

raison de circonstances spéciales à l'ouvrage projeté, soit pour des motifs d'ordre pratique, relevant de la technique des constructions métalliques. Ils ne seront astreints en pareil cas à fournir de justifications que s'il en devait résulter une augmentation sensible dans le poids de la charpente métallique, et par suite, dans la dépense d'exécution du pont, sans que cette augmentation apparut à priori comme inévitable.

Il leur sera également loisible de dépasser ces limites lorsqu'ils apprécieront que cette mesure ne peut porter atteinte à la stabilité.

Mais si le dépassement est de quelque importance, ils auront à le justifier au double point de vue de la sécurité et de la durée du pont<sup>7)</sup>.

Analogiczny wzór dla dopuszczalnych napięć żelaza w mostach jest używany na niektórych znaczniejszych liniach kolejowych Ameryki.

Na powyższych zasadach zostały wypracowane odnośnie rozporządzenia oficjalne M. K. Ż. o obliczaniu żelaznych mostów kolejowych, które już ukazały się w Dzienniku Urzędowym M. K. Ż. № 11/1923 r.

Kończąc te uwagi, przytoczymy ulubione motto *Burns'a*:

„On reason build — resolve”.

— „That column of true majesty in man”.

PROF. S. BELŻECKI.

## Granica sprężystości belek krzywych.

(Dokończenie).

Liczby  $m$  i  $n$  są określone jeśli wskazane będą warunki zamocowania końców belki.

Założymy, że końce są zupełnie zamocowane t. j. że  $\delta\varphi_n = 0$

$$\text{i } \int_0^l x d\varphi = 0.$$

$$\text{Równanie } \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} + \frac{M_\varphi^R}{EI} \dots \dots \dots \text{ (c)}$$

pomnożymy przez  $ds = ds_0 \left( 1 + \frac{\delta ds_0}{ds_0} \right)$  i przecałkujemy w granicach 0 i  $\varphi_n$

$$\varphi_n' = \int_0^{\varphi_n} \left( \frac{1}{R} + \frac{M_\varphi^R}{EI} \right) ds_0 + \int_0^{\varphi_n} \frac{\delta ds_0}{ds_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{M_\varphi^R}{EI} \right) ds_0; \quad \varphi_n' = \varphi_n + \int_0^{\varphi_n} \frac{M_\varphi^R}{EI} ds_0 + \varepsilon.$$

Całka oznaczona literą  $\varepsilon$  jest nieskończenie małą\*).

$$*) \int_0^{\varphi_n} \frac{\delta ds_0}{ds_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{M_\varphi^R}{EI} \right) ds_0 = \left( \frac{\delta ds_0}{ds_0} \right)_Q \int_0^{\varphi_n} \left( \frac{1}{R} + \frac{M_\varphi^R}{EI} \right) ds; \left( \frac{\delta ds_0}{ds_0} \right)_Q \text{ nieskończenie}$$

mała,  $\int_0^{\varphi_n} \left( \frac{1}{R} + \frac{M_\varphi^R}{EI} \right) ds_0$  wielkość skończona, więc  $\varepsilon$  — jest nieskończenie małe.

Wskutek zamocowania  $\delta\varphi_n = \varphi'_n - \varphi_n = 0$ ,

$$\text{a zatem } \int_0^{\varphi_n} \frac{M_\varphi^R ds}{EI} = 0 \dots \dots \dots (d)$$

Pomnożymy równanie (c) przez  $x ds$

$$\int_0^{\varphi_n} x ds = 0 = \int_0^{\varphi_n} \left( \frac{1}{R} + \frac{M_\varphi^R}{EI} \right) x ds = \int_0^{\varphi_n} x d\varphi + \int_0^{\varphi_n} \frac{M_\varphi^R}{EI} x ds,$$

$$\text{skąd } \int_0^{\varphi_n} \frac{M_\varphi^R}{EI} x ds = 0 \dots \dots \dots (e)$$

Równania (d) i (e) określają  $m$  i  $n$ .

O ile belka jest nieskończenie cienka lecz przesunięcia jej są bardzo małe, to podane wzory mogą być dla niej stosowane.

Dla takiej belki

$$n = 2 \sin \varphi_n \left( 1 - \cos \varphi_n - \varphi_n \frac{\sin \varphi_n}{2} \right) : D,$$

$$m = [(1 - \cos \varphi_n) (\varphi_n - 3 \sin \varphi_n) + \varphi_n \sin^2 \varphi_n] : D,$$

$$D = \varphi_n \sin \varphi_n \cos \varphi_n + \varphi_n^2 - 2 \sin^2 \varphi_n.$$

Dla belki o skończonej stałej grubości  $2e$

$$n = [r^2 \{ 2 \sin \varphi_n (1 - \cos \varphi_n) - \varphi_n \sin^2 \varphi_n \} - \varphi_n \sin^2 \varphi_n] : D'$$

$$m = \{ n (\sin \varphi_n - \varphi_n) + (1 - \cos \varphi_n) \} : \varphi_n$$

$$D' = r^2 \{ \varphi_n^2 + \varphi_n \sin \varphi_n \cos \varphi_n - 2 \sin^2 \varphi_n \} + \varphi_n (\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n)$$

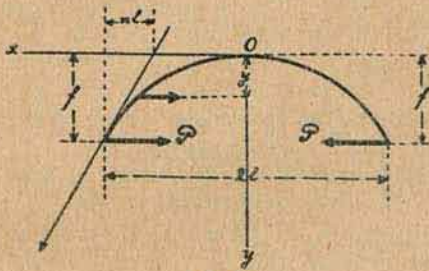
Jeśli  $2e = \frac{R \sin \varphi_n}{3^3}$ , to

$\varphi_n$	90	85	80	75	70	65	55	50	45
$\beta_n$	1.94	2.04	2.16	2.29	2.40	2.59	2.94	3.13	3.32

Dla belki krzywej łatwo określić granicę wyboczenia (granicę *Euler'a*)

lecz dla otrzymania drugiej całki równania  $\delta \left( \frac{1}{\varphi} \right) = \frac{M_\varphi^R}{EI}$  musimy się posłu-

giwać funkcjami eliptycznymi. Zaznaczę tylko że ta granica odpowiada  $\frac{1}{\rho} = 0$  w punkcie  $x=0$  (point méplat).



Rys. 4.

Zastosujemy wskazaną wyżej metodę do określenia granicy przy której belka prosta o stałym przekroju ściskana siłą  $P$  pozostaje prosta, a jej odkształcenia nieskończenie małe. Nie (cienki pręt) nie może być zgięta ani ściskana, jeśli nie posiada pewnej sztywności. Każdej sile odpowiada pewna sztywność belki. Założmy, że belka długości  $2l$  (rys. 4) ściskana siłą  $P$  zgięta się wskutek nie odpowiadającej sile  $P$  sztywności.

Półowę belki można uważać za belkę zamocowaną w 0.

$\frac{EI}{\rho} = P(f - \varphi)$ ; mnożymy obie części przez  $d\varphi$  i bierzemy całkę w granicach 0 i  $\varphi_n$ ;  $EI \frac{ds \sin \varphi}{\rho} = P(f - \varphi) d\varphi$ ;  $1 - \cos \varphi_n = \frac{Pf^2}{2EI}$ ;  $\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{f}{nl}$ ;

$$\cos \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{n^2 l^2}}}$$

Jeśli odkształcenie jest nieskończenie małe, to zamiast  $\sqrt{1 + \frac{f^2}{n^2 l^2}}$

można ograniczyć się wzorem:  $1 + \frac{f}{2n^2 l^2}$ ;  $\frac{1}{n^2 l^2} = \frac{P}{EI} \left(1 + \frac{f^2}{n^2 l^2}\right)$ . Gdy  $f$  dąży do 0,  $n$  dąży do 1;  $P = \frac{EI}{l^2}$ . Niech  $\omega$  będzie polem przekroju

normalnego do osi, to wówczas  $R = \frac{P}{\omega} = E \left(\frac{r}{l}\right)^2$  ( $r$ —pr. bezwładności)

$r = l \sqrt{\frac{R}{E}}$ . Oznaczmy  $2l$  przez  $L$ ,  $r = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{R}{E}}$ . Przyjmując np.

$R = 2 \cdot 10^3$ ,  $E = 2 \cdot 10^6$ , otrzymamy  $\frac{2}{L} \cong \frac{1}{64}$ . Odpowiednia granica Euler'a

$P \cong \pi^2 \frac{EI}{L^2}$ ;  $R = \pi^2 E \left(\frac{2}{L}\right)^2$ ;  $\frac{2}{L} \cong \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{R}{E}}$ ; przy tych samych założeniach

co do  $R$  i  $E$  otrzymamy  $\frac{r}{\alpha} \cong \frac{1}{100}$ . W granicach  $\frac{r}{\alpha} < \frac{1}{64}$ ; od-

kształcenia mogą pozostać nieskończenie małe, a przesunięcia mogą być skończone.

Dlatego żeby jedno i drugie były nieskończenie małe, trzeba żeby

$$z = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{R}{E}}.$$

Możemy te same wyniki otrzymać ze wzoru:  $EIy'' = P(f-y)$ ;

$$EIy' = P \int_0^l (f-y) dx; \quad \frac{f}{nl} = \frac{P}{EI} fl - \frac{P}{EI} \int_0^l y dx.$$

Gdy  $y$  dąży do zera,  $P$  dąży do  $P = 4 \frac{EI}{L^2}$ .

Dla belek krzywych również możemy korzystać z przybliżonego

równania *Monry*:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v^2 + 2 \left( \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 - v \frac{d^2 v}{d\varphi^2}}{\left[ z + \left( \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Położenie punktu na osi określimy promieniem wodzącym  $R+z$ , zakładając  $\left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2$  nieskończenie małą, drugiego rzędu dla przyrostu krzywizny

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}, \text{ otrzymujemy: } z + \frac{d^2 z}{d\varphi^2} = -R^2 \left( 1 + \frac{2r}{R} \right) \frac{M_\varphi^R}{EI}.$$

Amatorowie odrzucają  $\frac{2z}{R}$  w porównaniu z 1 i otrzymują:

$$z + \frac{d^2 z}{d\varphi^2} = -\frac{R^2 M_\varphi^R}{EI} = f(\varphi);$$

W naszym wypadku  $f(\varphi) = \frac{PR^3}{EI} \left[ m + n(1 - \cos \varphi) - \sin \varphi \right]$ .

Ogólna całka  $z = C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + \sin \varphi \int_0^\varphi f(\varphi) \cos \varphi d\varphi -$

$-\cos \varphi \int_0^\varphi f(\varphi) \sin \varphi d\varphi$ . Warunki: przy  $\varphi=0$ ,  $z'=0$ ,  $z=z_0$ ; przy  $\varphi=\varphi_n$ ,  $z_n=z'_n=0$ ;

$$z = -\frac{PR^3}{EI} \left[ -(m+n) + \frac{n}{2} (\mu \cos \varphi - \varphi \sin \varphi) + \frac{1}{2} (\varphi_n \cos \varphi + \sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \right]; \quad \mu = 1 + \frac{\varphi_n}{\text{tag. } \varphi_n}.$$

Z powyżej wyłożonego wynika: w mechanice stosowanej podają wzory otrzymane przy pewnych założeniach i nie wskazują granic w których one mogą być stosowane. Chodzi o określenie tych granic.

Naprzykład, belka pryzmatyczna lub cylindryczna pod jarzmem sił zewnętrznych  $P$ , odkształca się tak, że oś z prostej staje się algebra-

iczną krzywą nie wyżej trzeciego rzędu względem  $x$  i zawsze linową funkcją  $P_i$ . Wzór będzie odpowiadać zrobionym założeniom, jeśli  $P_i$  nie przekracza wskazanych wyżej granic. O wskazanie tych granic chodziło mi właśnie. Granice Euler'a są wyższe od nich i odpowiadają stosunkom  $\frac{z}{L}$  mniejszym od  $\frac{1}{64}$ . Wysmukłe pręty przy odkształceniach nieskończenie małych mogą mieć skończone przesunięcia.

Poszukiwania granic Euler'a dla prętów  $\frac{r}{a} < \frac{1}{100}$ , a tembardziej  $< \frac{1}{64}$ , pozbawione są podstaw teoretycznych i mogą być odnalezione tylko sposobem doświadczalnym.

A. GAJKOWICZ.

## Sposób analityczny zrównoważenia wypadkowej $R$ danego układu sił przez trzy siły o zadanych kierunkach.

Zadanie sprowadza się do wyznaczenia trzech wartości  $T_i$ ,  $T_{i+1}$ ,  $T_{i+2}$  czyniących zadość trzem równaniom równowagi. Obierzemy  $R$  i kierunek prostopadły do  $K$  za oś współrzędnych. Równania równowagi będą miały następującą postać:

$$\begin{aligned} T_i \alpha_i + T_{i+1} \alpha_{i+1} + T_{i+2} \alpha_{i+2} &= -R; \\ T_i \beta_i + T_{i+1} \beta_{i+1} + T_{i+2} \beta_{i+2} &= 0; \\ T_i r_i + T_{i+1} r_{i+1} + T_{i+2} r_{i+2} &= -Rr. \dots (x) \end{aligned}$$

gdzie  $\alpha_i = \cos(T_i, R)$ ,  $\beta_i = \sin(T_i, R)$ , zaś  $r_i$  oznacza ramię momentu siły  $T_i$  względem dowolnie obranego środka momentów. Z równań (x) mamy:

$$T_i = \frac{D_i}{D}; \quad T_{i+1} = \frac{D_{i+1}}{D}; \quad T_{i+2} = \frac{D_{i+2}}{D};$$

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha_{i+2} \\ \beta_i & \beta_{i+1} & \beta_{i+2} \\ r_i & r_{i+1} & r_{i+2} \end{vmatrix} = \alpha_i \beta_{i+1} r_{i+2} + \alpha_{i+1} \beta_{i+2} r_i + \\ &+ \alpha_{i+2} \beta_i r_{i+1} - r_i \beta_{i+1} \alpha_{i+2} - r_{i+1} \beta_{i+2} \alpha_i - r_{i+2} \beta_i \alpha_{i+1}; \\ D_i &= \begin{vmatrix} -R & \alpha_{i+1} & \alpha_{i+2} \\ 0 & \beta_{i+1} & \beta_{i+2} \\ -Rr & r_{i+1} & r_{i+2} \end{vmatrix} = R(\beta_{i+2} r_{i+1} - \beta_{i+1} r_{i+2}) + \\ &+ Rr(\alpha_{i+2} \beta_{i+1} - \alpha_{i+1} \beta_{i+2}) \quad (*) \text{ patrz stronę następną).} \end{aligned}$$