} = 0$ , przy  $z = a$ , to:

$$\varphi^j = -\psi, \quad \max v = -\nu_a.$$

Mogą być pożyteczne wzory w nieco innej formie.

Przedstawmy  $M$  w formie  $M = M_0 + \mathfrak{L} \cdot z + \mu$ . Wtedy:

$$\varphi^{j+1} - \varphi^j = \varphi_i = \frac{l}{2EI} \left[ 2M_0 + \mathfrak{L}l + \frac{2}{l} \int_0^l \mu dz \right] \quad (\text{XI})$$

$$u'' = l \varphi^{j+1} + \frac{l^2}{6EI} \left[ 3M_0 + \mathfrak{L}l + \frac{6}{l} \int_0^l \mu dz - \frac{6}{l^2} \int_0^l z \mu dz \right] = -l \varphi^j + \eta_n \quad (\text{XII})$$

Dla skrócenia będziemy oznaczać:

$$\frac{2}{l} \int_0^l \mu dz = A \mu,$$

$$\frac{6}{l} \int_0^l \mu dz - \frac{6}{l^2} \int_0^l z \mu dz = B \mu.$$

Graniczne warunki. Pręt ma dwa końce — są to linjowe elementy osi w punktach  $z = 0$  i  $z = l$ . Jeśli mowa o układzie, są to dwa węzły.

Każdy koniec może być:

a) swobodny, jeśli  $u, v$  i  $\varphi$  są różne od zera. Na takim końcu  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$ . Oznaczać go będziemy przez  $S$ . Ma 3 stopnie swobody.

b) podparty, na takim końcu  $w = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ . Oznaczać go będziemy przez  $P$ . Ma dwa stopnie swobody.

c) zamocowany,  $w = 0, v = 0, \frac{d\varphi}{dz} = 0$ . Oznaczamy go  $Z$ . Jeden stopień swobody.

d) utwierdzony,  $w = v = \varphi = 0$ . Oznaczamy  $U$ . Koniec pozbawiony wszystkich stopni swobody<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Warunki utwierdzenia końca lub danego przekroju mogą być zadane inaczej. Jeśli w pewnym przekroju  $u = v = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$  dla dowolnego  $y$ , to przekrój jest zamocowany i utwierdzony. Jeśli  $v \neq 0$ , to przekrój jest utwierdzony w stanie odkształconym. Zamocowanie i utwierdzenie końca uskutecznią się zapomocą ciał fizycznych (odkształcających się), a zatem jest warunkowe. Jeżeli sztywność pręta i wielkość sił na niego działających nie przekracza pewnych granic, to odkształcenia, które powstają w okolicach zamocowania, można uważać jako nieskończenie małe wyższego rzędu w porównaniu z odkształceniami samego pręta. Pręt może być na tyle sztywnym, a siły na niego działające mogą być tak wielkie, że odkształcenia środowiska, w którym pręt jest utwier-

Pręt pozostaje w równowadze, jeśli jest pozbawiony trzech stopni swobody.

Kombinując warunki graniczne dla dwóch końców tak, ażeby były spełnione warunki dla całego pręta, otrzymamy 6 takich kombinacji:

1. Z.P; 4. U.S
2. Z.Z; 5. U.P
3. Z.U; 6. U.U.

Pręty wspornikowe są szczególne wypadki 1 lub 2. Z 6 kombinacji, zasadniczych jest cztery: 1, 4, 5 i 6.

Warunki dla dwóch końców pręta nazywają granicznymi warunkami (Conditions aux limites, The terminal Conditions). Są to warunki niezbędne dla określoności zadania.

Rozpatrzmy niektóre wypadki zasadniczych kombinacji, z których potem będziemy korzystając.

#### Kombinacja Z.P.

Jeden koniec nieruchomy (przegubowo zamocowany), drugi podparty ( $w_0 = v_0 = w_n = 0$ ). Takie pręty nazywają belkowymi prętami lub prosto belkami.

Z określenia wynika, że:

$$M_0 = M_n = 0, \quad M = \mu,$$

$$\varphi^j = -\frac{1}{EI} \left[ \int_0^l \mu dz - \frac{1}{l} \int_0^l z \mu dz \right]$$

$$\varphi^{j+1} = \frac{1}{EI} l \int_0^l z \mu dz$$

$$v^z = z \varphi^j + \frac{z}{EI} \int_0^z \mu dz - \frac{1}{EI} \int_0^z z \mu dz - \frac{\mu k}{\omega G}$$

$$\frac{\partial v^z}{\partial z} = \frac{1}{EI \cdot l} \int_0^l z \mu dz - \frac{1}{EI} \int_0^l \mu dz - \frac{d\mu}{dz} \frac{k}{\omega G};$$

$$\varphi'' = \varphi^j + \int_0^l \frac{\mu dz}{EI} = 0.$$

$$\max v = -\frac{1}{EI} \int_0^a z \mu dz - \frac{k \mu}{\omega G}.$$

Górna granica  $a$  jest określona równaniem:

$$l = \frac{\int_0^l z \mu dz}{\int_0^l \mu dz + \frac{d\mu}{dz} \frac{k}{\omega G} \cdot EI}.$$

Wzory te dają rozwiązanie przy dowolnym  $\mu$ .

Założmy, że:

a) na pręt działa para z momentem  $\mathfrak{M}$ :

$$\mu = -\frac{\mathfrak{M} z}{l} \quad \text{w przedziale } 0 \text{ i } \xi$$

$$\mu = \mathfrak{M} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \quad \text{w przedziale } \xi \text{ — } l$$

$$\int_0^l \mu dz = \frac{\mathfrak{M}}{2} (l - 2\xi)$$

$$\int_0^l z \mu dz = \frac{\mathfrak{M}}{6} (l^2 - 3\xi^2)$$

Zakładając:  $\frac{\xi}{l} = u$ :

$$\varphi^j = \frac{\mathfrak{M} l}{6EI} (6u - 2 - 3u^2)$$

$$\varphi^{j+1} = \frac{\mathfrak{M} l}{6EI} (1 - 3u^2)$$

$$\varphi_i = \frac{\mathfrak{M} l}{2EI} (1 - 2u)$$

dzony mogą być większe od odkształceń pręta; w takim wypadku o zatwierdzeniu końca nie może być mowy. W każdym poszczególnym wypadku warunki utwierdzenia końców pręta powinny być uważnie zbadane.

Przy  $u = \frac{1}{3}$ ;  $\varphi_i = 0$ ,  
styczne do końców pręta są równoległe.

Przy  $u = 1$ :

$$\varphi^j = \frac{Ml}{6EI}; \quad \varphi^{j+1} = -\frac{Ml}{3EI}.$$

Przy  $u \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\varphi^j < 0$ ;  $\varphi^{j+1} > 0$  wklęsłość zwr.  
w stronę dodat. Y

" "  $\geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\varphi^j > 0$ ;  $\varphi^{j+1} < 0$  wklęsłość zwr.  
w stronę ujemn. Y.

$$\text{Przy: } 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} < u \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\varphi^j$  i  $\varphi^{j+1}$  mają znaki jednakowe, oś odkształcona ma punkty przegięcia.

b) działa siła skupiona P:

$$\mu = P \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) z \text{ w przedziale } 0 - \xi$$

$$\mu = P \xi \left(1 - \frac{z}{l}\right) \text{ w przedziale } \xi - l.$$

$$\int_0^l \mu dz = \frac{P\xi}{2} (l - \xi)$$

$$\int_0^l z \mu dz = \frac{P\xi}{6} (l^2 - \xi^2)$$

$$\varphi^j = -\frac{P}{6EI} \xi (l - \xi) (2l - \xi)$$

$$\varphi^{j+1} = \frac{P}{6EI} \xi (l^2 - \xi^2)$$

przy  $z < \xi$ :

$$v = \frac{P}{6EI} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \left\{ z^3 - z \xi (2l - \xi) \right\} - P \xi \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \frac{k}{\omega G}$$

max v przy:

$$z = \sqrt{\frac{\xi(2l - \xi)}{3} + 4kr^2(1 + \eta)}$$

i dowolnym  $\xi$  w granicach:

$$z \leq \xi \leq l.$$

Przy  $\xi = l$ ,  $V^z = 0$ , przy  $\xi = z$ :

$$v = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{16} + 3kr^2(1 + \eta)}$$

max v przy:

$$\xi = \frac{l}{4} - \sqrt{\frac{l^2}{14} + 3kr^2(1 + \eta)} > \frac{l}{2}.$$

Nie uwzględniając poślizgu:

$$\text{max } v \text{ przy } z = \frac{l}{2}.$$

Ze wzoru:

$$l = \frac{\int_0^l z \mu dz}{\int_0^l \mu dz} = \frac{l^2 - \xi^2}{3 \left( l - 2\xi + \frac{\xi^2}{l} \right)}$$

$$\xi = \frac{l}{2}.$$

Kombinując a) i b) otrzymamy zgięcie wywołane siłą i parą.

c) Obciążenie ciągłe, nierównomierne:

$$P_z = \frac{2z}{l} \text{ w przedziale } 0 - \frac{l}{2}$$

$$P_z = \frac{2}{l} (l - z) \text{ w przedziale } \frac{l}{2} - l$$

$$\mu = \frac{lz}{4} - \frac{z^3}{3l}$$

$$\int_0^l \mu dz = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \mu dz = \frac{5l^3}{6 \cdot 16}$$

$$\int_0^l z \mu dz = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} z \mu dz = \frac{l^4}{60}$$

$$\text{Przy } z = \frac{l}{2}, \varphi^{\frac{l}{2}} = 0, \varphi^j = - \int_0^{\frac{l}{2}} \mu dz = \frac{5l^3}{2 \cdot 36 \cdot EI}$$

$$\varphi^{j+1} = \varphi^j$$

$$u^{\frac{l}{2}} = -\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} z \mu dz = -\frac{l^4}{120EI}$$

$$d) P_z = 1 - \frac{2z}{l} \text{ w przedziale } 0 \text{ i } \frac{l}{2}$$

$$P_z = \left(\frac{2z}{l} - 1\right) \text{ w przedziale } \frac{l}{2} \text{ i } l$$

$$\mu = \frac{lz}{4} - z \int_0^z \left(1 - \frac{2z}{l}\right) dz + \int_0^z z \left(1 - \frac{2z}{l}\right) dz = \frac{lz}{4} - \left\{ \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3l} \right\}$$

$$\int_0^l \mu dz = \frac{l^3}{16}; \quad \int_0^l z \mu dz = \frac{3l^4}{10 \cdot 32}$$

$$\varphi^j = \frac{l^3}{32EI}$$

$$v^{\frac{l}{2}} = \int_0^{\frac{l}{2}} z \mu dz = -\frac{3l^4}{20 \cdot 32}$$

e) Obciążenie ciągłe niesymetryczne:

$$P_z = \frac{z}{a} \text{ w przedziale } 0 - a$$

$$P_z = \frac{l-z}{d} \text{ w przedziale } 0 - l$$

$$R = \frac{2l-a}{6} = \frac{l+d}{6}$$

$$\text{dla } z \leq a$$

$$\mu = \frac{l+d}{6} z + \frac{z^3}{6a}$$

$$\int_0^a \mu dz = \frac{l^3}{24} - \frac{5ld^2}{24} + \frac{dl^2}{24} + \frac{d^3}{8}$$

Reakcja prawej podpory:

$$R_p = \frac{2l-d}{6}$$

na mocy wzoru (a):

$$\mu = \frac{2l-d}{6} z - \frac{z^3}{6d}$$

$$\int_0^l \mu dz = \frac{ld^2}{6} - \frac{d^3}{8}$$

$$\int_0^l z \mu dz = \frac{l}{24} [l^2 - d^2 + ld]$$

Kombinacja US.

$$M_0 \neq 0, \varphi^j = 0; \text{ przy } z=l, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0$$

$$M = P(z - \xi)$$

$$\int_0^l \mu dz = \int_0^{\xi} \mu dz = -\frac{P\xi^3}{6}$$

$$\varphi^{j+1} = -\frac{P\xi^2}{2EI}$$

$$V = \frac{Pl^3}{6EI} \left[ \left(\frac{z}{l}\right)^3 - \frac{3\xi}{l} \left(\frac{\xi}{l}\right)^2 \right]$$

## Kombinacja U.P.

$$\varphi^j = 0, M_0 \neq 0; \quad \text{przy } z=l, \quad \frac{\partial \varphi^2}{dz^2} \neq 0$$

$$M_0 = -Rl + P(l - \xi)$$

$$M = R(z-l) + P(l - \xi) \quad (z < \xi)$$

$$M = R(z-l) + P(l - z) \quad (z > \xi),$$

$$\int_0^l M dz = -\frac{Rl^2}{2} + \frac{P(l^2 - \xi^2)}{2}$$

$$\int_0^l z \mu dz = -\frac{Rl^3}{6} + \frac{P(l^3 - \xi^3)}{6}$$

Z warunku  $\varphi^j = 0$  mamy:

$$-\frac{Rl^3}{2} + \frac{P(l^3 - \xi^2 l)}{2} = -\frac{Rl^3}{6} + \frac{P(l^3 - \xi^3)}{6}$$

$$R = \frac{P(2l^3 - 3l\xi^2 + \xi^3)}{2l^3}$$

Zakładając  $l - \xi = u$ :

$$M_0 = -\frac{Pu(l^2 - u^2)}{2l^2}$$

$$R = \frac{Pu(3l^2 - u^2)}{2l^3}$$

$$\max M = \max M_0, \quad \text{przy } u = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

$$V^2 = \frac{l^3}{6EI} \left[ R \left\{ \left( \frac{z}{l} \right)^3 - 3 \left( \frac{z}{l} \right)^2 \right\} + 3P \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right) \left( \frac{z}{l} \right)^2 \right] \quad x \leq \xi.$$

## Kombinacja UU.

$$\varphi^j = \varphi^{j+1} = 0$$

$$M = M_0 + (M_n - M_0) \frac{z}{l} + \mu$$

$$M_0 + M_n = -\frac{2}{l} \int_0^l \mu dz$$

$$M_0 + 3M_n = -\frac{6}{l^2} \int_0^l z \mu dz$$

skąd:

$$M_n = -\frac{6}{l^2} \int_0^l z \mu dz + \frac{2}{l} \int_0^l \mu dz$$

$$M_0 = \frac{6}{l^2} \int_0^l z \mu dz - \frac{4}{l} \int_0^l \mu dz$$

przy dowolnym  $\mu$ , bez uwzględnienia wpływu poślizgu.

Jeśli:

$$\mu = P \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right) z \quad \text{w p. } 0 - \xi$$

$$\mu = P \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \xi \quad \xi - l.$$

to:

$$M_n = -P \left( \frac{\xi}{l} \right)^2 (l - \xi)$$

$$M_0 = -P \left\{ 1 - \left( \frac{\xi}{l} \right)^2 \right\}.$$

(C. d. n.).

Inż. Jan Domaszewski.

## Uproszczony sposób rozwiązywania niektórych trudniejszych zagadnień przy obliczaniu połączeń torów.

Połączenia, rozgałęzienia i przekształcenia torów, powstałe przez włożenie rozjazdów w tor prosty i zastosowanie jednego łuku, rozwiązuje się przez rzutowanie układu na odpowiednią oś. Z równań, w ten sposób powstałych, otrzymujemy bez trudności wszystkie potrzebne nam wartości.

Jeżeli w układzie zastosujemy dwa zgodnie lub odwrotnie skierowane łuki, to ułożenie równań rzutowych również nie będzie przedstawiać większych trudności, rozwiązanie natomiast tych równań jest zazwyczaj bardzo uciążliwym, a zwłaszcza gdy niewiadomą tworzy kąt, który w równaniu znajduje się pod postacią rozmaitych funkcji. Rozwiązanie takich równań wymaga tyle pracy, że, o ile nie znamy sztucznego sposobu ich rozwikłania, zwracamy się wtedy do metody wykreślnej, przyjmując więc potrzebne wartości w przybliżeniu.

Autorowie<sup>1)</sup> podają sposoby rozwiązywania zagadnień, zwłaszcza mniej skomplikowanych, sposoby te, mimo to proste i dadzą się zastosować tylko do każdego poszczególnego przypadku.

Uproszczenie przezemnie stosowane opiera się na następującym rozumowaniu:

Prawie wszystkie zagadnienia można sprowadzić do dwu następujących ogólnych form:

a) Dany jest początek pierwszego łuku i długość stycznej między łukami, niewiadomą — nachylenie stycznej i położenie drugiego łuku.

b) Dany jest początek pierwszego łuku i ustalone położenie drugiego, niewiadomą — długość i nachylenie prostej między temi łukami (stycznej).

W obu wypadkach promienie łuków są dane, gdyż inaczej

zadanie byłoby nieoznaczonym, chyba, że którą inną niewiadomą możnaby przyjąć dowolnie.

Jeżeli określimy nachylenie stycznej do linii, łączącej środki kół (rysunek 1—6, kąt ten będziemy oznaczać przez  $\varphi$ ), wtedy zamiast szukać nachylenia stycznej do danych prostych, możemy szukać nachylenia tej linii, łączącej środki kół. Ponieważ odstęp środków kół w obu wypadkach, da się znacznie łatwiej określić niż którakolwiek inna niewiadoma, więc na tem polega uproszczenie zadania.

W pierwszym wypadku, gdy dana jest długość stycznej  $l_0$ , odległość środków kół otrzymujemy ze wzoru Pitagorasa:

$$D = \sqrt{(R+r)^2 + l_0^2} \quad \text{dla łuków odwrotnie skierowanych, lub}$$

$$D = \sqrt{(R-r)^2 + l_0^2} \quad \text{dla łuków zgodnie skierowanych.}$$

W drugim wypadku, gdy położenie obu kół jest dane, odstęp środków kół da się zawsze obliczyć z danych warunków.

Kąt  $\varphi$ , zawarty pomiędzy styczną, a prostą  $D$  łączącą środki kół, określamy ze wzoru:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R+r}{l_0} \quad \text{dla łuków odwrotnie skierowanych, zaś}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R-r}{l_0} \quad \text{dla łuków zgodnie skierowanych.}$$

Mając na uwadze powyższe rozważanie możemy następnie zastosować w zwykły sposób rzutowanie układu na odpowiednio dobraną oś, starając się wprowadzić długość  $D$  w równanie rzutów.

Bardzo często nawet równanie rzutów jest zbyt ciężkie np. gdy mamy dane odstęp  $y_1$  i  $y_2$  środków obu łuków od pewnej prostej zasadniczej. Wtedy nachylenie prostej  $D$  do tej prostej  $\mu$ :

$$\sin \mu = \frac{y_2 - y_1}{D}, \quad \text{kąt zaś zawarty pomiędzy styczną a tą prostą}$$

zasadniczą:

<sup>1)</sup> K. Skibiński: Połączenia torów. Lwów 1897. — K. Wątrorek: Budowa kolei. Tom I. Warszawa 1924. — R. Niewiadomski: Projektowanie objazdów kolejowych. Warszawa 1923. — P. Timpenfeld: Weichen- und Gleis-Berechnungen. Lipsk 1920. — A. Wasiułyński: Drogi żelazne. Wyd. II, zeszyt 2. Warszawa 1925.