PROF. S. BEŁŻECKI.

Granica sprężystości belek krzywych.*)

Rzuty na osie prostokątne x, y, z przesunięć bezwzględnych punktu m (x, y, z) ciała sprężystego oznaczymy przez u, v, w. Wzory:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha_1 \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\alpha_2 \quad \frac{\partial w}{\partial z}=\alpha_3$$

wyrażają względne wydłuzenia elementów dx, dy, dz, wyodrębnionych przy punkcie m

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\beta_{zy}=\beta_1\,; \quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=\beta_{zx}=\beta_2\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\beta_{xy}=\beta_3$$

β_i są to przyrosty kątów utworzonych elementami $dzdy$, $dzdx$, $dxdy$, α_i, β_i, $(i=1, 2, 3\ldots)$ są funkje współrzędnych tj. w każdym punkcie x, y, z wydłużenia względne elementów przy tym punkcie wyobrębnionych dx, dy, dz i przyrosty kątów $dzdy$, $dzdx$, $dxdy$ odpowiadają temu punktowi i zmieniają się od punktu do punktu.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\Theta=\frac{\delta dv}{dv}$$

jest to względny przyrost elementu obszaru dv czyli przestrzenna rozszerzalność w danym punkcie m.

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=2\omega_1\,; \quad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=2\omega_2\,; \quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2\omega_3$$

są to względne średnie obroty elementu dv około osi współrzędnych.

Cauchy nazwał ω_1 ω_2 ω_3 rotations moynnes.

Pochodne $\dfrac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ możemy wyrazić tak:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha_1\,; \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\alpha_2\,; \quad \frac{\partial w}{\partial z}=\alpha_3\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\omega_3-\tfrac{1}{2}\beta_3\,; \quad \frac{\partial u}{\partial z}\,\omega_2+\tfrac{1}{2}\beta_2\,;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\omega_3+\tfrac{1}{2}\beta_3\,; \quad \frac{\partial v}{\partial z}=\omega_1-\tfrac{1}{2}\beta_1\,; \quad \frac{\partial w}{\partial x}=\omega_2-\tfrac{1}{2}\beta_2\,; \quad \frac{\partial w}{\partial y}=\omega_1+\tfrac{1}{2}\beta_1\,.$$

Dwanaście wielkości u, v, w i $\dfrac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ mogą być nieskończenie małe lub skończone, względnie niektóre mogą być skończone inne nieskończenie małe.

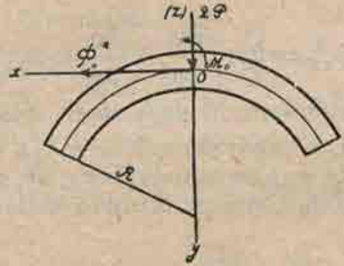
Kirchhoff a po nim *Jermakow* dowiedli, że te wielkości będą nieskończenie małe, o ile wszystkie wymiary ciała są jednego rzędu, czyli wszystkie skończone, albo wszystkie nieskończenie małe. Jeśli zaś jeden lub dwa wymiary będą znikomo małe w stosunku do reszty wymiarów, to z dwunastu wielkości u, v, w i $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x, y, z)}$ niektóre mogą być skończone

*) Wyjątek z artykulu autora w Bulletin de l'Academie des sciences de Saint-Petersbourg.

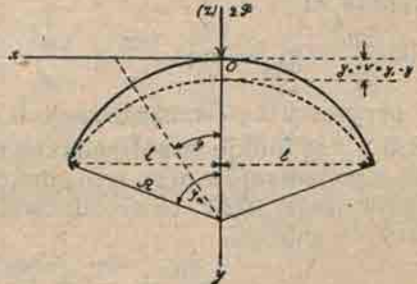
inne nieskończenie małe *). Przy uginaniu się cienkiej sprężyny przesunięcia u, v, w mogą być skończone, lecz ponieważ sprężyna pozostaje sprężystą, odkształcenia jej pozostają nieskończenie małe.

Założymy wymiary belki takimi, żeby przesunięcia u, v, w i $\frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)}$ były nieskończenie małe.

Belka krzywa o stałej grubości $2e$ w kierunku osi OZ nieokreślenie długa, której oś jest odcinkiem koła, pozostaje pod działaniem siły przyłożonej w punkcie ($y = -c$, $x = o$) (rys. 1).



Rys. 1



Rys. 2.

Jednostka długości (w kierunku osi OZ) takiej belki obciążona siłą $2P$. Równanie odkształconej osi będzie:

$$EI\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right) = M$$

gdzie $\frac{1}{\rho}$ krzywizna osi odkształconej, M-moment zginający. Momenty algebraiczne zwiększające krzywiznę będziemy uważać za dodatnie, zmniejszające — za ujemne.

Odkształcenia rosną od zera do pewnej granicznej wielkości. Uwzględnimy zjawisko odkształcenia łuku, na który działa siła zmienna $2P$. Oznaczymy rzędne osi odkształconej przez y_1 a nieodkształconej przez y wówczas $y_1 - y = \delta y = v$; to samo znakowanie stosujemy do odciętych $x_1 - x = \delta x = u$. Współrzędne odkształconej osi będą $x_1\, y_1$ lub $x + u$; $y + v$;

$$M_\varphi^R = \int_{-e}^{e} \Phi \xi \, dw$$

gdzie M_φ^R — moment gnący. Φ — naprężenie normalne do pola przekroju ξ odległość siły elementarnej Φdw od osi, w kierunku normalnym do osi, (zewnętrznej $+$, wewnętrznej $-$)

$$M_\varphi^R = -M_o^R - \Phi_o^R y_1 + Px \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(a)}$$

*) *Kirchhoff* Crelles Journal. Bd. 635. Heft 4.
Jermakow Bulletin de l'Université de Kieff (roku nie pamiętam), Dowodzenie Jarmakowa jest ogólne i ścisle matematyczne, *Kirchhoff'a* mniej ogólne. ponieważ osnute na określeniu sił sprężystych.

O ile odkształcenia są nieskończenie małe, można zamiast y_1 postawić y, przeto charakterystyczną cechą nieskończenie małych odkształceń jest możność pisania M^R_φ w postaci linjowej funkcji dowolnych współrzędnych x_1, y_1 lub x, y.

Gdy odkształcenia są skończone, to w rozpatrywanym wypadku

$$M^R_\varphi = -M^R_o - \Phi^R_o(y-y_1) + Px$$

Przy określaniu reakcji zamocowań będziemy używali wyrazu (a) w postaci

$$M^R_\varphi = -M^R_o - \Phi^R_o y + Px$$

uwzględniając zjawiska powstające przy odkształceniu, będziemy używać wyrazu (a) w postaci

$$M^R_\varphi = -M^R_o - \Phi^R_o y_1 + Px$$

przy $x = o$

$$M^R_o = -M^R_o - \Phi^R_o y_o$$

Zmienną siłę P będziemy mierzyć jednostką siły równą $\frac{EI}{R^2}$ wówczas siła P wyrazi się przez $\beta . \frac{EI}{R^2}$. Liczba β zmienia się od 0 do β_E

$$\Phi^R_o = nP; \quad M^R_o = mPR$$

n i m — są to liczby stałe zależne od warunków zamocowania końców belki i zupełnie niezależne w granicach nieskończenie małych odkształceń*) od P.

Założymy: $a = \frac{P}{EI} = \frac{\beta}{R^2}$; $\quad b = \frac{\Phi^R_o}{EI} = \frac{n\beta}{R^2}$; $\quad \frac{M^R_o}{EI} = \frac{m\beta}{R}$

Oznaczymy: $\frac{1}{R} - \frac{m\beta}{R} = \frac{1}{R}(1 - m\beta)$ przez c

podstawiając w (a) otrzymamy: $\frac{1}{\rho} = ax - by + c$

Różniczkę $d\left(\frac{1}{\rho}\right) = adx - bdy$ mnożymy przez $\frac{1}{\rho}$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{\rho} d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} ads \cos\varphi - bd\rho \sin\varphi.$$

*) Przy zamocowanych końcach n i m zależą od odkształceń osi.

Biorąc całkę w granicach od O do φ

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^2_\varphi - \left(\frac{1}{\rho}\right)^2_{\varphi=o} = 2a\sin\varphi - 2b(1-\cos\varphi) \quad . \; . \; . \quad \text{(b)}$$

albo $$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{2}{EI}\left\{P\sin\varphi - \Phi^R_o\left(1-\cos\varphi\right)\right\}$$

Czyli wyrażając słowami — przyrost krzywizny na odcinku $O-\varphi$ równa się iloczynowi przyrostu $P\sin\varphi + \Phi^R_o\cos\varphi - \Phi^R_o$ rzutu sił P i Φ^R_o na kierunek stycznej do odkształconej osi w punkcie x, y przez $\dfrac{1}{EI\left(\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{1}{\rho_0}\right):2}$ gdzie EI — moduł sztywności belki $\left(\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{1}{\rho_0}\right):2$ — średnia arytmetyczna krzywizna osi w początku i w końcu odcinka $O-\varphi$.

Równanie (b) możemy napisać inaczej:

$$2a\sin\varphi_u - 2b(1-\cos\varphi_u) = (ax - by + c)^2 - (-by_1 + c)^2$$

obierając górną granicę całkowania $\varphi = \varphi_u$ otrzymujemy:

$$2a\sin\varphi_u - 2b(1-\cos\varphi_u) = (al - bf + c)^2 - (-bq_0 + c)^2$$

albo $$\frac{2\beta}{R^2}\sin\varphi_u - \frac{2\beta n}{R^2}(1-\cos\varphi_u = \left[\left(\frac{\beta}{R^2}R\sin\varphi_n - \frac{n\beta}{R^2}R(1-\cos\varphi_u) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{R}(1-m\beta)\right)\right]^2 - \left[-\frac{n\beta}{R^2}I\eta_0 + \frac{1}{R}(1-m\beta)\right]^2$$

Oznaczymy: $\dfrac{1-\cos\varphi_u}{\sin\varphi_u} = \dfrac{f}{l}$ przez ν, $(1-n\nu)\sin\varphi_u$ przez λ, $\dfrac{y_o}{R}$ przez η_o

otrzymamy: $2\beta\lambda = [\beta\lambda + (1-m\beta)]^2 - [-ny_o\beta + (1-m\beta)]^2$

Skąd $$\beta = \frac{2ny}{2\lambda m - \lambda^2 + n^2y^2 + 2mny}$$

$$\eta = \left(\frac{1}{\beta} - m\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} - m\right)^2 + \lambda(\lambda - 2m)}$$

Przyjmując β i η za spółrzędne prostokątne otrzymamy, że powyższe równanie wyraża krzywą trzeciego rzędu

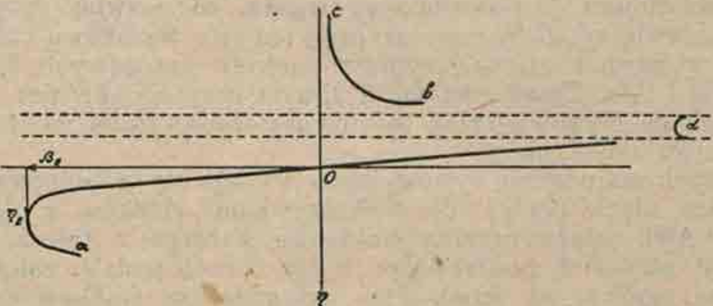
$$\frac{\partial\eta}{\partial\beta} = \eta' = \frac{n\left(\eta + \dfrac{2m-\lambda}{n}\right)\left(\eta + \dfrac{\lambda}{n}\right)}{2\{1 - \beta(m + n\eta)\}}$$

przy $\beta = \eta = o$; $\eta'_o = \dfrac{2\lambda m - \lambda^2}{2n}$ $\quad (2\lambda m > \lambda^2)$

przy $\beta = \beta_E = \dfrac{1}{m + \sqrt{2\lambda m - \lambda^2}}$; $\eta' = \infty$; przy $\beta > \beta_E$; η jest urojone.

Górna granica β, a więc i górna granica siły P, są dobrze określone. Dlatego żeby odkształcenia belki były nieskończenie małe, siła $2P = 2P_E$ nie powinna przekraczać granicy $P_E = \frac{2EI}{(m + \sqrt{2\lambda m - \lambda^2})R^2}$.

Jeśli wymiary belki są jednego rzędu, to przy $P > P_E$ w pewnej części belki granica sprężystości tworzywa będzie przekroczona; granicę P_E, z tej racji nazywam granicą sprężystości belki krzywej, której oś jest odcinkiem łuku koła, a grubość $2e$ wielkością stałą.



Rys. 3.

Krzywa ma dwie gałęzie *Oa*, *cb* (rys. 3) i w nieskończoności ($\beta = \infty$) punkt podwójny. Zjawiska zachodzące w belce, tłómaczy gałęź w ćwiartce dodatnich β i η. Asymptoty krzywej są określone przez równania:

$$\eta = -\frac{2m - \lambda}{n} \quad \text{i} \quad \eta = -\frac{\lambda}{n}.$$

W granicach $\beta = O$ i $\beta = \beta_E$ rzędne krzywej *Oa* mało się różnią od rzędnych stycznej w punkcie $\eta = \beta = O$.

(D. c. n.)

PROF. CZ. PRZYBYLSKI.

Przebudowa koszar przy ul. Nowowiejskiej w Warszawie na Ministerstwo Spraw Wojskowych.

Do zadań architektonicznych najmniej pociągających należą, niewątpliwie, wszelkie przebudowy; przebudowa prowadzi z konieczności na niebezpieczną drogę kompromisów, zmusza do niewdzięcznych wysiłków o sharmonizowanie całości i wydostanie z brył o innem przeznaczeniu nowego właściwego wyrazu.

Dawne koszary Litewskiego Pułku Gwardji, wzniesione przez rosjan w drugiej połowie XIX wieku według przyjętego szablonu, wydają się na pierwszy rzut oka jednym z najniewdzięczniejszych tematów do