

krzywą ciśnień w łuku trójprzegubowym. Krzywa ta przejść musi przez wszystkie trzy przeguby łuku, gdyż w tych punktach mimośród równy jest zeru.

Równanie $\Sigma X = 0$ w zastosowaniu do łuku obciążonego siłami pionowymi (t.j. równoległe do osi OY) przybiera postać $H_A + H_B = 0$, skąd wynika, że składowe poziome reakcyj podpór łuku w tych wypadkach są sobie równe, co do wielkości bezwzględnej, i zwrócone przeciwnie.

W razie, gdy nie wszystkie siły, działające na łuk, są równoległe do osi OY , siła H_A nie równa się naogół sile H_B .

W łuku dwuprzegubowym w razie sił równoległych do osi OY mamy do wyznaczenia, podobnie jak w trójprzegubowym, 3 składowe reakcyj, brak nam jednak trzeciego przegubu C , który w poprzednim wypadku pozwolił na ustalenie równania (503'). Zadanie zawiera więc jedną wielkość statycznie niewyznaczalną. Reakcja R_A może być tu wyznaczona, jak poprzednio, z równania (503), a reakcja R_B z równania $\Sigma Y = 0$.

W łuku bezprzegubowym mamy dla powodów, podobnych do wymienionych w poprzednim wypadku, wyznaczyć 3 wielkości statycznie niewyznaczalne.

Równania, brakujące do obliczenia łuków statycznie niewyznaczalnych otrzymujemy albo ze wzorów dla odkształceń łuku, albo zapomocą pewnych, opartych na doświadczeniach założeń upraszczających, które doprowadzają nas do tak zwanej metody równowagi granicznej.

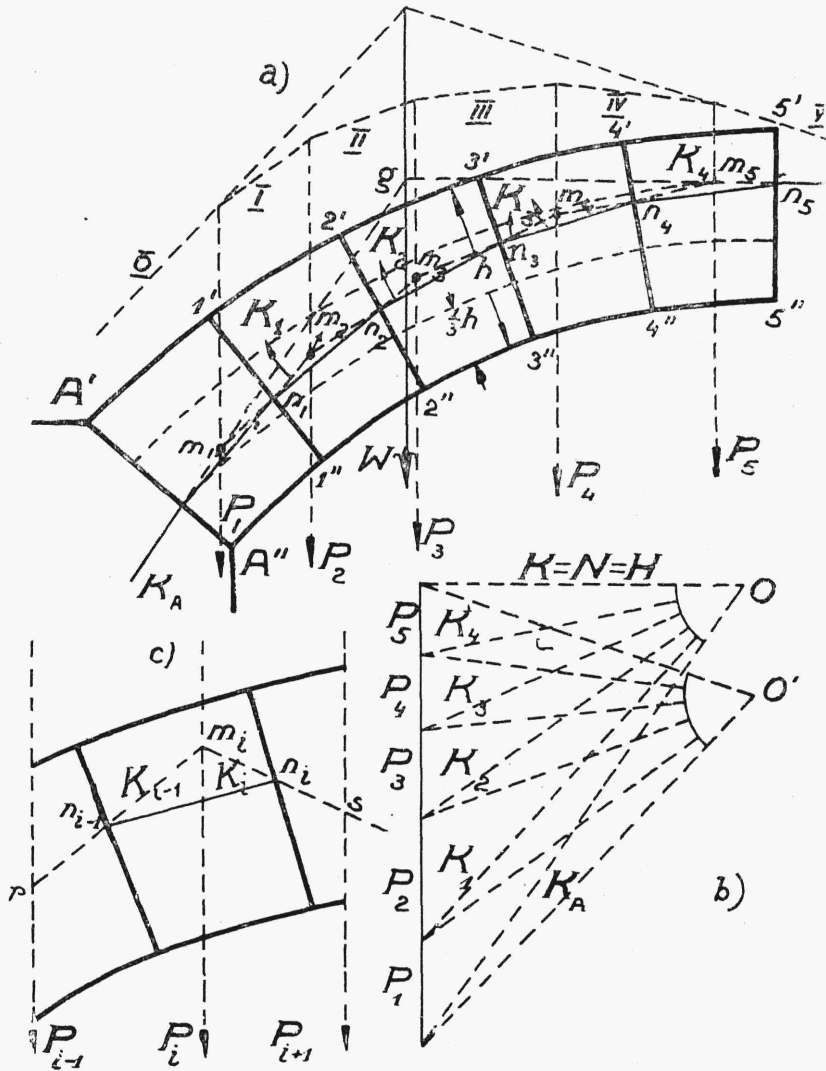
Łuki, mające podporę przesuwną, nie dają rozporu i mogą być uważane za dźwigary belkowe, gdy jednak zachodzi potrzeba obliczenia odkształceń lub naprężeń, to obliczenie musi być w tym wypadku wykonane zapomocą wzorów, wyprowadzonych dla łuków, jako prętów zakrzywionych.

W łukach, wykonanych z muru, często bywa dogodnym przedstawienie ciągłego obciążenia łuku, jako obciążenia tem samem murem, z którego łuk jest wykonany. Obciążenie sprowadzamy tu do odpowiedniej warstwy muru, leżącej na łuku, krzywą zaś ograniczającą tę warstwę od góry nazywamy krzywą obciążenia (rys. 332, § 11 tego rozdziału).

2. Wykreślny sposób obliczenia łuków i metoda równowagi granicznej.

Bierzemy łuk symetryczny i symetrycznie obciążony, którego połowa przedstawiona jest na rys. 287. Przypuśćmy, że reakcja K_A podpory A jest nam wiadoma co do swej wielkości, punktu zaczepienia i kierunku i przystępujemy do ustalenia warunków równowagi klina $A'I'I''A$ danego łuku. Na klin ten, poza reakcją K_A , działa siła zewnętrzna P_1 , (zawierająca również i ciężar własny klina) i siła K_1 wyrażająca wzajemne oddziały-

wanie na siebie klinów $A'1'1''A''$ i $1'2'2''1''$. Siłę K_1 znajdujemy z trójkąta sił $P_1K_1K_2$, w którym siłę K_1 uważamy za wiadomą co do wielkości, kierunku i punktu zaczepienia (rys. 287b). Dla równowagi klina $A'1'1''A''$ siły P_1 , K_1 i K_2 (biegun O) muszą przecinać się w jednym punkcie m_1 .



Rys. 287.

Aby znaleźć siłę K_2 , działającą na przekrój $2'2''$, wykreślamy trójkąt sił K_1, P_2, K_2 i znajdujemy punkt m_2 przecięcia się sił K_1 i K_2 .

Postępując w dalszym ciągu w ten sam sposób, znajdziemy siły K , działające na wszystkie przekroje łuku zarówno co do wielkości, jak kierunku i punktu zaczepienia. Wskazany sposób, jak widzimy, polega na wykreśleniu dla sił, działających na łuk, wieloboku sznurowego, którego biegun i punkt wyjścia jest wyznaczony przez zadanie siły K_A co do wielkości, kierunku i punktu zaczepienia. Tego rodzaju ustalenie bieguna i punktu wyjścia może być zastąpione przez zadanie kierunków i punktów zaczepienia obydwóch reakcyj łuku bez podania jednak ich wielkości (zadanie to omówione jest w rozdziale II, 3, jako zadanie wieloboku sznurowego, którego 2 boki są równoległe do dwóch danych kierunków). Wreszcie wielobok sznurowy może być przeprowadzony jednoznacznie, gdy dane są na łuku trzy punkty, przez które ma on być przeprowadzony.

Wykreślne sposoby obliczenia łuków opierają się na tym ostatnim zadaniu wieloboku sznurowego t. j. sprowadzają się do przeprowadzenia wieloboku sznurowego przez trzy dane punkty łuku.

Punkty n przecięcia się wieloboku sznurowego z poszczególnymi przekrojami łuku dają linię ciśnień w łuku (szczegół konstrukcji geometrycznej przedstawiony jest na rys. 287c). Wielobok sznurowy odgrywa w ten sposób rolę linii obwijającej dla linii ciśnień. Krzywa obwijająca daje kierunek sił K , a krzywa ciśnień punkty ich zaczepienia. Przy nieskończonej małej długości klinów łuku krzywa obwijająca pokrywa się z krzywą ciśnień, a styczna do krzywej ciśnień daje kierunek działania siły K .

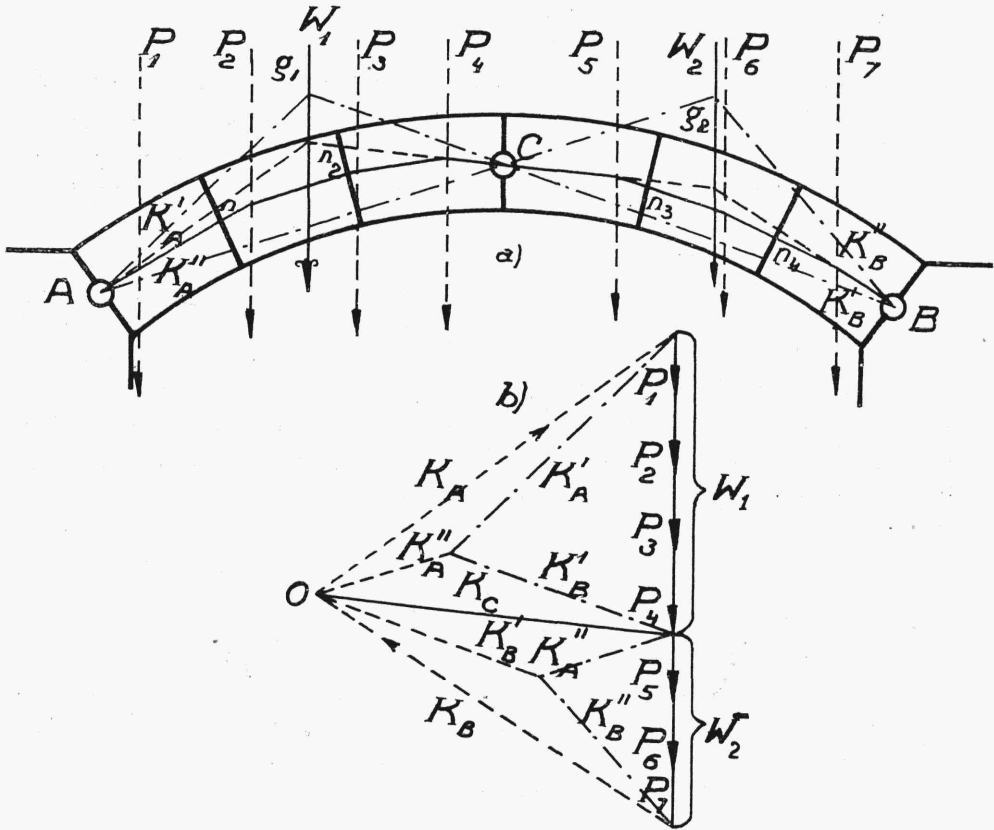
W łuku trójprzegubowym trzy znane punkty krzywej ciśnień odpowiadają trzem przegubom, wobec czego zadanie sprowadza się do przeprowadzenia wieloboku sznurowego sił, działających na łuk, przez jego przeguby.

Wykonywamy to w następujący sposób:

Uważamy narazie, że łuk przegubowy (rys. 288) obciążony jest tylko w granicach AC , t. j. między lewym węzłowiem a zwornikiem, i znajdujemy wypadkową W_1 sił działających na tę część łuku (wyznaczenie położenia siły W_1 nie jest wskazane na rysunku). Aby pod wpływem sił działających na lewą część łuku, prawa część CB jego znajdowała się w równowadze, koniecznym jest, aby siła, wyrażająca działanie części AC na część CB , oraz reakcja K'_B podpory B , jako jedyne siły działające na prawą część łuku, były skierowane wzdłuż jednej prostej. Wynika stąd, że reakcja K'_B przejść musi przez przegub C i że linią jej działania będzie prosta BC . Znajdujemy punkt g_1 przecięcia prostej CB z siłą W_1 i łączymy go ze środkiem lewego przegubu A . Otrzymana tą drogą prosta Ag_1

będzie linią działania reakcji K'_A lewego przegubu. Na rys. 288b przedstawiony jest trójkąt sił K'_A, K'_B, W_1 , z którego wyznaczamy obie reakcje podpór łuku pod wpływem obciążenia lewej jego części.

W dalszym ciągu odrzucamy obciążenie lewej części łuku, uwzględniając jedynie obciążenie jego prawej części, i sposobem analogicznym do poprzednio wyłożonego znajdujemy reakcje K''_A i K''_B obydwóch przegubów łuku pod działaniem nowego obciążenia (trójkąt K''_A, K''_B, W_2 na rys. 288b).



Rys. 288.

Uwzględniamy wreszcie całkowite obciążenie łuku. Pod jego wpływem na przegub C działają dwie siły K'_B i K''_A , jako rezultaty obciążenia każdej z dwóch części łuku. Wypadkową K_C sił K'_B i K''_A znajdujemy z odpowiedniego trójkąta sił na rys. 288b.

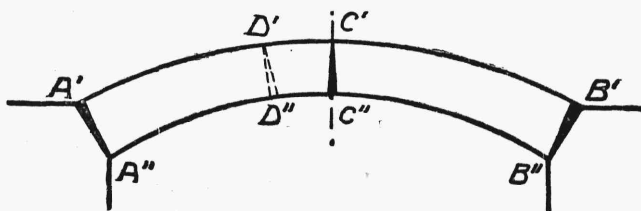
Trójkąty sił K'_A, K''_A, K_A i K'_B, K''_B, K_B (rys. 288b) dają nam ostateczne wartości reakcyj przegubów A i B przy całkowitem obciążeniu łuku.

Przeprowadzamy wreszcie dla bieguna O z punktu A wielobok sznurowy dla obciążenia całego łuku (wskazany na rysunku). Wielobok ten przejdzie również przez punkty (przeguby) B i C i będzie odgrywał rolę krzywej obwijającej dla krzywej ciśnień łuku trójprzegubowego. Łącząc ze sobą punkty n przecięcia wieloboku sznurowego z odpowiednimi przekrojami łuku, znajdujemy również i samą krzywą ciśnień (niewskazaną na rysunku), poczem zadanie może być uważane za rozwiązane.

W rozumowaniach, dotyczących łuku trójprzegubowego, nigdzie nie korzystaliśmy z tego, że punkty A, B i C znajdują się w środku odpowiednich przekrojów, wobec czego cały umotywowany wyżej sposób postępowania nie uległby zmianie i w wypadku, gdyby, przy wiadomem położeniu krzywej ciśnień w trzech danych przekrojach, krzywa ta przechodziła nie przez środki przekrojów, lecz przez jakieś inne ich punkty.

Ustalenie w łuku bezprzegubowym kamiennym lub betonowym trzech punktów, przez które ma przejść krzywa ciśnień, odbywa się w sposób przybliżony najczęściej na podstawie tak zwanej metody równowagi granicznej.

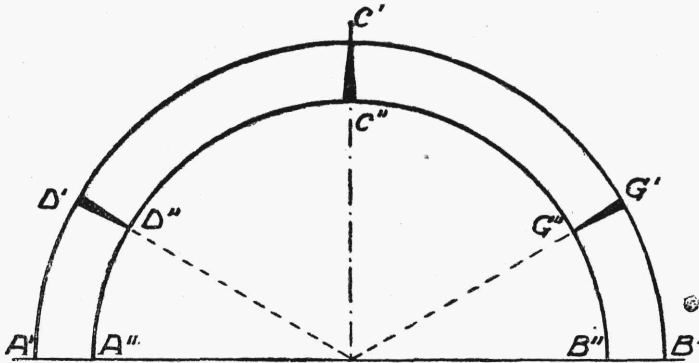
Metoda równowagi granicznej opiera się na obserwacjach, dokonanych w ciągu szeregu lat nad załamywaniem się bezprzegubowych łuków kamiennych, symetrycznych i symetrycznie obciążonych. Rozporządzamy tu następującym materiałem doświadczalnym.



Rys. 289.

1°. Łuki symetryczne i symetrycznie obciążone, mniej wyniosłe t. j. takie, w których stosunek strzałki do rozpiętości, liczonych dla osi łuku, (teoretycznych) jest mniejszy od $\frac{1}{3,5}$ ($\frac{f}{l} < \frac{1}{3,5}$), ulegają załamaniu się w ten sposób, że przekrój zwornikowy rozwiera się od strony podniebienia, zaś oba przekroje węzłowiowe (ogólnie mówiąc, przekroje pęknięcia) rozwierają się od strony grzbietu (rys. 289).

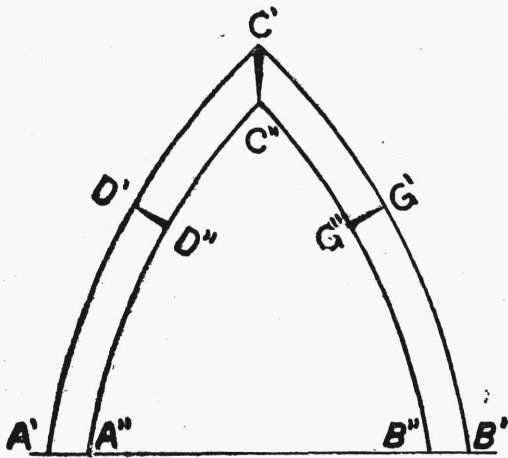
2°. W łukach bardziej wyniosłych, t. j. dla stosunku $\frac{f}{l} > \frac{1}{3,5}$ (do $\frac{f}{l} = \frac{1}{2}$) załamanie odbywa się w ten sposób, że przekrój zwornikowy roz-wiera się, jak poprzednio, od strony podniebienia, zaś, zamiast przekrojów wezłowiowych, rozwarciu od strony grzbietu ulegają inne przekroje pęknięcia, położone zwykle w ten sposób, że tworzą one kąty bliskie do 60° z przekrojem zwornikowym (rys. 290).



Rys. 290.

3°. W łukach strzelistych z załamanem w zworniku ($\frac{f}{l} > 1$) ma

miejsce rozwarcie się przekroju zwornikowego od strony grzbietu i rozwarcie się dwóch symetrycznie położonych przekrojów pęknięcia od strony podniebienia (rys. 291).



Rys. 291.

Wyżej wymienione obserwacje dokonane były na łukach, w których wytrzymałość zaprawy na wyciąganie jest tak mała, że nie wchodzi w rachubę. Co się tyczy oporu zaprawy przy przesuwaniu się po sobie poszczególnych klinów łuku, to uważamy ten opór za dostateczny, aby się nie obawiać zniszczenia łuku,

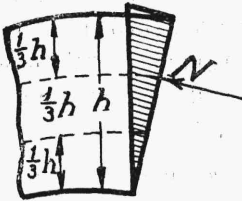
wywołanego przesuwaniem się klinów dla braku tarcia między nimi.

Skoro łuk nie posiada żadnej wytrzymałości na wyciąganie, to rozwarcie się jego przekrojów następuje w tych miejscach, gdzie powstają naprężenia wyciągające. Naprężenia w łukach kamiennych (a często i żelaznych) obliczamy ze wzoru dla nierównomiernego ściskania (por. rozdz. X, 2):

$$\sigma = \frac{N}{h} \left(l \pm \frac{6\xi}{h} \right) \quad (504)$$

w którym N oznacza siłę podłużną, normalną do danego przekroju łuku, ξ mimośród tej siły i h wysokość przekroju łuku przy jego szerokości równej 1.

Zakładając we wzorze (504) $\xi = \frac{1}{6} h$, otrzymujemy, że $\sigma = 0$, co znaczy, że przy zaczepieniu siły podłużnej N w danym przekroju w odległości $\frac{1}{3} h$ od jednej z krawędzi, na drugiej krawędzi powstają naprężenia wyciągające (rys. 292). Jeżeli więc w zworniku łuku ma miejsce rozwarcie od strony podniebienia, znaczy to, że siła podłużna zaczepiona jest w tym przekroju w odległości $\frac{1}{3} h$ od grzbietu, a jeżeli w przekrojach wezłowiących rozwarcie ma miejsce od strony grzbietu, odpowiada to zaczepieniu siły podłużnej w odległości $\frac{1}{3} h$ od podniebienia. Dla uniknięcia naprężeń wyciągających musi więc siła podłużna być zaczepiona w środku trzeciej części wysokości (grubości) przekroju poprzecznego łuku.



Rys. 292.

Skoro trzy przekroje rozwierają się w chwili załamania się łuku, to mamy tu w tym momencie trzy znane punkty zaczepienia siły podłużnej, czyli trzy znane punkty, przez które ma przejść zarówno wielobok sznurowy sił działających na łuk, jak również linja ciśnień w tym łuku. W punktach tych (rys. 287) moment siły N równy jest zeru, gdyż siła podłużna przez te punkty przechodzi. Momenty zginające w odpowiednich przekrojach nie są jednak równe zeru, gdyż $M_\alpha = N_\alpha \cdot \xi$ jest tu różne od zera.

Metoda równowagi granicznej przyjmuje, że skoro bezpieczeństwo łuku jest zapewnione w chwili przejścia siły podłużnej w przekrojach pęknięcia przez punkty, odpowiadające równowadze granicznej łuku, t.j. równowadze, poprzedzającej załamanie się, to będzie ono również zapewnione i przy innych położeniach siły podłużnej w tych przekrojach.

Sprawdzenie, czy przy danych położeniach siły podłużnej w przekrojach pęknięcia łuk jest zabezpieczony przed załamaniem, polega na prze-

konaniu się, czy wysokość wszystkich przekrojów łuku jest dostateczna na to, aby krzywa ciśnień nigdzie nie wyszła ze środkowej trzeciej części tej wysokości, czyli na to, aby nigdzie nie mogło nastąpić rozwarcie się łuku, wreszcie na sprawdzeniu, czy naprężenia ściskające nie przekraczają dopuszczalnych.

Jak widzimy, metoda równowagi granicznej nie czyni żadnych założeń, co do własności sprężystych łuków.

W razie, gdy przekroje pęknięcia pokrywają się z przekrojami wezłowiowemi, wyznaczenie krzywej ciśnień w łuku bezprzegubowym odbywa się podobnie, jak w łuku trójprzegubowym, przyczem w łuku symetrycznym i symetrycznie obciążonym natrafiamy na pewne uproszczenia, gdyż kierunek siły podłużnej w zworniku jest poziomy. Ten ostatni wypadek rozważony jest na rys. 287.

Wobec symetrii zadania rozpatrujemy tu tylko połowę łuku. Znajdujemy przedewszystkiem wypadkową sił W , działających na tę połowę. W tym celu wykreśliamy wielobok sił odpowiadający biegunowi O' i wielobok sznurowy \overline{OI} II III IV V. Krzywa ciśnień i obwijający ją wielobok sznurowy ma przejść przez punkty n_0 i n_5 , z których pierwszy jest oddalony o $\frac{1}{3} h$ a drugi o $\frac{2}{3} h$ od podniebienia. Przeprowadzamy przez punkt n_5 prostą

normalną do przekroju zwornikowego, jako kierunek siły N , i znajdujemy punkt g przecięcia się tej prostej z siłą W . Punkt g łączymy z punktem n_0 , przyczem prosta n_0g da nam kierunek działania reakcji K_A lewej podpory. Wielkości tej podpory znajdujemy z trójkąta sił W, K_A, H . Przecięcie się kierunków $N = H$ i K_A da nam biegun O . Odpowiednio do tego bieguna przeprowadzamy wielobok sznurowy $n_0m_1m_2m_3m_4m_5n_5$ i linię ciśnień $n_0n_1n_2n_3n_4n_5$ (na rysunku linja pełna).

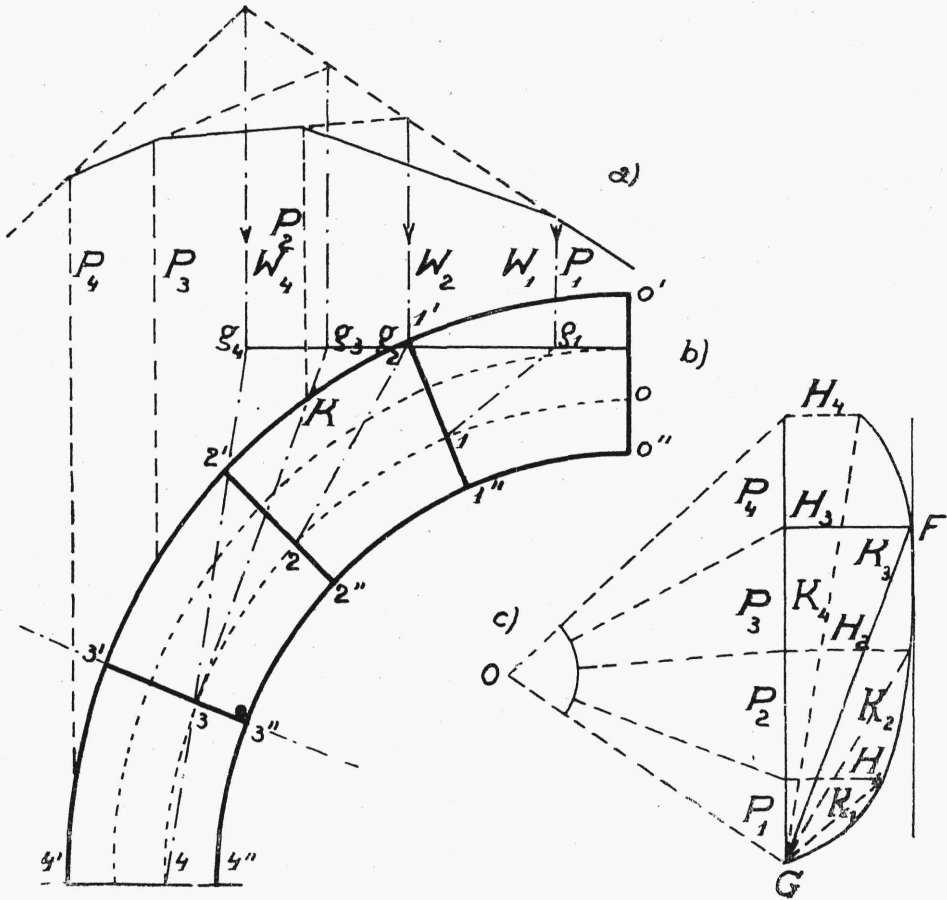
Z warunków równowagi rozpatrywanej połowy łuku wynika, że przy obciążeniu pionowem, N w zworniku równa się rozporowi łuku H .

W wypadku gdy $\frac{f}{l} > \frac{1}{3,5}$, przed wykreśleniem linii ciśnień musi być znaleziony przekrój pęknięcia łuku. Robimy to na rys. 293 dla połowy łuku symetrycznego i symetrycznie obciążonego.

Wykreśliamy wielobok sił i wielobok sznurowy dla obciążenia połowy łuku i znajdujemy linie działania kolejnych wypadkowych W_1, W_2, W_3 i t.d. sił działających odpowiednio na części łuku $0'1'1''0''$, $0'2'2''0''$, $0'3'3''0''$ i t.d.

Przeprowadzamy w zworniku podobnie, jak w zadaniu na rys. 287, przez punkt oddalony o $\frac{2}{3}h$ od podniebienia linię siły $N = H$ i znajdujemy punkty g przecięcia się tej prostej z kolejnymi wypadkowami W .

Punkty g łączymy z punktami poszczególnych przekrojów łuku, odda-



Rys. 293.

lonami o $\frac{1}{3}h$ od podniebienia. Każda z prostych g_1, g_2 i t.d. oznacza kierunek, któryby miała siła K , działająca na dany przekrój $1'1'', 2'2''$ i t.d. gdyby on był przekrojem pęknięcia. Z trójkątów sił przedstawionych na rys. 293c znajdujemy wielkości sił K_1, K_2 i t.d. oraz odpowiednich sił $N = H$.

Uzasadnimy teraz, iż z pośród poszczególnych przekrojów łuku ten jest przekrojem pęknięcia, w którym kierunek siły K jest styczny do krzywej, ograniczającej od dołu środkowe trzecie części wysokości poszczególnych przekrojów łuku. Przypuśćmy, że prosta g_33 jest styczną do krzywej 01234. Żaden inny przekrój poza 3'3" nie może tu być przekrojem pęknięcia, gdyż byłby on przecięty przez prostą g_33 powyżej $\frac{1}{3}h$ od podniebienia, co przeczyłoby określeniu. Z drugiej strony, o ile przekrój 3'3" jest przekrojem pęknięcia, wówczas prosta g_33 musi być styczną do krzywej 01234, gdyż w przeciwnym razie każdy przekrój łuku w części jego 34 byłby przez tę prostą przecięty poniżej $\frac{1}{3}h$, więc przekrój 3'3" nie mógłby być przekrojem pęknięcia.

Po znalezieniu przekroju, w którym jedna z prostych g_11, g_22 i t.d. jest styczną do krzywej 01234, przeprowadzamy do tej prostej równoległą z punktu G na wieloboku sił, poczem znajdujemy punkt F przecięcia się tej prostej z krzywą, łączącą końce wszystkich odcinków H , obliczonych dla poszczególnych przekrojów łuku (rys. 293c): Przeprowadzamy na wykresie 293c prostą H , odpowiadającą punktowi F i w ten sposób znajdujemy wielkość rozporu dla danego obciążenia. Znając właściwe H , wykreśliamy linię ciśnień, podobnie jak w poprzednich zadaniach. W danym wypadku przekrojowi pęknięcia 3'3' odpowiada rozpór H_3 .

Punkt F możemy również znaleźć, przeprowadzając do krzywej FG styczną równoległą do kierunku wypadkowej W .

W razie niesymetrycznego obciążenia łuku o małej wyniosłości, krzywą ciśnień należy przeprowadzić przez dwa przekroje wezglowiowe i trzeci przekrój pęknięcia, położony nie w zworniku, lecz względem niego przesunięty do $D'D''$ (rys. 289). Ten ostatni przekrój musi być wyznaczony drogą prób w sposób analogiczny do przytoczonego w zadaniu poprzednim.

Dla łuków strzelistych obliczenie metodą równowagi granicznej możnaby przeprowadzić w sposób podobny do obliczeń przytoczonych, przy uwzględnieniu właściwego rodzaju załamywania się tych łuków.

Obliczenie łuków bezprzegubowych, wykonane powyżej wykreślić na podstawie metody równowagi granicznej, mogłoby być wykonane i w sposób analityczny, jak to zostało wskazane w § 1 dla łuku trójprzegubowego; nie bywa to jednak naogół stosowane.

Naprężenia w łukach obliczamy ze wzoru (504), który wypływa też ze wzorów podanych niżej (§ 3). Dopuszczalne naprężenia dla łuków trójprzegubowych, obliczonych wykreślić, podlegają zasadom ogólnym, w łukach jednak bezprzegubowych, obliczonych na podstawie metody równowagi granicznej, nie należy, dla ostrożności, przyjmować współczynnika bezpieczeństwa niższego od 20.

Przy obciążeniu ruchomem na łukach, obliczanych metodą równowagi granicznej, zwykle wykreślamy linię ciśnień w trzech wypadkach następujących:

1^o, przy obciążeniu całego łuku, przeprowadzając ją w zworniku w odległości $\frac{2}{3} h$, a w węzłowiach w odległości $\frac{1}{3} h$ od podniebienia,

2^o, przy obciążeniu całego łuku, przeprowadzając ją przez środki przekroju zwornikowego i przekrojów węzłowiowych,

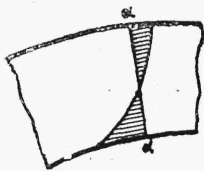
3^o, przy obciążeniu połowy łuku, przeprowadzając ją w zworniku przez środek przekroju, w węzłowiach od strony obciążenia w odległości $\frac{1}{3} h$ od podniebienia i w drugim węzłowiach w odległości $\frac{2}{3} h$ od podniebienia.

Przy wykreślaniu wymienionych trzech linii ciśnień stawiamy sobie za warunek, aby żadna z nich nie wychodziła ze środkowej trzeciej części wysokości przekroju łuku.

Pomysł zastosowania metody równowagi granicznej do łuków należy do Navier'a, zaś oparte na tej metodzie obliczenie łuków zostało rozposzechnione przez Méry'ego, głównie we Francji.

3. Odształcenia nieskończenie małego odcinka pręta zakrzywionego i rozkład naprężeń σ .

Kiedy była mowa o belkach prostych, przyjęcie założenia przekrojów płaskich doprowadzało do linowego rozkładu naprężeń normalnych. To samo miało miejsce przy obliczeniu słupów na ściskanie mimośrodowe. W obliczeniu łuków założenie przekrojów płaskich nie pociąga za sobą linowego rozkładu naprężeń i dlatego musimy naogół zdecydować się na wyrzeczenie się albo założenia płaskich przekrojów, albo też linowego rozkładu naprężeń. Podczas gdy to ostatnie założenie doprowadza nas do wzoru (504), założenie pierwsze wymaga wzorów znacznie bardziej złożonych, doprowadzając w danym przekroju łuku do rozkładu naprężeń np. w rodzaju przedstawionego na rys. 294.



Rys. 294.

Badanie naprężeń w prętach zakrzywionych, dokonane metodą optyczną¹⁾, wykazuje większą zgodność z doświadczeniem założenia płaskich przekrojów²⁾. W dalszym ciągu będziemy też opierać się na tym właśnie założeniu, jednak wykażemy, że w pewnych wypadkach szczególnych, mających znaczenie praktyczne, można uciec się do uproszczeń, które w rezultacie pozwolą i w tych wypadkach również korzystać ze wzoru (504).

¹⁾ Vid. Rozdz. X, 8.

²⁾ Timoszenko „Kurs soprotiwlenja matierjałow“, 1913 str. 325.